**Resolução de problemas
matemáticos ao final da
escolarização básica: Estudo de
alguns casos.**

Nilo Gonçalves Barbedo

TRABALHO PARA QUALIFICAÇÃO DE DISSERTAÇÃO
APRESENTADO AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM CIÊNCIAS.

Programa de mestrado
profissional em ensino de
matemática.

Orientador: Professor
Doutor Oscar João
Abdounur

Nilo Gonçalves Barbedo.

Resolução de problemas matemáticos ao final
da educação básica.

Versão final e corrigida de
dissertação para obtenção do
título de mestre.

Área de concentração: Educação
matemática.

Banca: Dr. Oscar João
Abdounur (orientador
IME/USP), Dr Odilon Otaviano
Luciano (presidente IME/USP),
Dr. Antônio Luiz Pereira
(membro interno IME/USP) e
Dra Abigail Fregni Lins
(membro externo
CCT/DM/UEPB).

São Paulo

2017

Resumo

Barbedo, N.G. **Resolução de problemas no fim da escolarização básica. Estudo de alguns casos.**

67 f. Dissertação (mestrado)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Este trabalho trata do comportamento de jovens estudantes de uma escola da rede estadual paulista no que concerne as estratégias e heurísticas observáveis que praticam diante de determinados problemas lógico-matemáticos. Identifica algumas das heurísticas e estratégias clássicas que os educandos praticam e não praticam. A investigação se dá por meio de apresentação de problemas contextualizados que prescindem de conhecimentos matemáticos elaborados, a estudantes do último ano do ensino médio e análise dos processos de resolução deflagrados pelos estudantes na tentativa de resolver os problemas. Também é apresentado subsídio teórico e problemas adequados à reprodução parcial dessa investigação que podem interessar ao professor de matemática da educação básica ou ao pesquisador em resolução de problemas. Por fim, são problematizadas as informações observadas sobre o comportamento intelectual dos educandos no sentido de estabelecer hipóteses sobre as conquistas ou não dos educandos quanto à competência em resolução de problemas.

Palavras-chave: Heurística, resolução, problema.

Abstract

This work deals with high school youth behavior of a public school of São Paulo state with regard to the strategies and heuristics they use in dealing with certain problems in mathematics. It tries to identify some of the classical heuristics and strategies that students make use of or not. The research is carried out through the presentation of contextualized problems, in which high school students do not need elaborate mathematical knowledge. It is followed by the analysis of the processes used by students in the attempt to solve the problems. It is also presented theoretical subsidies and problems appropriate to the partial reproduction of this investigation in case it is of interest of a mathematics teacher of basic education. Finally, it is problematized information on the intellectual behavior of students in order to establish hypotheses about their accomplishments and achievements on solving problems in the context of school culture.

Key-words: Heuristics, solve problems, school culture.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Memorial	7
1.2	Objetivo	Error! Bookmark not defined.
1.3	Justificativa	13
1.4	Alguns termos importantes	17
1.41	Heurística	17
1.42	Problema	Error! Bookmark not defined.
1.43	Operações mentais	37
2	A escola e os alunos	38
2.1	A escola	38
2.2	Os Alunos(as)	40
3	Abordagem e escolha dos problemas	43
3.1	A abordagem	43
3.2	A escolha dos problemas	Error! Bookmark not defined.
3.21	Variáveis de sintaxe	48

3.22	Variáveis de conteúdo e contexto	Error! Bookmark not defined.
3.23	Contexto.....	52
3.24	Variáveis de estrutura	56
4	Os Problemas	71
5	Obtenção dos dados	Error! Bookmark not defined.
6.1	Resumo e conclusões sobre os dados coletados	Error! Bookmark not defined.
	Referências Bibliográficas	106

1 Introdução

1.1 Memorial

Meu nome é Nilo Gonçalves Barbedo, nasci na cidade de Guarulhos, SP, onde realizei a educação básica em uma escola estadual. Dois anos após terminar o colegial, ingressei num curso pré-vestibular, pago com o meu salário de operário em uma fábrica de achocolatados, com a intenção de conseguir ingressar em alguma instituição de ensino superior pública, pois eu tinha interesse em fazer um curso superior e não tinha condições de arcar com os gastos de mensalidades em instituições particulares. Após dois anos de estudo, consegui uma vaga no curso de Projetos Mecânicos da FATEC-SP (Faculdades de Tecnologia de São Paulo), onde poderia graduar-me como tecnólogo, caso conseguisse concluí-lo. Desisti de fazê-lo ao obter uma vaga para um curso de engenharia na UFABC (Universidade Federal do ABC) no qual só poderia determinar a área de atuação após um ciclo comum de três anos,

dependendo das notas obtidas durante a primeira parte do curso. Finalmente, em 2007 ingressei no curso de Licenciatura em Matemática, no qual me formei em 2013.

Na época não sabia a diferença entre os cursos de licenciatura e de bacharelado, imaginando que eram quase equivalentes. Durante a graduação fiz dezenas de disciplinas de matemática e algumas de física. Em cada uma dessas disciplinas tive de resolver, ou ao menos tentar resolver, dezenas de problemas ou exercícios. Assim, posso dizer que, durante os anos de graduação, havia uma rotina de resolver problemas de matemática ou física diariamente e muitos foram os fracassos ao tentar resolver determinados problemas, embora vez ou outra também obtivesse alguns sucessos. Costumava estudar a teoria e ter os teoremas das disciplinas bem consolidados em minha mente, assim como suas respectivas demonstrações, mas mesmo assim falhava na resolução de alguns problemas. Quando pedia a alguém que me ajudasse (colega, monitor ou professor da disciplina), percebia que na resolução apresentada não havia qualquer elemento conceitual que eu desconhecesse ou qualquer passo que eu já não tivesse visto alguma vez. Assim, minha dificuldade não estava estritamente vinculada ao conteúdo da disciplina, mas a habilidades de resolução. Costumava, então, observar a resolução adequada e tentar inferir a razão da minha falha. Pensava: Por que a outra pessoa conseguiu resolver o problema e eu não, visto que eu conhecia as técnicas, conceitos e definições envolvidas na resolução? Qual foi a estratégia que a pessoa usou? Por que eu não pensei nesta estratégia ou em outra semelhante? Qual foi a “orientação geral” da resolução? O que teria motivado o resolvidor a dar os passos dados? Por que não pensei nestes passos? Nasceu assim meu interesse pelas estratégias de resolução de problemas. Questionei: como posso melhorar meu desempenho? Será que tomando consciência das estratégias e heurísticas nas quais eu falhara, eu teria mais chance de obter sucesso na próxima ocasião? Imaginava que sim.

Durante a graduação tive três vezes a oportunidade de integrar um grupo que propunha ajudar um conjunto de alunos de escolas públicas com bom rendimento em matemática a conseguir bom desempenho nas avaliações da segunda fase da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas) e ali tive um contato privilegiado com a resolução de problemas, já que os problemas da OBMEP não costumam

exigir profundos conhecimentos técnicos, mas sim habilidades de resolução. Geralmente, quando se aplica certos problemas da OBMEP para um aluno ou aluna razoavelmente familiarizados com os conceitos matemáticos ensinados no ensino fundamental, não ocorrem dificuldades relativas ao conteúdo, mas sim obstáculos heurísticos, ou seja, a falha do aluno geralmente não está no desconhecimento de algum conceito ou técnica, mas sim na formulação de uma estratégia adequada, no comportamento e na atitude do estudante frente ao problema. Percebi, então, ser comum ocorrer de um estudante que conhece menos os conceitos e as definições em relação a um determinado tema conseguir resolver um problema que outro estudante com conhecimento mais amplo às vezes não consegue (nesse caso, o aluno que conhece menos conceitos consegue superar o aluno que conhece mais). Então, conclui que a habilidade de resolução de problemas, embora esteja em certa medida ligada ao conhecimento do conteúdo, possui grau significativo de independência em relação a ele.

Dois anos antes de terminar a graduação, ingressei na rede de ensino público paulista como professor de matemática da educação básica, como professor provisório, conhecido como categoria “O”. Após obter o diploma de licenciado em Matemática, ingressei na rede de ensino como professor efetivo de educação básica. Notei mais uma vez, ao longo deste trabalho docente, ser muito comum o estudante conhecer o conteúdo e mesmo assim não conseguir resolver o problema. A partir daí, comecei a indagar-me sobre qual estudante queria ajudar a formar: um estudante que domina muitos conceitos e conhece muitas definições ou um estudante que frente a uma situação inesperada, consegue improvisar e atingir uma solução adequada? Não que essas características sejam excludentes, mas qual delas seria mais significativa ao estudante em sua vida fora da escola?

Assim como havia me indagado sobre como poderia desenvolver minha capacidade para resolver problemas, indaguei-me também sobre como propiciar aos meus alunos do ensino médio melhores condições para desenvolver suas habilidades. Durante os acontecimentos mencionados, travei contato com professores do IME-USP interessados em heurística e resolução de problemas, como o prof. dr. Oscar João Abdounur, por meio dos quais obtive acesso à literatura que me proporcionou um conhecimento mais aprofundado, embora ainda incipiente, sobre o tema. Nesta mesma época, ao fazer uma iniciação científica

relacionada à resolução de problemas, li os livros Provas e refutações, a lógica do descobrimento matemático, de Henri Lakatos, How solve It e Mathematics and plausible reasoning, vols 1 e 2, de Polya (todos indicados pelo professor Oscar). Já estava definitivamente interessado nos processos de resolução de problemas, não só para aprimorar minhas habilidades de resolução, como para aperfeiçoar minha prática enquanto professor. Ao terminar a graduação, ingressei no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP e então, fortemente influenciado pelas questões e fatos acima mencionados, escolhi o objeto da minha dissertação.

1.2 Objetivo

A finalidade deste trabalho é verificar se um conjunto de estudantes do terceiro ano do ensino médio usam heurísticas convencionais¹, no caso de usarem, identificá-las, observando o comportamento, as estratégias e as heurísticas que educandos do 3º colegial de uma escola estadual paulista se valem ao enfrentarem certo conjunto de problemas que prescindem de conhecimento escolar elaborado. Também é desejado identificar quais heurísticas escapam ao repertório desses estudantes e com quais heurísticas eles não estão familiarizados. Com isso, pretende-se obter um panorama das habilidades de resolução dos estudantes envolvidos na pesquisa além de oferecer ao professor, estudante ou a quem mais interesse, um conjunto de problemas de matemática que possam ser usados no ensino/aprendizagem de resolução de problemas lógico-matemáticos via heurísticas ou na investigação acerca da competência em resolução de problemas.

Colocando a questão principal de maneira mais direta: é possível afirmar que estudantes que cursam o ano final do ensino médio regular numa determinada escola estadual da região metropolitana de São Paulo partilham de um conjunto de comportamentos e

¹ Mais adiante são apresentadas as heurísticas chamadas convencionais.

estratégias ao enfrentarem problemas de Matemática? No caso de ser afirmativa a resposta, qual o conjunto de comportamentos e heurísticas² observáveis que ocorrem durante a resolução destes problemas? Existem heurísticas simples que poderiam ser agregadas ao conjunto de heurísticas que compõem o repertório dos educandos? Se sim, quais são?

Embora formuladas com o objetivo de realizar uma investigação da heurística desenvolvida ou incorporada por um conjunto restrito de estudantes após longo contato com a escola, a investigação mencionada acima é também pertinente para a elaboração de hipóteses sobre as competências em resolução de problemas de um conjunto maior de estudantes. Algumas destas questões serão colocadas em termos mais precisos no capítulo2, item 2.1, intitulado A abordagem.

É sabido não ser somente na escola que um indivíduo desenvolve habilidades em resolução de problemas matemáticos, incluindo-se no rol dessas habilidades as que o indivíduo desenvolve na resolução de problemas não escolares e não escritos que surgem de demandas práticas, já que também estão sujeitos a desenvolvê-las em suas atividades cotidianas, no mundo do trabalho, etc. Em Na vida dez, na escola zero (TEREZINHA CARRAHER, ANALÚCIA DIAS SCHLIEMANN E DAVID CARRAHER, p. 121, 1991) os autores afirmam ser possível obter competências cognitivas e conhecimentos escolares sem a escolarização chamada tradicional. No mesmo texto, a questão de conceitos matemáticos e conhecimento matemático obtido no mundo do trabalho e sua transportabilidade para contextos acadêmicos ou escolares é tratada com muita propriedade.

Contudo, considera-se a escola um lugar privilegiado para o desenvolvimento das competências em resolução de problemas em linguagem escrita de matemática. A escola é, na maioria dos casos, o lugar em que jovens oriundos das camadas da população de baixa renda têm a oportunidade de desenvolver a linguagem escolar ou acadêmica e lidar com problemas matemáticos escritos (BOURDIEU, A escola conservadora: As desigualdades frente à escola e à cultura, p. 327, 1966). Considerando que todos os sujeitos que participaram da fase

² O termo *heurística* será esclarecido adiante e por enquanto deve-se entendê-lo como estratégia.

experimental dessa dissertação passaram ao menos por 11 anos nas escolas, na condição de estudantes, ao observar o comportamento desses estudantes frente a problemas matemáticos, pode-se inferir ao menos as competências que eles não têm, ou que a escola não foi capaz de desenvolver, e essa informação já é valiosa.

As dificuldades de responder questões referentes a competência dos educandos em resolução de problemas são grandes, dada a complexidade do fenômeno investigado, o caráter humano e social envolvido, o caráter técnico e a complexidade do entrelaçamento dos componentes envolvidos na construção da habilidade de resolução de problemas. O seguinte trecho é elucidativo:

Se dentro de um quadro construtivista, considerarmos a aprendizagem como um processo interno, ativo e pessoal que origina construções personalizadas do conhecimento e do mundo, investigar a aprendizagem, não parece tarefa simples. Investigar a aprendizagem significará investigar um processo não instantâneo que se desenrola num espaço temporal, mais ou menos longo, de acordo com os interesses e necessidades do aluno, um processo interno não observável, um processo ativo que se desenvolve através da interação do sujeito com seu conjunto de experiências vivenciais e um processo pessoal, interior ao indivíduo que origina representações do conhecimento e do mundo por vezes diferente da realidade [...] (MOURÃO, 1994, p. 287 a 292).

Não menosprezando as dificuldades da investigação de um fenômeno cuja complexidade é observada acima, pretende-se verificar quais heurísticas o estudante consegue efetuar dentro de possíveis heurísticas e eventualmente identificar estratégias de resolução inesperadas. Em suma, pretende-se identificar o panorama das habilidades de resolução de problemas de matemática de um grupo de estudantes da rede de ensino paulista e, ao mesmo tempo, oferecer ao professor do ensino básico a possibilidade de reproduzir parcialmente a investigação, caso julgue que isso terá efeito em suas aulas. Uma vez observadas as possibilidades de resolução de problemas dos alunos, os métodos, processos mentais que incorporaram e quais não são capazes de mobilizar, pretende-se oferecer um conjunto de

problemas cuja aplicação e acompanhamento adequado possa colaborar com o desenvolvimento da competência de resolução de problemas matemáticos dos alunos.

1.3 Justificativa

Considerando que é finalidade inalienável da educação básica brasileira assegurar a formação necessária ao exercício da cidadania, progresso profissional e acadêmico (LDB, Título V, capítulo 2, seção I, art.22) e considerando que os problemas (eventualmente matematizáveis) que emergem destes elementos são imprevisíveis, não é conveniente que a educação básica forneça subsídios intelectuais que permitam somente a resolução de problemas já visitados pelos educandos. É adequado que o sujeito termine a educação básica dispondo o quanto possível da competência de resolução de problemas inesperados (SANTALÓ, p.19, 2006). Observa-se que a construção do conhecimento matemático, tal como ela é feita hoje, não privilegia a resolução de problemas fora das escolas. O uso do ferramental matemático, pretensamente ensinado nas escolas, é menos recorrente que o esperado ao enfrentarem problemas que emergem fora da escola. Ao tentar resolver um problema cotidiano, ainda que perfeitamente solúvel, por meio das ideias e conceitos matemáticos, em geral, apela-se a estratégias e heurísticas aprendidas em contextos não escolares (TEREZINHA CARRAHER, DAVID CARRAHER e ANALÚCIA SCHILIEMAN, p. 150 e 151), e portanto, o conteúdo ensinado na escola não tem sido transportado (ou tem sido transportado de forma insatisfatória) para situações cotidianas. É claro que é no mínimo discutível uma concepção de escola que defenda que o conhecimento escolar deve se restringir à construção de ferramentas para o uso cotidiano, mas esse conhecimento não deve estar excessivamente distante da vida cotidiana (SANTALÓ, p.12, 2006). O educando tem o direito de ser capaz de usar os conhecimentos e métodos aprendidos na escola para superar obstáculos da vida cotidiana.

É consensual entre os educadores que é adequado que o estudante termine a educação básica com sua habilidade em resolução de problemas matemáticos desenvolvida e

que possa aplicar tal habilidade mundo afora. Seria plausível que um pai ou uma mãe deseje que seu filho ou filha termine a educação básica conhecendo uma série de fórmulas matemáticas, mas incapaz de resolver qualquer problema matemático que emerge de suas relações sociais? Imagina-se que não. O próprio estudante provavelmente concordaria que tiraria mais proveito do desenvolvimento da capacidade de resolver problemas matemáticos do que o mero domínio dos conteúdos propedêuticos. Não é intenção insinuar que a capacidade de resolver problemas e o domínio do conhecimento propedêutico são mutuamente excludentes, ou que o domínio de certos conteúdos matemáticos é supérfluo, mas não é adequado supervalorizar os conhecimentos propedêuticos em detrimento da competência de resolução de problemas, já que a importância da competência em resolução de problemas é facilmente defensável e amplamente reconhecida entre pesquisadores da educação Matemática.

Alguns autores defendem inclusive que é possível construir os conceitos científicos em situações-problema cotidianas (TEREZINHA CARRAHER, DAVID CARRAHER e ANALÚCIA SCHILIEMAN, 1991, p. 151). Também há quem defenda que o próprio desenvolvimento da matemática depende, até certo ponto, da competência da resolução de problemas. Carça argumenta que a construção da geometria é impulsionada em grande medida **parte** por problemas que emergem dos impasses que surgem da própria construção teórica. (CARAÇA, 1951, p. 29 até 38). Também é possível observar em *Provas e refutações* como a lógica do descobrimento matemático depende dos obstáculos teóricos que movem o refinamento dos conceitos e as demonstrações e, portanto, a construção da teoria é em alguma medida orientada pelos problemas que emergem no desenvolvimento teórico (LAKATOS, 1978).

Em *Introdução ao estudo das situações didáticas, conteúdos e métodos* (BROUSSEAU, 2008), as situações de aprendizado envolvem sempre a resolução de problemas (predeterminados ou a determinar) e nos textos de vários outros pesquisadores a resolução de problemas é componente importante do ensino de matemática. Em suma, a competência em resolução de problemas está consolidada como uma importante meta da

educação básica e também é considerada importante na construção de conhecimento matemático.

Considerando que o desenvolvimento da competência em resolução de problemas matemáticos tem importância bastante clara, é de se esperar que a legislação e documentos oficiais que tratam a educação valorizem essa dimensão do ensino, e isso de fato ocorre. A SME\SP (Secretaria Municipal de Educação de São Paulo), que se ocupa prioritariamente do ensino infantil e fundamental, tem claramente nas suas orientações legais a preocupação com o desenvolvimento da competência de resolução de problemas. É mencionada reiteradas vezes a importância da resolução de problemas matemáticos na portaria 549113, capítulo III, seção II. No documento municipal chamado *Curriculo integrador da infância* é também mencionada a importância da competência em resolução de problemas que deve ser abarcada desde a educação infantil (*Curriculo integrador da infância*. 2015. p.60 e 66). Nos PCNs (Parâmetros curriculares nacionais) está presente explicitamente em diversos trechos a importância da resolução de problemas. É considerada uma das finalidades do ensino da matemática “[...]desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo[...].”(MEC, 1997. p. 40). Não existem dificuldades de encontrar outras pistas de que a resolução de problemas é considerada importante do ponto de vista legal.

Assumindo, portanto, a competência de resolver problemas como uma importante finalidade da educação básica, e considerando que o ensino de matemática se beneficia com o aprofundamento ou diversificação do conhecimento sobre o tema, deve-se considerar relevante a investigação dessa área do conhecimento. A proposta da presente investigação é exatamente obter informações sobre a competência em resolução de problemas por meio da observação do comportamento de um conjunto de alunos de uma escola estadual paulista, no enfrentamento de uma bateria de problemas criteriosamente selecionados.

As heurísticas e as estratégias adotadas pelos educandos ao tentarem resolver problemas de matemática são muito significativas no que se refere à forma de pensar do sujeito e **que** são decisivas em relação ao sucesso ou fracasso frente a uma situação problema.

Por vezes, ao falhar em uma resolução, uma postura adotada é tentar abordar o problema de outra maneira. Se o leque de possíveis abordagens é muito limitado, parece plausível que a chance de resolução do problema fique comprometida. Assim, não é por acaso que tantos pesquisadores da educação matemática consideram a investigação das estratégias e heurísticas de grande importância (alguns destes autores serão mencionados no decorrer do texto).

Em *Processos de resolução de problemas: revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquema de codificação* é afirmado que o processo de resolução de problemas deve ser decomposto, estudadas as suas partes e depois a análise dessas partes reintegradas para análise do todo. Exibe também uma possível decomposição constituída de cinco elementos, entre os quais, as estratégias de resolução. (FERNANDES, BORRALHO e AMARO, p. 40, 1994 Apud SCHOENFELD³). As heurísticas e estratégias de resolução são abordadas em diversas pesquisas sobre resolução de problemas. Para mencionar somente três casos: FERNANDES, BORRALHO e AMARO, 1994, GODIN, G. A., MCCLINTOCK, E. 1979, GAROLAFO e LESTER, 1985.

Já que as habilidades de resolução de problemas são, em última análise, funções psicológicas superiores (funções psicológicas tipicamente humanas), seu desenvolvimento está sujeito às mesmas regras ou princípios que essas funções psicológicas. Segundo Vigotsky, essas funções se desenvolvem através do tempo, envolvem processos não lineares, aspectos subjetivos do sujeito, mudanças quantitativas e qualitativas ocorrem durante o “amadurecimento” de tais funções. Entender como se dá o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas é entender a história desse desenvolvimento repleta de mudanças e descontinuidades (VIGOTSKY, 2007).

Assim, os resultados desta pesquisa servirão como uma fotografia das habilidades dos alunos, que se analisada num conjunto de outras fotografias, ou seja, associados ao panorama das competências de educandos de outras idades, pode dar uma ideia da história do

³Schoenfeld, 1992

desenvolvimento das habilidades de resolução, pode remeter do filme, no sentido de conjunto de fotografias organizadas no tempo.

O foco da presente investigação (ou a perspectiva da fotografia, segundo a analogia anterior) é exatamente a heurística e as estratégias assumidas pelos indivíduos ao tentarem resolver determinados problemas. Ao longo do texto serão empregados alguns termos que requerem significados mais ou menos precisos. Alguns destes termos serão esclarecidos a seguir.

1.4 Alguns termos importantes

1.4.1 Heurística

O termo *heurística* é usado por diversos autores com pesquisa em resolução de problemas. Uma das descrições deste termo remonta à antiguidade:

Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para o uso daqueles que, depois de terem estudados os Elementos comuns, desejam adquirir capacidades de resolver problemas matemáticos e somente serve para este fim. É resultado de trabalho de três homens: Euclides, o autor de Os Elementos, Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo. Ela nos ensina os elementos de análise e síntese. PAPPUS⁴ apud Polya, 1975, p. 104).

No clássico *How Solve It*, Polya também trata do termo: Denominamos aqui Raciocínio heurístico como aquele, não considerado como final e rigoroso, mas como

⁴ PAPPUS, A coleção matemática.

provisório e só plausível, cujo objetivo é descobrir a solução do presente problema.(POLYA, p.86, 1975).

Em *Task variables in problem solving*, ocorrem algumas citações de definições de heurística. A seguinte é elucidativa:

Consideramos aqui um método heurístico (ou uma heurística, para usar a forma substantiva) que pode nos levar a um atalho para o objetivo que buscamos ou pode levar-nos para um beco sem saída.É impossível prever o resultado final até que a heurística seja aplicada e os resultados verificados por processos formais de raciocínio. Se um método tem essa característica que não pode nos desviar do caminho, nós não chamaríamos isso de heurística, mas sim de algoritmo. A razão para usar heurísticas em vez de algoritmos é que eles podem nos levar mais rapidamente para o nosso objetivo e eles nos permitem aventurar em áreas onde não existem algoritmos[...].(GELEMTER E ROCHESTER apud McClintock, 1979, p.172)⁵

Cabe mencionar que quando tenta-se resolver um problema e apela-se ao uso de um problema correlato do qual o método de solução é conhecido e não apresenta qualquer dificuldade ao sujeito que resolve o problema, a resolução torna-se algorítmica na medida em que não são necessárias decisões globais para orientar a busca da solução e, portanto, é possível considerar um algoritmo como um elemento associado à determinada(s) heurística(s).

Do mesmo termo, segue a seguinte definição: [...]Uma heurística é um mecanismo de decisão, uma maneira de se comportar, que geralmente leva a resultados desejados, mas sem

⁵Gelemter e Rochester (1958).

garantia de sucesso. De natureza plausível, dando orientação na descoberta de uma solução[...] WILSON apud McCLINTOCK, 1979, p. 173.

As características mais relevantes do termo heurística presentes nas descrições acima são as seguintes: Heurística é uma prática que não garante a resolução do problema mas pode levar à solução, são decisões sobre a estratégia de resolução antes globais que específicas. Se um método garante a obtenção da solução, então não é uma heurística. É antes, um algoritmo.

Em *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender*, de Pozo e Echeverría, temos uma comparação entre procedimentos estratégicos ou heurísticos e regras e algoritmos:

Polya e outros autores distinguem entre procedimentos “estratégicos ou “heurísticos” e outros procedimentos de solução de problemas tais como as “regras”, os “algoritmos” ou os “operadores”. Enquanto que estes últimos procedimentos se constituem em conhecimentos adquiridos que permitem transformar as informações de uma maneira fixa, eficaz e concreta, embora possam ser utilizadas em um grande número de situações, as estratégias ou procedimentos “heurísticos” guiam a solução de problemas de uma forma muito mais vaga e global[...]POZO e ECHEVERRÍA, 1998, p. 24).

Percebe-se que não existe uma definição de heurística universalmente aceita mas é notável que na maioria das definições mencionadas, a heurística não é um método de pensamento rígido, não leva à solução todas as vezes, e de certa forma orienta ou guia a solução do problema.

Dada a dificuldade de definir heurística de forma precisa e universalmente aceita, e considerando as ideias acima aceitáveis, será adotada a definição de Wilson: Uma heurística é

um mecanismo de decisão, uma maneira de se comportar, que geralmente leva a resultados desejados, mas sem garantia de sucesso. De natureza plausível, dando orientação na descoberta de uma solução[...] (WILSON apud McCLINTOCK 1979, p. 173).

São apresentados alguns exemplos de heurísticas no próximo tópico para facilitar a compreensão deste termo tão recorrente no texto. Uma lista de heurísticas mais elaborada será apresentada no capítulo **A abordagem e coleta de dados**. As heurísticas mencionadas ao longo do texto são importantes elementos da pesquisa já que, entre outras coisas, é desejado investigar se estas são usadas com frequência pelos estudantes envolvidos na investigação.

Nota-se que a palavra heurística tem significado equivalente à estratégia em determinada acepção do termo. O termo heurística é preferível pelo fato da palavra estratégia ter um significado mais geral ou mais vago.

A seguir será apresentada uma lista de heurísticas recorrentes em diversos textos que tratam a resolução de problemas.

Em *How Solve It*, de Polya, temos alguns exemplos de heurísticas.

No capítulo *Pequeno dicionário de heurística*, constam ao menos 11 palavras ou expressões que podem ser classificadas como heurísticas:

1. Analogia.
2. Elementos Auxiliares.
3. Problemas Auxiliares.
4. Decomposição e Recombinação.
5. Generalização.
6. Indução e Indução Matemática.
7. Redução ao Absurdo, Prova Indireta.
8. Especialização.

9. Simetria.

10. Variação do Problema.

11. Trabalhando para Trás.

(POLYA, 1975, p. 29 a 158)

Muitas das heurísticas da lista acima também constam em trabalhos mais atuais como *Task variables in problem solving* (GODIN e McCLINTOCK, 1979, p. 360) ou *Heurística na sala de aula* (SCHOENFELD, 1984) e *Variáveis tarefa na resolução de problemas* (FERNANDES, BORRALHO e AMARO, 1992), o que sugere que essas heurísticas são tratadas não apenas em um lugar, num só período de tempo e sim com certa perenidade.

Serão descritas abaixo ou transcritas do *Pequeno dicionário de heurística* (POLYA, 1975) o significado de alguns elementos da lista de heurísticas da página anterior. Outros elementos da lista serão descritos no decorrer do texto.

Analogia: É uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto. Objetos análogos coincidem em certas relações de suas respectivas partes[...]. (POLYA, 1975, p. 29).

Um exemplo. Observe os dois seguintes problemas:

1) Um animal caminha (com velocidade constante) numa estrada reta que tem início no km 0 (não significa que o animal começou seu deslocamento no km 0).

Uma hora após o início do deslocamento, o bicho está no km 3 e 3 horas após o início do deslocamento, no km 7. Em qual km estará 4 horas após o início do deslocamento?

2) Um pequeno reservatório de água tem sua reserva aumentando com taxa constante durante uma longa chuva.

Após uma hora de chuva o volume de água no reservatório é de 3 mil metros cúbicos, com três horas de chuva o volume de água atinge a marca de 7 mil metros cúbicos. Qual será o volume de água no reservatório considerando 4 horas de chuva?

Os problemas 1 e 2 podem ser equacionados de maneira idêntica, assim seus elementos, de certa forma, têm papéis que correspondem. Além disso, têm ao menos três resoluções completamente concordantes, se não idênticas: A obtenção da incógnita por meio da taxa de variação das funções associadas às situações, a obtenção da solução por meio da observação do gráfico associado à cada função e determinação da incógnita via resolução de sistema de equações lineares. Assim, existe correspondência entre as relações dos elementos dos problemas. É possível assumir que são problemas análogos.

Varição do problema: Consiste na alteração das condições do problema com intenção de obter outro problema semelhante, mas mais simples. O problema que é variação do original pode ter resolução mais fácil e o mecanismo de resolução eventualmente pode ser usado para resolver o original. Também pode ocorrer que a variação do problema original tenha menos condições e sua solução seja mais ampla. A solução pode convergir para solução do problema original na medida em que as condições do problema original vão sendo incorporadas.

Trabalhando para trás:

Embora tal expressão seja encontrada em Polya, 1975, a definição dessa heurística está também presente em Pappus⁶, nomeada como análise e síntese.

Em problemas de determinação, em que é preciso determinar ou construir um elemento X, imagina-se o problema resolvido, ou seja, o elemento determinado. Infere-se qual conjunto de condições prévias (C_1) é necessário para obter o ente a ser determinado. Em seguida infere-se as condições prévias de C_1 (C_2) e repete-se o processo até obtermos um

⁶ Pappus, Collectiones, livro VII.

conjunto de condições C_n que seja obtida diretamente das hipóteses do problema. (PAPPUS, apud Polya, 1975,p. 104).

Se ocorrer:

hipóteses do enunciado $\rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow X$

temos imediatamente que a sequência de implicações que parte das hipóteses do enunciado, chega no elemento a ser determinado, estando assim resolvido o problema.

Segue um problema em que a heurística em questão é útil:

O jardineiro e suas dez rosas, adaptado do jogo italiano Enigmi matematici.

Um jardineiro quer plantar dez rosas em um jardim público.

Sendo muito caprichoso, ele quer criar um canteiro de flores especial.

Como deve fazer para plantar as dez rosas de maneira que componham 5 filas, com exatamente 4 rosas em cada fila?

Atenção:

Qualquer rosa pode fazer parte de mais de uma fila.

(LHULLIER, 2010, carta 63).

Uma solução apoiada na heurística trabalhando para trás:

Imaginando o problema resolvido, é necessário que jardineiro o tenha plantado quatro rosas formando uma fila, já que para formar cinco filas, é necessário formar uma (não interfere no posicionamento final das plantas a suposição de que o jardineiro compõe primeiro uma fila com quatro rosas).

Tem-se então:

Figura 1 – Quatro rosas formando uma fila.

Além das quatro rosas representadas na figura anterior, é necessário que exista uma rosa fora da fila.

Figura 2- Uma fila de quatro rosas e uma rosa fora da fila.

É claro que é necessário usar uma rosa em mais de uma fila (sem isto, cinco filas de quatro rosas exigiriam 20 rosas). Portanto, será usada uma rosa da fila completa para compor outra fila com a rosa que está fora da fila completa.

Segue a figura que ilustra a situação:

Figura 3 – Resolução do problema do jardineiro.

A fila sugerida pela linha inserida na Figura 3 precisa de mais duas rosas para que se complete uma fila de quatro rosas.

Figura 4 – Resolução do problema do jardineiro.

O próximo passo na resolução do problema é menos trivial que os passos anteriores.

A próxima rosa deve estar numa das quatro regiões do plano, separadas pelos dois segmentos da figura 4 (isso é necessário).

Além disso, a próxima rosa deve compor o máximo possível de linhas de três rosas para que se possa completar mais linhas de quatro plantas gastando o mínimo de rosas (isso é plausível).

Desta forma, a próxima rosa ficará na intersecção de duas linhas de duas rosas.

Figura 5 – Passo chave do problema do jardineiro.

A decisão sobre a posição da próxima rosa (9ª rosa) é também delicada. Supondo o problema resolvido, é claro que existe uma rosa que completa uma das filas de três rosas (a quarta rosa dessa fila). Além disso, esta rosa (9ª rosa) pode ser posicionada numa linha de duas rosas já existentes, de maneira que o prolongamento desta fila intersecte o prolongamento da outra fila existente de três rosas para que seja possível completar duas filas de quatro rosas com a décima e última rosa disponível.

Figura 6 – Últimos passos da resolução do problema do jardineiro.

E finalmente, a solução:

Figura 7 – Uma solução do problema do jardineiro.

Ao longo da resolução do problema *O jardineiro e suas dez rosas*, surgem problemas cujas soluções auxiliam na resolução do problema original.

Ao determinar quatro rosas alinhadas, surge o problema: onde poderia ser colocada a 5ª rosa? E a 6ª? E assim por diante.

Ao decompor o problema original em outros, é praticada a heurística chamada **Problema auxiliar**. Assim, a resolução do problema ocorre por meio de uma combinação de ao menos duas heurísticas (trabalhando para trás⁷ e problemas auxiliares).

É fato conhecido da maioria dos que tem o hábito de resolver problemas de matemática e observar suas próprias estratégias e heurísticas que, frequentemente, numa mesma solução usa-se várias heurísticas.

Em *Heurística na Sala de Aula* (SCHOENFELD, 1984), é apresentada uma lista de heurísticas, todas mencionadas no *Pequeno dicionário de heurística* (POLYA, 1975) que são agrupadas de maneira a ajudar a resolver determinadas situações. É fato aceito que várias heurísticas podem ser combinadas em uma mesma resolução.

Problemas auxiliares é frequentemente usada em resoluções, seja combinada com outra estratégia ou não. Trata-se de decompor o problema em outros “menores”, mais fáceis. A solução destes devem levar à solução do problema original.

Sua definição pode ser encontrada no *Pequeno dicionário de heurística*:

É aquele problema que tratamos não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro. O nosso problema original. Este último é o fim a que desejamos chegar.

⁷ A definição deste termo consta na página 22.

O problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo[...] (POLYA, 1975, p.119).

Um exemplo de um problema em que essa estratégia pode ser usada é o seguinte:

5)Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?⁸

Segue uma solução:

Sabe-se quanto tempo é gasto para ir a pé e voltar de bicicleta, ou vice-versa (1 hora)⁹. É claro que ao descobrir o tempo necessário para ir ao trabalho de bicicleta, descobre-se trivialmente o tempo da ida ou volta a pé (que é o tempo necessário para completar 1 hora). E a tarefa de descobrir o tempo gasto para ir ou voltar ao trabalho de bicicleta constitui a resolução de um problema auxiliar.

Se ir e voltar ao trabalho de bicicleta toma 30 minutos, então a ida (ou a volta) deve tomar 15 minutos.

Consequentemente, se demora 60 minutos para ir e voltar ao trabalho, tem-se que são gastos 45 minutos para ir a pé, já que é este o tempo para completar os 60 minutos gastos no total.

⁸ WICKELGREN,1974, p. 104).

⁹Um dos fatos implícitos do enunciado é que a casa e o local de trabalho de Abe ficam na mesma região plana e horizontal ou que ficam na mesma altura em relação ao nível do mar, pois caso contrário, por exemplo, se o lugar da casa fosse mais alto que o lugar do trabalho, a ida da casa ao trabalho demoraria menos que a volta, especialmente de bicicleta, já que haveriam mais descidas que subidas.

Finalmente, conclui-se que o tempo total gasto na ida e volta a pé é de 90 minutos, ou 1 hora e 30 minutos.

Esta heurística é amplamente aplicável e frequentemente usada, muitas vezes combinada com outras.

Essa estratégia, frequentemente exige certa autonomia do educando pois o problema é determinado *a posteriori* (TEREZINHA CARRAHER, ANALÚCIA DIAS SCHLIEMANN E DAVID CARRAHER, 1991, p. 33). Nessa situação, é o educando quem determina o problema que deve ser resolvido para auxiliar a resolução do original e essa autonomia é importantíssima e deve ser valorizada (BRUSSEAU, 2008, p. 92).

Uma curiosidade é que essa heurística é considerada uma das funções psicológicas superiores (função psicológica que somente seres humanos têm, como por exemplo, uso de signos para mediação entre o sujeito e o ambiente). Vigotsky observa que outros animais, mesmo os mamíferos mais desenvolvidos não são capazes de desviar muito do problema principal quando tentam resolvê-lo, ao passo que o ser humano é capaz de eleger um problema intermediário e concentrar sua atenção na resolução somente neste (VIGOTSKY, 2007).

Segue um exemplo da aplicação de problemas auxiliares combinada com trabalhando para trás.

