A história da matemática como
motivação para a aprendizagem das
relações trigonométricas no triângulo
retângulo

Elaine Regina Marquezin Marinho

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática
e Estatística da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Mestre em Ciências

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de
Matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cesar Polcino Milies

São Paulo, abril de 2018

A história da matemática como motivação para a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo

Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 05/07/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Francisco Cesar Polcino Milies (Presidente) – IME - USP

Profa. Dra. Maria de Lourdes Merlini Giuliani – UF ABC

Prof. Dr. Raul Antonio Ferraz – IME - USP

*Às pessoas que
fizeram de mim
quem sou, meus
pais e meus avós.*

*A meu avô Luiz, sei
que estaria muito
orgulhoso.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu marido Vilmar e aos meus filhos Andrew e Sofia, por estarem sempre ao meu lado.

Aos meus pais Edivaldo e Euzilda, por me apoiarem em todos os momentos e me dar forças para continuar sempre.

À Profa. Maria Elisa pelo apoio e confiança desde a graduação até o mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Cesar, por me dar uma direção quando eu estava me sentindo perdida, e por acreditar em mim.

A todos os meus colegas de trabalho por me incentivarem, em especial ao Josias por ser tão parceiro e me ajudar na aplicação das atividades.

Aos meus alunos por me fazerem querer ser uma pessoa cada vez melhor e continuar aprendendo sempre.

Aos meus colegas de mestrado que me ajudaram e apoiaram em muitos momentos difíceis, principalmente à Paola, Débora, Fabi e Mateus.

Enfim, a todas as pessoas que, direta ou indiretamente contribuíram para que eu realizasse esse sonho.

RESUMO

MARINHO, E. R. M. A história da matemática como motivação para a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo. 2018 Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Este trabalho tem por objetivo oferecer uma alternativa para um aprendizado mais significativo, especialmente na introdução à trigonometria. Queremos mostrar aos estudantes que a Matemática é uma ciência em movimento e que vem sendo construída há milênios conforme a necessidade e curiosidade humana. Para alcançar tal objetivo estamos sugerindo uma atividade baseada na metodologia de resolução de problemas e investigação matemática. Acreditamos que apresentando problemas da antiguidade que foram importantes motivadores do desenvolvimento deste ramo da matemática, podemos ao mesmo tempo despertar interesse e atribuir significado à construção dos conceitos a partir do contexto histórico. Para fechar a sequência de atividades, estamos propondo um experimento em que os estudantes tenham que aplicar os conhecimentos adquiridos. Desta forma esperamos mostrar que essas ferramentas podem ser poderosas aliadas no processo de ensino e aprendizagem mostrando ao estudante que ele também pode fazer parte desta história e ajudar a continuar construindo a Matemática.

Palavras-chave: resolução de problemas, investigação matemática, história da matemática, trigonometria.

ABSTRACT

MARINHO, E. R. M. The history of mathematics as a motivation to the learning of trigonometric identities in the right triangle. 2018 Thesis (Master's Degree) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

The aim of this study is to provide an alternative for a more meaningful learning, specially in regard to introduction to trigonometry. We intend to show students that mathematics is a live science, one that is being built over the centuries, according to human's curiosity and needs. In order to achieve such goal, we suggest an activity based on problem solving and mathematics investigation theory. We believe that by introducing ancient problems which were key motivators to the development of this field of mathematics, we may increase students' interest as well as help convey meaning to the building of concepts through the historical context. As a wrap up activity, we propose an experiment in which the students have to put their knowledge to practice. By doing so, we hope to demonstrate that these tools can be powerful allies in the learning process, showing students that they can be part of this history and help continue building mathematics.

Keywords: problem solving, mathematics investigation, history of mathematics, trigonometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	9
1 A história da trigonometria.....	13
1.1 Aristarco e as distâncias do Sol e da Lua.....	14
1.2 Eratóstenes e a circunferência da Terra.....	18
1.3 Hiparco: o pai da trigonometria.....	20
1.4 Ptolomeu e o Almagesto.....	22
2 Fundamentação para a abordagem pedagógica.....	23
2.1 A resolução de problemas no ensino de matemática.....	23
2.2 A história da matemática como ferramenta didática.....	27
3 A sequência de atividades.....	30
3.1 Atividade 1.....	31
3.2 Atividade 2.....	35
3.3 Atividade 3	39
3.4 Orientações ao professor.....	45
4 Análise das atividades.....	50
4.1 As produções dos alunos.....	50
Atividade 1.....	50
Atividade 2.....	77
Atividade 3.....	98
4.2 Depoimento do professor.....	111
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
---------------------------------	-----

INTRODUÇÃO

Buscar justificativas para o ensino da matemática é um desafio constante que os professores enfrentam diariamente. Há algum tempo que existe um movimento de contextualização da matemática, onde se busca que a criança aprenda através de situações problema e desenvolva as técnicas de resolução por meio de compartilhamento de ideias com os colegas.

Um dos problemas nesse caso, é que a aplicação de alguns conceitos nem sempre pode ser colocada como uma atividade do cotidiano do aluno, se tornando, algumas vezes mais complicador do que facilitador, ou seja, dependendo do conteúdo, a aplicação pode ajudar a entender os conceitos, mas em outros casos, pode se tornar ainda mais complicado.

Qual o professor que nunca ouviu de seus alunos perguntas do tipo: “Pra que serve isso?”, “Quem foi que inventou isso?”, “Para que eu vou usar isso?”, entre outras. O que estamos tentando propor aqui é a construção dos conceitos a partir de problemas que historicamente lhes deram origem e, desta forma, fazer com que o aluno entenda como e porque estes conceitos foram desenvolvidos. Além disso, trabalharemos com ferramentas tecnológicas que nos permitam fazer uma exposição mais clara daquilo que estamos tratando, além de realizar atividade prática para aplicação dos conceitos aprendidos.

Sabemos, ao estudar a história da Matemática, que vários conceitos foram sendo construídos por necessidade de se resolver determinados problemas ou por consequência dessas resoluções. Mas não é só de problemas que vive a Matemática, temos que lembrar que a curiosidade da mente humana também foi responsável por inúmeras descobertas que, a princípio eram apenas curiosidades, mas que mais tarde se tornaram ferramentas importantes no desenvolvimento de novas tecnologias.

Em minha experiência como professora de Física, tenho percebido nos últimos anos, os alunos têm muita dificuldade em entender conceitos matemáticos como razões trigonométricas, por exemplo. Todos os anos quando o assunto é cálculo de força resultante e temos que calcular uma soma vetorial, os alunos questionam incessantemente “O que é cosseno?”, “Como posso calcular?”, “Como eu vou saber

o valor do cosseno?”. Isso me fez questionar que, por diversas razões, algumas vezes acabamos passando para nossos alunos alguns conteúdos como se fossem apenas um punhado de fórmulas desconexas e sem nenhum sentido prático, o que acaba o impossibilitando de fazer conexões que seriam úteis em diversas situações em sua vida. Pensando neste fato, tentei buscar uma maneira de fazer com que o aprendizado de tais conceitos fosse mais significativo para esses alunos, o que é a concepção de trabalho da instituição em que leciono as disciplinas de Matemática para o Ensino Fundamental e Física para o Ensino Médio. Como também sou uma amante da História da Matemática, resolvi unir minha paixão a esse problema e partir da seguinte pergunta: ***Como atribuir significado à aprendizagem de razões trigonométricas através de problemas históricos?***

Assim sendo, podemos dizer que o objetivo deste trabalho é propor uma maneira de motivar e até justificar o estudo de determinados conceitos matemáticos através de atividades práticas que levem a construção desses conceitos com embasamento histórico. Neste trabalho em específico trataremos das relações trigonométricas no triângulo retângulo, que tem uma grande riqueza histórica pouco explorada por parte dos professores da educação básica.

Também é importante ressaltar que, com a metodologia que utilizaremos neste experimento, espera-se que o aluno desenvolva uma série de habilidades como: trabalho em equipe, exposição de suas ideias, proatividade, empenho e persistência na busca de novos conhecimentos, autonomia em seus estudos, desenvoltura, utilização de ferramentas de geometria dinâmica e confiança, pois as aulas de matemática hoje estão pautadas em desenvolver habilidades nos alunos que vão além do calcular. Segundo os PCN, alguns dos objetivos do ensino fundamental são:

- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.
- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;

- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas; (PCN, 1997, 6p)

Pensando nesses objetivos, cada vez mais buscamos maneiras de fazer com que nossos alunos compreendam o significado daquilo que lhes é ensinado, não se preocupando apenas com os procedimentos, mas também com as justificativas. Sendo assim é válido procurar maneiras de motivar o aluno e mostrar a ele que a matemática é uma ciência que foi e está sendo construída há milênios, com os estudos de diversos povos do mundo inteiro. Segundo os PCN:

O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (página 19).

Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos (página 23).

Neste sentido, o trabalho proposto se justifica por ter como objetivo trazer essa motivação e significado através do envolvimento do aluno na compreensão do processo de construção da matemática por meio de sua história.

No primeiro capítulo faremos um breve apanhado da história da Trigonometria citando alguns problemas que acredita-se ter motivado os estudos nessa área. Vários problemas, principalmente na Astronomia, foram motivadores dos estudos para se calcular distâncias através de triângulos semelhantes, existem registros que nos fazem acreditar que problemas com triângulos semelhantes já eram explorados há mais de 3600 anos pelos egípcios.

No segundo capítulo será apresentado um estudo teórico sobre as implicações da metodologia de resolução de problemas no ensino e aprendizagem de Matemática

desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e qual a importância da História da Matemática nesse contexto.

No terceiro capítulo trataremos da sequência didática aplicada com os alunos do 9º ano. Quando o projeto foi pensado, a ideia era que eu mesma aplicasse as atividades mas analisando melhor, percebi que se a minha ideia é produzir um material que possa ser utilizado por outros professores, seria melhor que outro professor aplicasse as atividades desde o início e fizesse críticas que pudessem aperfeiçoar o material, principalmente quanto às instruções para aplicação das atividades. Por esse motivo pedi ajuda a um colega de trabalho que prontamente concordou em participar do projeto aplicando as atividades durante o ano letivo de 2017 no mês de junho.

No quarto capítulo faremos o relato da experiência e uma análise das produções dos alunos. Neste capítulo relatamos todo o desenvolvimento das atividades e os ajustes feitos, bem como fotos das produções dos alunos e depoimento do professor aplicador.

1 A história da trigonometria

“A trigonometria, como outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação.” (BOYER, 1974)

É muito difícil saber quando exatamente surgiu a trigonometria. Primeiramente é preciso se definir o que estamos interessados em estudar. Como o foco do trabalho é estudar as relações trigonométricas no triângulo retângulo, consideraremos todos os estudos envolvendo relações entre medidas de ângulos e lados de triângulos, ou seja, processos que dão a ideia da trigonometria que conhecemos hoje, mas sem o tratamento algébrico que utilizamos.

Sendo assim, podemos supor, devido ao Papiro de Ahmes, que a ideia da trigonometria se originou há mais de 4 milênios. No papiro Ahmes há um exercício, de número 56, que traz rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes, aplicado à construção de pirâmides, onde era essencial manter uma inclinação constante das faces. Esse problema pede para encontrar o Seqt de uma pirâmide de 250 cúbitos de altura cujos lados de sua base medem 360 cúbitos. O seqt de uma pirâmide era a razão entre o “afastamento” e a “elevação” do centro da pirâmide, seria o que hoje conhecemos como cotangente do ângulo formado entre a base e uma face da pirâmide, como ilustrado na figura.

$$\text{Seqt} = \frac{H}{a}$$

Mas não foram somente os egípcios que utilizaram razões entre triângulos semelhantes para calcular distâncias. Esse método também era conhecido dos babilônios, que tinham grande interesse na Astronomia, tendo construído uma tábua de eclipses lunares que chegou até os nossos dias.

Entretanto, iniciaremos nossos trabalhos pelos gregos. Faremos isso por dois motivos: o primeiro é que temos um pouco mais de detalhes sobre seus estudos e o segundo é pela forte influência da geometria grega na matemática que ensinamos hoje nas escolas.

Antes de começar a falar da trigonometria grega vamos destacar uma informação importante para o desenvolvimento desse ramo da matemática: a divisão do círculo em 360 partes. Ao que se sabe, o primeiro a propor essa divisão foi Hipsicles de Alexandria (240 - 170 aC) que dizem ter tido influência dos babilônicos, que já utilizavam frações sexagesimais para essa representação. Uma outra possibilidade para a divisão ser em 360 partes era o fato da duração de 1 ano ser de 360 dias, assim o círculo que o sol desenharia em torno da terra poderia ser dividido em 360 partes.

Outro ponto que vale a pena esclarecer antes de continuarmos é o significado de filósofo na Grécia Antiga, pois não falaremos de Matemáticos, mas de Filósofos gregos. A palavra *filosofia* é atribuída a Pitágoras de Samos e é composta por *filo* que significa amizade e *sofia*, que significa sabedoria, ou seja, filosofia – amizade pela sabedoria. Assim sendo, definimos por filósofo todo aquele que é amante do saber, ou seja, estudiosos nas diversas áreas do saber.

1.1 Aristarco e as distâncias do Sol e da Lua

Passaremos agora a falar de um grande astrônomo grego chamado Aristarco de Samos (310 aC – 230 aC). Grande parte de seus trabalhos não chegou até nós, mas sabemos deles através de citações feitas por Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C). Através dessas citações de Arquimedes, é possível acreditar que Aristarco foi o primeiro a propor a hipótese heliocêntrica do sistema solar que, segundo ele, faria maior sentido para explicar os movimentos dos astros. Uma obra de Aristarco que chegou até nós e chama bastante a atenção é “Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua”.

Neste trabalho Aristarco estabeleceu uma maneira de calcular a distância da Terra ao Sol através de uma comparação com a distância da Terra à Lua. Para que isso fosse possível ele precisou fazer várias observações:

1ª – O Sol está mais distante da Terra do que a Lua. Para verificar esta informação, supondo a Terra no centro do sistema solar, pode-se concluir que se o Sol estivesse mais perto, as fases da Lua não estariam de acordo com as observadas. Não haveria, por exemplo a Lua nova, ao invés disso, teríamos duas fases cheias, sendo uma delas sempre ao meio dia, como podemos observar na figura. Além disso, outro fato que corrobora a hipótese de que o Sol está mais distante é o eclipse solar, que ocorre quando a Lua está entre a Terra e o Sol.

2ª – Existem duas fases em que se pode observar da Terra, a Lua metade iluminada, metade escura: o “quarto crescente” e o “quarto minguante”. Nesta ocasião, o triângulo com vértices Terra - Lua - Sol é retângulo no vértice representado pela Lua (figura 2).

