**Ensino de logaritmos por meio de investigações
matemáticas em sala de aula**

Daniel Cergoli

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO INSTITUTO DE
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE
SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM CIÊNCIAS**

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro

São Paulo, fevereiro de 2017

Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 12/12/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro (orientadora) – IME - USP
- Profa. Dra. Cristina Cerri – IME - USP
- Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti – UFSCar

Agradecimentos

Agradeço a Deus e a todas as pessoas que tornaram possível a realização deste trabalho. Em especial, agradeço à minha esposa e à minha família que sempre me apoiaram e a todos os professores que passaram pela minha vida, desde minha alfabetização até a conclusão desta pós-graduação, sem os quais minhas formações estudantil, pessoal e profissional não teriam ocorrido com excelência.

Agradeço à Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro, minha professora durante a graduação e orientadora deste mestrado, que sempre me auxiliou em tudo o que precisei para a realização desta pesquisa. Por fim, agradeço ao Prof. Nilo Gonçalves Barbedo, que aplicou uma parte da minha pesquisa junto a alguns de seus alunos de Ensino Médio.

Resumo

CERGOLI, D. **Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula**. Dissertação de Mestrado – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Neste trabalho são apresentadas duas propostas de sequências didáticas para ensino de logaritmos. A primeira delas é destinada ao aperfeiçoamento de professores de Matemática e a outra, para alunos de Ensino Médio. Tais sequências foram desenvolvidas com base em pesquisas realizadas pelo Prof. João Pedro da Ponte sobre o processo de investigação matemática.

A sequência didática para professores foi aplicada no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (CAEM – IME – USP). Já a sequência para alunos foi aplicada em uma escola da rede estadual situada no município de São Paulo. Ambas foram analisadas sob os pontos de vista da eficiência e adequação, bem como da clareza das ideias apresentadas.

As sequências didáticas têm como ponto de partida a observação das propriedades comuns a várias tabelas, cada uma contendo uma progressão geométrica ao lado de uma progressão aritmética. Tais propriedades caracterizam o que virá a ser definido como logaritmo. Essa introdução ao conceito de logaritmo é diferente da usual, que se baseia na solução de uma equação exponencial.

O processo de investigação matemática visa a um aprendizado eficaz por parte do aluno, proporcionado por atividades que conduzam o aluno, de forma gradual, a fazer descobertas, formular conjecturas e buscar validações. Tais investigações são coordenadas e supervisionadas pelo professor, cujo papel é fundamental no processo de construção do conhecimento.

Palavras-chave: Logaritmo, Tabelas de Logaritmos, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Investigação Matemática.

Abstract

CERGOLI, D. Teaching Logarithms through Mathematical Investigations in the Classroom. Dissertação de Mestrado – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

This dissertation presents two didactic sequences for teaching and learning logarithms. One of them aims at Mathematics teachers and is designed for improving their knowledge. The other sequence is meant to be used on high school students. Both didactic sequences were developed based upon research carried out by Professor João Pedro da Ponte on Mathematical Investigations.

The didactic sequence for teachers was applied at CAEM – IME – USP. The one for students was applied at a state school in the city of São Paulo. They were analysed from the points of view of efficiency and of adequacy, as well as of the clarity of the presented ideas. The didactic sequences start with the observation of properties common to multiple tables, each containing a geometric progression side by side with an arithmetic progression. The observed properties characterize what will be later defined as logarithm. Such introduction to the concept of logarithm is different from the usual, which is based on the solution of an exponential equation.

The Mathematical Investigation process aims at an effective learning by the students, which is provided by activities that lead the student to gradually make discoveries, formulate conjectures, and search for validations. These investigations are coordinated and supervised by the teacher, whose role in the knowledge construction process is fundamental.

Keywords: Logarithms, Logarithm Table, Arithmetic Progression, Geometric Progression, Mathematical Investigation.

Sumário

Lista de Abreviaturas.....	ix
Lista de Figuras	xi
1 - Introdução.....	1
1.1 - Considerações Preliminares.....	1
1.2 - Objetivos da Pesquisa.....	4
1.3 - Desenvolvimento da Pesquisa	5
2 - Fundamentação Teórica	7
2.1 - A Investigação Matemática em Documentos Oficiais	7
2.2 - Sobre a Formação de Professores	8
2.3 - Investigações Matemáticas	10
2.4 - O Conhecimento do Professor	13
2.5 - O Nosso Trabalho Dentro do Referencial Estudado	13
3 – Uma Sequência Didática para Professor: Aplicação e Análise	15
3.1 - Perfil dos Professores Participantes da Oficina.....	15
3.2 - Sequência Didática para Professores (SDP ₁) e Análise das Atividades Aplicadas	19
I - Progressão Geométrica × Progressão Aritmética.....	20
II - Sempre Funciona?	23
III - Logaritmos.....	26
IV - Base de Logaritmos	28
V - Aproximações.....	31
VI - Uma Aplicação à Matemática Financeira	35
VII - Introdução às Funções Logarítmicas	38
3.3 – Comentários Finais sobre a SDP ₁	46
3.4 - Finalização da Oficina	46
4 - Sequência Didática Reformulada para Professores (SDP₂)	49
4.1 - Apresentação da SDP ₂	50
I - Significado de Raiz Quadrada de um Número Positivo	50

II - Significado de Raiz Cúbica	51
III - Propriedades de Potência.....	52
IV - Progressão Geométrica × Progressão Aritmética.....	57
V - Sempre Funciona?	59
VI - Logaritmos	61
VII - Definição Preliminar de Logaritmo	62
VIII - Base de Logaritmos	64
IX - Definição de Logaritmo	67
X - Aproximações.....	68
XI - Uma Aplicação à Matemática Financeira	70
XII - Introdução às Funções Logarítmicas	73
XIII - A Inversa da Função Logarítmica	81
 5 - Sequência Didática para Alunos	85
5.1 - Aplicação da SDA	86
I - Progressão Geométrica × Progressão Aritmética.....	86
II - Sempre Funciona?	95
III - Logaritmos.....	97
5.2 - Comentários Finais sobre a SDA	110
 Considerações Finais	113
Apêndice A	115
Apêndice B	117
Referências Bibliográficas	119
Anexo I - Questionário sobre o Perfil do Professor Participante da Oficina.....	123
Anexo II - Tabulação do Questionário sobre o Perfil do Professor	127
Anexo III - Termos de Consentimento Livre e Esclarecido para Aplicação da SDA	131

Lista de Abreviaturas

CAEM-IME-USP	Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
SDP ₁	Sequência Didática para Professores 1
SDP ₂	Sequência Didática para Professores 2
SDA	Sequência Didática para Alunos

Lista de Figuras

01 - Definição de logaritmo como sendo a incógnita em uma equação exponencial	2
02 - Processo de investigação matemática	12
03 - Professores por instituição de ensino pública ou privada na oficina do CAEM.....	15
04 - Turmas nas quais os professores da oficina lecionam.....	16
05 - Períodos do dia em que os professores da oficina trabalham.....	16
06 - Quantidade de horas trabalhadas pelos professores da oficina	17
07 - Tempo de magistério dos professores da oficina	17
08 - Produto de dois números a partir das propriedades das tabelas de PA e PG	27
09 - Medida do lado de um quadrado como representação da raiz quadrada de sua área.....	50
10 - Medida do lado de um quadrado como representação da raiz quadrada de sua área.....	50
11 - Medida da aresta de um cubo como representação da raiz cúbica de seu volume.....	51
12 - Gráfico da função $y = 2^x$ com domínio racional	54
13 - Gráfico da função $y = 2^x$ com domínio real	54
14 - Obtenção do valor de $2^{\sqrt{3}}$ a partir de aproximações	56
15 - Produto de dois números a partir das propriedades das tabelas de PA e PG	63
16 – Resposta de um aluno à atividade 1 da SDA.....	89
17 - Resposta de um aluno à atividade 1 da SDA	89
18 - Resposta de um aluno à atividade 1 da SDA	90
19 - Resposta de um aluno à atividade 2 da SDA	91
20 - Resposta de um aluno à atividade 2 da SDA	91
21 - Resposta de um aluno à atividade 3 da SDA	94
22 - Resposta de um aluno à atividade 3 da SDA	94
23 - Resposta de um aluno à atividade 6 da SDA	101
24 - Resposta de um aluno à atividade 7 da SDA	102
25 - Resposta de um aluno à atividade 7 da SDA	102
26 - Resposta de um aluno à atividade 8 da SDA	103
27 - Resposta de um aluno à atividade 9 da SDA	105
28 - Gráfico esboçado por um aluno em resposta à atividade 9 da SDA	106
29 - Gráfico esboçado por um aluno em resposta à atividade 9 da SDA	106
30 - Gráfico esboçado por um aluno em resposta à atividade 10 da SDA	108
31 - Resposta de um aluno à atividade 10 da SDA	108

32 - Resposta de um aluno à atividade 11 da SDA	110
33 – Problemas com o sinal de igualdade.....	111

Capítulo 1

Introdução

1.1 – Considerações Preliminares

Aprender e ensinar Matemática são desafios para a maioria dos alunos e, consequentemente, para os professores, tanto do ponto de vista do conteúdo matemático quanto do pedagógico. Grande parte dos alunos da Educação Básica apresenta dificuldades com matemática elementar. O relatório intitulado *Low-Performing Students. Why They Fall Behind and How To Help Them Succeed* (*Alunos de baixo desempenho: por que ficam para trás e como ajudá-los?*), redigido pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) e baseado em dados de 2012 do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), mostra que, dos 2,7 milhões de alunos de 15 anos avaliados no Brasil, 1,9 milhão tinham dificuldades em matemática básica. Dos alunos brasileiros que foram avaliados, cerca de 67% estão abaixo do nível 2, em uma escala de vai de 1 a 6, e menos de 1% desses alunos está no patamar 6. Os estudantes brasileiros obtiveram 391 pontos na escala apresentada pelo PISA, enquanto que a média obtida pelos estudantes que vivem nos 34 países-membros da OCDE foi de 494 pontos.

O tema desta pesquisa é o ensino-aprendizagem de logaritmos, que é um assunto mal compreendido por alunos de Ensino Médio. A nosso ver, a potencialidade e a importância do tema, por vezes, não são exploradas de forma satisfatória pelos professores.

O principal objetivo de nosso trabalho é apresentar uma proposta de ensino de logaritmos que foge do método tradicional, tendo a investigação matemática como metodologia norteadora.

Em geral, os logaritmos são apresentados aos alunos por meio de uma definição abstrata, como sendo a incógnita em uma equação exponencial. Vejamos o exemplo da figura 1, na qual a definição foi extraída de (DANTE, 2010, p.119).

Definição de logaritmo de um número

Considere as seguintes questões. A que número x se deve elevar:

- a) o número 2 para se obter 8?
- b) o número 3 para se obter $\frac{1}{81}$?

a) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

Esse valor 3 denomina-se *logaritmo* do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$.

Assim:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

Perceba que o logaritmo é um expoente.

b) $3^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

O valor -4 chama-se *logaritmo* do número $\frac{1}{81}$ na

base 3 e é representado por $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

Dados os números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se *logaritmo* de b na base a , ou seja,

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos e } a \neq 1.$$

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c$	$a^c = b$
$\begin{cases} c: \text{logaritmo} \\ a: \text{base do logaritmo} \\ b: \text{logaritmando} \end{cases}$	$\begin{cases} b: \text{potência} \\ a: \text{base da potência} \\ c: \text{expoente} \end{cases}$

Figura 1

Segundo LIMA (1996), apesar da popularidade dessa definição, ela apresenta três inconvenientes, sendo um deles que:

[...] ela requer que se estudem preliminarmente as propriedades da função exponencial, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y \cdot a^z = a^{y+z}$ para $y, z \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Tais preliminares envolvem dificuldades técnicas que conduzem ao seguinte dilema: ou passar por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que deixa a desejar do ponto de vista da honestidade científica – ou esgotar a paciência do aluno (ou leitor) com longos detalhes rebarbativos. (LIMA, 1996, p.2 introdução)

Nossa proposta é introduzir o estudo de logaritmos por meio de tabelas, resgatando a ideia original de sua criação. Além disso, a proposta está em consonância com algumas

pesquisas em Educação Matemática que tratam da elaboração de atividades de investigação para desenvolver o conhecimento matemático.

Desde 2008 sou educador do CAEM-IME-USP¹ e, por trabalhar nesse Centro, decidimos que nosso trabalho teria um olhar atento ao conhecimento matemático do professor, visto que esse conhecimento influencia na qualidade de seu modo de ensinar e, consequentemente, no desempenho de seus alunos.

No CAEM, dentre outras tarefas, ministramos oficinas para professores dos ensinos fundamental e médio e temos a oportunidade de perceber que muitos professores têm dificuldade em ministrar a disciplina de forma que desperte curiosidade e vontade de aprender em seus alunos. Em geral, os professores procuram o CAEM em busca de formas para tornar suas aulas interessantes e motivadoras.

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), para poder atuar de modo eficiente, o professor precisa, além de ter o indispensável conhecimento do conteúdo matemático, saber transformar aquele conteúdo em atividades de aprendizagem. Também o professor precisa conhecer seus alunos e o ambiente escolar para poder estabelecer objetivos de aprendizagem dentro daquele tema que sejam ao mesmo tempo ambiciosos, no sentido de ajudar a promover um crescimento no conhecimento e maturidade do aluno, bem como realista, no sentido de perceber as limitações de tempo, de condições e de conhecimento prévio apresentado pela turma.

A formação do professor é um processo contínuo. Mesmo depois de graduado, o professor deve se desenvolver não apenas com cursos de aperfeiçoamento e leituras, mas também com reflexões sobre sua própria prática.

A formação continuada é uma exigência nas atividades profissionais do mundo atual, não podendo ser reduzida a uma ação compensatória de fragilidades da formação inicial. O conhecimento adquirido na formação inicial se reelabora e se especifica na atividade profissional para atender a mobilidade, a complexidade e a diversidade das situações que solicitam intervenções adequadas. Assim, a formação continuada deve desenvolver uma atitude investigativa e reflexiva, tendo em vista que a atividade profissional é um campo de produção do conhecimento, envolvendo aprendizagens que vão além da simples aplicação do que foi estudado". (BRASIL, 2008, p. 8)

1- O CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática "João Affonso Pascarelli") do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo é um órgão de extensão universitária criado em 1985. Seu objetivo fundamental é prestar serviços referentes ao aperfeiçoamento da formação do professor, oferecendo atividades tais como cursos de atualização, oficinas, palestras, seminários e eventos voltados à prática de ensino de Matemática.

Ao ensinar um determinado tópico da Matemática, o professor deve incentivar o aluno a explorar e investigar situações que possibilitem um entendimento sólido e coerente do assunto.

1.2 – Objetivos da Pesquisa

Para que nosso trabalho seja eficaz no ensino-aprendizagem de logaritmos, baseamos-nos no processo de *investigação matemática*², opondo-se à memorização de técnicas de resolução de exercícios. A partir disso, foram desenvolvidas sequências didáticas com base nessa fundamentação teórica que também tentam resgatar ideias originais da criação do conceito de logaritmo por meio de tabelas específicas de progressão aritmética e progressão geométrica. Nossa pergunta é: “a abordagem apresentada pode ser eficiente para o aprendizado das propriedades que caracterizam um logaritmo”?

Para tentar responder a essa questão, elaboramos duas sequências didáticas sobre logaritmos: uma delas é uma proposta de ensino direcionada a professores de Matemática e a outra é destinada a alunos de Ensino Médio. Ambas têm como objetivos a descoberta das propriedades dos logaritmos, via progressões aritméticas e geométricas, e a introdução da definição de logaritmo.

No capítulo 2 desta dissertação será apresentada a fundamentação teórica (investigação matemática), que embasa nossa pesquisa. Presente nos documentos oficiais que regem o ensino brasileiro, a investigação matemática permeia todos os segmentos do ensino, a formação continuada e a especialização de professores. Trata-se de um processo que focaliza o aprendizado eficaz de um tema, sendo papel do professor elaborar perguntas pertinentes que agucem a criticidade do aluno, incentivando-o a reconhecer padrões, formular conjecturas e validá-las quando necessário.

O capítulo 3 tem por objetivo trazer uma proposta de sequência didática para professores aprofundarem seu conhecimento sobre logaritmos, baseada em atividades de investigação matemática. Uma primeira versão da sequência para professores foi aplicada em uma oficina oferecida no CAEM-IME-USP. Após analisar e refletir sobre o que se desenvolveu durante a aplicação, decidimos aprimorar essa sequência, adaptando, substituindo e acrescentando

2- Fundamentação teórica a ser apresentada no Capítulo 2.

algumas atividades, para que possamos aplicar a nova sequência em outro momento. A sequência reformulada está apresentada no capítulo 4.

Após a finalização da primeira etapa de nossa pesquisa, uma segunda sequência didática foi elaborada e aplicada, agora para alunos de Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo. Esta segunda sequência, reproduzida no capítulo 5 desta dissertação, difere-se daquela aplicada aos professores, pois as atividades são introduzidas de forma mais gradual e intuitiva. Além disso, atividades que se referiam à base de um logaritmo foram retiradas.

A análise final de nosso trabalho se encontra no capítulo 6 desta dissertação, quando avaliaremos se os objetivos de nossa pesquisa foram atingidos e com qual intensidade.

1.3 – Desenvolvimento da Pesquisa

O desenvolvimento da pesquisa consistiu nas seguintes etapas:

1. Aplicação de uma oficina sobre logaritmos, de doze horas, ministrada no CAEM no segundo semestre de 2014, com público alvo formado por professores de Matemática. Nesta oficina foi aplicada uma primeira versão da sequência didática para professores (SDP₁), sobre o ensino de logaritmos;
2. Análise da aplicação da sequência didática – dificuldades e resultados obtidos;
3. Reformulação da sequência didática para professores, levando em conta a análise anterior e algumas sugestões dos participantes, resultando na sequência didática para professores (SDP₂);
4. Elaboração de outra sequência didática (SDA), voltada para alunos de Ensino Médio;
5. Aplicação da SDA para alunos de Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo;
6. Análise dos resultados obtidos.

Durante toda nossa pesquisa, o foco principal foi a formação e o aperfeiçoamento de professores, por isso dedicamos a maior parte do tempo na aplicação da SDP₁ durante a oficina para professores e, posteriormente, na reformulação dessa sequência, obtendo a SDP₂. Já a SDA foi aplicada para observarmos a eficiência da proposta com alunos.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 – A Investigação Matemática em Documentos Oficiais

A importância da Matemática é destacada desde muito cedo na vida escolar. O Ministério da Educação, por meio de sua Secretaria de Educação Básica, elaborou, em 2012, um documento intitulado “Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental”. Nele estão expostos alguns *Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento da Área da Matemática*. Dentre eles, destacamos os seguintes:

- Reconhecer regularidades em diversas situações, de diversas naturezas, compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades já conhecidas. (p. 67)
- Desenvolver o espírito investigativo, crítico e criativo, no contexto de situações-problema, produzindo registros próprios e buscando diferentes estratégias de solução. (p.68)

Desde a fase de alfabetização da criança, a Matemática já pode ser apresentada também como uma ciência que observa padrões e regularidades e, conseqüentemente, útil para fazer previsões. O cunho investigativo deve ser explorado para que a criança obtenha gradualmente certa autonomia e, em fases posteriores da vida escolar, possa estabelecer suas próprias conjecturas, validando-as ou refutando-as de acordo com a necessidade de cada caso estudado.

Nesta mesma linha metodológica, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) destacam, como *competência*, a “investigação e compreensão”. Uma competência pode ter capacidade de mobilizar, quando necessário, um conhecimento já adquirido e não se trata de situação estática, tampouco procedimental. A *competência* “investigação e compreensão” é alicerçada por algumas *habilidades*, que também podem alimentar outras competências. A saber, as *habilidades* referentes à *competência* “investigação e compreensão” mencionadas nos PCN Ensino Médio (2000) são:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Já os PCN+ (Ensino Médio), complementando os PCN, destacam que “a Biologia, a Física, a Química e a Matemática integram uma mesma área do conhecimento. São ciências que têm em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos ...” (PCN+, 2002, p.23)

Ainda “a investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, faz utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências; ” (PCN+, 2002, p.113)

A insistência do termo *investigação* vem ao encontro de nossa perspectiva de pesquisa, na qual se pretende salientar a importância dessa metodologia como base para um aprendizado sólido e eficaz de tópicos da Matemática. Essa *investigação* perpassa o âmbito discente, atingindo também a formação do professor.

Essa formação é também, mas não só, permanente informação cultural e atualização metodológica. A formação profissional contínua tem igualmente um caráter de investigação, uma dimensão de pesquisa. (PCN+, 2002, p.143)

2.2 – Sobre a Formação de Professores

A formação de um professor é complexa. Formalmente, ela pode englobar a formação inicial, a continuada e a especializada. Ser professor é muito mais do que apenas lecionar sobre aquilo que se aprendeu no ensino superior ou durante a vida. Trata-se de um difícil processo, rodeado por incertezas e decisões a serem tomadas. O professor que se limita apenas a ensinar aquilo que aprendeu, torna-se obsoleto perante às constantes mudanças relacionadas ao ensino. Cabe ao professor, de todas as áreas, investir em sua formação continuada, participando de

cursos quando necessário, refletindo sobre sua experiência profissional e aprofundando-se naquilo que se sente mais motivado.

O desenvolvimento do professor exige tomada de decisões e enquadramento em projetos, analisando-os de forma minuciosa e decidindo de que modo agir em cada situação. Segundo João Pedro da Ponte, no processo de desenvolvimento profissional, o professor deixa de ser objeto para passar a ser sujeito da formação. Tal processo não é estático, sendo necessária constante atualização para que o docente esteja permanentemente adaptado às necessidades dos alunos e às demandas da sociedade.

Para responder aos desafios constantemente renovados que se colocam à escola pela evolução tecnológica, pelo progresso científico e pela mudança social, o professor tem de estar sempre a aprender. O desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente. (Ponte, 1998, p.2)

Um professor de Matemática, para exercer sua atividade profissional de forma satisfatória, deve primeiramente ter paixão pela Matemática. Não somente pela teoria, mas também pelas aplicações que dependem desse conhecimento. Do mesmo modo é necessário conhecer seus alunos, saber agir em situações adversas, mostrando capacidade de solucioná-las e, primordialmente, conhecer-se a si mesmo, suas próprias dificuldades e potencialidades.