Torre de Hanoi: O quebra-cabeça foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883 e o enunciado foi traduzido de *How to solve problems*, de Wickelgren, com a diferença que no enunciado do livro o problema envolvia seis discos e não cinco como é apresentado aqui:

Existem três estacas idênticas e cinco discos, cada um com um diâmetro diferente dos demais, mas todos têm um furo no centro, largo o bastante para que possa ser atravessado por uma estaca. No começo, os cinco discos estão na mesma estaca, o maior na base, o

segundo maior em cima do primeiro, o terceiro maior em cima do segundo, e assim por diante, de maneira que estão em ordem de maior para menor (observando de baixo para cima). É permitido que você mova um disco por vez, de uma estaca para outra, com a restrição de que o maior disco nunca pode ser posto sobre um disco menor. A meta é transferir os 5 discos para uma das duas outras estacas (sem nunca permitir que um disco maior fique sobre um disco menor).¹⁰

Figura 1 – Estaca e discos da torre de Hanoi na posição inicial.

Para que possam ser transferidos todos os discos para outra estaca, será necessário que, em algum momento, não exista nenhum disco sobre o disco maior (que está na base da torre original) já que só é permitido mover um disco por vez. Também será necessário que, além de satisfeita a condição anterior, exista uma estaca totalmente livre (pois o disco maior, que será movido, não pode ficar sobre qualquer outro). A figura abaixo ilustra as duas condições atendidas.

¹⁰(WICKELGREN, 1974, p.102).

Figura 2 - Estaca e discos da torre de Hanoi configuração necessária para remoção do disco 4 para estaca C.

Essas duas condições acima mencionadas precisam ser atendidas para que o problema original tenha chance de ser resolvido, ou seja, a configuração acima ou outra equivalente é necessária para a resolução.

Observa-se que para determinar subproblemas que auxiliam na resolução do problema original, é plausível que antes tenha sido imaginado o problema resolvido (no caso do problema anterior, a torre em outro lugar, nesse caso) e isso pode induzir à determinação dos subproblemas associados ao problema original. Trata-se então de uma combinação de heurísticas para resolver um problema (trabalhando para trás e dividir o problema em problemas auxiliares).

Outra heurística pertinente é a chamada **Especialização**. Ela ocorre ao trocar-se um problema mais geral por um mais específico, na intenção de obter pistas de como se resolve o problema mais geral. Também é considerada especialização o ato de trocar uma constante por outra, geralmente um número maior por outro menor.

Um exemplo:

Quando é necessário descobrir o número de jogos para determinar o campeão de um torneio onde o perdedor de cada jogo é desclassificado, considerando que n times participam do torneio, é possível obter a resposta para um caso específico: Considera-se um torneio que envolve 4 equipes, por exemplo, (foi trocado o n , número de jogos genéricos, por 4). São necessários 3 jogos. Se houvessem 5 equipes, seriam necessários 4 jogos. Se houvessem 6

equipes, 5 jogos. Pelo princípio de indução finita é possível demonstrar que para um torneio com n equipes são necessários $n-1$ jogos para determinar o campeão.

Ao considerar os casos específicos considerados ($n= 4$, $n=5$ e $n=6$), foi aplicada a heurística especialização.

A heurística **Indução** ocorreu na resolução dos alunos de maneira significativa.

Em *A arte de resolver problemas* tal heurística é assim descrita: “[...] A indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares[...]” (POLYA, p. 91, 1975).

Não se trata de indução matemática, que é um método rigoroso. Nesse texto é considerado que houve indução quando o educando observa uma sequência de caso se consegue compreender algum tipo de padrão, seja numérico ou não. A repetição desse padrão leva à resolução do problema ou facilita a resolução. Um exemplo:

Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?¹¹

A seguinte resolução é semelhante às resoluções que os alunos deram ao problema:

Atravessam dois meninos, volta um menino, atravessa um homem, volta o outro menino. Essa sequência de ações termina com o bote do lado inicial do rio e um homem do lado oposto. Repetir essa sequência de ações mais oito vezes e, finalmente, atravessar os dois meninos que ficaram do lado inicial do rio culmina na travessia de todos. Ao sugerir a repetição da sequência que culmina com oito homens, dois meninos e o bote do lado inicial do rio e um homem do lado oposto é sinalizar a ocorrência de indução pois significa que foi observado um padrão de movimentos cuja repetição colabora com a obtenção da meta estipulada no enunciado.

¹¹ WICKELGREN, 1974, p. 98.

Outro termo importante que está presente em todo o texto é **problema**. O significado adotado desta palavra é descrito no próximo item.

1.4.2 Problema

Serão mencionadas abaixo algumas definições de problemas usadas por autores com pesquisa reconhecida em resolução de problemas.

Em *On teaching problem solving in school mathematics*, consta uma definição de problema atribuída a Kantowski¹²:

Uma situação é dita ser um problema quando um indivíduo precisa combinar novas informações de uma nova maneira de modo a resolver o problema. Se um indivíduo pode reconhecer necessariamente o procedimento necessário a situação é uma tarefa padrão (ou uma tarefa rotineira ou um exercício)[...] (KANTOWSKI apud PEHKONEN, NAVERI e LAINE, 2013, p.11).

Assim, situações solúveis por meio de algoritmo não são consideradas problemas na definição dada.

O autor afirma também:

Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo fato de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução[...] (KANTOWSKI apud ABRANTES, 1989, p.3).

¹²Kantowski, 1980

A ideia de problema ocorre com frequência em pesquisas sobre ensino de matemática e, portanto, esse termo é bastante tratado.

Pozo e Echeverría mencionam Lester¹³, ao referir-se a sua definição clássica de problema: uma situação que um grupo ou indivíduo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto para chegar à solução[...] (LESTER apud Pozo e Echeverría, 1998, p. 15.).

As definições acima, em certo aspecto, convergem, já que têm como essencial o fato do problema não ser passível de resolução mediante aplicação de algoritmos.

No presente texto, é adotada a definição de problemas de Lester e tal deve servir para os fins da presente pesquisa.

É citado no mesmo texto que, de acordo com a definição acima, um problema exige um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos (POZO e ECHEVERRÍA, 1998, p.16).

Como consequência da definição de problemas acima, o que é um problema para determinado sujeito, pode não ser para outro, já que o conhecimento de um algoritmo para a resolução da situação pode não pertencer ao repertório de um indivíduo, mas pertencer ao repertório de outro.

É usada a expressão “problemas de matemática” para referir a problemas passíveis de uma abordagem matemática, já que neste texto não é considerado que os problemas, de maneira geral, estejam contidos neste ou naquele domínio científico e sim que podem ser abordados segundo um ou outro ou vários domínios.

¹³LESTER, 1983.

É necessário observar que está implícito (embora não pareça) em todas as definições apresentadas, que os problemas são problemas escritos já que em nenhum dos textos mencionados ocorre um problema lúdico ou que envolva manipulação de material concreto ou que pareça não depender exclusivamente de um enunciado escrito. Esse fato, embora aparentemente pouco significativo, tem desdobramentos importantes que não devem ser ignorados.

Os problemas em linguagem escrita, usando de vocábulos e construção sintática e semântica acadêmica ou escolar, tendem a favorecer os indivíduos das classes mais abastadas já que em geral, essa linguagem é familiar a estes indivíduos e não aos membros de famílias pobres (BOURDIEU, *A escola conservadora: as desigualdades frente à escola e à cultura*, 1966,p.328).Não é por menos que em situações não escolares, ligadas a situações cotidianas que prescindem de enunciado escrito, a ocorrência de sucesso de alunos das camadas populares aumenta significativamente (*Na vida dez, na escola zero*,TEREZINHA CARRAHER, ANALÚCIA DIAS SCHLIEMANN E DAVID CARRAHER, 1991).

Embora os educandos mais pobres e os da classe média possam apresentar diferenças de condições ao enfrentarem problemas acadêmicos ou escolares, o interesse em conhecer melhor suas estratégias e heurísticas persiste e os problemas foram escolhidos também com a intenção de mitigar os efeitos das diferenças sociais, não é por menos que os problemas que serão apresentados não são solúveis unicamente via conhecimentos propedêuticos ou científicos.

Outro termo que é usado no texto e que merece ser esclarecido é **operações mentais**.

1.43 Operações mentais

Em *Pensamento e linguagem*, é relatada a seguinte cadeia de eventos: Criança observa o problema, fica em silêncio e em seguida, resolve-o.

Nesse intervalo de tempo em silêncio, Vygotsky diz que houveram operações mentais. (VIGOTSKY, 2000, p. 21).

Assim, operações mentais seriam os raciocínios elaborados durante a resolução de um problema que são diretamente úteis na resolução deste problema.

Polya também usa a expressão *operações mentais*: “Algumas das indagações do livro 4 etapas para resolução de um problema levam o aluno a realizar operações mentais[...]” (POLYA, 1975, p. 1). Ou seja, de acordo com essas concepções do termo, operações mentais são tudo aquilo que se pensa (aquilo que é diretamente pertinente) na direção de resolver um problema ou compreendê-lo, ou responder uma pergunta de resposta não imediata.

Com base nos fragmentos dos textos de Vigotsky e Polya sobre operações mentais, tal expressão será definida da seguinte maneira: Dado um problema e um esboço de resolução, operação mental é a atividade intelectual que foi importante para alcançar esse esboço.

Definidos alguns termos importantes, antes de entrar na parte essencial do estudo, é importante apresentar a escola onde estudam os alunos envolvidos na pesquisa, já que conhecer a escola, pode ajudar a conhecer os alunos e esta dissertação trata-se de um estudo de caso.

2 A escola e os alunos

2.1 A escola

A escola estadual Érico Veríssimo fica em Guarulhos, na grande São Paulo. Está localizada na Vila Endres, Rua Portuguesa, nº 394.

Vila Endres é um bairro que abriga famílias de pouco ou pouquíssimo poder aquisitivo embora algumas famílias (poucas) de classe média também residam no local.

A escola atende principalmente aos moradores da região.

A unidade escolar é grande. Há 14 salas de aula, 9 turmas no período da manhã (1º ao 3º colegial) com uma média de 40 alunos por turma, 8 turmas de tarde (7º ao 9º ano) com média de 35 alunos por turma e 4 turmas no período da noite (1º ao 3º colegial) com média de 40 alunos por turma, segundo a diretora do colégio.

O prédio tem uma arquitetura que permite o total controle de quais locais são ocupados pelos alunos, ou seja, repleta de grades e cadeados. Não obstante, tem um espaço amplo e arborizado (não acessível aos alunos).

Na escola Érico Veríssimo não há laboratório de ciências. Há uma sala de informática com 14 computadores que funcionam, sala de leitura, pátio, duas quadras com proteção contra chuva.

A escola, portanto, tem uma boa estrutura para práticas esportivas. Uma sala de informática com 14 computadores não é suficiente para uma escola que tem períodos com 9 turmas, com 40 alunos por turma em média.

O uso do banheiro é (ao menos em parte do tempo) controlado pela inspetora. Esta fica com a chave, decidindo sobre o uso do banheiro.

A diretora caracteriza as turmas como convencionais, não tendo problemas relevantes de comportamento. Afirma que existe grave problema de assiduidade dos professores.

A escola está inscrita na OBMEP (Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas).

O quadro de funcionários conta com seis inspetoras, uma gerente (chefe da secretaria), duas secretárias, uma diretora, uma vice-diretora, um coordenador pedagógico. Esses funcionários são distribuídos nos três períodos. O quadro de professores está quase completo, falta um professor de geografia, cuja vaga não deve ficar muito tempo ociosa, de acordo com a diretora, ou seja, há turmas sem aulas de geografia. A maioria dos professores

são efetivos, contando com três funcionários com contrato de trabalho precário¹⁴. A maioria dos professores moram na cidade de Guarulhos, mas não no bairro da escola. Há também funcionárias terceirizadas da limpeza e da cozinha (a escola serve refeições, uma por período).

A falta de professores substitutos afeta claramente o cotidiano escolar e somente uma equipe de direção (diretora, vice e coordenador pedagógico) não é suficiente para uma escola com funcionamento de três turnos.

Em suma, a escola tem problemas de falta de funcionários e, também, enfrenta a falta de laboratório de informática adequado e a falta de laboratório de ciências. Tem um espaço bastante amplo e arborizado e uma boa estrutura para a prática de educação física.

Apresentada a escola, segue-se a apresentação dos alunos(as).

2.2 Os Alunos(as)

Os estudantes participantes da pesquisa são de duas turmas distintas, os terceiros colegiais B e D. Tal fato se deve a questões práticas como a disponibilidade do pesquisador em ir à unidade escolar, ao fato de somente alguns professores permitirem a saída de alguns alunos no período em que o pesquisador esteve na unidade escolar, entre outros.

Os educandos estudam no período da manhã. As turmas são consideradas, pelos professores de matemática, como turmas com desempenho médio, sem grandes problemas disciplinares.

¹⁴ O professor com contrato precário é chamado de categoria O. Seu contrato é renovado anualmente, estando periodicamente submetido à prova para classificação. Os professores têm direito de faltar quatro vezes em dois anos, violar esta regra pode significar demissão sumária. A diretora tem o direito de demitir o professor categoria O, arbitrariamente.

As alunas e alunos foram escolhidos dentre as (os) que se voluntariaram para participar da pesquisa depois de rápida exposição sobre a investigação feita pelo autor. Foi esclarecido que para participar da pesquisa não era necessário “saber” matemática e que os problemas não eram do tipo que exigem muito conhecimento matemático para serem resolvidos. Era interessante ter alunos e alunas de perfis de comportamento variados. Não era desejado investigar apenas alunas e alunos aplicados (as) ou estigmatizados como “bons” estudantes.

Algumas informações sobre os estudantes que participaram da investigação são apresentadas a seguir.

Nove estudantes participaram da pesquisa. Só foi possível obter os dados de 7 deles.

Todos os educandos pesquisados fizeram toda sua escolarização em escolas públicas.

Para a pergunta *Conhece alguém que tem uma profissão da qual gosta? Qual a profissão dessa pessoa? Ela é sua parente?* houveram somente dois estudantes que apontaram profissões que demanda ensino superior e as pessoas que exerciam tais profissões eram primos dos participantes da pesquisa.

Para a questão *Qual a escolaridade de seus pais?* Ocorreram somente duas respostas que indicavam ensino superior completo e nesses casos, era o pai que tinha cursado ensino superior. Houveram duas respostas incompreensíveis. A maioria dos pais que não tinham ensino superior, têm ensino médio completo.

Foi perguntado também a respeito das pretensões profissionais dos educandos. Das respostas dadas, uma profissão não exigia formação universitária, três eram muito vagas e não permitiam determinar se era necessário ou não ensino superior e três demandavam formação universitária.

Assim, é possível perceber certa moderação em relação a pretensões profissionais no sentido de que profissões que são mais prestigiadas ou demandam conhecimento acadêmico mais elaborado são pouco desejadas ou pretendidas. Essa modéstia em relação aos anseios

profissionais possivelmente está relacionada à simplicidade das ocupações das pessoas com as quais o educando convive. Existem pesquisas que apontam correlação entre as pretensões acadêmicas e profissionais e a camada social em que o indivíduo se situa e, também, associação entre o fato de os pais terem ou não realizado ensino superior e a pretensão profissional do jovem. Quanto mais baixa a camada social, mais tímidas são as pretensões profissionais e existe correlação positiva entre o fato do educando desejar fazer curso superior e ter pais que o fizeram (BOURDIEU, 1966, p.339-340).

É plausível que o interesse em resolução de problemas e a performance do indivíduo neste campo está associada à sua pretensão profissional e a sua história familiar.

Dos sete estudantes que responderam o questionário, somente dois tinham a matemática entre suas matérias prediletas, e isso é um dado importante, pois havia o risco de voluntariarem-se para a pesquisa uma maioria de estudantes que gostassem especialmente de matemática e isso não era o desejado.

Cinco estudantes que declararam gostar de ler fora do período de aula e pelos dados obtidos, lêem 5h20 min por semana, em média. Seis alunos declararam estudar fora do período de aula e pelos dados fornecidos, estudam em média 3h40min por dia. Parece um número exagerado. Imagina-se que confundiram a pergunta e declararam o número de horas de estudo por semana e não por dia.

Seis dos sete educandos que responderam o questionário declararam que ninguém os ajuda a estudar, assim a participação da família na vida escolar destes jovens parece ser pequena.

Assim, os jovens que participaram da pesquisa têm pais com escolarização modesta. Estes pais participam pouco da vida escolar destes jovens. Estes estudantes têm anseios profissionais e acadêmicos modestos.

Até aqui foi apresentada a introdução (memorial, objetivo, justificativa e termos relevantes para o estudo) e informações sobre os estudantes envolvidos neste estudo de caso (as informações sobre a escola servem para ajudar a delinear os perfis dos estudantes).

Assim, este é o lugar para o início da parte essencial da pesquisa: o método de investigação, o material analisado e as conclusões do estudo.

3 Abordagem e escolha dos problemas

3.1 A abordagem

Ao dar andamento na identificação das estratégias e heurísticas desencadeadas pelos estudantes ao enfrentarem problemas de matemática, são necessárias algumas decisões um tanto delicadas. A identificação demanda a comparação de alguns elementos das operações mentais¹⁵ realizadas pelos estudantes e captadas pelo pesquisador com uma lista de operações mentais (no caso, heurísticas e algumas ações) pré-estabelecidas, ainda que haja intenção de eventualmente identificar mecanismos de pensamento não pré-estabelecidos.

Quais elementos devem pertencer a tal lista?

Considerando que o objetivo mais amplo da pesquisa é colaborar com o ensino e aprendizagem da matemática por meio da possibilidade de aprimoramento da competência em resolução de problemas, baseado no aprofundamento do conhecimento sobre como um grupo de jovens paulistas oriundos do sistema público de ensino se comporta frente a certos problemas, deseja-se investigar a ocorrência ou não de heurísticas aplicáveis a maior quantidade de problemas possíveis e que sejam factíveis de serem ensinadas com os recursos de escolas convencionais do ponto de vista material¹⁶. Tal critério de escola está implícita em FERNANDES, BORRALHO e GERTRUDES, p. 39, 1994.

¹⁵ A definição deste termo está na página 37.

¹⁶ Considera-se escolas convencionais as escolas sem grandes aparatos tecnológicos e sem quadro de funcionários numeroso ou completo.

É possível identificar algumas estratégias e heurísticas no Pequeno dicionário de heurística.

1. Analogia.
2. Elementos Auxiliares.
3. Problemas Auxiliares.
4. Decomposição e Recombinação.
5. Generalização.
6. Indução e Indução Matemática.
7. Redução ao Absurdo, Prova Indireta.
8. Especialização.
9. Simetria.
10. Variação do Problema.
11. Trabalhando para Trás.

Lista 1 de heurísticas, ações e comportamentos (POLYA, 1975, p. 29 a 158).

As heurísticas desta lista são frequentemente tratadas em pesquisas sobre resoluções de problemas por serem consideradas aplicáveis à uma considerável quantidade de classes de problemas. É possível observar que muitos de seus elementos ocorrem também em *Task variable in problem solving*:

Table 8B.1 *List of Heuristic Processes (with Code Numbers)*

- 1 Draw a diagram (figure, schematic, table)..
- 2 Test special cases.
- 3 Identify what is wanted and what is given.
- 4 Identify relevant or irrelevant data.
Examine all the given information.
- 5 Work forward from what is given.
- 6 Work backward from the conclusion.
- 7 Search for a pattern. Find a generalization.
- 8 Search for a related problem (emphasis on similar structure).
- 9 Search for an applicable theorem, definition, operation or algorithm.
- 10 Solve part of the problem.
- 11 Check the solution
- 12 Is there another way to get the result?
(alternate solutions)
- 13 Is there another result that could be obtained?
(uniqueness)
- 14 Study the solution process.

Lista 2 de heurísticas, ações e comportamentos (LUCAS, BRANCA, GOLDEMBERG, KANTOWSKI, KELLOG e SMITH, 1979, p. 360)

Nota-se que muitos elementos presentes na lista 1 estão presentes também na lista 2, eventualmente com um nome um pouco diferente. Por exemplo, na lista 1 consta indução e indução matemática, enquanto na lista 2 ocorre busca de um padrão, encontrar uma generalização. Especialização na lista 1 corresponde à teste de casos especiais na lista 2.

Esse conjunto de comportamentos é tratado de maneira um tanto recorrente por vários autores da área de resolução de problemas, por exemplo, SCHOENFELD (1984), CHARLES e LESTER (1984), os próprios autores das listas apresentadas: POLYA (1975),

LUCAS, BRANCA, GOLDEMBERG, KANTOWSKI, KELLOG e SMITH (1979), além de vários outros.

É muito plausível que esses comportamentos, estratégias e heurísticas tenham sido escolhidos, entre outras razões, por terem as características já mencionadas (serem aplicáveis a uma gama razoável de problemas e passíveis de serem ensinadas ou aprimoradas, inclusive dentro da rede estadual paulista. Em suma, são heurísticas consideradas relevantes por serem aplicáveis e ensináveis.

A lista 2 sugere uma preocupação com alguns elementos um pouco mais gerais que aqueles da lista 1, como a verificação dos quatro passos de Polya: Compreensão do enunciado, elaboração de estratégia, execução da estratégia e verificação do resultado (POLYA, 1975). Cabe lembrar que a lista 2 foi construída para uma análise bastante pormenorizada em uma pesquisa que contou com numerosos pesquisadores e expressivos recursos financeiros e que teve uma proposta diferente da investigação desta dissertação e, portanto, não serão aqui adotados todos os elementos das listas.

Em suma, a proposta é verificar a ocorrência ou não das seguintes heurísticas, ações ou atitudes:

1. Analogia.
2. Elementos auxiliares.
3. Problemas auxiliares.
4. Decomposição e recombinação.
5. Generalização.
6. Indução e indução matemática.
7. Redução ao absurdo, prova indireta.
8. Especialização.

9. Variação do problema.
10. Trabalhando para trás.
11. Desenho de figuras, esquemas ou tabelas.
12. Identificar o que é desejado e o que é dado.
13. Verificação da solução.

É claro que, ao descrever o comportamento dos educandos, segundo os elementos estabelecidos na lista apresentada acima, não é exaurida a discussão sobre processos mentais desencadeados pelo educando ao resolver um problema. A complexidade dos processos mentais envolvidos na resolução de um problema de matemática não permite tal exaustão como sugerido em LUCAS, BRANCA, GOLDEMBERG, KANTOWSKI, KELLOG e SMITH, (1979), p. 358).

Um elemento essencial para a investigação proposta é o conjunto de problemas apresentados aos alunos.

3.2 A escolha dos problemas

Os problemas apresentados aos jovens foram concebidos ou selecionados de tal modo que, na medida em que tentem resolvê-los, coloquem em prática suas habilidades de resolução, pratiquem as heurísticas de que dispõem, elaborem as estratégias que lhes sejam possíveis, enfim, mostrem suas habilidades de resolução de problemas de matemática.

A escolha dos problemas que são apresentados aos alunos teve de ser cuidadosa, já que uma escolha ruim poderia acarretar a impossibilidade de investigação da maneira como o estudante se dispõe a resolvê-los. Assim, foram adotados alguns critérios de escolha dos problemas. Critérios estes que pretenderam conferir aos problemas selecionados

características que favoreçam a compreensão do problema e então, estimulem a exposição de suas habilidades de resolução.

Além disso, considerando que um dos objetivos do presente texto é oferecer subsídios e métodos para o professor que deseja conhecer melhor as habilidades de resolução de problemas matemáticos de seus estudantes, certa clareza sobre a escolha dos problemas usados para tal fim é conveniente: “[...] se o investigador em resolução de problemas não é conhecedor de propriedades importantes da tarefa e não as descreve suficientemente bem para os outros investigadores construírem instrumentos idênticos, as observações terão um uso limitado”[...] (GODIN apud LEITÃO, FERNANDES e CABRITA, 1982, p.101).

Em *Task variable in problem solving*, são atribuídos conjuntos de variáveis aos problemas (variáveis de tarefa), variáveis estas que afetam o ato de resolução do problema de muitas formas (GODIN, 1979).

Na escolha dos problemas, foram consideradas algumas destas variáveis para viabilização de seleção ou adaptação de problemas com as características desejadas. O desenvolvimento e apresentação de toda teoria foge do intuito deste texto, mas serão mencionadas tais variáveis e a razão do controle das mesmas a seguir.

3.2.1 Variáveis de sintaxe

Variáveis de sintaxe são aquelas variáveis que descrevem o arranjo e a relação entre as palavras e símbolos no enunciado do problema. A ordem em que são disponibilizados os dados, se são explícitos ou implícitos, são consideradas variáveis de sintaxe e são fatores que afetam a performance do estudante ao tentar resolver determinado problema. Também são consideradas variáveis desta categoria o número de palavras não familiares, número de sentenças entre outros (KULM, 1979, p. 16). Ou seja, as variáveis de sintaxe estão ligadas também à estrutura gramatical do enunciado, à sua construção.

Em Variáveis de tarefa, na resolução de problemas, é observado que as variáveis de sintaxe incluem o comprimento do problema, a complexidade gramatical, sequência de dados, local onde aparecem os dados entre outras (LEITÃO, FERNANDES e CABRITA, 1982).

Se o estudante não compreende o enunciado ou não compreende da maneira que se espera, não sabe o que lhe é solicitado, não consegue decidir quais as informações são úteis, os processos de resolução que o aluno tem potencial para realizar podem ser afetados de maneira que dificulte a investigação proposta.

Assim, no contexto desta investigação, os problemas devem ter enunciados tão simples quanto possível. A clareza e simplicidade dos enunciados foram, portanto, aspectos importantes para a escolha dos problemas.

Compreender o problema pode não ser suficiente para estimular um processo de resolução. É importante que a solução do problema seja factível para o educando ou que este tenha essa percepção. Um problema cujas resoluções possíveis sejam demasiadamente elaboradas ou sofisticadas ou que exijam conhecimentos dos quais o educando não partilha, pode ser desestimulante. Então, é possível assumir que as variáveis de conteúdo e contexto também são relevantes do ponto de vista do potencial do problema em estimular processos de resolução. Portanto, essas variáveis devem ser consideradas na escolha dos problemas.

3.2.2 Variáveis de conteúdo e contexto

Conteúdo

Também em *Task variable in solving problem* ocorre que [...] a palavra *conteúdo* refere à principal substância de uma mensagem, assim, por conteúdo nós referimos ao significado matemático do enunciado [...]. (KULM, 1979, p.17).

Tal significado matemático pode ser considerado o significado presente no problema ou no significado associado à abordagem do problema.

É mencionado em seguida alguns exemplos de conteúdo: a teoria dos números, a probabilidade, medidas, etc.

Existem também subcategorias dos conteúdos, como o tipo de expressão matemática a que remete o enunciado (equação polinomial do primeiro grau, do segundo grau, sistema de equações do primeiro grau, etc.). (KULM, 1979, p. 17).

Mesmo considerando um problema que surge ocasionalmente de alguma demanda concreta, este é eventualmente passível de alguma abordagem matemática e, por vezes, existem abordagens mais factíveis que outras quando consideramos que tal abordagem será feita por um aluno secundarista. Tais abordagens envolvem (na maioria das vezes) certos conceitos e métodos passíveis de associação ao problema. Na verdade, é bem difícil pensar num problema cuja abordagem matemática não requer conceito, técnica ou método algum.

É nesse sentido que é considerada a afirmação de que todo problema remete em alguma medida a um conjunto de técnicas e conceitos inerentes ao domínio do problema (POZO e ECHEVERRIA, 1998, p. 18), com a ressalva de que o problema não precisa pertencer a um determinado domínio ou conjunto de domínios, já que é possível considerar problemas que se imponham naturalmente das demandas de certo grupo humano e esses problemas não estarem *a priori* associados a este ou àquele campo do conhecimento.

Mas se é usada uma abordagem matemática para resolver determinado problema, a resolução é que remete ao conjunto de técnicas e conceitos mencionados e, portanto, de uma forma ou de outra, a resolução de um problema por meio de uma abordagem matemática requer o conhecimento de algum conjunto de conceitos e técnicas, ainda que por vezes esses conceitos e técnicas sejam elementares e do senso comum.

Assim, é possível falar em conteúdos por trás dos problemas (conteúdos suscetíveis de serem mobilizados em determinada abordagem do problema).

É preciso considerar que estabelecer uma relação bijetora entre problemas e conteúdos é algo no mínimo discutível, como é possível observar no fragmento de Variáveis de tarefa na resolução de problemas: “Muitos problemas matemáticos derivam de situações da vida

real ou de outras disciplinas que não a própria matemática. Os tópicos matemáticos destes problemas não descrevem adequadamente o conteúdo do mesmo”[...]”(LEITÃO, FERNANDES e CABRITA, 1982, p. 106).

Ainda, como observado no próprio texto, o conteúdo matemático mobilizado por um estudante para ajudar em sua resolução depende inclusive do “background” do estudante, o que torna ainda mais complexa a questão de conteúdo por trás de um problema.

Ainda assim, tal variável precisa ser considerada na escolha dos problemas já que o conteúdo por trás de um problema afeta a maneira como ele será resolvido. Por exemplo, um problema que é possível abordar via determinado conteúdo, conteúdo este familiar ao sujeito que pretende resolver o problema e claramente associado à questão, tende a ser de resolução mais fácil que outro problema que é associável somente à conteúdos mais sofisticados e não familiares ao sujeito que se propõe a resolvê-lo. Consequentemente, é de grande interesse oferecer aos alunos problemas tais que o conteúdo relacionado não seja um obstáculo intransponível.

Seria mais complicado, senão inviável, realizar a investigação proposta se os problemas exigissem conteúdos ou conceitos com os quais os alunos não estão familiarizados, até porque tal característica poderia afetar (na maior parte das vezes negativamente) a motivação, o desejo do aluno de resolver o problema. É necessário, portanto, controlar de alguma maneira o problema no que se refere ao conteúdo que este mais frequentemente remete. Vale observar que se tentou evitar a utilização de problemas deliberadamente construídos exclusivamente a partir de determinados conteúdos, pois nesse caso o não conhecimento de tal conteúdo, de técnicas e conceitos ligados a ele, pode comprometer a tentativa de resolução por parte do aluno.

Assim, os problemas usados não devem favorecer uma resolução preponderantemente baseada em conhecimentos propedêuticos, afim de que seja possível privilegiar a investigação das heurísticas, processos de resolução e operações mentais desencadeados (as) pelos alunos e também para que os problemas sejam acessíveis, o que

permitirá à investigação acolher também aqueles estudantes que não tiveram acesso mais sistemático, sólido e organizado a certos conceitos e conteúdos matemáticos.

Dessa forma, os problemas utilizados devem exigir o mínimo possível de conteúdos ou conceitos matemáticos formais para sua resolução (exceto quando outras características do problema se sobrepuserem ao nível de acessibilidade ao problema).

Outro fator que pode afetar a compreensão do problema é a contextualização. Um problema bem contextualizado pode ter maior chance de ser compreendido. Conforme atesta Machado: “[...] mesmo considerando indivíduos adultos e instruídos, o nível de acerto de uma questão cresce conforme vão se apresentando versões mais concretas [...]” (MACHADO, p. 49, 2011).

A contextualização de um problema é um aspecto relevante na determinação dos problemas usados na pesquisa. Um problema contextualizado pode também promover um maior interesse na sua resolução.

3.2.3 Contexto

Sobre o contexto, ocorre em *Task variables in problem solving*: “O Contexto remete ao significado não matemático ou situação que o enunciado refere e o contexto pode variar entre dimensões como concreto/ abstrato, aplicação/teoria, factual/hipotético”. (KULM, 1979).

A situação a que o enunciado refere geralmente é concreta (e esse é o caso dos problemas usados nesta pesquisa, com exceção do problema 3). Nesse caso, o contexto é o pano de fundo, é a justificativa das condições impostas, dos mecanismos que estão subjacentes ao enunciado. O contexto concreto é uma situação real passível de modelagem, eventualmente matemática.

Também são incluídas como variáveis de contexto aquelas relacionadas com a apresentação do problema: Manipulativa, pictórica, verbal, etc. A contextualização de um problema pode determinar se o educando tentará resolvê-lo com maior ou menor interesse e, portanto, é um elemento que deve ser considerado na escolha dos problemas.

O contexto cotidiano ou imaginável pode ajudar a dar significado ao conteúdo do problema, na medida em que confere à teoria um aspecto concreto, objetivo, prático e é importante também por ajudar o aluno a desenvolver a habilidade de extrair do problema as informações relevantes e suprimir as informações irrelevantes, posto que um problema contextualizado tende a ser menos objetivo que um problema proposto meramente teórico. De acordo com VIOLA e BURIASCO, (2009, p.5) questões que oferecem somente o necessário para resolvê-las geralmente não dão oportunidade de criar uma estratégia mais pessoal, são engessadas, enquanto as questões contextualizadas oferecem oportunidade de resoluções e estratégias inesperadas. Resoluções e estratégias inesperadas são de valor para a investigação proposta.

O contexto pode também, quando inadequado, dificultar ou inviabilizar a resolução de um problema como observado em *A solução de problemas, aprender a resolver e resolver para aprender*,

[...] para compreender o contexto em que os fatos se inserem, são necessários certos conhecimentos sobre fatos do mundo. Um problema pode estar bem contextualizado para um aluno e mal contextualizado para outro. Um contexto pode inclusive inviabilizar a resolução de um problema para quem não partilha da bagagem cultural necessária para compreendê-lo (POZO E ECHEVERRÍA, 1998, p.54).

Observemos o seguinte problema, adaptado de *Círculos Matemáticos. A experiência Russa*:

O elevador de um prédio de 19 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao quinto andar partindo do décimo segundo?¹⁷

A sequência de posições para chegar no 7º andar partindo do 12º andar:

$$12^{\circ} \rightarrow 4^{\circ} \rightarrow 17^{\circ} \rightarrow 9^{\circ} \rightarrow 1^{\circ} \rightarrow 8^{\circ} \rightarrow 0 \text{ (térreo)} \rightarrow 13^{\circ} \rightarrow 5^{\circ}$$

Tal problema está contextualizado. O pano de fundo é uma situação em um elevador. Para um estudante que vive em uma região urbana, o problema estaria bem contextualizado, pois elevadores são dispositivos conhecidos pela grande maioria dos jovens da cidade grande. Mas para um jovem que vive no campo, onde não haja eletricidade, possivelmente tal problema seja mal contextualizado. A palavra “elevador” e a ideia de prédio podem ser desconhecidas, confundindo o estudante e até inviabilizando a resolução do problema (pois, em certo passo de determinada resolução, é necessário considerar o térreo que corresponderia ao andar 0, cuja existência é somente implícita e, por isso, facilmente ignorada por alguém que não conhece o modelo convencional de prédio).

É importante, também, que o contexto favoreça um equacionamento ou modelagem para que o problema seja relevante do ponto de vista do ensino da matemática. Em *Características dos problemas, que os alunos constroem a partir do enunciado de uma questão aberta de matemática* temos a seguinte constatação: “o importante é que o contexto da tarefa seja adequado para a matematização, de modo que os alunos sejam capazes de imaginar a

¹⁷DMITRI FOMIN, ILA ITENBERG e SERGEY GENKIN (2012, p.73).

situação para poder fazer uso de suas próprias experiências e conhecimentos”. (SANTOS e BURIASCO, 2009, p. 4).

Também é fundamental que o educando exponha seu modo de pensar ao tentar resolver os problemas propostos, pois é a partir desta exposição que as conclusões da pesquisa são obtidas. Em *Na vida dez, na escola zero*, é observada forte associação entre o êxito na resolução de problemas com o fato deste ser contextualizado (TEREZINHA CARRAHER, DAVID CARRAHER e ANALÚCIA SCHILIMAN, p. 38). Essa associação sugerida é significativa, pois, se o educando tem sucesso na resolução de um problema, então provavelmente compreendeu o enunciado e fez uso de estratégias para resolvê-lo e, por isso, teve provavelmente chance de registrar a maneira como pensou. No mesmo livro, é observado que em problemas contextualizados (em contexto familiar ao indivíduo que tenta resolver o problema) não são frequentes a ocorrência de resultados absurdos ou nitidamente divergentes do resultado esperado, ou seja, mesmo quando o indivíduo não obtém o resultado correto, o resultado é plausível e isso não ocorre com a mesma frequência nas resoluções de problemas escolares (TEREZINHA CARRAHER, DAVID CARRAHER e ANALÚCIA SCHILIMAN, p. 63), o que sugere que o educando verifica com mais frequência ou competência a solução obtida quando o problema é contextualizado. Tal fato pode sugerir também que o educando tenta lidar com os problemas contextualizados com mais comprometimento do que com problemas escolares e esse comprometimento é essencial à esta pesquisa.

Assim, considera-se que a contextualização do problema não traz garantias sobre sua compreensão, podendo até inviabilizá-la, ao passo que uma contextualização adequada pode favorecer os processos de resolução do estudante. Portanto, caso os problemas sejam contextualizados com certa competência e aplicados a jovens que partilham de determinada bagagem cultural comum, pode-se ter benefícios em relação ao entendimento do problema e despertar um maior interesse em sua resolução. Com isso em mente, optou-se por usar problemas contextualizados na presente investigação.

Outro cuidado na escolha dos problemas é o fato destes serem passíveis de variadas formas de resolução. As chamadas variáveis de estrutura estão relacionadas à questão da(s)

heurística(s) compatível/compatíveis com o problema, sendo essas variáveis de interesse para a escolha dos problemas.

3.2.4 Variáveis de estrutura

As variáveis de estrutura são de definição mais complicadas que as variáveis de sintaxe, conteúdo e contexto. Em *The classification of problem-solving research variables* temos que “[...]as variáveis de conteúdo e de sintaxe requerem pouco ou nenhum processamento do enunciado do problema, o contrário do que ocorre com as variáveis de estrutura[...] o termo estrutura refere-se ao arranjo e relações entre todos os elementos do problema[...]” (KULM, 1979. p. 18).

Os tipos de relações entre os elementos dos problemas influenciam a escolha das abordagens adequadas. Por exemplo, um problema de lógica, em que os elementos do problema podem ser considerados as proposições que compõem o enunciado, geralmente é especialmente passível de resolução por meio de redução ao absurdo¹⁸.

Em *Variáveis de tarefa na resolução de problemas* é enunciado:

[...] é possível obter uma estrutura (que não é necessariamente única) bem definida de um problema atendendo que um problema converta-se num conjunto bem definido de regras e procedimentos operacionais, explícitas no próprio problema ou percebidas a partir do enquadramento matemático...”(KULM¹⁹ apud Leitão, Fernandes e Cabrita, 1982, p.111).

¹⁸ Veja por exemplo a resolução do problema 11 que consta na página 84.

¹⁹ KULM, 1979.