Uma teoria é que Aristarco teria observado simultaneamente a Lua em quarto crescente e o pôr-do-sol medindo, assim, o ângulo compreendido entre eles (figura 3). Outra, que acho mais plausível é que ele teria feito os cálculos baseado em suas observações do ciclo lunar e uma regra de três simples. O resultado encontrado por ele foi de aproximadamente 87° para o ângulo α e, portanto, 3° para o ângulo β .

Fonte: <http://slideplayer.com.br/slide/10218904/>> Acesso em 29/09/2016

Sabendo que um triângulo qualquer, com ângulos de mesma medida, é semelhante, Aristarco fez os cálculos e concluiu que o Sol estava 20 vezes mais distante da Terra do que a Lua. Vamos simular o que Aristarco fez:

Construímos, com o auxílio de um software gráfico um triângulo semelhante ao triângulo de Aristarco. Com o software é possível construir o triângulo precisamente com os ângulos de 90° , 87° e 3° e obter as medidas dos lados.

Agora calculamos a razão $\frac{TS}{TL} = \frac{6,68}{0,35} \cong 19,09$.

Hoje sabemos que a distância da Terra ao Sol é na verdade cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. Embora Aristarco não tenha chegado nem perto desse valor, seus métodos para os cálculos estavam corretos, o que não estava correto era a medida do ângulo, que devido à tecnologia a que temos acesso hoje, sabemos que é na verdade $89,86^\circ$. Assim sendo, o que faltou a Aristarco, foi precisão nas medidas,

exatamente por não ter acesso a instrumentos de medida mais precisos. Sua ideia é considerada simples, porém brilhante.

Aristarco também calculou os diâmetros do Sol e da Lua. No caso da lua ele obteve diâmetro aproximado de 0,35 vezes o diâmetro da Terra, o que é bem preciso para a época, já que o valor correto é de 0,27 do diâmetro terrestre. Já com o Sol ele passou bem longe, estimou seu diâmetro como 7 vezes o diâmetro da Terra, quando na verdade é aproximadamente 100 vezes. Mesmo assim Aristarco conseguiu mostrar que o Sol era bem maior do que a Terra.

Figura de uma cópia do tratado de Aristarco que mostra alguns dos cálculos sobre os tamanhos relativos da Terra, Sol e Lua. (Fonte: <http://www.ghc.usp.br/server/Sites-2008/Giacomo-Bosco/Aristarco%20e%20o%20tratado-trat.html> acessado em 28/02/2018)

Outra informação interessante a respeito de Aristarco é que ele teria, em seus estudos, concluído que o Sol estaria no centro do Universo, e não a Terra, como era proposto na época. Essa ideia de Aristarco não se popularizou e ao invés disso, foi aceito o modelo de Ptolomeu que acabou perdurando por aproximadamente 1400 anos, quando Nicolau Copérnico começou a contestar.

Embora pouco conhecido, Aristarco foi um grande pensador e suas ideias inspiraram trabalhos posteriores que nos levaram a resultados cada vez mais precisos e com isso o enriquecimento também das ferramentas matemáticas para buscar esses resultados.

1.2 Eratóstenes e a circunferência da Terra

O próximo filósofo que falaremos é Eratóstenes. Foi através dos trabalhos de Eratóstenes que se possibilitou conhecer o raio da esfera terrestre. Nascido em Cirene, passou a maior parte de sua vida em Atenas e, quando tinha aproximadamente 40 anos, foi convidado para ser bibliotecário chefe da biblioteca de Alexandria. Há relatos de que, por volta de 194 aC, já em idade avançada, resolveu suicidar-se deixando de se alimentar.

Sabe-se que durante seu trabalho na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes, que era um amante da geografia, aproveitou seu tempo livre para ler tudo que lá havia sobre este assunto. Nesses estudos ele percebeu que o último mapa do mundo, desenhado por Heródoto, já tinha mais de dois séculos e que muitos lugares novos haviam sido descobertos nesse tempo. Assim, Eratóstenes resolveu desenhar seu próprio mapa do mundo, colocou Alexandria no centro e começou a desenhar o que se conhecia a seu redor. Ele também conhecia muito de história, o que o ajudou nessa tarefa. Mas no processo de construção de tal mapa uma coisa incomodava Eratóstenes: como ele poderia desenhar esse mapa se ele não sabia qual era a extensão do mundo? Foi então que ele começou a pensar maneiras de resolver este problema.

Durante suas pesquisas, Eratóstenes leu em um papiro que na cidade de Siena, ao meio dia do solstício de verão, uma vara na vertical não projetava sombra alguma, mas ele sabia que naquele mesmo dia e, no mesmo horário, na Cidade de Alexandria era projetada uma sombra. Sendo assim, ele concluiu que a Terra não poderia ser plana, pois se fosse, as sombras seriam iguais em qualquer ponto da sua superfície. A Terra tinha que ser esférica. O que ele fez então foi imaginar a Terra

como uma laranja que, cortada ao meio exibia seus gomos, se ele soubesse quantos gomos formavam a circunferência terrestre e o comprimento de cada arco correspondente, poderia então saber a circunferência completa. Eratóstenes soube que deveria então medir a inclinação dos raios solares pela sombra no dia 21 de junho ao meio dia e, depois que soubesse também a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, poderia calcular a extensão do mundo que procurava. A parte mais difícil provavelmente, foi medir tal distância, devemos nos lembrar que na época não havia unidades de medida padronizadas e nem tampouco instrumentos para medir. Acredita-se que essa medida foi obtida por agrimensores treinados em dar passos constantes de mesmo tamanho, possibilitando assim, que a medida fosse confiável para a época.

Eratóstenes fincou então uma estaca de madeira no chão, na cidade de Alexandria e, ao meio dia de 21 de junho, mediu o ângulo formado entre a estaca e sua sombra, o qual corresponderia a aproximadamente, $7,2^\circ$. Sendo assim, ele sabia que seriam necessários 50 vezes a distância entre Alexandria e Siena para saber a extensão de todo o globo terrestre.

Esquema da ideia de Eratóstenes. (Fonte:

http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf Acesso em 09/09/2016)

A medida obtida pelos agrimensores para a distância entre as duas cidades foi de 5 000 estádios (unidade utilizada na época), bastava então multiplicar esse valor por 50 e chegar à conclusão que a extensão procurada seria de 250 000 estádios. Há divergências entre os historiadores para a conversão desta unidade de medida para metros, mas o comprimento da circunferência calculada por Eratóstenes ficaria entre 39 e 41 mil quilômetros, o que se aproxima muito do valor que se pode calcular hoje com toda a tecnologia existente. Um ponto que se deve levar em consideração também é que hoje sabemos que a Terra não é exatamente uma esfera.

Eratóstenes também obteve valores para as distâncias da Terra ao Sol (aproximadamente 804 000 000 de estádios) e da Terra à Lua (aproximadamente 780 000 estádios), mas estes resultados não foram tão bons.

1.3 Hiparco: o pai da trigonometria

Falaremos agora um pouco sobre aquele que é considerado o pai da trigonometria. Hiparco, que viveu aproximadamente entre os anos 190 e 125 aC, é provavelmente o astrônomo mais eminente da época. Suas observações mais importantes aconteceram no observatório de Rodas. Creditam-se a ele, em astronomia, a determinação da duração do mês lunar médio, um cálculo acurado da eclíptica e a descoberta de uma estimativa da precessão anual dos equinócios. Sabe-se ainda que ele utilizava a localização de pontos sobre a superfície terrestre por meio de latitude e longitude. Mas nos importaremos com os feitos de Hiparco na matemática, pois seus trabalhos na astronomia renderam um grande desenvolvimento na área da trigonometria. Como quase nenhum dos escritos de Hiparco chegou até nós, o que sabemos sobre ele provém de fontes de terceiros.

Embora seu tratado “Sobre tamanhos e distâncias” não tenha chegado até nós, relatos feitos por Ptolomeu (85 - 165), Pappus (290 – 350) e outros, poderiam nos permitir refazer seus cálculos. Vários historiadores da ciência têm tentado reconstruir esses cálculos, a primeira tentativa foi feita por Friedrich Hultsch em 1900, mas foi posteriormente rejeitada por Noel Swerdlow em 1969. Gerald J. Toomer expandiu essa reconstrução em 1974.

Neste tratado Hiparco teria determinado a distância da Terra à Lua em relação ao tamanho da Terra, ele teria disposto de dois métodos para fazê-lo. O primeiro se baseia num eclipse solar possivelmente ocorrido em 129 a.C., que teria coberto totalmente o disco solar perto de Helesponto mas parcialmente em Alexandria, podendo-se ver ainda um quinto do disco solar nesta localidade. Com este método Hiparco estimou a distância em aproximadamente 71 raios terrestres.

O segundo método se baseava em observações de eclipses lunares, neste caso ele chegou a um valor que ficaria entre 59 e 67 raios terrestres para a distância pretendida, hoje sabemos que esta é de aproximadamente 60 raios terrestres. Ele também estimou a distância do Sol em 490 raios terrestres.

Teon de Alexandria, atribui a Hiparco um tratado de doze livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas. Acredita-se que a tábua construída por Ptolomeu tenha se baseado nesta de Hiparco. O trabalho de Hiparco baseava-se numa circunferência dividida em 360 graus de 60 minutos e o raio expresso em minutos é:

$$R = \frac{360 \cdot 60'}{2\pi} \approx 3438'$$

E a função corda pode ser relacionada com o conceito moderno da função seno (com α em grau) como sendo:

$$\frac{Crd\ 2\alpha}{2} = 3438 \operatorname{sen} \alpha$$

Ele calculou a função em intervalos de $\frac{1}{48}$ de círculo usando interpolação linear entre os pontos calculados para outros valores. Assim, ele conseguiu construir toda a tabela, podendo ser calculado a partir dos valores $Crd\ 60^\circ = R$ e $Crd\ 90^\circ = \sqrt{2R}$ e as duas fórmulas seguintes, onde d é o diâmetro do círculo de base e s é a corda do ângulo α .

$$(1) \quad Crd\ (180 - \alpha) = \sqrt{d^2 - s^2}$$

$$(2) \quad \text{Crd } \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (d^2 - d\sqrt{d^2 - s})}$$

A tabela de Hiparco foi substituída, na astronomia grega, pela de Ptolomeu, que apresentava os cálculos da função de $0,5^\circ$ a 180° , de meio em meio grau.

1.4 Ptolomeu e o Almagesto

Ptolomeu é responsável por um tratado de 13 livro que ele chamou de *A compilação Matemática*, mas que foi logo substituído por *A Grande Compilação*. O título ficou *al-majisti* ao ser traduzido para o árabe e chegou até nós como *Almagesto*, quando foi traduzido do árabe para o latim.

Neste tratado Ptolomeu se propôs a organizar e sistematizar os conhecimentos de astronomia da época, além de corrigir e complementar com suas próprias observações o que achasse necessário. Grande parte dos trabalhos descritos por Ptolomeu se atribuem a Hiparco, inclusive a rejeição do modelo heliocêntrico de Aristarco e a adoção do modelo geocêntrico que acabou perdurando até Copérnico. Sabe-se também que o Almagesto é citado como um dos textos científicos mais utilizados na história, junto com os Elemento de Euclides. Ptolomeu descreve-se muito claramente o que ele está tentando fazer ao escrever o trabalho:

Devemos tentar anotar tudo o que achamos que descobrimos até o presente; devemos fazer isso de forma tão concisa quanto possível e de uma maneira que pode ser seguida por aqueles que já fizeram algum progresso no campo. Por uma questão de integridade em nosso tratamento, devemos estabelecer tudo o que é útil para a teoria dos céus na ordem correta, mas, para evitar um dado incorreto, devemos apenas contar o que foi adequadamente estabelecido pelos antigos. No entanto, os tópicos que não foram tratados pelos nossos predecessores, ou não tão de forma útil como poderiam ter sido, serão discutidos extensivamente para o melhor de nossa capacidade. (Robertson, 1999)

2 Fundamentação para a abordagem pedagógica

2.1 A resolução de problemas no ensino de matemática

Problemas de matemática são tratados desde a antiguidade, como podemos ver inclusive em papiros e tabletas de argila recuperados de antigas civilizações como a egípcia e a babilônica, por exemplo. O que difere estes problemas do que trataremos neste trabalho, é a forma como a resolução de problemas é aplicada no ensino da matemática. Basicamente, o que se fazia até pouco tempo, era usar situações problema, até mesmo contextualizadas com situações “reais”, para aplicação de uma determinada ferramenta matemática, ou seja, se ensinava um conceito e apresentava-se ao aluno um grupo de problemas que poderiam ser resolvidos utilizando-se daquela ferramenta para apresentar uma solução “adequada”. Nesta época, eram mais valorizados os resultados obtidos, não se importando tanto com o processo de resolução, já que este era um tanto “padronizado”. Isso viria a mudar em decorrência das pesquisas e estudos realizados na área.

Foi a partir de trabalhos como *How to solve it* de George Polya, publicado em 1945, que se iniciou um esforço para estudar as implicações da resolução de problemas no ensino de Matemática. A partir daí começou-se a falar sobre o uso da resolução de problemas como forma de se aprender matemática.

No final dos anos 1970 esse movimento ganhou espaço no mundo inteiro e em 1980 foi editado nos EUA o documento “An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's” que procurava reunir esforços para conseguir uma melhor educação matemática para todos. Conforme Onuchic (2013), as ações recomendadas por esse documento enfatizavam que:

- O currículo matemático deveria ser organizado ao redor da solução de problemas;
- A definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveriam ser desenvolvidas e expandidas de modo a incluir uma ampla

gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial de aplicações matemáticas;

- Os professores de matemática deveriam criar ambientes em sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar;
- Materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;
- Os programas de matemática dos anos 80 deveriam envolver os estudantes com resolução de problemas, apresentando aplicações em todos os níveis;
- Pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 80, investigações em resolução de problemas. (Onuchic, 2013)

Mas foi somente no final da década de 1980 que o Brasil começou a trabalhar de fato com resolução de problemas. Os PCN chamaram atenção para o documento “Uma agenda para a Ação” dizendo que suas ideias influenciaram reformas no ensino de matemática em todo o mundo. Podemos perceber que a resolução de problemas é uma habilidade considerada de extrema importância por esse trecho dos objetivos do Ensino Fundamental:

Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (PCN, 1997, p.6)

E nesta citação dos PCN, podemos ver a preocupação de se trabalhar a resolução de problemas como uma metodologia para o ensino e aprendizagem de matemática:

Resolver um problema não se resume em compreender e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter uma solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta dá lugar à importância do processo de resolução. (PCN, 1997, p. 42)

Acredita-se, no entanto, que os resultados não tenham sido como esperados por se fazer diferentes interpretações do que significaria “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”. Os estudos dessa metodologia deram grande atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando somente à busca de solução. Mesmo assim, o processo continuou preso à busca de solução do problema. Schroeder e Lester (1989) apresentam três maneiras de abordar a resolução de problemas: ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas.