A resolução de problemas e a investigação matemática podem ser favoráveis para o constante desenvolvimento do professor, pois para que atinjam o sucesso, ambas as teorias exigem dedicação e aperfeiçoamento constantes por parte do docente. A elaboração de uma sequência didática baseada no processo investigativo exige do professor clareza absoluta do tópico a ser ensinado, pois ele deve questionar o aluno de forma oportuna e correta, incentivando-o a conjecturar, validar e refutar hipóteses, promovendo uma aprendizagem que privilegie sua autonomia.

As atividades de investigação matemática convidam o professor a desenvolver papéis fundamentais diante de seus alunos. Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1998) citam algumas características inerentes aos professores que desejam trabalhar com investigações: introduzir o pensamento matemático em seus alunos, fornecer informações e promover reflexões são as primeiras características exigidas. Após a aceitação por parte dos alunos, cabe ao professor desafiar, apoiar e avaliar o progresso do aluno. Tais atributos fazem com que o professor, no papel de orientador do aprendizado, compartilhe e aprimore constantemente seu conhecimento.

2.3 – Investigações Matemáticas

Para embasar nossa pesquisa e nortear este trabalho, tomamos por base o processo de Investigação Matemática, mais especificamente as pesquisas realizadas pelo professor português João Pedro da Ponte, da Universidade de Lisboa, que estudam a importância da investigação para um aprendizado sólido e eficaz de tópicos da Matemática.

As técnicas usuais de ensino, muitas vezes limitadas à exposição verbal do professor, seguida pela resolução de exercícios de fixação, são eficientes somente a uma pequena parte dos alunos, podendo deixar as aulas com pouco sentido àqueles que têm mais dificuldades com Matemática. Essas aulas podem ser complementadas com discussões entre alunos, estudos sobre História da Matemática e resolução de problemas que não envolvam raciocínios lineares e mecânicos. Já no processo investigativo, o aluno é estimulado a aprender e compreender de modo mais profundo o conceito que o professor deseja ensinar. O termo “investigar”, em Matemática, tem por alguns sinônimos “averiguar”, “buscar”, “indagar” e “pesquisar”, cabendo ao aluno utilizar seus próprios processos de investigação.

Quando o aluno se depara com um problema que requer investigação, é desafiado a observar padrões num conjunto de dados e, por intermédio de perguntas pertinentes colocadas pelo professor, organizá-los de forma coerente para que a situação possa ser trabalhada. Desta forma, o aluno é desafiado a formular conjecturas, correndo o risco de estarem corretas ou não. Novamente o professor, que figura como orientador de estudos, aguça no aluno a necessidade de validar ou refutar essas conjecturas. Caso sejam refutadas, outras hipóteses podem ser formuladas e, sendo validadas, abre-se um leque para que novas questões sejam investigadas.

Confrontado com problemas que envolvem a investigação de um objeto matemático, o aluno é colocado diante de alguns desafios, sendo provocado a reconhecer padrões, transitar entre diferentes formas de representação do objeto a ser estudado e, por um processo lento e progressivo, muitas vezes feito em paralelo com outras atividades, tende a se tornar confiante, passando a buscar seu próprio roteiro de resolução para determinadas situações. Essa provocação pode fazer com que o aluno e o professor mudem sua concepção do processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Na minha perspectiva, “investigar” não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos. (Ponte, 2003, p.2)

É importante ressaltar que, para se investigar um determinado assunto em Matemática, não é necessário trabalhar com problemas muito fáceis nem com problemas de grande dificuldade. Pode-se, no entanto, trabalhar a partir de questões pertinentes que se apresentem inicialmente obscuras, mas passíveis de clarificação. Ressalta-se, também, que as investigações desenvolvem conhecimentos acerca de temas transversais, como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo.

O trabalho de investigação matemática é colaborativo, cabendo ao professor e ao aluno fazerem parte do mesmo organismo, proporcionando uma simbiose cujo objetivo central é a aquisição concreta de um determinado conhecimento matemático. Nesse processo, a prática profissional docente deve valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático, criando oportunidades para que o aluno interaja com os demais colegas e também com o professor. Os processos de descoberta em Matemática, muitas vezes, são árduos e não-lineares, exigindo muitas tentativas que, por vezes, não levam ao resultado esperado. Mas, compreender aquilo que a Matemática pode oferecer é, sobretudo, entender o processo de como se faz Matemática. E isso é primordial para que o professor potencialize suas práticas pedagógicas de forma que o aluno compreenda, de fato, o significado do que é Matemática.

A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (Caraça, 1951, p. XIII)

É importante destacar que investigar não significa reinventar a Matemática. Não são todos os tópicos do currículo de Matemática que necessitam ser trabalhados nesta metodologia. Em muitas situações é mais conveniente definir um conceito e, em seguida, trabalhar atividades investigativas.

Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-demonstração. (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006, p. 10).

Há estudiosos que acreditam ser a investigação matemática destinada exclusivamente a pesquisadores com alto grau de conhecimento matemático, tratando-se de uma técnica altamente sofisticada e inacessível à maioria dos alunos e professores. Todavia, ensinar e investigar podem, sim, coexistir de forma a se complementarem, fazendo com que o professor se aperfeiçoe no que tange à elaboração de atividades diferenciadas e estimule no aluno a criticidade e a autonomia.

As tarefas de caráter investigativo assumem um papel de interligação entre o objetivo final da aprendizagem em Matemática - formular uma conjectura sólida e consistente - e o que o aluno pode oferecer. O professor, administrador do ensino-aprendizagem, terá de olhar para o trabalho do aluno a partir de uma perspectiva formativa, aperfeiçoando o que foi feito e refletindo, junto aos discentes, para que as atividades possam ser aperfeiçoadas e o aprendizado otimizado.

De acordo com Pirie (1987) em uma investigação matemática não há resultados conhecidos para os alunos e não se espera que alcancem a resposta correta, ou que todos encontrem a mesma resposta, mas procura-se que explorem as possibilidades, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas.

Resumidamente, um trabalho de investigação matemática pode ser apresentado da seguinte forma:

Figura 2

2.4 – O Conhecimento do Professor

O professor, aqui especificamente o de Matemática, deve possuir, além do conhecimento científico, o conhecimento para ensinar, que é tão complexo quanto o primeiro. Trata-se, sobretudo, de um conhecimento móvel, multiconceitual, nunca estático, que se fundamenta na teoria, na prática, na experiência e na reflexão.

As experiências vivenciadas pelo professor podem ser fundamentais para que seus princípios, orientações e explicações sejam potencializados. Não se trata de uma tarefa simples, tampouco desmistificada, mas passível de sucesso mediante reflexão profissional, aperfeiçoamento dos saberes e das práticas de ensino.

A reflexão e as análises de situações de ensino e aprendizagem não são suficientes para a aquisição do conhecimento necessário para ensinar Matemática. A informação teórica proveniente da Didática da Matemática deveria ser considerada como um instrumento conceitual que pode permitir ao professor em formação, como aprendiz, integrar e gerar o seu conhecimento prático pessoal. Neste sentido, (...) a integração do conhecimento teórico nos processos de análise deste tipo de tarefas pode produzir propostas práticas por parte do professor que lhe permite dar maior conta da complexidade da prática. Desta maneira, tenta-se potenciar a tomada de decisões práticas do professor, buscando a complementaridade entre os conhecimentos teóricos e os práticos. (Llinares, 1998, p. 121)

O processo de investigação matemática exige, de forma explícita, que o professor seja uma espécie de regente da sala de aula, um orientador que não se limita a ensinar como se fazer, mas sim o que se fazer. Deve, portanto, alinhar seu conhecimento implícito ao explícito, adaptando-se às perspectivas de seus alunos e ampliando suas redes de conhecimento para que obtenha sucesso no processo de ensino-aprendizagem.

2.5 - O Nosso Trabalho Dentro do Referencial Estudado

Nossa pesquisa visa ao ensino-aprendizagem das propriedades e do conceito de logaritmos, a partir de um ponto de vista diferenciado. Os livros didáticos, normalmente, iniciam o estudo de logaritmos dando sua definição usual, $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, para a e b maiores do que 0 e b diferente de 1, e, após isso, exploram suas propriedades e gráficos. Acreditamos que o estudo de logaritmos possa ser iniciado de outra forma, pois a definição

citada é extremamente abstrata, tornando-se um obstáculo para a aprendizagem significativa pelo aluno.

Apresentaremos duas sequências didáticas: uma para professores aprimorarem seus conhecimentos sobre logaritmos e outra para alunos. A sequência para os alunos visa proporcionar, por meio de atividades investigativas com tabelas de progressões aritméticas e geométricas, a descoberta das propriedades dos logaritmos. O aluno deverá perceber que o uso de tabelas especiais de PA e PG proporcionam uma forma eficaz de transformar o produto de dois termos na coluna da PG na soma dos termos correspondentes na coluna da PA, o quociente de dois termos na coluna da PG na diferença dos termos correspondentes na coluna da PA, a n -ésima potência de um termo na coluna da PG no produto por n do termo correspondente na coluna da PA, a raiz n -ésima de um termo na coluna da PG no quociente por n do termo correspondente na coluna da PA. O aluno também deverá chegar à definição usual dada nos livros didáticos gradativamente, conforme for percebendo que existem vários logaritmos. Já a sequência didática voltada a professores, contém, além das atividades apresentadas aos alunos, um aprofundamento sobre a necessidade de se criar a ideia de base de um logaritmo.

Desde o Ensino Fundamental o professor pode contribuir para que o aprendizado de logaritmo possa ser potencializado no Ensino Médio. Um bom trabalho realizado com as definições e propriedades de potência e raiz são essenciais para que os alunos tenham maturidade para compreender o que tabelas especiais de PA e PG guardam como propriedades.

Capítulo 3

Uma Sequência Didática para Professores: Aplicação e Análise

Como parte da pesquisa, ministramos, Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro e eu – no segundo semestre de 2014 – a oficina intitulada *Logaritmos em sala de aula*, com carga horária de 12 horas, que teve a participação de 28 pessoas, sendo 21 professores das redes estadual e particular de ensino, e 7 alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP.

3.1 – Perfil dos Professores Participantes da Oficina

Os diagramas abaixo ilustram alguns dados mais detalhados sobre os participantes. Tais dados foram obtidos por meio de um questionário³ aplicado no início da oficina para que pudéssemos nos ambientar e conhecer um pouco da experiência e do trabalho atual de cada professor, sua formação, especialização e prática profissional. A tabulação e a análise dos dados se encontram a seguir.

Figura 3

A distribuição a seguir relata em quais turmas os professores participantes da oficina lecionam aulas. O público-alvo da oficina se restringiu a professores do Ensino Fundamental II

³ Anexo I, página 125

e do Ensino Médio. Havia professores que ministravam aulas apenas para um dos ciclos de ensino.

Figura 4

Dos professores participantes da oficina, 12 deles estão em início de carreira, apenas um ministra aulas nos três períodos do dia e boa parte deles ministra mais de 30 aulas por semana.

Períodos em que trabalham os professores

Figura 5

Figura 6

Figura 7

Dos 21 professores que responderam ao questionário, apenas 14 possuíam o diploma de Licenciatura em Matemática e outros 12 disseram ter a Licenciatura incompleta. Outros dois professores não tinham formação específica em Matemática. Além disso, 6 professores concluíram alguma pós-graduação, sendo que um destes é mestre e outros 5 disseram ter pós-graduação incompleta. A íntegra do questionário inicial se encontra no Anexo I desta dissertação e, as respostas dos participantes, no Anexo II.

Os encontros ocorreram no IME-USP, em três manhãs de sábados, com quatro horas de aula em cada uma delas. O objetivo da oficina foi dar subsídios para que o professor de Matemática do Ensino Médio pudesse promover uma aprendizagem significativa, sólida e eficaz dos logaritmos, utilizando não apenas formulações algébricas, mas também registros gráficos e suas interpretações.

Após a aplicação do questionário inicial, demos início à proposta de sequência didática que se baseou inicialmente nas propriedades observadas por *Michael Stifel* (1487 - 1567), matemático alemão considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Na primeira parte de seu livro *Arithmetica Integra*, publicado em 1543, *Stifel* destaca a vantagem de se associar uma Progressão Aritmética (PA) a uma Progressão Geométrica (PG), mostrando uma tabela

com potências sucessivas de 2 em uma linha, uma sequência de números naturais consecutivos em outra.

Intercalando as atividades propostas, foram inseridos pequenos trechos sobre fatos históricos que possivelmente fizeram parte da descoberta dos logaritmos. Também alguns textos teóricos, mesmo que sucintos, foram apresentados como leitura complementar.

Na sequência didática proposta, com atividades de caráter investigativo, o estudo se dividiu em quatro etapas:

I- Descoberta das propriedades dos logaritmos

- Aqui, queríamos que os participantes percebessem, sozinhos, que ao multiplicar dois elementos da coluna da PG, obtém-se um resultado ainda na mesma coluna e a soma dos elementos correspondentes na coluna da PA, está na mesma linha do produto anterior.
- Tentativa de conjecturar hipóteses;
- Tentativa de validar ou refutar essas conjecturas.

II- Definição de logaritmo

- Tendo em vista as descobertas feitas no item I, os participantes receberam um texto com dados históricos sobre a importância de tais descobertas;
- Foi introduzida uma notação provisória e a linguagem formal dos logaritmos, ainda sem a ideia de base;
- Discussão sobre a existência de mais de um logaritmo e a ideia de base.

III- Inserção de outras linhas nas tabelas

- A ideia foi mostrar que as tabelas de logaritmos construídas até aquele momento da oficina eram incompletas. Foi proposta uma atividade de interpolação usando médias aritmética e geométrica, para ampliação da tabela;
- Um dos objetivos dessa interpolação foi mostrar aos participantes a dificuldade enfrentada pelos matemáticos do início do século XVII para ampliar tabelas de logaritmos.

IV - Introdução às funções logarítmicas e a problemas clássicos que envolvem logaritmos

- Foram analisados gráficos de funções logarítmicas, com bases $q > 1$ e $0 < q < 1$;
- Foram discutidos problemas clássicos do uso de logaritmos e problemas de Matemática Financeira foram propostos como lição de casa.

3.2 – Sequência Didática para Professores (SDP₁) e Análise das Atividades Aplicadas

A seguir, apresentamos a sequência aplicada durante a oficina no CAEM. As atividades entregues aos professores tinham somente os enunciados abaixo reproduzidos. Neste texto, acrescentamos, em cada atividade, seu objetivo e, ao final, comentários sobre as ocorrências observadas durante a aplicação.

ATIVIDADE 1

Objetivo:

Observar, na tabela 1A, que o produto de dois termos na coluna da PG corresponde à soma dos termos correspondentes na coluna da PA e, analogamente, o quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA. Também, compreender que a n -ésima potência de um termo na coluna da PG corresponde à multiplicação desse termo por n , na coluna da PA. Da modo análogo, a raiz n -ésima de um termo na coluna da PG, corresponde ao quociente da divisão do termo correspondente na coluna da PA, por n .

Enunciado:

I - Progressão Geométrica × Progressão Aritmética

Observe a tabela a seguir e responda às seguintes questões.

PG	PA	
1	0	(linha 1)
2	3	(linha 2)
4	6	(linha 3)
8	9	(linha 4)
16	12	(linha 5)
32	15	(linha 6)
64	18	(linha 7)
128	21	(linha 8)
256	24	(linha 9)
512	27	(linha 10)
1.024	30	(linha 11)
2.048	33	(linha 12)
4.096	36	(linha 13)
8.192	39	(linha 14)
16.384	42	(linha 15)
32.768	45	(linha 16)
65.536	48	(linha 17)
131.072	51	(linha 18)
262.144	54	(linha 19)
524.288	57	(linha 20)
1.048.576	60	(linha 21)

Tabela 1A

- a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 4 pelo termo da linha 6.
- b) Na coluna da PA, some o termo da linha 4 com o termo da linha 6.
- c) Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em que linhas?
- d) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- e) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha do termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- f) Calcule $(64)^2$ e verifique se o resultado está na tabela. Faça também 2×18 e compare as localizações dos resultados.
- g) Calcule 2×16 e $3 + 12$ e localize os resultados na tabela.
- h) Efetue 256×1024 e $24 + 30$. Confira em que linhas estão os resultados.

- i) Efetue $524.288 \div 16.384$ e $57 - 42$. Confira onde estão os resultados.
- j) O que você reparou até agora?
- k) É possível efetuar as operações de multiplicação e divisão sem muito trabalho, usando a tabela acima? Descreva como.
- l) Como você pode obter o resultado de $(32)^3$ usando a tabela?
- m) Como você pode obter o valor de $\sqrt{65.536}$ apenas olhando para a tabela?

Comentários:

Como primeira atividade, entregamos aos professores a seguinte tabela que apresenta uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo $a_1 = 1$ na primeira coluna e, na segunda coluna, uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo $b_1 = 0$. Após analisarem a tabela, os participantes foram convidados a responder as questões de cunho investigativo apresentadas.

Esta primeira atividade teve duração de aproximadamente uma hora e meia. Inicialmente alguns participantes não se sentiram confortáveis com as progressões apresentadas e um pequeno grupo não conhecia progressões, especialmente a geométrica. Porém, não foi difícil compreenderem de que se tratava de uma PG e, após isso, a atividade pôde ser iniciada.

A maioria dos participantes mostrou compreensão acerca do que lhes foi proposto. Alguns se confundiram e tentaram estabelecer relações entre o nome da linha (linha 1, linha 2 etc.) com as colunas de PA e PG. Poucos professores não conseguiram associar que a potência na coluna na PG equivale ao produto na coluna da PA. Cremos que o objetivo da atividade foi atingido.

ATIVIDADE 2

Objetivo:

Notar que as mesmas propriedades observadas na atividade 1 também são válidas em outras tabelas de PA e PG com termos iniciais iguais a 0 e 1 respectivamente. Nesta atividade, as razões das progressões foram escolhidas pelos próprios participantes.

Enunciado:

- 1- Preencha as tabelas abaixo, cada uma com os termos consecutivos de uma PG na primeira coluna e os termos consecutivos de uma PA na segunda coluna. Para a tabela 2A, escolha uma PG que tenha razão $q > 1$ e, na tabela 3A, escolha uma razão $0 < q < 1$.
1. Nas progressões aritméticas, escolha razões r positivas.

PG	PA
1	0

Tabela 2A

PG	PA
1	0

Tabela 3A

- 2- Para cada uma das tabelas que você construiu, responda às seguintes questões:
- Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 4.
 - Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 4.
 - Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em quais linhas?
 - Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
 - Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha. Confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
 - Calcule o quadrado do termo que está na quinta linha da PG.
 - Calcule o dobro do termo que está na quinta linha da PA.
 - Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 7 e a terça parte do termo da PA que está na mesma linha.
 - O que você reparou até agora?

Comentários:

As perguntas feitas nesta atividade tiveram como propósito fazer possíveis conjecturas a respeito das tabelas de PG e PA. Foi pedido aos participantes que escolhessem razões para as progressões, respeitando condições pré-determinadas e, ao responder às questões, esperava-se que pudessem formular conjecturas, especialmente na pergunta 2-(i).

A grande maioria dos participantes conseguiu fazer a atividade e propor conjecturas, entretanto outros fatos também nos chamaram a atenção. Vários professores escolheram, para a tabela 3A, a razão $q = \frac{1}{10}$ e optaram por trabalhar com números decimais ao invés de frações. Também observamos o caso de um participante que afirmou $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{20}\right)$. Tal despreparo perante uma simples potência reflete um grande obstáculo para o aprendizado de logaritmos, que é prejudicado pela dificuldade de se operar com potências.

ATIVIDADE 3

Objetivo:

Validar as conjecturas formuladas nas atividades 1 e 2 a partir das propriedades observadas.

Texto:

II - Sempre Funciona?

Apesar de termos a sensação ou até mesmo a convicção de que as propriedades observadas serão válidas sempre que colocarmos termos consecutivos de uma progressão geométrica ao lado de termos consecutivos de uma progressão aritmética, sendo que os termos iniciais são 1 e 0 respectivamente, rigorosamente ainda não nos é permitido afirmar com total segurança que tais propriedades valem para quaisquer PG e PA.

Enunciado:

Tome uma tabela cuja primeira coluna é a PG de razão $q > 0$, $q \neq 1$ com primeiro termo igual a 1. Os termos seguintes serão $q, q^2, q^3, \dots, q^m, \dots, q^n$. Na segunda coluna, tome uma PA de razão $r \neq 0$ com primeiro termo igual a 0. Os termos seguintes serão $r, 2r, 3r, \dots, mr, \dots, nr$.

1. Calcule o produto de dois termos quaisquer da PG e escreva o resultado em forma de uma só potência. Que termo é esse?
2. Calcule a soma dos termos da PA correspondentes aos do item anterior e escreva o resultado em função de r .
3. Os resultados são correspondentes?
4. Verifique, passo a passo, a validade das demais propriedades no caso geral.

Comentários:

Sabemos que o conhecimento matemático subentende a passagem para generalizações e a consequente abstração de propriedades estudadas em casos particulares. Sendo assim, esta atividade é de suma importância para um aprofundamento teórico.

Um dos papéis do professor é ensinar ao aluno que, para se ter certeza de que uma propriedade é sempre válida, há necessidade de utilizar notação literal, já que é impossível se provar a validade de uma conjectura para todos os números. As demonstrações, muitas vezes, não precisam ser formais, mas devem cumprir o papel de explicar por que a afirmação é válida.

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (PCNEM, 2000, p. 40)

Entretanto, nem todos os professores que cursaram a oficina se sentiram à vontade com essa ideia. A maioria dos participantes não conseguiu justificar por que as propriedades são válidas para qualquer PG de primeiro termo igual a 1 e qualquer PA de primeiro termo igual a 0. Alguns entraves observados foram:

- Dificuldade de se utilizar as propriedades de potência;
- Falta de conhecimento sobre raízes com índice diferente de 2;
- Poucos professores sabiam que $q^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{q^n}$;
- Nossa interferência foi necessária para que a atividade pudesse ser concluída. Tivemos que “revisar” o significado de raiz n -ésima de um número e da notação de raiz em forma de potência.