Por exemplo, considerando o problema da Torre de Hanoi²⁰:

Existem três estacas idênticas e cinco discos, cada um com um diâmetro diferente dos demais, mas todos tendo um furo no centro, largo o bastante para que possa ser atravessado por uma estaca. No começo, os cinco discos estão na mesma estaca, o maior na base, o segundo maior em cima do primeiro, o terceiro maior em cima do segundo, e assim por diante, de maneira que estão em ordem de maior para menor (observando de baixo para cima). É permitido que você mova um disco por vez, de uma estaca para outra, com a restrição de que o maior disco nunca possa ser posto sobre um disco menor. A meta é transferir os 5 discos para uma das duas outras estacas (sem nunca permitir que um disco maior fique sobre um disco menor).

O conjunto de regras e procedimentos operacionais mencionados no fragmento anterior pode ser a movimentação de um disco que não tem discos por cima para uma estaca em que não haja um disco menor posto.

Figura 3 – sobre estrutura do problema Torre de Hanoi.

Na figura anterior, o conjunto de regras e procedimentos operacionais permitem a movimentação do disco 1 para a estaca A, para a estaca C ou a movimentação do disco 2 para a estaca A e nenhum outro movimento é permitido. As possíveis configurações que podem ser obtidas estão associadas à estrutura do problema.

²⁰Tal problema foi adaptado de um quebra-cabeça que inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883 e o enunciado foi adaptado de How to Solve Problems de WICKELGREN, 1974).

Em *Structure variables in problem solving* é enunciado que:

Structure variables depend for their definition on the particular representation of problem within which the analysis takes place. For example, a structure variable which has been studied fairly extensively is the "number of steps" required in solving a problem. However, this number will obviously depend upon the method of problem solution which is selected as the standard. In addition, it will depend on what one chooses to call a "step" to pass from the equation $2x + 3x = 10$ to the equation $5x = 10$ might be thought to require only one step; or it might be thought to require two steps $[2x + 3x = 10, (2 + 3)x = 10, 5x = 10]$; or even more steps $[2x + 3x = 10, 2x + 3x = (2 + 3)x, (2 + 3)x = 10, 2 + 3 = 5, 5x = 10]$ [...] (GODIN, 1979, p. 102).

Desta forma, a despeito da objetividade do problema, o que é chamado de passo depende do entendimento dos interlocutores, isto é, deve ser previamente convencionado.

No mesmo texto, é mencionado que as variáveis de estrutura dependem da particular definição da representação do problema, dentro da qual uma análise toma lugar:

Certainly different problem solvers may formulate different representations from the same problem statement. There may be a wide variety of different and creative approaches to gaining insight into a problem, including reference to related but distinct problems. Rules of procedure may be open to interpretation. Nevertheless, it is the viewpoint of this chapter that, given a set of well-defined rules or operational procedures, a well-defined structure will be generated that is subject to formal analysis. Furthermore, a mathematical problem translates into just such a system of rules of procedure, some times stated explicitly in the problem and sometimes to be understood from the mathematical framework within which the problem is

presented. This is the sense in which we interpret problem structure variables as task variables[...](GODIN, 1979, p. 103).

Portanto, embora haja alguma subjetividade na determinação da estrutura do problema, uma vez estabelecida, esta é objetiva e dá lugar para abordagem mais formal.

Para que seja possível esclarecer melhor o tema, será discutida uma variável de estrutura específica.

Fixada uma abordagem do problema, pode-se representar tanto seu estado inicial, exposto no seu enunciado, como seu estado final, na qual o problema encontra-se inteiramente resolvido.

É considerada uma variável de estrutura do problema um conjunto de configurações que inclua a configuração inicial (dada pelo enunciado), a configuração meta (que é solicitada pelo enunciado, o estado final) e eventualmente configurações intermediárias, assim como um conjunto de regras que permitam passar de uma configuração para outra. Tal variável é chamada de estado espaço do problema.

Em *Variáveis de tarefa na resolução de problemas*, existe uma definição de estado espaço (citando Nilson²¹):

[...]um conjunto de configurações distinguíveis de um problema, chamados estados, juntos com passos permitidos de um estado para outro, chamados movimentos. Um estado particular é designado como estado inicial, e um conjunto contendo um ou mais estados quais podem ser encontrados do estado inicial por sucessivos movimentos são chamados de estados meta[...] (NILSON apud Leitão, Fernandes e Cabrita, 1994, p. 111) .

No problema da Torre de Hanoi, o estado inicial seria a configuração inicial:

²¹ NILSON, 1980.

Figura 4- Estado inicial de um estado espaço associado à Torre de Hanoi.

E o estado meta seria a configuração que o problema solicita:

Figura 5- Estado meta de um estado espaço associado à Torre de Hanoi.

Um estado espaço do problema (um conjunto de configurações possíveis) pode ser considerado o estado inicial, estado meta e todos os estados intermediários que podem ser obtidos por meio de movimentos permitidos (explícitos no enunciado do problema).

A variável estado do problema pode originar subvariáveis como número de passos em algum caminho que leva à resolução, natureza das operações permitidas entre outras.

Segue outro exemplo de estado espaço de um problema.

Estás junto a um rio com dois baldes. O primeiro leva exatamente três litros de água, o segundo, precisamente cinco litros e os baldes não estão marcados para medir de outra

forma. Enchendo ou esvaziando os baldes, ou transferindo água de um para o outro, encontra-se uma forma de levar exatamente quatro litros de água do rio.²²

Um estado pode ser representado por um par (não ordenado) de números designando o número de litros em cada um dos baldes. O par (0,0) traduzirá então o estado inicial. O estado objetivo é qualquer estado da forma (x,4) ou (4,x) sendo x um número natural.

O estado espaço do problema poderá ter a seguinte configuração:

²²(LEITÃO, FERNANDES E CABRITA, 1994, p. 111).

Figura 1. Estado-espço do problema dos dois baldes.

Figura 6 – Esquema das ações possíveis relacionadas ao *estado espaço* do problema dos baldes.

(LEITÃO, FERNANDES E CABRITA, 1994, p. 112)

Observa-se na figura o estado inicial, diversos estados intermediários obtidos por ações permitidas (enchimento de um balde de 3 litros, de um de 5 litros, esvaziamento e transferência do conteúdo de um balde para outro) e o estado meta (um dos baldes preenchido com exatamente 4 litros).

Para sair do estado inicial e chegar aos estados meta (à solução do problema) é plausível que por vezes é necessária a elaboração de uma estratégia ou a execução de um

procedimento heurístico que é adequado à estrutura do problema. Em *Heuristic processes as task variables*, processos heurísticos, embora normalmente vistos como dependentes dos sujeitos, também podem ser relacionados aos problemas, à sua estrutura (MCCLINTOCK, 1979, 171).

Wickengren (1974) trata o tema da relação entre características do problema e os processos heurísticos evocados em sua solução. Dessa forma, pressupõe que determinadas características do problema evocam (de alguma maneira) heurísticas em sua solução. Assim, existiria correlação entre o sucesso na resolução de certo problema e o emprego de certas heurísticas.

O autor afirma, por exemplo, que a heurística de trabalhando para trás é bastante profícua na resolução de problemas nos quais a solução é única e as operações envolvidas na solução são reversíveis, ou as relações entre determinadas sentenças são de equivalência ou de implicação em certo sentido²³ (WICKELGREN, 1974, p. 6).

Em *How to solve problems, elements of a theory of problem solving*, de Wickelgren, que pretende fornecer elementos para o ensino de certas heurísticas, ocorrem conjuntos de problemas agrupados quanto aos métodos heurísticos que o autor deseja ensinar. Tais problemas teriam soluções usuais acessíveis principalmente através da heurística que intitula o trecho à que o problema pertence.

É pontuado em *Variáveis de tarefa na resolução de problemas*:

Raciocínio heurístico e os comportamentos que ele reflete geralmente são considerados características do resolvidor. No entanto, os processos heurísticos, para além de se relacionarem com o resolvidor, também se podem considerar como inerentes ao problema de matemática e variam de

²³Objetivo $\leftarrow$ Condições n $\leftarrow$ condições n-1 $\leftarrow$ condições n-2 $\leftarrow$... $\leftarrow$ condições 1 (facilmente obtida a partir do enunciado).

problema para problema[...] (LEITÃO, FERNANDES e CABRITA, 1982, p.123).

Assim, as características dos problemas interferem na escolha das heurísticas aplicadas em sua resolução. Ou seja, é considerado aceitável que um problema, solúvel de mais de uma forma, possa favorecer heurísticas diferentes para duas soluções diferentes.

Segue um caso real que envolve um problema que permite ao menos duas abordagens distintas. Tal problema foi exposto no ano de 2015 aos alunos do primeiro colegial da escola estadual Virgília Rodrigues Alves de Carvalho Pinto, da região oeste da cidade de São Paulo (turma para a qual o pesquisador leciona Matemática):

Os Piratas de Aquém encontraram uma arca com moedas de ouro e repartiram entre si, em partes iguais, essas moedas. Se houvesse menos quatro piratas, cada pirata receberia mais dez moedas de ouro. No entanto, se houvesse menos 50 moedas na arca, cada pirata receberia menos cinco moedas de ouro. Quantas moedas havia inicialmente na arca?²⁴

Após permitir que a turma pensasse no problema por alguns minutos e verificar que ninguém se sentia confortável em apresentar uma possível solução, o professor decide expor uma resolução:

Seja P o número de piratas e M o número de moedas inicialmente na arca.

Da última parte do enunciado temos que 50 moedas a menos representa 5 moedas a menos para cada pirata, equacionando: $50/P = 5$, daí, $P = 10$.

²⁴Canguru Matemático Sem Fronteira 2014, categoria Cadete, problema 19.

Equacionando a primeira parte do enunciado (já considerando o número de piratas nesse equacionamento): “[...]Se houvesse menos quatro piratas, cada pirata receberia mais dez moedas de ouro.”

$$M/(10-4) = M/10 + 10. \text{ Resolvendo esta equação obtemos } M = 150.$$

Breve análise da solução apresentada pelo professor: Sem tentar manipular o problema concreto, foram extraídas as equações que o problema trazia implícitas e estas foram resolvidas. Desse modo, um problema concreto foi convertido num exercício abstrato para poder ser resolvido.

Pode-se considerar que, ao ler o enunciado, foi reconhecido imediatamente que o problema era semelhante a tantos outros que o professor já havia resolvido, por meio do equacionamento do enunciado, ou seja, pela extração de algumas das equações implícitas no enunciado. Após obter as equações mencionadas, restava resolvê-las, o que não passava de mero exercício já que se tratava de uma situação bem conhecida (sistema de equações lineares 2×2) para o professor. Em suma, é possível abordar tal solução com o reconhecimento de problemas correlatos, sendo a 8ª heurística na lista que consta em LUCAS, BRANCA, GOLDEMBERG, KANTOWSKI, KELLOG e SMITH, 1979, p. 360, e que consiste em considerar algum problema B que seja semelhante à A em determinado aspecto e que tenha sua resolução conhecida, tirando assim algum proveito da resolução de B no sentido de resolver A.

Extraír equações do enunciado é uma prática eficiente e, por vezes, a única viável, dependendo do quão extenso seja o problema, mas eventualmente de difícil execução para alunos do primeiro colegial, uma vez que sua solução exige que o resolvidor perceba que o problema pertence à classe de problemas que carrega determinadas equações e depois obtenha tais equações (que também não é fácil para quem não resolveu muitos problemas parecidos). Em seguida, faz-se necessário resolver o sistema de equações obtidas.

Dessa forma, o método acima exige do sujeito a classificação do problema como convertível em sistema de equações, além da extração adequada dessas equações por meio de

habilidade adquirida no passo anterior. Exige, portanto, uma perícia razoável. Haveria uma maneira mais factível de resolver este problema para a melhor compreensão dos alunos?

Assim que foi apresentado o número de moedas que havia na arca, uma aluna disse ter chegado no mesmo resultado através de um raciocínio totalmente diferente. Quando questionada sobre o modo como havia pensado para resolver a questão, a aluna comunicou verbalmente sua solução(embora explicada verbalmente, o texto abaixo não é uma transcrição da falada estudante, mas somente a expressão de seu conteúdo):

Resolução da aluna:

Da última parte do problema, temos que 50 moedas distribuídas entre os piratas resultam em 5 moedas para cada um e então são 10 piratas.

Da primeira parte, temos que 4 piratas a menos resultou em dez moedas a mais para o restante dos piratas e, portanto, 60 moedas a mais, já que restavam 6 piratas. Assim, os 4 piratas tinham no início 60 moedas, ou seja, 15 moedas cada um. Eram 10 piratas no começo e então a arca continha 150 (10X15) moedas de ouro.

Breve análise da resolução da estudante (uma sequência plausível das operações mentais²⁵ feitas pela aluna):

Da última parte do enunciado, ela observou que o número de piratas devia ser 10.

Usando este dado, releu a primeira parte do enunciado (que diz que 4 piratas a menos resultam em 10 moedas a mais para cada pirata restante)e percebeu que os piratas a menos resultaram num acréscimo de 60 moedas (usando para isso o número de piratas restantes).

Relacionou esse novo dado com o número de piratas que desfalcaram o grupo e percebeu que cada pirata tinha que ter, originalmente, 15 moedas e, finalmente, relacionando este último dado com o número total de piratas, obteve a solução do problema.

²⁵ A definição deste termo consta na página 37 deste texto.

A aluna obtém um novo dado e tenta observar como tal dado se relaciona com as informações do problema. Dessa observação surge outro novo dado que é novamente confrontado com as informações do problema, obtendo com a repetição desse processo mais dados, até que por fim, obtém o que é pedido. É claro que não realiza esse processo mecanicamente, ou seja, após obter um dado, não o compara com os outros dados aleatoriamente, mas faz a comparação de dois dados que devem gerar outro importante dado. Se fez isso intuitivamente ou de outra forma, não foi possível alcançar. Em resumo, pode-se considerar tal solução como guiada pela decomposição e recombinação do problema que consta na lista de heurísticas do *Pequeno dicionário de heurísticas* (POLYA, 1975, p.41). Em tal resolução está embutida a heurística denominada problemas auxiliares,²⁶ que consta na mesma lista de heurísticas, já que o problema é decomposto em outros problemas: obtenção do número de piratas, do número de moedas que cada pirata receberia e, finalmente, obtenção do número total de moedas da arca.

A resolução da aluna contentou a turma mais que a solução do professor (tal fato foi visível, considerando a reação do grupo), talvez porque o raciocínio da estudante era acessível a todos, mais concreto e mais econômico no sentido de dispensar a mobilização de certos conteúdos, além de sugerir a competência de um membro da turma de resolver problemas e ainda dar aos estudantes o protagonismo em uma situação em sala de aula.

A situação descrita acima fornece um exemplo de duas heurísticas distintas aplicadas ao mesmo problema e também sugere a importância do protagonismo do estudante na resolução de problemas.

Voltando à investigação proposta, conclui-se que não seria benéfico para a pesquisa o fato de todos os problemas serem solúveis ou principalmente solúveis com somente um número muito pequeno de processos heurísticos e estratégias, pois os alunos poderiam não ter chance de mostrar muitos dos recursos de que dispõem. Portanto, os problemas que foram usados precisaram abranger uma determinada amplitude de operações mentais (ao menos os

²⁶ A definição deste termo consta na página 29 deste texto.

de maior interesse da pesquisa) quanto à sua solubilidade, além de permitirem o uso de heurísticas inesperadas. Em outras palavras, o conjunto de problemas usados deve ser passível de resolução por uma gama razoavelmente ampla de processos heurísticos e estratégias e é por isso que devemos controlar, em certa medida, algumas características do problema relacionadas às maneiras de resolução que ele permite ou favorece.

Retifica-se que não se pretende ter controle total das características do problema ou dos efeitos que estas causarão nos sujeitos que pretendem resolvê-los, já que tal tarefa parece demasiado difícil, senão impossível de ser executada. Segue um exemplo da dificuldade de ter pleno controle sobre os processos mentais que um problema pode desencadear.

Em *Solução de problemas, aprender a resolver e resolver para aprender*, existe uma citação de Mayer²⁷ em que são exibidos dois problemas que têm a mesma complexidade sintática, exige o conhecimento de operações semelhantes para suas soluções (variável de conteúdo), mesmo contexto, mas ainda assim apresentam níveis de dificuldades diferentes.

O problema:

Pedro tem 4 balões. Maria tem 5 balões a mais que Pedro. Quantos balões tem Maria?

É considerado mais difícil e tem índice de acerto menor que o seguinte problema:

Pedro tem 4 balões. Maria tem 5 balões. Quantos balões têm os dois juntos?

(MAYER apud Pozo e Echeverría, 1998, p. 55).

Conclui-se que diferenças muito sutis entre problemas podem acarretar diferenças grandes na abordagem por parte do estudante e isso evidencia o quão é difícil ter controle completo sobre os efeitos das variáveis de um enunciado no comportamento do estudante que tenta resolvê-lo.

²⁷ MAYER, 1983.

Considerando ainda que a solução do problema depende da relação que o sujeito com ele estabelece, o quadro se torna ainda mais complexo. Ainda em POZO e ECHEVERRÍA (1998, p. 54), os autores citam *Os processos cognitivos de Lúria*²⁸ para registrar que adultos com pouca escolaridade do Uzbequistão não conseguiam resolver problemas envolvendo distâncias entre algumas aldeias, se as distâncias dadas no problema fossem totalmente destoantes das distâncias reais entre elas. Ou seja, quando dados do problema contradizem dados que os resolvedores inexperientes têm em suas bagagens culturais, a solução do problema pode ser comprometida.

Não existe teoria que descreva com precisão a relação entre as variáveis de um problema (sintáticas, de conteúdo, contexto, etc.) e a compreensão do problema, as heurísticas que serão desencadeadas em sua solução, etc. Portanto, não pretendo que o controle destas variáveis acarrete consequências absolutamente determinadas ou totalmente previsíveis, mas apenas que tal controle aumente a chance de conseguir extrair do estudante informações sobre seu modo de pensar frente a determinados problemas.

Mesmo considerando a impossibilidade do total controle da relação entre as características dos problemas e o comportamento de quem tenta resolvê-los, a escolhados enunciados foi cuidadosa e foram consideradas cada aspecto de sua complexidade gramatical: a variável conteúdo (os problemas prescindem de conteúdo elaborado para suas resoluções), se os problemas estavam adequadamente contextualizados (somente o problema três não remete à um contexto fora da matemática) e também foi considerado se o conjunto de problemas permitiam o uso de um conjunto diversificado de heurísticas.

Estando a ocorrência de estratégias condicionada ao conjunto de problemas (MCCLINTOCK, 1979, 171), é relevante a apresentação de uma tabela com a sugestão de heurísticas passíveis de associação para facilitar a resolução dos problemas. A associação foi determinada no caso de o pesquisador vislumbrar uma solução para o problema

²⁸ LÚRIA, 1974.

por meio de determinada heurística, portanto, existe algum componente subjetivo nessa associação.

Heurística	Problemas nos quais podem ser empregadas as heurísticas.
Problemas auxiliares	Todos os problemas apresentados são passíveis de decomposição em subproblemas e, portanto, a heurística problemas auxiliares pode ser útil em qualquer um deles.
Indução	Problemas 3, 6 e 7
Redução ao absurdo	Problemas 1, 5, 6, 9 e 11
Trabalhando para trás	Problemas 6, 8 e 12
Tentativa e erro	Todos os problemas usados na pesquisa são passíveis de resolução por tentativa e erro.
Especialização	Problemas 1, 6, 7 e 9.
Variação do problema	Todos os problemas em que pode ser usada a especialização, pode ser usada a variação do problema, já que especialização é um caso particular de variação do problema. Os problemas mencionados nesta célula são passíveis de solução via variação do problema

	diferente de especialização. Problema 7.
Problema correlato	Todos os problemas usados na pesquisa são passíveis de solução por problemas correlatos.

Tabela 1 – Associação entre heurísticas e problemas.

Considerando a tabela acima, é possível afirmar que existe, ao menos em tese, a possibilidade do educando mobilizar algumas importantes heurísticas nas suas resoluções.

É importante considerar que uma tentativa de solução pode mostrar as heurísticas e operações mentais mesmo que a tentativa não alcance a solução adequada. Assim, mesmo que o aluno não seja capaz de resolver o problema, é possível que na tentativa de fazê-lo, forneça informações importantes quanto às operações mentais desencadeadas e, portanto, são aceitáveis problemas que, embora a pouca chance de serem resolvidos, dada a dificuldade que venham a oferecer, estimulem de alguma forma as tentativas do estudante.

Será justificada a escolha de cada um dos problemas selecionados e a justificativa acolherá algumas das variáveis tarefas tratadas em **GODIN, G. A., MCCLINTOCK, E, 1979.**

No próximo capítulo, apresentarei os problemas escolhidos para investigação, além de alguns detalhes sobre a razão da escolha e sobre o próprio problema.

4 Os Problemas

Exibirei problemas que foram usados na presente investigação (que foram apresentados aos alunos).

Antes da apresentação de cada enunciado, apresentarei a fonte de onde foi extraído o problema ou de onde foi retirado o problema que lhe serviu de inspiração, caso ele tenha sido

adaptado de algum outro enunciado. Após a apresentação de cada enunciado, existem comentários acerca do conteúdo matemático associado a uma resolução factível, sobre sua contextualização e sobre algumas das heurísticas que podem mobilizadas nessa resolução. A sintaxe será comentada somente quando apresentar características bastante relevantes, já que foram preferidos enunciados simples.

A maioria dos problemas selecionados foram submetidos à resolução de um conjunto de alunos secundaristas²⁹ para que fosse possível identificar eventuais maneiras de melhorar o problema no sentido de aumentar o potencial de extrair soluções passíveis e análises adequadas ao presente texto.

O problema abaixo foi inspirado em um problema que consta em *Círculos matemáticos A experiência russa*, da seção princípio da casa dos pombos:

- 1) Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?³⁰

O conteúdo presente em ao menos uma resolução deste problema é o princípio da casa dos pombos³¹. O princípio da casa dos pombos é tão intuitivo que parece estar

²⁹Estudantes que frequentaram a reposição de aulas perdidas na ocupação da escola estadual Virgília Rodrigues Alves Carvalho Pinto pelo movimento estudantil que pretendia impedir o fechamento de escolas em 2016, proposto pelo governo do estado e também barrar a chamada reorganização escolar, além de exigir uma CPI que investigasse o desvio de recursos destinados à compra de merenda.

³⁰DMITRI FOMIN, ILIA ITENBERG e SERGEY GEKIN (2012, p.35). O problema original remete a extração de duas conchas de mesma cor e não de cinco conchas.

³¹O princípio da casa dos pombos não é o que se conhece na matemática como um princípio já que seu enunciado formal pode ser demonstrado.

incorporado ao senso comum. Portanto, considera-se que a bagagem propedêutica necessária para resolver o problema não é um obstáculo relevante.

Em relação à contextualização, a situação apresentada no enunciado parece simples e facilmente compreensível, já que não é identificado nenhum termo ou ideia que possa parecer estranha aos sujeitos a que foram apresentados os problemas.

Uma heurística compatível com o problema é a redução ao absurdo, como é possível observar adiante.

Observe uma solução:

Se consideramos o número de conchas retiradas como sendo cinco, pode ocorrer de terem sido retiradas conchas de cinco cores distintas e então não ocorre o que é necessário garantir que ocorra, ou seja, conchas de cores repetidas. Obviamente para os números de um até quatro a situação é totalmente análoga.

Considerando que sejam retiradas seis conchas, necessariamente ocorrerão duas conchas de cores repetidas, caso contrário, existiriam seis conchas de cores diferentes, o que contrariaria o fato explícito no enunciado, a saber, de existirem somente cinco cores que se distribuem entre as conchas.

O problema foi escolhido por conta da acessibilidade do enunciado e a partir do fato de que ao menos uma de suas resoluções foi obtida com redução ao absurdo.

O seguinte problema foi extraído de um artigo chamado *On teaching problem solving in school mathematics*, usado no programa de cooperação Finlândia-Chile. Trata-se de um problema considerado aberto³².

³²Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas[...] (PONTE, 2005, p. 7).

Segue o problema:

- 3) Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.³³

O conhecimento técnico envolvido na resolução do problema acima não é rebuscado. A bagagem propedêutica necessária em ao menos um conjunto de soluções é bastante singela, resume-se na identificação de relação de congruência entre duas figuras (não identificação formal, que remeteria aos casos de congruência em geometria euclidiana plana, mas somente uma identificação informal, já que o nível de rigor desejado é mínimo).

O problema não usa contextos fora da matemática já que não envolve qualquer pretexto que motive a divisão do quadrado e também, o enunciado não remete a qualquer situação potencialmente cotidiana.

É difícil imaginar a maneira que o estudante abordará o problema, considerando que ele é aberto e, portanto, deixa margem para interpretação (se o quadrado deve ser dividido por um segmento de reta, se pode ser dividido por qualquer espécie de curva) e a parte final (faça uma anotação de sua solução) é um tanto vaga.

Em ao menos uma das soluções, a heurística plausível de ser empregada é o uso de problema correlato³⁴ e a indução³⁵ (ou raciocínio indutivo).

Segue uma resolução:

Considerando que, ao tentar dividir um objeto em duas partes iguais, uma barra de chocolate, por exemplo, (problema correlato), geralmente o corte feito passa pelo centro do

³³(PEHKONEN, NAVERI, 2013, p. 16).

³⁴ O problema A é correlato ao problema B se é possível usar o resultado de A ou o método de resolução de resolução de A para auxiliar a resolução do problema B (POLYA, 1975, p.36).

³⁵ A definição de indução consta na página 33 deste texto.

objeto e a linha do corte é vertical ou horizontal, é intuitivo imaginar que se pode atingir a meta proposta no enunciado traçando um segmento horizontal ou vertical que passe pelo centro do quadrado. As divisões que envolvem as diagonais do quadrado são tão próximas das duas anteriores, que elas devem ocorrer com certa frequência. Observando essas quatro divisões, é possível que se perceba que todas as linhas divisoras passam pelo centro do quadrado, o que levaria à desconfiança de que qualquer reta que passe pelo centro do quadrado divide-o em duas peças idênticas (indução). Tal proposição é válida e, portanto, existem infinitas maneiras de dividir o quadrado em duas peças idênticas³⁶.

A seguinte figura complementa a linha de raciocínio apresentada acima:

Figura 7 – Quadrados divididos em duas peças idênticas.

Uma qualidade do problema 3 é a simplicidade de seu enunciado e de algumas abordagens possíveis. Outra é a quantidade de soluções possíveis (utilizando-se para as

³⁶O conjunto de maneiras de dividir o quadrado em duas peças idênticas é, diga-se de passagem, não enumerável já que qualquer reta que passe pelo centro do quadrado resulta na divisão desejada e existe uma reta nessas condições para cada número no intervalo $[0 ; 360[$.

divisões do quadrado segmentos de retas, linhas curvas e composições de linhas retilíneas e não retilíneas. Tais características devem permitir certa liberdade de abordagem ao problema e tal possibilidade levou à sua escolha.

Esse problema, ao ser submetido ao grupo de controle, mostrou-se potencialmente útil, já que permitiu a identificação de certas operações mentais. Houve uma aluna que, após dividir o quadrado com segmento horizontal, vertical e diagonal, mencionou que ocorreu a ideia de “girar a diagonal” para obter outras possíveis soluções, o que indica que a estudante esteve bastante perto de perceber a infinidade de possibilidades de divisão. Considerando que ela pensou em “girar a diagonal” após ter recorrido sucessivamente a quatro divisões através de segmentos que podem ser considerados diagonais rotacionadas em torno do centro do quadrado, é possível inferir que houve o uso da heurística indução.

Seguem as divisões da estudante na ordem em que ocorrem em seu manuscrito e a transcrição de um dos comentários.

Figura 8 – Representação das soluções da estudante.

“Logo depois pensei em girar a linha da diagonal e”

Figura 9 – Representação de uma quinta solução apresentada pela estudante.

Espera-se que o problema possibilite a observação de processos mentais interessantes.

O próximo problema foi extraído de *Elements of a theory of problems and problems solving*.

- 5) Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?³⁷

O conhecimento de conteúdos necessários para sua resolução é bastante trivial: soma e subtração de números naturais. Também é necessário saber que 1 hora é composta por 60 minutos. Os obstáculos mais contundentes do problema são a compreensão do enunciado (que é amigável) e a elaboração de uma estratégia adequada para sua solução.

Considera-se a contextualização adequada, já que o deslocamento rotineiro de casa para outro lugar e depois o deslocamento de volta e seus detalhes (como tempo gasto) fazem parte do cotidiano dos estudantes em questão.

Uma das heurísticas compatíveis com o problema são problemas auxiliares, como se observa na solução abaixo:

Se ida e volta de bicicleta toma 30 minutos, então o trajeto de bicicleta deve tomar 15 minutos (determinar o tempo de trajeto de bicicleta ou a pé é usar a heurística problema auxiliar).

³⁷ WICKELGREN, 1974, p. 104).

Portanto, o caminho a pé deve tomar o tempo que completa 1 hora, considerando que já foram gastos 15 minutos. Ou seja, o trajeto a pé deve tomar 45 min.

Logo, ida e volta a pé deve tomar $2 \times 45 \text{ min.} = 90 \text{ min} = 1\text{h}30\text{min.}$

O próximo problema também consta em *Elements of a theory of problems and problems solving*.

- 6) Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos. Como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?³⁸

O enunciado anterior não exige qualquer bagagem propedêutica, embora seja necessária para sua solução uma leitura atenta do problema, além de bastante atenção.

O problema se insere num contexto adequado, já que é uma situação facilmente imaginável (travessia de um rio).

O problema está na seção do livro que trata de ensino da heurística problemas auxiliares, mas também existe em ao menos uma solução a presença das heurísticas tentativa e erro, indução e redução ao absurdo.

Segue uma solução.

Ao imaginar possíveis ações para a travessia (tentativa e erro), descarta-se imediatamente o ato de atravessar um homem ou um menino, caso contrário, a segunda ação teria de ser a de atravessar de volta o indivíduo que acabou de ser transportado e isso levaria à situação inicial.

O que resta é atravessar dois meninos na primeira ação. Para não voltar à situação inicial, a segunda ação deve consistir na travessia de um dos meninos de volta.

³⁸ WICKELGREN, 1974, p. 98.

Das duas ações possíveis nesta altura, atravessar um menino ou um homem para a margem oposta, a única que não acarretaria retrocesso para a situação anterior seria a de atravessar um homem e a próxima ação teria de ser a de atravessar o menino de volta para a margem original (redução ao absurdo foi usada várias vezes nesta descrição).

A seguinte figura representa as ações realizadas até aqui:

Figura 11 – Situação inicial do problema 6.

Figura 12 – Situação do problema 6 após 1º ação.

Figura 13 – Situação do problema 6 após 2º ação.

Figura 14 – Situação do problema 6 após 3º ação.

Figura 15 – Situação do problema 6 após 4º ação.

A situação obtida até aqui é a seguinte: um homem do outro lado do rio e o restante do grupo e o bote na margem original. Foram necessárias quatro travessias para atingir tal configuração.

A repetição do processo descrito acima viabiliza a travessia de todos os homens e com mais uma travessia, os dois meninos também estarão do outro lado do rio.

O próximo problema foi adaptado do banco de questões OBMEP 2014.

- 7) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).³⁹

O problema anterior não exige qualquer conteúdo matemático mais elaborado. Os estudantes do ensino médio têm conhecimento propedêutico suficiente para resolver o problema. A resolução do problema exige somente que o estudante conheça soma de naturais (uma solução rigorosa exigiria, possivelmente, a aplicação do Princípio de Indução Finita, mas o rigor não é fundamental neste caso). As dificuldades para resolução do problema residem na compreensão do problema e na elaboração de estratégia que oriente a resolução.

O contexto do problema é adequado já que remete à uma situação familiar para grande maioria das pessoas ou, no mínimo, facilmente imaginável.

Na solução que será apresentada, as heurísticas usadas são especialização⁴⁰ e indução.

Uma solução:

³⁹ Banco de questões OBMEP 2014, p. 57.

⁴⁰ A definição de especialização consta na página 32 deste texto.

Considerando a dificuldade de determinar a relação entre o número de cumprimentos e o número de pessoas que se cumprimentam, pode ser útil imaginar o caso mais simples possível (especialização ⁴¹): Quantos cumprimentos ocorrem quando duas pessoas se cumprimentam? Um. E quando três pessoas se cumprimentam? Basta imaginar que uma terceira pessoa se junta ao grupo de duas pessoas (é intuitivo que o número de cumprimentos não muda se as pessoas se encontram simultaneamente ou juntam-se aos poucos). O recém-chegado cumprimenta cada um dos dois que já haviam se cumprimentado e, portanto, ocorrem mais dois cumprimentos. Ocorreram até agora $1 + 2$ cumprimentos. Imagine que uma quarta pessoa encontra com o grupo. Tal sujeito cumprimentará os outros três indivíduos e então ocorrem mais três cumprimentos. Temos então $1 + 2 + 3$ cumprimentos.

Uma tabela pode deixar mais claro o que está ocorrendo:

Tabela de correspondência entre o número de pessoas e número de cumprimentos.

Número de pessoas	Número de cumprimentos
2	1
3	1+2
4	1+2+3
5	1+2+3+4

Tabela 2 – Ilustração de um processo de indução.

Raciocinando indutivamente, conclui-se que dez pessoas cumprimentam-se $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ vezes, ou seja, 45 vezes.

⁴¹ A definição de especialização consta na página 32.

É claro que para afirmar que para n pessoas ocorrem $1+2+3+\dots+n-2+n-1$ cumprimentos, a rigor deve ser apresentada uma demonstração do fato. A prova mais convencional seria baseada na aplicação do Princípio da Indução Finita. Mas o rigor matemático pode ser suprimido, considerando que não é exigida uma resolução absolutamente formal.

O próximo problema foi extraído de *Círculos matemáticos, a experiência russa* e já foi usado na página 7 do presente texto para exemplificar a heurística trabalhando para trás.

- 8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?⁴²

Não é necessário qualquer conhecimento propedêutico mais elaborado para resolver a questão anterior.

O problema é bem contextualizado, considerando que os sujeitos submetidos ao problema são jovens que têm familiaridade com edifícios e elevadores.

Uma solução do problema envolve a heurística trabalhando para trás. Outra solução possível e mais imediata é fazer a única sequência de movimentos permitidos a partir do décimo terceiro andar:

13°, 5°, 18°, 10° e assim por diante, até atingir o andar desejado.

O próximo problema é uma adaptação do problema 37 do Banco de questões OBMEP 2011.

⁴² FOMIN, ITENBERTG, GENKIN, 2012, p. 73.

- 9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.⁴³

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras, usando o mínimo de pesagens que conseguir.

A resolução do problema 9 não exige conhecimento matemático elaborado. A simples divisão de números pares por dois parece ser o único conhecimento matemático escolar necessário à solução.

Sua contextualização aparentemente é adequada, remete à uma situação concreta razoavelmente imaginável. Talvez os estudantes não estejam familiarizados com a balança de pratos e, por isso, foi inserida uma ilustração desta balança.

Uma solução possível envolve as heurísticas trabalhando para trás e tentativa e erro ou redução ao absurdo.

Uma solução:

⁴³ Banco de questões OBMEP 2011, p. 24.

Comparar o peso de dois conjuntos de doze moedas, pois imaginar o problema resolvido (trabalhando para trás), remete à situação em que se compara dois conjuntos de moedas, um dos quais inclui a moeda falsa. Ao iniciar comparando conjuntos com menos de doze moedas, um conjunto de mais de uma moeda (com um número ímpar de moedas) ficaria de fora, o que forçaria, eventualmente, mais duas pesagens, totalizando três pesagens para determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada. Tal conclusão pode ser tirada ao fazer algumas tentativas com conjuntos de menos de doze moedas (tentativa e erro), ou raciocinando por absurdo.

Se a balança equilibra (ao comparar dois conjuntos de doze moedas), conclui-se que a moeda falsa foi a que ficou de fora e basta comparar seu peso com qualquer das moedas envolvidas na primeira pesagem e, trivialmente, determinar se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada.

Se a balança desequilibra, é possível escolher qualquer dos conjuntos comparados (seja o mais leve), dividi-lo em dois conjuntos de seis moedas e compará-los. Se desequilibrar, então a moeda falsa é mais leve, se equilibrar, a moeda de peso diferente está no conjunto mais pesado e, portanto, é mais pesada.

Assim, com duas pesagens, é possível determinar se a moeda falsa é mais pesada ou mais leve.

O problema 11 foi extraído de *Círculos matemáticos, a experiência russa*.

11) Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?⁴⁴

⁴⁴DMITRI FOMIN, LLIAITENBERG e SERGEY GENKIN (2012, p.72).

Trata-se de uma questão de lógica elementar. Assim como a maioria dos enunciados de lógica construídos para leigos, o problema não exige o conhecimento de lógica formal. É necessária para sua solução apenas a compreensão da semântica do texto. Portanto, não exige uma bagagem propedêutica elaborada para ser resolvido.

A contextualização parece adequada. Mesmo quem não conhece a história em que se baseiam os nomes dos personagens do problema, a situação de julgamento é suficientemente difundida e seu conhecimento é de senso comum.

Em uma das possíveis soluções do problema é usada a heurística redução ao absurdo, aliás, tal heurística é especialmente compatível com a maioria dos problemas de lógica passíveis de exploração na educação básica.

Uma resolução:

Se o ladrão tivesse sido a Lebre de Março, esta teria dito a verdade e, então, não poderia acusar o Chapeleiro Maluco (redução ao absurdo).

Assim, a Lebre de Março não roubou os biscoitos.

Se a Lebre de Março não roubou os biscoitos então mentiu e, portanto, não pode ter sido o Chapeleiro Maluco o ladrão. Resta, então, o Rato Silvestre, que foi quem roubou os biscoitos (supondo que um dos três réus é culpado).

O seguinte enunciado foi adaptado de uma situação descrita em *Task variables in problem solving*.

12) Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As

garotas dizem que têm sete moedas no total, mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Obs: O sistema monetário brasileiro tem moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e de 1 real embora as moedas de 1 centavo não sejam usadas normalmente por valerem pouco.⁴⁵

A questão dispensa conceitos e conteúdos elaborados para sua resolução. É necessária a habilidade de representar determinados números naturais pela soma de alguns outros. Considera-se tal habilidade desenvolvida nos jovens para quem foram apresentados os problemas, já que é situação do dia a dia de quase todos lidar com pagamentos e trocos (seu contexto é, portanto, conhecido pela maioria das pessoas).