Ensinar sobre resolução de problemas se baseia no modelo de George Polya que, em sua publicação “A arte de resolver problemas” expõe uma metodologia para resolver problemas em quatro etapas que ficou conhecido como heurística ou método de Polya. As quatro etapas do método de Polya são, resumidamente,

- compreender o problema analisando se é possível resolver imediatamente ou se é necessário um problema auxiliar, ou ainda se o aluno já resolveu um problema similar que possa ajudá-lo nesta resolução;
- estabelecer uma estratégia de resolução, ou seja, transformar o problema para a linguagem matemática estabelecendo a incógnita que se deseja determinar;
- executar a estratégia aplicando as técnicas que julgar necessárias para a determinação da incógnita e resolução do problema;
- verificar se soluções encontradas são adequadas ao problema e verificar ainda se seria possível resolver este mesmo problema usando outra estratégia ou um problema similar.

Segundo Polya, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas matemáticos nos alunos, deveria ser um dos objetivos principais do Ensino de Matemática. Ele também ressalta a importância do processo de resolução e não somente do resultado obtido.

Polya afirma que o problema deve ser pensado pelo professor de forma que faça sentido para o aluno, ou seja, que ele entenda o objetivo e queira resolvê-lo, que seja difícil o baste para desafiar o aluno, mas que também tenha informações acessíveis o suficiente para que ele não desista de tentar resolvê-lo. Ele diz que neste processo o professor deve auxiliar seus alunos com indagações, e dá exemplos de

perguntas que poderiam ser utilizadas, mas que ele não deve ajudar demais, dando fragmentos de respostas. A ideia deve nascer na cabeça do aluno e o professor deve ser responsável por estimulá-lo durante todo o desenvolvimento das atividades com perguntas como: *o que você quer? O que você tem? Como obter o que você quer a partir do que você tem?*

Ensinar a resolver problemas consiste em aplicar a matemática na resolução de problemas rotineiros ou não. Sendo assim, tem-se uma grande preocupação em estruturar os conceitos matemáticos de forma que possam ser aplicados na resolução de problemas especialmente preparados para isso.

Finalmente, no caso de ensinar matemática através da resolução de problemas, é pensar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino, onde usamos o problema como um elemento disparador de um processo de construção de conhecimento.

Piaget afirma que *“é através da ação que se aprende”*, assim, colocando-se o sujeito diante de um problema, pretende-se que ele desenvolva as ferramentas necessárias para a resolução do problema, “imitando” o processo de desenvolvimento dos conceitos.

E é essa metodologia que pretendemos explorar neste trabalho. Esse processo se dá quando um problema é proposto e espera-se que o aluno, baseado em seus conhecimentos já adquiridos anteriormente e em discussão com seus pares e orientação do professor, consiga construir novos conhecimentos.

Ao aprender a resolver problemas matemáticos, o aluno adquire habilidades de raciocínio, criatividade e criticidade que lhe serão úteis na resolução de outros tipos de problemas em sua vida cotidiana. Este tipo de aprendizagem é de extrema importância, independentemente de conteúdos estudados, principalmente se considerarmos a facilidade no acesso à informação que possibilita, a uma pessoa capaz, compreender um conceito quando este for necessário à sua prática.

A partir dessa ideia de resolução de problemas vários estudos e contribuições foram sendo feitos, devido a sua reconhecida importância. Assim, ao se valorizar os processos de resolução, passa-se a propor problemas mais abertos, onde não se tem um resultado “fechado”, mas a possibilidade de mais indagações acerca do assunto. Desta forma foi se estabelecendo um processo de exploração de problemas que ficou

conhecido como investigação Matemática, que é muito difundido principalmente pelas ideias de João Pedro da Ponte.

Nesse processo de investigação o aluno é levado a explorar o problema, muitas vezes de forma intuitiva, buscando todos os caminhos interessantes à sua resolução. Neste sentido, é um processo divergente, onde se parte de um ponto sem saber onde vai chegar.

As atividades de investigação exigem uma grande preparação por parte do professor, requer muita pesquisa e elaboração ou adaptação de atividades para que o aluno se depare com questões abertas o bastante para despertar o seu interesse. Isso tudo não se esquecendo de que o professor deve ter claramente definidos os objetivos a serem alcançados com tais atividades.

É possível que a resistência dos professores em aceitar mais esse tipo de atividade esteja relacionada com o tempo que este tipo de atividade demanda, seja na preparação das atividades como na sua aplicação.

2.2 A história da matemática como ferramenta didática

A história da matemática, dependendo de como é apresentada aos alunos, pode ser uma poderosa ferramenta didática, principalmente quanto à compreensão da construção de conceitos e métodos. Sabemos que sua importância também é reconhecida e citada nos PCN:

O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (PCN, 1997, p.19).

Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da

apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos (PCN, 1997, p.23).

Segundo Mendes (2009), *“a história da Matemática pode ser usada como agente fomentador do ato cognitivo em sala de aula, desde que seja configurado na forma de atividade para o aluno”*. Sob esse aspecto, podemos entender que a História da Matemática pode ser uma forte aliada no que se refere a despertar o interesse dos alunos por conteúdos matemáticos, pois pode facilitar o entendimento da construção de conceitos da maneira como foram concebidos, respondendo assim às questões que tanto incomodam a alunos e professores: “por que tenho que estudar isso?”, “por que inventaram isso?”, etc.

O conteúdo histórico vem como um elemento motivador, pois nele estão as raízes do conhecimento matemático a ser construído pelos alunos. E por ser um provocador da curiosidade, devemos usá-lo para mostrar problemas que provocaram indagações e questionamentos levando ao empenho, muitas vezes de gerações, na busca por métodos ou modelos que levassem à resolução de tais problemas. Também é importante mostrar que métodos descobertos para resolução de determinados problemas se tornaram, em muitos casos, poderosas ferramentas que, ao longo do tempo, se mostraram importantes no desenvolvimento de novas tecnologias.

Para que esse aprendizado tenha significado, não basta apresentar fatos históricos aos alunos, precisamos adaptá-los a atividades que envolvam o caráter investigativo e que até possibilite a manipulação de materiais concretos na resolução de problemas. Também o professor tem papel muito importante neste processo, pois ele deve ser o agente estimulador de ideias, deve questionar os alunos e não fornecer respostas, deve responder perguntas com outras perguntas, levando os alunos a confrontarem seus métodos e buscar novos caminhos.

É preciso lembrar que nessa metodologia o processo é mais valioso que o resultado, é importante analisar o que foi feito e verificar se não poderia ser de outra maneira também. Tendo isso em vista, a socialização dos processos com a turma é essencial para que cada um possa analisar e criticar seus próprios métodos.

Neste trabalho abordamos a trigonometria plana em sua origem, e escolhemos problemas que acreditamos ser motivadores do seu estudo. Colocamos como problema: “Como obter distâncias que não somos capazes de medir?” e procuramos na História da Matemática situações em que isso foi abordado. Inicialmente questionamos os alunos em como eles resolveriam esses problemas e após pensarem em conjunto nesses problemas, a solução historicamente encontrada foi exposta.

Desta maneira, não estamos simplesmente “jogando” fatos históricos desconexos e sem sentido para os alunos, mas mostrando possibilidades de como resolver o problema inicialmente proposto e, mais que isso, que este problema já foi discutido há milhares de anos possibilitando que ferramentas matemáticas fossem desenvolvidas para resolvê-lo e que essas ferramentas acabaram se mostraram muito úteis não só na resolução deste tipo de problema, mas também em outros.

Assim pretendemos mostrar como é possível aliar a metodologia de resolução de problemas à história da matemática para introduzir novos conceitos de maneira significativa e fundamentada.

3 A sequência de atividades

Neste capítulo faremos uma descrição da sequência de atividades. Inicialmente traçaremos o perfil das turmas.

A escola em que a atividade foi aplicada é uma unidade da rede SESI de ensino que está situada no bairro Vila Leopoldina na cidade de São Paulo. A comunidade no entorno da escola é considerada de classe média, porém, os alunos são oriundos de diversos outros bairros, sendo assim, nosso público é bastante diversificado. Também trabalhamos com inclusão e por isso temos alunos com diferentes níveis de aprendizagem. A rede SESI tem material didático próprio e os livros mostram a intenção de ensinar Matemática através da metodologia de resolução de problemas. Sabemos que alguns professores ainda são resistentes à metodologia e acabam não aplicando em suas aulas, mas ainda assim temos que entender tal metodologia como pressuposto.

O capítulo do livro dedicado a este conteúdo vem logo após a semelhança de triângulos e é iniciado com o Teorema de Pitágoras. Na sequência apresenta problemas onde os alunos devem medir ângulos e lados de triângulos retângulos, calcular razões e comparar os resultados com os colegas, passando então aos problemas de aplicação.

A atividade aqui proposta, em específico, seria uma novidade para esses alunos por estar num formato diferente do proposto no material didático, que não explora nem os aspectos históricos, nem o uso do Geogebra. Foi solicitado, como pré-requisito, que os alunos soubessem semelhança de triângulos.

A atividade foi aplicada no mês de junho de 2017 em quatro turmas de 9º ano pelo professor Josias Barbosa de Miranda, que leciona na referida escola há 4 anos e é aluno do programa de mestrado PROFMAT na Universidade Federal de São Paulo. O professor Josias também atua na Faculdade SESI como mentor de atividades supervisionadas em curso de Especialização na Docência de Matemática para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para a aplicação das atividades, foi orientado ao professor o trabalho em pequenos grupos. Que esses grupos tivessem tempo para discutir sobre os problemas propostos e que houvesse uma socialização das ideias após cada etapa do trabalho. Durante todo o processo, o professor deveria acompanhar as discussões dos grupos fazendo questionamentos e orientando quanto a algumas dúvidas que pudessem obstruir os trabalhos. Também vemos como papel do professor fazer colocações e esclarecer dúvidas durante o processo de socialização.

Vejamos como a atividade foi organizada:

3.1 Atividade 1

1ª Etapa

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

Nesta primeira etapa espera-se que os alunos, em conjunto, esboquem desenhos da Terra, Sol e Lua e cheguem a perceber que estes podem ser vértices de um triângulo.

2ª Etapa

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

Nesta etapa espera-se que os alunos sugiram maneiras de se medir o ângulo como, por exemplo, pensando na circunferência que a Lua descreveria em torno da Terra e fazendo uma regra de três utilizando o tempo total da volta que a Lua dá em torno da Terra e o tempo da mudança de fase, de quarto crescente para quarto minguante.

3ª Etapa

Determinados os ângulos, basta comparar o triângulo obtido com um triângulo semelhante qualquer. Sabendo que os ângulos encontrados por Aristarco foram aproximadamente 87° para o ângulo α e 3° para o ângulo β , calcule a razão Terra-Sol/Terra-Lua. Para facilitar o trabalho, sugerimos o uso de um software gráfico, Geogebra, por exemplo.

Nesta etapa os alunos de cada grupo devem construir um triângulo com os ângulos 90° , 87° e 3° sem se preocupar com as medidas dos lados. Posicionar os astros nos vértices segundo o modelo de Aristarco, medir os lados do triângulo e calcular as razões pedidas. No momento de socialização, espera-se que os grupos tenham obtidos valores próximos no caso de construção com régua e transferidor, ou iguais no caso de construção com software. Isso deve ocorrer, preferencialmente, com tamanhos diferentes de triângulos para que os alunos percebam que as razões permanecem as mesmas, mesmo com as diferentes representações.

4ª Etapa

O problema das distâncias resolvido por Aristarco, serve para nos mostrar que triângulos retângulos semelhantes (com ângulos de mesma medida) têm razões iguais. Vamos fazer uma atividade usando o Geogebra para verificar isso.

Mantendo os ângulos fixos, alteramos as medidas dos lados do triângulo e calculamos as razões.

AB	AC	BC	AB/BC	AC/BC	AB/AC

Depois verificamos o que acontece se os ângulos são alterados.

Nesta etapa é sugerido ao professor que leve os alunos no laboratório de informática da escola para que manipulem o triângulo de ângulos fixos, mas que se possa alterar as medidas dos lados. Esse triângulo pode ser construído pelos alunos ou disponibilizado pelo professor. Eu disponibilizei o arquivo do Geogebra com os triângulos prontos e até com cálculo automático das razões, mas acho mais produtivo que os alunos calculem essas razões eles mesmos, ainda que usem uma calculadora para esse fim. Espera-se com este experimento que eles percebam que as razões

permanecem as mesmas quando os ângulos estão fixos, mas que se alteram quando não estão, ou seja, essas razões dependem do ângulo e não das medidas dos lados do triângulo. Também sugerimos que, se não surgir espontaneamente, o professor levante a hipótese de se construir uma tabela com as razões para diferentes ângulos.

3.2 Atividade 2

1ª Etapa

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida. Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

A história da medida da circunferência terrestre por Eratóstenes é bastante conhecida, por esse motivo, é possível que alguns alunos esbocem exatamente a ideia que ele teve, mas também podemos esperar várias outras, inclusive de se pegar uma fita métrica e ir medindo. Todas as ideias devem ser exploradas no processo de socialização para que os alunos percebam a viabilidade ou não de suas ideias.

2ª Etapa

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

Espera-se que os alunos compreendam que determinar o ângulo significa saber a quantidade de partes em que a terra estaria dividida e que, sabendo a medida do arco, bastava multiplica-la pela quantidade de partes para saber a medida da laranja toda.

3ª Etapa

Eratóstenes ficou sabendo que, ao meio dia, os raios solares incidiam perpendicularmente na cidade de Siena, pois era possível, nesse horário, visualizar o reflexo do sol totalmente no fundo de um poço sem a projeção de nenhuma sombra. Como os raios solares são praticamente paralelos, Eratóstenes sabia que, neste mesmo horário, na cidade de Alexandria, uma sombra seria projetada. Usando seus conhecimentos de Geometria, descubra como Eratóstenes encontrou o ângulo do setor circular mencionado.

Novamente os alunos deveriam ser estimulados a fazer desenhos ou esquemas para tentar entender como o ângulo poderia ser medido com as informações que possuíam. Nesta etapa esperamos que eles percebam a congruência do ângulo formado entre a estaca e sua sombra e o ângulo que desejamos medir.

4ª Etapa

Para medir a distância entre as duas cidades, Eratóstenes pediu ajuda aos agrimensores do rei, homens treinados para dar passos constantes para estabelecer distâncias com maior precisão. A medida encontrada foi de 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época). Agora, sabendo a distância entre as cidades de Siena e Alexandria e que o ângulo formado pela sombra era aproximadamente 7° , é só calcular a circunferência da Terra. Além disso, sabendo o comprimento da circunferência, também seria possível estimar o raio da Terra, o que será útil no próximo problema.