Em vista disso, achamos adequado criar atividades preliminares que revisem os conceitos de raiz e propriedades de potências para uma futura aplicação da sequência didática.

ATIVIDADE 4

Objetivo:

Observar que a média geométrica de dois termos na coluna da PG, corresponde a média aritmética dos termos correspondentes na coluna da PA.

Enunciado:

Uma propriedade interessante das tabelas de $PG \times PA$. Use a tabela 1A desta oficina e responda:

1. Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 9 e 21.
2. Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 8 e 128.
3. Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?
4. Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 24 e 54.
5. Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 256 e 262.144.
6. Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?
7. Explique, com suas palavras, o que você reparou. Você acredita que a propriedade observada vale para outros termos da tabela?

Comentários:

O objetivo desta atividade foi estender as propriedades das colunas de PA e PG. Os participantes deveriam notar que a média aritmética de dois termos quaisquer na coluna da PA corresponde à média geométrica dos termos correspondentes na coluna da PG. Entretanto alguns professores não conheciam a média geométrica. Após intervenções pontuais, todos os professores conseguiram compreender o que foi proposto na atividade e, apesar da grande demora para realizar os cálculos, mesmo com calculadora, consideramos que a tarefa atingiu seu objetivo inicial.

ATIVIDADE 5

Objetivo:

Após a leitura do texto a seguir, as questões de investigação propostas pretendem ajudar o participante a perceber que valem as propriedades $a^{\log_a x} = x$ e $\log a^n = n$, ou seja, que o logaritmo é a inversa da exponencial.

Texto:

III – Logaritmos

Com o que observamos até agora já é possível perceber o potencial das tabelas que estamos montando: em vez de fazermos cálculos envolvendo contas de multiplicação, divisão, potências ou raízes, podemos, de posse das tabelas, fazer contas mais simples, respectivamente de adição, subtração, multiplicação ou divisão por um número natural.

Por exemplo, usando a primeira tabela, em vez de efetuarmos 128×8.192 , podemos somar os valores da PA que são correspondentes na tabela: $21 + 39 = 60$ e, olhando novamente a tabela, podemos concluir que $128 \times 8.192 = 1.048.576$.

Tabelas como as que vimos nas atividades anteriores são exemplos de tábuas de logaritmos. *John Napier* (1550 - 1617) publicou, em 1614, um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Regra de *Logaritmos*), depois de ter trabalhado por quase 20 anos produzindo uma tábua de logaritmos.

O suíço *Joost Bürgi* (1552-1632), fabricante de relógios e instrumentos de astronomia e matemático, também criou, independentemente, tábuas de logaritmos, mas as publicou seis anos depois de Napier.

Segundo *Eves* (2004), a *Descriptio* despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação, *Henry Briggs* (1561 - 1631) viajou de Oxford até Edimburgo para visitar *Napier*. Durante a visita, ambos concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas. Em 1624, *Briggs* publicou o livro *Arithmetica logarithmica* que continha uma tábua de logaritmos decimais dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Acredita-se que *Napier* e *Bürgi* foram influenciados pela obra de *Michael Stifel* (1486 - 1567), tendo percebido que sua utilização seria extremamente importante para o desenvolvimento da ciência, facilitando cálculos utilizados nas grandes navegações, na astronomia e na engenharia entre

outros, e assim passaram a criar longas tabelas. Tábuas de logaritmos foram utilizadas durante vários séculos, sendo finalmente substituídas por calculadoras e computadores a partir de 1960.

A invenção dos logaritmos foi rapidamente espalhada pelo mundo por matemáticos que passaram a usar as tabelas na Itália, França, Alemanha e até mesmo na China, ainda no século XVII.

A notação que usamos hoje para os logaritmos foi estabelecida por *Leonhard Euler* (1707 - 1783), responsável também por notar a relação dos logaritmos com a função exponencial, no século XVIII.

Vejamos como funciona a notação, tendo a tabela abaixo como referência:

PG	PA
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6

Tabela 4A

Em uma tabela de logaritmo, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo. Por exemplo, podemos dizer que o logaritmo de 1 é igual a 0, e escrevemos $\log 1 = 0$. Analogamente, temos: $\log 3 = 1$, $\log 9 = 2$, $\log 27 = 3$, $\log 81 = 4$, $\log 243 = 5$, $\log 729 = 6$.

Observando a tabela 1A desta oficina, podemos dizer que o logaritmo de 512 é 27 e escrevemos $\log 512 = 27$. Para obtermos o produto de dois números que estão na coluna da esquerda primeiramente somamos seus logaritmos. O resultado dessa soma é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tabela, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Por exemplo, em vez de calcularmos diretamente o produto 128×32 podemos fazer o seguinte:

$$\begin{array}{rcl}
 128 & \rightarrow & 21 \\
 \times & \rightarrow & + \\
 32 & \rightarrow & 15 \\
 \hline
 (4.096) & \leftarrow & 36
 \end{array}$$

Figura 8

Note que deixamos de fazer diretamente a multiplicação e, em vez disso, efetuamos uma adição. Repare que a maneira como escolhemos para indicar o que foi feito não é a convencional, mas acreditamos que seja sugestiva. A mesma ideia, escrita com a notação usual de logaritmos, fica assim:

$$\log (128 \cdot 32) = \log 128 + \log 32 = 21 + 15 = 36.$$

Portanto, olhando de volta a tabela, conclui-se que $128 \cdot 32 = 4.096$.

Enunciado:

Seja $a_n = 3^n$ um termo genérico da PG da tabela 4A.

(a) Determine, em termos de n , qual o valor de $\log a_n$.

(b) Qual o valor de $3^{\log a_n}$?

Comentários:

A maioria dos professores chegou às respostas esperadas. Entretanto pudemos observar que muitos participantes tiveram dificuldades com a notação, não percebendo a relação entre as propriedades vistas anteriormente nas tabelas e as propriedades de um logaritmo. Acreditamos ser importante acrescentar algumas atividades específicas que os motive a usar a notação $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$ ao lidarem com as tabelas.

ATIVIDADE 6

Objetivo:

Perceber que é necessário definir o que é base de um logaritmo.

Texto:

IV - Base de Logaritmos

Observe as tabelas a seguir:

PG	PA
1	0
3	2
9	4
27	6
81	8
243	10

Tabela 5A

PG	PA
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5

Tabela 6A

Na tabela 5A, tem-se $\log 3 = 2$ e, na tabela 6A, $\log 3 = 1$. Isso não é uma incoerência? Na verdade, não: existem vários logaritmos. Para distinguirmos uns dos outros precisamos da noção de base do logaritmo.

Enunciado:

Dada a tabela abaixo, complete:

$$\log 1 = \dots, \log q = \dots, \log q^2 = \dots, \log q^3 = \dots, \log q^4 = \dots, \log q^n = \dots$$

PG	PA
1	0
q	1
q^2	2
q^3	3
q^4	4
q^5	5

Tabela 7A

Você reparou que o expoente de q coincide com o logaritmo de q^n ?

A propriedade $\log q^n = n$ é boa, pois facilita certas contas e deduções. Isso acontece em todas as tabelas anteriores?

Voltemos à tabela 1A. Ali, vemos que $\log 1 = 0$, $\log 2 = 3$, $\log 2^2 = 6$, $\log 2^3 = 9$ etc. Ou seja, nesse caso, não temos a propriedade $\log q^n = n$. Mas observamos que $\log 2^n = 3n$. Em geral, em uma tabela em que a PG tem razão $q > 0$ e a PA tem razão $r \neq 0$, tem-se $\log(q^n) = nr$.

Para se ter a propriedade $\log q^n = n$, a PA deve ter razão $r = 1$. Se r é um número racional não nulo e diferente de 1, podemos aumentar ou diminuir o número de linhas da tabela, de modo que a razão da PA passe a ser igual a 1.

Comentários:

A atividade 6 foi fundamental para que os participantes da oficina pudessem mostrar se entenderam a definição de logaritmos que lhes foi apresentada. Por se tratar de uma atividade praticamente mecânica, não houve problemas em sua realização.

ATIVIDADE 7

Objetivo:

Uma vez observada que a propriedade $\log q^n = n$ ocorre quando as tabelas têm a PA com razão 1, perceber que, caso a PA não tenha razão 1, é possível interpolar meios aritméticos para que isso ocorra.

Enunciado:

- (a) Abaixo está um pequeno pedaço da primeira tabela, em que foram acrescentadas algumas linhas novas. Vamos completar os espaços que estão em branco:

PG	PA
1	0
	1
	2
2	3

Tabela 8A

- (b) Nessa tabela, qual a razão da PG?
- (c) Considere a tabela a seguir:

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
q^3	$3r$
q^4	$4r$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
q^n	nr

Tabela 9A

Existe um número b que satisfaz $\log(b^n) = n$? Se sim, qual é ele?

O número b encontrado na atividade anterior é chamado base do logaritmo.

Uma observação importante a ser feita é que a PA escolhida é apenas um auxiliar. Para calcularmos, por exemplo, 16×32 usando uma tabela de logaritmos que tenha PG de base 2 na

primeira coluna, tanto faz qual a PA utilizada. Sendo assim, o mais simples a fazer é escolher a PA de razão $r = 1$.

Pergunta: Qual o valor de $\log_b(b^n)$? (Para responder a essa pergunta não é preciso fazer nenhuma conta. Basta pensar!)

Comentários:

Tratou-se de uma atividade primordial para que se compreendesse a ideia de base de um logaritmo. Apesar da atividade 6, alguns professores não se atentaram ao fato de que existem infinitos logaritmos, porque acreditavam, por exemplo, que o logaritmo de 9 é sempre igual a 2. O que mais nos chamou a atenção foi a dificuldade que os professores encontraram para resolver o item (a). A grande maioria não compreendeu que, para completar a tabela dada, seria necessário fazer se perguntar “qual número que elevado ao cubo tem como resultado 2”. Mesmo após nossa interferência, dúvidas ainda persistiam, pois notamos que $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ não era algo natural para todos os professores que participaram da nossa oficina. Novamente foi preciso ir à lousa e auxiliá-los para que a atividade pudesse ser concluída. Fato semelhante ocorreu no item (c), o que nos faz concluir que a atividade necessita de alterações. Hoje acreditamos que, para um aprofundamento do conceito de logaritmo, seja necessário iniciar a sequência didática explorando conceitos e propriedades de potências e raízes.

ATIVIDADE 8

Objetivo:

Exemplificar o cálculo do logaritmo de um número que não está na tabela, interpolando meios aritméticos e geométricos entre termos já existentes, valorizando a ideia e o trabalho desenvolvido por *Bürge* e *Napier*.

Texto:

V - Aproximações

Evidentemente, as tabelas de logaritmos que construímos são bastante incompletas, já que com elas só conseguimos calcular operações envolvendo os números que lá estão e não

com qualquer número. Para que a tabela seja útil, temos que fazê-la muito maior, de modo que possamos calcular qualquer produto como, por exemplo, 87×423 . Mas fazer a tabela mais completa requer considerar potências com expoentes fracionários ou negativos. Os inventores dos logaritmos pensaram no problema de tornar a tabela mais completa e o resolveram de forma bastante engenhosa. Vamos ver como, para que possamos entendê-lo e apreciá-lo.

Considere a tabela abaixo, em que os números apresentados na primeira coluna têm 3 casas decimais de precisão. (A segunda coluna contém números racionais que são decimais exatas e por isso mantivemos todas as casas decimais.)

PG	PA
1	0
1,15	0,0625
1,334	0,125
1,778	0,250
3,162	0,500
10	1

Tabela 10A

Nosso objetivo é entender como inserir novos valores na tabela. Por exemplo, vamos achar uma aproximação para o valor de $\log_{10} 1,5$. É útil observar que, como a base do logaritmo é maior do que 1, os números que aparecem nas duas colunas estão em ordem crescente.

Enunciado:

Obter uma aproximação para o valor de $\log_{10} 1,5$ com uma casa decimal de precisão.

- Localize, na primeira coluna, entre quais números fornecidos na tabela acima fica o número 1,5. Escreva em forma de desigualdade: $\dots < 1,5 < \dots$
- Complete $\dots < \log_{10} 1,5 < \dots$ e reescreva essa desigualdade trocando os números decimais por frações.
- Tome a média aritmética m_1 dos dois números racionais encontrados no item anterior.
- Qual o correspondente ao número m_1 na coluna da PG?
- Note que agora você pode acrescentar uma linha à sua tabela:

PG	PA
1	0
10	1

Tabela 11A

- f) Com sua tabela aumentada, localize novamente entre quais novos números fica o 1,5 e complete: $\dots < \log_{10} 1,5 < \dots$
- g) Conclua que a primeira casa decimal de $\log_{10} 1,5$ tem que ser _____.

Assim, podemos dizer que uma aproximação, com uma casa decimal de precisão, para $\log_{10} 1,5$ é _____.

Ainda não conhecemos a segunda casa decimal. Para aumentar a precisão, basta repetir o processo.

ATIVIDADE 9

Objetivo:

Esta atividade é uma continuação da atividade 8, em que se pretende obter um valor aproximado para o $\log_{10} 1,5$, com duas casas decimais de precisão.

Enunciado:

Usando o mesmo método e os novos valores obtidos na tabela 11A, achar uma aproximação para $\log_{10} 1,5$ com duas casas decimais de precisão.

Texto:

Fazendo todas as contas com cuidado, vocês irão descobrir que 1,5 está entre 1,486 e 1,512 e, portanto, o valor de $\log_{10} 1,5$ está entre 0,171875 e 0,1796875. Mais precisamente, $0,171875 < \log_{10} 1,5 < 0,1796875$. Assim, teremos certeza de que a segunda casa decimal de $\log_{10} 1,5$ é 7. Assim, $\log_{10} 1,5 \approx 0,17$.

Sobre a terceira casa temos uma imprecisão enorme: está entre 1 e 9, conforme mostra a última desigualdade acima. Você já tem uma ideia do trabalho que dá achá-la à mão!

Segundo *Druck* (1995) “*Napier* publicou três tabelas que, juntas, calculavam com precisão até a sétima casa decimal, os logaritmos na base 10 dos números 4.998.609,4034 a 10.000.000. Ele trabalhou 20 anos para produzir esse trabalho. *Briggs*, um professor de Matemática em Oxford, produziu tabelas com precisão de 15 casas decimais. Devemos admirar e respeitar os matemáticos, navegadores e astrônomos do século XVII não só pela engenhosidade, mas também pela paciência com que dedicaram anos de suas vidas fazendo cálculos como os que mostramos acima para que a humanidade pudesse, depois, fazer outros cálculos mais rápida e facilmente. Durante quase 4 séculos que sucederam à descoberta dos logaritmos, sua utilidade revelou-se decisiva na Ciência e Tecnologia. Recentemente, com o uso cada vez mais comum de computadores e calculadoras, as tábuas de logaritmos não são mais úteis como instrumento de cálculo. Entretanto o estudo dos logaritmos é fundamental, pois o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são modelados por funções logarítmicas e por funções exponenciais. Finalmente, devemos mencionar que a definição de logaritmo do modo como é ensinado hoje na escola ($\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$) levou cerca de 200 anos para ser formulada. Todo esse tempo é certamente um sinal do grau de dificuldade que o conceito abarca”.

Comentários:

As atividades 8 e 9, que não são de caráter investigativo, mostraram ao professor o imenso trabalho que *Napier* e *Briggs* tiveram para tornar tabelas de logaritmos bastante completas, sem máquinas de calcular e sem notação específica para potência. Mesmo utilizando calculadora, os participantes demoraram cerca de uma hora e meia para realizar a atividade, que transcorreu sem maiores problemas.

ATIVIDADE 10

Objetivo:

Observar a relação existente entre juros simples e progressões aritméticas e entre juros compostos e progressões geométricas.

Texto:

XI - Uma Aplicação à Matemática Financeira

Existem duas modalidades bastante conhecidas de ganhos de juros sobre um capital. São chamados juros simples os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas o capital inicial rende juros. Já nos juros compostos, após cada período de tempo a que se refere à taxa contratada, os juros ganhos são capitalizados (somados ao capital), passando a render juros também.

A tabela abaixo mostra os montantes (total do capital inicial mais os juros ganhos) no final de cada período de duas aplicações, ambas com um capital inicial de R\$ 1.000,00 aplicados a uma taxa de 10% ao mês. Na segunda coluna estão os montantes do capital aplicado a juros compostos e, na terceira coluna, os montantes do capital aplicado a juros simples.

Número de meses	Montante (Juros Compostos)	Montante (Juros Simples)
0	R\$ 1.000,00	R\$ 1.000,00
1	R\$ 1.100,00	R\$ 1.100,00
2	R\$ 1.210,00	R\$ 1.200,00
3	R\$ 1.331,00	R\$ 1.300,00
4	R\$ 1.464,10	R\$ 1.400,00
5	R\$ 1.610,51	R\$ 1.500,00

Tabela 12A

Na segunda coluna, o valor do montante em cada linha é a soma do valor anterior com 10% desse valor anterior. Também podemos afirmar que o valor em cada linha é o valor do montante da linha anterior multiplicado por 1,1. Logo, essa coluna é uma PG de razão 1,1.

Na terceira coluna, o valor do montante apresentado em cada linha é a soma do valor anterior com 10% do valor da linha correspondente ao mês 0, formando uma PA de razão 100.

Enunciado:

- a) Se, em vez de 10% de juros, fossem 5%, ainda teríamos uma PG na segunda coluna?
Em caso afirmativo, qual seria a razão?
- b) Os valores dos montantes em juros simples formam sempre progressões aritméticas?
Por quê?
- c) Os valores dos montantes em juros compostos formam sempre progressões geométricas? Por quê?

ATIVIDADE 11

Objetivo:

Introduzir o questionamento histórico que levou à definição do número e .

Enunciado:

Suponhamos que R\$ 1.000,00 sejam aplicados a juros compostos:

- a) A uma taxa de 12% ao mês. Qual será o montante após um mês?
- b) A uma taxa de 6 % a cada 15 dias. Qual será o montante após um mês?
- c) A uma taxa de 4 % a cada 10 dias. Qual será o montante após um mês?
- d) A uma taxa diária de $\frac{12}{30}$ %. Qual será o montante após um mês?

Você deve ter reparado que o montante, ao final de 1 mês, aumenta, conforme aumenta a frequência com que os juros são capitalizados.

Pergunta: Se subdividirmos mais e mais o período de tempo, o montante crescerá indefinidamente? Ou seja, se tivermos os juros capitalizados, a cada hora, ou a cada minuto, etc., o montante irá crescer, tendendo ao infinito, ou irá estacionar em algum valor finito?

Imagine que haverá n capitalizações ao mês com taxas (a juros compostos) de $\frac{12}{n}$ % em cada período. O montante, ao final de um mês, em função de n , é dado pela expressão

$$M = \left(1 + \frac{12}{n}\right)^n$$

O que acontece quando n cresce indefinidamente?

Esse problema foi formulado pela primeira vez em 1683 por *Jacob Bernoulli* (1654 - 1705) e respondida por *Leonhard Euler*.

Para respondê-lo foi necessário saber calcular o valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para valores crescentes de n .

Usando a fórmula do binômio de *Newton*, *Bernoulli* calculou $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e provou que, qualquer que seja o número n , esse valor está entre 2 e 3.

ATIVIDADE 12

Objetivo:

Obter uma aproximação para o número e .

Enunciado:

Calcule $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 .

Texto:

O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ foi estudado por *Euler* e posteriormente denotado pela letra e . Ele chegou a calcular uma aproximação com 18 casas decimais: $e \approx 2,718281828459045235$. Uma demonstração para a irracionalidade de e pode ser encontrada no livro *Um curso de cálculo*, Hamilton Luiz Guidorizzi, 5ª edição, Volume 1, Editora LTC, 2015.

Observe que os valores encontrados na atividade 12 são aproximações para o número e . O número e acima é a base do chamado logaritmo natural, usualmente indicado por $\ln$, isto é, $\log_e x = \ln x$. Esse é o logaritmo mais importante no mundo científico, porque seu uso simplifica fórmulas que, com outros logaritmos, seriam mais complicadas.

Comentários:

Por questão de tempo, devido às dificuldades encontradas no decorrer das atividades anteriores, as atividades 10, 11 e 12 foram sugeridas como lição de casa, entre o segundo e terceiro encontros, mas nenhum professor veio nos procurar para tecer algum comentário sobre a lição. Conhecimentos básicos sobre Matemática Financeira são essenciais para a formação de

cidadãos críticos. O fato de nenhum professor ter nos procurado para esclarecimentos de dúvidas, deixou-nos um tanto frustrados, visto que as atividades 10, 11 e 12 não apresentavam grandes dificuldades e eram meras aplicações do que havia sido estudado até aquele momento.

Estudos complementares, aprofundamento e leituras devam fazer parte da rotina de um professor. Ele deve ser consciente de que a lição de casa é importante para que se desenvolva autonomia e se possa revisar e refletir sobre os conceitos aprendidos em sala de aula.

ATIVIDADES 13 E 14

Objetivo:

Construir e observar as propriedades dos gráficos das funções $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Texto:

VII - Introdução às Funções Logarítmicas

Nos encontros anteriores reforçamos as relações que as tabelas de logaritmos possuem. Tais tabelas podem ser construídas tomando-se uma PG de razão q e primeiro termo igual a 1 na coluna da esquerda, e uma PA de razão r e primeiro termo igual a 0 na coluna da direita. Com isso, as seguintes propriedades podem ser verificadas:

1. *produto na coluna da PG corresponde à soma na coluna da PA;*
2. *quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA;*
3. *n -ésima potência na coluna da PG corresponde ao produto por n na coluna da PA;*
4. *raiz n -ésima na coluna da PG corresponde ao quociente por n na coluna da PA.*

Também definimos que, em uma tabela de logaritmos, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo. Por exemplo, dada a tabela de logaritmos a seguir, tem-se $\log 1 = 0$, $\log q = r$, $\log q^2 = 2r$, ... , $\log q^n = nr$, com $n \in \mathbb{N}$.

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
...	...
q^n	nr

Tabela 13A

Como vimos nas aulas anteriores, é possível estender a tabela para n inteiro, bem como para n racional.