Entre algumas possíveis soluções, ocorre a heurística tentativa e erro e na solução expressa a seguir é usada a redução ao absurdo e a tentativa e erro.

Uma moeda de 1 real acarretaria mais sete moedas de 1 centavo ou duas de 1 centavo e uma de 5 centavos.

As duas situações violam as condições do enunciado. Assim, não pode ocorrer uma moeda de 1 real.

A ausência de moeda de 50 centavos (e de 1 real, já descartada no passo anterior) acarretaria duas, ou mais de duas, de 25 centavos, ou mais de cinco de 10 centavos, ou várias moedas de 5 centavos, etc.

Todas as situações onde não ocorrem moedas de 50 centavos violam imediatamente alguma condição.

Ocorre assim, ao menos, uma moeda de 50 centavos.

Duas de 50 violaria uma condição. Portanto, é necessário exatamente uma moeda de 50 centavos.

⁴⁵ GODIN e McCLINTOCK, 1979, p. 364.

Analogamente, a ausência de moeda de 25 centavos ou a presença de mais de uma moeda de 25 violaria ao menos uma condição.

Portanto, ocorre necessariamente uma moeda de 50, outra de 25.

Continuando por esse caminho obteria 50, 25, 10, 10, 10, 1 e 1 centavo.

Uma vez oferecidos os problemas aos alunos e obtido os dados sobre as resoluções, foi necessário escolher problemas que estimulassem o uso da heurística especialização para um aprofundamento sobre o comportamento dos alunos. Foram então usados mais três problemas que são os seguintes:

1E) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e o final do ano seguinte?⁴⁶

2E)) Num torneio de tênis, jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas necessárias para determinar o campeão, em função do número de jogadores?⁴⁷

3E) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois, três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?⁴⁸

⁴⁶Lhullier, 2010, carta 4, vermelha.

⁴⁷Lhullier, 2010, carta 1, laranja.

⁴⁸Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.2).

Os três problemas anteriores são passíveis de resolução por meio da heurística especializada.

Os problemas acima foram apresentados com intenção de obter informações sobre as atitudes dos alunos. Cabe ainda esclarecer quais técnicas foram empregadas para investigar a maneira que eles encontraram para tentar resolver os problemas apresentados.

5 Obtenção de dados

A investigação sobre como os alunos resolvem problemas é bastante recorrente nos anos 60, 70 e 80 nos Estados Unidos (FERNANDES, BORRALHO e AMARO, 1994, p. 39). Ainda assim, as dificuldades em relação à obtenção dos dados são muitas e latentes. O processo de resolução de problemas abarca muitos aspectos, é complexo e de difícil análise. Em Processos de resolução de um problema costuma-se observar o seguinte:

É também de notar, em geral, não há uma relação simples entre a resolução de um problema e os processos utilizados para a encontrar. O fato de, por exemplo, estarmos perante uma resolução sofisticada e/ou de grande elegância relativa a um dado problema, pouco ou nada nos diz acerca dos processos utilizados pelo resolvidor. (FERNANDES, BORRALHO e AMARO, 1994, p. 39)

Um exemplo concreto de problema metodológico que se enfrenta ao tentar analisar a resolução de um problema realizada por um estudante é que

[...] emergem quatro fenômenos potencialmente diferentes que importa considerar:

1. Aquilo que o aluno diz ou escreve.
2. Aquilo que o aluno quer significar ou está a pensar.
3. A forma como o investigador interpreta o que apreende ou percebe.

4. A forma como o investigador faz corresponder uma categoria (codificando ou atribuindo um símbolo) à interpretação que faz.

(FERNANDES, BORRALHO e AMARO, 1994, p. 42 apud LUCAS⁴⁹).

Em suma, é difícil garantir que aquilo que o aluno pensou corresponde ao que ele escreveu, ou se o que o investigador interpretou dos registros do aluno corresponde, ao menos em parte, ao que o aluno pensou, e se o que o pesquisador apresentou expressa bem o que compreendeu. Não obstante, aceita-se que com métodos adequados, cuidado e atenção é possível conseguir uma aproximação satisfatória de alguns aspectos da resolução de problemas praticada pelo educando.

Observe algumas técnicas utilizadas para obtenção de dados das resoluções dos alunos que depois são codificados e analisados:

Introspecção: Em resumo, essa técnica consiste em solicitar que o aluno relate seus processos mentais ao longo da resolução do problema. Essa técnica tem uma série de pontos delicados. Um deles é saber a natureza e extensão da interferência do fato do aluno relatar o que está pensando sobre a resolução.

Retrospecção: É solicitado que o aluno relate como pensou após resolver o problema. Uma das maiores dificuldades desse método é a dificuldade de o aluno relatar com precisão os processos de que se utilizou.

Pensar alto: É desejado que o aluno fale em voz alta o que está pensando. Tem a vantagem de não exigir que o aluno faça uma análise dos seus processos mentais, embora a fala possa inibir o pensamento e vice-versa, também, o pensamento pode dar-se de maneira mais rápida que a capacidade de relatá-lo e é possível que o estudante fique em silêncio exatamente nos momentos de maior atividade intelectual. (FERNANDES, BORRALHO e AMARO, 1994, p.44).

⁴⁹ LUCAS, 1980.

Nesta pesquisa foram adotados dois métodos simultaneamente. Uma variação da introspecção: foi solicitado ao aluno que registrasse com papel e caneta, com a maior riqueza de detalhes possível, sua resolução, durante a própria resolução e retrospectiva (foram gravadas as falas dos alunos sobre cada problema, quando os registros escritos eram julgados insuficientes ou quando o educando desejava fazer alguma pergunta ou comentário). Além desses métodos, o pesquisador acompanhou todas as resoluções e registrou qualquer fato que julgasse relevante durante as resoluções.

Foi escolhido o registro escrito, pois é razoável que grande parte dos educandos já houvesse adquirido o hábito de registrar no caderno suas resoluções ou de apoiar-se em registros ou figuras. Desejou-se evitar métodos que exigissem do educando atividades que não são usuais, pois seria difícil saber qual a interferência dessas práticas na resolução, quando o objetivo é saber a atitude do estudante no dia a dia. O registro de áudio foi incluído, pois alguns registros escritos poderiam ser insuficientes e muitas vezes o componente oral é mais significativo na resolução do problema. Soluções construídas a partir da verbalização são muito frequentes e a compreensão de ideias matemáticas estão associadas à oralidade (MACHADO, 1991, p. 107). Também foi considerado prudente coletar os dados de mais de uma maneira.

Os áudios estão identificados pelo nome do aluno, o número da questão e eventualmente um índice, no caso de mais de um áudio do mesmo aluno sobre o mesmo problema. Por exemplo, áudio Lucas p.9.2 refere-se ao 3º áudio de Lucas sobre o problema 9. Existe áudio Lucas p.9, áudio Lucas p.9.1 e áudio Lucas p.9.2.

No início das atividades na escola, houve uma situação importante em relação à escolha da ordem das questões apresentadas aos alunos. Eram escolhidas as questões que pareciam ter maior potencial de mobilizar os processos mentais dos educandos. Era usada a questão 12 que envolve troco para moedas, a questão 9 que envolve pesagens em balanças de dois pratos e a questão 7 que envolve o número de cumprimentos realizados por um grupo de dez pessoas, nessa ordem.

O fato é que nos primeiros experimentos as resoluções dos alunos eram pobres (não apresentavam os elementos heurísticos esperados e havia muito pouco sucesso nas tentativas dos educandos) o que era preocupante, já que era necessário que os alunos conseguissem pensar sobre os problemas e apresentar informações sobre como pensavam ao tentar resolvê-los.

Felizmente, poucos encontros após esse início problemático, foi decidido apresentar aos educandos os problemas em ordem crescente de dificuldade (a ordem de dificuldade foi estabelecida de maneira um tanto subjetiva, baseado na experiência do pesquisador em resolução de problemas e experiência docente, embora tenha havido algo um pouco mais objetivo nessa ordenação das questões: Como esses problemas são usados pelo autor nas salas onde leciona, havia a noção dos problemas que eram resolvidos adequadamente com maior e menor frequência.

Considerando tal ordenação, as questões foram apresentadas aos alunos na seguinte ordem (com algumas mudanças em alguns casos): Problema 1, problema 5, problema 8, problema 3, problema 11, problema 7, problema 9, problema 6 e problema 12. Os problemas 2, 4 e 10 não foram apresentados no texto, pois não foi possível aplicá-los por questões práticas, como falta de tempo e dificuldade em manter o estudante interessado em resolver os problemas.

Com o cuidado em relação à ordem dos problemas, a coleta de dados ficou muito mais proveitosa. No dia 09 de maio de 2016, quando foram adotadas as mudanças mencionadas, foram coletadas 10 resoluções de dois alunos com registros e áudios suficientes para realizar a análise desejada.

É notável que ao apresentar as questões mais fáceis primeiro (que em geral são resolvidas com eficácia), os estudantes parecem desenvolver a confiança necessária para enfrentar os problemas mais difíceis.

A escola foi visitada pelo pesquisador às segundas feiras, na maioria das vezes, um pouco antes das 10h40min. As 10h40min dois estudantes (dentre os que se voluntariaram para

participar da pesquisa) eram convidados a acompanhar o pesquisador até uma sala de aula vazia ou lugar adequado para que pudessem se concentrar nos problemas. Os estudantes sentavam-se um tanto distantes um do outro (para que o eventual diálogo do pesquisador com um dos estudantes não afetasse o processo de resolução do outro) e eram entregues folhas contendo o enunciado do problema e espaço para a resolução, problema por problema, a medida em que eram resolvidos. Os educandos liam o enunciado e tentavam resolver o problema proposto e registrar o que achavam pertinente. Em alguns momentos, o pesquisador se aproximava de um deles e perguntava como estava pensando e como andava a resolução. O estudante exprimia suas angústias, dúvidas, impasses, estratégias, enfim, tudo que desejavam. O pesquisador respondia às perguntas de maneira a evitar fornecer pistas sobre as estratégias e as heurísticas, mas dando eventualmente orientações sobre algum mal-entendido. Nem sempre foi possível evitar intervenções exageradas, inadequadas. Também eram feitas perguntas mais específicas sobre o que pensavam quando o diálogo gerava alguma dúvida considerada importante. O pesquisador gravava um áudio do diálogo toda vez que havia comunicação.

Quando o estudante considerava resolvida uma questão ou desistia de resolvê-la, era-lhe entregue outra folha, com o próximo problema e o processo descrito anteriormente se repetia até que soasse o sinal que indicava o fim da última aula (12h20min) ou até que a lista de problemas chegasse ao fim.

Os registros e análises das resoluções apresentadas pelos alunos estão no anexo.

Com base na análise sobre as resoluções, construí a seguinte síntese, presente no APENDICE A.

6 Resumo e conclusões sobre os dados coletados

Neste ponto, faz-se necessário avaliar quais heurísticas foram observadas no processo de resolução dos problemas apresentados, além de sintetizar os resultados observados.

Para tanto, são apresentadas abaixo algumas tabelas que resumem os resultados experimentais da pesquisa, expondo quais heurísticas ocorreram, com qual frequência e que trazem informações numéricas sobre algumas variáveis: o número de heurísticas observadas nos registros de cada aluno, a proporção de aproveitamento de cada aluno e outras. É problematizada a associação entre algumas das variáveis, embora não ocorra uma análise estatística dos dados, considerando que o número de alunos envolvidos na pesquisa não permite conclusões estatísticas confiáveis.

É importante ressaltar que os dados experimentais permitem conclusões ou inferências somente sobre o grupo de alunos que se submeteu à pesquisa e que essas conclusões estão associadas ao conjunto de problemas que foram usados na pesquisa. Outros estudantes ou outros problemas poderiam, em última instância, levar a conclusões diferentes. Os resultados dão pistas somente de um estágio de desenvolvimento em resolução dos alunos envolvidos e não trazem informações sobre a história desse desenvolvimento. Não obstante, as tendências observadas permitem a caracterização dos modos de resolução dos educandos envolvidos na pesquisa assim como a construção de hipóteses acerca de conjuntos maiores de estudantes.

Um dos objetivos da pesquisa é identificar o quanto possível quais heurísticas eram praticadas pelos estudantes.

Segue a tabela que informa o número de ocorrências de cada heurística observada.

Heurística	Ocorrências observadas
Problemas auxiliares	20
Indução	17

Redução ao absurdo	9
Trabalhando para trás	9
Tentativa e erro	6
Especialização	1
Variação do problema	1
Problema correlato	1

Tabela 3 – Heurísticas observadas e suas frequências.

É evidente que problemas diferentes poderiam fornecer números diferentes dos observados acima, no entanto, é possível concluir que as heurísticas observadas com maior frequência compõem o repertório dos estudantes avaliados e ainda é possível tecer inferências consistentes sobre as competências dos educandos em usar algumas heurísticas não observadas ou com baixa frequência.

A heurística mais frequente é problema auxiliar, todos os alunos usaram-na ao menos uma vez. Na verdade, tal heurística deve ter ocorrido tacitamente na maioria das resoluções, pois tal método compõe quase todas as outras heurísticas. Por exemplo, ao usar trabalhando para trás, o indivíduo imagina o problema resolvido e determina qual configuração ou conjunto de condições implica no problema resolvido. A determinação da configuração ou conjunto de condições é em si um problema auxiliar, na medida em que difere do problema original e auxilia na resolução deste. Na redução ao absurdo ocorre o mesmo: A pessoa que resolve o problema deve obter uma contradição a partir do fato que deseja negar e essa ação implica em uma resolução de um problema auxiliar. A especialização⁵⁰, a indução e todas as

⁵⁰ A definição de especialização consta na página 32.

outras heurísticas envolvem a resolução de problema auxiliar. Qualquer problema não trivial será necessariamente decomposto em outros mais simples para sua resolução. É por isso que problemas auxiliares é considerada compatível com todos os problemas na tabela 2.

A heurística indução (2º maior ocorrência) faz parte do conjunto de práticas de resolução conhecidas pelos educandos. Somente Lucas não lançou mão desta prática (explicitamente ao menos). Isso não significa que usam essa ferramenta com desenvoltura ou adequadamente, mas quer dizer que não a desconhecem. É difícil saber se desenvolveram habilidade de aplicação do pensamento indutivo na escola ou fora dela. É certo que o pensamento indutivo está presente no repertório dos educandos, ao menos em germe. Isso sugere a possibilidade do desenvolvimento do pensamento indutivo mais rigoroso, formal.

A redução ao absurdo foi praticada explicitamente por cinco dos nove educandos, mas possivelmente foi praticada por mais alunos, já que é uma heurística que pode ocorrer sem ficar evidente nos registros. Sendo um método tão usado na argumentação cotidiana, muito provavelmente a maior parte dos educandos o conhece, mesmo que seu uso não esteja evidente nos registros. Esta heurística usada de maneira intuitiva pode se converter em um método rigoroso ou pode ser ponto de partida para estudar a lógica proposicional tradicional.

A heurística trabalhando para trás também é recorrente entre as práticas dos estudantes. Pelo menos sete dos nove alunos pesquisados usaram-na de maneira observável. Assim, tal método pertence ao repertório da maioria dos estudantes investigados. Não é possível determinar até que ponto são capazes de usar trabalhando para trás. É uma prática bastante útil, amplamente aplicável e segundo WICKELGREN, 1974, p. 6, especialmente aplicável em problemas de determinação e o desenvolvimento da competência do uso dessa prática deve colaborar com a competência em resolução de problemas.

A tentativa e erro também foi observada nove vezes, sendo usada por ao menos seis alunos. Também é uma prática bastante difundida, presente no repertório de todo educando. Tentativa e erro pode ser usado de maneira mais ou menos sofisticada, mais ou menos organizada, associada a outras heurísticas mais elaboradas. Tentativa e erro também é um

método que pode ocorrer com frequência sem transparecer. Não foi avaliado a maneira que usaram tal método, somente constatado seu uso.

A heurística problema correlato também é geralmente aplicável de maneira implícita, pois ao lembrar de um problema cujo método é útil para resolver o que é desejado, aplica-se o método e o registro desse processo mental não é significativa ao processo de resolução e, assim, o uso do problema correlato não tem razão de ser mencionado nos registros do aluno. Embora tenha sido observada somente uma vez, provavelmente ocorreu mais vezes.

A especialização ocorreu explicitamente apenas uma vez. Quando usada, esta heurística tende a aparecer nos registros, pois, após resolver problemas mais específicos que o problema central, é importante refletir sobre os mecanismos presentes na resolução ou na solução desse problema específico (a heurística especialização consiste, basicamente, na observação de resoluções ou soluções de problemas semelhantes ao problema original, eventualmente mais simples para, a partir dessas resoluções ou soluções, obter pistas relacionadas ao problema central). A falta de registros sobre o uso desse método permite admitir, com razoável segurança, que de fato não tenha sido usado pela maioria dos alunos. A não utilização dessa ferramenta remete a duas possíveis explicações: não usaram porque não tiveram a oportunidade e, portanto, o conjunto de problemas não era adequado ao uso dessa heurística ou essa heurística não compõe o repertório dos educandos investigados (também é possível uma combinação desses fatores).

A hipótese de que não haviam problemas adequados ao uso de especialização é questionável, pois é possível vislumbrar abordagens usando especialização em 4 problemas dos 9 apresentados: o problema 9⁵¹ é solúvel via tal heurística, embora não tenha sido resolvido por qualquer dos alunos: considerar, em vez de 25 moedas, um número significativamente menor, seguramente daria pistas sobre um caminho para alguma resolução.

⁵¹ O problema 9 consta na página 85 e é sobre a determinação de uma moeda falsa com uso de uma balança de dois pratos.

O problema 1⁵² também é adequado à especificação: considerar um número menor de conchas poderia ser útil e, no entanto, não foi resolvido adequadamente por dois estudantes. Os problemas 6 e 7⁵³ também são compatíveis com a especificação). Portanto, é muito plausível que os alunos não estejam familiarizados com a especialização, uma heurística importante e aplicável a uma variedade significativa de problemas.

Para fortalecer ou refutar a hipótese de que parte significativa dos estudantes não são capazes de usar a heurística especialização ou resistem ao seu uso, foram escolhidos 3 problemas⁵⁴ especialmente solúveis por especialização e houve a intenção de apresentar estes problemas ao conjunto de alunos que participou da pesquisa. Assim, no dia 15 de agosto de 2017, o pesquisador voltou à escola, mas não encontrou os alunos envolvidos na pesquisa, pois a turma a qual a maioria pertencia foi dissolvida (a secretaria de educação de São Paulo mantém um número mínimo de alunos por sala para mitigar gastos) e os outros alunos não foram localizados. Então, o conjunto de problemas foi apresentado a 9 alunos do 3º colegial C da mesma escola. Estes alunos se voluntariaram para participar da pesquisa.

Entre as 27 resoluções (que constam no APENDICE A) foi possível observar somente 4 vezes a aplicação de especialização, sendo usada por somente 3 alunas entre os 9 estudantes que tentaram resolver o novo conjunto de problemas.

Nota-se que foi usada especialização 4 vezes mais que no 1º conjunto de resoluções que, por sua vez, é mais de duas vezes maior que o segundo conjunto (72 resoluções no primeiro conjunto e 27 resoluções no primeiro conjunto). Isto significa que a densidade⁵⁵ de

⁵² O problema 1 consta na página 71 e é sobre um saco de conchas coloridas.

⁵³ Os problemas 6 e 7 constam nas páginas 77 e 80 respectivamente e são sobre a travessia de um rio e sobre o número de cumprimentos ocorridos em certa situação, respectivamente.

⁵⁴ Constam na página 89 deste texto.

⁵⁵ Densidade de ocorrências de especialização = ocorrências de especialização/número de resoluções apresentadas.

ocorrências de especialização foi aproximadamente 11 vezes maior no segundo conjunto de problemas que a densidade de ocorrência de especialização no primeiro conjunto, o que significa que esse método não é inteiramente desconhecido por uma parte significativa dos alunos que fizeram o segundo conjunto de problemas (um terço destes).

Não obstante, considerando que todos os três problemas estimulavam o uso de especialização e eram passíveis de resolução por esse método e que somente duas das 27 resoluções estavam corretas, é possível concluir que a maioria das pessoas do 2º grupo de alunos também não usa a heurística especialização e as que usaram (três alunas) não usaram com desenvoltura. Ou seja, especialização ocorre escassa e timidamente.

A hipótese de que um número significativo de estudantes das escolas públicas paulistas não possui familiaridade com a especialização pode ser confirmada ou refutada mediante pesquisa estatística que forneça evidência científica disto ou daquilo. Também é interessante investigar a influência da eventual incorporação desta ferramenta ao repertório do educando sobre sua competência em resolução de problemas.

Sobre a heurística variação do problema⁵⁶, pode ser considerado quase tudo que foi sobre especialização do problema e, portanto, que os alunos não têm familiaridade com essa heurística.

Tal ferramenta é semelhante à especialização, no entanto, a variação do problema é mais sofisticada que especialização, pois, enquanto na especialização ocorre a fixação de uma variável, restrição das condições dadas no enunciado ou a troca de uma constante do problema por outra, na variação do problema uma condicionante é alterada, tornando o problema mais geral ou mais particular. A condicionante alterada pode ser de qualquer natureza, inclusive numérica. Isso faz da variação da especialização um caso particular de variação do problema. Assim, parece razoável que um aluno aprenda antes a especialização para depois se familiarizar com a variação do problema.

⁵⁶ A definição de variação do problema consta na página 21.

Outra indagação que surge da observação dos dados: o uso de heurísticas afeta a competência de resolução de problemas?

Uma pista para resposta desta pergunta, relacionada aos alunos que fizeram parte desta investigação, pode ser obtida a partir da análise da tabela que relaciona o número de heurísticas observadas nas resoluções de cada aluno e a proporção de acertos.

	Tiago	Victor	Saulo	Matheus R.	Matheus O.	Nadyne	Kauan	Roberta	Lucas
Proporção de acertos ⁵⁷	1	0,75	0,44	0,67	0,56	0,56	0,67	0,14	0,56
Nº de heurísticas observadas	6	11	6	8	5	5	8	8	7

Tabela 5 – Alunos / Proporções de acertos e nº de heurísticas observadas.

A tabela sugere uma relação entre a proporção de acertos e o número de ocorrências de heurísticas na atividade de cada aluno (difícil de precisar numericamente, dado o caráter não quantitativo da obtenção dos dados). Proporções altas de acerto correspondem aos números maiores de resoluções adequadas. Com exceção de Tiago, os alunos que tiveram proporção de acertos maiores que 0,66 apresentaram oito vezes o uso de heurística.

No entanto, o caso de Tiago não depõe contra a hipótese de que proporções altas de acerto implicam intensa atividade heurística, pois o aluno teve oportunidade de resolver somente cinco problemas, muito menos que os nove problemas que a maioria teve acesso e se

⁵⁷ Proporção de acertos = N° de soluções corretas por n° de problemas propostos.

o aluno tivesse chance de tentar resolver os quatro problemas que faltaram, a frequência de heurísticas observadas possivelmente teria subido.

A recíproca da hipótese⁵⁸ levantada no parágrafo anterior também é sugerida pelos dados da tabela: Frequências maiores de ocorrência de heurísticas estão associadas às maiores proporções de acertos (exceto no caso de Roberta que tem um bom número de heurísticas observadas e uma pequena proporção de acertos). Os alunos que apresentaram o uso de heurísticas oito ou mais vezes tiveram proporção de acertos maior que 0,66 (exceto Roberta).

Em resumo, a tabela sugere que:

Uso frequente de heurísticas $\leftrightarrow$ alta proporção de acertos.

Essa hipótese pode ser confirmada ou não por uma pesquisa estatística.

Nessa altura, um questionamento natural é o seguinte: Os alunos que apresentaram um repertório mais diversificado⁵⁹ de heurísticas tiveram um desempenho maior? Os alunos com melhores desempenhos apresentaram um repertório mais ou menos diversificado?

A seguinte tabela pode ajudar a pensar sobre esta questão:

Aluno	Nº de heurísticas distintas observadas	Desempenho (nº de soluções adequadas/nº de questões apresentadas)
Lucas	5	0,56
Roberta	6	0,14

⁵⁸ A hipótese neste caso é uma implicação e, portanto, admite recíproca.

⁵⁹ Um estudante pode apresentar uma frequência alta de heurísticas, mas um repertório pouco diversificado já que pode usar muitas vezes a mesma heurística.

Kauan	5	0,67
Nadyne	4	0,56
Matheus O.	2	0,56
Saulo	5	0,44
Matheus R.	5	0,67
Victor	5	0,75
Tiago	3	1

Tabela 6 – Diversificação e desempenho

Existem alunos com alto desempenho e que apresentou baixa diversificação: Tiago solucionou adequadamente todos os 5 problemas apresentados, tendo explicitado somente 3 heurísticas e Roberta apresentou 6 heurísticas, conseguindo resolver somente 1 dos 7 problemas apresentados. Também é possível observar casos diferentes: Aluno com desempenho relativamente bom e com número relativamente alto de diferentes heurísticas, e aluno com desempenho baixo e pouca diversificação heurística.

A média de diversificação dos três estudantes que apresentaram os melhores desempenhos é 4,3 heurísticas e a média de heurísticas dos outros alunos (com rendimento mais baixo) o rendimento é 4,4 heurísticas.

Assim, o grupo em questão não parece apresentar associação entre diversificação de estratégias e eficiência nas resoluções.

Embora os dados sugiram a ausência de correlação entre o número de heurísticas observadas no comportamento do sujeito e sua performance na resolução de problemas, acreditar que essa tendência se observaria com um conjunto de problemas especialmente compatíveis com um leque maior de heurísticas ou que a diversificação de heurísticas não é relevante na resolução de problemas para uma quantidade significativa de estudantes poderia

ser um equívoco. A observação cuidadosa dos dados sugere que os problemas usados na pesquisa são mais fortes na determinação das heurísticas usadas pelos alunos participantes da investigação (a tabela que apoia essa conclusão e as discussões correspondentes estão omitidas deste artigo mas presente na dissertação original). As consequências da prevalência das características dos problemas na determinação da heurística usada na resolução, se confirmada em condições mais gerais que a desta pesquisa, contradiz a ausência de correlação entre a diversificação do repertório do aluno e sua performance.

Uma pesquisa concentrada nessa questão poderia elucidar melhor as relações entre diversificação do repertório heurístico e desempenho em soluções de problemas lógico-matemáticos.

Ainda outra conclusão relevante pode ser obtida do trabalho de campo.

Trata-se de alguns dos fatores que determinam como cada sujeito tenta resolver cada problema.

A seguinte tabela mostra o que foi possível concluir da abordagem de cada aluno a cada problema:

Alunos/ Problemas	1	3	5	6	7	8	9	11	12
Lucas			P.A.	R. A.	P.A.		P.C.	R.A.	T.T. T.E.
Roberta			P.A.	R.A.	P.A. V.P.			R.A.	T.T. T.E.
Kauan	R.A		P.A.	I.	I. P.A.		T.T.	R.A.	T.E.
Nadyne			P.A.	T.E.	P.A.			R.A.	

				I.					
Matheus O.		I.	P.A.	I.	I. P.A.				
Saulo	E.		P.A.	I.	P.A.				T.E. T.T.
Matheus R.	R.A.		P.A.		P.A.				T.T. T.E.
Victor	R.A.		P.A.	I. T.T.	P.A. I.	T.T.		R.A.	T.E. T.T.
Tiago		I.	P.A. T.T.	I.	P.A. I.				

Tabela 7 – Mapa das heurísticas.

As componentes na determinação das heurísticas usadas nos problemas são complexas como já pontuado, anteriormente, nesta pesquisa. Algumas colunas da tabela 7 sugerem claramente a componente relativa ao problema. Não acontece por acaso a grande frequência de trabalhando para trás nas resoluções do problema 12 e nenhuma ocorrência de indução nas mesmas soluções e a grande frequência de indução no problema 6, com apenas uma ocorrência de trabalhando para trás. Alguns problemas estimulam certas heurísticas e desestimulam outras.

É possível afirmar também que a componente subjetiva afetou a decisão de cada aluno na escolha das heurísticas empregadas. Observando a coluna do problema 6, notam-se diferenças entre as abordagens: Somente dois estudantes dão indícios do uso de redução ao absurdo. Trabalhando para trás é sugerida pelo registro de um só aluno e tentativa e erro

também por apenas um registro. Assim, existe diversificação na resolução do mesmo problema, ainda que ocorra maior frequência de determinado método.

A tabela 7 sugere que as características dos problemas apresentados revelam-se mais influentes que as questões subjetivas de cada aluno na determinação da heurística empregada.

Outras pesquisas podem ajudar a esclarecer a relação das características do problema e das questões particulares do sujeito na escolha das estratégias e caminhos escolhidos nas resoluções, o que pode ajudar na elaboração de problemas para o desenvolvimento da competência em empregar esta ou aquela heurística e na definição de um perfil cognitivo do estudante.

Considerações finais.

O grupo investigado ofereceu dados que apontam para a associação de atividade heurística e eficiência na resolução de problemas lógico-matemáticos. Cabe uma investigação mais pormenorizada dessa correlação envolvendo métodos estatísticos elaborados.

A baixa frequência da heurística especialização, tão útil na resolução de problemas das mais variadas áreas e dos mais variados níveis de dificuldade também ocorreu, ainda que menos acentuadamente, nos registros das resoluções de um segundo grupo de alunos, que correspondiam ao segundo conjunto de problemas que eram especialmente solúveis por especialização. Será uma tendência geral? Será um resultado circunscrito aos estudantes investigados? Será resultado de alguma falha no método da investigação? Se essa heurística realmente não pertence ao repertório de parte significativa dos estudantes, a incorporação desse método afetaria positivamente o desempenho dos alunos? Se sim, de que forma? Qual seria o efeito?

A questão da associação entre diversificação das heurísticas e desempenho (não sugerida pelos resultados da pesquisa) merece ser estudada com métodos estatísticos.

O estudo sobre quais os determinantes da mobilização de heurísticas (determinantes objetivos, ligados ao problema, e subjetivos, ligados ao sujeito que tenta resolvê-lo) é também relevante para o ensino e aprendizagem de resolução de problemas lógico-matemáticos.

Também é interessante a investigação sobre a maneira de resolver problemas de pessoas de outras idades para que seja possível tentar compreender a história do desenvolvimento dos métodos de resolução de problema do ponto de vista psicológico.

Portanto, algumas perguntas foram respondidas, mas muitas outras foram levantadas pelo presente estudo.

Além das questões respondidas e levantadas pela pesquisa, é importante apresentar algo diretamente empregável no ensino-aprendizagem de resolução de problemas lógico-matemáticos.

Não seria interessante para o educando ignorar completamente algumas das heurísticas investigadas. Desenvolver a competência na aplicação de algumas heurísticas pode favorecer o aluno. Sendo assim, será apresentado no APENDICE B conjuntos de problemas associados a certas heurísticas. Trata-se de um material que pode ser usado para reprodução parcial desta pesquisa (investigar quais heurísticas é familiar a um grupo de alunos). O conjunto de problemas oferecidos também pode ser usado para o ensino de heurísticas. O conjunto de problemas apresentados no APENDICE B foi escolhido de maneira cuidadosa, sendo retirado de excelentes textos sobre o assunto. Sua escolha tomou grande quantidade de tempo.

APENDICE A.

A associação dos processos mentais aos registros e falas dos educandos não é completamente objetiva e indiscutível. O pesquisador interpreta as resoluções do educando segundo sua própria bagagem cultural e o referencial teórico escolhido. Não é possível dizer

que os alunos resolvem os problemas desta ou daquela maneira. Outro pesquisador, dispondo de outro referencial teórico, poderia abordar as questões de maneira diferente, até antagônica ao presente texto. Em última instância, é possível afirmar que foi possível obter certos resultados ao ler o comportamento dos educandos segundo determinado referencial teórico.

que embora próxima (qualitativamente), pode ser diferente da bagagem do aluno e diferenças culturais podem afetar a comunicação (NIBALDO E TRIVINOS, 1987, p. 121 até 123).

Ainda assim, julga-se que o modo de pensar dos alunos não está distante do que foi captado pelo pesquisador, entre outras coisas, por que as semelhanças culturais entre os indivíduos envolvidos na pesquisa e o pesquisador são mais latentes que as diferenças: os educandos moram nas proximidades do bairro onde morou o pesquisador durante a infância, adolescência e início da vida adulta, estudam na mesma escola onde o pesquisador fez todo o ensino fundamental e médio e têm aulas com alguns dos mesmos professores que lecionaram ao pesquisador, têm (salvo exceções) condições econômicas não muito distantes das condições do pesquisador quando adolescente. Existe certa segurança sobre a interpretação das resoluções dos educandos.

Algumas resoluções não são discutidas mais detalhadamente pois o pesquisador não pôde enquadrá-la adequadamente, ou pela falta de registros do aluno ou por alguma eventual debilidade teórica.

Seguem as resoluções dos educandos e suas respectivas análises.

Nos dois dias em que ocorreram, as atividades que envolveram os primeiros dois estudantes tiveram início às 10:40 da manhã. As atividades ocorreram na sala de informática já que estava desocupada e oferecia um ambiente mais silencioso e calmo. Estavam presentes na sala Lucas, Roberta (sua colega de turma que também foi submetida às questões) e o pesquisador.

Comportamento de Lucas durante a resolução de problemas no dia 09 e 16 de maio de 2016.

Resolução de Lucas do problema 1.

O registro escrito por Lucas é o seguinte:

Material digitalizado 1 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 1.

Lucas indica ter compreendido o que é solicitado assim como os dados do problema.

Em seu registro, o aluno ensaia um argumento baseado em probabilidade mas o que escreve sobre probabilidade é totalmente irrelevante em relação à conclusão que apresenta: “ ao retirar 6 conchas é garantido que pelo menos uma das cores se repetirá”, que alias, está correta.

É plausível que durante a tentativa de resolução, o estudante tenha observado que a probabilidade de retirar a concha de qualquer das cores era de 20 % (está supondo um

evento aleatório). Ao identificar tal propriedade matemática da situação, é provável que tenha imaginado que tal propriedade se relacionava com a resolução do problema.

Os registros verbais de Lucas são mais elucidativos em relação ao processo de resolução do problema:

Pesquisador: Por que você acha que com seis é suficiente?

Lucas: Porque são cinco cores diferentes, então se eu tirar cinco conchas, todas elas podem ser de cores diferentes. Na sexta concha, uma delas tem que se repetir. Já está posto, é certeza.

O aluno considera o “pior dos cenários” onde as cinco primeiras conchas retiradas são todas de cores distintas e conclui que na sexta concha, certamente ocorrerá uma repetição de uma das cores anteriores. É plausível que percebe que para que não houvesse repetição na retirada da sexta concha, deveria haver ao menos conchas de 6 cores distintas no saco o que contrariaria o enunciado. Assim, é provável que tenha ocorrido o raciocínio por absurdo.

É notável também que embora o problema liste as cores das conchas, o aluno não fez qualquer referência a estas, entendendo este dado como supérfluo (com toda razão).

O aluno dá indícios de que é capaz de usar a heurística redução ao absurdo.

O segundo problema apresentado ao estudante foi o problema 5.

Segue o registro escrito produzido pelo aluno:

Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

1 hora e 30 minutos.
Se o caminho de ida e volta leva 30 minutos, isso quer dizer que é 15 minutos para ir ou voltar.
Sabendo que ele demora 1 hora indo de bicicleta e voltando a pé, isso quer dizer que leva 45 minutos a pé.
Se Abe fosse e voltasse a pé, $45 \text{ min} + 45 \text{ min} = 90 \text{ min}$
 $90 \text{ min} = 1 \text{ hora e meio}$.

Material digitalizado 2 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 5.

O educando se aproxima progressivamente da obtenção do que é solicitado na questão e se apoia com habilidade nos dados do enunciado o que sugere que compreendeu o que devia obter e quais os dados relevantes em sua busca.

Nota-se que o aluno obtém o tempo gasto quando o percurso é realizado de bicicleta (que é um dado auxiliar para a resolução do problema original) e então é possível assumir que o estudante utiliza a estratégia chamada problemas auxiliares já que se concentra em um problema periférico, deixando de lado o problema central que é o tempo gasto no percurso de ida e volta se Abe realiza-o a pé.

Em seguida o educando considera outra informação do enunciado a luz do dado que acaba de obter e obtém assim um segundo dado auxiliar importante, o tempo gasto no percurso de ida ou volta a pé e em seguida obtém a resposta da questão, corretamente.

O registro de áudio da resolução do aluno não traz qualquer informação nova.

Conclui-se que o estudante compreendeu o enunciado do problema, obteve informações relevantes e reconsiderou os dados a luz das novas informações obtidas.

Repetiu esse processo até obter a solução do problema. Não é possível determinar se usou essa estratégia conscientemente ou não. Aparentemente está presente na resolução apresentada a heurística problemas auxiliares.

O terceiro problema apresentado ao jovem foi o problema 8.

Segue o registro do estudante:

O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 - 8 \\
 \hline
 5 \\
 + 13 \\
 \hline
 18 \\
 - 8 \\
 \hline
 10 \\
 - 8 \\
 \hline
 2 \\
 + 13 \\
 \hline
 15 \\
 - 8 \\
 \hline
 7 \\
 + 13 \\
 \hline
 20 \\
 - 8 \\
 \hline
 12
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 12 \\
 - 8 \\
 \hline
 4 \\
 + 13 \\
 \hline
 17 \\
 - 8 \\
 \hline
 9 \\
 - 8 \\
 \hline
 1 \\
 + 13 \\
 \hline
 14 \\
 - 8 \\
 \hline
 6 \\
 + 13 \\
 \hline
 19 \\
 - 8 \\
 \hline
 11 \\
 - 8 \\
 \hline
 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 + 13 \\
 \hline
 16 \\
 - 8 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

Material digitalizado 3 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 8.

O aluno parece compreender o que é solicitado no problema (já que o responde corretamente) e também percebe o que é considerado o estado espaço⁶⁰ do problema, ou seja, entende qual a configuração inicial e os movimentos permitidos.

Lucas registra a sequência (as condições do enunciado permitem somente uma sequência) de andares de modo resumido e assim obtém a solução do problema.

No áudio sobre a resolução⁶¹, fica claro que Lucas tinha consciência de que cada posição obtida permitia somente um movimento.

A resolução do problema não traz muitas informações sobre a forma de resolução de Lucas.

O estudante faz a sequência de movimentos permitidos (que é única) e obtém uma resposta adequada.