Figura 5: Procedimento de Eratóstenes para cálculo da curvatura da Terra

Nesta etapa os alunos devem ser capazes de realizar os cálculos necessários para determinar o comprimento da circunferência máxima da Terra sem intervenções.

3.3 Atividade 3

1ª Etapa

3º Problema:

Para concluir o nosso estudo de astronomia, vamos conhecer mais um astrônomo e matemático que foi muito importante nesses cálculos de distância: Hiparco de Nicea (190 – 120 a C) também procurou descobrir a distância da Terra à Lua, porém em função do raio da Terra, ou seja, a quantos raios terrestres corresponde a distância da Terra à Lua. Vejamos um esquema do que Hiparco pensou:

As obras escritas de Hiparco não chegaram até os nossos dias, assim, o que sabemos do trabalho dele é contado por outros filósofos como Ptolomeu, por exemplo. Acredita-se que Hiparco teria baseado seus cálculos em um eclipse lunar. Observando o tempo entre o início e o final do eclipse e comparando com o tempo de uma volta completa da lua em torno da terra, ele conseguiu calcular o ângulo d e com isso chegou ao resultado de 59 raios terrestres para a distância entre a Terra e a Lua. Assim, se juntarmos as informações dos três problemas, teremos respondido nossa pergunta inicial.

Pensando em como as razões eram úteis para os cálculos utilizados em seus estudos de Astronomia, Hiparco construiu a primeira tabela trigonométrica da história (uma tabela contendo razões entre os lados de triângulos para diferentes ângulos). Pode parecer uma coisa fácil de se fazer, você poderia ir alterando os ângulos do triângulo

de 1 em 1 grau no Geogebra e anotando as razões. Mas para Hiparco não foi tão simples assim, lembre-se que ele não tinha sequer uma calculadora para auxiliá-lo em seu trabalho. Foi mais ou menos assim que surgiu uma área muito importante da matemática: a Trigonometria, que significa medida das partes de um triângulo.

Observe o triângulo retângulo abaixo:

Destacando o ângulo de 30° , temos a seguinte denominação dos lados do triângulo:

AB é o cateto adjacente (pois faz parte do ângulo);

BC é o cateto oposto (pois está em lado oposto ao ângulo);

AC é a hipotenusa.

E temos as seguintes relações:

$$\text{Seno do ângulo de } 30^\circ: \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Cosseno do ângulo de } 30^\circ: \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Tangente do ângulo de } 30^\circ: \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

Essas relações foram e são até hoje, utilizadas para calcular distâncias que não podem ser medidas. Como os valores das relações são fixos e sempre os mesmos para um determinado ângulo, se você tem um problema onde se sabe a medida de um lado do triângulo e as medidas dos ângulos, eu consigo descobrir as medidas dos outros dois lados do triângulo. Mas por que isso é útil? Vejamos alguns problemas que encontramos nos livros do 9º ano como exemplo:

P 1:

Para vencer um desnível de 4,25 metros vai ser construída uma rampa com inclinação de 15° .

Qual será o comprimento da rampa?

P 2:

As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto A vê-se o ponto B sob um ângulo de 30° com o plano horizontal, conforme a figura.

Determinar a distância entre os pontos A e B.

P 3:

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista salta do ponto P, mas cai no ponto A, conforme indica a figura.

A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?

P 4:

A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio. Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

P 5:

Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

Nesta etapa damos um fechamento para o problema inicialmente proposto e conceituamos as relações trigonométricas no triângulo retângulo. É importante que o professor incentive a participação dos alunos neste processo, abrindo espaço para que eles opinem e sanando eventuais dúvidas. Além disso também é preciso

exemplificar situações onde esses conceitos possam ser aplicados, como nos problemas propostos, que são comumente encontrados em livros didáticos e testes.

2ª Etapa

É importante ressaltar que os resultados encontrados por esses estudiosos gregos não foram exatos, alguns estão bem longe do que conhecemos hoje, porém isso se deve à imprecisão das medidas e não do método utilizado para calcular.

Para exemplificar uma situação como esta podemos fazer uma atividade prática. Para isso, precisaremos de um transferidor, um canudo, linha, fita adesiva e uma pedrinha ou pedaço de borracha. Vamos construir o instrumento ilustrado abaixo. O professor vai auxiliá-los na sua utilização para calcular a altura de um poste, árvore ou prédio da escola.

É lógico que você poderia argumentar que vários desses problemas poderiam ser resolvidos sem usar a trigonometria, mas não os de escala astronômica. A trigonometria surgiu para resolver esses problemas e suas aplicações só foram crescendo ao longo do tempo.

Nesta última etapa pensamos em uma atividade prática onde os alunos pudessem experimentar uma situação “semelhante” àquela proposta inicialmente, porém de uma maneira um pouco mais simples. O professor vai auxiliar os alunos na construção do instrumento - o Teodolito – e desafiá-los a medir a altura de algum objeto da escola que eles não seriam capazes de alcançar para medir diretamente (também seria interessante medir um outro objeto que pudesse ser medido diretamente para que esta medida calculada pudesse ser verificada). Espera-se que os alunos sejam capazes de simular uma situação como a do problema **P2**, visto anteriormente. A intervenção do professor também deve ser necessária em todo o processo.

Além da atividade preparada para os alunos, também foi entregue uma orientação ao professor com sugestões de como proceder no desenvolvimento da atividade da maneira como ela foi pensada.

3.4 Orientações ao professor

Orientações ao professor

Caro professor, estamos oferecendo uma proposta de atividade investigativa onde, estudando problemas clássicos da antiguidade, os alunos possam descobrir a trigonometria partindo da semelhança de triângulos retângulos. O interessante nesses problemas é que eles estão relacionados à Astronomia e por se tratarem de medidas astronômicas, o aluno não pode te dizer “por que não medimos com uma fita métrica?”, como nos problemas em que você propõe medir a altura de um poste ou um prédio, por exemplo.

Preparamos atividades para os alunos e você pode seguir a sequência que achar mais adequada, o que faremos nesta seção é dar informações mais completas para que você esteja preparado para os questionamentos que os alunos certamente farão.

A ideia é que os alunos comecem trabalhando em grupos pequenos na busca da solução para o problema e após um determinado tempo esses grupos sejam unidos formando grupos maiores para debater as ideias entre eles e posteriormente compartilhar com toda a turma.

É importante dar aos alunos tempo para pensar sobre o assunto, talvez seja interessante deixar a resolução do problema de uma aula para outra, para que eles possam refletir mais sobre o assunto. Durante as discussões entre os alunos é preciso caminhar entre os grupos instigando, fazendo questionamentos e alimentando as ideias deles.

Problema de Aristarco

Sugira aos alunos fazer um esquema ou desenho para expor as ideias, como eles devem trabalhar com semelhança de triângulos, eles precisam encontrar esses triângulos. Encontrado o triângulo, pergunte a eles como poderiam descobrir os ângulos do triângulo (eles podem pensar em medir com um transferidor, ou por uma fração da circunferência de acordo com o ciclo lunar). Oriente quanto à nomenclatura formal no esquema para organizar os cálculos posteriormente. Nesta etapa, poderia ser solicitado aos alunos fazer as observações e tentar medir o ângulo, porém isso tomaria muito tempo. Como não pretendemos fazer o experimento completo, podemos revelar aos alunos as medições feitas por Aristarco.

Concluída esta etapa, é necessário construir um triângulo com os ângulos encontrados, para isso, sugiro a utilização de um software de geometria dinâmica, por exemplo, Geogebra. É também um bom momento para ensinar os alunos a usar o software, mas se não for possível, faça conjuntamente com a sala utilizando um projetor multimídia. A vantagem de se construir o triângulo usando o software é a precisão obtida nas medidas. Lembre aos alunos que o foco do problema é descobrir a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, solicitando que eles calculem. A razão que eles devem encontrar é algo em torno de 20, que foi o número encontrado por Aristarco. Neste momento vale contar a eles que o valor de Aristarco passou bem longe do real, mas que isso se deveu ao erro na medição do ângulo, justamente pela dificuldade de se fazer isso com os recursos da época, mas podemos passar a eles o valor correto do ângulo (aproximadamente $89,5^\circ$) e pedir que repitam os cálculos para chegar ao valor correto, que é, aproximadamente, 400. Essa atividade serve também para mostrar que um pequeno erro no ângulo, produz um erro enorme na medida.

Não se sabe exatamente como Aristarco mediu o ângulo, mas acredita-se que ele observou o ciclo lunar durante alguns meses e calculou o ângulo proporcional aos dias correspondentes à fase entre o quarto crescente e o quarto minguante.

Conclua a resolução do problema afirmando para os estudantes que, como puderam comprovar, a ideia de Aristarco estava perfeitamente correta, o seu único problema foi não ter condições adequadas para medir precisamente o ângulo.

Agora, utilizando a ideia dos triângulos semelhantes, faça com os alunos a atividade 1 do geogebra. Novamente, a atividade pode ser feita usando um projetor. O professor deve escolher 4 posições diferentes para o ponto B e os estudantes devem anotar os valores das medidas dos lados de cada triângulo obtido e depois calcular as razões solicitadas na tabela. Isso vai mostrar que não importa o tamanho do triângulo, as razões serão as mesmas. Depois disso devemos questionar se o mesmo aconteceria se o ângulo não estivesse fixo. Para isso, utilize a atividade 2 do geogebra. Neste ponto deixaremos uma pergunta: “Não seria mais fácil ter uma tabela com os valores das razões para cada ângulo?”

Problema de Eratóstenes

O segundo problema é bem famoso e já deve ser conhecido por alguns deles. O comprimento da circunferência máxima da Terra, obtida por Eratóstenes, pode não estar tão relacionado com a trigonometria, mas dá um desfecho para nossa empreitada em descobrir as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à lua. Também neste problema, proponho fazer a investigação em grupos e aos poucos revelando as informações até que o problema esteja totalmente resolvido. Também vale ressaltar as dificuldades encontradas por Eratóstenes para medir, desta vez, não o ângulo, mas a distância, entre as cidades de Siena e Alexandria. Devemos lembrar que não existia um sistema padronizado de medidas e que estas eram realizadas utilizando partes do corpo, e quando mais extensas como era no caso, usando passos. Dizem que inicialmente Eratóstenes tentou realizar a medida usando camelos, mas não deu muito certo pois os camelos não caminhavam regularmente durante todo o tempo. Por fim ele pediu ajuda ao rei que lhe emprestou seus agrimensores (homens treinados para dar passos regulares), que efetuaram a

medição. Os registros mostram que o valor encontrado foi de 5000 estádios, o que equivaleria a 787 km, para a distância e de $7,2^\circ$ para o ângulo central. E fazendo uma regra de três simples, obtemos a circunferência da Terra.

Problema de Hiparco

Na terceira parte somente apresentamos a eles a solução de um problema resolvido por Hiparco, que ficou conhecido como pai da trigonometria, por suas contribuições. O problema em questão foi encontrar a distância da Terra à Lua em relação ao raio da Terra. Hiparco também elaborou provavelmente, o que é considerado a primeira tabela trigonométrica da história, que utilizava em seus cálculos de astronomia. E neste momento essa é a contribuição mais importante de Hiparco à nossa investigação. Aqui vamos expor aos alunos a denominação dos lados do triângulo de acordo com o ângulo escolhido e das razões nele estabelecidas: seno, cosseno e tangente, também daremos alguns exemplos de aplicação. Se achar necessário, acrescente mais exercícios.

Aplicando os conhecimentos

Finalmente, na quarta parte do trabalho, faremos uma atividade prática. A ideia é que os alunos construam o instrumento ilustrado na atividade deles prendendo a linha ao canudo e ao transferidor, de forma que a linha passe pelo ponto central do transferidor. Na outra extremidade da linha deve haver um peso para que facilite a marcação do ângulo. Para a realização da atividade os alunos devem se organizar em pequenos grupos e proceder da seguinte maneira:

- *Escolher o que será medido;*
- *Garantir que haja uma base plana para observar o que será medido;*
- *Posicionar-se num local de fácil visualização do topo do objeto a se medir;*
- *Medir a distância do observador à base do objeto com uma trena;*
- *Observar o topo do objeto pelo canudo e anotar o ângulo marcado pela linha no transferidor;*

Com as informações coletadas, esboçar um esquema e calcular a altura desejada.

Exemplo:

Se h a altura do prédio, y a distância do observador à base do prédio, z a altura do observador e $x + z = h$, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x = y \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Logo,} \quad h = y \cdot \operatorname{tg} \alpha + z$$

4 Análise das atividades

4.1 As produções dos alunos

Neste capítulo faremos uma análise geral das produções dos alunos baseando-se nos registros que eles fizeram e nos vídeos gravados durante as aulas. Também inseri algumas imagens dos registros sem a identificação dos alunos.

Inicialmente o Prof. Josias fez uma apresentação do projeto, dizendo que se tratava de um trabalho desenvolvido pela Prof. Elaine para o ensino de trigonometria através de problemas relacionados à história da matemática e da astronomia e os convidou a participar. As turmas foram então organizadas em grupos de trabalho de 4 alunos em média, e as atividades foram realizadas em uma sala preparada para o desenvolvimento de trabalho em grupo.

Alguns momentos do desenvolvimento das atividades foram gravados em vídeo para que eu pudesse analisar além do que os alunos escreveram, nos vídeos é possível ver a maneira como eles pensaram e discutiram antes de expressar as ideias no papel.

Atividade 1

1ª etapa

O Professor leu com os alunos o problema e distribuiu folhas e réguas para que eles pensassem, discutissem e esboçassem suas ideias. Durante todo o processo o professor passou pelas mesas observando e questionando. Os alunos facilmente perceberam que poderiam desenhar um triângulo com os vértices no Sol, Terra e Lua, e ficaram discutindo muito sobre os movimentos, pois eles perceberam que o triângulo que seria obtido dependeria da posição da lua naquele momento. Eles também perguntaram ao professor se o Aristarco tinha alguma informação que eles não

possuíam ou se também estava no escuro como eles, pois eles se questionavam onde eles conseguiriam encontrar outro triângulo para comparar com aquele que eles obtiveram e percebi que vários grupos tentaram desenhar dois triângulos pensando nas possíveis posições da Lua. Somente 2 grupos disseram ao professor que eles poderiam desenhar um triângulo menor no papel com os mesmos ângulos e sabendo as medidas dos lados e comparar este desenhado com o triângulo no espaço. E 1 dos grupos até disse que se eles pudessem visualizar da Terra o Sol e a Lua ao mesmo tempo, eles já conheceriam 1 dos ângulos.

Uma coisa que achei interessante foi como eles se envolveram no problema e queriam resolvê-lo tão imediatamente.