Para as atividades 13 e 14, você irá utilizar as tabelas 14A e 15A :

Tabela 14A

PG	PA
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
$\frac{1}{2}$	- 1
$\frac{1}{4}$	- 2
$\frac{1}{8}$	- 3
$\frac{1}{16}$	- 4
$\frac{1}{32}$	- 5

Tabela 15A

PG	PA
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{16}$	4
$\frac{1}{32}$	5
2	- 1
4	- 2
8	- 3
16	- 4
32	- 5

Enunciado da ATIVIDADE 13:

- Qual a diferença entre estas duas tabelas e as demais tabelas já estudadas?
- Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 14A.

Vamos, a seguir, admitir que o gráfico da função $y = \log_2 x$ seja obtido ligando-se os pontos já encontrados acima com uma curva suave e crescente. Responda:

- c) Para $0 < x < 1$, o que ocorre com os valores de y ? E para $x > 1$?
- d) Para que y aumente de 1 para 2, os valores de x variam em qual intervalo? Para que y aumente de 2 para 3, os valores de x variam em qual intervalo? Para y aumentar de 3 para 4, quanto aumenta o x ?
- e) Tente descrever com palavras como é o crescimento dessa função.
- f) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_2 x \geq 2$?

Enunciado da ATIVIDADE 14:

- a) Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 15A.

- b) O que você pode concluir sobre os valores de y para $0 < x < 1$? E para $x > 1$?
- c) Qual a principal diferença entre o gráfico esboçado e o da função $y = \log_2 x$? Como você poderia justificar esse fato?
- d) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_1 x \geq 2$?

$\frac{2}{2}$

Comentários:

Após refletir sobre o andamento das atividades 13 e 14, concluímos que o modo como foram colocadas as tabelas 14A e 15A, com os termos da PA “fora da ordem crescente” podem ter dificultado a compreensão dessas atividades.

Alguns participantes esboçaram gráficos que não condiziam com as funções solicitadas e, alguns deles, nem representavam funções. Também notamos que poucos conheciam o comportamento de uma função logarítmica. Houve também professores que se confundiram com a escala dos gráficos, marcando no eixo dos x , os números 1, 2, 4, 8, 16 e 32 igualmente espaçados. Mas, apesar dos entraves observados e, com o auxílio das atividades investigativas, acreditamos que a maioria dos professores conseguiu compreender como se comporta uma função logarítmica e, com o auxílio de seu gráfico, resolver algumas inequações logarítmicas.

Texto:

É possível verificar a seguinte propriedade:

1. Sempre que a base b é tal que $b > 1$, ($b \in \mathbb{R}$), o gráfico da função $y = \log_b x$ se comporta como no item b) da atividade 13, ou seja, é uma função estritamente crescente que cruza o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$ e passa pelo ponto $(b, 1)$.
2. Se a base b é tal que $0 < b < 1$, o gráfico da função $y = \log_b x$ se comporta como no item a) da atividade 14, ou seja, é uma função estritamente decrescente que também cruza o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$ e passa pelo ponto $(b, 1)$.

ATIVIDADE 15

Objetivo:

Descobrir e construir uma tabela adequada para poder responder às perguntas propostas.

Enunciado:

1. Crie uma tabela de logaritmos de modo a poder responder aos seguintes itens:

a) $\log_2 64 =$

b) $\log_2 \frac{1}{8} =$

c) $\log_2 \sqrt{32} =$

d) $\log_2 0,0625 =$

2. Agora, crie outra tabela para responder aos demais itens:

a) $\log_{\frac{1}{10}} 1 =$

b) $\log_{\frac{1}{10}} 10 =$

c) $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10} =$

d) $\log_{\frac{1}{10}} 0,0001 =$

e) $\log_{\frac{1}{10}} 100 =$

Comentários:

A atividade transcorreu de forma satisfatória e a maioria dos professores pareceu ter compreendido como se constrói uma tabela de logaritmos, aplicando a definição que lhes foi apresentada e trabalhando com as propriedades dessa ferramenta.

ATIVIDADE 16**Objetivo:**

Chegar à definição usual de logaritmos.

Enunciado:

Seja $b > 0$ e $b \neq 1$ um número qualquer.

a) Complete a tabela 16A a seguir.

PG	PA
1	0
b	1
b^2	
	7
	-2
b^{-8}	
	-13
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{4}$
b^n	

Tabela 16A

b) Usando a tabela acima, calcule os valores de:

- $\log_b 1 =$
- $\log_b b =$
- $\log_b b^2 =$
- $\log_b b^{-8} =$
- $\log_b x = 7 \Leftrightarrow$
- $\log_b b^n =$
- $\log_b x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
- $\log_b x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

Agora sim, podemos concluir que, satisfeitas as condições de existência,

$$\log_b a = c \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

Comentários:

Nesta oficina, a equivalência $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$ foi construída aos poucos e concluída no final de um trabalho que privilegiou a investigação e a autonomia dos participantes, cabendo aos ministrantes o papel de tutores-orientadores do processo. Esse mesmo papel pode ser desempenhado pelos professores em sala de aula, visto que eles são os atores fundamentais do processo educativo e têm um papel fundamental na formação dos alunos, incentivando-os e despertando neles o interesse e a viabilidade de um forte elemento investigativo no aprendizado da Matemática.

ATIVIDADE 17

Objetivo:

Resolver exercícios tradicionais usando os conhecimentos obtidos até então, de modo a perceber a validade da equivalência $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$.

Enunciado:

Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_{0,25} 4 =$

b) $\log_{0,25} 16 =$

c) $\log_{0,25} 32 =$

d) $\log_{\frac{1}{2^2}} 2^4 =$

e) $\log_2 \sqrt{2} =$

f) $\log_8 \sqrt{2} =$

g) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{27} =$

h) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} =$

Comentários:

Nesta atividade, a grande maioria dos participantes ao invés de tentar utilizar conhecimentos obtidos ao longo da sequência didática, recorreu à definição usual de logaritmos para realizar os cálculos. Este fato já era esperado, devido a algumas bases dos logaritmos não serem números naturais.

ATIVIDADE 18

Objetivo:

Resolver alguns problemas que fazem parte do repertório do conhecimento de logaritmos.

Enunciado:

Resolva os seguintes problemas:

1. (FUVEST) – Pressionando a tecla *log* de uma calculadora científica, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 8 8 8 8 8 8 8 8 (oito oitos). Quantas vezes a tecla precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

2. a) As indicações R_1 e R_2 na fórmula abaixo, expressam a relação entre as magnitudes, na escala Richter, de dois terremotos:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$$

em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\frac{M_1}{M_2}$. Interprete o resultado.

b) O terremoto de 1989 na Califórnia teve uma magnitude de 7,1 na escala Richter. Quantas vezes maior foi o abalo sísmico do terremoto de 1906 em São Francisco que mediu 8,4 na mesma escala?

3. A população da cidade A tem, atualmente, 50.000 pessoas e cresce a uma taxa de 3,5% ao ano. A população da cidade B tem, hoje, 250.000 pessoas, porém cresce mais devagar, a uma taxa de 1,6% ao ano. Assumindo que a taxa de crescimento da população de cada cidade se mantém constante, quando a população da cidade A alcançará a da cidade B ?
Dados: $\log_{10} 1,019 \approx 0,008$ e $\log_{10} 5 \approx 0,700$.

Comentários:

Não foram todos os participantes que tiveram tempo de resolver os problemas propostos na atividade 18, entretanto aqueles que tentaram resolvê-los, conseguiram obter as respostas esperadas. Os professores apresentaram muitas dificuldade na compreensão do enunciado do problema 1.

3.3 – Comentários Finais sobre a SDP₁

A partir de observações feitas durante a aplicação da SDP₁ na oficina oferecida pelo CAEM, acreditamos que nosso objetivo foi alcançado, visto que mais de 50% dos professores participantes fizeram todas as atividades de forma satisfatória, ou seja, compreenderam as propriedades apresentadas por tabelas especiais de PA e PG, em que o número 0 na PA corresponde ao número 1 na PG. Além disso, conjecturaram, validaram tais conjecturas e, por fim, chegaram à definição usual de logaritmo. O fato de alguns participantes não terem familiaridade com operações envolvendo potências e raízes nos alertou para a necessidade de uma sequência didática sobre logaritmos ser iniciada com atividades sobre tais temas. A dificuldade encontrada para se esboçar gráficos de funções exponenciais e logarítmicas também foi uma preocupação. Todavia, as manifestações de satisfação feitas pelos participantes foram animadoras e nos deixaram muito satisfeitos. Além disso, vários professores se mostraram animados a aplicar, junto a seus alunos, uma sequência didática semelhante.

3.4 - Finalização da Oficina

Ao final da oficina foi aplicado mais um questionário, tendo por objetivo saber a opinião dos professores a respeito do desenvolvimento das aulas e do alcance do aprendizado. A seguir, seguem o questionário e as respostas dadas por 21 professores e 3 alunos. Os números e as manifestações de satisfação mostram que a oficina teve ótima aprovação.

1) Você aprendeu alguma coisa nova nesta oficina? O quê?

- A história dos logaritmos e suas propriedades importantes.
- A definição de logaritmos a partir da relação entre tabelas de PA e PG.
- Maneiras atrativas de se apresentar os logaritmos.
- Além do método tradicional, tudo foi novidade.
- Relação entre Matemática financeira e PA e PG.
- Como construir uma tábua de logaritmos, como inserir novos números nessas tábuas.
- Como associar gráficos com a resolução de inequações logarítmicas.
- Estimular o raciocínio para entender o funcionamento de certas propriedades.

- Infelizmente por eu não saber, não estar por dentro das propriedades do logaritmo, não absorvi tanto assim, mas gostei muito da oficina.
- Construir a teoria dos logaritmos a partir de tabelas, de forma intuitiva, sem necessidade de impor regras e operações diretamente.
- Não abordar o assunto a partir de uma forma decorada.
- Consegui ter mais noção do que é realmente um logaritmo, não apenas o sentido da fórmula.

2) Você acha que a abordagem apresentada sobre logaritmo ajuda a motivar o aprendizado?

Sim	Em parte	Não
24	0	0

3) Você achou a oficina sobre logaritmos:

Muito fácil	Fácil	Mais ou menos	Difícil	Muito difícil
4	7	10	3	0

4) Após esta oficina, você acha que poderia usar este tipo de enfoque para introduzir o tema para seus alunos?

Sim	Depende do tempo disponível	Depende da autorização da coordenação da Escola	Nunca
20	4	0	0

5) Comentários feitos pelos participantes:

- Agora preciso treinar bastante. A oficina foi muito boa.
- Adorei todo o conteúdo transmitido. Foi muito bom saber o lado histórico dos logaritmos.
- Oficina bem interessante. Foi de grande ajuda para mim que ainda não terminei a graduação.
- Ótima exposição dos professores Daniel e Martha. Gostaria de visualizar mais sobre o logaritmo natural.
- Apesar de eu ter facilidade com as contas dos logaritmos em geral, não foi fácil de se resolver os problemas contextualizados. Creio que o curso de Licenciatura em Matemática poderia ter mais situações-problema como as desse tipo.

- Todo o conteúdo foi ministrado de forma a estimular o raciocínio, e isto, na minha opinião, foi um divisor de águas na maneira de como preparar uma ótima aula!
- Gostei muito da oficina e gostaria de me aprofundar no tema. Adorei o método utilizado.
- Muito interessante a oficina e a abordagem do tema, acho válido ter outras oficinas com a mesma abordagem, mas para outros temas.
- Gostei da oficina e espero que haja mais oficinas aos sábados para que pessoas de outras cidades possam participar.
- A oficina foi excelente. Obrigado pelos ensinamentos.

Capítulo 4

Sequência Didática Reformulada para Professores

Após termos ministrado a oficina para professores no CAEM, concluimos que, de modo geral, as atividades planejadas favoreceriam o aprendizado eficaz do significado e das propriedades de logaritmos. Entretanto, decidimos fazer algumas alterações, aperfeiçoando a sequência de acordo com fatos observados durante as aulas, alterando a ordem em que foram dispostas algumas atividades, acrescentando e suprimindo itens.

Depois de verificarmos algumas dificuldades encontradas por participantes da oficina, achamos necessário iniciar a sequência didática com a atividade 1, que explora o significado de raízes, seguida da atividade 2, que apresenta uma maneira de introduzir os significados de potências com expoentes nulo, negativos, fracionários e irracionais.

A atividade 7, também nova, foi acrescentada para tratar das propriedades já vistas nas tabelas das atividades anteriores, mas já se apropriando da notação de logaritmo. A atividade 10 desta sequência substituiu a atividade 7 da SDP₁, pois verificamos a necessidade de acrescentar alguns passos para que os participantes compreendessem qual é a base de um logaritmo dada uma tabela em que a PA não possui razão igual 1. Acrescentamos também a atividade 11, que relaciona raiz, potência e logaritmo.

As atividades 17 e 18 desta sequência correspondem às atividades 13 e 14 da SDP₁ e diferem na ordem dos elementos dispostos nas tabelas, pois como mencionado nos comentários das atividades 13 e 14 da SDP₁, a ordem anterior confundiu alguns participantes.

Decidimos também acrescentar, nesta sequência, as atividades de 22 a 25. Estas tratam sobre a inversa da função logarítmica, preservando o espírito da construção do conhecimento por meio de investigação matemática. O tema de funções inversas é um assunto vasto e que exige um cuidado especial, com muitos pré-requisitos. Optamos por uma abordagem relativamente simples e sucinta, que não esgota esse assunto, porém se estrutura em uma base sólida e coerente com aquilo que já havia sido feito anteriormente.

A seguir, apresentamos a sequência reformulada, chamada de SDP₂.

4.1 – Apresentação da SDP₂

ATIVIDADE 1 (Nova)

Objetivo:

Apresentar o conceito de raiz a partir de um viés geométrico, que possa auxiliar o professor a revisar o significado de raízes quadradas e cúbicas, por intermédio de questionamentos simples.

Enunciado:

I - Significado de Raiz Quadrada de um Número Positivo

Sabemos que o quadrado que tem 25 cm^2 de área, possui lado medindo 5 cm. Uma representação geométrica para esse fato pode ser dada pelo diagrama da figura 9.

Figura 9

Também sabemos que o quadrado de área $\frac{4}{9}$, tem lado medindo $\frac{2}{3}$.

Vejamos a interpretação geométrica na figura 10.

Figura 10

- a) Se você quer construir um quadrado de área $\frac{1}{4}$, qual deve ser a medida do seu lado?

Represente isso geometricamente.

- b) Qual é a medida do lado do quadrado que tem área igual a 7?

Dado um número real positivo a , o número real positivo b que satisfaz $b^2 = a$ é chamado *raiz quadrada* de a e é representado por $b = \sqrt{a}$.

II - Significado de Raiz Cúbica

- a) Qual é a medida da aresta de um cubo cujo volume é 27 cm^3 ? Represente geometricamente na figura a seguir.

Figura 11

- b) Qual é a medida da aresta de um cubo cujo volume é 15 cm^3 ? Represente geometricamente esse resultado.

Dado um número real $a > 0$, o número real b que satisfaz $b^3 = a$ é chamado *raiz cúbica* de a e é representado por $b = \sqrt[3]{a}$.

Observe que, do ponto de vista geométrico, só lidamos com números positivos (comprimentos de lados e volumes). Por outro lado, do ponto de vista algébrico, como $(-2)^3 = -8$, podemos definir $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

- c) Determine os valores de: $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{-1}$ e $\sqrt[3]{(-5)^3}$.
- d) Se $a < 0$, sempre existe $\sqrt[3]{a}$? Em caso afirmativo, esse número é positivo ou negativo?

Generalização

- e) Qual nome você daria para o número x tal que $x^4 = 11$? Represente esse número como um símbolo matemático.
- f) Se $a > 0$, que nome você daria para o número x tal que $x^{10} = a$? Represente esse número como um símbolo matemático.

- g) Há um teorema importante que afirma: “sejam $a > 0$ um número real e $n \geq 2$ um número natural. Então existe um único número real x tal que $x^n = a$.” Represente esse número x como um símbolo matemático.
- h) Use as propriedades das raízes e simplifique:
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$
 - $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$

ATIVIDADE 2 (Nova)

Objetivo:

Apresentar, a partir da propriedade

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (*)$$

uma maneira de introduzir potências de expoentes nulo, fracionário e negativo. A definição de a^x , com x irracional, requer conhecimento matemático mais profundo e é apresentada na parte 4 desta atividade.

Enunciado:

III - Propriedades de Potência

Para o que segue, considere a um número maior que zero. Uma propriedade fundamental das potências é:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \text{ para todos os números naturais } n \text{ e } m. \quad (*)$$

Por exemplo, $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^5$.

Gostaríamos de estender a notação de potências para expoentes não necessariamente naturais, preservando essa importante propriedade. Vamos ver como.

1. Expoente nulo

Se quisermos definir um valor para a^0 , de modo que a propriedade fundamental (*) continue válida, o que você poderia fazer?

Dica: admita que vale a propriedade (*) para $a^n \cdot a^0$ e veja o que acontece.

2. Expoente negativo

a) De maneira análoga, como seria possível definir a^{-1} ?

Dica: suponha a propriedade (*) válida para $a^{-1} \cdot a$.

b) Como seria possível definir a^{-3} ?

c) Como seria possível definir a^{-n} ?

3. Expoente racional

a) Se quisermos definir $a^{\frac{1}{2}}$ de modo que a propriedade fundamental continue valendo, o que você poderia fazer?

Dica: use a propriedade para $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$.

Você deve ter percebido que $a^{\frac{1}{2}}$ é o número que satisfaz $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$. Que símbolo matemático você usaria para representar $a^{\frac{1}{2}}$?

b) De maneira análoga, se quisermos definir $a^{\frac{1}{3}}$ de modo a preservar a propriedade fundamental, o que você poderia fazer?

Você deve ter percebido que $a^{\frac{1}{3}}$ é o número que satisfaz $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a$. Que símbolo matemático você usaria para representar $a^{\frac{1}{3}}$?

c) Se n é um número natural, como você definiria $a^{\frac{1}{n}}$?

d) Como você escreveria $\sqrt[n]{a^4}$ na forma de potência? Por quê?

4. Expoente irracional

Texto:

Qual é o significado de a^x , se x é um número irracional?

Para podermos responder a essa pergunta, inicialmente trabalharemos com o caso $a = 2$. Observe uma representação do gráfico da função $y = 2^x$, com x racional.

Sabemos que entre dois números racionais sempre existe um número irracional. Assim sendo, o gráfico de $y = 2^x$, com x racional, tem a seguinte representação.

Figura 12

Os “buracos” no gráfico da figura 12 correspondem a valores irracionais de x . Queremos aumentar o domínio dessa função para incluir os números irracionais, preenchendo os pontos que estão faltando de modo a obter um gráfico que seja contínuo (sem lacunas) e crescente, como na figura 13:

Figura 13

Vamos mostrar o exemplo de $x = \sqrt{3}$.

Como $1 < 3 < 4$, podemos concluir que $1 < \sqrt{3} < 2$.

Vamos agora determinar duas aproximações com uma casa decimal de $\sqrt{3}$, uma por falta, a_1 , e outra por excesso, b_1 , de modo que a diferença entre elas seja 0,1.

Sendo $(1,7)^2 = 2,89$ e $(1,8)^2 = 3,24$, temos que

$$a_1 = 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 = b_1$$

Queremos que a função $y = 2^x$ seja crescente, logo devemos ter:

$$2^{a_1} = 2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} = 2^{b_1}$$

Como 1,7 e 1,8 são números racionais, os números $2^{1,7}$ e $2^{1,8}$ estão bem determinados.

Enunciado:

- a) Determine duas aproximações de $\sqrt{3}$ com duas casas decimais, sendo a_2 por falta e b_2 por excesso, de modo que a diferença entre elas seja 0,01.
- b) Complete: $a_2 = \dots < \sqrt{3} < \dots = b_2 \Rightarrow \dots < 2^{\sqrt{3}} < \dots$
- c) Faça o mesmo com aproximações de 3 e 4 casas decimais de modo que as diferenças sejam 0,001 e 0,0001, respectivamente.

$$a_3 = \dots < \sqrt{3} < \dots = b_3 \Rightarrow \dots < 2^{\sqrt{3}} < \dots$$

$$a_4 = \dots < \sqrt{3} < \dots = b_4 \Rightarrow \dots < 2^{\sqrt{3}} < \dots$$

Texto:

Continuando esse processo indefinidamente, é possível demonstrar que existe exatamente um número real maior que todos os números $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}, \dots$ e menor que todos os números $2^{b_1}, 2^{b_2}, 2^{b_3}, 2^{b_4}, \dots$. Esse número é definido como $2^{\sqrt{3}}$.

Figura 14

Por esse processo, podemos concluir que uma aproximação com três casas decimais de precisão é $2^{\sqrt{3}} \approx 3,3212$. De modo análogo, definimos 2^x para todo x irracional.

No caso de outras bases a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, o procedimento para se calcular $y = a^x$, para x irracional, é o mesmo.

Enunciado:

Esboce os gráficos de:

- d) $y = 3^x$
- e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

ATIVIDADE 3 (Corresponde à ATIVIDADE 1 da SDP₁)

A única modificação em relação à atividade 1 da SDP₁, está na tabela 1B, na qual foram suprimidas as numerações das linhas, para evitar os problemas ocorridos na aplicação daquela atividade.

Enunciado:

IV - Progressão Geométrica × Progressão Aritmética

PG	PA
1	0
2	3
4	6
8	9
16	12
32	15
64	18
128	21
256	24
512	27
1.024	30
2.048	33
4.096	36
8.192	39
16.384	42
32.768	45
65.536	48
131.072	51
262.144	54
524.288	57
1.048.576	60

Tabela 1B

- a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 4 pelo termo da linha 6.
- b) Na coluna da PA, some o termo da linha 4 com o termo da linha 6.
- c) Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Na mesma linha ou em linhas diferentes?
- d) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- e) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha do termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- f) Calcule $(64)^2$ e verifique se o resultado está na tabela. Faça também 2×18 e compare as localizações dos resultados.