O aluno percebeu que só havia uma possível sequência de movimentos possível e, portanto, devia desconfiar de que seguindo-a, obteria a solução do problema.

Em seguida é apresentado o problema 3.

O registro escrito do aluno é pouco elucidativo:

⁶⁰ A definição de estado espaço está na página 59.

⁶¹ Áudio Lucas p.8.

Material digitalizado 4 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 3.

O estudante parece ter compreendido o que é solicitado.

O aluno apresenta somente quatro divisões do quadrado (vertical, horizontal e as diagonais).

O registro de áudio também não traz qualquer elemento novo.

Na resolução apresentada não é identificada uma estratégia para buscar a solução e também não apresenta heurísticas claras ou as estratégias usadas são desconhecidas pelo autor.

Resolução do problema 11:

Segue o registro produzido pelo educando:

Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?

Só o culpado falou a "verdade".

Isso elimina a Lebre de Março, porque ela mentiu dizendo que foi o Chapeleiro. Como ela mentiu a respeito do Chapeleiro ter roubado e o Rato também era um dos suspeitos ele também era investigado sobre o roubo. Como a Lebre mentiu sobre o Chapeleiro, sobrou apenas o Rato como culpado.

Material digitalizado 5 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 11.

Ao ler o enunciado pela primeira vez, embora pareça entender o que é solicitado, Lucas fica intrigado com o fato de que não existem informações sobre a fala do Chapeleiro Maluco e do Rato Silvestre.

Também não consegue tirar todo proveito possível das informações do enunciado, somente entendendo que o fato de só o culpado dizer a verdade elimina a possibilidade do roubo ter sido cometido pela Lebre de Março (em conversa, o estudante revela preocupação com a ausência dos testemunhos de dois acusados esperando um esclarecimento sobre esse fato).

Assim não identifica adequadamente as informações relevantes do enunciado.

O pesquisador faz uma intervenção e ao entender que não havia problema na ausência dos testemunhos do Chapeleiro Maluco e da Lebre do Rato Silvestre, retoma a

leitura e resolve o problema organizadamente. No entanto a intervenção do pesquisador retira parte da independência da resolução do educando

No registro escrito é possível inferir com certa segurança o raciocínio por absurdo já que assume que a Lebre de Março mentiu considerando que só o culpado diz a verdade (se a Lebre de Março diz a verdade, teria de ser ela quem roubou e então não podia acusar outro).

Em seguida, além de considerar que a Lebre de Março mentiu, conclui que o teor da sua afirmação é falso e isso oferece mais pistas sobre a solução. Se ela mente, não pode ter sido o Chapeleiro Maluco, restando somente o Rato Silvestre. Fica claro no registro escrito que o educando considera: Foi um dos três (Lebre, Rato ou Chapeleiro) e não foi a Lebre nem o Chapeleiro. Resta o Rato. Isso indica algum domínio de lógica (ao menos aplicada à um contexto particular) pois entende que se (A ou B ou C) e não (A ou B) então C⁶².

Assim, os registros sugerem que o aluno faz uso do raciocínio por absurdo e segue obtendo sentenças válidas até obter a informação solicitada.

Resolução do problema 7.

⁶² Considere A, B e C proposições.

Material digitalizado 6 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 7.

O educando apresenta indícios de que compreendeu o que o problema solicita já que apresenta respostas desde o início (que são incorretas, mas que são compatíveis com a resposta esperada, da mesma natureza e da mesma ordem de grandeza). Também lida com todas as informações relevantes do enunciado, dando pistas que entendeu o problema (o que é solicitado e o que é dado).

No início, responde que ocorrem 50 cumprimentos sem mais registros escritos. Argumenta (gravação em áudio⁶³) que cada pessoa faz 10 cumprimentos o que resultaria em

⁶³ Áudio Lucas p.7.

100 cumprimentos mas que quando duas pessoas se cumprimentam, deve se considerar que houve apenas um cumprimento e então divide 100 por 2, obtendo 50.

Ao explicar verbalmente como pensou, percebe que cada pessoa realiza somente 9 cumprimentos (com ajuda de problematização que o autor introduziu em diálogo). O estudante fica confuso e pede mais tempo para pensar.

Em seguida o aluno diz que houve 9X9 cumprimentos. O resultado é questionado e o aluno reconsidera dizendo que o número gerado pela situação observada é 90.

Em seguida, após ter solicitado auxílio do pesquisador, conversando com a colega que também resolvia os problemas propostos (embora tenha sido solicitado que não se comunicassem), consideram a situação em que precisam contar os cumprimentos que haveriam entre os três presentes na sala (variação do problema), mas tal atitude foi influenciada pelo auxílio de pesquisador e portanto não ocorreu espontaneamente.. Não considera todas as consequências dessa abordagem e volta a pensar sozinho sobre o problema.

Nota-se que o registro não é bem explicado ou organizado mas é possível observar que o estudante divide o grupo de dez pessoas em dois grupos de 5 pessoas. Tenta descobrir o número de cumprimentos que ocorrem entre esses dois grupos e depois o número de cumprimentos que ocorrem no interior de cada um dos grupos de 5 pessoas (ou seja, organiza-se para exaurir os casos).

Caracteriza-se a heurística chamada problema auxiliar, já que o educando substitui o problema original por outros três problemas, cada um mais simples que o original e que suas soluções dão informações relevantes pra resolver o original.

Em uma das contagens obtém 44 cumprimentos. Refaz a contagem e obtém 46 cumprimentos. Ou seja, chega muito perto da solução correta (45 cumprimentos) e o erro provavelmente está relacionado ao esboço, a figura confusa desenhada pelo estudante.

Observa-se que o estudante segue uma estratégia: Dividir o problema em outros mais simples e tenta resolvê-los e articular os resultados (problemas auxiliares). Nota-se também que o estudante recorre à representações esquemáticas da situação.

Ao fim, conclui que foram realizados 45 cumprimentos considerando que cada aluno cumprimenta 9 vezes, o que resultaria 90 cumprimentos mas divide o resultado por 2, resultando em 45 cumprimentos mas a essa altura, o estudante já tinha tomado conhecimento que a colega que também resolvia o mesmo problema chegou no número 45.

Resolução do problema 6:

Material digitalizado 7 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 6.

O educando dá sinais de que compreendeu o enunciado (já que as ações que realiza são todas no sentido de obter a resposta esperada).

Lucas diz no início da resolução que já havia resolvido problema semelhante.

Apresenta solução organizada e correta mas verbalmente. É solicitado que registre sua solução na folha do enunciado. Assim, entende-se que Lucas não se utilizou de esquemas de representação ou qualquer registro para elaborar sua solução.

Considerando que o aluno enfatiza que já havia resolvido problema semelhante, é possível admitir que usou a heurística problemas correlatos⁶⁴. É difícil imaginar uma resolução que não remeta de alguma forma à outra resolução. A heurística problemas correlatos ocorre muitas vezes de maneira não observável.

Depois de observada a resolução do estudante, foi questionada a razão pela qual sua primeira ação foi atravessar os dois meninos. Foi perguntado: por que não atravessar primeiro um homem?

Lucas dá pistas de que seria totalmente improdutivo atravessar um homem dando a entender que fez uso do raciocínio por absurdo, pois considerou a travessia de um homem para em seguida concluir que o resultado disso seria insatisfatório.

Na resolução e fala de Lucas é possível inferir que fez uso de redução ao absurdo, uso de problema correlato e também indução, já que em vez de fazer todas as ações necessárias para a travessia de todo o grupo, percebe que consegue criar as condições para atravessar um homem e em seguida ter o bote do lado oposto a este homem e, então, sugere que este processo deve ser repetido até atravessar todos os homens para o lado desejado.

Resolução do problema 9.

⁶⁴ Trata-se do uso do método de resolução ou de algum resultado de algum problema já resolvido pelo indivíduo.

9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.¹

4 = 4
4 = 4
4 = 4
5

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

solução

minha ideia foi colocar uma moeda de um lado e as quando as outras 24 no outro lado. Quando encontrarmos a falsa, a determinamos seu peso com relação as outras moedas.

Podemos pesar as moedas em grupos de 4, quando o peso estiver diferente, basta pesar entre os últimos 6 moedas usando o método acima para encontrarmos a falsa.

Material digitalizado 9 – Registro escrito da resolução de Lucas, do problema 9.

O estudante aparentemente compreendeu os dados e o que é solicitado.

No primeiro parágrafo de sua resolução, Lucas considera separar uma das moedas e comparar as outras 24 moedas com esta (considera que a moeda separada não seja a falsa). Uma vez ocorrido o desequilíbrio da balança, decide comparar uma das duas moedas com uma terceira moeda para determinar se é mais pesada ou mais leve (esse passo é desnecessário pois ocorrido o desequilíbrio, seria possível dizer se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada imediatamente). Essa solução, embora leve à meta, é demasiadamente trabalhosa. Usa bem mais que o mínimo de pesagens.

No segundo parágrafo, considera comparar os pesos das moedas com 4 moedas em cada prato. Este passo indica um desenvolvimento da resolução anterior, um progresso, já que economizaria pesagens. Após haver desequilíbrio (embora exista a possibilidade de não ocorrer desequilíbrio pois $25 = 4 \times 6 + 1$, ou seja, uma moeda ficaria de fora e essa poderia ser a falsa), o aluno sugere comparar os dois conjuntos de moedas que desequilibraram com outro conjunto de 4 moedas e assim determinar se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada.

É difícil inferir quais estratégias usou para elaborar as pretensas resoluções ou se as estratégias usadas têm correspondência com as estratégias listadas nesta dissertação. Nos registros de áudio⁶⁵, Lucas solicita que lhe informe o número de pesagens mínimas para que possa comparar com seus resultados. Não é atendido e dá o problema por resolvido.

Resolução do problema 12.

⁶⁵ Áudio Lucas p.9.

Material digitalizado 10 – Registro escrito da resolução de Lucas do problema 12.

Lucas parece bastante inseguro com o enunciado.

Após ler o enunciado, Lucas pergunta se as garotas têm 1,07 reais e se são 7 moedas. Tais dados estavam explícitos no enunciado.

O aluno não consegue obter uma solução adequada.

Faz algumas tentativas que constam em seu registro escrito (que caracteriza a heurística tentativa e erro):

Lucas considera (é possível observar no registro escrito) que se tiver duas moedas de 10 centavos não poderá ter uma de 5 pois teria troco para 25 centavos.

É interessante notar que, por vezes, as estratégias de resolução se sobrepõem no sentido de permitir a interpretação de um processo como aplicação da heurística A ou B ou mesmo das heurísticas A e B. Na resolução do problema 12 o que está sendo considerado como tentativa e erro é um processo mental que poderia ser confundido com redução ao absurdo já que o estudante, ao considerar a possibilidade de adotar como solução um determinado conjunto de moedas, percebe que essas moedas permitiriam troco e isso viola uma condição do enunciado e, portanto, tal conjunto de moedas deve ser desconsiderado.

Uma das diferenças entre o processo mental chamado de tentativa e erro e redução ao absurdo é que na redução ao absurdo é assumida uma proposição ou fato como verdadeiro com a intenção de obter a partir dele uma contradição, o que não ocorre quando se raciocina por tentativa e erro. É uma diferença sutil que permite diferenciar uma prática de outra.

Em certo momento (consta nos registros de áudio⁶⁶) considera que para que as meninas tenham 1,07 reais, precisam ter 7 centavos compostos por uma moeda de 5 e duas de 1 centavo. Em seguida conclui que se têm 7 centavos compostos desta maneira, precisará compor o 1 real que falta com quatro moedas. É então possível considerar que o estudante usou a heurística trabalhando para trás⁶⁷, já que imagina que para que o problema possa ser resolvido é necessário que as garotas tenham uma moeda de 5 e duas de 1 centavo e que, se isso ocorre, então precisa ocorrer 1 real composto por 4 moedas. Em seguida, considera que é impossível compor 1 real com 4 moedas sem violar a condição do enunciado que

⁶⁶ Áudio Lucas p.12.1.

⁶⁷Tal heurística só seria considerada aplicada de forma completa se após obter a sequência de implicações do fato de ter uma moeda de 5 e duas de 1, pudesse estabelecer que a recíproca dessas implicações também fossem verdadeiras, ou seja, que as implicações fossem de ida e volta ou ao menos de volta.

determina que as moedas das garotas não podem formar troco para qualquer outra moeda. O estudante desconfia que o enunciado esteja errado.

Embora não tenha conseguido uma solução adequada para o problema, o estudante dá indícios de que aplicou duas heurísticas: tentativa e erro e trabalhando para trás. Não insistiu com esses métodos e não pôde obter a solução do problema. É digno de nota que ao aplicar trabalhando para trás o estudante considera uma premissa inadequada (que 1,07 deve ser composto por moedas que formam 1,00 e por outras que formam 7 centavos) e ao notar que a consequência dessa premissa leva a uma situação insolúvel (compor 1 real com somente 4 moedas sem permitir troco para qualquer moeda) desconfia do enunciado.

Em suma, para tentar resolver o conjunto de problemas proposto, é possível inferir que Lucas usa as heurísticas trabalhando pra trás (no problema 12), redução ao absurdo (nos problemas 6 e 11), problemas auxiliares (nos problemas 7 e 5), tentativa e erro (no problema 12) e problema correlato (no problema 9).

Análise do comportamento de Roberta ao tentar solucionar os problemas apresentados.

Problema 5:

Segue o registro escrito produzido pela educanda:

Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

conclusão se Abe gasta 30 minutos indo e voltando de bicicleta seria 15 minutos cada, e indo a pé e voltando de bicicleta ou Vg, indo e volta toma 30, e de bicicleta < 30 minutos, então se ela fosse e voltasse a pé levaria 50 minutos

Material digitalizado 10 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 5.

Roberta não compreende da maneira esperada os dados do enunciado e tem muitas dificuldades ao tentar resolver este problema. Levanta hipótese que contraria o senso comum: o tempo gasto num percurso a pé é o mesmo que de bicicleta. E também levanta a hipótese e tira conclusões que contrariam o enunciado: Abe gasta 1 hora pra ir mais 1 hora pra voltar, gastando no total 2 horas pra ir e voltar.

Essas hipóteses são problematizadas em diálogo com o pesquisador. Roberta compreende as falhas nas hipóteses comentadas.

A educanda percebe que o trajeto de ida ou volta de bicicleta toma 15 minutos (já que ida e volta de bicicleta tomam 30 minutos). Assim, provavelmente se vale da heurística problemas auxiliares posto que se concentra em resolver o problema do tempo gasto com a ida ou volta de bicicleta que não é o problema proposto mas que serve para alcançar a solução do problema original.

Percebe que ida de bicicleta e volta a pé toma 1 hora. Ou seja, consegue observar um dado essencial para a resolução. Mas conclui que ida e volta a pé tomaria 50 minutos. Além de incorreto, esse dado contradiz o que a própria aluna tinha afirmado (gravado em áudio⁶⁸): que de bicicleta gasta se menos tempo para realizar o mesmo trajeto que a pé.

Em suma, os registros de Roberta sugerem que aplica a heurística problemas auxiliarese mostra dificuldades em tirar conclusões adequadas dos dado sendo, ainda, provável que a estudante não teve o cuidado de verificar se sua resposta fazia sentido ou se tentou verificar sua solução, não teve êxito.

Ao ser apresentada a questão 1, a estudante lê o enunciado e logo desiste, não fazendo qualquer registro. Roberta mostra-se aflita. Talvez considere que seu desempenho está abaixo do esperado ou algo do gênero.

É solicitado que Roberta resolva a questão 3.

Segue o registro escrito da estudante:

⁶⁸ Áudio Roberta p.5.

Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.

Material digitalizado 11 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 3.

Considerando a resolução apresentada, é provável que a aluna tenha compreendido o que o problema solicita e os dados do problema.

A estudante apresenta três divisões possíveis: Por segmento horizontal, vertical e uma diagonal.

A aluna afirma não conseguir imaginar outra divisão possível e dá a questão por resolvida após perguntar ao pesquisador se sua resposta estaria certa.

Roberta não faz uma tentativa resoluto de resolver o problema deixando poucas chances para análise.

Resolução do problema 11:

Material digitalizado 12 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 11.

Roberta parece não compreender o enunciado. A estudante se mostra confusa. Não entende que a Lebre de Março é uma das suspeitas. Não entende como poderia usar o fato de que só o culpado diz a verdade. O pesquisador esclarece que a Lebre também é suspeita, exagera na intervenção e acaba dando pistas de como resolver o problema.

A estudante entende que a Lebre não é culpada, portanto mentiu, assim, não foi o Chapeleiro e deduz que só pode ter sido o Rato Silvestre.

Ao escrever a resolução enuncia os fatos essenciais do enunciado. Afirma que a Lebre não diz a verdade pois não foi o Chapeleiro quem roubou os biscoitos. As proposições estão corretas mas a relação de implicação estabelecida não está.

Conclui que o ladrão é o Rato Silvestre já que não podem ter sido os outros dois suspeitos este argumento está correto.

Assim, em seu raciocínio, parece conhecer o fato de que sendo A, B e C proposições, se (A ou B ou C) e não (A ou B) então C, ou ao menos a aplicação dessa propriedade em um contexto concreto.

Embora tenha contado com alguma ajuda do pesquisador, em certa altura da resolução aplica a redução ao absurdo pois admite que se a Lebre de Março fosse culpada, não poderia acusar o Chapeleiro Maluco (o culpado sempre diz a verdade) e então a Lebre de Março não é culpada. É possível inferir que usou a redução ao absurdo ao menos duas vezes até obter a solução.

Resolução do problema 7.

Material digitalizado 13 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 7.

Roberta tem alguma dificuldade de compreensão do enunciado no início mas, após dialogar com o pesquisador, refletir e reler o problema, parece compreender o que é solicitado e quais os dados relevantes do problema.

Roberta pergunta⁶⁹ se ocorrem exatamente 5 cumprimentos. O pesquisador relê alguns dados do enunciado (intervenção inadequada pois é importante saber se a educanda pode discernir entre dados relevantes e irrelevantes por si mesma).

A estudante afirma que cada pessoa faz 9 cumprimentos e conclui que houveram 90 apertos de mãos. A aluna pergunta se está correta. Ao perceber que o pesquisador não confirma se está correta, tenta outra resolução.

A aluna é alertada sobre o risco de contar duas vezes o mesmo cumprimento. É considerada a situação de contar os cumprimentos das três pessoas que estão presentes na sala naquele momento (intervenção inadequada já que considerar essa mudança no problema original é uma competência que devia ser verificada e não ensinada naquele momento).

A estudante então considera uma hipótese adicional não contida no enunciado:

Uma pessoa cumprimenta as 9 restantes e sai da sala. Outra pessoa cumprimenta as 8 restantes e sai, outra pessoa cumprimenta as 7 pessoas que permaneceram e sai e assim por diante (processo implícito no registro escrito).

Percebe-se que a estudante se vale da heurística variação do problema ao considerar que uma pessoa cumprimenta todas e sai. Considera assim duas condições não colocadas no enunciado: a ordem de ocorrência dos cumprimentos: uma pessoa cumprimenta todas as outras e durante esse processo não ocorre nenhum outro

⁶⁹ Áudio Roberta p.7.

cumprimento entre as demais e a saída de cada pessoa que cumprimenta todas as outras imediatamente após os cumprimentos.

Essas mudanças não alteram o número de cumprimentos que haveria se essas condições não fossem consideradas, e então o resultado obtido é o mesmo ao se considerar a questão tal como está posta no enunciado.

Dessa maneira, a estudante chegou ao resultado desejado de maneira bastante interessante e pode-se considerar que usou o que é chamado de variação do problema e percebendo o bom desenvolvimento da resolução, teve ânimo e confiança para levar a resolução até o fim. A aluna explica, com certo cuidado, os primeiros casos: 1° pessoa faz 9 cumprimentos, 2° pessoa faz 8, 3° pessoa faz 7. Mas, em algum momento, escreve uma sucessão de números: 5, 4, 3, 2, 1. Tal registro sugere pensamento indutivo, assim, infere-se que usou a estratégia chamada de Indução. Também é possível considerar que a aluna usou a heurística problemas auxiliares pois decide calcular o número de cumprimentos de uma pessoa, depois os não contabilizados da próxima pessoa, e assim por diante.

Resolução do problema 8.

O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 8 \\ \hline 5 \end{array}$$

Partindo do 13º andar, para chegar ao 8º andar, se não funcionasse o elevador, sobe 13 e desce 8, não tem como ficar no 8º andar, poderíamos usar as escadas.

Material digitalizado 14 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 8.

Roberta parece compreender o que é solicitado no problema, mas não compreende os dados e ações possíveis. A estudante lê o enunciado mas não compreende o que significa “o botão não funciona quando não existem andares suficientes para subir ou descer”. O pesquisador explica. Parece compreender.

Embora não tenha conseguido resolver o problema, nem sequer compreendido as ações permitidas (descer 8 andares ou subir 13 andares) ou não saber como aplica-las à resolução do problema, utiliza seus conhecimentos de mundo e consegue uma solução alternativa (bastante ingênua, alias): A pessoa pode utilizar a escada e chegar ao 8º andar sem qualquer complicação.

Roberta sabe que os prédios têm escadas. Se o problema é chegar ao 8º andar e não foi comentado que a pessoa que deseja chegar ao 8º andar tem qualquer dificuldade de mobilidade, por que não poderia utilizar a escada?

Embora tal ideia pareça tola, já que não recorre aos mecanismos implícitos à questão, observa-se como o conhecimento de mundo pode interferir na resolução de um problema. Em muitos outros casos, o conhecimento de fatos que não são explícitos no enunciado, mas apenas implícitos, é condição necessária para a resolução do problema, assim, a tentativa de Roberta tem alguma relevância.

Resolução do problema 6.

Material digitalizado 15 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 6.

A aluna não compreende os dados do problema ou as ações permitidas. Roberta se mostra confusa. Questiona se o bote pode carregar todos Juntos. Recebe resposta negativa. Sugere que o enunciado não informa nada sobre a impossibilidade de carregar um homem e um menino e que talvez o bote suporte essa carga. Novamente, recebe resposta negativa.

Após certo tempo de reflexão e releitura do problema, Roberta inicia adequadamente sua resolução. Considera que o primeiro movimento é o transporte dos dois meninos à margem oposta do rio. É plausível que tenha usado tentativa e erro, já que qualquer outra ação, diferente da travessia dos dois meninos à outra margem se mostra inútil.

Em seguida, Roberta considera que é possível carregar um homem e um menino no bote mas escreve depois que o bote afundará caso faça isso. Assim, mostra que não está convencida de que o bote afundará com um homem e um menino já que considera tal movimento como possível embora negue-o em seguida.

É notável que no registro de Roberta não temos qualquer figura ou esquema. Assim, no decorrer da sua resolução, precisa sempre ter latente na memória qual é a posição das pessoas e do bote em relação ao rio. Na conversa⁷⁰ que houve sobre a resolução, Roberta descreve o processo que culmina na configuração de três homens, um menino e o bote do lado para qual todos precisam ser transportados e o resto das pessoas do outro lado. É solicitado que continue a resolução, mas confunde-se e avalia que os dois meninos estão do lado inicial do rio (confusão que talvez fosse evitada com o desenho de um esquema). Nesse momento, afirma que não sabe o que fazer já que o único movimento possível (considerando a situação em que acredita estar) é infrutífero.

Parece que a estudante raciocinou por absurdo na passagem em questão já que em certo momento assume que sua resolução não têm futuro, pois o próximo movimento necessário faz regredir para situação anterior. Ou seja, após ter feito tudo o que podia, fica presa numa situação aparentemente sem saída. Assim, não pode resolver o problema. Se pudesse resolver o problema, não ocorreria uma situação sem saída após uma sequência de ações corretas.

⁷⁰ Áudio Roberta p.6.

Nota-se também que Roberta não registra no papel todo o processo que transporta um homem e termina com duas crianças do lado inicial do rio pois, para isso, faltou que transportasse de volta uma das crianças que atravessou o bote. No entanto, em seu registro de áudio⁷¹ descreve o processo adequadamente, três vezes.

Em suma, a estudante chegou bastante perto de obter a solução, já que realizou o processo para margem oposta e a continuação dessas ações acarretaria a solução do problema. Parece valer-se de tentativa e erro e, aparentemente, usar redução ao absurdo. Não usou esquemas ou esboços em uma situação em qual esses recursos seriam bastante eficazes.

Resolução do problema 12.

⁷¹ Áudio Roberta p.6.

Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Obs: Nosso sistema monetário tem moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e de 1 real.

Olá, elas têm 4 moedas e um real, elas dizem que não podem trocar por 50, 25 e 10. Então para mim elas têm 4 moedas de 1 centavo, mas a foi uma de 5 centavos, 2 de 1 centavo e duas de 25 centavos. ~~(moedas de 1 centavo)~~ mas as moedas não tem cinco centavos.

Material digitalizado 16 – Registro escrito da resolução de Roberta do problema 12.

A aluna parece não compreender adequadamente os dados e o que é solicitado. Roberta mostra-se confusa. Considera (a despeito dos dados do enunciado) que as garotas têm sete moedas mais um real. Escreve os dados que considera importantes (são de fato importantes).

Após releitura e reflexão tenta a seguinte solução: 7 moedas de um centavo e mais um real.

Parece desistir dessa pretensa solução e infere-se que usou de tentativa e erro.

Tenta duas moedas de um centavo e uma moeda de 5 centavos. Escreve em seguida: quatro moedas de 25 centavos. Dando a entender que tenta resolver o problema de formar um real com 4 moedas.

Usa assim (provavelmente) a heurística trabalhando para trás pois considera que para resolver o problema precisa de duas moedas de 1 centavo mais uma de 5 e consequentemente precisará compor 1 real com quatro moedas de 25. Ela termina o registro dando a entender que a solução pretendida falha, já que nela teria troco e contrariaria uma condição do enunciado.

Na gravação⁷² é evidenciado em uma das suas falas que a aluna usa tentativa e erro. Diz: se tiver 4 moedas de 25 centavos, teria troco para 50 centavos (mostra-se contrariada). Depois descreve várias situações em que as condições do enunciado seriam violadas e abandona uma por uma dessas situações. Desiste da solução.

Roberta não resolve o problema 9 (da balança de dois pratos). Afirma não conseguir resolver o problema após pouco tempo de tentativa. Não faz qualquer registro escrito.

Resumidamente, a aluna dá sinais de que aplica tentativa e erro (no problema 12), redução ao absurdo (nos problemas 6 e 11), variação do problema e indução (no problema 7,) problemas auxiliares (nos problemas 5 e 7) e trabalhando para trás (no problema 12).

Apresentação e análise das resoluções de Kauan.

As resoluções ocorreram na sala de informática. Kauan e sua colega Nadyne foram conduzidos à sala às 10h:40min dos dias 20 de junho e 22 de agosto de 2016 e ficaram aplicados na resolução até as 12h:20min, assistidos pelo pesquisador.

Resolução do problema 1:

⁷² Áudio Roberta p.12.2.

Material digitalizado 17- Registro escrito de Kauan do problema 1.

O aluno compreendeu o que é solicitado e, também, quais os dados já que sua resolução é correta.

A apresentação sintética que o aluno registra sugere que ao fazer o registro, já havia solucionado o problema mentalmente (nota-se que a primeira frase de sua resolução já é a solução e o que segue é justificativa para a solução).

É plausível que tenha aplicado redução ao absurdo pois descarta categoricamente a necessidade de serem retiradas exatamente 5 conchas.

Resolução do problema 5:

Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

As mesmas ~~mesas~~ 30 minutos pois ela levaria o mesmo tempo ~~a~~ a pé ou de bicicleta.

Ela levaria 1h e meia pois ela leva 15 minutos de bicicleta e o que resta são 45 minutos pra somar 1 hora. Então se ela ir e voltar ~~a~~ a pé levaria 45 minutos resultando em 1 hora e meia.

Material digitalizado 18 – Registro de Kauan do problema 5.

A princípio Kauan mostra não compreender bem os dados do problema já que considera que o tempo gasto no percurso a pé é o mesmo que gasta no percurso de bicicleta o que contraria um fato trivial (percursos de bicicleta são em geral mais rápidos que percursos a pé) que também pode ser obtido por certos desdobramentos dos dados.

Percebe que sua solução não está correta. Refaz.

Em sua resolução, Kauan constata que Abe leva 15 min pra realizar o percurso (de ida ou volta) de bicicleta e então observa que demora 45 min a pé (problema auxiliar) e portanto demora uma hora e meia (90 minutos) para ir e voltar a pé.

Em suma, Kauan usa a heurística problema auxiliar e constrói a resolução, dos dados do problema em direção à solução.

Apresentação da resolução do problema 3.

Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.

Se um quadrado são 4 lados iguais eu posso
dividi-lo em 3 partes diferentes.

Material digitalizado 19 – Registro de Kauan do problema 3.

Da figura que Kauan desenha é possível inferir que tenha compreendido o que é solicitado já que a mesma figura representa um quadrado dividido em duas peças idênticas de três formas distintas.

O aluno tenta estabelecer uma relação entre o número de lados do polígono que deve ser dividido e o número de possibilidades de divisão. A relação é inconsistente.

Não é possível identificar se o educando se vale de alguma heurística listada para sua resolução ou se sua resolução é apoiada em estratégias não identificadas pelo autor. Nota-se que o estudante faz uso de uma figura (quadrados divididos de algumas maneiras) para construir sua resolução.

Apresentação da resolução do problema 8.

8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

será um processo longo mas de alguma forma, não importa o tempo que demorar, o elevador passará em todos os andares.

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 - 5 \\
 \hline
 8 \\
 + 13 \\
 \hline
 21 \\
 - 1 \\
 \hline
 20 \\
 - 1 \\
 \hline
 19 \\
 - 1 \\
 \hline
 18 \\
 - 1 \\
 \hline
 17 \\
 - 1 \\
 \hline
 16 \\
 - 1 \\
 \hline
 15 \\
 - 1 \\
 \hline
 14 \\
 - 1 \\
 \hline
 13 \\
 - 1 \\
 \hline
 12 \\
 - 1 \\
 \hline
 11 \\
 - 1 \\
 \hline
 10 \\
 - 1 \\
 \hline
 9 \\
 - 1 \\
 \hline
 8 \\
 + 13 \\
 \hline
 21 \\
 - 13 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

Material digitalizado 20 – Resolução de Kauan do problema 8.

O aluno considera que, dentro das condições do enunciado, o elevador passará em todos os andares. Tal fato não parece intuitivo e precisaria estar apoiado em algum argumento.

Em seguida, o aluno vai somando 13 ou subtraindo 8, de acordo com o andar que o elevador se encontra e vai obtendo as posições do elevador até que atinge o andar desejado.

Não foi possível identificar a estratégia que o educando aplicou para obter a solução.

Apresentação da resolução do problema 11.

11) Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?

Foi o ~~Chapeleiro Maluco~~ pois no julgamento a lebre põe a culpa no Chapeleiro Maluco e se só ele falou a verdade e também foi o culpado quem roubou os biscoitos foi o rato silvestre.

Material digitalizado 20 – Resolução de Kauan do problema 11.

O educando compreende o que é solicitado mas não compreende bem os dados (ou seus desdobramentos) pois é possível observar no material de áudio⁷³ afirmações inconsistentes como a seguinte: se o Chapeleiro Maluco diz a verdade e só um dos réus roubou os biscoitos, então foi o Rato Silvestre.

No registro escrito é notada a presença de sentença irrelevante: “Foi o culpado quem roubou”. Embora no mesmo registro seja indicado o culpado de maneira correta, no

⁷³ Áudio Kauan p.11.1.

áudio ou no registro escrito não é apresentada uma linha de raciocínio consistente que justifique a solução apresentada.

Em uma segunda tentativa de resolução, Kauan mostra-se mais confiante de que foi o Rato Silvestre quem roubou os biscoitos mas, ao ser questionado, apresenta uma linha de raciocínio inconsistente e apresenta dados que não estão contidos no enunciado. Afirma que os biscoitos eram da Lebre de Março e que o Chapeleiro Maluco falou a verdade. Conclui disso que foi o Rato Silvestre quem roubou os biscoitos. Tanto a premissa quanto a validade da implicação que Kauan enuncia estão incorretas.

O estudante não consegue obter as implicações que determinariam o culpado e também parece não compreender adequadamente os dados. Embora tenha indicado em resoluções posteriores que sabe aplicar a heurística redução ao absurdo não tenta usa-la para resolver o problema 11 (tal método se aplicaria perfeitamente na resolução deste problema).

Resolução do problema 7.

Material digitalizado 21 – Resolução de Kauan do problema 7.

Parece não ter compreendido o enunciado no início.

Responde que ocorrem 9 cumprimentos (que seria o número de cumprimentos que uma pessoa faz). O pesquisador afirma que deve contar todos os cumprimentos. Kauan responde em seguida que ocorrem 90 cumprimentos (provavelmente fez o número de cumprimentos de cada pessoa vezes o número de pessoas, ou seja, 9×10). O pesquisador interfere descrevendo a contagem que o educando idealizou, sugerindo que o mesmo cumprimento pode estar sendo contado mais de uma vez.

Finalmente, o estudante realiza a contagem da forma que está sugerida em seu registro. Kauan usa a heurística problemas auxiliares pois decide contar os cumprimentos não contabilizados de cada pessoa, o que decompõe o problema original em 10 problemas auxiliares. O estudante parece usar a estratégia chamada de indução pois aponta um padrão de variação nas parcelas que representam os números de cumprimentos de cada indivíduo. É observado, também, que o educando dá duas respostas precipitadas e equivocadas (9 cumprimentos e 90 cumprimentos) e só passa a resolver o problema mais detidamente após o pesquisador classificar suas soluções como inconsistentes.

Resolução do problema 6.

6) Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?

Leva os 2 meninos e volta um para trazer o bote. Depois disso transporta 1 dos 9 homens e volta o 2º menino para buscar o primeiro que havia trazido o bote. Depois não os 2 novamente e volta 1 para trazer o bote. Então leva mais 1 homem e traz o menino com o bote. Transporta os 2 garotos novamente, volta 1 com o bote, leva o 3º homem e o 2º menino volta mais uma vez com o bote e assim por diante.

Material digitalizado 21 – Resolução de Kauan do problema 6.

O estudante dá indícios de que entendeu o que o problema solicita e interpreta adequadamente os dados.

Kauan constrói a solução sem qualquer registros (embora esquemas ou figuras sejam elementos potencialmente facilitadores em relação a este problema) e verbaliza sua resolução. É possível que Kauan tenha construído sua solução ao mesmo tempo que a verbalizava. Possivelmente, sua fala ajudou a organizar a resolução.

É solicitado que o educando registre sua resolução.

O fato de o educando fazer uso de registro escrito somente para representar a resolução que já havia idealizado implica a supressão de detalhes que informem sobre os mais importantes processos mentais de que se valeu (além de mostrar que o educando dispensou o uso de diagramas ou figuras e de registro escrito em sua resolução). Ainda assim é possível identificar indícios do uso de indução no fim do registro do educando (quando indica que o processo deve continuar: “assim por diante”).

Resolução do problema 9.

Kevan

9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.²

Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos (figura 1), se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

- 1º pesagem - fique 2 moedas e determine um padrão de peso.
- 2º pesagem - 12 moedas em cada prato e a que sobrar pesa com outra qualquer pra simples conferência.
- 3º pesagem - Caso não seja a moeda que sobrou alguma dos balanças vai sair do padrão multiplicado por 12.
- 4º pesagem - divida as 12 nos pratos e algum dos 2 sairá do padrão multiplicado por 6.
- 5º pesagem - 3 moedas em cada prato e uma das balanças sairá também do padrão.
- 6º pesagem - uma das 3 será a falsa então coloque 1 em cada prato e se não for nenhum deles ~~o~~ ~~o~~ a moeda restante será a falsa.

² Banco de questões OBMEP 2011, p. 24.

Nota-se que o estudante não compreendeu com precisão o que é solicitado, já que dá indícios de que busca determinar a moeda falsa (devia somente determinar se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada). Também parece não compreender bem os dados, já que parece sugerir a possibilidade de determinar a massa das moedas (uma balança de dois pratos permite a comparação entre duas massas mas não determina-las, a não ser em condições específicas).

Será analisada os trechos dessa resolução (esses trechos permitem mais de uma interpretação).

moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando
1º paragem - pegue 2 moedas e determine um padrão de peso.

Material digitalizado 23 – 1º trecho da resolução de Kauan do problema 9.

Esse trecho pode significar que o estudante acredita poder usar a balança de pratos para determinar massas: “Determine um padrão de pesos”.

1º paragem - 12 moedas em cada prato e a que sobrar fez com outra
~~qualquer~~ qualquer pra simples conferência.

Material digitalizado 24 – 2º trecho da resolução de Kauan problema 9.

Kauan mostra uma estratégia eficaz: Comparar as moedas aos grupos (de 12 moedas no caso). Considera comparar a moeda que resta com alguma outra, possivelmente para confirmar se esta é a moeda falsa ou para determinar se é mais leve ou pesada, talvez considerando que a balança fique equilibrada ao comparar os dois conjuntos de 12 moedas.

3ª paragem - Caso não seja a moeda que sobrou alguma dos
balanços vai sair do padrão multiplicado por 12.

Material digitalizado 25 – 3º trecho da resolução de Kauan do problema 9.

Aqui, nitidamente o educando considera a possibilidade da moeda falsa estar no conjunto de moedas comparadas. Não é possível garantir o que quer dizer com “balança vai sair do padrão multiplicado por 12”. Parece que mistura a ideia de desequilíbrio de balança de pratos com medição de massa.

4º passo - dividerei as 12 nos pratos e algum dos 2 sairá do padrão multiplicado por 6.

Material digitalizado 26 – 4º trecho da resolução de Kauan do problema 9.

No conjunto dos trechos apresentados é possível perceber a intenção de ir dividindo o conjunto de moedas que inclui a moeda falsa em dois outros conjuntos e compará-los.

Estratégia eficaz, mas ao usar a ideia de medição de massa o educando evita um subproblema, associado ao problema principal, que consiste em como determinar qual dos pratos inclui a moeda falsa uma vez que a balança desequilibre, evita portanto, um subproblema chave.

5º passo - 3 moedas em cada prato e uma das balanças sairá também do padrão.

Material digitalizado 27 – 5º trecho da resolução de Kauan do problema 9.

O trecho anterior consiste em repetição do processo sugerido no 4º trecho.

6º passo - uma das 3 sairá a falsa então coloque 1 em cada prato e se não for nenhum deles ~~o~~ ~~de~~ a moeda restante será a falsa.

Material digitalizado 27 – 6º trecho da resolução de Kauan do problema 9.