Dos 32 trabalhos analisados, somente 3 grupos não formaram triângulos em seu esquema. Um grupo registrou que a posição da Lua era importante no processo, pois determinava o ângulo formado com a Terra, 14 grupos concluíram que o triângulo deveria ser retângulo, embora não soubessem em que vértice deveria estar o ângulo reto. E somente 1 grupo registrou que poderia comparar o triângulo no espaço com um menor e com os mesmos ângulos.

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

Aristarco pode ter olhado para o sol e para a lua e tem ideias de proporção de distância e tamanho //

Como a maioria dos grupos, esse construiu um triângulo com os astros nos vértices.

Esse grupo observou que eles poderiam ter diferentes triângulos por causa do movimento da Lua e procuraram desenhar dois triângulos, já que eles estavam pensando em semelhança e precisavam ter dois triângulos para comparar. Vários grupos fizeram desenhos parecidos com este.

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

PODEMOS COMPARAR ESSE TRIÂNGULO QUE ESTÁ NO ESPAÇO COM UM TRIÂNGULO MENOR COM OS MESMO ÂNGULOS.

Este grupo também fez o desenho de um triângulo retângulo no espaço e até sugeriu que este triângulo poderia ser comparado com um menor que tivesse os mesmos ângulos. No vídeo o aluno diz que ele poderia desenhar este outro triângulo na mesa em que estavam trabalhando.

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

A posição da Lua é importante pela questão do ângulo que ela forma com a Terra.

Este grupo procura construir um triângulo retângulo e levanta a questão de que a posição da Lua no momento da medição é importante por causa do ângulo formado. Mas como podemos perceber, todos os grupos que desenharam triângulos retângulos, colocaram o ângulo reto na Terra.

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

Precisamos de outro Triângulo, mas não achamos

Este grupo sabia que precisaria de outro triângulo para comparar com esse, mas não teve a ideia de como encontra-lo.

Prezados estudantes, faremos uma sequência de atividades onde os conhecimentos matemáticos, principalmente em Geometria, serão utilizados para calcular distâncias impossíveis de serem medidas. Você já questionou, por exemplo, como é possível saber as distâncias da Terra ao Sol ou da Terra à Lua, já que não podemos medi-las? Alguns astrônomos e matemáticos da antiguidade dedicaram seu trabalho a responder perguntas como essas, vejamos como eles fizeram:

1º Problema

Como vocês devem saber, na antiguidade, os homens acreditavam que a Terra era o centro do universo e que o Sol e a Lua giravam ao seu redor. Mas um astrônomo grego, que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo, chamado Aristarco pensava diferente. Ele acreditava que o Sol estava no centro e que a Terra e os demais planetas giravam ao seu redor. Além dessa teoria que na época não foi aceita, mas que hoje sabemos ser a verdade, Aristarco teve a ideia de calcular as distâncias relativas do Sol e da Lua, isso quer dizer que ele queria saber quantas vezes o Sol estava mais distante da Terra do que a Lua.

Bom, alguém te falou em algum momento que a Lua girava em torno da Terra e que a Terra girava em torno do Sol. Na época de Aristarco não era assim, por isso ele primeiro teve que verificar que, de fato, o Sol estava mais distante da Terra que a Lua, para depois calcular essas distâncias.

Aristarco resolveu esse problema utilizando noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção. Sabendo que o problema foi resolvido com conhecimentos que vocês já possuem, como vocês fariam para resolvê-lo? Registre suas ideias, faça esquemas, desenhos, solte sua imaginação!

Desafio: Descobrir quantas vezes o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, ou seja, quantas vezes a distância Terra-Lua cabe na distância Terra-Sol.

O Sol deve estar ao meio dia na linha do equador.

A lua deve estar perpendicular a linha do equador, mas 90° da Terra para o lado

Pela conclusão deste grupo, percebemos que eles pensaram muito em como os astros deveriam estar posicionados para que eles construíssem um triângulo que acharam conveniente. É lógico que eles não têm experiência em observações de

astronomia e não conseguiram chegar a um resultado, mas eles se preocuparam com as posições e os ângulos formados.

2ª etapa

Nessa segunda etapa percebi que os alunos ficaram muito presos ao desenho que coloquei na atividade e não na ideia de como obter os ângulos. Pelos vídeos que assisti, vi que alguns grupos tentaram medir no desenho usando o transferidor e que outros grupos tentaram dividir a circunferência da órbita da Lua para tentar descobrir o valor do ângulo, neste caso a 2ª ideia faria sentido não fosse o caso deles estarem pensando no contexto do desenho e não usando somente como uma representação. Muitos grupos encararam somente como um palpite porque acharam que deveriam dar uma resposta numérica. Foram somente 5 grupos que conseguiram associar o ângulo ao tempo que a Lua leva para dar uma volta completa em torno da Terra, ou às fases da Lua.

Analisando esta fase da atividade conclui que ela precisa ser aprimorada para que os alunos entendam melhor seu objetivo e não se prendam ao desenho. É importante que eles entendam que o desenho é apenas uma representação para ajudá-los a entender o problema e que não deve ser usado como base para obtenção de medidas. Sei que o professor fez essa observação oralmente, mas de qualquer forma acho importante a seguinte correção do texto:

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

Obs.: Lembramos que o desenho serve somente para ilustrar a situação, mas que suas dimensões não representam as medidas reais encontradas por Aristarco. O que se propõe nesta atividade não é encontrar de fato as medidas em valor numérico, mas uma maneira de fazê-lo.

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

$$\frac{360^\circ}{2}$$

Nós dividimos o ângulo da circunferência da Terra, que é igual a 360° , em 5 partes iguais e achamos 72° . Dessa forma foi possível medir os outros ângulos.

Neste caso eles dividiram a circunferência influenciados pelo desenho e não pela ideia do ciclo lunar.

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

Usando o tempo.

Este grupo não deu detalhes por escrito na atividade, escreveram apenas que ele usou o tempo, mas no vídeo eles explicaram a ideia ao professor dizendo que o Aristarco poderia ter usado o tempo que a Lua demora para dar uma volta completa em torno da Terra para calcular o ângulo.

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

Nós achamos que os homens na antiguidade mediam as coisas com a velocidade do tempo (fases da lua).

Nesta atividade fica claro que eles pensaram que a circunferência poderia ser dividida usando as fases da Lua.

Este desenho achei particularmente interessante porque mostra uma tentativa de medir o ângulo por observação simultânea do Sol e da Lua.

Aqui também vemos uma tentativa de relacionar ao ciclo lunar. Acredito que eles não tenham conseguido se expressar pela ausência de valores, isso os incomoda muito. Se eles soubessem o tempo decorrido entre o quarto crescente e o quarto minguante, tenho certeza que teriam chegado ao valor do ângulo.

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

Ciclo Lunar = 28 dias $\alpha \approx 3$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\beta = 15^\circ > 90^\circ$$

Neste desenho fica clara a tentativa de obter valores, mas parece que eles não entenderam muito bem a questão da sombra na Lua.

Aristarco percebeu que existem dois momentos no ciclo lunar em que a lua fica metade iluminada, o quarto crescente e o quarto minguante. Com isso fez o seguinte esquema:

O motivo pelo qual Aristarco resolveu usar essas fases da Lua para seus cálculos, é que os triângulos que vemos acima têm um ângulo reto no vértice onde está a Lua. Desta maneira, se o ângulo α fosse medido, seu complementar β também estaria determinado. Como você faria para medir esses ângulos?

$$\frac{160}{5} = 32$$

$$36^\circ$$

$$\alpha \approx 72^\circ$$

$$L = 90^\circ$$

$$\beta \approx 18^\circ$$

$$14$$

7 dias num ciclo

Nesta atividade também eles tentaram atribuir valor aos ângulos se baseando nas fases da Lua, mas o que me faz pensar que eles ainda se prendem ao desenho é o fato de dividirem 180 por 5. É claro que se pensássemos nas fases da Lua com períodos iguais, também não se chegaria a conclusão alguma, pois com outro ângulo de 90° não se formaria triângulo algum. Porém penso que eles deveriam ter entendido que este ângulo ficaria bem próximo de 90° .

3ª Etapa

Não tenho filmagem desta fase da atividade, somente os registros escritos dos alunos. O que posso perceber é que o professor trabalhou com a construção do triângulo tanto no Geogebra como no papel usando régua e transferidor. Para facilitar a construção, já que um dos ângulos é muito pequeno (3°), o professor ofereceu aos alunos folhas no tamanho A3, para que o triângulo ficasse maior e mais fácil de medir. Também podemos perceber nas atividades que foram construídos no Geogebra triângulos com diferentes tamanhos para que os alunos percebessem que a razão continua a mesma se os ângulos não forem alterados.

Todos os grupos conseguiram realizar os cálculos e chegaram a valores próximos a 20 para a razão procurada. Neste ponto não parecem ter tido dificuldades, afinal chegou o momento que eles estavam esperando, o desfecho da história.

Como a construção foi feita pelos dois métodos é possível comparar que no caso da construção no Geogebra, o valor encontrado para a razão Terra-Sol/Terra-Lua foi a mesma para todos os grupos. Já no caso da construção feita no papel com régua e transferidor resultou em pequenas variações para a razão procurada, o que se explica pela precisão das medidas, que não é a mesma nos dois casos. Essa precisão nas medidas deve ser usada como um gancho para explicar que a medida encontrada por Aristarco também não foi precisa, pois assim como os alunos, ele não tinha todas as informações para conseguir o nível de precisão que temos hoje, mas que se ele tivesse encontrado o ângulo exato, teria chegado ao valor correto.

Determinados os ângulos, basta comparar o triângulo obtido com um triângulo semelhante qualquer. Sabendo que os ângulos encontrados por Aristarco foram aproximadamente 87° para o ângulo α e 3° para o ângulo β , calcule a razão Terra-Sol/Terra-Lua. Para facilitar o trabalho, sugerimos o uso de um software gráfico, Geogebra, por exemplo.

$$\frac{28,2}{1,5} = 18,8 \Rightarrow \frac{\text{Terra-Sol}}{\text{Terra-Lua}} = \frac{y}{x}$$

Com régua / transfer:

$$\frac{28,2}{1,5} = 18,8$$

No geogebra:

$$\frac{28,62}{1,54} = 18,9$$

$$\frac{80,62}{4,22} = 19,1$$

Determinados os ângulos, basta comparar o triângulo obtido com um triângulo semelhante qualquer. Sabendo que os ângulos encontrados por Aristarco foram aproximadamente 87° para o ângulo α e 3° para o ângulo β , calcule a razão Terra-Sol/Terra-Lua. Para facilitar o trabalho, sugerimos o uso de um software gráfico, Geogebra, por exemplo.

Na mesma régua, transferidos e esquadro para fazer mais um teste da teoria de Aristarco.

$$\text{Conta} = \frac{28,4}{1,2} = 24,5$$

Conclusão: Aristarco concluiu que a Terra está 19,1 vezes de distância do Sol, mas ele errou por conta da medida do ângulo.

Determinados os ângulos, basta comparar o triângulo obtido com um triângulo semelhante qualquer. Sabendo que os ângulos encontrados por Aristarco foram aproximadamente 87° para o ângulo α e 3° para o ângulo β , calcule a razão Terra-Sol/Terra-Lua. Para facilitar o trabalho, sugerimos o uso de um software gráfico, Geogebra, por exemplo.

No geogebra

$$\frac{\text{Terra-Sol}}{\text{Terra-Lua}} = \frac{129,96}{6,8} = 19,1$$

$$\frac{89,8}{4,7} = 19,1$$

$$\frac{378,09}{19,79} = 19,1$$

Aristarco chegou a conclusão de que o Sol está 19 vezes mais longe da Terra do que da Lua

Neste caso todos os valores foram obtidos no Geogebra, mas percebemos que o professor teve o cuidado de mostrar vários triângulos com os mesmos ângulos para que os alunos pudessem fazer uma comparação.

Determinados os ângulos, basta comparar o triângulo obtido com um triângulo semelhante qualquer. Sabendo que os ângulos encontrados por Aristarco foram aproximadamente 87° para o ângulo α e 3° para o ângulo β , calcule a razão Terra-Sol/Terra-Lua. Para facilitar o trabalho, sugerimos o uso de um software gráfico, Geogebra, por exemplo.

Com régua / transferidor

$$\frac{33,9}{1,7} = 19,94118$$

No Geogebra

$$\frac{16,81}{0,88} = 19,10227$$

Determinados os ângulos, basta comparar o triângulo obtido com um triângulo semelhante qualquer. Sabendo que os ângulos encontrados por Aristarco foram aproximadamente 87° para o ângulo α e 3° para o ângulo β , calcule a razão Terra-Sol/Terra-Lua. Para facilitar o trabalho, sugerimos o uso de um software gráfico, Geogebra, por exemplo.

$$\frac{\text{terra} \cdot \text{sol}}{\text{terra} - \text{lua}} = \frac{129,96}{6,8} = 19,1$$

$$\frac{89,8}{4,7} = 19,1$$

$$\frac{378,09}{19,79} = 19,1$$

Aristarco. O sol está 19 vezes distante da Lua

Se tiver o mesmo ângulo, o resultado permanece independente do tamanho

Na sequência apresento as imagens dos desenhos feitos pelos alunos com régua e transferidor.

4ª Etapa

Enviei ao professor os arquivos do Geogebra que seriam utilizados nesta etapa da atividade. No primeiro arquivo temos um triângulo com os ângulos fixos, mas com possibilidade de variar as medidas dos lados, conforme a figura 1. Já no 2º arquivo, temos um triângulo onde podem ser alterados tanto as medidas dos lados quanto dos ângulos B e C, conforme figura 2. No 2º arquivo também coloquei um cálculo automático das razões aparecendo na tela.

Figura 1

Figura 2

O professor projetou a primeira tela e variou as medidas dos lados para que os alunos anotassem essas medidas e então calculassem as razões pedidas na tabela. Não houve dificuldades em preencher a tabela com os cálculos. Em seguida, o

professor projetou a segunda tela variando agora as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo para que os alunos vissem que nesse caso, as razões não se mantêm. Assim foi possível concluir que mesmo com diferentes valores de lados, se o ângulo é mantido as razões também são. Por fim os alunos concluíram que uma tabela com as razões seria de grande utilidade.

O problema das distâncias resolvido por Aristarco, serve para nos mostrar que triângulos retângulos semelhantes (com ângulos de mesma medida) têm razões iguais. Vamos fazer uma atividade usando o Geogebra para verificar isso.

Mantendo os ângulos fixos, alteramos as medidas dos lados do triângulo e calculamos as razões.

AB	AC	BC	AB/BC	AC/BC	AB/AC
15,01	8,67	17,33	0,86	0,50	1,73
20,48	11,83	23,65	0,86	0,50	1,73
6,56	3,70	7,57	0,86	0,50	1,73
8,98	5,17	10,33	0,86	0,50	1,73

Depois verificamos o que acontece se os ângulos são alterados.