- g) Calcule 2×16 e $3 + 12$ e localize os resultados na tabela.
- h) Efetue 256×1024 e $24 + 30$. Confira em que linhas estão os resultados.
- i) Efetue $524.288 \div 16.384$ e $57 - 42$. Confira onde estão os resultados.
- j) O que você reparou até agora?
- k) É possível efetuar as operações de multiplicação e divisão sem muito trabalho, usando a tabela acima? Descreva como.
- l) Como você pode obter o resultado de $(32)^3$ usando a tabela?
- m) Como você pode obter o valor de $\sqrt{65.536}$ apenas olhando para a tabela?

ATIVIDADE 4 (Corresponde à ATIVIDADE 2 da SDP₁)

Enunciado:

- 1- Preencha as tabelas abaixo, cada uma com os termos consecutivos de uma PG na primeira coluna e os termos consecutivos de uma PA na segunda coluna. Para a tabela 2B, escolha uma PG que tenha razão $q > 1$ e, na tabela 3B, escolha uma razão $0 < q < 1$. Nas progressões aritméticas, escolha razões r positivas.

PG	PA
1	0

Tabela 2B

PG	PA
1	0

Tabela 3B

2- Para cada uma das tabelas que você construiu, responda às seguintes questões:

- a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 4.
- b) Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 4.
- c) Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em quais linhas?
- d) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha.
Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- e) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha.
Confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- f) Calcule o quadrado do termo que está na quinta linha da PG.
- g) Calcule o dobro do termo que está na quinta linha da PA.
- h) Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 7 e a terça parte do termo da PA que está na mesma linha.
- i) O que você reparou até agora?

ATIVIDADE 5 (Corresponde à ATIVIDADE 3 da SDP_I)

A única modificação em relação à atividade 3 da Seção 3.2 está na pergunta 3, na qual acrescentamos a pergunta “Como você explicaria isso? ”, para que a atividade não seja apenas uma constatação, mas sim provoque uma reflexão e leve a uma argumentação.

Texto:

V - Sempre Funciona?

Apesar de termos a sensação ou até mesmo a convicção de que as propriedades observadas serão válidas sempre que colocarmos termos consecutivos de uma progressão geométrica ao lado de termos consecutivos de uma progressão aritmética, sendo que os termos iniciais são 1 e 0 respectivamente, rigorosamente ainda não nos é permitido afirmar com total segurança que tais propriedades valem para quaisquer PG e PA.

Enunciado:

Tome uma tabela cuja primeira coluna é a PG de razão $q > 0$, $q \neq 1$ com primeiro termo igual a 1. Os termos seguintes serão $q, q^2, q^3, \dots, q^m, \dots, q^n$. Na segunda coluna, tome uma PA de razão $r \neq 0$ com primeiro termo igual a 0. Os termos seguintes serão $r, 2r, 3r, \dots, mr, \dots, nr$.

1. Calcule o produto de dois termos quaisquer da PG e escreva o resultado em forma de uma só potência. Que termo é esse?
2. Na coluna da PA, calcule a soma dos termos correspondentes aos do item anterior e escreva o resultado em função de r .
3. Os resultados são correspondentes? Como você explicaria isso?
4. Verifique passo a passo a validade das demais propriedades no caso geral.

ATIVIDADE 6 (Corresponde à ATIVIDADE 4 da SDP₁)**Enunciado:**

Uma propriedade interessante das tabelas de PG $\times$ PA. Use a tabela 1B desta oficina e responda:

1. Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 9 e 21.
2. Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 8 e 128.
3. Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em quais linhas?
4. Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 24 e 54.
5. Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 256 e 262.144.
6. Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em quais linhas?
7. Explique, com suas palavras, o que você reparou. Você acredita que a propriedade observada vale para outros termos da tabela?

ATIVIDADE 7 (Nova)

Objetivo:

Apropriar-se da notação e das propriedades dos logaritmos, usando uma tabela específica.

Texto:

VI – Logaritmos

Com o que observamos até agora já é possível perceber o potencial das tabelas que estamos montando: em vez de fazermos cálculos envolvendo contas de multiplicação, divisão, potências ou raízes, podemos, de posse das tabelas, fazer contas mais simples, respectivamente de adição, subtração, multiplicação ou divisão por um número natural.

Por exemplo, usando a primeira tabela, em vez de efetuarmos 128×8.192 , podemos somar os valores da PA que são correspondentes na tabela: $21 + 39 = 60$ e, olhando novamente a tabela, podemos concluir que $128 \times 8.192 = 1.048.576$.

Tabelas como as que vimos nas atividades anteriores são exemplos de tábuas de logaritmos. *John Napier* (1550 - 1617) publicou, em 1614, um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Regra de *Logaritmos*), depois de ter trabalhado por quase 20 anos produzindo uma tábua de logaritmos.

O suíço *Joost Bürgi* (1552 - 1632), fabricante de relógios e instrumentos de astronomia e matemático, também criou, independentemente, tábuas de logaritmos, mas as publicou seis anos depois de *Napier*.

Segundo Eves (2004), a *Descriptio* despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação, *Henry Briggs* (1561 - 1631) viajou de Oxford até Edimburgo para visitar *Napier*. Durante a visita, ambos concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas. Em 1624, *Briggs* publicou o livro *Arithmetica logarithmica* que continha uma tábua de logaritmos decimais dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Acredita-se que *Napier* e *Bürgi* foram influenciados pelo livro de *Michael Stifel* (1486 - 1567), tendo percebido que sua utilização seria extremamente importante para o desenvolvimento da ciência, facilitando cálculos utilizados nas grandes navegações, na astronomia e na engenharia entre outros, e assim passaram a criar longas tabelas. Tábuas de logaritmos foram utilizadas durante vários séculos, sendo finalmente substituídas por calculadoras e computadores a partir de 1960.

A invenção dos logaritmos foi rapidamente espalhada pelo mundo por matemáticos que passaram a usar as tabelas na Itália, França, Alemanha e até mesmo na China, ainda no século XVII.

A notação que usamos hoje para os logaritmos foi estabelecida por *Leonhard Euler* (1707 - 1783), responsável também por notar a relação dos logaritmos com a função exponencial, no século XVIII.

VII - Definição Preliminar de Logaritmo

Vejamos como funciona a notação, tendo a tabela abaixo como referência:

PG	PA
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6

Tabela 4B

Em uma tabela de logaritmo, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo. Por exemplo, podemos dizer que o logaritmo de 1 é igual a 0, e escrevemos $\log 1 = 0$. Analogamente, temos: $\log 3 = 1$, $\log 9 = 2$, $\log 27 = 3$, $\log 81 = 4$, $\log 243 = 5$, $\log 729 = 6$.

Observando a tabela 1B desta oficina, podemos dizer que o logaritmo de 512 é 27 e escrevemos $\log 512 = 27$. Para obtermos o produto de dois números que estão na coluna da esquerda primeiramente somamos seus logaritmos. O resultado dessa soma é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tabela, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Por exemplo, em vez de calcularmos diretamente o produto 128×32 , podemos fazer o seguinte:

$$\begin{array}{rcl}
 128 & \rightarrow & 21 \\
 \times & \rightarrow & + \\
 32 & \rightarrow & 15 \\
 \hline
 (4.096) & \leftarrow & 36
 \end{array}$$

Figura 15

Note que deixamos de fazer diretamente a multiplicação e, em vez disso, efetuamos uma adição. Repare que a maneira como escolhemos para indicar o que foi feito não é a convencional, mas acreditamos que seja sugestiva. A mesma ideia, escrita com a notação usual de logaritmos, fica assim: $\log(128 \cdot 32) = \log 128 + \log 32 = 21 + 15 = 36$.

Portanto, olhando de volta a tabela, conclui-se que $128 \cdot 32 = 4.096$.

Enunciado:

1- Complete, usando a tabela 1B.

a) $\log 1.024 =$

b) $\log 4.096 =$

c) $\log 262.144 =$

2- Determine o produto 512×1024 , sem efetuar a multiplicação diretamente. Escreva a solução como notação de logaritmo.

3- Determine os resultados a seguir, escrevendo-os com a notação de logaritmo.

a) $128 \times 8.192 =$

b) $131.072 \div 32 =$

c) $512^2 =$

d) $64^3 =$

e) $\sqrt{1.048.576} =$

f) $\sqrt[3]{16.384} =$

ATIVIDADE 8 (Corresponde à ATIVIDADE 5 da SDP₁)

Enunciado:

Seja $a_n = 3^n$ um termo genérico da PG da tabela 4B.

a) Determine, em termos de n , qual o valor de $\log a_n$.

b) Qual o valor de $3^{\log a_n}$?

ATIVIDADE 9 (Corresponde à ATIVIDADE 6 da SDP₁)

Texto:

VIII - Base de Logaritmos

Observe as tabelas a seguir:

PG	PA
1	0
3	2
9	4
27	6
81	8
243	10

Tabela 5B

PG	PA
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5

Tabela 6B

Na tabela 5B, tem-se $\log 3 = 2$ e, na tabela 6B, tem-se $\log 3 = 1$. Isso não é uma incoerência? Na verdade, não: existem vários logaritmos. Para distinguirmos uns dos outros precisamos da noção de base do logaritmo.

Enunciado:

Dada a tabela 7B a seguir, complete:

$$\log 1 = \dots \quad \log q = \dots \quad \log q^2 = \dots \quad \log q^3 = \dots \quad \log q^4 = \dots \quad \log q^n = \dots$$

PG	PA
1	0
q	1
q^2	2
q^3	3
q^4	4
q^5	5

Tabela 7B

Você reparou que o expoente de q coincide com o logaritmo de q^n ?

A propriedade $\log q^n = n$ é boa, pois facilita certas contas e deduções. Isso acontece em todas as tabelas anteriores?

Voltemos à tabela 1B. Ali vemos que $\log 1 = 0$, $\log 2 = 3$, $\log 2^2 = 6$, $\log 2^3 = 9$ etc. Ou seja, neste caso, não temos a propriedade $\log q^n = n$. Mas observamos que $\log 2^n = 3n$. Em geral, em uma tabela em que a PG tem razão $q > 0$ e a PA tem razão $r \neq 0$, tem-se $\log(q^n) = nr$.

Para se ter a propriedade $\log q^n = n$, a PA deve ter razão $r = 1$. Se r é um número racional não nulo e diferente de 1, podemos aumentar ou diminuir o número de linhas da tabela, de modo que a razão da PA passe a ser igual a 1.

ATIVIDADE 10 (Nova, em substituição à ATIVIDADE 7 da SDP₁)

Objetivo:

Já verificamos que a propriedade $\log q^n = n$ é interessante e útil, porém está restrita a tabelas em que a PA tem razão 1. Esta atividade pretende mostrar que, caso uma tabela apresente uma PA com razão diferente de 1, é possível interpolar meios aritméticos de forma a criar uma tabela ampliada, com uma nova PA, desta vez com razão igual a 1.

Enunciado:

- a) Quais são as razões das PGs das tabelas abaixo?

PG	PA
1	0
	1
	2
8	3

Tabela 8B

PG	PA
1	0
	1
3	2

Tabela 9B

b) Complete as tabelas abaixo:

PG	PA
1	0
	1
	2
8	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
	10

Tabela 10B

PG	PA
1	0
	1
3	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
	10

Tabela 11B

c) Qual é a base dos logaritmos da tabela abaixo?

PG	PA
1	0
5	$\frac{2}{3}$

Tabela 12B

d) Considere a tabela a seguir. Existe um número b que satisfaz $\log(b^n) = n$? Se sim, qual é ele?

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
q^3	$3r$
q^4	$4r$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
q^n	nr

Tabela 13B

O número b encontrado no item anterior é chamado *base do logaritmo*.

Uma observação importante a ser feita é que a PA escolhida é apenas um auxiliar. Para calcularmos, por exemplo, 16×32 usando uma tabela de logaritmos que tenha PG de base 2 na

primeira coluna, tanto faz qual a PA utilizada. Sendo assim, o mais simples a fazer é escolher a PA de razão $r = 1$.

Texto:

IX - Definição de Logaritmo

Para se diferenciar os vários tipos de logaritmo, convencionou-se usar uma notação que indica qual é a base do logaritmo que está sendo usado. Assim, na tabela 6B, a base é 3 e escrevemos: $\log_3 1 = 0$, $\log_3 3 = 1$, $\log_3 9 = 2$ e, assim por diante.

Analogamente, na tabela 7B, a base é q e temos $\log_q q^k = k$.

ATIVIDADE 11 (Nova)

Objetivo:

Verificar a compreensão das relações entre raiz, potência e logaritmo.

Enunciado:

Dê a resposta de cada item e, se necessário, consulte a tabela 5B reproduzida abaixo.

PG	PA
1	0
3	2
9	4
27	6
81	8
243	10

a) $\log_{\sqrt{3}} 3 =$

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

c) $\log_{\sqrt{3}} 243 =$

d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} =$

e) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^3 =$

f) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^{\sqrt{3}} =$

ATIVIDADE 12 (Corresponde à ATIVIDADE 8 da SDP₁)

Texto:

X - Aproximações

Evidentemente, as tabelas de logaritmos que construímos são bastante incompletas, já que com elas só conseguimos calcular operações envolvendo os números que lá estão e não com qualquer número. Para que a tabela seja útil, temos que fazê-la muito maior, de modo que possamos calcular qualquer produto como, por exemplo, 87×423 . Mas fazer a tabela mais completa requer considerar potências com outros expoentes além dos naturais: expoentes fracionários, negativos ou até irracionais. Os inventores dos logaritmos pensaram no problema de tornar a tabela mais completa e o resolveram de forma bastante engenhosa. Vamos ver como, para que possamos entendê-lo e apreciá-lo.

Considere a tabela abaixo, em que os números apresentados na primeira coluna têm 3 casas decimais de precisão. (A segunda coluna contém números racionais que são decimais exatos e por isso mantivemos todas as casas decimais.)

PG	PA
1	0
1,15	0,0625
1,334	0,125
1,778	0,250
3,162	0,500
10	1

Tabela 14B

Nosso objetivo é entender como inserir novos valores na tabela. Por exemplo, vamos achar uma aproximação para o valor de $\log_{10} 1,5$. É útil observar que, como a base do logaritmo é maior do que 1, os números que aparecem nas duas colunas estão em ordem crescente.

Enunciado:

Sabemos que $\log_{10} 1,5$ é um número irracional⁴. Obter uma aproximação para o valor de $\log_{10} 1,5$ com uma casa decimal de precisão.

⁴ Veja Apêndice A.

- Localize, na primeira coluna, entre quais números fornecidos na tabela 14B fica o número 1,5. Escreva em forma de desigualdade: $\dots < 1,5 < \dots$
- Complete $\dots < \log_{10} 1,5 < \dots$ e reescreva essa desigualdade.
- Tome a média aritmética m_1 dos dois números racionais encontrados no item anterior.
- Qual o correspondente ao número m_1 na coluna da PG?
- Note que agora você pode acrescentar uma linha à sua tabela:

PG	PA
1	0
10	1

Tabela 15B

- Com sua tabela aumentada, localize novamente entre quais novos números fica o 1,5 e complete: $\dots < \log_{10} 1,5 < \dots$
- Conclua que a primeira casa decimal de $\log_{10} 1,5$ tem que ser _____.

Assim, podemos dizer que uma aproximação, com uma casa decimal de precisão, para $\log_{10} 1,5$ é _____.

Ainda não conhecemos a segunda casa decimal. Para aumentar a precisão, basta repetir o processo.

ATIVIDADE 13 (Corresponde à ATIVIDADE 9 da SDP_I)

Enunciado:

Usando o mesmo método e os novos valores obtidos na tabela 15B, achar uma aproximação para $\log_{10} 1,5$ com duas casas decimais de precisão.

Texto:

Fazendo todas as contas com cuidado, vocês irão descobrir que 1,5 está entre 1,486 e 1,512 e, portanto, o valor de $\log_{10} 1,5$ está entre 0,171875 e 0,1796875. Mais precisamente, $0,171875 < \log_{10} 1,5 < 0,1796875$. Assim, teremos certeza de que a segunda casa decimal de $\log_{10} 1,5$ é 7. Assim, $\log(1,5) \approx 0,17$.

Sobre a terceira casa temos uma imprecisão enorme: está entre 1 e 9, conforme mostra a última desigualdade acima. Você já tem uma ideia do trabalho que dá achá-la à mão!

Segundo *Druck* (1995) “*Napier* publicou três tabelas que, juntas, calculavam com precisão até a sétima casa decimal, os logaritmos na base 10 dos números 4.998.609,4034 a 10.000.000. Ele trabalhou 20 anos para produzir esse trabalho. *Briggs*, um professor de Matemática em Oxford, produziu tabelas com precisão de 15 casas decimais. Devemos admirar e respeitar os matemáticos, navegadores e astrônomos do século XVII não só pela engenhosidade, mas também pela paciência com que dedicaram anos de suas vidas fazendo cálculos como os que mostramos acima para que a humanidade pudesse, depois, fazer outros cálculos mais rápida e facilmente. Durante quase 4 séculos que sucederam à descoberta dos logaritmos, sua utilidade revelou-se decisiva na Ciência e Tecnologia. Recentemente, com o uso cada vez mais comum de computadores e calculadoras, as tábuas de logaritmos não são mais úteis como instrumento de cálculo. Entretanto o estudo dos logaritmos é fundamental, pois o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são modelados por funções logarítmicas e por funções exponenciais. Finalmente, devemos mencionar que a definição de logaritmo do modo como é ensinado hoje na escola ($\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$) levou cerca de 200 anos para ser formulada. Todo esse tempo é certamente um sinal do grau de dificuldade que o conceito abarca”.

ATIVIDADE 14 (Corresponde à ATIVIDADE 10 da SDP₁)**Texto:****XI - Uma Aplicação à Matemática Financeira**

Existem duas modalidades bastante conhecidas de ganhos de juros sobre um capital. São chamados juros simples os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas

o capital inicial rende juros. Já nos juros compostos, após cada período de tempo a que se refere à taxa contratada, os juros ganhos são capitalizados (somados ao capital), passando a render juros também.

A tabela abaixo mostra os montantes (total do capital inicial mais os juros ganhos) no final de cada período de duas aplicações, ambas com um capital inicial de R\$ 1.000,00 aplicados a uma taxa de 10% ao mês. Na segunda coluna estão os montantes do capital aplicado a juros compostos e, na terceira coluna, os montantes do capital aplicado a juros simples.

Número de meses	Montante (Juros Compostos)	Montante (Juros Simples)
0	R\$ 1.000,00	R\$ 1.000,00
1	R\$ 1.100,00	R\$ 1.100,00
2	R\$ 1.210,00	R\$ 1.200,00
3	R\$ 1.331,00	R\$ 1.300,00
4	R\$ 1.464,10	R\$ 1.400,00
5	R\$ 1.610,51	R\$ 1.500,00

Tabela 16B

Na segunda coluna, o valor do montante em cada linha é a soma do valor anterior com 10% desse valor anterior. Também podemos afirmar que o valor em cada linha é o valor do montante da linha anterior multiplicado por 1,1. Logo, essa coluna é uma PG de razão 1,1.

Na terceira coluna, o valor do montante apresentado em cada linha é a soma do valor anterior com 10% do valor da linha correspondente ao mês 0, formando uma PA de razão 100.

Enunciado:

- Se, em vez de 10% de juros, fossem 5%, ainda teríamos uma PG na segunda coluna?
Em caso afirmativo, qual seria a razão?
- Os valores dos montantes em juros simples formam sempre progressões aritméticas?
Por quê?
- Os valores dos montantes em juros compostos formam sempre progressões geométricas? Por quê?

ATIVIDADE 15 (Modificada, em substituição à ATIVIDADE 11 da SDP₁)

Enunciado:

Um capital C é aplicado à taxa de juros de 100% ao ano. Se os juros forem creditados de uma só vez, ao final de um ano, o montante será de $C + 100\% \cdot C = C \cdot \left(1 + \frac{100}{100}\right) = 2C$.

Se forem creditados 50% de juros a cada 6 meses, o montante passa a ser, ao final dos 6 primeiros meses:

$$C_1 = C + 50\% \cdot C = C \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right) = C \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

e, após um ano, o montante será

$$C_2 = C_1 + 50\% \cdot C_1 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right) = \underbrace{C \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{C_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = C \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

- a) Se forem creditados juros de 25% a cada trimestre, qual será o montante após 1 ano?
- b) Para juros de $\frac{100}{12}\%$ a cada mês, qual será o montante após um ano?
- c) E para juros de $\frac{100}{52}\%$ a cada semana, qual será o montante ao final de um ano?
- d) Por fim, qual é o montante após um ano, para juros de $\frac{100}{365}\%$ a cada dia?

Você deve ter reparado que o montante, ao final de 1 ano, aumenta, conforme aumenta a frequência com que os juros são capitalizados.

Pergunta: Se subdividirmos mais e mais o período de tempo, o montante crescerá indefinidamente? Ou seja, se tivermos os juros capitalizados, a cada hora, ou a cada minuto etc., o montante irá crescer, tendendo ao infinito, ou irá estacionar em algum valor finito?

Imagine que haverá n capitalizações ao ano com taxas (a juros compostos) de $\frac{100}{n}\%$ em cada período. O montante, ao final de um ano, em função de n , é dado pela expressão

$$M = C \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

O que acontece quando n cresce indefinidamente?

Por volta do ano de 1683, motivado pela questão da Matemática Financeira, *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705) percebeu que a sequência de números dada por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ era estritamente crescente e que se estabilizadva em um certo valor.

Usando a fórmula do binômio de *Newton*, *Bernoulli* calculou $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e provou que, qualquer que seja o número n , esse valor está entre 2 e 3.

ATIVIDADE 16 (Correspondente à ATIVIDADE 12 da SDP₁, porém com o texto histórico modificado)

Enunciado:

Calcule $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 .

Texto:

O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ foi estudado por *Euler* e posteriormente denotado pela letra e . Ele chegou a calcular uma aproximação com 18 casas decimais: $e \approx 2,718281828459045235$. Uma demonstração para a irracionalidade de e pode ser encontrada no livro Um curso de cálculo, Hamilton Luiz Guidorizzi, 5ª edição, Volume 1, Editora LTC, 2015.

Observe que os valores encontrados na atividade 16 são aproximações para o número e . O número e acima é a base do chamado logaritmo natural. Esse é o logaritmo mais importante no mundo científico.