Nessa parte, Kauan descreve corretamente uma ação para determinar qual é a moeda falsa.

Embora o educando dê sinais de que não compreendeu bem os dados do enunciado, assim como não compreendeu adequadamente o que é solicitado no problema, apresenta uma solução consistente se for considerada a meta que o aluno parece se propor (que não é a meta proposta): Determinar qual moeda é falsa.

Todas asações que o educando descreve parecem ir na direção de isolar a moeda falsa. Em cada parte do processo, diminui consideravelmente o número de moedas no conjunto de moedas que inclui a moeda falsa. É possível inferir que Kauan tenha usado a heurística trabalhando para trás, já que suas ações levam-no quase sem desvios à situação em qual terá a moeda falsa num conjunto bem pequeno de moedas (3 moedas no caso), situação essa claramente favorável a determinação da moeda falsa.

Resolução do problema 12.

12) Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Handwritten solution:

~~1 real e 70 centavos~~
~~50 10 20~~

Elas provavelmente tiveram
1 moeda de 50, 1 moeda de 25, 3 moedas de 10 e
2 moedas de 1 centavo.

Handwritten calculations:
40
10
50
510
24

Material digitalizado 28 – Resolução de Kauan do problema 12.

A solução de Kauan está correta, mas seu registro escrito não apresenta o processo de resolução.

No áudio⁷⁴ gravado, Kauan ensaia uma solução que permite troco. O pesquisador observa que essa proposta viola uma condição do enunciado.

Kauan associa o fato de não poder compor troco com a presença de três moedas de dez centavos. Deve achar plausível usar três moedas de 10 centavos pois sabe que precisa de moedas que não formem troco e que três moedas do mesmo valor, que some uma parte importante do dinheiro sem gerar troco parece ajudar na solução.

A partir de 30 centavos, Kauan vai compondo o conjunto com outras moedas. Começa com uma de 50 e afirma, após o pesquisador solicitar esclarecimentos, que não podiam ser duas de 50 pois, nesse caso, não poderia formar 7 centavos com outras duas moedas (esta atitude está explícito no áudio⁷⁵ gravado). O aluno vai seguindo essa linha de raciocínio até obter a solução que registra na folha. Fica claro que usa tentativa e erro em sua resolução.

Os registros de Kauan sugerem que usou tentativa e erro (questão 12), redução ao absurdo (questões 11 e 1), trabalhando pra trás (questão 9), indução (questões 6 e 7) e problemas auxiliares (questão 5 e 7).

Apresentação e análise das resoluções de Nadyne.

Resolução do problema 5.

⁷⁴ Áudio Kauan p.12.1.

⁷⁵ Áudio Kauan p.12.

5) Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

Dividindo a ida e volta de bicicleta
é igual 15 min. na ida e 15 min na volta

Por isso da para saber que a pé ela
gasta 45 min

É somando 45 min na ida e na volta
é igual a 90 min

Material digitalizado 29 – Resolução de Nadyne do problema 5.

Nadyne dá sinais de que entendeu o que o problema solicita e também compreendeu os dados do problema.

O registro da educanda é bastante organizado e sucinto (o que sugere o registro de uma resolução já idealizada). É possível inferir que tenha usado a heurística problemas auxiliares, já que chega à solução por meio de problemas que, embora não explícitos no enunciado, constituem informações suficientes para chegar na solução do problema proposto.

Resolução do problema 1.

Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?

Acredito que sejam 10 conchas, já que são 5 cores, pegando o dobro talvez tenha mais chances de sair 2 da mesma cor.

Material digitalizado 29 – Resolução de Nadyne do problema 5.

Embora não tenha conseguido uma resolução adequada, Nadyne dá pistas de que

Compreendeu o que é solicitado, assim como os dados.

A educanda intui que retirando mais conchas, a chance de retirar duas da mesma cor aumenta e está certa.

Há no enunciado o menção ao número 2 (duas conchas) e ao número 5 (número de cores de conchas). A aluna tenta o número 10 como solução (que é igual a $2 \cdot 5$). É sabido que é comum o aluno tentar realizar uma operação aritmética com os números que ocorrem no enunciado do problema de matemática, automaticamente, sem reflexão, e apresentar o resultado como resposta, que alias, com frequência, é o comportamento esperado pelo professor, numa espécie de acordo tácito entre educando e professor. (CHEVALLARD, 1988).

Resolução do problema 3.

3) Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.

Claro para (dividir) dividi-lo de
3 formas diferentes, na vertical, horizontal,
e na diagonal

Material digitalizado 30 – Resolução de Nadyne do problema 3.

Os registros da educanda sugere que compreendeu o que é solicitado e quais os dados.

Sua solução é bastante ingênua e reproduz a maneira mais frequente de dividir um objeto retangular (como repartir um chocolate, por exemplo). Assim, apesar da pobreza de detalhes do registro é possível inferir que Nadyne tenha usado a heurística problemas correlatos, para construir sua solução, mas tal conclusão tem caráter demasiadamente especulativo e, portanto, não será considerada no resumo dos dados.

Resolução do problema 8.

O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

Primeiro vai subir até o 13 andar, depois descer até o 5 andar, subir novamente indo até o 18 andar, descer até o 10 andar, depois descer até o 2 andar, subir até o 15 andar, descer até o 7 andar, subir novamente indo até o 20 andar, descer até o 12 andar, depois descer ao 4 andar, subir para o 17 andar, descer até o 9 andar, descer ao 1 andar, voltar para o 14 andar, ir para o 6 andar, depois subir para o 19 andar, descer para o 11, descer até o 3 andar, subir para o 16, e então descer mais uma vez chegando no 8 andar.

Material digitalizado 31 – Resolução de Nadyne do problema 8.

A educanda parece ter compreendido o enunciado, o que é solicitado e os dados.

De sua resolução é possível inferir que compreendeu o que seria o estado espaço do problema (as ações possíveis a partir da configuração inicial). A aluna faz a única sequência de movimentos permitidos e chega ao 8º andar, como solicitado no enunciado.

Resolução do problema 11.

11) Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?

Se o culpado falou a verdade, isso quer dizer que admitiu o roubo, a Lebre jogou a culpa no Chapeleiro, mas o testemunho dele e do Rato não foram julgados, e se não foram julgados, é porque são inocentes, o que me leva a crer que talvez estejam julgando as pessoas erradas.

Qua a Lebre mentou, mas foi pega na mentira, fazendo com que os outros não fossem julgados, e tendo que admitir o roubo.

Material digitalizado 32 – Resolução de Nadyne do problema 11.

A aluna parece ter compreendido o que o enunciado solicita (que determine quem roubou os biscoitos) mas dá sinais de que não compreendeu bem os dados.

A estudante fica bastante intrigada com o fato de não terem sido ouvidas todas as testemunhas. O pesquisador diz a ela que deve considerar que não foram ouvidas todas as testemunhas porque era possível descobrir quem roubou os biscoitos com as informações já obtidas.

Em seu registro escrito deixa claro que compreende que se o culpado dá um testemunho, deve admitir o roubo (já que o culpado necessariamente diz a verdade). Seria esperado que, em seguida, concluísse que a Lebre de Março não é culpada, entre outras coisas. Isso não acontece.

Afirma em seguida que a causa do fato dos outros suspeitos não terem sido ouvidos é a inocência destes. Tal suposição é falsa, embora plausível. Em seguida menciona a possibilidade de que os suspeitos sejam todos inocentes (o que é uma inferência correta tomando como verdadeiras as suposições consideradas pela aluna já que supõe a inocência do Chapeleiro e do Rato).

Por último, a estudante considera uma possibilidade que viola as condições do enunciado: A Lebre mentiu inicialmente e só depois confessa que é culpada (o que solucionaria a questão de os outros suspeitos não precisarem testemunhar).

Percebe-se, assim, que Nadyne não considera todos os desdobramentos do fato de a Lebre de Março ter mentido e isso compromete a possibilidade de resolução adequada.

Nota-se, também, que a aluna é capaz de uma composição de encadeamentos lógicos em sua linha de raciocínio: no último trecho do primeiro parágrafo de seu registro tem-se: “Se não foram julgados, é *porque* são inocentes o que me leva a crer que estejam julgando as pessoas erradas. Considerando A, B e C determinadas proposições, o encadeamento de sentenças anterior poderia ser expresso da seguinte maneira: $A \rightarrow B \rightarrow C$.

Portanto, é plausível que a não resolução do problema por Nadyne é circunstancial e que poderia resolver problemas de dificuldade parecida, já que é capaz de encadeamentos lógicos de sofisticação compatível com as dificuldades do problema.

Resolução do problema 7.

Material digitalizado 33 – Resolução de Nadyne do problema 7.

Nadyne parece ter compreendido adequadamente o que é solicitado e também os dados do problema (embora o pesquisador tenha alertado sobre o fato de que quando duas pessoas se cumprimentam, é contabilizado apenas um cumprimento).

Em sua resolução considera que cada pessoa realiza 9 cumprimentos (solução de um problema auxiliar que pode significar o uso da heurística problemas auxiliares).

Em seguida, ao contar os cumprimentos de cada pessoa, desconsidera os cumprimentos já contabilizados, o que sugere o conhecimento (mesmo que informal) de certos princípios de contagem.

Também menciona em seu registro que o número de cumprimentos a serem contados (de cada pessoa) vai diminuindo e faz a soma $9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1$. Isso sugere o uso da heurística indução.

A solução correta é 45 cumprimentos. A educanda chega em 46 por razão de um erro simples na soma das primeiras parcela (considera $9 + 8 = 18$).

Resolução do problema 6.

Material digitalizado 34 – Resolução de Nadyne do problema 6.

A aluna mostra compreender o que é solicitado e também os dados do problema.

Apresenta os primeiros passos da solução sem esclarecer como pensou e depois indica que o processo deve se repetir até que todas as pessoas estejam na outra margem do rio o que sugere o uso de indução.

No registro de áudio⁷⁶, após Nadyne realizar o procedimento resulta em um homem transportado e o bote e as outras pessoas no outro lado do rio:

Figura 18- Ilustração de travessia de um homem.

O pesquisador pergunta como a aluna prosseguirá a resolução. Nadyne afirma que deve agora atravessar outro homem (tentativa e erro), mas logo percebe que isso acarretaria retrocesso e então afirma que deve repetir o processo já realizado até que todos atravessem o rio.

Assim, faz uso também de tentativa e erro.

Resolução do problema 9.

⁷⁶ Áudio Nadyne p.12.

9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.²

Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos (figura 1), se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

Colocando uma moeda de cada lado, as verdadeiras tem o mesmo peso, então a balança vai ficar equilibrada, portanto só ir acrescentando as moedas até que uma não deixe a balança equilibrada, para acelerar o processo vai sempre trocando as moedas, ~~na~~ nunca repetindo as mesmas

Material digitalizado 35 - Resolução de Nadyne do problema 9.

Nadyne parece não ter compreendido o que é solicitado pois sua pretensa solução permite somente identificar um conjunto de duas moedas em que uma é falsa: Afirma que para “acelerar o processo” pode ir pesando de duas em duas. Nem é possível determinar a moeda falsa pois a aluna indica que não deve-se repetir moedas nas pesagens, assim, deve trocar as moedas de duas em duas e quando até que a balança desequilibre. A aluna desconsidera a possibilidade da moeda falsa ser a 25ª moeda que restaria. É possível que a aluna tenha usado trabalhando para trás, pois sua resolução culmina numa situação em que ocorre o desequilíbrio da balança, fato importante na identificação da moeda falsa (mas não necessário ou suficiente). A partir da identificação dessa situação favorável (desequilíbrio da

balança), pensou o que seria necessário para provocá-la. Mas essa interpretação não é baseada nos registros, sendo apenas de caráter especulativo.

Resolução do problema 12.

12) Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

transcrição da solução

$$\begin{aligned} 50 &= 1 > 75 \\ 25 &= 1 > 75 \\ 10 &= 3 = 3,05 \\ 5 &= \\ 1 &= 2 = 2,01 \end{aligned}$$

Elas têm uma moeda de 50 centavos, 1 de 25 centavos, 3 de 10 centavos, e 2 de 1 centavo e não possuem troco, porque as moedas não possuem moedas que somem o valor que o homem oferece.

Material digitalizado 36 – Resolução de Nadyne do problema 12.

A estudante parece ter compreendido o enunciado já que apresenta uma solução correta.

Em seu registro escrito não é possível identificar seus processos mentais pois parece apenas expressar uma solução que já havia idealizado.

Nota-se o uso incorreto do emprego do símbolo de igualdade. Faz por exemplo, $50 = 1$. Não significa que acredite que 50 centavos é igual a 1 centavo mas que deve usar uma moeda de 50 centavos.

No áudio⁷⁷, o pesquisador pergunta por que usou três moedas de 10 centavos. A aluna diz que duas moedas de 10 e uma de 5 geraria troco, e então não pode usar de 5 e então usa três de dez. É possível interpretar esta fala como uso de redução ao absurdo, pois refuta o uso da moeda de 5 explicando que violaria o uma condição do enunciado.

Afinal, os registros sugerem que foram usadas as heurísticas redução ao absurdo (no problema 12), tentativa e erro (problema 6), indução, no problema 6 e problemas auxiliares (nos problemas 5 e 7).

Resoluções de Matheus O.

As atividades tiveram início às 10:40 da manhã dos dias 30 de maio e 06 de junho. Ocorreram na sala de informática, já que estava desocupada e oferecia um ambiente mais adequado ao estudo. Estavam presentes na sala Matheus, Saulo (seu colega de turma que também participou do estudo) e o pesquisador.

Registro da resolução do problema 1.

⁷⁷ Áudio Nadyne p.12.

- 1) Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?

*6, para garantir a retirada de conchas iguais.
Por se retirarmos 5 e todas forem diferentes
com certeza a sexta extração de uma cor igual a
uma das 5*

Material digitalizado 37 – Resolução de Matheus O. do problema 1.

Matheus parece ter compreendido o que é solicitado, assim como os dados do enunciado.

Seu registro parece ser somente a expressão da solução já idealizada e alguns esclarecimentos de como pensou, pois o aluno apresenta a solução para depois apresentar detalhes do processo de resolução.

Considera a possibilidade das 5 primeiras extrações envolverem 5 cores diferentes e em seguida afirma que o mesmo não pode ocorrer com 6 extrações (provavelmente raciocinando por absurdo, pois é plausível que tenha percebido que ocorrer uma sexta extração de uma concha com uma sexta cor, colide com um dos dados do problema).

Resolução do problema 3:

3) Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.

Material digitalizado 38 – Resolução de Matheus O. do problema 3.

O estudante indica que não compreendeu bem o que é solicitado (no áudio⁷⁸ gravado o aluno mostra surpresa quando o pesquisador diz que deve descobrir de quantas formas diferentes o quadrado pode ser dividido).

O pesquisador explica que o enunciado solicita a quantidade de divisões possíveis (interferência indevida). O educando volta a refletir sobre o problema.

⁷⁸ Áudio Matheus O. p.3.2.

As primeiras figuras desenhadas correspondem às divisões mais triviais: Por traço vertical, horizontal e diagonal. Logo abaixo, o educando percebe a possibilidade de traçar uma linha que divide o quadrado em dois trapézios congruentes. Apresenta algumas dessas divisões e no conjunto de figuras da direita parece notar que qualquer linha que passe pelo centro do quadrado divide a figura em duas peças congruentes.

Após desenhar as figuras, registra que existem “incontáveis” maneiras de dividir o quadrado da maneira proposta. Também enuncia que qualquer traço que “passe pelo centro da figura” divide-a em duas peças “iguais”.

É plausível que tenha usado pensamento indutivo (que é chamado aqui de indução) em sua resolução, pois apresenta uma sequência de divisões, percebe que qualquer divisão com certas características das já feitas satisfazem as condições do enunciado e conclui que *“sempre haverá um traço que divida o quadrado em duas partes iguais”*, provavelmente querendo dizer que para qualquer conjunto de divisões haverá outra divisão não incluída nas divisões anteriores.

Resolução do problema 5.

Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

Ida e volta com bicicleta leva 30 minutos, logo só a ida levaria 15 minutos, assim como o volta. Se ela demora 1 hora com bicicleta na ida ou no volta mais a pé. Já descobrimos que com bicicleta leva 15 minutos, ficaria 1 hora menos o tempo da bicicleta, resultando em 45 minutos a ida ou o volta a pé. Se ela fosse e voltasse a pé levaria 1:30.

foi dividido 60 minutos por 2 resultando em 15. foi subtraído de 1 hora, 15 minutos que deu resultado do tempo que levaria a pé, a ida ou o volta e foi somado o dobro de 45 que deu o tempo final que levaria.

Material digitalizado 39 – Resolução de Matheus O. do problema 5.

O registro escrito de Matheus indica que compreendeu o que é solicitado e também os dados do problema.

O educando resolve um problema auxiliar (obtem o tempo de ida ou volta de bicicleta) o que indica que usou a heurística problemas auxiliares. Após obter o tempo de ida de bicicleta, compara essa informação com os outros dados do enunciado obtendo o tempo do percurso a pé, resolvendo assim um segundo problema auxiliar.

No último parágrafo de seu registro faz uma síntese de sua resolução mostrando que está razoavelmente consciente do processo de resolução que realiza.

Resolução do problema 8.

8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

1º: 13 - sobe
2º: 8 - desce

Handwritten calculations showing the sequence of button presses to reach the 8th floor from the 13th floor:

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 - 8 \\
 \hline
 5 \\
 + 13 \\
 \hline
 18 \\
 - 8 \\
 \hline
 10 \\
 + 13 \\
 \hline
 23 \\
 - 8 \\
 \hline
 15 \\
 - 8 \\
 \hline
 7 \\
 - 8 \\
 \hline
 -1
 \end{array}$$

Side calculations:

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 - 8 \\
 \hline
 5 \\
 + 13 \\
 \hline
 18 \\
 - 8 \\
 \hline
 10 \\
 + 13 \\
 \hline
 23 \\
 - 8 \\
 \hline
 15 \\
 - 8 \\
 \hline
 7 \\
 - 8 \\
 \hline
 -1
 \end{array}$$

Final calculation:

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 - 8 \\
 \hline
 5 \\
 + 13 \\
 \hline
 18 \\
 - 8 \\
 \hline
 10 \\
 + 13 \\
 \hline
 23 \\
 - 8 \\
 \hline
 15 \\
 - 8 \\
 \hline
 7 \\
 - 8 \\
 \hline
 -1
 \end{array}$$

Material digitalizado 40 – Resolução de Matheus O. do problema 8.

O aluno provavelmente compreendeu o que é solicitado, mas não compreendeu as operações permitidas ou não entendeu os dados do enunciado, já que em todas as três resoluções ignora o fato de que o elevador tem somente 20 andares.

Os registros escritos e de áudio não permitem inferir se usou uma das heurísticas listadas neste trabalho e nem foi identificada qualquer outra heurística.

Resolução do problema 7.

Quando um grupo de dez pessoas se encontra e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos)

Handwritten student solution for problem 7. The student lists numbers 1 through 10 on the left, with some grouped by a bracket and labeled 'a'. To the right, they write 'cumprimento 10 e recebe 3 apertos' for 1, 'cumprimento 8 e recebe 0 apertos' for 2, and then a column of numbers 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. At the bottom, they write 'são 45 apertos ao total'.

Person	Handshakes received
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

Total: 45 apertos

Material digitalizado 41 – Resolução de Matheus O. do problema 7.

O estudante parece ter compreendido adequadamente o que é solicitado e também os dados do problema.

Associa cada pessoa com um número de 1 até 10.

Conta o número de cumprimentos da “pessoa 1” (9 cumprimentos).

Conta o número de cumprimentos da “pessoa 2”, já descontando o cumprimento contabilizado na contagem anterior (8 cumprimentos).

Da “pessoa 3” em diante os registros são mais econômicos, o que sugere que o educando tenha automatizado a contagem dando pistas de que percebe que o número de cumprimentos vai diminuindo de unidade em unidade, ou seja, usou a heurística indução. Também, ao contar os cumprimentos de cada pessoa, separadamente, decompôs o problema em problemas auxiliares.

Resolução do problema 11.

Material digitalizado 42 – Resolução de Matheus O. do problema 11.

O aluno dá mostras de que entendeu o que o enunciado solicita, mas não compreendeu bem os dados do problema, pois não usa o fato essencial ou seus desdobramentos (quem roubou os biscoitos sempre diz a verdade).

Afirma que quem roubou foi o Rato Silvestre (afirmação correta), mas a justificativa é inconsistente o que leva a crer que escolheu o Rato para ladrão por sorte ou por algum mecanismo mental não identificado.

No último parágrafo o aluno afirma ser o Chapeleiro o culpado embora tal afirmação contrarie a afirmação do parágrafo anterior e em seguida volta a escrever que o culpado é mesmo o Rato, mas suas justificativas são inconsistentes. Afirma, também, que o Chapeleiro é culpado, mas se negasse tal fato estaria falando a verdade. Em suma, os argumentos de Matheus são mal estruturados e também não foi possível análise mais detalhada. Os registros de áudio de Matheus não são muito mais elucidativos que o registro escrito.

Resolução do problema 6:

Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?

Primeiro 2 meninos vão e voltam (junto com o bote). Depois vão um homem e voltam 1 menina com o bote, e depois vão os dois meninos novamente com o bote e repetem o processo mais 3 vezes.

Material digitalizado 43 – Resolução de Matheus do problema 6.

Matheus parece ter compreendido da maneira esperada o que o problema solicita, assim como os dados do enunciado.

O aluno não dá pistas de como decidiu que as duas crianças deviam atravessar primeiro e nem de como decidiu sobre o resto do processo, mas fica razoavelmente indicado que usou indução (na última linha de seu registro, ele afirma que o processo deve se repetir para que o problema seja solucionado).

Resolução do problema 9.

9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.²

Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos (figura 1), se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

Se põe 12 moedas de cada lado, e se a balança
com de cada lado não encontra a moeda
mais pesada. Se nenhum derrota for. Pode
pegar a moeda que ficou separada e comparar
com outras.

Material digitalizado 44 – Resolução de Matheus O. do problema 9.

Não fica claro se Matheus compreendeu o que é solicitado, já que o processo que indica serve para determinar qual é a moeda mais leve ou pesada, além de determinar se é mais leve ou pesada. Em certa altura de sua resolução, ele escreve “até encontrar a moeda mais pesada”. Parece então assumir que a moeda falsa é mais pesada, o que é um indício de que o estudante não tenha compreendido o que o enunciado pede.

De toda forma, sua resolução sugere uma sequência de pesagens muito longa. Embora essa sequência sirva para determinar a moeda falsa, quase que prescinde de estratégia, pois é uma das formas mais trabalhosas e menos elaboradas de determinar a moeda falsa. É possível que tenha usado a heurística trabalhando para trás, pois parece implícito em seu comportamento que supõe que, para que o problema fosse resolvido, seria necessário comparar a moeda falsa com alguma outra diretamente, e então, suas ações vão todas no sentido de criar tal situação. Mas a afirmação da possibilidade do uso de trabalhando para trás é meramente especulativa, pois os registros não apontam contundentemente nesta direção.

O problema 12 não foi resolvido por Matheus O., pois tal problema só poderia ser apresentado ao aluno num eventual 3º encontro o que não seria viável.

Matheus dá indícios de que usou indução (nos problemas 3, 6 e 7) e problemas auxiliares (nos problemas 5 e 7).

Apresentação das Resoluções de Saulo.

Resolução do problema 1.

1. Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?

Concisão é ideal, porque não há cores iguais. Se retirarmos as conchas com apenas 5 dentro do saco, haverá repetição.

X — 5

2 — X

Nessa ação não podemos dar a garantia, mas sim a probabilidade de que poderemos fazer a ação com sucesso, porque há chances de conchas dentro do saco. E a quantidade é variável e incerta.

Material digitalizado 54 – Resolução de Saulo do problema 1.

A primeira frase do registro escrito de Saulo indica que não entendeu o que é solicitado. Parece que entendeu que deve encontrar o número máximo de extrações de conchas que possibilite não repetição de cores. Essa interpretação está de acordo com o primeiro parágrafo e, também, com o segundo (e último) em qual considera que tirar conchas não repetidas do saco é um evento que depende do acaso.

Resolução do problema 5.

⁸⁰ A definição de especialização consta na página 32.

O aluno dá sinais de que entendeu o que é solicitado, assim como os dados do enunciado.

Não faz registro de qualquer conta para obter o dado de que o percurso de bicicleta toma 15 minutos, embora esteja ciente desse dado.

Obtém o tempo gasto no percurso a pé (45 minutos) e, então, pode-se considerar que usou problemas auxiliares.

No parágrafo final de seu registro, Saulo explicita como calculou o tempo de percurso de bicicleta (resolução de um problema auxiliar) e, também, o tempo gasto na ida ou volta a pé (resolução de outro problema auxiliar).

O educando obtém a solução correta do problema.

Resolução do problema 3.

3) Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.

4 divisões: de forma horizontal, duas peças idênticas
de forma vertical, duas e mesmas resultados
de forma diagonal, tanto a lado direito com o esquerdo que
também obtêm os resultados esperados.

Material digitalizado 56 – Resolução de Saulo do problema 3.

O aluno parece ter compreendido adequadamente o problema.

Dá as divisões triviais: Horizontal, vertical e diagonais.

Nesse e em outros problemas, ele mostra boa capacidade de verbalizar suas resoluções.

Resolução do problema 8.

8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

20 Andares / 2 botões $13 = 13$ andares $\uparrow$ Botão não funciona se não existem andares suficientes
 $8 = 8$ andares $\downarrow$ suficiente

$PP = 13^o$
 $PC = 8^o$

$PP = \text{Ponto de Partida}$
 $PC = \text{Ponto de Chegada}$

$8 \times 13 = 104$
 $+ 13 = 117$
 $117 - 8 = 109$
 $109 - 8 = 101$
 $101 - 8 = 93$
 $93 - 8 = 85$
 $85 - 8 = 77$
 $77 - 8 = 69$
 $69 - 8 = 61$
 $61 - 8 = 53$
 $53 - 8 = 45$
 $45 - 8 = 37$
 $37 - 8 = 29$
 $29 - 8 = 21$
 $21 - 8 = 13$
 $13 - 8 = 5$
 $5 - 8 = -3$

Para chegar ao 8º andar não é necessário que a pessoa passe no 9º andar e desça ao escalar até o 8º. Logo, 1º andar mais próximo de PC ou que passe no 7º e suba para o 8º.

Material digitalizado 57 – Resolução de Saulo do problema 8.

Saulo compreendeu o que é solicitado e os dados. Organiza as informações relevantes, tenta fazer uso de figura, opera corretamente o elevador, mas comete um erro em uma conta ($14 - 8 = 5$) e tal erro inviabiliza a solução esperada.

O aluno observa que pode descer no 9º andar e descer um andar de escada ou descer no 7º e ir ao 8º de escada o que mostra que está atento ao que o enunciado solicita e mostra bom transito entre abstrato e concreto (números obtidos por meio das contas e posição do elevador no prédio).

Resolução do problema 11.

Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?

Lebre → acusado (Chapeleiro)
C + R S testemunharam
Chapeleiro falou a verdade
Lebre + Rato *A Lebre de Março roubou*

Material digitalizado 58 – Resolução de Saulo do problema 11.

Saulo compreendeu o que é solicitado.

No áudio⁸¹ gravado faz a seguinte afirmação: “Só o culpado fala a verdade, o Chapeleiro foi acusado, logo o Chapeleiro diz a verdade”. Parece então ter compreendido que a Lebre mente (que implicaria em sua inocência) e que portanto, o chapeleiro é inocente, já que é acusado pela Lebre. Em suma, mostra alguma desenvoltura com a lógica. Saulo explica, em seguida, que o testemunho do Chapeleiro Maluco e do Rato Silvestre não foram julgados, pois a acusação da Lebre de Março era falsa. Apresenta, na sequência, uma linha de raciocínio duvidosa e conclui que a Lebre de Março foi a culpada (está errado).

Não foi possível determinar se o aluno fez uso de alguma estratégia e tão pouco, qual estratégia usou.

⁸¹ Áudio Saulo p.11

Resolução do problema 7.

7) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).

9×9

Uma pessoa aperta 9
mão, deixando um aperto
que se todos as pessoas se
cumprimentam, ~~tem~~ tem o
outro, ~~tem~~ haveria 53 apertos

2 3 4 5 6 7 8 9
5 6 7 8 9
X 5 6 7 8 9
5 6 7 8 9 10

37 apertos

2 3 4 5 6 7 8 9
3 4 5 6 7 8 9
4 5 6 7 8 9
5 6 7 8 9
6 7 8 9
7 8 9
8 9
9

9 apertos
7 apertos
6 apertos
5 apertos
4 apertos
3 apertos
2 apertos
1 aperto

$\downarrow = 37$ apertos

Material digitalizado 59 – Resolução de Saulo do problema 7.

Os registros do aluno sugerem que compreendeu o que é solicitado e os dados.

Inicialmente, Saulo obtém o número de cumprimentos de uma pessoa (resolve assim um problema auxiliar). Em seguida, conclui que houveram 81 (9×9) cumprimentos ao que o pesquisador informa estar incorreta sua solução.

Em seguida, ele numera as pessoas de 1 a 9 (ele esquece de numerar uma das pessoas pois são dez pessoas) e conta os cumprimentos de cada uma, descontando os cumprimentos que já foram contabilizados. Conta 9 cumprimentos da pessoa 1, quando deveria contar somente 8, já que não considera a décima pessoa. O resto da resolução ocorre corretamente, mas por um erro de cálculo e por desconsiderar uma das pessoas, obtém 37 cumprimentos e não 45.

Outros alunos que decompuseram o problema 7 em subproblemas, conseguiram observar o padrão de decrescimento do número de cumprimentos, o que não se observa nesta resolução.

Resolução do problema 6.

Material digitalizado 60 – Resolução de Saulo do problema 6.

O aluno não compreendeu os dados, embora aparentemente tenha entendido o que é solicitado.

Pode ser notado que o aluno faz uso de figuras para auxiliar sua resolução.

Pergunta ao pesquisador se o bote pode voltar sozinho e, também, faz perguntas sobre a capacidade do bote. O pesquisador esclarece suas dúvidas.

Após ter esclarecidas suas dúvidas, o aluno faz os registros apresentados. É possível identificar a heurística indução pois após atravessar alguns homens, indica que o processo de travessia já apresentado deve ser repetido até concluir a travessia do grupo.

Resolução do problema 9.

9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.¹

Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos (figura 1), se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

Como temos 25 moedas e uma falsa, primeiro temos que retirar uma moeda aleatória, sobrando 24 moedas, então daí, dividimos por 2, que dá 12 moedas em cada prato da balança. Com uma moeda falsa temos four ~~four~~ trocamos de moedas até que a balança se equilibra. Como a balança se equilibra, a moeda que está fora da balança será a falsa.

Material digitalizado 61 – Resolução de Saulo do problema 9.

Saulo compreendeu os dados embora não tenha compreendido o que é solicitado, pois seu método permite identificar a moeda falsa. Para saber se é mais leve ou pesada, deveria haver um passo a mais.

A resolução que apresenta precisa usar a balança muito mais vezes que o número mínimo necessário. Apesar disso, sua resolução é original, pois todos os outros alunos que

conseguiram se aproximar da solução apontaram caminhos que resultavam na comparação de duas moedas, sendo falsa uma dessas. A determinação da moeda falsa era sempre baseada no desequilíbrio da balança ao passo que a resolução de Saulo é baseada no equilíbrio da balança (quando a balança equilibra é que consegue determinar a moeda falsa) e em vez de buscar isolar um conjunto pequeno de moedas, que inclui a moeda falsa, identifica um conjunto de moedas verdadeiras, identificando a moeda falsa por não pertencer ao conjunto das moedas verdadeiras. Não foi possível enquadrar as estratégias e heurísticas praticadas pelo aluno, seja por falta de informações nos registros ou por insuficiência teórica.

Resolução do problema 12.

Quais são as moedas que as garotas têm?

50 centavos	moeda	1
25 "	"	1
10 "	"	1
5 "	"	1
1 "	"	1
0,07		

0,30

0,25

0,50

1,05

Agrupar de 50 975
menos de 25 820

de 25 a 50 695

de 50 a 75 402

 097 *falta 50*

50 centímetros não há no larva
25 " " " " " "

test at 5% 20
~~assumptions~~

class at 0.03
 lower at 0.05

 = 0.07
 lower at 0.27
 lower at 0.50 0.27

class de 0,25	0,50
class de 0,05	0,07
class de 0,05	0,25
<u>0,07</u>	<u>0,20</u>
class de 50	1007
0	75

Lema de 0,50 0,50
 duas de 0,25 x 0,50
~~duas de 0,50~~ x 0,05
 uma de 0,05 0,02
 duas de 0,02 0,02
 5,07

brs	de 0,30	0,30
de 0,01	0,30	
de 0,25	0,25	
de 0,00	0,00	
	<u>0,85</u>	

184

Fica claro que Saulo tenta formar a quantia necessária algumas vezes e falha (início do registro). Fica então caracterizada a heurística tentativa e erro. Pode ser notado que nas primeiras quatro tentativas sempre ocorrem ao menos uma moeda de 5 centavos e duas de 1 centavo. O aluno deve imaginar que precisa formar 7 centavos independentemente do resto das moedas. É possível inferir, com certa segurança, que ao imaginar o problema resolvido, as garotas têm posse de 1 real mais 7 centavos e portanto, é condição necessária formar 7 centavos separadamente. Ou seja, ao imaginar o problema resolvido, imagina uma condição que viabilize a solução, assim, plausível que tenha usado a heurística trabalhando para trás. Ao usar uma moeda de 5 centavos nas quatro primeiras tentativas, ele deve ter percebido que essa moeda impossibilita o uso de mais de uma moeda de 10 centavos e então desiste de usar uma moeda de 5 centavos.

Finalmente, Saulo tenta uma moeda de 50, uma de 25, duas de dez e duas de 1 centavo (canto inferior esquerdo do registro). Ele observa que faltam 10 centavos e, em seguida, obtém a solução do problema.

Resumindo as ações observadas do aluno ao longo da atividade: o aluno, aparentemente, usou a heurística especialização (no problema 1), problemas auxiliares (nos problemas 5 e 7), indução (no problema 6), tentativa e erro (no problema 12) e trabalhando para trás (no problema 12).

Resoluções de Matheus R.

Nos dias 29 de agosto e 5 de setembro de 2016, às 10h40min Matheus R., Victor e o pesquisador foram à sala de informática onde os estudantes tentaram resolver os problemas apresentados.

Resolução do problema 1.

1. Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?

R: Retirar 6 conchas porque são 5 cores e não posso garantir que posso ter menor o número.
1 Saco : 5 cores

Material digitalizado 45 – Resolução de Matheus R. do problema 1.

O educando dá sinais de que compreendeu o que é solicitado e os dados. Nota-se que a primeira informação apresentada é a solução e então os argumentos abaixo servem apenas para representar uma resolução já idealizada, acabada.

O educando registra que 5 conchas não são suficientes para garantir a repetição de cores, mas 6 conchas são. É plausível que tenha imaginado que podia retirar 5 conchas de 5 cores distintas (afirma categoricamente que não é possível garantir o que é solicitado com cinco extrações) mas não seis, pois conchas de 6 cores distintas já que existem só 5 cores de conchas no saco. Assim, teria usado redução ao absurdo: 6 conchas de 6 cores chocaria com o fato de existirem somente 5 cores de conchas disponíveis.

Resolução do problema 5.

Material digitalizado 46 – Resolução de Matheus R. do problema 5.

Matheus compreende o que é solicitado e quais os dados, considerando que sua resolução está correta.

O aluno obtém o tempo gasto no percurso de bicicleta (acima do enunciado escreve 15 bicicleta) usando, assim, a heurística problema auxiliar. Consegue também o tempo gasto no percurso a pé (escreve acima do enunciado 45 + 45 e essas parcelas certamente representam a soma dos tempos gastos no percurso de ida e volta a pé) usando novamente a heurística problema auxiliar. O áudio⁸² gravado corrobora com a análise do registro escrito.

Embora os registros estejam desorganizados, a resolução está correta.

Resolução do problema 3.

⁸² Áudio Matheus R. p.5.

Material digitalizado 47 – Resolução de Matheus R. do problema 3.

Não é possível saber se Matheus compreendeu que é desejado, que descubra que é possível dividir o quadrado em duas peças idênticas de uma infinidade de maneiras diferentes, ou se entende que deve apresentar apenas algumas divisões.

O educando apresenta somente as divisões mais triviais constituídas por traços diagonais, traço vertical e horizontal. O caráter sintético de sua resolução dificulta uma análise mais detalhada.

Resolução do problema 8.

8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

Handwritten solution showing a sequence of elevator moves starting from floor 13 and ending at floor 8. The moves are represented by a series of arithmetic operations:

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 -8 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 +13 \\
 \hline
 18
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 18 \\
 -8 \\
 \hline
 10
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10 \\
 -8 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 +13 \\
 \hline
 15
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 -8 \\
 \hline
 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 +13 \\
 \hline
 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 20 \\
 -8 \\
 \hline
 12
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12 \\
 -8 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 +13 \\
 \hline
 17
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \\
 -8 \\
 \hline
 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9 \\
 -8 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 +13 \\
 \hline
 14
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 -8 \\
 \hline
 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6 \\
 +13 \\
 \hline
 19
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 19 \\
 -8 \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 -8 \\
 \hline
 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 +13 \\
 \hline
 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 16 \\
 -8 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

The final result is 8, which is the target floor. The sequence of moves is: 13 down to 5, 5 up to 18, 18 down to 10, 10 down to 2, 2 up to 15, 15 down to 7, 7 up to 20, 20 down to 12, 12 down to 4, 4 up to 17, 17 down to 9, 9 down to 1, 1 up to 14, 14 down to 6, 6 up to 19, 19 down to 11, 11 down to 3, 3 up to 16, and finally 16 down to 8.

Material digitalizado 48 – Resolução de Matheus R. do problema 8.

Ele parece ter compreendido os dados do enunciado, já que realiza as operações permitidas corretamente, mas talvez não tenha entendido o que é solicitado, já que chega ao 8º andar, mas continua realizando subidas e decidas com o elevador desnecessariamente. Nota-se que usa o andar 0 (penúltima conta realizada), provavelmente assumindo-o como térreo.

A resolução é muito sucinta e não foi possível análise mais aprofundada.

Resolução do problema 11.

Material digitalizado 49 – Resolução de Matheus R. do problema 11.