Como pudemos perceber, o valor das razões dependem apenas dos ângulos e não das medidas dos lados do triângulo. Sendo assim, não seria mais fácil ter uma tabela com as razões para cada ângulo, do que ficar desenhando e calculando cada vez que fosse necessário?

Sim, seria bem fácil consultar uma tabela do que ter que desenhar um triângulo retângulo toda vez que o ângulo mudasse.

O problema das distâncias resolvido por Aristarco, serve para nos mostrar que triângulos retângulos semelhantes (com ângulos de mesma medida) têm razões iguais. Vamos fazer uma atividade usando o Geogebra para verificar isso.

Mantendo os ângulos fixos, alteramos as medidas dos lados do triângulo e calculamos as razões.

AB	AC	BC	AB/BC	AC/BC	AB/AC
15.01	8.67	17.33	0,86	0,50	1,73
20.48	11.83	23.65	0,86	0,50	1,73
6.56	3.79	7.57	0,86	0,50	1,73
2.95	5.17	10.33	0,86	0,50	1,73

Depois verificamos o que acontece se os ângulos são alterados.

Como pudemos perceber, o valor das razões dependem apenas dos ângulos e não das medidas dos lados do triângulo. Sendo assim, não seria mais fácil ter uma tabela com as razões para cada ângulo, do que ficar desenhando e calculando cada vez que fosse necessário?

Sim, pois o valor não se altera com o tamanho do triângulo e num certo ângulo que tem um valor limitado, no caso do triângulo de 90° graus.

O problema das distâncias resolvido por Aristarco, serve para nos mostrar que triângulos retângulos semelhantes (com ângulos de mesma medida) têm razões iguais. Vamos fazer uma atividade usando o Geogebra para verificar isso.

Mantendo os ângulos fixos, alteramos as medidas dos lados do triângulo e calculamos as razões.

AB	AC	BC	AB/BC	AC/BC	AB/AC
15,01	8,67	17,33	0,86	0,50	1,73
20,48	11,83	23,65	0,86	0,50	1,73
6,56	3,79	7,57	0,86	0,50	1,73
8,95	5,17	10,33	0,86	0,50	1,73

Depois verificamos o que acontece se os ângulos são alterados.

Como pudemos perceber, o valor das razões dependem apenas dos ângulos e não das medidas dos lados do triângulo. Sendo assim, não seria mais fácil ter uma tabela com as razões para cada ângulo, do que ficar desenhando e calculando cada vez que fosse necessário?

SERIA MAIS FÁCIL, POIS ASSIM NÃO TERIA O TRABALHO DE CALCULAR TODA VEZ JÁ SABENDO O RESULTADO, MAS SE OS ÂNGULOS MUDAREM É PRECISO CALCULAR.

O problema das distâncias resolvido por Aristarco, serve para nos mostrar que triângulos retângulos semelhantes (com ângulos de mesma medida) têm razões iguais. Vamos fazer uma atividade usando o Geogebra para verificar isso.

Mantendo os ângulos fixos, alteramos as medidas dos lados do triângulo e calculamos as razões.

AB	AC	BC	AB/BC	AC/BC	AB/AC
6.97	4.02	2.05	0.86	0.5	1.73
4.63	2.67	5.34	0.86	0.5	1.73
8.66	5	10	0.86	0.5	1.73
10.06	5.81	11.61	0.86	0.5	1.73

Depois verificamos o que acontece se os ângulos são alterados.

Como pudemos perceber, o valor das razões dependem apenas dos ângulos e não das medidas dos lados do triângulo. Sendo assim, não seria mais fácil ter uma tabela com as razões para cada ângulo, do que ficar desenhando e calculando cada vez que fosse necessário?

Sim, se todos os ângulos foram medidos e fixados com o Geogebra, não seria mais fácil.

O problema das distâncias resolvido por Aristarco, serve para nos mostrar que triângulos retângulos semelhantes (com ângulos de mesma medida) têm razões iguais. Vamos fazer uma atividade usando o Geogebra para verificar isso.

Mantendo os ângulos fixos, alteramos as medidas dos lados do triângulo e calculamos as razões.

AB	AC	BC	AB/BC	AC/BC	AB/AC
16.55	9.55	19.11	0.86	0.49	1.73
8.37	4.84	9.67	0.86	0.50	1.72
10.04	11.57	23.15	0.86	0.49	1.73
1.5	0.87	1.73	0.86	0.50	1.72

Depois verificamos o que acontece se os ângulos são alterados.

Como pudemos perceber, o valor das razões dependem apenas dos ângulos e não das medidas dos lados do triângulo. Sendo assim, não seria mais fácil ter uma tabela com as razões para cada ângulo, do que ficar desenhando e calculando cada vez que fosse necessário?

Não, podemos construir uma tabela com os valores, já que sempre são iguais nesse caso.

Atividade 2

1ª Etapa

15 grupos sugeriram que ele poderia dividir a circunferência terrestre em partes, medir uma parte e depois multiplicar a quantidade de partes, muitos deles fizeram uma comparação a uma pizza, dividindo em 8 pedaços, mas não conseguiram explicar como ele faria essa divisão. Alguns grupos mencionaram ângulo central, se ele soubesse o arco correspondente a 1 grau seria só multiplicar por 360. Um grupo parece que já sabia a resposta e fez um esquema bastante interessante mostrando o ângulo central, os raios solares e a sombra na superfície da Terra. Alguns grupos mencionaram sombra, é possível que eles soubessem como o problema foi resolvido, mas não se lembravam ou não sabiam explicar ou ainda estavam tentando relacionar o problema ao Teorema de Tales, mas sem ter ideia do que fazer. Muitos grupos pensaram que eles precisariam descobrir o raio da Terra para poder calcular a circunferência usando a fórmula que conhecem ($C = 2\pi r$).

Mais uma vez senti que os alunos têm uma necessidade em dar uma resposta “certa”, mas a ideia de já atribuir um valor ainda não apareceu nesta fase da atividade.

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida.

Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

Em várias atividades podemos perceber a necessidade em se aplicar a fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. Isso é natural para eles, pois foi assim que eles aprenderam, mas parece que eles não se atentaram para o fato de que o raio também era desconhecido.

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida.

Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

$2\pi \cdot \text{Raio}$

Ele poderia dividir a Terra em fatias até ser possível medir um km a medida de cada fatia.

Nesta atividade vemos que embora eles tenham imediatamente pensado na fórmula, também tiveram a ideia de dividir a Terra em fatias.

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida.

Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

Ele poderia calcular quanto tempo a sombra leva para cobrir a distância de um passo e contar quanto tempo leva para o Sol dar a volta em toda Terra. Depois ele teria que fazer uma conta, por exemplo:

Achei bastante interessante a ideia deste grupo, pois eles relacionaram a ideia de medir a distância em passos e também de usar o movimento do Sol.

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida.

Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

*Podemos imaginar a Terra como uma pizza,
se dividirmos a mediana de uma fatia, sobramos
o resto.*

A maioria dos grupos que sugeriu dividir a Terra em fatias como se fosse uma pizza, acabou não se preocupando com o ângulo central, não sei como eles acharam que essa divisão poderia ser feita em partes iguais.

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida.

Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

$$\text{Diâmetro} = 2 \text{ raios} = ?$$

$$\text{Circunferência} = d \cdot \pi$$

Se ele de alguma forma fosse capaz de descobrir um grau (1°) da Terra, bastaria multiplicar por 360

Já este grupo pensou no ângulo, mas ainda não sabe como poderia medir.

2º Problema:

Um outro matemático grego chamado Eratóstenes (275 – 194 a C), que foi bibliotecário da cidade de Alexandria, era apaixonado por Geografia e por esse motivo resolveu aproveitar seu tempo na biblioteca para estudar um pouco mais sobre o assunto. Ele percebeu que as informações estavam todas espalhadas e decidiu escrever um livro para organizar os conhecimentos de Geografia que havia na época. Ele queria mapear o mundo, mas sabia que seu livro não estaria completo sem a medida da circunferência da Terra, informação que era desconhecida na época, pois era uma distância impossível de ser medida. Como Eratóstenes também era Matemático, começou a pensar numa maneira de conseguir essa medida.

Você consegue imaginar qual foi a ideia brilhante que Eratóstenes teve que possibilitou calcular a circunferência terrestre?

A partir da diferença dos graus de 1 cidade e outra ele ~~fez~~ calculou a distância dessas cidades.

Ele multiplicaria pelo tanto de graus que faltava p/ dar 360° .

Este grupo parecia já conhecer a solução. Me lembro de ter contado essa história a eles quando estavam no 6º ano e foram meus alunos, mas não sei se eles lembraram ou se procuraram na internet, mas o fato é que este foi o único grupo a esboçar essa ideia.

2ª Etapa

Pelo que os alunos expressaram na gravação pude perceber que todos entenderam a ideia de como calcular a circunferência pela regra de três. Alguns alunos ainda ficaram presos à representação que fiz para ilustrar a situação, mesmo o professor dizendo a eles que era apenas uma ilustração e que não representava os valores reais. Alguns deles ainda têm dificuldades em expressar suas ideias e principalmente de generalizar. Como eles entendem melhor com exemplos numéricos, acham que só conseguem explicar o que estão pensando desta maneira.

De qualquer forma fico satisfeita em constatar que eles entenderam o processo, pois mesmo utilizando valores numéricos, vários deles usaram valores diferentes do que estava representado no desenho, o que mostra que eles não ficaram tão presos

à representação. Isso mostra um avanço quanto à compreensão da atividade e das representações. Alguns grupos já conseguem generalizar e isso é o que esperamos alcançar.

Uma coisa que ainda estou sentindo como uma falha é o fato de que eles se preocupam tanto em resolver o problema que não se atentam ao que está realmente sendo perguntado. Nesta etapa tínhamos duas perguntas: “*Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?*”, eles responderam a primeira, mas nem discutiram a segunda.

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

Supondo que o ângulo α equivale a 22,5, (cada fatia), sabendo que a circunferência mede 360°, cada fatia é $\frac{22,5}{360}$, que é a mesma coisa que $\frac{1}{16}$ (número de fatias), o ângulo α equivale $\frac{1}{16}$ do total de quilômetros na Terra (x).

$$\frac{1}{16} = \frac{22,5}{360} = \frac{d}{x}$$

Este exemplo se baseia somente no desenho que eles receberam, não deixa claro se entenderam a ideia.

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

Co saber o valor do ângulo e a medida do arco dividida 360 pelo valor do ângulo. Depois multiplica e resulta pelo valor do arco (d) fazendo isso saberemos a circunferência.

$$d \cdot \frac{360}{\alpha}$$

Este grupo dá uma explicação mais genérica, o que dá a entender que não ficaram presos ao desenho, mas que entenderam a ideia que foi passada.

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

Nós multiplicaríamos pelo tanto de graus que faltavam para completar.

exemplo: $\alpha = 10^\circ$ $d = 70 \text{ km}$

$$\frac{10^\circ}{360^\circ} = \frac{70}{x}$$

a circunferência
seria 2520 km

$$10^\circ x = 25200$$

$$x = \underline{2520}$$

Neste caso, ainda que eles tenham sentido a necessidade de dar um exemplo numérico, esse não se baseou nas medidas expressas no desenho, o que mostra que eles entenderam a ideia.

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

Se ele tivesse a medida do ângulo e da parte na (arco)
 Então multiplicar quantas vezes o ângulo cabe em 360° , depois de descobrir esse número, ele multiplicaria a medida do arco pela quantidade de fatias

Este grupo conseguiu fazer uma explicação genérica sem usar exemplos numéricos ou fórmulas.

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

a gente precisa do ângulo para descobrir a quantidade de fatias para depois multiplicar a medida de "d" pelo número de fatias e assim descobrir a circunferência.

Este grupo concluiu que não poderia resolver o caso sem a medida do ângulo, mas entendeu como deveria fazê-lo.

Primeiramente Eratóstenes imaginou a Terra como uma laranja cortada ao meio, mas com todos os gomos iguais:

$$a = 22,5$$

$$d \approx 2500 \text{ Km}$$

$$\frac{22,5}{360} = \frac{2500 \text{ Km}}{x}$$

$$22,5x = 900.000$$

$$x = 40.000$$

E então pensou: se eu conseguir descobrir o ângulo central e a medida do arco correspondente a um gomo da laranja, poderei calcular a circunferência toda.

Como você justifica esse pensamento? Como seria possível descobrir essas medidas?

$$\frac{a}{360} = \frac{d}{x}$$

Sabendo a valor de "a" e o de "d", basta fazer a regra de três " $\frac{a}{360} = \frac{d}{x}$ ", em que "x" seria a circunferência da Terra.

Exemplo:

$$\frac{22,5}{360} = \frac{100}{x} \Rightarrow 22,5x = 36.000$$

$$x = 1600$$

$$\begin{array}{r} 360 / 45 \\ 40 \overline{) 22,5} \\ 80 \end{array}$$

De novo, em uma circunferência no que "a = 22,5" e "d = 100", a circunferência

Este grupo me pareceu bastante detalhista, mesmo apresentando a solução genérica para o problema, também ofereceu um exemplo numérico com explicações.

3ª Etapa

Com a ajuda do professor os alunos foram capazes de desenhar a situação e, a partir do desenho, concluir que o ângulo formado entre o bastão e a sombra e o ângulo do setor circular compreendido entre as cidades de Siena e Alexandria eram congruentes usando a regra do feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal. Vários grupos justificaram o fato dizendo que os ângulos eram congruentes por serem opostos pelo vértice e alguns grupos disseram que eles eram congruentes por serem alternos internos.

Eratóstenes ficou sabendo que, ao meio dia, os raios solares incidiam perpendicularmente na cidade de Siena, pois era possível, nesse horário, visualizar o reflexo do sol totalmente no fundo de um poço sem a projeção de nenhuma sombra. Como os raios solares são praticamente paralelos, Eratóstenes sabia que, neste mesmo horário, na cidade de Alexandria, uma sombra seria projetada. Usando seus conhecimentos de Geometria, descubra como Eratóstenes encontrou o ângulo do setor circular mencionado.

Desdobrando o valor do ângulo da sombra descobriremos o da interior da Terra. Eles serão alternos internos em duas retas paralelas cortados por uma transversal, ou seja, congruentes.

Eratóstenes ficou sabendo que, ao meio dia, os raios solares incidiam perpendicularmente na cidade de Siena, pois era possível, nesse horário, visualizar o reflexo do sol totalmente no fundo de um poço sem a projeção de nenhuma sombra. Como os raios solares são praticamente paralelos, Eratóstenes sabia que, neste mesmo horário, na cidade de Alexandria, uma sombra seria projetada. Usando seus conhecimentos de Geometria, descubra como Eratóstenes encontrou o ângulo do setor circular mencionado.

Os raios do sol são paralelos, e o bastão quando prolongado, corta as retas de raios de sol, criando uma transversal.