ATIVIDADES 17 E 18 (correspondem às atividades 13 e 14 da SDP₁)

(As tabelas 18B e 19B foram alteradas em relação às tabelas 14A e 15A da Seção 3.2.)

Texto:

XII - Introdução às Funções Logarítmicas

Nos encontros anteriores reforçamos as relações que as tabelas de logaritmos possuem. Tais tabelas podem ser construídas tomando-se uma PG de razão q e primeiro termo igual a 1

na coluna da esquerda, e uma PA de razão r e primeiro termo igual a 0 na coluna da direita. Com isso, as seguintes propriedades podem ser verificadas:

1. *produto na coluna da PG corresponde à soma na coluna da PA;*
2. *quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA;*
3. *n -ésima potência na coluna da PG corresponde ao produto por n na coluna da PA;*
4. *raiz n -ésima na coluna da PG corresponde ao quociente por n na coluna da PA.*

Também definimos que, em uma tabela de logaritmos, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo. Por exemplo, dada a tabela de logaritmos a seguir, tem-se $\log 1 = 0$, $\log q = r$, $\log q^2 = 2r$, ... , $\log q^n = nr$, com $n \in \mathbf{N}$.

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
...	...
q^n	nr

Tabela 17B

Como vimos nas aulas anteriores, é possível estender a tabela para n inteiro, bem como para n racional.

Para as atividades 17 e 18, você irá utilizar as tabelas abaixo:

PG	PA
$\frac{1}{32}$	-5
$\frac{1}{16}$	-4
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5

Tabela 18B

PG	PA
32	-5
16	-4
8	-3
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{16}$	4
$\frac{1}{32}$	5

Tabela 19B

Enunciado da ATIVIDADE 17: (corresponde à ATIVIDADE 13 da SDP₁)

- a) Qual a diferença entre estas duas tabelas e as demais tabelas já estudadas?
- b) Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 18B.

Vamos, a seguir, admitir que o gráfico da função $y = \log_2 x$ seja obtido ligando-se os pontos já encontrados acima com uma curva suave e crescente. Responda:

- c) Para $0 < x < 1$, o que você pode dizer sobre os valores de y ? E para $x > 1$?
- d) Para que y aumente de 1 para 2, os valores de x variam em qual intervalo? Para que y aumente de 2 para 3, os valores de x variam em qual intervalo? Para y aumentar de 3 para 4, quanto aumenta o x ?
- e) Tente descrever com palavras como é o crescimento dessa função.
- f) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_2 x \geq 2$?

Enunciado da ATIVIDADE 18: (Corresponde à ATIVIDADE 14 da SDP₁)

- a) Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 19B.

- b) O que você pode dizer sobre os valores de y para $0 < x < 1$? E para $x > 1$?
- c) Qual a principal diferença entre o gráfico esboçado e o da função $y = \log_2 x$? Como você poderia justificar esse fato?
- d) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$?

Texto:

É possível verificar a seguinte propriedade:

1. Sempre que a base b é tal que $b > 1$, ($b \in \mathbb{R}$), o gráfico da função $y = \log_b x$ se comporta como no item b) da atividade 17, ou seja, é uma função estritamente crescente que cruza o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$ e passa pelo ponto $(b, 1)$.
2. Se a base b é tal que $0 < b < 1$, o gráfico da função $y = \log_b x$ se comporta como no item a) da atividade 18, ou seja, é uma função estritamente decrescente que também cruza o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$ e passa pelo ponto $(b, 1)$.

ATIVIDADE 19 (Corresponde à ATIVIDADE 15 da SDP₁)

Enunciado:

1. Crie uma tabela de logaritmos de modo a poder responder aos seguintes itens:

a) $\log_2 64 =$

b) $\log_2 \frac{1}{8} =$

c) $\log_2 \sqrt{32} =$

d) $\log_2 0,0625 =$

2. Agora, crie outra tabela para responder aos demais itens:

a) $\log_{\frac{1}{10}} 1 =$

b) $\log_{\frac{1}{10}} 10 =$

c) $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10} =$

d) $\log_{\frac{1}{10}} 0,0001 =$

e) $\log_{\frac{1}{10}} 100 =$

ATIVIDADE 20 (Corresponde à ATIVIDADE 16 da SDP₁)

Enunciado:

Seja $b > 0$, $b \neq 1$ um número qualquer.

a) Complete a tabela 20B a seguir.

PG	PA
1	0
b	1
b^2	
	7
	-2
b^{-8}	
	-13
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{4}$
b^n	

Tabela 20B

b) Usando a tabela acima, calcule os valores de:

- $\log_b 1 =$
- $\log_b b =$
- $\log_b b^2 =$
- $\log_b b^{-8} =$
- $\log_b x = 7 \Leftrightarrow$
- $\log_b b^n =$
- $\log_b x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
- $\log_b x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

Agora sim, podemos concluir que, satisfeitas as condições de existência,

$$\log_b a = c \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

ATIVIDADE 21 (Corresponde à ATIVIDADE 17 da SDP₁)

Enunciado:

Calcule os seguintes logaritmos:

- a) $\log_{0,25} 4 =$
- b) $\log_{0,25} 16 =$
- c) $\log_{0,25} 32 =$

d) $\log_{\frac{1}{2^2}} 2^4 =$

e) $\log_2 \sqrt{2} =$

f) $\log_8 \sqrt{2} =$

g) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{27} =$

h) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} =$

ATIVIDADE 22 (Nova)

Objetivo:

Introduzir o conceito de simetria de um ponto em relação à reta $y = x$.

Enunciado:

- Represente os pontos $A = (2, 1)$; $B = (-1, 5)$; $C = (-3, -4)$; $D = (2, -3)$ e $E = (5, 5)$ em um plano cartesiano.
- Tome o ponto $A' = (1, 2)$, obtido pela troca na ordem das coordenadas de A . Faça o mesmo com os demais pontos, obtendo B' , C' , D' e E' .
- Represente os pontos A' , B' , C' , D' e E' no mesmo plano cartesiano.
- Trace o gráfico da reta $y = x$.
- Há uma relação entre cada par de pontos A e A' , B e B' , C e C' , D e D' , E e E' e a reta traçada. Você consegue perceber qual é?
- A mesma relação observada no item anterior irá ocorrer no caso de um par qualquer de pontos $P = (a, b)$ e seu simétrico $P' = (b, a)$? Por quê?

Texto:

Intuitivamente, dois pontos P e P' são simétricos em relação a uma reta r fixada quando um ponto é imagem espelhada do outro em relação a essa reta. Essa reta é chamada *eixo de simetria*. Formalmente, P e P' são simétricos em relação à reta r , se:

- o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta r ;
- a distância de P até r é igual à distância de P' até r ;

Na atividade anterior, você deve ter observado que todos os pares de pontos da forma $P = (a, b)$ e $P' = (b, a)$ são simétricos em relação à reta de equação $y = x$.⁵

ATIVIDADE 23 (Nova)

Objetivo:

Obter o gráfico simétrico da função $g(x) = \log_2 x$ em relação à reta $y = x$.

Enunciado:

Observe o gráfico da função $g(x) = \log_2 x$, que foi esboçado na atividade 17.

⁵ Veja no Apêndice B uma demonstração rigorosa desse fato.

- a) Complete a tabela a seguir e destaque, no gráfico, os pontos obtidos.

Ponto	x	y
A	$\frac{1}{4}$	-2
B	$\frac{1}{2}$	
C	1	
D	2	
E	4	
F	8	3

Tabela 21B

- b) Represente, no mesmo plano cartesiano, os pontos A' , B' , C' , D' , E' e F , simétricos de A , B , C , D , E e F , em relação à reta $y = x$.
- c) Represente, no plano cartesiano, todos os pontos P' , simétricos dos pontos P pertencentes gráfico da função $g(x) = \log_2 x$ em relação à reta $y = x$.
- d) Em qual ponto o gráfico de g intercepta o eixo dos x ?
- e) O gráfico de g intercepta o eixo dos y ?
- f) Em qual ponto o gráfico de f intercepta o eixo dos y ?
- g) O gráfico de f intercepta o eixo dos x ?

ATIVIDADE 24 (Nova)

XIII - A Inversa da Função Logarítmica

Objetivo:

Obter a expressão da função inversa de $g(x) = \log_2 x$.

Enunciado:

Note que a representação obtida no item c) da atividade 23 é gráfico de uma função f , pois cada x real existe apenas um y correspondente no gráfico. Nosso próximo objetivo é descobrir qual é a expressão dessa função.

A tabela a seguir, mostra as coordenadas de alguns pontos do gráfico da função f .

Ponto	x	Y
A'	-2	$\frac{1}{4}$
B'	-1	$\frac{1}{2}$
C'	0	1
D'	1	2
E'	2	4
F'	3	8

Tabela 22B

- a) Qual é a relação entre a primeira e a segunda coordenadas dessa tabela?

Você deve ter notado que os pares (x, y) da tabela 22B satisfazem a relação $y = 2^x$, para cada x da tabela.

Observe as tabelas 21B e 22B e note que $g(f(-2)) = g\left(\frac{1}{4}\right) = -2$.

- b) Calcule $g(f(x))$ para cada x da tabela 21B.
c) Calcule $f(g(x))$ para cada x da tabela 22B.
d) O que você notou?

Texto:

Para interpretarmos esses resultados, observamos que os pares ordenados mostrados na tabela 22B são os simétricos dos pares apresentados na tabela 21B. Ou seja, começando do par $(a, g(a))$, seu simétrico é o par $(g(a), a)$. Por outro lado, $(g(a), a)$ é também um par $(x, f(x))$ da tabela 22B. Fazendo $x = g(a)$, vemos que $f(x) = f(g(a)) = a$, para todo a da tabela 21B. Como o simétrico de P' é P , vale também que $g(f(b)) = b$, para todo b da tabela 22B. Assim, as funções f e g são chamadas inversas uma da outra, pois elas, quando compostas, resultam na função identidade, ou seja, quando calculamos $f(g(x))$, voltamos para o x inicial, o mesmo ocorrendo com $g(f(x))$.

Em particular, para $g(x) = \log_2 x$, sua inversa é a função $f(x) = 2^x$ e a denotamos por $f = g^{-1}$. Seu gráfico está esboçado no item c) da atividade 23.

ATIVIDADE 25 (nova)

Objetivo: determinar a inversa de uma função logarítmica de base b , com $0 < b < 1$.

Enunciado:

- a) Para a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, dê as características de seu gráfico e do gráfico de sua inversa.
- b) Qual é a expressão da função inversa de g ?

ATIVIDADE 26 (Corresponde à ATIVIDADE 18 da SDP₁)

O problema 3 desta atividade corresponde ao problema 1 da Atividade 18 na SDP₁.

Enunciado:

Resolva os seguintes problemas:

1. a) As indicações R_1 e R_2 na fórmula abaixo, expressam a relação entre as magnitudes, na escala Richter, de dois terremotos:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$$

em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\frac{M_1}{M_2}$. Interprete o resultado.

b) O terremoto de 1989 na Califórnia teve uma magnitude de 7,1 na escala Richter. Quantas vezes maior foi o abalo sísmico do terremoto de 1906 em São Francisco que mediu 8,4 na mesma escala?

2. A população da cidade A tem, atualmente, 50.000 pessoas e cresce a uma taxa de 3,5% ao ano. A população da cidade B tem, hoje, 250.000 pessoas, porém cresce mais devagar, a uma taxa de 1,6% ao ano. Assumindo que a taxa de crescimento da população de cada cidade se mantém constante, quando a população da cidade A alcançará a da cidade B ?

Dados: $\log_{10} 1,019 \approx 0,008$ e $\log_{10} 5 \approx 0,700$.

3. (FUVEST) – Pressionando a tecla $\log$ de uma calculadora científica, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 8 8 8 8 8 8 8 8 (oito oitos). Quantas vezes a tecla precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

Capítulo 5

Sequência Didática para Alunos

Após termos ministrado a oficina para professores *Logaritmos em sala de aula*, com base na SDP₁, e apresentado uma sequência aperfeiçoada para um futuro reoferecimento (SDP₂), preparamos uma sequência didática para ser testada diretamente com alunos de Ensino Médio. Nosso objetivo foi apresentar o conceito de logaritmo de uma forma diferenciada e verificar sua eficácia junto a esse público. Esta sequência será chamada de SDA.

No primeiro bimestre letivo do ano de 2016, a SDA foi aplicada voluntariamente pelo Professor Nilo Gonçalves Barbedo, sob supervisão do pesquisador, na Escola Estadual Virgília Rodrigues Alves de Carvalho Pinto, localizada no bairro Jardim Previdência, zona oeste da cidade de São Paulo. Cerca de 50 alunos, divididos em duas salas de primeira série do Ensino Médio, participaram da pesquisa. A escola, destinada a alunos de Ensino Médio ou de Educação de Jovens e Adultos, funciona em dois períodos - manhã e tarde - sendo seu público constituído basicamente pelos moradores do bairro no qual está localizada.

A carga horária semanal do Ensino Médio é de trinta aulas, sendo cinco delas destinadas à Matemática. Vale ressaltar que a coordenação e a direção são acessíveis a professores e aluno, estando abertas a novas perspectivas de ensino. Esse fato fez com que a aplicação de nossa pesquisa fosse autorizada imediatamente, sem nenhuma restrição. Não foi aplicado nenhum questionário inicial para diagnosticar o perfil dos alunos.

Alguns fatores contribuíram a favor da pesquisa, dentre eles as aulas dinâmicas e diferenciadas propostas pela sequência didática, a oportunidade de discussão e investigação acerca do tópico a ser ensinado e o papel diferenciado (tutoria) do professor. Outros fatores, contudo, podem ter comprometido o bom andamento da pesquisa, tais como greve escolar e desinteresse de alguns alunos para fazer as atividades. Cabe observar que o professor precisou corrigir e atribuir notas às atividades, para que os alunos desinteressados participassem das aulas. As atividades foram elaboradas para serem resolvidas individualmente, entretanto ficou à cargo do professor Nilo permitir a realização das atividades em pequenos grupos, e isso, de fato, ocorreu. Além disso, o texto que conta um pouco da história dos logaritmos foi explicado pelo professor ao invés de ser apenas dado como leitura para os alunos.

Esta sequência se difere da aplicada aos professores, pois as atividades são propostas de forma mais gradativa e de modo intuitivo. Também a seção que se refere à base de um logaritmo foi simplificada: optamos por escolher tabelas nas quais a razão da PA é sempre igual a 1,

definindo como base do logaritmo o número b da PG que corresponde ao elemento 1 da PA. Acreditamos que essa simplificação seja interessante para um primeiro contato com o assunto e que não traz prejuízo ao aprendizado.

A seguir apresentamos a sequência didática aplicada aos alunos da escola.

5.1 – Aplicação da SDA

ATIVIDADE 1

Objetivo:

Observar, na tabela 1C, que o produto de dois termos na coluna da PG corresponde à soma dos termos correspondentes na coluna da PA e, analogamente, o quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA.

Enunciado:

I - Progressão Geométrica X Progressão Aritmética

Observe a tabela a seguir. Na primeira coluna, ela apresenta uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo igual a 1 e, na segunda coluna, uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo igual a 0.

PG	PA
1	0
2	3
4	6
8	9
16	12
32	15
64	18
128	21
256	24
512	27
1.024	30

Tabela 1C

1. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 4 pelo termo da linha 6.
b) Na coluna da PA, some o termo da linha 4 com o termo da linha 6.
c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

1. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 7 pelo termo da linha 2.
b) Na coluna da PA, some o termo da linha 7 com o termo da linha 2.
c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

2. a) Calcule 8×64 e confira se o resultado está na tabela.
b) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 8?
c) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 64?
d) Se você somar esses números encontrados na coluna da PA, quanto dá? O resultado da conta está na tabela?

3. Você sabe obter o resultado de 16×64 sem fazer a conta diretamente, mas utilizando apenas a tabela?

4. a) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
b) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha do termo que está na sétima linha e confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
c) Os resultados das operações efetuadas estão na mesma linha ou em linhas diferentes?

5. a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 7 pelo termo da linha 2.
b) Na coluna da PA, some o termo da linha 7 com o termo da linha 2.
c) Os resultados encontrados estão na tabela? Em que linhas?

6. a) Calcule $256 \div 64$ e confira se o resultado está na tabela.
b) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 256?
c) Qual número da segunda coluna está na mesma linha que 64?
d) Se você subtrair esses números encontrados na coluna da PA, qual é o resultado? O resultado está na tabela?

7. Você sabe obter o resultado de $1024 \div 32$ sem fazer a conta diretamente, mas utilizando apenas a tabela?
8. Calcule 2×16 e $3 + 12$. Confira em que linhas estão os resultados.
9. Efetue 4×32 e $6 + 15$. Confira em que linhas estão os resultados.
11. Efetue $512 \div 64$ e $27 - 18$. Confira onde estão os resultados.
12. É possível efetuar as operações de multiplicação e divisão sem muito trabalho, usando a tabela acima? Como?
13. É possível determinar 32^2 , apenas utilizando a tabela 1C?

Comentários:

Antes de as atividades serem iniciadas, alguns alunos preferiram se sentar em pequenos grupos e outros decidiram tentar fazer as atividades sozinhos. O professor que aplicou a pesquisa também precisou explicar sucintamente o que eram progressões aritméticas e geométricas, dando alguns exemplos. O entendimento por parte dos alunos foi considerado bom e as atividades puderam, então, ser iniciadas.

A realização dos itens 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 desta atividade não apresentaram problemas, entretanto houve alunos que recorreram à calculadora para conferir os resultados, fato que não seria necessário, pois os números multiplicados eram naturais e pequenos. Observamos que alguns estudantes fizeram setas na tabela, relacionando os números da PA e da PG. Este fato pode nos levar à conclusão de que ideias das propriedades foram incorporadas.

Com relação aos itens 4, 8 e 12, cerca de 75% dos alunos conseguiu respondê-los de forma satisfatória, entretanto notamos que alguns responderam apenas “sim”. Por isso, sugerimos que, em outra aplicação, todos esses itens tenham a frase “Explique como”, complementando o enunciado. O processo de investigação matemática requer que o aluno consiga expor suas ideias e formule suas próprias conjecturas. Esse processo pode ser demorado, mas é importante para o real aprendizado do tema ministrado. Por isso é interessante que as argumentações sejam cobradas dos alunos.

A resposta dada na figura 16 nos mostra que o aluno, apesar de ter escrito de forma equivocada a expressão “P.A”. no final da frase, compreendeu a propriedade apresentada.

4- Sou mais fácil em somando os números da P.A que estão na mesma linha de P.G.

P.G. 64
× 16

→ P.A. 12
+ 18
30

→ está na mesma linha que o resultado final da P.G. = 1.024. Ambos não estão na linha 11.

Figura 16

Vários alunos deixaram o item 13 em branco e, para que a atividade tivesse sentido, o professor necessitou ir à lousa e recordar o significado de potência. Isso confirma nossa crença de que as sequências didáticas sobre logaritmos devem ser iniciadas com atividades que explorem o significado e as propriedades de potências e raízes.

Na resposta reproduzida na figura 17, o aluno compreendeu o que deveria ser feito no item 13, ou seja, para determinar 32^2 olhando a tabela, o aluno calcularia 2×15 ou $15 + 15$ e, depois, tomaria o correspondente a 30 na tabela, que no caso é 1.024. Já na figura 18, um outro aluno mostrou compreensão total.

13) Sim pegando o mesmo da mesma linha e somando com ele mesmo

Figura 17

Transcrição, com erros gramaticais, da resposta dada na figura 17: “Sim pegando o mesmo da mesma linha e somando com ele mesmo”.

Figura 18

ATIVIDADE 2

Objetivo:

Compreender que a n -ésima potência de um termo na coluna da PG corresponde à multiplicação, por n , do termo correspondente na coluna da PA. Também, a raiz n -ésima de um termo na coluna da PG, corresponde ao quociente da divisão por n do termo correspondente na coluna da PA.

Enunciado:

1. a) Calcule $(16)^2$ e verifique se o resultado está na tabela.
 b) Calcule 12×2 e localize o resultado na tabela.
 c) O que você reparou até agora?

2. a) Calcule $(32)^2$ e verifique se o resultado está na tabela.
 b) Calcule 15×2 e localize o resultado na tabela.
 c) O que você reparou até agora?

3. a) Calcule $(4)^3$ e verifique se o resultado está na tabela.
 b) Calcule 6×3 e localize o resultado na tabela.
 c) O que você reparou até agora?

4. Como você pode obter o resultado de $(8)^3$ só usando tabela?

5. a) Qual é a raiz quadrada de 64? O resultado está na tabela? Em qual linha?
 b) Qual número corresponde a esse resultado na coluna da PA? Ele é a metade de que número? Esse número está na tabela? Em qual linha?
6. a) Como você pode obter $\sqrt{256}$ apenas olhando para a tabela?
 b) Determine a raiz quadrada de 1.024.

Comentários:

Por se tratarem de atividades simples, os itens 1, 2, 3 e 5 fluíram naturalmente. Entretanto os itens 4 e 6 mereceram atenção especial, pois requeriam pequena autonomia para serem respondidos. Cerca de 25% dos alunos deixaram esses itens em branco, 20% responderam apenas “não sei” e outros 25% apenas mencionaram os resultados de 8^3 e de $\sqrt{256}$. As figuras 19 e 20 a seguir mostram uma resposta satisfatória, dando a entender que o aluno compreendeu as propriedades que as tabelas de PA e PG dadas carregam.

Figura 19

Figura 20

Transcrição, com erros gramaticais, da resposta dada na figura 20: “Para obter a $\sqrt{256}$ de um modo mais simples, olhamos na P.G. o número corresponde a 256 é o 24 (ambos na linha 9), fazeríamos $24 \div 2$ e obteríamos 12, olhando na mesma linha da P.G, obteríamos o resultado de $\sqrt{256} = 16$, ambos na linha 5”.