O educando mostra que entendeu o que o problema solicita, mas parece não entender os dados ou seus desdobramentos. No áudio⁸³, ele afirma que o único suspeito é o Chapeleiro Maluco. Isso é incorreto. Matheus R. se mostra confuso com o fato de os testemunhos dos outros não terem sido julgados.

Assume que a Lebre de Março falou a verdade e, portanto, seria culpada mas não considera o conteúdo da afirmação da Lebre de Março pois o conteúdo da afirmação, sendo verdadeira, geraria contradição com a solução proposta.

O aluno escreve "Foi a lebre de março, pois o enunciado diz "só o culpado falou a verdade" e a Lebre foi a única que falou." Raciocinou da seguinte forma: O enunciado diz que só o culpado fala a verdade, então alguém deve ter dito a verdade. No texto do

⁸³ Áudio Matheus R. p.11.

problema está claro que só a Lebre falou, então esta é o personagem que deve ter dito a verdade. Esse raciocínio é coerente, embora, não esteja estritamente correto.

Resolução do problema 6.

Material digitalizado 50 – Resolução de Matheus R. do problema 6.

O educando compreende o que é solicitado, mas inicialmente não compreende os dados e sugere (verbalmente) que todos devem embarcar simultaneamente no bote. O pesquisador ressalta a impossibilidade dessa ação.

Após isto, o educando diz que deve atravessar os dois meninos e após isso atravessar os nove homens, um por vez. Parece apressado, não faz figuras ou diagramas, mostra não compreender as ações permitidas. Suas tentativas, uma após outra, violam condições do enunciado.

O pesquisador explica as condições do problema e o aluno apresenta, oralmente, uma solução adequada. É solicitado que registre sua resolução, o que resulta no registro escrito anterior.

No registro é possível assumir com certa segurança que o aluno usou a heurística indução, pois após alguns passos, sugere que o processo deve se repetir e conclui corretamente a resolução. Nota-se que só compreendeu o problema quando apresentado verbalmente pelo pesquisador e só conseguiu elaborar a resolução oralmente para depois registrar no papel, após o pesquisador solicitar que o fizesse.

Resolução do problema 7.

7) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).

5 apertos de mão.

R. 45 apertos

The diagrams show three groups of people shaking hands:

- Group 1: 2 people, 1 handshake (labeled 1-1).
- Group 2: 3 people, 3 handshakes (labeled 2-2).
- Group 3: 4 people, 6 handshakes (labeled 3-3).

The list of handshake counts for groups of 2 to 10 people is:

Number of People	Number of Handshakes
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45

The final calculation for 10 people is shown as:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

Material digitalizado 51 – Resolução de Matheus R. do problema 7.

Matheus dá sinal de que compreendeu o que é enunciado e, também, os dados.

Primeiro considera que ocorreriam 5 cumprimentos no total (deve ter imaginado o grupo de dez dividido em dois grupos de 5 que se cumprimentam simultaneamente).

Das figuras que desenhou, é possível concluir que tentou calcular todos os cumprimentos de uma só vez. Não deve ter tido êxito, pois a figura é muito confusa (primeira sequência de 1's ligados por arcos).

Após isso, decide contar quantos cumprimentos a pessoa "1" realiza (numera as pessoas de 1 até 10). Nesse passo é possível considerar que decompôs o problema em outros problemas mais amigáveis e portanto usou problemas auxiliares.

Matheus conta os cumprimentos da pessoa 1 até a pessoa 3, identifica um padrão de decrescimento no número de cumprimentos a contar de cada pessoa e da pessoa 4 até a pessoa 10 não faz qualquer figura. É possível considerar que usou a heurística indução.

Resolução do problema 9.

9) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.

Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos (figura 1), se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

R: Dividiria as moedas 1 em 1 e ia aumentando até dar 12 moedas verdadeiras e depois dividiria o resto das moedas até achar a falsa.

25 moedas

1 falsa

Material digitalizado 52 – Resolução de Matheus R. do problema 9.

O aluno não parece ter entendido plenamente o que é solicitado, pois não determina o número de pesagens necessárias.

Sua letra não é clara. Escreve “Dividiria as moedas 1 em 1 e ia aumentando até dar 12 moedas verdadeiras e depois dividiria o resto das moedas até achar a falsa.”

É difícil ter certeza do que quis dizer. A interpretação que parece mais plausível é a de que pretende ir adicionando uma moeda em cada prato. Mas não escreve que pretende

parar o processo quando a balança desequilibrar e sim quando tiver 12 moedas em cada prato. Considera que nesse ponto, a balança desequilibrará (embora seja possível que não desequilibre e que a moeda falsa seja a 25ª moeda, não colocada em qualquer dos pratos).

Mesmo que ocorra o desequilíbrio dos pratos, não seria possível determinar qual dos conjuntos de 12 moedas inclui a moeda falsa. O aluno ignora esse importante fato e sugere ir dividindo o conjunto de 12 moedas que inclui a falsa (imagina-se que pretende dividir os conjuntos sempre por 2) até determinar a moeda falsa. Esse procedimento só seria possível se soubesse se a moeda falsa é mais leve ou pesada (que é exatamente o que é solicitado no enunciado) e para saber isso, seria necessária uma passagem que Matheus não descreveu.

Embora sua resolução seja inconsistente, o método é bastante próximo de um dos métodos mais adequados de resolver o problema que consiste em isolar a moeda falsa dividindo sempre que possível o conjunto em que está em dois, isolando assim a moeda falsa.

Resolução do problema 12.

12) Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Obs: Nosso sistema monetário tem moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e de 1 real.

Material digitalizado 53 – Resolução de Matheus R. do problema 12.

O aluno lê o enunciado e sente-se inseguro. Diz não entender, mas sugere algumas soluções (que sempre violam alguma condição do enunciado) que caracterizam tentativa e erro.

Em seu registro é possível identificar uma tentativa: "27 + 50 = 77" e os riscos abaixo dos valores possíveis das moedas na última linha do enunciado sugerem tentativa e erro.

No registro de áudio⁸⁴, Matheus sugere a seguinte solução: quatro moedas de 25, uma de 5 e duas de 1. O pesquisador mostra que essa configuração viola a condição de não poder trocar qualquer moeda.

Em seguida, o educando diz ter certeza de que precisa haver uma moeda de 5 e duas de 1 para compor 7 centavos e essa atitude indica que usou a heurística trabalhando para trás, pois considera que para ter 1 real e 7 centavos (imagina então o problema resolvido), precisará compor 7 centavos com uma moeda de 5 e duas de 1 (condição que supostamente levaria à solução). O aluno continua, diz que além de uma de 5 e duas de 1 precisará de mais quatro moedas. O estudante não consegue desenvolver a solução a partir das condições que o uso de uma moeda de 5 e duas de 1 acarretaria. O pesquisador diz que deve desistir da moeda de 5 e das duas de 1 (intervenção provavelmente inadequada, mas o educando já havia apresentado uma boa quantidade de estratégias no problema).

No canto inferior esquerdo da tela, o aluno escreve $50 + 30 + 25 + 2$ que indica a solução correta.

Os registros de Matheus R. indicam que as heurísticas redução ao absurdo (no problema 1), problema auxiliar (nos problemas 5 e 7), indução (nos problemas 6 e 7), tentativa e erro (no problema 12) e trabalhando pra trás (no problema 12).

Apresentação das resoluções de Victor.

Resolução do problema 1.

⁸⁴ Áudio Matheus R. p. 12.

Material digitalizado 63 – Resolução de Victor do problema 1.

Victor parece ter compreendido o que é solicitado, assim como os dados do problema.

O aluno considera o pior dos cenários: as cinco primeiras conchas retiradas de cinco cores diferentes. Assim, é possível considerar que usou redução ao absurdo, pois embora não esteja explícito no enunciado, considerando que ocorreram todas as cinco cores, ocorrer uma sexta contrariaria um dado do enunciado (só existem conchas de cinco cores no saco) o que gera uma contradição.

Resolução do problema 5.

5) Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

Victor 31

→ pé bike ← = 1 hora
ou

bike → pé ← = 1 hora

Se ela vai e volta a pé uma hora total de 30 min
logo, ida 15 e volta 15.

indo a pé + bike = 1 hora, retire $60 - 15 = 45$ min (ida ou volta andando), logo, indo e voltando a pé $45 + 45 = 90$ min (1h 30 m)

Material digitalizado 64 - Resolução de Victor do problema 5.

Victor compreendeu o enunciado.

Victor, primeiro obtém o tempo gasto no percurso de ida ou volta de bicicleta (resolução de um problema auxiliar). Em seguida, ele obtém o tempo gasto na ida ou volta a pé (resolução de outro problema auxiliar). Finalmente, o aluno obtém a solução do problema. Assim, sua resolução apresenta atitude passível de ser classificada como problemas auxiliares.

Resolução do problema 3.

Material digitalizado 65 – Resolução de Victor do problema 3.

O educando parece ter compreendido o enunciado.

Obtém somente as divisões triviais do quadrado. Menciona a bissetriz. A diagonal é bissetriz do ângulo que contém dois lados consecutivos do quadrado.

Não foi possível uma análise mais profunda.

Resolução do problema 8.

8) O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?

andar prédio 20 andares ~~1 e 2 botões~~
 13 andares = 1 botão
~~13 e 8 andares = 2 botões~~

R: Chugi até o 16º andar e a partir do 2º botão (16-8=8º andar)

Se aperta 1º sobe 13, se aperta o 2º desce 8

Quer chegar no 8º andar começando saindo do 13º

1º passo = apertar o 2º botão (pararia no 5º)
 2º passo = apertar o 1º botão (iria no 18º)
 3º passo = o 2º botão (10º andar)
~~4º passo = o 2º botão (2º andar)~~
~~5º p = 1º botão (15º andar)~~

R: 4º p = 2º botão (2º andar)
 5º p = 1º botão (15º andar)
 6º p = 2º botão (7º andar)
 7º p = 1º botão (20º andar)
 8º p = 2º botão (12º andar)
 9º p = 2º botão (4º andar)
 10º p = 1º botão (17º andar)

11º p = 2º botão (9º andar)
 12º p = 2º botão (1º andar)
 13º p = 1º botão (14º andar)
 14º p = 2º botão (6º andar)
 15º p = 1º botão (19º andar)
 16º p = 2º botão (11º andar)
 17º p = 3º botão (3º andar)
 18º p = 1º botão (16º andar)
 19º p = 2º botão (8º andar)

10 2 1 2 2 1 2 2 2 2 2
 13 5 18 10 12 4 17 9 14 11 3 16 8

Material digitalizado 66 – Resolução de Victor do problema 8.

O aluno dá pistas de que compreendeu o que é solicitado assim como os dados.

Faz um resumo das informações importantes contidas no enunciado e faz as operações permitidas até que chega ao 8º andar.

O estudante afirma que para resolver o problema é necessário primeiro chegar ao 16º andar (está registrado na gravação de áudio⁸⁵ e também no registro escrito do aluno, no canto superior direito, logo abaixo do enunciado). Usa, provavelmente, a heurística trabalhando para trás.

Resolução do problema 11.

11) Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?

Lebre ^{disse} = Chapeleiro roubou
Lebre é quem está sendo julgado (acusado de um crime)
Chapeleiro = réu
Rato não é culpado
Chapeleiro foi culpado, logo, ele falou a verdade
Lebre mente, logo, Chapeleiro não roubou.
Sabemos Lebre e o Rato para serem culpados.

Material digitalizado 67 – Resolução de Victor do problema 11.

⁸⁵ Áudio Victor p. 8.1.

Victor parece ter compreendido o que é solicitado, mas não compreendeu bem os dados (o registro de áudio⁸⁶ indica que não sabe quem são os possíveis culpados).

Em seu registro apresenta sua linha de raciocínio. Na 4ª linha afirma que Rato não é o culpado. Na 5ª que o Chapeleiro é culpado. Compreende que isto implica que só este falou a verdade, portanto a Lebre mentiu e portanto o Chapeleiro não pode ser o culpado. Descarta então a possibilidade do Chapeleiro ser culpado. Configura-se assim a heurística redução ao absurdo. Não consegue desdobrar as implicações e não obtém a solução esperada.

Resolução do problema 7.

⁸⁶ Áudio Matheus R. p.11.

7) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).

2 pessoas = 1 aperto de mãos

10 pessoas = 5 apertos de mãos (1º aperto)

⊕ 1 pessoa pode ~~com~~ cumprimentar 9 pessoas

1 pessoa faz cumprimentos

10 - 1 = 9 (não pode contar com ela mesma)

10 - 2 = 8 (não pode contar com ela mesma e com a pessoa que ela já cumprimentou)

10 - 3 = 7 " "

10 - 4 = 6 " "

10 - 5 = 5 " "

10 - 6 = 4 " "

10 - 7 = 3 " "

10 - 8 = 2 " "

10 - 9 = 1 " "

45 cumprimentos

Material digitalizado 68 – Resolução de Victor do problema 7.

O aluno não compreende bem o enunciado.

No áudio⁸⁷ gravado, ele afirma que houve cinco cumprimentos no total: dois grupos de cinco pessoas, cada pessoa de um grupo cumprimenta uma pessoa do outro. Victor

⁸⁷ Áudio Victor p.7.

afirma ter usado *regra de três*: “Duas pessoas fazem um cumprimento, dez pessoas fazem dez”. Essa linha de raciocínio está precariamente representada nas três primeiras linhas da resolução. O pesquisador observa que assim, cada um cumprimenta somente uma pessoa, mas cada pessoa deve cumprimentar todo o restante do grupo.

Em seguida o aluno conta quantos cumprimentos uma pessoa faz ao todo (resolução de um problema auxiliar). Considera outra pessoa e conta os cumprimentos não contabilizados na primeira contagem. Ele explica detalhes sobre os resultados obtidos, em seguida, automatiza a contagem, mostrando que compreendeu o padrão de decrescimento do número de cumprimentos ainda não contabilizados ao considerar cada pessoa cumprimentando as outras, usando portanto a heurística indução.

Resolução do problema 6.

6) Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?

9 homens
2 meninos
1 bote carrega 1 homem ou 2 meninos

1 homem - 2 meninos

Primeiro vão 2 meninos, 1 volta para trazer o bote.
Depois vai 1 homem e quando ele chegar do outro lado o menino que ficou do outro lado do rio volta para trazer o outro menino de volta.

Sempre Φ , antes de ~~uma viagem~~ de um homem viajar, tem que ter uma viagem anterior dos 2 meninos pois um sempre volta no fim do rio para trazer o bote novamente e ir por diante.

Material digitalizado 69 – Resolução de Victor do problema 6.

Victor compreendeu o que é solicitado assim como os dados do enunciado.

O aluno apresenta os dados que considera importante e em seguida descreve as ações necessárias para resolver o problema.

No último parágrafo do registro descreve uma condição que considera necessária para travessia de um homem (antes de atravessar um homem é necessário atravessar dois meninos). Desta maneira, resolve um problema auxiliar (atravessar um homem). É possível também considerar que usou a heurística trabalhando para trás, pois está implícito que considera a travessia de um homem condição necessária para a travessia de todo grupo. No registro de áudio⁸⁸, é possível também identificar a heurística redução ao absurdo, pois considera (equivocadamente) que é impossível transportar um homem ao outro lado do rio pois tal ação acarretaria a impossibilidade de retorno do bote. Na mesma gravação é possível, também, identificar uma atitude passível de ser classificada como indução pois após Victor identificar a sequência de ações suficientes para transportar efetivamente um homem, diz que essa ação deve ser repetida até que todo grupo seja transportado.

Resolução do problema 12.

⁸⁸ Áudio Victor p.6.

[illegible]

É possível observar varias tentativas de obedecer as condições do enunciado sem pistas de uma sistematização consistente. É provável portanto que tenha ocorrido tentativa e erro.

No centro da folha (circulado) aparece outro tipo de tentativa: Escreve quais conjuntos de moedas não podem ocorrer, provavelmente tentando saber a configuração correta por eliminação.

O registro que ocorre abaixo da parte circulada (acima mencionada) indica ainda outra estratégia: O aluno tenta formar 7 centavos para depois formar 1 real com a quantidade de moedas que resta. Victor, provavelmente imaginou que para formar 1 real e 7 centavos devia (ou podia) formar 7 centavos para depois conseguir compor 1 real com as moedas restantes dando pistas de que usou trabalhando para trás (para ter o problema resolvido, primeiro devia formar 7 centavos).

O aluno consegue solucionar o problema (último trecho circulado).

O estudante dá pistas de que usou problemas auxiliares (nos problemas 5 e 7), redução ao absurdo (nos problemas 1 e 11), trabalhando para trás (nos problemas 8, 6 e 12), indução (nos problemas 6 e 7) e tentativa e erro (no problema 12).

Resoluções de Tiago.

No dia 19 de setembro de 2016, às 10h:40min, Tiago e o pesquisador se reuniram na sala de informática para dar andamento às atividades de resolução de problemas.

Resolução de Tiago do problema 1.

1. Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?

A princípio tive dificuldades em trabalhar a lógica porque me peguei em uma addividade e não me x da questão que era as cores, mas ao questionar cheguei a conclusão que se há 5 cores distintas é possível tirar 5 e as 5 serem distintas a resposta seria 6, alguma ia se repetir.

O menor número de conchas a serem retiradas são 6.

Material digitalizado 71 – Resolução de Tiago do problema 1.

Com o conteúdo do registro de áudio⁸⁹ é possível verificar que Tiago não compreendeu bem o que é solicitado e nem mesmo os dados do problema. Diz que é possível retirar muitas conchas da mesma cor. Parece entender que precisa garantir a retirada de exatamente duas conchas da mesma cor. O pesquisador diz o ao educando o que é solicitado e então este diz animadamente que sabe a solução. O pesquisador solicita que escreva a solução.

⁸⁹ Áudio Tiago p.1.

Tiago considera que é possível tirar 5 conchas de cores distintas mas não 6 e soluciona o problema adequadamente.

Parece estar implícito em sua resolução a redução ao absurdo. Diz que é possível retirar 5 cores distintas e não 6, provavelmente pensando que retirar 6 cores de 6 cores colidiria com o fato de que só existem conchas de 5 cores no saco.

Após resolver o problema 1 o aluno fala sobre como costuma solucionar problemas de matemática. Diz⁹⁰ “[...] eu faço de trás pra frente, tento pegar de trás pra frente. Eu pego o produto e vejo: o que aconteceu antes? [...]” Apesar de certa dificuldade com a linguagem formal, o aluno provavelmente está se referindo à heurística trabalhando para trás. O *produto* ao qual se refere, significaria resultado. É notável que tenha consciência da heurística que usa e saiba verbalizar como organizou a resolução.

Resolução do problema 5.

⁹⁰ Áudio Tiago Digressão.

5) Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1 hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?

Entendo que 1 hora é a soma dos dois trajetos, um pedaleando ser maior que o outro, logicamente a pé do que no veículo. Se 30 min da ida e ~~da~~ volta no mesmo trajeto, metade seria 15 minutos de ponto A a B o/ veículo, logo 60 min subtraindo os 15 do veículo temos 45 a pé. De ponto A para B o B para A. Teremos 90 minutos, igual a 1 hora e 30 minutos.

Material digitalizado 72 – Resolução de Tiago do problema 5.

O aluno compreendeu o enunciado.

Obtém o tempo gasto na ida ou volta de bicicleta (resolução de um problema auxiliar), após isso, consegue o tempo gasto na ida ou volta a pé (resolução de outro problema auxiliar) e finalmente apresenta a solução do problema.

Chama a atenção o caráter dissertativo de suas respostas. O aluno é capaz de expressar com competência suas resoluções.

Resolução do problema 3.

3) Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.

Imaginei um quadrado comum, pensei que, se tenho que dividi-lo vou usar uma linha, então automaticamente ela foi girando no eixo ~~de~~ primeiro vertical, depois vertical e por último horizontal ao analisar a pergunta novamente partindo desse pensamento percebi que um quadrado tem medidas iguais então a linha girou de mais como um ponteiro e não só teve dois retângulos ou dois triângulos mas figuras diferentes (estranhas). Cheguei a conclusão que sim, a cada ângulo da linha obtemos uma divisão, tendo duas partes iguais de 0 a 360°. do ponto ~~de~~ 0 ao último. Temos 359 maneiras de dividi-lo em duas partes iguais.

Material digitalizado 73 – Resolução de Tiago do problema 3.

O aluno compreendeu o enunciado (o que é solicitado e os dados).

A figura que desenha na 3ª linha é minúscula (quase do tamanho de uma letra).

Do trecho “[...] se tenho que dividi-lo então vou usar uma linha[...]

 é possível concluir que usou a heurística trabalhando para trás, o que corrobora com a descrição que Tiago faz de seu próprio método de resolução⁹¹.

⁹¹ Página 200.

O aluno parece perceber que toda a divisão obtida pelo giro do segmento que passa pelo centro do quadrado divide-o em duas peças idênticas. Embora considere apenas as medidas inteiras do ângulo associado ao giro, o que forneceria 360 divisões (do 0° até o 359°), Tiago obtém 359 divisões, provavelmente por não contar algum ângulo de medida inteira, talvez o 0° . Sua resolução é bastante consistente e interessante.

É possível inferir que usou a heurística indução, pois embora não use um método formal ou rigoroso, após observar que é possível obter dividir o quadrado em peças idênticas com um segmento vertical e com outro horizontal, observa que qualquer outra rotação também divide o quadrado em duas peças iguais.

Resolução do problema 6.

6) Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?

Da primeira o problema me fez, a usar de espaço 1 homem e dois meninos, entendendo que a capacidade são 2 meninos mas que 1 menino pode ~~transitar~~ transitar no rio. 1º os dois meninos atravessam 2º 1 fica e o outro volta. 3º o menino sai e 1 homem vai. 4º o homem vai e o menino retorna também. Nessa ordem 1 homem só chegou ao outro lado, devemos apenas repetir a ordem mais 8 vezes até que reste somente os dois meninos como no início finalizando a travessia. Foi mais fácil pois a minha cabeça mente focou-se no problema qual é ~~complexo~~ para resolver ~~o mais~~ mais e mais sinais para compreender os menores e mais complexos que são os números. Como imagem é um quebra cabeça dela. Será fácil monta-lo se soubermos a imagem necessária ordem, raciocínio, tempo, descrição.

Material digitalizado 74 – Resolução de Tiago do problema 6.

Tiago aparentemente compreendeu os dados do enunciado e o que este solicita.

O aluno descreve o processo que resulta na travessia de um homem para o lado oposto e no bote do lado inicial do rio. Tiago menciona que o processo deve ser repetido oito vezes para que todos os homens atravessem o rio o que sugere a heurística indução.

Em seguida, Tiago pretende descrever como pensou para resolver o problema. Seu texto é um tanto confuso. Dá a entender⁹² que usa variação do problema: “[...] minha mente focou-se no problema igual ao 6, maior e mais simples para compreender os menores e mais complexos[...]”. Também escreve que para resolver um quebra cabeça, é melhor se conhecer a imagem que este forma. Isto remete a trabalhando para trás, pois saber como é a imagem do quebra cabeça é ter em mente o quebra cabeça resolvido.

Resolução do problema 7.

7) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).

A primeira cumprimenta 9 pessoas, mas, já a segunda vai cumprimentar a primeira novamente então temos que descartar uma.

A terceira vai cumprimentar a primeira e a segunda, ou seja, a cada nova pessoa descartar-se os cumprimentos anteriores relatando um a um, até que todos tenham a sua vez e cumprimentado a todos.

1º	9 ap.	analisando pares uma a uma da 2ª ao 9.
2º	8 ap.	
3º	7	
4º	6	
5º	5	
6º	4	
7º	3	
8º	2	
9º	1 ap.	
<hr/>		
	45	

⁹² Áudio Tiago p.1.

Tiago parece ter compreendido o enunciado.

Refere-se aos indivíduos associando-os aos cardinais: 1° pessoa, 2° pessoa, e assim por diante. Calcula o número de cumprimentos da 1° pessoa, menciona como fazer o cálculo de cumprimentos da 2° pessoa e da 3° pessoa. Da 4° pessoa em diante não dá detalhes de como calculou o número de cumprimentos não contabilizados dando sinal que compreendeu como a sequência de parcelas formadas pelos números de cumprimentos não considerados de cada individuo decresce, sugerindo assim que usou indução.

Ao calcular os números de cumprimentos não contabilizados de uma pessoa por vez, decompõe o problema em outros mais simples e portanto usa problemas auxiliares.

Não houve tempo para que Tiago resolvesse os problemas 8, 11 e 12.

Os registros do aluno sugerem que usou as heurísticas problemas auxiliares (nos problemas 5 e 7), trabalhando para trás (problema 3) e indução (nos problemas 3, 6 e 7).

A análise dos dados referentes aos registros anteriores sugeriu o uso de outros problemas para esclarecer algumas questões relacionadas ao uso da heurística especialização. Será apresentada abaixo as resoluções de outros problemas por outro grupo de alunos e as respectivas análises, análises com o foco no uso do método especialização.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

$$\boxed{\text{MACARRÃO}} = x \quad \begin{matrix} \xrightarrow{2016} \uparrow 50\% \\ \xrightarrow{2017} \downarrow 50\% \end{matrix}$$

AUMENTO E CAÍDA DO PRODUTO

$$\begin{matrix} 100 & + & 50 & = & 150 & = & 150\% & \Rightarrow & 150\% & = & 1,5 & = & 30\% \\ \uparrow & & \uparrow & & & & & & \uparrow & & & & \\ \text{PRODUTO} & & \% & & & & & & \text{AUMENTO} & & & & \\ & & & & & & & & \text{E} & & & & \\ & & & & & & & & \text{QUEDA} & & & & \end{matrix}$$

$$\boxed{x = 30\% \mid \uparrow \text{ALTERAÇÃO DO VALOR}}$$

$$\begin{array}{r} 150 \overline{) 100} \\ \underline{150} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \end{array}$$

Material digitalizado 76 – Resolução de Isabela do 1º problema de especialização.

Embora a aluna não use especialização para o preço do macarrão (o que facilitaria a solução), adotou os anos 2016 e 2017 como os anos consecutivos mencionados no enunciado. Não é possível se ocorreu uso de especialização ou foi apenas uma atribuição acidental de datas.

Isabela não pôde resolver o problema e não dá outros sinais de que usou especialização no restante de sua tentativa.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

TOURNOIO = 20 COMPETIDORES

ELIMINATÓRIAS = SOBRA 8 COMPETIDORES
↳ 8 PARTIDAS

QUARTAS DE FINAL: = SOBRA 4 COMPETIDORES
↳ 4 PARTIDAS

SEMI-FINAL = SOBRA 2 COMPETIDORES
↳ 2 PARTIDAS

FINAL = SOBRA 1 COMPETIDOR
↳ 1 PARTIDA

1º LUGAR = 1 PARTIDA

16- n PARTIDAS

Material digitalizado 77 – Resolução de Isabela do 2º problema sobre especialização.

A aluna não consegue articular uma resolução adequada. A pergunta é sobre um torneio que envolve n equipes e a aluna substitui n por 20. Assim, usa a especialização embora não tire proveito adequado da estratégia.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

$$\begin{array}{r} 100\% \\ - 25\% \\ \hline 75\% \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 3 \text{ colheres de leite} = 75\% \text{ ou seja restam } 25\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{chá} + \text{leite} = 100 + 25 = \frac{125}{100} = 125\% \\ \text{leite} = 10\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{mistura} + \text{leite} = 125\% \quad \text{mistura} \quad \text{leite} \\ 75\% + 25\% = 100\% \\ \text{leite} \quad \text{chá} \\ 75\% \quad 100\% \end{array}$$

A maior porcentagem é de
chá no leite.

Material digitalizado 78 – Resolução de Isabela do 3º problema de especialização.

O diagrama da primeira parte da resolução indica alguma compreensão sobre o enunciado. A resolução não culmina com uma solução adequada. No entanto, Isabela atribui uma fração do líquido a uma colherada. Essa ação configura especialização e poderia ser útil na resolução do problema.

Isabela usa especialização (não de maneira eficaz) em pelo menos duas de três resoluções que apresenta.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

Material digitalizado 79 – Resolução de Júlia do 1º problema de especialização.

A aluna fica pouco tempo resolvendo os problemas (o que indica pouca motivação e justifica a escassez de argumentos registrados). Júlia não considera o efeito do aumento de 50% sobre o valor do macarrão e então apresenta uma solução ingênua do problema. Não faz uso de especialização.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

~~R: $n - 1$~~

Não dá para saber o vencedor ou competidores em n partidas.
R: $\frac{n}{2}$

Material digitalizado 80 – Resolução de Júlia do 2º problema de especialização.

Júlia não apresenta uma tentativa resolutive de resolução e não usa especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

$\frac{3}{3}$

Manter a mesma quantidade de leite no chá. Pois, o leite foi retirado do copo com o chá, e o chá foi adicionado ao copo de leite.

Material digitalizado 81 – Resolução de Júlia do 3º problema de especialização.

O argumento da estudante não condiz com o enunciado. Cada copo recebe uma vez o conteúdo do outro copo. Não há indícios do uso de especialização.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

Não houve alteração, no 1º ano o macarrão que no primeiro ano ~~deu~~ aumentou e no ano seguinte voltou ao mesmo preço

Material digitalizado 82 – Resolução de Eny do 1º problema de especialização.

Eny dedica pouco tempo à resolução da atividade.

Responde o 1º problema de maneira ingênua. Não usa especialização.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

n partidas

Material digitalizado 83 – Resolução de Eny do 2º problema de especialização.

O registro é escasso e mostra pouco interesse na atividade. Não usa especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são colocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

6 a porcentagem de chá no leite

Material digitalizado 84 – Resolução de Eny do 3º problema de especialização.

Os registros sobre a resolução do 3º problema não permite análise. Sem indícios de especialização.

Assim, a estudante não apresenta sinais de uso de especialização em qualquer dos problemas.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

50% //

Material digitalizado 85 – Resolução de Pedro do 1º problema de especialização.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

$$N = 3$$

Material digitalizado 86 – Resolução de Pedro do 2º problema de especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

É a porcentagem de chá no leite

Material digitalizado 87 – Resolução de Pedro do 3º problema de especialização.

O aluno fica pouco tempo resolvendo os problemas o que indica pouco interesse na atividade. Não usa especialização e não consegue resolver qualquer problema.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

~~Considerando o mesmo valor:~~

$$X = 3$$

$$\frac{3 \cdot 50}{100} = \frac{150}{100} = 1,50 \quad \} \quad 3 + 1,50 = 4,50$$

$$\frac{4,50 \cdot 50}{100} = \frac{225}{100} = 2,25 \quad \} \quad 4,50 - 2,25 = 2,25$$

$$\begin{array}{r} 4,50 \\ + 1,50 \\ \hline 6,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,50 \\ - 2,25 \\ \hline 2,25 \end{array}$$

∴

$$\begin{array}{r} 2,25 \text{ (R\$)} \\ \times 15 \\ \hline 33,75 \end{array}$$

$$\frac{3 \cdot 75}{100} = \frac{225}{100} = 2,25$$

Resposta, ele aumentou 50% de valor inicial e diminuiu 50% do valor inicial.

Material digitalizado 88 – Resolução de Camila do 1º problema de especialização.

A aluna atribui um valor para o preço do macarrão, usando assim especialização. Obtém a solução correta do problema.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

$$\text{jogadores} = n$$

$$\text{cada jogo} = -1 \text{ jogador}$$

Resposta: o número de partidas necessárias para determinar o campeão será o número de jogadores.

$$\text{número de partidas} = n - 1$$

$$p = n - 1$$

Material digitalizado 89 – Resolução de Camila do 2º problema de especialização.

A aluna não dá sinais de que tenha usado especialização.

Não consta nos registros sinais do uso de especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

3 colheres de leite → copo de chá = mistura
mistura → copo de leite
tem mais chá no leite
tem mais leite no chá

R: tem mais leite no chá

Material digitalizado 89 – Resolução de Camila do 3º problema de especialização.

A aluna usa especialização em sua tentativa.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

1º ano: $x = 50\%$ de $x = y$

2º ano: $y = 50\%$ de $y = \text{valor final}$

Material digitalizado 90 – Resolução de Suellen do 1º problema de especialização.

Não consta nos registros sinais do uso de especialização.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

(resposta) ~~n-1~~

$$Y \Rightarrow \frac{n}{2} = 1$$

$$Y \Rightarrow \frac{x}{2} + x + 2$$

(suponho que $n=12$)

$$Y \Rightarrow \frac{12}{2} = 6$$

$$Y \Rightarrow \frac{6}{2} + x + 2$$

$$Y \Rightarrow 3 + 6 + 2$$

$$Y \Rightarrow 11 \text{ partidas}$$

Material digitalizado 91 – Resolução de Suellen do 2º problema de especialização.

A aluna atribui o número 12 ao n, configurando-se assim o uso de especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

leite : - 3 colheres leite = + 3 colheres
chá = + 3 colheres chá = - 3 colheres

A porcentagem de leite no chá, pois foi colocado no copo de chá puro, só quando foram adicionadas 3 colheres da mistura no leite a porcentagem de leite aumentou por que também havia leite no c

Material digitalizado 92 – Resolução de Suellen do 3º problema de especialização.

Os registros de Suellen não indicam uso de especialização.

A aluna usa especialização somente no problema 2.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

R: 50%

Material digitalizado 93 – Resolução de Alecsander do 1º problema de especialização.

O aluno não dá pistas de ter usado especialização.

2) Num torneio de ténis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

n - competidores

 $n-1$ se considerarmos que em
cada partida um competidor
perde o jogo.

Material digitalizado 94 – Resolução de Alecsander do 2º problema de especialização.

Embora apresente uma solução correta, o aluno não faz registros que permitam inferir seus processos mentais.

O argumento do estudante é contundente mas não apresenta indícios do uso de especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

A porcentagem de leite no chá pois quando foram colocadas as 3 colheres de leite no chá o leite estava puro foi as 3 colheres que foram colocadas no leite mas de uma mistura de leite e chá e não uma substância pura.

Material digitalizado 93 – Resolução de Alecsander do 3º problema de especialização.

Registros sem presença de indícios do uso de especialização.

Alecsander não apresenta pistas do uso de especialização qualquer das resoluções.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

(Nenhuma), porque no começo era o preço normal, teve alterações mas no final voltou o preço normal.

Material digitalizado 94 – Resolução de Alice do 1º problema de especialização.

Alice não indica que usou especialização no primeiro problema.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

$N = 1$

porque quem perde um jogo
está fora, automaticamente.
então só tem o vencedor
sempre! então a resposta
é 1 partida.

Material digitalizado 95 – Resolução de Alice do 2º problema de especialização.

O registro não sugere especialização.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

A porcentagem de leite no chá é maior. Porque para cada colherada colocada de leite para um copo de chá, e quando as colheres voltam para o copo de leite, misturando com o leite.

Material digitalizado 96 – Resolução de Alice do 3º problema de especialização.

O estudante não dá indícios de uso de especialização.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

0% porque nesse resultado por que se tem 50% e depois ficou 50% só pode dar 0%

Material digitalizado 97 – Resolução de Pedro do 1º problema de especialização.

O aluno não dá pistas de uso de especialização.

2) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

$n - 1$

Material digitalizado 98 – Resolução de Pedro do 2º problema de especialização.

O registro não permite análise.

3) Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

Resposta: Porcentagem de leite no chá e no leite é a mesma.

Material digitalizado 99 – Resolução de Pedro do 3º problema de especialização.

1) O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?

0% porque se aumentou 50% e depois diminuiu 50% não muda nada.

Material digitalizado 100 – Resolução de Pedro J. do 1º problema de especialização.

Não ocorrem sinais de especialização.

2) Num torneio de tennis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas (em função de n) necessárias para determinar o campeão?

$n-1$

Material digitalizado 101 – Resolução de Pedro J. do 2º problema de especialização.

Sem indícios de especialização nos registros.

3)Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a porcentagem de leite no chá ou a porcentagem de chá no leite?

Genzi Perigulovon mo - não entendi

Material digitalizado 102 – Resolução de Pedro J. do 3º problema de especialização.

Não ocorreu resolução.

APENDICE B.

Tentativa e erro.⁹³

1)Dois times disputam um declato. Em cada competição, o time vencedor ganha 4 pontos, o perdedor 1 ponto e em caso de empate, cada time ganha 2 pontos.

Depois de dez competições os dois times têm, juntos, 46 pontos. Quantos empates houveram?⁹⁴

2)Três amigos, o escultor Branco, o violinista Negro e o artista Ruivo se encontram em um bar. “É impressionante que um de nós tem cabelos brancos, outro negros e outro

⁹³ Este tópico tem somente um problema por que tentativa e erro é frequentemente usada na resolução dos problemas da lista.

⁹⁴Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.78).

ruivo mas nenhum de nós tem o nome da cor do seu cabelo”, disse a pessoa de cabelos negros. “Você tem razão”, respondeu Branco. Qual a cor do cabelo do artista?⁹⁵

3) Os habitantes de uma ilha ou são mentirosos e apenas mentem ou são honestos e apenas dizem a verdade.

A pessoa A disse “Eu sou mentiroso”. Essa pessoa pode ser habitante da ilha?⁹⁶

Trabalhando para trás.

1) Numa corrida de São Paulo a Fortaleza participam quatro carros A, B, C, D que largaram na seguinte ordem: primeiro A, segundo B, terceiro C e por último D. Durante a corrida, A e B trocaram de posição (ultrapassaram um ao outro) 9 vezes e B e C trocaram de posição 8 vezes.

Para saber em que ordem chegaram à Fortaleza, só é permitido fazer perguntas do tipo:

“Quantas vezes trocaram de posição os carros X e Y?”

Antes de fazer uma pergunta se conhece a resposta da pergunta anterior. Formule três perguntas que permitam determinar a ordem em que os quatro terminaram a corrida.

⁹⁷

2) É possível escrever os números naturais de 1 a 100 sobre uma reta de modo que a diferença entre quaisquer

⁹⁵Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 72).

⁹⁶Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 72).

⁹⁷ Banco de questões OBMEP 2011, p. 125.

dois números vizinhos seja maior ou igual a 50? ⁹⁸

3)A base de nosso sistema numérico é 10. Se a base fosse mudada para 4 contaríamos como segue: 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30 e assim por diante. O vigésimo segundo número na base 4 é:⁹⁹

Banco 2015, p. 34

4)Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande, um deles vazio e o outro cheio de líquido. Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido do tambor cheio, no vazio, usando dois baldes, um com capacidade de 5 litros e o outro com capacidade de 7 litros.¹⁰⁰

⁹⁸ Banco de questões OBMEP 2011, p. 23.

⁹⁹ Banco de questões OBMEP 2011, p. 117.