Os ângulos a e b são O.P.V. Os ângulos c e a são congruentes. Portanto, todos possuem o mesmo valor.

Se tivermos o valor da sombra projetada pelo bastão, consequentemente, saberemos o valor do ângulo central da Terra.

Eratóstenes ficou sabendo que, ao meio dia, os raios solares incidiam perpendicularmente na cidade de Siena, pois era possível, nesse horário, visualizar o reflexo do sol totalmente no fundo de um poço sem a projeção de nenhuma sombra. Como os raios solares são praticamente paralelos, Eratóstenes sabia que, neste mesmo horário, na cidade de Alexandria, uma sombra seria projetada. Usando seus conhecimentos de Geometria, descubra como Eratóstenes encontrou o ângulo do setor circular mencionado.

Eratóstenes ficou sabendo que, ao meio dia, os raios solares incidiam perpendicularmente na cidade de Siena, pois era possível, nesse horário, visualizar o reflexo do sol totalmente no fundo de um poço sem a projeção de nenhuma sombra. Como os raios solares são praticamente paralelos, Eratóstenes sabia que, neste mesmo horário, na cidade de Alexandria, uma sombra seria projetada. Usando seus conhecimentos de Geometria, descubra como Eratóstenes encontrou o ângulo do setor circular mencionado.

deu do círculo.

Eratóstenes ficou sabendo que, ao meio dia, os raios solares incidiam perpendicularmente na cidade de Siena, pois era possível, nesse horário, visualizar o reflexo do sol totalmente no fundo de um poço sem a projeção de nenhuma sombra. Como os raios solares são praticamente paralelos, Eratóstenes sabia que, neste mesmo horário, na cidade de Alexandria, uma sombra seria projetada. Usando seus conhecimentos de Geometria, descubra como Eratóstenes encontrou o ângulo do setor circular mencionado.

Pensando nos raios paralelos interceptados por uma transversal, podemos pensar na vertical e a posição do Sol independentemente da posição dos raios solares, os ângulos formados pelas mesmas serão iguais.

4ª Etapa

Conhecidos o ângulo e a distância entre as cidades os alunos não tiveram dificuldades em estimar a circunferência terrestre em estádios. Alguns grupos calcularam também o diâmetro e o raio, em estádios, usando a relação $C = \text{diâmetro} \cdot \pi$. E um grupo converteu a distância calculada em metros.

Para medir a distância entre as duas cidades, Eratóstenes pediu ajuda aos agrimensores do rei, homens treinados para dar passos constantes para estabelecer distâncias com maior precisão. A medida encontrada foi de 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época). Agora, sabendo a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, é só calcular a circunferência da Terra. Além disso, sabendo o comprimento da circunferência, também seria possível estimar o raio da Terra, o que será útil no próximo problema.

Figura 5: Procedimento de Eratóstenes para cálculo da curvatura da Terra

$$360^\circ : 7^\circ = 51,428 \text{ partes}$$

$$5000 \cdot 51,428 = 257.142 \text{ estádios circunferência}$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$

$$257.142 : 6,28 = r$$

$$40.600 \text{ estádios}$$

Para medir a distância entre as duas cidades, Eratóstenes pediu ajuda aos agrimensores do rei, homens treinados para dar passos constantes para estabelecer distâncias com maior precisão. A medida encontrada foi de 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época). Agora, sabendo a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, é só calcular a circunferência da Terra. Além disso, sabendo o comprimento da circunferência, também seria possível estimar o raio da Terra, o que será útil no próximo problema.

Figura 5: Procedimento de Eratóstenes para cálculo da curvatura da Terra

distância A-S: 5000 estádios
ângulo do bastão: 7°

$$\frac{360^\circ}{7^\circ} = 51,4 \Rightarrow \cdot 5000 = 257.142,8 \text{ estádios}$$

$$257.143 = 2.314 \cdot r$$

$$\frac{257.143}{2.314} = 111,12 \cdot r$$

$$6,28$$

$$r = 40.946 \text{ estádios}$$

Para medir a distância entre as duas cidades, Eratóstenes pediu ajuda aos agrimensores do rei, homens treinados para dar passos constantes para estabelecer distâncias com maior precisão. A medida encontrada foi de 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época). Agora, sabendo a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, é só calcular a circunferência da Terra. Além disso, sabendo o comprimento da circunferência, também seria possível estimar o raio da Terra, o que será útil no próximo problema.

Figura 5: Procedimento de Eratóstenes para cálculo da curvatura da Terra

$$\frac{7}{360} = \frac{5000}{x} \Rightarrow 7x = 1800000$$

$$x = 257142,85714$$

$$x \approx 257143 \text{ estádios}$$

$$x \approx 41143 \text{ Km}$$

$$C = d \cdot \pi$$

$$41143 \text{ m} = d \cdot \pi$$

$$d = \frac{41143}{\pi}$$

$$d \approx 13096 \text{ Km}$$

$\therefore$

$$r \approx 6548 \text{ Km}$$

$$\text{A circunferência } C \approx 257143 \text{ estádios}$$

$$\downarrow$$

$$41143 \text{ Km}$$

$$\text{O diâmetro } d = \frac{C}{\pi} \therefore d \approx 13096 \text{ Km}$$

$$\text{O raio } r = \frac{d}{2} \therefore r \approx 6548 \text{ Km}$$

Atividade 3

1ª Etapa

Nesta etapa o professor faz a formalização e sistematização dos conceitos vistos até agora. Ele também apresenta aos alunos uma tabela de relações trigonométricas com ângulos de 0° a 90° com incremento de 1° . Em seguida solicita que os alunos resolvam alguns problemas que são comumente encontrados em livros didáticos do 9º ano. Durante todo o tempo o professor circula entre as mesas verificando o que os alunos entenderam dos problemas e corrige eventuais dificuldades de interpretação.

Os primeiros problemas sugeridos apresentam ilustrações que ajudam a interpretar e resolver o problema, mas no último, é necessário que os alunos façam um esquema para resolver. Neste caso o professor tem uma preocupação maior com a interpretação que os alunos fariam, mas se surpreende ao ver que eles conseguem desenhar o triângulo sem muita dificuldade.

P 1:

Para vencer um desnível de 4,25 metros vai ser construída uma rampa com inclinação de 15° . Qual será o comprimento da rampa?

$$\text{SENO } 15^\circ = \frac{4,25}{x} = \frac{0,26}{1}$$

$$\frac{0,26x}{0,26} = \frac{4,25}{0,26}$$

$$x \approx 16,34 \text{ m}$$

P 2:

As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto A vê-se o ponto B sob um ângulo de 30° com o plano horizontal, conforme a figura.

Determinar a distância entre os pontos A e B.

$$\begin{array}{r} 1020 \\ - 812 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$\text{SENO DO ANG. } 30^\circ =$$

$$\frac{208}{x} = \frac{0,5}{1}$$

$$\frac{0,5x}{0,5} = \frac{208}{0,5}$$

$$A-B = \boxed{x = 416 \text{ m}}$$

P 1:

Para vencer um desnível de 4,25 metros vai ser construída uma rampa com inclinação de 15° . Qual será o comprimento da rampa?

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{4,25}{x}$$

$$0,26 = \frac{4,25}{x}$$

$$\frac{0,26x}{0,26} = \frac{4,25}{0,26}$$

$$x = 16,34 \text{ m}$$

P 2:

As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto A vê-se o ponto B sob um ângulo de 30° com o plano horizontal, conforme a figura.

Determinar a distância entre os pontos A e B.

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{208}{x}$$

$$0,5 = \frac{208}{x}$$

$$\frac{0,5x}{0,5} = \frac{208}{0,5}$$

$$x = 416 \text{ m}$$

P 3:

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista salta do ponto P, mas cai no ponto A, conforme indica a figura.

A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?

$$\begin{aligned} \text{TANGENTE DO ÂNGULO DE } 30^\circ &= \frac{X}{1800} \times \frac{0,58}{1} \\ X &= 1044m \end{aligned}$$

A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

$$\begin{aligned} \text{SENO DE } 30^\circ &= \frac{800}{X} \times \frac{0,5}{1} \\ 0,5X &= 800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,5X}{0,5} &= \frac{800}{0,5} \\ X &= 1600m \end{aligned}$$

P 5:

Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

$$\begin{aligned} \text{SENO DE } 30^\circ &= \frac{100}{X} \times \frac{0,5}{1} \\ 0,5X &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{COSENO DE } 30^\circ &= \frac{X}{200} \times \frac{0,87}{1} \\ X &= 17400m \end{aligned}$$

$$X = 17400m$$

P 3:

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista salta do ponto P, mas cai no ponto A, conforme indica a figura.

A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?

$$\frac{0,58}{1} = \frac{x}{1800}$$

$$x = 1044$$

P 4:

A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

$$\frac{0,5}{1} = \frac{800}{x}$$

$$\frac{0,5x}{0,5} = \frac{800}{0,5} = 1600$$

P 5: 1600 m

Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

$$\frac{0,58}{1} = \frac{100}{x}$$

$$0,58x = 100$$

$$x = 172,4$$

P 3:

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista salta do ponto P, mas cai no ponto A, conforme indica a figura.

A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?

$$\cos 30^\circ = \frac{1800}{x}$$

$$\frac{0,87}{1} = \frac{1800}{x}$$

$$\frac{0,87x}{0,87} = \frac{1800}{0,87}$$

$$x = 2.069 \text{ m}$$

$$\text{tangente } 30^\circ = \frac{y}{1800}$$

$$\frac{0,58}{1} = \frac{y}{1800}$$

$$1044 \text{ m} = y$$

P 4:

A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

$$\sin 30^\circ = \frac{800}{x}$$

$$\frac{0,5}{1} = \frac{800}{x}$$

$$\frac{0,5x}{0,5} = \frac{800}{0,5}$$

$$x = 1600 \text{ m}$$

P 5:

Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

$$\text{tang } 30^\circ = \frac{100}{x}$$

$$\frac{0,58}{1} = \frac{100}{x}$$

$$\frac{0,58x}{0,58} = \frac{100}{0,58}$$

$$x \approx 172,4$$

P 3:

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista salta do ponto P, mas cai no ponto A, conforme indica a figura.

A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{x}{1800} \\ 0,57 &= \frac{x}{1800} \\ x &= 1026 \end{aligned}$$

P 4:

A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{800}{x} \\ \sin 0,5 &= \frac{800}{x} \\ \frac{0,5}{0,5} &= \frac{800}{0,5} \end{aligned}$$

P 5:

Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{100}{x} \\ 0,57 &= \frac{100}{x} \\ 0,57 &= 100 \end{aligned}$$

A sombra é de

175,438596m

Nº 15, 19, 09, 06, 12

$$\begin{aligned} \text{Tg } 30^\circ &= \frac{x}{1800} \\ \frac{0,57}{1} \times \frac{x}{1800} \\ x &= 1026 \end{aligned}$$

P 3:

Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista salta do ponto P, mas cai no ponto A, conforme indica a figura.

A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?

$$\text{Cot } 30^\circ = \frac{1800}{y}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,86}{1} \times \frac{1800}{y} \\ \frac{0,86y}{0,86} &= \frac{1800}{0,86} \\ y &= 2093,23 \end{aligned}$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{x}{2093}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{1} \times \frac{x}{2093} \\ x &= 1046,5 \end{aligned}$$

P 4:

A figura mostra a disposição das casas de três amigos: Paulo, Nelson e Fábio.

Calcule, em metros, o comprimento de fio telefônico necessário para ligar a casa da chácara de Fábio à casa da chácara de Nelson, sabendo-se que foram gastos 800 m de fio para ligar a casa de Paulo à casa de Fábio.

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{800}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{1} \times \frac{800}{x} \\ \frac{0,5x}{0,5} &= \frac{800}{0,5} \\ x &= 1600\text{m} \end{aligned}$$

P 5:

Quando o Sol está a 30° acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{100}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{1} \times \frac{100}{x} \\ \frac{0,5x}{0,5} &= \frac{100}{0,5} \\ x &= 200 \end{aligned}$$

$$x = 200$$

Este último grupo interpretou errado o problema, mas resolveu corretamente dentro da sua interpretação e do esquema que fez, usando as relações corretamente.

2ª Etapa

A última etapa desta sequência de atividades consiste numa atividade prática onde os alunos deveriam escolher uma altura para medir, poderia ser a altura de um poste, de uma árvore, de um prédio, etc.

Para começar o professor orientou na construção do teodolito, instrumento que seria utilizado para medir os ângulos do triângulo formado entre o observador, a base e a altura do que se pretende medir. Em seguida os alunos saíram pela escola fazendo as medições necessárias. Com as medidas obtidas fizeram o esquema e os cálculos.

Parece que alguns alunos acharam a atividade tão divertida que acabaram calculando mais distâncias do que foi inicialmente sugerido.

Para exemplificar uma situação como esta podemos fazer uma atividade prática. Para isso, precisaremos de um transferidor, um canudo, linha, fita adesiva e uma pedrinha ou pedaço de borracha. Vamos construir o instrumento ilustrado abaixo. O professor vai auxiliá-los na sua utilização para calcular a altura de um poste, árvore ou prédio da escola.

É lógico que você poderia argumentar que vários desses problemas poderiam ser resolvidos sem usar a trigonometria, mas não os de escala astronômica. A trigonometria surgiu para resolver esses problemas e suas aplicações só foram crescendo ao longo do tempo.

$$\text{TANG. } 36^\circ = \frac{430}{x} \times \frac{0,72}{1}$$

$$\frac{0,72x}{0,72} = \frac{430}{0,72}$$

$$x = 597,222...$$

$$597,222... + 150 =$$

$$\boxed{747,222...}$$

APROXIMADAMENTE: 7,47 m

Pelo

$$\tan 60^\circ = \frac{2750}{x}$$

$$\frac{1,73}{1} = \frac{2750}{x}$$

$$1,73x = 2750$$

$$x = 158,95$$

$$158,95 + 153 = 311,95$$

Bom dia

$$\tan 45^\circ = \frac{344}{x}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{344}{x}$$

$$x = 344 + 153$$

$$x = 497 \text{ m}$$

esses problemas e suas aplicações se foram crescendo ao longo do tempo.

medir o poste
 ângulo 30 graus
 distância 3 metros
 altura dos olhos 1,60 m

$$\frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{0,58}{1} \times \frac{3}{x}$$

$$0,58x = 3$$

$$x = 5,17 + 1,60 = 6,77 \text{ m}$$

medir a placa
 ângulo 70 graus
 distância 1,62 m
 altura dos olhos 1,20 m

$$\frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{1,62}{x}$$

$$\frac{2,74}{1} \times \frac{1,62}{x}$$

$$2,74x = 1,62$$

$$x = 0,59 + 1,20$$

$$1,79 \text{ m}$$

$$n = 2,2$$

Problemas de trigonometria e altura de torres de tempo.