Uma proposta de fala do professor

As propriedades observadas foram descobertas por *Michael Stifel* (1486 - 1567), matemático alemão considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Na primeira parte de seu livro *Arithmetica Integra*, publicado em 1543, *Stifel* destaca a vantagem de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica e mostra uma tabela com potências sucessivas de 2 em uma linha⁶ e uma sequência de números naturais consecutivos em outra:

2	4	8	16	32	64	128	256
1	2	3	4	5	6	7	8

Também motras as seguintes relações:

1. *produto na coluna da PG corresponde à soma na coluna da PA;*
2. *quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA;*
3. *n-ésima potência na coluna da PG corresponde ao produto por n coluna da PA;*
4. *raiz n-ésima na coluna da PG corresponde ao quociente por n na coluna da PA.*

Acredita-se que essa publicação tenha influenciado tanto *John Napier* (1550 - 1617) quanto *Joost Bürgi* (1552-1532), que tiveram a ideia de produzir tabelas de PA e PG.

Uma pergunta importante a ser feita é: o que estamos percebendo até aqui acontece com qualquer PG e qualquer PA, ou foi só uma coincidência?

ATIVIDADE 3 - *Vamos investigar?*

Objetivo:

Primeiramente, espera-se que o aluno consiga completar os termos das tabelas propostas, especialmente a 3C, que possui uma PG de razão entre 0 e 1. Posteriormente, os alunos devem verificar, nessas tabelas, a validade das propriedades analisadas nas atividades 1 e 2.

⁶ Naquela época ainda não existia uma notação para potências.

Enunciado:

- a) Preencha as tabelas abaixo, cada uma com os termos consecutivos de uma PG na primeira coluna. Para a tabela 2C, complete a PG de razão 10 e, na tabela 3C, considere a razão $q = \frac{1}{2}$. Na segunda coluna, coloque os termos consecutivos da PA de razão $r = 1$.

Tabela 2C

PG	PA
1	0
10	1

Tabela 3C

PG	PA
1	0
$\frac{1}{2}$	1

- b) Com base nas tabelas construídas, responda às questões abaixo:

1. Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 4.
2. Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 4.
3. Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em que linhas?
4. Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
5. Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha. Confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
6. Calcule o quadrado do termo que está na quinta linha da PG.
7. Calcule o dobro do termo que está na quinta linha da PA.
8. Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 7 e a terça parte do termo da PA que está nessa mesma linha.
9. O que você reparou até agora?

Comentários:

A atividade 3 é similar às atividades 1 e 2. O que a diferencia das duas primeiras é o fato de os alunos serem convidados a completar duas tabelas distintas de PA e PG, além de responderem a uma pergunta investigativa (item 9). O desenvolvimento da atividade, em seu âmbito geral, ocorreu sem maiores problemas. Entretanto chamamos a atenção para o seguinte fato: nenhum aluno utilizou a notação de potência na tabela 2C ou na tabela 3C. Com isso, os erros de cálculo acabaram prejudicando o desenvolvimento da atividade. Isso evidenciou a pouca familiaridade com propriedades de potências. Sugerimos que, se isso ocorrer em outra aplicação da sequência, o professor estimule seus alunos a usarem a notação e as propriedades das potências.

Tabela 2C		Tabela 3C	
PG	PA	PG	PA
1	0	1	0
10	1	$\frac{1}{2}$	1
100	2	$\frac{1}{4}$	2
1000	3	$\frac{1}{8}$	3
10,000	4	$\frac{1}{16}$	4
100000	5	$\frac{1}{32}$	5
1000000	6	$\frac{1}{64}$	6
10000000	7	$\frac{1}{128}$	7
100000000	8	$\frac{1}{256}$	8
1000000000	9	$\frac{1}{512}$	9
10000000000	10	$\frac{1}{1024}$	10

Figura 21

A resposta ao item 9 dada na figura 22 a seguir, mostra que o aluno, apesar de não ter apresentado rigor matemático, compreendeu a ideia central das propriedades existentes nas tabelas de logaritmos.

9- multiplicações da PG, significa a soma da PA

Figura 22

Uma proposta de fala do professor

II - Sempre funciona?

Apesar de termos a sensação ou até mesmo a convicção de que as propriedades observadas serão válidas sempre que colocarmos termos consecutivos de uma progressão geométrica ao lado de termos consecutivos de uma progressão aritmética, sendo que os termos iniciais são 1 e 0 respectivamente, rigorosamente ainda não nos é permitido afirmar que com total segurança que as propriedades que estamos observando valem com qualquer PG e qualquer PA. Você sabe o que é necessário fazer para se ter certeza?

ATIVIDADE 4

Objetivo:

Generalizar as propriedades observadas nas atividades 1, 2 e 3.

Enunciado:

Construa uma tabela cuja primeira coluna é a PG de razão $q > 0$ com primeiro termo igual a 1. Os termos seguintes serão $q, q^2, q^3, \dots, q^m, \dots, q^n$.

Na segunda coluna, considere a PA de razão $r \neq 0$ com primeiro termo igual a 0. Os termos seguintes serão $r, 2r, 3r, \dots, mr, \dots, nr$.

- Calcule o produto de dois termos quaisquer da PG e escreva o resultado em forma de uma só potência. Que termo é esse?
- Calcule a soma dos termos da PA correspondentes aos do item anterior e escreva o resultado em função de r .
- Os resultados são correspondentes, isto é, estão na mesma linha da tabela?
- Verifique que, se dividirmos dois termos quaisquer da PG e se subtrairmos os correspondentes termos da PA os resultados são correspondentes.
- Verifique que, se calcularmos o quadrado de um termo qualquer da PG e o dobro do termo correspondente na PA, os resultados são correspondentes.

- f) Verifique que, se extrairmos a raiz quadrada de um termo quaisquer da PG e se dividirmos por 2 o termo correspondente na PA, os resultados são correspondentes.

Comentários:

Para a realização desta atividade, o professor necessitou ir à lousa para explicar como montar a tabela pedida e responder às questões. Os alunos tiveram dificuldades para escrever os termos da PG, pois estes não eram números, mas sim letras. Outra dificuldade encontrada pelos estudantes foi o fato de não dominarem as propriedades de potência, como ficou claro na atividade anterior, apesar de ter sido um tópico anteriormente trabalhado em sala pelo professor. Este fato reforça ainda mais a convicção de que devemos iniciar a sequência com atividades sobre potências e raízes.

Em suma, o professor auxiliou os alunos durante toda a atividade. Também coube a ele reforçar a ideia de que a generalização é um passo importante na investigação matemática, pois formaliza e valida as conjecturas feitas em casos específicos.

ATIVIDADE 5 - Uma propriedade interessante das tabelas de PG e PA

Objetivo:

Destacar o fato de que a média geométrica de dois termos na coluna da PG, corresponde a média aritmética dos termos correspondentes na coluna da PA.

Enunciado:

Use a tabela 1C para responder às seguintes questões.

- a) Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 9 e 21.
- b) Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 8 e 128.
- c) Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?
- d) Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 24 e 18.
- e) Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 256 e 64.
- f) Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?
- g) Explique, com suas palavras, o que você reparou. Você acredita que a propriedade observada vale para outros termos da tabela? Por quê?

Comentários:

Novamente o professor precisou intervir e explicar o que são as médias aritmética e geométrica, pois apesar de os alunos já terem ouvido falar sobre esses conceitos, poucos se lembravam de como calculá-las.

Assim como na SDP₁, a realização desta atividade foi extremamente longa e, ao final, houve praticamente 100% de acerto. Destacamos a resposta de um aluno para o item g): “Podemos aumentar as tabelas fazendo média aritmética na coluna da PA e média geométrica na coluna da PG”. Essa resposta indica que o aluno compreendeu qual era a intenção da atividade, isto é, perceber que a média aritmética de dois termos quaisquer na coluna da PA, corresponde a média geométrica dos termos correspondentes na coluna da PG. Também percebeu a possibilidade de ampliação de tabelas de logaritmos.

Texto para leitura

III - Logaritmos

Com o que observamos até agora já é possível perceber o potencial das tabelas que estamos montando: em vez de fazermos cálculos envolvendo contas de multiplicação, divisão, potências ou raízes, podemos, de posse das tabelas, fazer contas mais simples, respectivamente de adição, subtração, multiplicação ou divisão por um número natural.

Tabelas como as que vimos nas atividades anteriores são exemplos de *tábuas de logaritmos*. John Napier publicou, em 1614, um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da maravilhosa regra de logaritmos), depois de ter trabalhado por quase 20 anos produzindo uma tábua de logaritmo.

O suíço Joost Bürgi, fabricante de relógios e instrumentos de astronomia e matemático, também criou, independentemente, tábuas de logaritmos, mas as publicou seis anos depois de Napier.

Segundo Eves (2004), a *Descriptio* despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561-1631) viajou de Oxford até Edimburgo para visitar Napier. Durante a visita, ambos concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas. Em 1624, Briggs publicou o livro *Arithmetica logarithmica* que continha uma tábua de logaritmos decimais dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000.

Acredita-se que *Napier* e *Bürigi* foram influenciados pelo livro de *Stifel*, tendo percebido que sua utilização seria extremamente importante para o desenvolvimento da ciência, facilitando cálculos utilizados nas grandes navegações, na astronomia e na engenharia entre outros, e assim passaram a criar longas tabelas. Tábuas de logaritmos foram utilizadas durante vários séculos e foram finalmente substituídas por calculadoras e computadores a partir de 1960.

A invenção dos logaritmos foi rapidamente espalhada pelo mundo por meio de seu uso por matemáticos na Itália, França, Alemanha e até mesmo na China, ainda no século XVII. A notação que usamos hoje para os logaritmos foi estabelecida por *Leonhard Euler* (1707 - 1783).

Uma tabela de logaritmo é uma tabela que tem PG na primeira coluna e PA na segunda. Assim, todas as tabelas que vimos são tabelas de logaritmos. Nessas tabelas, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo.

O número da PG que corresponde ao número 1 na PA é chamado base do logaritmo.

Por exemplo, na tabela 4C abaixo, dizemos que o logaritmo de 243 na base 3 é 5 e escrevemos $\log_3 243 = 5$.

x	$\log_3 x$
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6

Tabela 4C

Do mesmo modo, dizemos que o logaritmo de 1 na base 3 é igual a 0, e escrevemos $\log_3 1 = 0$.

Comentários:

Na aplicação da sequência didática, o texto acima foi apresentado para leitura, sem que houvesse exercícios que questionassem sua compreensão. Isso causou uma reação negativa por parte dos alunos, devolvendo o texto ao professor com anotações que não faziam sentido. Sendo assim, acreditamos que seja interessante acrescentar o exercício a seguir.

Exercício (não fez parte da aplicação aos alunos, mas cremos que deva ser feito em futuras aplicações)

a) Passe para a notação matemática as sentenças a seguir:

(i) o logaritmo de 27 na base 3 é 3.

(ii) o logaritmo de 729 na base 3 é 6.

b) Agora, passe para a linguagem textual:

(i) $\log_3 3 = 1$.

(ii) $\log_3 81 = 4$.

(iii) $\log_3 243 = 5$.

Sugestão para o professor concluir o raciocínio das ideias trabalhadas até este momento:

Para obtermos o produto de dois números que estão na coluna da esquerda sem efetuarmos a conta diretamente, podemos fazer da seguinte maneira:

Passo 1

Somamos os logaritmos dos dois fatores. O resultado dessa soma é o logaritmo do produto.

Passo 2

Lemos na tabela, da direita para a esquerda, qual o número correspondente àquele logaritmo.

Por exemplo, observando a tabela 4C, calculemos o produto 243×3 .

- 243 corresponde a 5;
- “vezes” corresponde a “mais”;
- 3 corresponde a 1.

Como $5 + 1 = 6$, precisamos apenas verificar, na tabela, qual o número da coluna da esquerda corresponde a 6:

- 729 corresponde a 6.

Com isso, podemos concluir, sem fazer a conta, que $243 \times 3 = 729$.

Note que deixamos de fazer diretamente a multiplicação e, em vez disso, efetuamos uma adição, como havíamos percebido anteriormente.

A mesma ideia, escrita com a notação usual de logaritmos, fica assim:

$$\log_3(243 \times 3) = \log_3 243 + \log_3 3 = 5 + 1 = 6 = \log_3 729$$

$$\text{Portanto, } 243 \times 3 = 729.$$

ATIVIDADE 6

Objetivo:

Verificar a compreensão da definição de logaritmos.

Enunciado:

Usando a tabela 5C a seguir, responda:

x	$\log_5 x$
1	0
5	1
25	2
125	3
625	4
3.125	5
15.625	6

Tabela 5C

- a) $\log_5 25 =$
- b) $\log_5 625 =$
- c) $\log_5 5 =$
- d) $\log_5 1 =$
- e) $\log_5 15.625 =$
- f) $\log_5 125 =$
- g) $\log_5 3.125 =$

Comentários:

Cerca de 80% dos alunos que fizeram a atividade conseguiram responder corretamente aos itens propostos. Apenas dois alunos fizeram a atividade de forma incorreta e os demais alunos, ou não fizeram a atividade, ou a deixaram incompleta.

Nesta, e em outras atividades desta sequência, foi notado o uso indevido do sinal de igualdade. Tal fato será comentado posteriormente. A figura 23 mostra, além do sinal de igualdade empregado de forma equivocada, que este aluno acredita que $\log_5 1 = 1$.

The image shows a list of seven logarithmic equations with handwritten solutions. Each equation is followed by an equals sign and a number, indicating a misunderstanding of the logarithm function. The equations and their handwritten 'solutions' are:

- a) $\log_5 25 = 5^3 = 25$
- b) $\log_5 625 = 5^4 = 625$
- c) $\log_5 5 = 5 = 5$
- d) $\log_5 1 = 5 = 1$
- e) $\log_5 15.625 = 5 = 15.625$
- f) $\log_5 125 = 5 = 125$
- g) $\log_5 3.125 = 3 = 3.125$

Figura 23

ATIVIDADE 7

Objetivo:

Calcular a multiplicação proposta, de acordo com a propriedade explorada nas atividades de 1 a 4.

Enunciado:

Utilizando a tabela 5C, calcule o valor de 25×625 .

Comentários:

Cerca de 75% dos alunos fizeram como se esperava, ou seja, olharam para a tabela e escreveram o resultado na folha. Apesar de grande parte das respostas estar correta, chamou-nos a atenção, além do problema recorrente com o sinal de igualdade, o fato de que muitas notações feitas pelos alunos eram inconsistentes.

A figura 24 mostra um exemplo de resposta com a ideia correta, porém com a escrita incoerente. Já na figura 25, podemos observar a resposta de um aluno que compreendeu, de fato, a propriedade que pode ser obtida a partir da observação da tabela 5C.

Figura 24

Figura 25

ATIVIDADE 8

Objetivo:

Construir uma tábua de logaritmos adequada para se calcular as operações propostas.

Enunciado:

Calcular as operações indicadas sem efetuá-las diretamente, mas usando uma tábua de logaritmos que você construirá.

- a) $256 \times 4 =$
- b) $8^3 =$
- c) $1.024 \div 256 =$
- d) $512 \div 32 =$
- e) $\sqrt[3]{512} =$
- f) $1.024^{\frac{1}{5}} =$

Comentários:

Cerca de 75% dos alunos fizeram a atividade. Daqueles que terminaram a atividade, aproximadamente 16% a fizeram de forma errada, outros 16% acertaram totalmente a atividade e os demais alunos não fizeram a atividade por completo.

Novamente os problemas com o sinal de igualdade e com potenciação e, especialmente, radiciação, foram recorrentes. Além disso, 2 alunos construíram equivocadamente a tabela de PA e PG, começando por 0 e 0.

Na figura 26, observávamos que o aluno empregou o sinal de igual de forma equivocada e, além disso, não associou o resultado encontrado na coluna da PA, com o termo correspondente na coluna da PG.

Atividade 8

Calcular as operações indicadas sem efetuá-las diretamente, mas usando uma tábua de logaritmos que você construirá.

a) $256 \times 4 = 8 + 2 = 10 (PA)$
b) $8^3 = 3 + 3 + 3 = 9 (PA)$
c) $1.024 \div 256 = 10 - 8 = 2 (PA)$
d) $512 \div 32 = 9 - 5 = 4 (PA)$
e) $\sqrt[3]{512} = 8$
f) $1024^{\frac{1}{5}} = 4$

PG	PA
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11

Figura 26

ATIVIDADES 9 e 10

Objetivo:

Esboçar e observar o comportamento dos gráficos das funções $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e resolver, via análise gráfica, duas inequações logarítmicas.

Para as atividades 9 e 10, você irá utilizar as tabelas a seguir:

PG	PA
$\frac{1}{32}$	- 5
$\frac{1}{16}$	- 4
$\frac{1}{8}$	- 3
$\frac{1}{4}$	- 2
$\frac{1}{2}$	- 1
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5

Tabela 6C

PG	PA
32	- 5
16	- 4
8	- 3
4	- 2
2	- 1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{16}$	4
$\frac{1}{32}$	5

Tabela 7C

Qual a diferença entre estas duas tabelas e as demais tabelas já estudadas?

Enunciado da ATIVIDADE 9:

Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 6C.

Vamos, a seguir, admitir que o gráfico da função $y = \log_2 x$ seja obtido ligando-se os pontos já encontrados acima com uma curva suave e crescente. Responda:

- a) Para $0 < x < 1$, o que ocorre com os valores de y ? E para $x > 1$?
- b) Para que y aumente de 1 para 2, os valores de x variam em qual intervalo? Para que y aumente de 2 para 3, os valores de x variam em qual intervalo? Para y aumentar de 3 para 4, quanto aumenta o x ?
- c) Tente descrever com palavras como é o crescimento dessa função.
- d) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_2 x \geq 2$?

Comentários sobre a atividade 9:

Antes do enunciado da atividade foi colocada a pergunta “Qual a diferença entre estas duas tabelas e as demais tabelas já estudadas”? Acreditamos que a pergunta tenha sido colocada de forma muito aberta e isso fez com que os alunos não a respondessem da forma esperada, como podemos observar na figura 27.

Figura 27

A respeito do esboço do gráfico, a maioria dos alunos acertou completa ou parcialmente o formato e as características do gráfico da função $y = \log_2 x$.

Figura 28

Alguns problemas no esboço do gráfico foram observados: houve alunos que encostaram o gráfico no eixo dos y , em outros casos a curva não representou de forma satisfatória o formato do gráfico e, por fim, 3 alunos desenharam apenas os pontos representados na tabela, não ligando-os da forma indicada no enunciado.

Figura 29

Nos itens que tratavam do comportamento dos valores de x e y , o índice de acerto foi de aproximadamente 50%. Destacamos o fato de um aluno ter mencionado corretamente a “taxa de variação” da função, mesmo sem o professor ter tocado no assunto.

Por fim, no item em que foi proposta a resolução de uma inequação que deveria ser respondida via observação gráfica, o índice de acerto foi menor do que 40%. O erro mais comum se deu por causa do sinal da desigualdade.

Enunciado da ATIVIDADE 10:

- a) Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 7C.

- b) O que você pode concluir sobre os valores de y para $0 < x < 1$? E para $x > 1$?
- c) Qual a principal diferença entre o gráfico esboçado nesta atividade e o da função $y = \log_2 x$? Como você poderia justificar esse fato?
- d) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$?

Comentários sobre a atividade 10:

No enunciado da atividade deveríamos ter acrescentado a frase “Vamos admitir que o gráfico da função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ seja obtido ligando-se os pontos já encontrados acima com uma curva suave e decrescente”.

A maioria dos alunos conseguiu fazer o esboço do gráfico da função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Alguns erros foram observados: houve gráficos que interceptaram o eixo dos y ; também houve problemas com a escala do gráfico e, por fim, alguns alunos chamaram o gráfico de parábola e outros de reta.

Figura 30

O item b), que tratava sobre os valores de y , teve cerca de 50% de acerto, sendo compatível com a pergunta análoga da atividade 9. O item c) também teve boa porcentagem de acerto (cerca de 65%). Destacamos duas respostas que, apesar de estarem equivocadas, mostram que, ao menos, os alunos observaram a principal mudança ocorrida nos gráficos: “os gráficos estão em lados opostos da PG” e “o gráfico está caindo”.

Figura 31

Transcrição, com erros gramaticais, da resposta dada na figura 20:

“a) Quando diminuímos os valores da PG aumentamos o da PA.

b) PG de razão $\frac{1}{2}$ decrescente. PG de razão 2 crescente; os gráficos estão em lados opostos em relação ao eixo horizontal.

c) $\log_{\frac{1}{2}} x > 2 \rightarrow x < 4$ ”.

Por fim, o item que se referiu à inequação não teve boa margem de acertos. Observamos dois erros frequentes: muitos alunos escreveram apenas o sinal de “menor” e não o de “menor ou igual” e $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \frac{1}{4} = 2$. Este último, novamente, ressalta o uso não apropriado do sinal de igual.

ATIVIDADE 11 – Uma aplicação dos logaritmos

Objetivo:

Resolver alguns problemas que fazem parte do repertório do conhecimento de logaritmos.

Enunciado:

a) As indicações R_1 e R_2 na fórmula abaixo, expressam a relação entre as magnitudes, na escala *Richter*, de dois terremotos:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

em que E_1 e E_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\frac{E_1}{E_2}$. Interprete o resultado.

b) O terremoto de 1989 na Califórnia teve uma magnitude de 7,1 na escala Richter. Quantas vezes maior foi o abalo sísmico do terremoto de 1906 em São Francisco que mediu 8,4 na mesma escala?

Comentários:

Por questão de tempo, assim como ocorreu na aplicação da SDP₁, cerca de 40% alunos fizeram o que foi proposto e, dentre estes alunos, cerca de 60% acertaram a atividade por completo.

a) $8 - 6 = \log_{10}^{100} \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$
100

b) 1,3 maior na escola

Figura 32

5.1 - Comentários Finais sobre a SDA

A aplicação da SDA estava prevista para ter duração de, no máximo, um mês, ou seja, aproximadamente vinte aulas. Entretanto alguns contratempos como greve na escola e faltas do professor, fizeram com que as atividades fossem prolongadas por quase um bimestre. Contudo, o balanço geral foi bom, pois, pelas observações feitas a partir das atividades recolhidas, cerca de 50% dos alunos que participaram da pesquisa fizeram as atividades de forma satisfatória, mostrando terem compreendido as principais ideias e conceitos apresentados pela sequência didática.