¹⁰⁰ Banco de questões OBMEP 2015, p. 34.

5)Quinze moedas são colocadas em uma mesa em frente a dois jogadores.

A cada jogador é permitido remover pelo menos uma moeda e não mais que 5 moedas por vez. Os jogadores jogam alternadamente, removendo de 1 até 5 moedas até um jogador remover a última moeda e assim ganhar o jogo.

Existe um método de jogo que garante a vitória? Se sim, qual é?¹⁰¹

6)Três pessoas jogam um jogo onde duas pessoas ganham e uma perde. A pessoa que perde precisa dobrar o dinheiro apostado de cada uma das pessoas que ganham. Os jogadores concordam em jogar três jogos.

No fim dos jogos cada jogador perdeu um jogo e tem 8 dolares.

Quanto cada um apostou no inicio do jogo?¹⁰²

7)Um aeroplano carregando três homens cai no deserto. Um homem decide que sua melhor chance de sobreviver consiste de cada um deles atravessar o deserto seguindo direções diferentes, esperando que uma das direções passe por um número suficiente de oásis para permitir que um deles encontre civilização e possa conseguir ajuda para os outros. Antes deles irem em caminhos separados pelo deserto, eles tem que enfrentar o problema de dividir igualmente a água e os cantis que possuem. Eles têm em sua posse 5 cantis cheios

¹⁰¹ Banco de questões OBMEP 2011, p. 142.

¹⁰² Banco de questões OBMEP 2011, p. 141.

de água, 5 meio cheios e 5 vazios, todos do mesmo tamanho. Considerando que o número de cantis é importante caso um homem encontre um oásis (pois é possível encher todos os cantis de que dispõe), eles desejam dividir a água e os cantis igualmente.

Como eles podem fazer isso?¹⁰³

Problema retirado do banco de questões 2011, página 14, problema 8.

Banco de questões OBMEP 2011, Problema 15, pág. 16:

8 | Média dos Algarismos

Paulinho escreveu um número no quadro e depois inventou a seguinte brincadeira: escolhe dois algarismos do número que sejam ambos pares ou ambos ímpares e troca cada um deles pela sua média aritmética. Ele repete este processo quantas vezes quiser, desde que o número disponha de dois algarismos com a mesma paridade. Por exemplo, ele escreveu o número 1368 e obteve a sequência na qual foram destacados os algarismos que serão trocados no passo seguinte.

$$1 \ 3 \ \textcircled{6} \ \textcircled{8} \longrightarrow \textcircled{1} \ 3 \ \textcircled{7} \ 7 \longrightarrow 4 \ \textcircled{3} \ 4 \ \textcircled{7} \longrightarrow 4 \ 5 \ 4 \ 5$$

- (a) Com esta brincadeira, é possível obter o número 434434 a partir do número 324561?
- (b) Paulinho escreveu o número 123456789 no quadro. Mostrar que com este processo, selecionando os números adequadamente, ele pode obter um número maior que 800000000.

Banco de questões OBMEP 2013.

¹⁰³ Wickelgren, 1974, p. 97.

9) Considere três estacas e quatro discos, cada um com tamanho diferente e todos tendo um furo no centro. No começo os quatro discos estão na mesma estaca, o maior na base, o segundo maior em cima do primeiro, o terceiro maior em cima do segundo, e assim por diante, conforme a figura 1. É permitido que você mova um disco por vez, de uma estaca para outra, com a restrição que um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. A meta é transferir os cinco discos para uma das duas outras estacas conforme a figura 2.

Use as figuras do Esquema 1 se achar conveniente e desenhe mais estacas se achar necessário.¹⁰⁴

Figura 16 – Estacas e discos da *torre de Hanoi* posição inicial.

¹⁰⁴Wickelgren, 1974, p. 102.

Figura 17 - Estacas e discos da *torre de Hanoína* posição final.

10) Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10

centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Obs: O sistema monetário brasileiro tem moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e de 1 real embora as moedas de 1 centavo não sejam usadas normalmente por valerem pouco.¹⁰⁵

11) Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.¹⁰⁶

Figura 18 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

¹⁰⁵ GODIN e McCLINTOCK, 1979, p. 364.

¹⁰⁶ Banco de questões OBMEP 2011, p. 24.

12)O elevador de um prédio de 20 andares tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 8 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existem andares suficientes para subir ou descer). Como podemos chegar ao oitavo andar partindo do décimo terceiro?¹⁰⁷

o pequeno retângulo de tornar-se um quadrado.

13)Tem uma folha retangular cujo comprimento ($L = 2$) é o dobro da largura ($L = 1$).

Como você tem que cortar a folha para reconstruir com as peças da mesma superfície um quadrado?¹⁰⁸

14)Piero, Paul e Jacopo acabam jogando um jogo que durou cinco mãos.

Eles jogaram com moedas de 1 real, por isso durante todo o jogo, teve apenas quantidades inteiras.

Em cada rodada, o perdedor dobrou o dinheiro na posse dos outros dois jogadores. Após a partida, Piero 8 tem reais, Paul tem 9 reais e Jacopo tem 10 reais.

Quanto dinheiro cada um deles no início do jogo?¹⁰⁹

15)Há três interruptores no porão de uma casa na posição off.

¹⁰⁷ FOMIN, ITENBERTG, GENKIN, 2012, p. 73.

¹⁰⁸ Lhullier, 2010.

¹⁰⁹ Lhullier, 2010, carta 11, vermelha.

Apenas um ascende a luz do sótão.

A partir do porão, como você pode saber qual chave está conectada ao sótão indo ao sótão só uma vez?

Atenção: você não pode ver o sótão do porão.

Pista: você pode verificar outra coisa na lâmpada além do brilho.¹¹⁰

16)Um jardineiro planta dez rosas em um jardim público.

Sendo muito estético, ele quer criar um canteiro de flores harmonioso.

Como deve ajustar para plantar as dez plantas em cinco fileiras com quatro rosas cada?

Obs: Uma rosa pode ser parte de várias linhas.¹¹¹

17)Dados 8 números naturais diferentes, nenhum deles maior que 15, mostre que pelo menos três pares deles têm a mesma diferença positiva (os pares não precisam ser disjuntos como conjuntos).¹¹²

18)Para algum número n , o número $n!$ pode ter exatamente 5 zeros no final de sua representação decimal?¹¹³

¹¹⁰Lhullier, 2010, carta 9, azul.

¹¹¹Lhullier, 2010, carta12, verde.

¹¹²Dmitri Fomin, Ilia Ialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.37)

19) Os números naturais a e b satisfazem a equação $56a = 65b$. Prove que $a+b$ é um número composto.¹¹⁴

20) Nadia e Paul estão a brincar com fósforos.

Eles alinharam em uma tabela onze palitos, e, cada um na sua vez tem que remover um, dois ou três palitos.

Quem escolhe o último encontro deixado sobre a mesa perde o jogo.

Sabendo que ela está começando, quantos palitos irá recolher Nadia ter a certeza de ganhar o jogo?¹¹⁵

21) São estabelecidas ligações cósmicas entre os 9 planetas do sistema solar. Foguetes viajam ao longo das seguintes rotas: Terra-Mercúrio, Plutão-Vênus, Terra-Plutão, Plutão-Mercúrio, Mercúrio-Vênus, Urânio-Netuno, Netuno-Saturno, Saturno-Júpiter, Júpiter-Marte e Marte-Urânio. Um viajante pode ir da Terra para Marte?¹¹⁶

22) Duas crianças se revezam quebrando uma barra de chocolate retangular com 6 quadrados de largura e 8 de comprimento. Elas só podem quebrar a barra ao longo das divisões entre os quadrados. Se a barra quebra em vários pedaços, elas continuam

¹¹³Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.25)

¹¹⁴Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.25)

¹¹⁵Lhullier, 2010.

¹¹⁶Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.43)

quebrando até que reste somente quadrados individuais. O jogador que não pode mais quebrar, perde. Quem vai vencer?¹¹⁷

23) Temos três montes de pedras. Um com 10 pedras, outro com 15 e o último, com 20. Em cada jogada, o jogador escolhe um monte e divide em outros dois montes menores. O jogador que não pode fazer isso, perde. Quem ganha e como?¹¹⁸

24) Dois jogadores revezam tirando pedaços de chocolate formado por 5X10 quadradinhos. Em cada jogada eles quebram a barra ao longo das linhas que dividem os quadradinhos. Vence o primeiro jogador que obtiver um único quadrado. Quem vence, o primeiro ou o segundo jogador?¹¹⁹

25) Em um tabuleiro de xadrez, uma torre está na posição a1. Dois jogadores se revezam movendo a torre de quantos quadrados quiserem, horizontalmente para a direita ou verticalmente, para cima. Vence o jogador que colocar a torre na casa h8. Quem pode garantir a vitória?¹²⁰

26) Dois jogadores revezam tirando pedaços de chocolate formado por 5X10 quadradinhos. Em cada jogada eles quebram a barra ao longo das linhas que dividem os quadradinhos. Vence o primeiro jogador que obtiver um único quadrado. Quem vence, o primeiro ou o segundo jogador?¹²¹

¹¹⁷Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 61).

¹¹⁸Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 63).

¹¹⁹Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 61).

¹¹⁹Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 64).

¹²⁰Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.64).

¹²¹Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 61).

27) Uma peça é colocada em cada uma das extremidades de uma tira de quadrados 20×1 . Dois jogadores se revezam movendo uma em direção da outra por um ou dois quadrados. Uma peça não pode pular sobre a outra. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez. É possível garantir a vitória pra qual jogador?¹²²

28) Uma caixa contém 300 fósforos. Dois jogadores revezam removendo não mais da metade dos fósforos da caixa. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez. É possível garantir a vitória para qual jogador?¹²³

29) Temos três montes de pedra. O primeiro contém 50 pedras, o segundo contém 60 pedras e o terceiro contém 70 pedras. Uma jogada consiste na divisão de um dos montes em dois montes menores. Vence o jogador que deixar todos os montes com uma pedra. É possível garantir a vitória para qual jogador?

30) Uma rainha está no quadrado c1 de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo a rainha para a direita, para cima ou para a diagonal indo para cima e para direita. Vence o jogador que colocar a rainha em h8. É possível garantir a vitória para um dos jogadores? Qual?

31) Temos duas pilhas de pedras. Uma com 7 e outra com 5 pedras. Dois jogadores se divertem tirando um número arbitrário de pedras de cada pilha ou tirando o mesmo número de pedras das duas pilhas. Qual jogador não pode jogar na sua vez?¹²⁴

¹²¹Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 64).

¹²²Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 65).

¹²³Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 65).

¹²⁴Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 68).

32) Temos dois montes de fósforos. Cada um com 11 fósforos. Em cada jogada, o jogador precisa tirar dois fósforos de um monte e um fósforo de outro. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

Qual jogador pode garantir a vitória?¹²⁵

33) Este jogo começa com o 0. Em cada jogada o jogador pode somar o número atual a qualquer número de 1 a 9. Vence o jogador que chega ao número 100. Qual jogador pode garantir a vitória?¹²⁶

34) Este jogo começa com 1. Em cada jogada um jogador pode multiplicar o número atual por um número entre 2 e 9. Vence o jogador que chegar primeiro a um número maior que 1000. Qual jogador pode garantir a vitória?¹²⁷

35) É possível etiquetar as arestas de um cubo de maneira que as somas dos números em duas quaisquer do cubo sejam iguais?¹²⁸

36) Prove que podemos retirar diversos algarismos no início e no final do número com 400 algarismos 841984189...8419 de tal modo que a soma dos algarismos remanescentes seja 1984.¹²⁹

Especialização.

¹²⁵Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 69).

¹²⁶Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 69).

¹²⁷Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 69).

¹²⁸Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 74).

¹²⁹Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 74).

1)Você tem um tabuleiro 8X8 e 32 peças de dominó. Cada dominó cobre exatamente duas casas do tabuleiro. Assim os 32 dominós podem cobrir as 64 casas do tabuleiro. Agora suponha que dois quadrados das extremidades da diagonal maior do tabuleiro foram recortados. É possível colocar 31peças de dominós sobre o que restou do tabuleiro de maneira que o mesmo fique totalmente coberto? Se sim, mostre como isso pode ser feito. Se não, mostre que é impossível.¹³⁰

2)Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras. Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.¹³¹

Figura 17 – Ilustração de uma balança de dois pratos.

Explique como determinar se a moeda falsa é mais leve ou pesada que as outras usando o mínimo de pesagens que conseguir.

¹³⁰Dmitri Fomin, IliaItenberg e Sergey Genkin (2012, p. 8)

¹³¹ Banco de questões OBMEP 2011, p. 24.

3)O novo gerente do teleférico de uma estação de esqui quer saber quantos são as cadeiras disponíveis na estação de esqui.

Para determinar a quantidade tem apenas a seguinte informações: sabe que no momento em que o assento 130 passa pelo n ° 110, o assento n ° 250 cruza com o n ° 290.

Quantos assentos existem no teleférico?¹³²

4)Dado um polígono convexo com 101 lados com um eixo de simetria, prove que o eixo de simetria contém um de seus vértices.¹³³

5)Jack rasgou diversas páginas sucessivas de um livro. O número da primeira página que ele rasgou era 183 e sabe que o número da última página estava escrito com os mesmos dígitos, em alguma ordem. Quantas páginas Jack rasgou do livro?¹³⁴

6)Três colheres de sopa de leite são retiradas de um copo de leite e colocadas em um copo de chá e o líquido é completamente misturado. Depois três colheres desta mistura

¹³²Lhullier, 2010, carta 11, rosa.

¹³³Dmitri Fomin, Iliahtenberg e Sergey Genkin (2012, p.7).

¹³⁴Dmitri Fomin, Iliahtenberg e Sergey Genkin (2012, p.1).

são recolocadas no copo de leite. O que é maior agora, a percentagem de leite no chá ou a percentagem de chá no leite?¹³⁵

7)Alessandro decide visitar sua mãe.

Para fazer isso, optar por levar o auutomovel com uma velocidade de 60 kmh.

É possível voltar mais rápido para que sua velocidade média seja de 120 km por hora?¹³⁶

8)Tendes diante de vós quatro cartas.

Em cada de cada cartão é mostrada uma letra do alfabeto (que pode ser D, G, P ou L).

Quantos cartões você tem que virar para verificar a seguinte proposição:

Por trás de cada G é um L?¹³⁷

9)O preço de um pacote de macarrão aumentou 50% em um ano, em seguida, caiu 50% no ano seguinte.

¹³⁵Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.2).

¹³⁶Lhullier, 2010, carta 6, roxa.

¹³⁷Lhullier, 2010, carta 8, laranja.

Qual alteração no preço do macarrão entre o início do primeiro ano e no final do ano seguinte?¹³⁸

10) Num torneio de tenis jogam n competidores.

Quem perde um jogo está fora.

Qual o número de partidas necessárias para determinar o campeão, em função do número de jogadores?¹³⁹

11)Um grupo de ilhas estão ligadas por pontes de tal modo que é possível andar de uma ilha qualquer até qualquer outra. Um turista percorreu todas as ilhas cruzando cada ponte exatamente uma vez, tendo visitado a ilha de Tripla três vezes. Quantas pontes há em tripla se

a)o turista nem começou nem terminou em Tripla.

b)o turista começou seu percurso em Tripla mas não terminou lá.

c)o turista começou e terminou seu percurso em Tripla.

12) A figura 19 mostra um mapa da cidade de Konigsberg. A cidade é cortada por um rio que tem duas ilhas. Existem 7 pontes ligando as diversas partes da cidade. É possível passear pela cidade passando por cada ponte exatamente uma vez?¹⁴⁰

¹³⁸Lhullier, 2010, carta 4, vermelha.

¹³⁹Lhullier, 2010, carta 1, laranja.

¹⁴⁰Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 53)

Figura 19 - Pontes da cidade de Königsberg.

13) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).¹⁴¹

14) A reprodução de um tipo de bactéria está sendo estudado. Descobre-se que o número dessas bactérias dobra a cada minuto (em condições favoráveis).

Um recipiente contém dez dessas bactérias às 11h00min.. Ao meio dia, o recipiente está completamente cheio. Em que horário o recipiente estava pela metade?

15) Quando aumentamos em 2% o lado de um quadrado, qual a porcentagem de aumento da área da figura?¹⁴²

Problema auxiliar

1) Cada dia, Abe ou vai a pé ao trabalho e volta para casa em sua bicicleta ou vai de bicicleta para o trabalho e volta para casa a pé. De qualquer forma, a ida e volta toma 1

¹⁴¹ Banco de questões OBMEP 2014, p. 57.

¹⁴² CURY, 2007, p. 83.

hora. Se ela fosse de bicicleta e voltasse, o caminho de ida e volta tomaria 30 minutos. Quanto tempo o percurso tomaria se Abe fosse e voltasse a pé?¹⁴³

2) Duas cidades distantes estão ligados por um 1000 km ferroviária de via dupla.

Em um determinado momento, dois trens viajando a 100 kmh deixar cada uma das duas cidades para dirigir o outro.

Neste ponto, uma mosca cuja velocidade é 150 kmh começa a voar non-stop e para trás entre os dois trens.

Que caminho vai voar para longe quando os dois trens se cruzam?¹⁴⁴

Redução ao absurdo

1) O plano é colorido usando duas cores. Prove que existem dois pontos coloridos com a mesma cor que determinam um segmento de exatamente 1 metro.¹⁴⁵

2) Um tabuleiro 5X5 pode ser coberto por dominós 1X2?¹⁴⁶

¹⁴³Wickelgren, 1974, p. 104).

¹⁴⁴Lhullier, 2010, carta 4, roxa.

¹⁴⁵Dmitri Fomin, Iliahtenberg e Sergey Genkin (2012, p.80).

3) Em um dos lados de um rio existem três missionários e três canibais.

Eles têm um bote do seu lado do rio que é capaz de carregar duas pessoas, no máximo, através do rio. A meta é atravessar as seis pessoas para o outro lado do rio. Em nenhum momento podem ficar do mesmo lado do rio missionários e canibais de tal forma que exista um número maior de canibais que de missionários pois nesse caso, os canibais comeriam esse menor número de missionários.

Mostre como atravessar as seis pessoas para o outro lado do rio.¹⁴⁷

4) Você tem uma pilha de 24 moedas. 23 moedas têm o mesmo peso e uma moeda é mais pesada. Sua tarefa é determinar qual é a moeda mais pesada e fazer isso usando o mínimo de pesagens. Você tem uma balança de dois pratos, a qual usará para comparar o peso de quaisquer dois conjuntos de moedas de um conjunto total de 24 moedas.¹⁴⁸

5) Nelson saiu a noite deixando quatro crianças com a babá, Nancy. Entre muitas instruções que Nelson deu para Nancy antes de ir está a seguinte: que três de suas crianças sempre mentiam e uma sempre dizia a verdade, mas ao receber outras tantas informações

¹⁴⁶Dmitri Fomin, Iliahtenberg e Sergey Genkin (2012, p.7).

¹⁴⁷Wickelgren, 1974, p. 86.

¹⁴⁸Wickelgren, 1974, p 71.

Nancy esqueceu qual era a criança que dizia a verdade. Quando ela estava preparando o jantar, uma delas quebrou um vaso na sala.

Nancy correu e perguntou quem quebrou o vaso. Essas são as declarações das crianças:

Betty: Steve quebrou o vaso.

Steve: John quebrou o vaso.

Laura: Eu não quebrei.

John: Steve mente quando diz que eu quebrei.

Sabendo que somente uma dessas declarações era verdadeira, Nancy rapidamente descobriu quem havia quebrado o vaso.

Quem foi?¹⁴⁹

6)O país de Marr é habitado por dois exatamente dois tipos de pessoas: Mentirosos e honestos. Mentirosos sempre mentem e honestos sempre dizem a verdade. Como novo embaixador norte americano de Marr, você foi convidado para um coquetel. Enquanto tenta compreender os costumes do local, você está ocupado em conversa com três dos mais proeminentes cidadãos de Marr: Joan, Shawn e Peter. Joan observa que Shawn e Peters são mentirosos.

Shawn nega veementemente que é mentiroso e Peters diz que Shawn é de fato mentiroso. Diante dessas informações você pode dizer quantos dos três são mentirosos e quantos são honestos? ¹⁵⁰

¹⁴⁹Wickelgren, 1974, p. 120.

7) Duas garotas estão vendendo doces (que são muito baratos). Elas têm um real e sete centavos em troco para começar, tudo em moedas. O primeiro freguês diz que antes que ele possa comprar qualquer coisa, ele precisa trocar 50 centavos. Uma das garotas, olhando para a caixa de troco diz que não tem troco. O freguês pergunta se elas podem trocar 25 centavos. A resposta foi não. O freguês pergunta se elas têm troco para 10 centavos. A resposta é não de novo. As garotas dizem que têm sete moedas no total mas não podem trocar qualquer moeda. Quais são as moedas que as garotas têm?

Obs: O sistema monetário brasileiro tem moedas de 1, 5, 10, 25, 50 centavos e de 1 real embora as moedas de 1 centavo não sejam usadas normalmente por valerem pouco.¹⁵¹

8) Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram julgados. Descobriu-se mais tarde durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos réus e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?¹⁵²

¹⁵⁰Wickelgren, 1974, p. 119.

¹⁵¹ GODIN e McCLINTOCK, 1979, p. 364.

¹⁵²Dmitri Fomin, Ilia Altenberg e Sergey Genkin (2012, p.72).

9) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).¹⁵³

10) Um saco contém muitas conchas, de cinco cores diferentes: Branca, preta, verde, amarela e azul.

Qual o menor número de conchas que precisam ser retiradas do saco (sem olhar) de modo que possamos garantir que duas das conchas retiradas sejam da mesma cor?¹⁵⁴

11) Em uma sala completamente escura, há três chapéus negros e dois chapéus brancos.

Eles são feitos para cobrir três pessoas, incluindo um homem cego. Todo mundo pega um chapéu aleatório e, sem olhar para ele, coloca-o em sua cabeça.

Os dois outros chapéus são escondidos.

A luz é ligada, e para cada pessoa é perguntado se ele é capaz de adivinhar a cor do seu chapéu.

O primeiro olha para os outros dois e diz que não.

A segunda olha para os outros dois e diz que não.

¹⁵³ Banco de questões OBMEP 2014, p. 57.

¹⁵⁴ Dmitri Fomin, Iliahtenberg e Sergey Genkin (2012, p.35). O problema original remete a extração de duas conchas de mesma cor e não de cinco conchas.

O terceiro, embora sendo cego, exclama: sim.

Como é que essa pessoa cega adivinhar a cor do seu chapéu?¹⁵⁵

12) Piero, Jolanda e Alice devem atravessar um rio em um barco que não pode transportar um peso superior a 100 kg.

Enquanto as senhoras pesa apenas 50 kg cada, Piero pesa 100 kg.

Como eles podem fazer para atravessar o rio?¹⁵⁶

13) James tem 10 sacos cheios de moedas de ouro n ($n > 10$)

Cada um pesando 1 g.

Um dos sacos contém apenas moedas falsas que têm a característica de pesar 2g.

Giacomo tem ao seu dispor uma balança que indica a massa do que é depositado sobre a placa.

Como James pode fazer para identificar, com apenas um pesagem, o saco contendo as moedas falsas?¹⁵⁷

14) Na Itália há pelo menos 60 milhões de cidadãos, e ninguém tem mais de 1 milhão de cabelos em sua cabeça.

¹⁵⁵Lhullier, 2010, carta 11, verde.

¹⁵⁶Lhullier, 2010, carta 3, rosa.

¹⁵⁷Lhullier, 2010, carta 7, roxa.

É possível ter certeza que há pelo menos dois italianos com o mesmo número de cabelos?¹⁵⁸

Prove que o comprimento de qualquer lado de um triângulo não é maior que metade de seu semi-perímetro.¹⁵⁹

15) Um colhedor de cogumelos sai da floresta em um determinado ponto. Ele precisa chegar a uma estrada que segue uma linha reta e voltar para a floresta em outro ponto dado (Figura 20). Como ele deve fazer isso para seguir o menor caminho possível?¹⁶⁰

Figura 20

21) A cabana de um lenhador fica numa península que tem a forma de um ângulo agudo. O lenhador tem que sair de sua cabana, andar até a praia de um dos lados da península, depois ir à praia do outro, depois voltar para casa. Como ele deveria escolher o caminho mais curto?¹⁶¹

¹⁵⁸Lhullier, 2010, carta 5, laranja.

¹⁵⁹Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p.55).

¹⁶⁰Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 56).

¹⁶¹Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 57).

22) Uma caixa contém lápis de pelo menos duas cores diferentes e de dois tamanhos diferentes. Mostre que existem dois lápis na caixa que diferem em cor e tamanho.¹⁶²

23) Três amigos, o escultor Branco, o violinista Negro e o artista Ruivo se encontram em um bar. “É impressionante que um de nós tem cabelos brancos, outro negros e outro ruivo mas nenhum de nós tem o nome da cor do seu cabelo”, disse a pessoa de cabelos negros. “Você tem razão”, respondeu Branco. Qual a cor do cabelo do artista?¹⁶³

24) Os habitantes de uma ilha ou são mentirosos e apenas mentem ou são honestos e apenas dizem a verdade.

A pessoa A disse “Eu sou mentiroso”. Essa pessoa pode ser habitante da ilha?¹⁶⁴

Indução.

Banco de Questões 2015, Nível 3, questão 4

1) A calculadora científica de João possui uma tecla especial que transforma qualquer número x escrito na tela e que seja diferente de 1 no número $1/1-x$.

.

¹⁶²Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 72).

¹⁶³Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 72).

¹⁶⁴Dmitri Fomin, IliaAltenberg e Sergey Genkin (2012, p. 72).

a) O que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial três vezes?

b) O que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial dez vezes?

c) Finalmente, o que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial 2015 vezes?¹⁶⁵

2) Nove homens e dois meninos querem atravessar um rio, usando um bote inflável que é capaz de carregar um homem ou dois meninos, como eles devem fazer para transportar todos ao outro lado do rio?¹⁶⁶

3) Quando dez pessoas se encontram e todas as pessoas cumprimentam-se com um aperto de mãos, quantos apertos de mãos ocorrem? (considerando que quando duas pessoas se cumprimentam, ocorre um aperto de mãos).¹⁶⁷

4) Divida um quadrado em duas peças idênticas. De quantas maneiras diferentes você pode fazer esta divisão? Faça uma anotação de sua solução.¹⁶⁸

5) Para pagar impostos relacionados com a venda de vinho, um produtor deve entregar ao governo um décimo do produto que tira de seu estoque ao governo.

¹⁶⁵ OBMEP, 2015, questão 4.

¹⁶⁶ Wickelgren, 1974, p. 98.

¹⁶⁷ Banco de questões OBMEP 2014, p. 57.

¹⁶⁸ (Pehkonen, Navari, 2013, p. 16).

Quantos litros de vinho deve tirar de seus barris para satisfazer o cliente e pagar ao Estado?¹⁶⁹

6)Dois jogadores revezam tirando pedaços de chocolate formado por 5X10 quadradinhos. Em cada jogada eles quebram a barra ao longo das linhas que dividem os quadradinhos. Vence o primeiro jogador que obtiver um único quadrado. Quem vence, o primeiro ou o segundo jogador?¹⁷⁰

6)Dois jogadores se revezam escrevendo X ou O em um papel quadriculado 9X9.

O primeiro jogador escreve X e o segundo, O. Ao final do jogo, o primeiro jogador ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais X, enquanto o segundo jogador ganha um ponto para cada linha ou coluna que contém mais O. Vence o jogador que fizer mais pontos. Qual jogador pode garantir a vitória?¹⁷¹

7)Em um tabuleiro de xadrez, uma torre está na posição a1. Dois jogadores se revezam movendo a torre de quantos quadrados quiserem, horizontalmente para a direita ou verticalmente, para cima. Vence o jogador que colocar a torre na casa h8. Quem pode garantir a vitória?¹⁷²

Equacionamento.

1)Sofia gastou todo o dinheiro que tinha no bolso durante um dia de compras

¹⁶⁹Lhullier, 2010, carta 2, laranja.

¹⁷⁰Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 61).

¹⁷⁰Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 64).

¹⁷¹Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.64).

¹⁷²Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p.64).

em 5 lojas .

Em cada loja que ele passou metade do que ele tinha no bolso antes de entrar, mais £ 10.

Quanto dinheiro Sofia tinha antes de começar a fazer as compras?¹⁷³

2) Piero tinha galinhas e coelhos.

Ao contar cabeças, obteve oito.

Ao contar as pernas, obteve vinte e oito.

Quantas galinhas e quantos coelhos tem Piero?¹⁷⁴

3) Uma garrafa de 1 litro contém um refrigerante feito de 99% de água (o restante do que compõe o refrigerante é sólido).

Vamos tentar uma pequena experiência:

Deixar evaporar o líquido até que o frasco contenha 98% de água.

Qual volume permanecerá assim na garrafa?¹⁷⁵

4) Um bilionário é dono de uma coleção de carros diferentes.

¹⁷³Lhullier, 2010, carta 10 vermelha.

¹⁷⁴Lhullier, 2010, carta 10, laranja.

¹⁷⁵Lhullier, 2010, carta 11, laranja.

Quantos veículos tem no total, ao passo que todos, exceto dois são vermelho, que todos, exceto dois são negros, e que todos, exceto dois são brancos?¹⁷⁶

5)Um saco de trigo pesa três quartos de um lote de cevada, que pesa 2 kg mais que um saco de grão.

Quão pesado é o saco de trigo?¹⁷⁷

6)Para pagar impostos relacionados com a venda de vinho, um produtor dar ao estado um décimo de sua produção.

Um restaurante ordena que ele entregue 90 litros de vinho.

Quantos litros de vinho deve tirar de seus barris para satisfazer o cliente e pagar ao Estado?¹⁷⁸

7)No recreio, uma menina explica a um amigo:

Tenho tantas irmãs irmãos.

¹⁷⁶Lhullier, 2010, carta 1, rosa.

¹⁷⁷Lhullier, 2010, carta 8, vermelha.

¹⁷⁸Lhullier, 2010, carta 2, laranja.

Seu irmão acrescenta:

Tenho duas vezes mais irmãs do que irmãos.

Quantas garotas e quantos garotos estão lá nesta família?¹⁷⁹

8) Uma garrafa e sua tampa valem 11 euros.

A garrafa vale 10 euros mais do que a tampa.

Quanto é a tampa e quanto é a garrafa?¹⁸⁰

Variação do problema

1) Hector pinta uma casa em seis dias.

Sua colega Clara pode fazer o mesmo trabalho em apenas três dias.

Quanto tempo levaria para pintar uma casa se unirem suas forças?¹⁸¹

Lógica

¹⁷⁹Lhullier, 2010, carta 2, vermelha.

¹⁸⁰Lhullier, 2010, carta 1, vermelha.

¹⁸¹Lhullier, 2010, carta 9, laranja.

1)Você se depara com duas portas, uma dá pro inferno e outra pro inferno. você não sabe qual dos dois vai levar para o paraíso. Existem dois guardas, um guarda a porta do céu e outro a do inferno. Você não sabe qual é qual.

Um é um mentiroso (que guarda o inferno), enquanto o outro sempre diz a verdade. Para saber qual porta abrir para ir para o céu você pode fazer uma única pergunta aos dois guardiões, e deve ser a mesma para ambos.

Qual é essa pergunta?¹⁸²

2)Um prisioneiro se depara com um grande problema.

O seu carrasco lhe concedeu um último favor.

Ele pode fazer uma declaração final, que definirá a maneira que vai morrer.

Se a afirmação é falsa, ele será esquartejado; se for verdade, será queimado vivo.

Qual deve ser a declaração do prisioneiro para sair desta situação?¹⁸³

Analogia ou problema correlato.

1)Temos duas pilhas de pedras. Uma com 7 e outra com 5 pedras. Dois jogadores se divertem tirando um número arbitrário de pedras de cada pilha ou tirando o mesmo número de pedras das duas pilhas. Qual jogador não pode jogar na sua vez?¹⁸⁴

¹⁸²Lhullier, 2010, carta 13, verde.

¹⁸³Lhullier, 2010, carta 9, verde.

¹⁸⁴Dmitri Fomin, Ilia Ialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 68).

2) Temos dois montes de fósforos. Cada um com 11 fósforos. Em cada jogada, o jogador precisa tirar dois fósforos de um monte e um fósforo de outro. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

Qual jogador pode garantir a vitória?¹⁸⁵

Referências bibliográficas(dos problemas do APÊNDICE B):

CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

DIMITRI, F., **GENKIN**, S., **ITENBERG**, I. Círculos Matemáticos, a experiência russa. Tradução: IMPA, Rio de Janeiro. IMPA, 2014.

GODIN, G. A. Structure variables in problem solving in: **GODIN**, G. A., **MCCLINTOCK**, E. Task variable in problem solving. Georgia, Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

LHULLIER, S. , 2010. Enigmimatematici. Traduzido do frances. Título original: La boîte à énigmes mathématiques, 2009. Roma, L'airone.

OBMEP, Banco de questões 2011. Rio de Janeiro. Editora OBMEP, 2011.

POLYA, G. How Solve It, Tradutor: Heitor Lisboa de Araujo, Rio de Janeiro, Interciencias LTDA, 1975.

¹⁸⁵Dmitri Fomin, Ilialtenberg e Sergey Genkin (2012, p. 69).

WICKELGREN, W.A. How to solve problems, elements of a theory of problem solving. New York, W.H. FREEMAN AND COMPANY, 1974.

Referências Bibliográficas

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só), Educação e Matemática, 8, 7-10 e 35.

BOURDIE, P., A escola conservadora. As desigualdades frente à escola e à cultura. Tradução: Aparecida Joly Gouveia. Paris, Revista francesa de sociologia, 1966.

BRUSSEAU, Guy. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo. Ática, 2008.

CARAÇA, B. J., Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa, Tipografia matemática, 1951.

Secretaria Municipal de Educação de São Paulo. Currículo integrador da infância. São Paulo. Centro de Multimeios. 2015.

CHARLES e **LESTER**, An evaluation of a process oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7 in: Journal for research in mathematics education, National council of teachers of mathematics, 1984.

CHEVALLARD, Y.; **BOSCH**, M. e **GASCÓN**, J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

DIMITRI, F., GENKIN, S., ITENBERG, I. Círculos Matemáticos, a experiência russa. Tradução: IMPA, Rio de Janeiro. IMPA, 2014.

FERNANDES, D., BORRALHO, A., AMARO, Processos de resolução de problemas: Revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação in **FERNANDES, D., BORRALHO, A., AMARO,** Resolução de problemas, processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa:IIIE/SEM-SPCE, 1994.

GODIN, G. A. Structure variables in problem solving in: **GODIN, G. A., MCCLINTOCK,** E. Task variable in problem solving. Georgia, Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

GODIN, G. A., MCCLINTOCK, E. Task variable in problem solving. Georgia, Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

KULM, G. Classification of problem solving variables in: **GODIN,**Task variable in problem solving. Georgia, Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

LAKATOS, I. A lógica do descobrimento matemático. Provas e refutações. Rio de Janeiro, 1978.

LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL, 1996.

LEITÃO, A., FERNANDES, M. H., CABRITA, I. Variáveis tarefa na resolução de problemas in: **FERNANDES, D., BORRALHO, A., AMARO,** Resolução de problemas, processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa:IIIE/SEM-SPCE, 1994.

LHULLIER, S. , 2010. Enigmimatematici. Traduzido do frances. Título original: La boîte à énigmesmathématiques, 2009. Roma, L'airone.

LUCAS, BRANCA, GOLDEMBERG, KANTOWSKI, KELLOG e SMITH, 1979. Heuristic behavior variables in researchproblem solving. Georgia, Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: Análise de uma impregnação mutua, São Paulo, editora Cortez, 2011.

MCCLINTOCK, E. Heuristic processes as task variables in: **GODIN**,Task variable in problem solving. Georgia, Georgia Center for the study of learning and teaching mathematics, 1979.

MEC, Secretaria de educação fundamental, PCN de matemática. Brasília, 1997.

MOURÃO, A, P, S. Processos de resolução de problemas: algumas questões in: **FERNANDES, D., BORRALHO, A., AMARO**, Resolução de problemas, processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa:IEE/SEM-SPCE, 1994.

NIBALDO, A., TRIVINOS, S. Introdução à pesquisa em ciências sociais.São Paulo.Editora Atlas, 1987.

OBMEP, Banco de questões 2011. Rio de Janeiro. Editora OBMEP, 2011.

PEHKONEN, E., NAVERI, L., LAINE, A. On teaching problem solving in: school mathematics, CEPS Journal, Vol. 3, nº4, 2013.

POLYA, G. How Solve It, Tradutor: Heitor Lisboa de Araujo, Rio de Janeiro, Interciencias LTDA, 1975.

POLYA, G. Mathematics ans plausible rasoning, New Jersey, Princinton University Press, 1968.

PONTE, J. P., Gestão curricular em matemática in **FERNANDES**, D., **BORRALHO**, A., **AMARO**, Resolução de problemas, processos cognitivos, concepção de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa:IIE/SEM-SPCE, 1994.

Portaria municipal nº 5491/13 (2013).

POZO , R. I., **ECHEVERRÍA** , M. P. P., **CASTILHO**, J. D., **CRESPO**, M. A. G., **ANGÓN**, Y. P. Solução de problemas, aprender a resolver e resolver para aprender, Porto Alegre, Artmed, 1998.

SANTALÓ, Matemática para não matemáticos in: **CECÍLIA**, P., Didática da matemática. Reflexões psicopedagógicas, Porto Alegre, Artmed, 2006.

SANTOS, J. R. V. **BURIASCO**, R. L. C. Características dos problemas que os alunos constroem a partir do enunciado de uma questão aberta de matemática in: Bolema, nº32, Rio Claro, 2009.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO:
<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/813.pdf>.

TEREZINHA CARRAHER, **DAVID CARRAHER** e **ANALÚCIA SCHILIEMAN**, Na vida dez, na escola 0, Pernambuco, Cortez Editora, 1991.

VIGOTSKI, L. S. Pensamento e Linguagem. Tradução: Jeferson Luiz Camargo. São Paulo. Martins Fontes, 2000.

VIGOTSKI, L. S. A formação social da mente. O desenvolvimento das funções psicológicas superiores. São Paulo, Martins Fontes, 2007.

VIOLA e **BURIASCO** Características de um problema que os alunos constroem a partir de um problema aberto de matemática. São Paulo, Bolema, 2009.

WICKELGREN, W.A. How to solve problems, elements of a theory of problem solving. New York, W.H. FREEMAN AND COMPANY, 1974.