Altura da haste da bandeira

$$\frac{1}{\tan 36^\circ} = \frac{3,17}{h}$$

$$\frac{0,72}{1} = \frac{3,17}{h}$$

$$\frac{0,72h}{0,72} = \frac{3,17}{0,72}$$

$$h = 4,40 \text{ m}$$

Altura da árvore

$$\frac{0,55}{1} = \frac{4,92}{h}$$

$$0,55h = \frac{4,92}{0,55}$$

$$h = 8,94 \text{ m}$$

$8,94 + 1,63 = 10,57 \text{ m}$

Altura da haste a partir do observador

Altura da haste = $4,40 \text{ m} + 1,63 \text{ m} = 6,03 \text{ m}$

Altura da árvore.

Altura da haste.

1- $\frac{0,7}{1} = \frac{4,65}{h}$ $0,7h = 4,65$ $h = 6,64$

2- $\frac{0,9}{1} = \frac{4,78}{h}$ $0,9h = 4,78$ $h = 5,31$

3- $\frac{0,93}{1} = \frac{4,62}{h}$ $0,93h = 4,62$ $h = 4,96$

4- $\frac{0,53}{1} = \frac{1,7}{h}$ $0,53h = 1,7$ $h = 3,2$

4.2 Depoimento do professor

Pedi ao Prof. Josias que fizesse um relato de como foi a experiência do ponto de vista dele, o que considero de vital importância, já que foi ele quem desenvolveu as atividades junto aos alunos. Somente ele pode descrever como sentiu, durante as aulas, o envolvimento dos alunos e o que eles puderam aprender. Ele gentilmente me enviou as seguintes palavras:

“Ao ser convidado a aplicar em minhas turmas um trabalho relacionado a história da matemática encarei de duas formas: Por um lado, muito legal, visto que eu, como professor de matemática, sempre me interessei muito pelo assunto. Todavia, não se pode negar que nós como professores temos um certo medo de fazer coisas diferentes, talvez uma “preguiça” no bom sentido de fazer coisas diferentes do que já se faz, de sair do lugar comum.

Para ensinar trigonometria já tinha “meus” próprios métodos, minha própria maneira de explicar, iniciar pelas definições, enunciar as razões trigonométricas, dar exemplos de aplicação e etc., portanto, não nego, fazer de uma forma diferente me intrigou muito.

Mas tudo isso caiu por terra logo na primeira atividade. O principal ganho neste primeiro momento de aplicação, na minha opinião, não foi se quer matemático, eu diria que, foi o aluno perceber que muito do que se estuda hoje surgiu de preocupações totalmente diferentes do que temos hoje. Mas, também, muito diferente do que se faz, foi que o aluno pudesse perceber que aquele triângulo que Aristarco imaginou no espaço poderia ser proporcionalmente desenhado numa folha, na própria mesa dele. O que nos leva a um segundo ganho: O aluno perceber a correlação que o conteúdo matemático mantém, que a ideia de proporcionalidade e semelhança – conceito que tínhamos acabado de estudar – era fundamental para construção da trigonometria (ainda que naquele momento não a chamamos assim). Terminar a primeira sequência de atividades concluindo que: Ao mantermos os ângulos de um triângulo retângulo, ainda que as medidas dos lados sejam alteradas, as razões entre essas medidas se mantêm.

Mesmo que isto seja algo que todos falamos o tempo inteiro, permitir que o aluno chegue a essa conclusão foi muito mais relevante.

A sequência mais carregada de preconceitos foi a segunda, não que eu não acredite no potencial de meus alunos, mas, confesso que não imaginava que eles pudessem ter ideias tão incríveis sobre como Erastóstenes resolveu o problema da circunferência da terra. Já na primeira atividade desta seção surgiram coisas como “acho que ele pensou numa pizza, com muitas fatias”. A justificativa apresentada na segunda tarefa também foi absurdamente surpreendente, pois muitas respostas que vi eram um caminho para uma generalização. Por exemplo: “Vai ser sempre 360° dividido por α multiplicado pelo número de fatias”.

Existe na matemática muitas vezes uma busca frenética por contextualização de todos os conteúdos, mas muitas vezes esse contexto é matemático, na terceira atividade desta sequência, foi ótimo que alunos pudessem ver uma aplicação prática dos ângulos alternos internos, me lembro que muitos deles no momento da aplicação se quer se lembravam desse nome, mas se referiram a eles como “ah professor aqui tem aquela lei do zorro...”. Não nego, que para um professor não há satisfação maior que esta, que alunos mostrem a capacidade de aplicar um conteúdo anterior sem que haja sua interferência.

Na terceira atividade tudo flui com muito mais naturalidade, aliás maior do que eu esperava. Sobretudo, com relação ao uso de um instrumento de medida que eles criaram. De longe, foi a atividade pela qual eles demonstraram o maior interesse! Todos se envolveram e tentaram na medida do possível compreender de fato o que se fazia ali. Aliás, essa atividade eu com certeza vou incorporar ao meu repertório e agradeço infinitamente por você tê-la compartilhado comigo.

Guardei essa parte final para falar do que não deu certo. Na verdade, ainda que essa seja muitas vezes uma “muleta” para o professor, alguns alunos, por mais motivação que se tenha ao apresentar aquele conteúdo, não se envolvem ou não se engajam na resolução, trabalham com a perspectiva do mínimo esforço. Portanto, uma conclusão pessoal, não foram todos os alunos que aproveitaram tudo o que se quis transmitir por meio desta sequência didática. Todavia, um número muito maior do que eu esperava pode, como demonstraram a seguir, aproveitar muito do que se compartilhou.

Um senão fica por conta do tempo, uma variável inegociável. Infelizmente não dispomos do tempo que de fato precisamos para realizar uma tarefa como esta, motivo pelo qual, não acho que seria possível num momento futuro aplicar a sequência completa. Mas com certeza, uma parte dela pretendo utilizar em outros anos nos quais tenha oportunidade de dar aulas para 9º ano.

Enfim, foi bom fazer parte deste trabalho. Foi muito bom abordar a história da matemática numa perspectiva muito diferente do que normalmente se faz.”

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um grande desafio que temos enfrentado atualmente na educação é fazer com que os alunos queiram aprender o que pretendemos ensinar. Muitos estudos vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de minimizar esse problema. Nessa busca por significado, surgem metodologias e ideias de como conduzir nossas aulas.

Quando escolhi esse tema, também estava buscando uma solução para um problema que comecei a perceber nos últimos quatro anos, quando comecei a lecionar Física no 1º ano do Ensino Médio. Sempre que era necessário usar razões trigonométricas para resolver algum problema de Física, eu percebia que os alunos não entendiam o significado dessas relações. Várias vezes ouvi alunos me perguntarem de onde vinham essas relações e como eles poderiam fazer para calcular. Muitos outros se limitavam a usar a calculadora. Resolvi então fazer alguma coisa, para que, no 9º ano do Ensino Fundamental, esse conteúdo fosse apresentado de uma forma que os alunos se interessassem em aprender e que esse aprendizado tivesse significado para eles.

Foi assim que aliei minha paixão por história da matemática à metodologia de resolução de problemas para desenvolver essa sequência de atividades que foi apresentada. No início a ideia era que eu mesma aplicasse as atividades, mas problemas surgiram no meio do caminho, como não somos nós professores que escolhemos as turmas em que vamos atuar, e a direção preferiu fazer as atribuições pensando em fazer uma distribuição mais uniformes das aulas, acabei não ficando com as turmas do 9º ano do EF como pretendia. Isso me deixou muito chateada, mas como disse Stephen Hawking “*Inteligência é a capacidade de se adaptar à mudança*”, então eu me adaptei.

Não queria abrir mão do tema, eu realmente havia me apaixonado por ele. Quando soube que o professor do 9º ano seria o Josias, fui imediatamente falar com ele. O Josias é uma pessoa maravilhosa e um professor muito talentoso. Desde o primeiro momento se mostrou muito solícito e entusiasmado em participar do projeto. Acho que o fato dele estar cursando o Mestrado Profissional e estudando essas metodologias de ensino assim como eu, ajudaram muito na nossa sintonia.

Estudei muito sobre a metodologia de resolução de problemas para desenvolver as atividades e isso foi maravilhoso, pois pude repensar muito a minha prática como docente e o que posso fazer para melhorá-la. Aprendi muito e levo isso comigo, em minhas aulas.

Eu também quis que os alunos vissem a matemática de uma forma diferente daquela que eu percebia que eles viam, como uma coisa inventada e sem sentido. Todos eles concordam que a Matemática é necessária em nossas vidas, mas não em todos os níveis, só aquela do dia-a-dia, de compras e contas básicas. Por isso eu queria que eles vissem como um conceito pode surgir de uma necessidade. Ou de uma curiosidade.

Também aprendi muito sobre história, e foi um processo muito prazeroso, já que acho a astronomia fascinante. Pensei que para os alunos também seria interessante. Eu queria que eles conhecessem a história de um jeito que não fosse apenas a apresentação de fatos, mas que eles pudessem reconstruir os passos dessa história e se sentir parte dela.

Foi assim que decidi apresentar a história da matemática numa sequência de atividades onde os alunos deveriam resolver problemas pensando sobre coisas que foram pensadas antes deles por astrônomos e matemáticos da Grécia antiga. Além disso, eu tive que pensar não só nas atividades que seriam desenvolvidas para os alunos, mas também em como orientar o professor que aplicaria as atividades, tentando prever o que poderia acontecer no curso das aulas. Para encerrar a sequência, foi proposta uma medição na prática, para que os alunos se sentissem como os matemáticos antigos que eles haviam acabado de estudar.

Preparar as atividades para outro professor aplicar foi um desafio muito grande, mas também um exercício importante e que deve ser valorizado. Como eu não estaria presente na aplicação das atividades, elas tiveram que ser planejadas com mais detalhes para que ambas as partes pudessem entender as intenções envolvidas no processo.

No geral posso concluir que fiquei muito satisfeita com o resultado do trabalho realizado. Eu sei que aprendi muito, mas os alunos também aprenderam, podemos verificar isso pelas produções deles e pelo depoimento do professor. Nesse processo

de avaliar os resultados considero que a opinião do Josias é de fundamental importância, já que ele acompanhou todo o desenvolvimento e o envolvimento dos alunos na atividade.

Este ano tenho a oportunidade de ser professora de Física dos alunos que participaram do projeto. Certo dia, durante a aula de Física, quando falei sobre obter o coeficiente angular de uma função do 1º grau pela tangente do ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo horizontal do plano cartesiano, foi a primeira vez que não vi caras de interrogação, eles entenderam o que eu disse! Eles sabiam o que era tangente e logo disseram: “cateto oposto sobre cateto adjacente, professora”. Não consigo nem descrever a minha emoção quando eles me disseram que lembravam da atividade que haviam feito no ano anterior e que gostaram muito de fazer. Me preocupo muito se as coisas que eles aprendem fazem sentido para eles, acho que é o que eu mais pergunto a eles. Posso dizer sem dúvidas que, nesse caso, o que eles aprenderam fez sentido.

Sei que eles poderiam ter aprendido de outra forma e não estou dizendo que a sequência apresentada é melhor que outras, mas que pude ver que funcionou, que a maioria dos alunos se interessou pelas atividades e se sentiu motivada a participar. E mais, que o conteúdo histórico trabalhado nas atividades ficou gravado em suas mentes, sendo assim eles não acabaram com a ideia de que a trigonometria é uma coisa inventada e sem utilidade. Enfim, eles entenderam o processo de construção da matemática.

Assim podemos concluir que o experimento apresentado foi bem-sucedido, tendo alcançado seus principais objetivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Paulo et al, org. Investigações matemáticas na aula e no currículo - Lisboa : Associação de Professores de Matemática, 1999.

Aristarco de Samos e o tratado "Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua". Disponível em: <<http://www.ghctc.usp.br/server/Sites-2008/Giacomo-Bosco/Aristarco%20e%20o%20tratado-trat.html>> Acesso em 18/02/2018.

ÁVILA, G. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga. Revista do Professor de Matemática 01. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm1.pdf>> Acesso em 09/09/2016.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani, org. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas – São Paulo: Editora UNESP, 1999.

CHAUÍ, Marilena. Introdução à história da filosofia: dos pré-socráticos a Aristóteles. Vol 1. Companhia das letras. 2018.

COSTA, N. M. L. A história da trigonometria. PUC SP. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm> Acesso em 29/09/2016

EVES, H. .Introdução à História da Matemática.- tradução de Hygino H. Domingues, Editora da UNICAMP, 2007.

"Hiparco". Dicionário completo de biografia científica. Recuperado 26 de fevereiro de 2018 de Encyclopedia.com: <<http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hipparchus>>

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. Revista do professor de matemática 41.Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

MARIM, M. M. B. Resolução de problemas matemáticos: abordagem das matemáticas como práticas sociais. Educação Matemática em revista – RS. Disponível em: <sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/download/173/124> Acesso em 15/11/2016

MIGUEL, Antonio et al. História da matemática em atividades didáticas – 2. Ed. rev. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MOREIRA, H. XIX Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica 2016. Disponível em: <<http://slideplayer.com.br/slide/10218904/>> Acesso em 29/09/2016.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Aristarchus of Samos. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Aristarchus.html>> Acesso em 05/12/2015

_____. Hipparchus of Rhodes. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em:
< <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hipparchus.html>> Acesso em 05/12/2015

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Claudius Ptolemy. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em:
< <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Ptolemy.html>> Acesso em 05/12/2015

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: Onde estamos? E pra onde iremos? ESPAÇO PEDAGÓGICO v. 20, n. 1, Passo Fundo, p. 88-104, jan./jun. 2013. Disponível em: <www.upf.br/seer/index.php/rep> Acesso em 15/11/2016

_____; LEAL, L. C. J. Ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas como prática sociointeracionista. Bolema vol.29 no.53 Rio Claro dez. 2015. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a09>> Acesso em 15/11/2016

POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. et al. Investigações matemáticas na sala de aula: um projeto colaborativo. Disponível em:
<http://www.academia.edu/6324572/Investiga%C3%A7%C3%B5es_Matem%C3%A1ticas_na_Sala_de_Aula_Um_Projeto_Colaborativo1> Acesso em 15/11/2016

_____. Investigar, ensinar e aprender. Disponível em:
<<https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%20aprender.pdf>> Acesso em 15/11/2016

STERN, David P. How distant is the Moon? Disponível em: <<https://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Shipparc.htm>> Acesso em 08/07/2018.

VASCONCELLOS, F. A. História das matemáticas na antiguidade. Paris-Lisboa: Aillaud e Bertrand, 1925.

VINAGRE, A. L. M. Eratóstenes e a medida do diâmetro da Terra. Disponível em:
<http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf> Acesso em 09/09/2016