Alguns problemas foram muito recorrentes, tais como notações equivocadas, sinais de igualdade e de desigualdade usados de forma indevida e desorganização ao redigir uma resposta. Observaram-se, também, muitas dificuldades com a linguagem algébrica. Um aluno atinge autonomia no processo de aprender determinado assunto quando adquire domínio da linguagem que faz referência a esse assunto. A simbologia matemática tem papel fundamental na compreensão da Matemática e, conseqüentemente, no aprendizado eficaz do conteúdo proposto.

Observando a SDA, o erro mais cometido pelos alunos foi a utilização indevida do sinal de igualdade. O sinal de igual, muitas vezes, é considerado apenas como um símbolo unidirecional, normalmente lido da esquerda para a direita. Muitos alunos não têm a percepção

de que o símbolo (=) representa uma equivalência entre duas expressões. Por exemplo, na figura 33 a seguir, o aluno poderia chegar à resposta correta que a atividade pedia, entretanto equivocou-se ao utilizar o sinal de igualdade. Em alguns casos, chegou na resposta correta, em outros, deixou como resposta o logaritmo do número pedido.

Atividade 8

Calcular as operações indicadas sem efetuá-las diretamente, mas usando uma tábua de logaritmos que você construirá.

a) $256 \times 4 = 8 + 2 = 10$

b) $8^3 = 3 + 3 + 3 = 9 = 512$

c) $1.024 \div 256 = 10 - 8 = 2$

d) $512 \div 32 = 9 - 5 = 4$

e) $\sqrt[3]{512} = 9 = 3 + 3 + 3 = (3 = 8)$

f) $1024^{\frac{1}{5}} = 10 + \frac{1}{5} = 10 - 5 = 2 = 4$

P.N	P.A
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Figura 33

Considerações Finais

Após termos aplicado e aperfeiçoado a SDP₁, tendo obtido a SDP₂, consideramos que nossos objetivos iniciais tenham sido alcançados, pois as tabelas de PA e PG apresentadas nas sequências didáticas evidenciam a principal propriedade dos logaritmos, a saber, satisfeitas as condições de existência,

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y,$$

e essa propriedade ficou bastante clara para a grande maioria dos participantes desta pesquisa, tanto professores quanto alunos.

Durante a aplicação de nossa oficina no CAEM, como já foi relatado, os professores se mostraram animados e entusiasmados por terem vivenciado uma experiência nova com logaritmos. O enfoque histórico de sua descoberta e a exploração das propriedades existentes em tabelas especiais de PA e PG, fizeram com que os participantes se propusessem a ensinar o assunto de uma forma diferenciada, privilegiando a investigação matemática. Ocorreram problemas pontuais durante o andamento da oficina, entretanto o despreparo de alguns professores que presenciaram nossas aulas nos fez acreditar, de forma clara, que o docente, alicerce do ensino, necessita de políticas públicas que invistam em sua formação continuada, garantindo condições organizacionais e estruturais para que a escola seja um local privilegiado de formação e desenvolvimento estudantil.

Pretendemos, ainda, aplicar SDP₂ em um futuro próximo, aperfeiçoando-a mais, pois nossa intenção é transformar nossa experiência e aprendizado em um livro sobre logaritmos, voltado a professores, que seja uma contribuição à reflexão e à prática de ensino.

Na aplicação da SDA observamos outros erros, diferentes daqueles observados na aplicação da SDP₁. Alguns problemas foram evidentes na maioria das respostas dos alunos: o sinal de igualdade utilizado de forma incorreta, notações equivocadas, falta de organização ao redigir uma ideia, incoerência na escrita, falta de iniciativa, ausência de conteúdos preliminares que julgamos importantes para a realização das atividades etc. Todavia, acreditamos que as ideias das propriedades de um logaritmo, assim como propriedades do gráfico de uma função logarítmica foram bem absorvidas. Vale ressaltar que os alunos não haviam tido aulas sobre PA e PG, tampouco sobre funções. Mesmo com todas as limitações existentes na aplicação da SDA, ficamos satisfeitos com os resultados obtidos.

Ao iniciar nossa pesquisa, tínhamos em mente a produção de uma sequência didática para que professores pudessem ensinar logaritmos de uma forma diferenciada, usando tabelas especiais de PA e PG, pautada na investigação matemática. Consideramos ser papel do professor

despertar a curiosidade de seus alunos, promovendo atividades de investigação, em um ambiente de descontração, de modo que os estudantes não apenas sintam-se à vontade para perguntar ou sugerir, mas também aprendam a respeitar a todos. Dessa forma, as dúvidas e erros possíveis serão parte natural do processo de aprendizagem. O professor será orientador desse processo, não apenas com relação ao conteúdo matemático, mas também na busca por soluções de problemas reais da sociedade: com conjecturas, tentativas, críticas e aperfeiçoamento. Acreditamos que este estudo sirva de incentivo para um modo diferente de ensinar, auxiliando na formação integral do aluno como ser humano capaz de resolver situações desafiadoras e conflituosas.

Apêndice A

A irracionalidade de $\log_{10} 1,5$

Sabemos que um número r é racional quando pode ser escrito na forma de fração, isto é, $r = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e q diferente de zero.

Para provarmos que um número real é irracional, devemos demonstrar que ele não pode ser escrito na forma de fração.

Vamos provar que $\log_{10} 1,5$ é irracional, supondo, por absurdo, que $\log_{10} 1,5 = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$. Podemos supor $p, q > 0$.

Mas,

$$\begin{aligned}\log_{10} 1,5 = \frac{p}{q} &\Leftrightarrow 10^{\frac{p}{q}} = 1,5 = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt[q]{10^p} = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 10^p = \left(\frac{3}{2}\right)^q \\ &\Leftrightarrow 2^p \cdot 5^p = \frac{3^q}{2^q} \\ &\Leftrightarrow 2^p \cdot 2^q \cdot 5^p = 3^q \\ &\Leftrightarrow 2^{p+q} \cdot 5^p = 3^q\end{aligned}$$

Entretanto, essa última igualdade é impossível, pois o Teorema Fundamental da Aritmética afirma que todo número natural pode ser fatorado de modo único, a menos da ordem, como produto de fatores primos. Logo, o número 3^q não pode ser igual a $2^{p+q} \cdot 5^p$.

Sendo assim, $\log_{10} 1,5$ é irracional.

Apêndice B

Os pontos $P = (a, b)$ e $P' = (b, a)$ são simétricos em relação à reta $y = x$

Sejam r a reta de equação $y = x$ e s a reta que passa por P e P' .

Precisamos mostrar que:

- (i) r e s são perpendiculares;
- (ii) a distância de P até r é igual à distância de P' a r .

Demonstração

- (i) Uma equação para s é dada por:

$$\frac{y - a}{x - b} = \frac{b - a}{a - b} \Leftrightarrow y - a = -1(x - b)$$

Como o coeficiente angular de r é igual a 1 e o de s é igual a -1 , podemos concluir que essas duas retas são perpendiculares.

- (ii) Para provarmos que a distância de P a r é igual à distância de P' a r , vamos recordar a fórmula da distância de um ponto $Q = (x_0, y_0)$ a uma reta t qualquer de equação geral dada por $mx + ny + d = 0$.

$$d(Q, t) = \frac{|m \cdot (x_0) + n \cdot (y_0) + d|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

No nosso caso, a reta r pode ser escrita na forma $1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 = 0$. Logo $m = 1, n = -1$ e $d = 0$.

Sendo assim,

$$d(P, r) = \frac{|1 \cdot a + (-1) \cdot b + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}$$

e,

$$d(P', r) = \frac{|1 \cdot b + (-1) \cdot a + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|b - a|}{\sqrt{2}}$$

Como $|a - b| = |b - a|$, temos $d(P, r) = d(P', r)$.

De (i) e (ii), podemos concluir que P e P' são simétricos em relação à reta $y = x$.

Referências Bibliográficas

- ABRANTES, Paulo; PONTE, João Pedro. Professores de matemática. Que formação? In Ensino da matemática: Anos 80. Lisboa: SPM, 1982. pp. 269-292.
- BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education. Volume 59, 2008. pp.389-407.
- BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000.
- BRASIL, Ministério da Educação. Pró-Letramento: Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental: matemática. – ed. rev. e ampl. incluindo SAEB/Prova Brasil matriz de referência. Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Orientações curriculares nacionais para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e do Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental. Brasília, 2012.
- CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais de Matemática. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.
- CORRADI, Daiana Katiúsca Santos. Investigações Matemáticas. In: Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011.
- D'AMORE, Bruno. Elementos de Didática da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

- DANTE, Luiz Roberto. Matemática. Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2010.
- DRUCK, Iole de Freitas. Um pouco de história de potências, exponenciais e logaritmos. Trabalhos do Departamento de Matemática. São Paulo: IME-USP, 1995.
- EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- LIMA, Elon Lages. Logaritmos. 2ª. Ed., Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- LLINARES, Salvador. Aprender a enseñar matemáticas en la enseñanza secundaria: Relación dialéctica entre el conocimiento teórico e práctico. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesora. 32, 1998. pp.117-127.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso de. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: E.P.U. - Editora Pedagógica e Universitária, 1998.
- OCDE. Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico. Low-Performing Students. Why They Fall Behind and How To Help Them Succeed?. Paris, 2016.
- PIRIE, Susan. Mathematical Investigations in your Classroom. Basingstoke, Macmillan, 1987.
- PAIVA, Ana Maria Severino de; SÁ, Ilydio Pereira. Educação matemática crítica e práticas pedagógicas. Revista Ibero-americana de Educação. n.º 55/2, 2011.
- PONTE, João Pedro. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In Educação matemática: Temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992. pp.185-239.
- PONTE, João Pedro e MATOS, João Filipe. Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), Investigar para aprender matemática. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996. pp. 119-137.
- PONTE, João Pedro. Da formação ao desenvolvimento profissional. Conferência plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat 98, realizado em Guimarães. Publicado In Actas do ProfMat 98. Lisboa: APM. pp. 27-44.
- PONTE, João Pedro; FERREIRA, Catarina; BRUNHEIRA, Lina; OLIVEIRA, Hélia; VARANDAS, José Manuel. Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. Publicado originalmente em inglês com o título *Investigating mathematical investigations*, incluído no livro de P. Abrantes, J. Porfírio, & M. Baía (Orgs.), 1998.

- PONTE, João Pedro; FERREIRA, Catarina; VARANDAS, José Manuel.; BRUNHEIRA, Lina; OLIVEIRA, Hélia. A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.
- PONTE, João Pedro. Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 2003.
- PONTE, João Pedro. Estudos de caso em educação matemática. Bolema, 2006.
- SANTOS, Leonor e PONTE, João Pedro. An experiment in distance in-service teacher education. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Artigo publicado no CERME III – European Congress of Mathematics Education, Bellaria, Itália, Março, 2003.
- SÃO PAULO (Estado). Caderno do Professor - 1ª Série, volume 3. São Paulo: Secretaria de Educação, 2009.
- SARAIVA, Manuel e PONTE, João Pedro. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. Quadrante, 12(2), 2003. pp.25-52.
- SEGURADO, Irene, & PONTE, João Pedro. Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. Quadrante, 7(2), 1998. pp.5-40.

Anexo I – Questionário sobre o Perfil do Professor Participante da Oficina

Dados relacionados à experiência docente

Sobre seu trabalho atual

1 – Ministra aulas em qual(is) rede(s) de ensino?

Pública ☐	Particular ☐	Ambas ☐
-------------------------------------	--	-----------------------------------

2 – Cargo atual

Professor de escola particular ☐	Professor efetivo de escola pública ☐	Professor não-efetivo de escola pública ☐	Coordenador de escola particular ☐	Coordenador de escola pública ☐
--	---	---	--	---

Outro. Qual?

3 – Em quais anos leciona no Ensino Fundamental II

6º ☐	7º ☐	8º ☐	9º ☐	Nenhum ☐
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	---------------------------------

4 – Em quais séries leciona no Ensino Médio

1ª ☐	2ª ☐	3ª ☐
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

5 – Período(s) de trabalho (assinale mais de um, se for o caso)

Manhã ☐	Tarde ☐	Noite ☐
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

6 – Quantidade de aulas/trabalho semanais

Sobre você

7 – Idade (anos)

8 – Tempo de magistério (anos)

9 – Assinale qual é a sua formação

Licenciatura em Matemática Incompleto ☐	Licenciatura em Matemática Completo ☐	Outros Qual? <input type="text"/>
---	---	--------------------------------------

10– Pós-graduação

Não possui	Pós-graduação Lato Sensu	Pós-graduação Mestrado	Pós-graduação Doutorado
☐	Incompleto ☐	Incompleto ☐	Incompleto ☐
	Completo ☐	Completo ☐	Completo ☐

Responda às questões de 11 a 16 somente se ministrar aulas na rede pública de ensino

11– Em relação às situações de aprendizagem contidas no Caderno do Professor, você as utiliza:

Todas na íntegra ☐	Todas parcialmente ☐	Algumas na íntegra ☐	Algumas parcialmente ☐	Nenhuma ☐
--	--	--	---	-------------------------------------

12 – Os conteúdos de Matemática do Caderno do Professor, para o uso em suas aulas são:

Totalmente adequados ☐	Suficientes ☐	Insuficientes ☐	Inadequados ☐
--	---	---	---

13 – Os conteúdos de Matemática do Caderno do Aluno, para melhoria da aprendizagem deles, são:

Totalmente adequados ☐	Suficientes ☐	Insuficientes ☐	Inadequados ☐
--	---	---	---

14 – Você complementa as atividades propostas no Caderno do aluno com outras preparadas por você?

Frequentemente ☐	Raramente ☐	Nunca ☐
--	---------------------------------------	-----------------------------------

15 – Já participou de atividades de formação continuada promovidas pela SEE (atualização, capacitação etc.)?

Sim ☐	Não ☐
---------------------------------	---------------------------------

16 – Se sim, você implementa o que foi aprendido em suas salas de aula?

Frequentemente ☐	Raramente ☐	Nunca ☐
--	---------------------------------------	-----------------------------------

O CAEM em sua formação continuada

17– Já participou de atividades oferecidas pelo CAEM?

Sim ☐	Não ☐
---------------------------------	---------------------------------

18 – Das atividades que participou no CAEM, como você as classificaria para seu aperfeiçoamento como professor?

Muito úteis ☐	Úteis ☐	Pouco úteis ☐
---	-----------------------------------	---

Sobre sua prática profissional

19 - Dentre os instrumentos avaliativos abaixo, quais você utiliza para acompanhar o aprendizado específico dos conteúdos de Matemática de seu aluno?

Prova escrita ☐	Prova oral ☐	Trabalho individual ☐	Trabalho em grupo ☐	Seminários ☐
---	--	---	---	--

20 – Nas avaliações que faz de seus alunos, você também considera notas por:

Participação ☐	Organização ☐	Comportamento ☐	Produção ☐	Avaliação contínua ☐	Auto-avaliação ☐
--	---	---	--------------------------------------	--	--

21 – Em suas aulas, quais dos recursos pedagógicos descritos abaixo, você utiliza?

Giz e lousa ☐	Livro didático ☐	Livros extras ☐	Apostila ☐	Material concreto ☐	Softwares ☐
Datashow ☐	Jornais e revistas ☐	Jogos ☐	Instrumentos de medição ☐	Vídeos ☐	Calculadora ☐

22 – Você prepara as aulas com base apenas no material didático disponível?

Sim, já me basta. ☐	Sim. Gostaria de usar outros materiais, mas não tenho tempo para pesquisar. ☐	Não, procuro ler outros materiais para aprender mais sobre o assunto que ensinarei. ☐
---	---	---

23 – Você lê livros paradidáticos relacionados ao ensino de Matemática?

Não sei o que são ☐	Nunca li ☐	Raramente ☐	Frequentemente ☐
---	--------------------------------------	---------------------------------------	--

Anexo II – Tabulação do Questionário sobre o Perfil do Professor

1 - Ministra aulas em qual(is) rede(s) de ensino?

Pública	Particular	Ambas	Não ministra	Total
13	3	5	7	28

2 - Cargo atual (somente professores)

Professor de escola particular (somente)	Professor efetivo de escola pública (somente)	Professor não-efetivo de escola pública (somente)	Coordenador de escola particular	Coordenador de escola pública	Professor de escola particular e efetivo na escola pública	Professor de escola particular e não efetivo na escola pública
3	7	6	0	0	3	2

3 - Em quais anos leciona no Ensino Fundamental II (somente professores)

6º	7º	8º	9º	Nenhum
8	10	9	13	3

4 - Em quais séries leciona no Ensino Médio

1ª	2ª	3ª	Nenhuma
16	10	12	3

5- Período(s) de trabalho

Manhã	Tarde	Noite	Manhã e Tarde	Manhã e Noite	Tarde e Noite	Manhã Tarde Noite	Sem resposta
5	2	1	8	3	0	1	1

6 - Quantidade de aulas/trabalho semanais

1h – 10h	11h – 20h	21h – 30h	31h – 40h	41h – 50h	50h ou mais
1	2	4	10	2	2

7 - Idade (anos)

18 a 25	26 a 30	31 a 35	36 a 40	41 a 45	46 a 50	51 a 55	56 a 66
5	6	6	0	5	4	0	2

8 - Tempo de Magistério (anos)

0	1 a 3	4 a 6	7 a 9	10 a 12	13 a 15	16 a 18	19 a 21
7	6	6	2	1	2	1	3

9 – Qual é a sua formação?

Licenciatura em Matemática Incompleto	Licenciatura em Matemática Completo	Outros
12	14	2

Outros: Engenharia, Relações Internacionais, Tecnologia Mecânica, Contabilidade e Pedagogia.

10 – Pós-graduação

Pós-graduação Latu Sensu Incompleto	Pós-graduação Mestrado Incompleto	Pós-graduação Doutorado Incompleto
5	0	0
Completo	Completo	Completo
5	1	0

11 - Em relação às situações de aprendizagem contidas no Caderno do Professor, você as utiliza:

Todas na íntegra	Todas parcialmente	Algumas na íntegra	Algumas parcialmente	Nenhuma
1	3	4	9	1

12 - Os conteúdos de Matemática do Caderno do Professor, para o uso em suas aulas são:

Totalmente adequados	Suficientes	Insuficientes	Inadequados
0	5	12	1

13 - Os conteúdos de Matemática do Caderno do Aluno, para melhoria da aprendizagem deles, são:

Totalmente adequados	Suficientes	Insuficientes	Inadequados
0	5	11	2

14 – Você complementa as atividades propostas no Caderno do aluno com outras preparadas por você?

Frequentemente	Raramente	Nunca
16	2	0

15 - Já participou de atividades de formação continuada promovidas pela SEE (atualização, capacitação etc.?)

Sim	Não
12	6

16 - Se sim, você implementa o que foi aprendido em suas salas de aula?

Frequentemente	Raramente	Nunca
8	4	0

17 - Já participou de atividades oferecidas pelo CAEM?

Sim	Não	Sem resposta
20	7	1

18 - Das atividades que participou no CAEM, como você as classificaria para seu aperfeiçoamento como professor?

Muito úteis	Úteis	Pouco úteis	Sem resposta
17	2	0	9

19 - Dentre os instrumentos avaliativos abaixo, quais você utiliza para acompanhar o aprendizado específico dos conteúdos de Matemática de seu aluno

Prova escrita	Prova oral	Trabalho individual	Trabalho em grupo	Seminários
20	3	21	20	22

20 - Nas avaliações que faz de seus alunos, você também considera notas por:

Participação	Organização	Comportamento	Produção	Avaliação contínua	Auto-avaliação
21	12	11	12	19	19

21 – Em suas aulas, quais dos recursos pedagógicos descritos abaixo, você utiliza?

Giz e lousa	Livro didático	Livros extras	Apostila	Material concreto	Softwares
23	19	10	15	11	14
Datashow	Jornais e revistas	Jogos	Instrumentos de medição	Vídeos	Calculadora
12	6	13	7	12	13

22 - Você prepara as aulas com base apenas no material didático disponível?

Sim, já me basta.	Sim. Gostaria de usar outros materiais, mas não	Não, procuro ler outros materiais para	Sem resposta
1	7	16	5

23 – Você lê livros paradidáticos relacionados ao ensino de Matemática?

Não sei o que são	Nunca li	Raramente	Frequentemente	Sem resposta
0	6	8	13	2

Anexo III – Termos de Consentimento Livre e Esclarecido para Aplicação da SDA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário, da pesquisa intitulada “**Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas feitas em sala de aula**”, que tem como pesquisador responsável **Daniel Cergoli**, aluno do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pela **Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro**, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, os quais podem ser contatados pelos e-mails **cercoli@ime.usp.br** e **martha@ime.usp.br** ou pelo telefone **(11) 3091-6160**. O presente trabalho tem por objetivo aplicar uma sequência didática sobre o ensino de logaritmos para alunos do Ensino Médio, norteadas pelo processo de investigação matemática.

Minha participação consistirá em aplicar a sequência didática proposta, recolher as atividades realizadas pelos alunos e disponibilizá-las ao pesquisador responsável, atender a possíveis dúvidas e questionamentos dos alunos e, por fim, relatar ao pesquisador responsável, de forma imparcial e integral, o desenvolvimento da pesquisa.

Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

São Paulo, 26 de fevereiro de 2016.

Nilo Gonçalves Barbedo
Nome do participante

Nilo G. Barbedo
Assinatura do participante

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu compreendo os direitos dos participantes da pesquisa intitulada **Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas feitas em sala de aula**, orientada pela **Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro**, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, e que tem como pesquisador responsável **Daniel Cergoli**, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, os quais podem ser contatados pelos e-mails **cercoli@ime.usp.br** e **martha@ime.usp.br** ou pelo telefone **(11) 3091-6160**.

Na qualidade de responsável pela Escola Estadual Virgília Rodrigues Alves de Carvalho Pinto, compreendo como e porque a mencionada pesquisa está sendo realizada e autorizo a participação do **Prof. Nilo Gonçalves Barbedo** e dos seus **alunos das primeiras séries do Ensino Médio** nesse estudo.

Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa.

Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

São Paulo, 26 de Fevereiro de 2016.

Marli Faldum Bours
Nome do responsável pela instituição de ensino

Nilton
Cargo

[Assinatura]
Assinatura do responsável pela instituição de ensino