Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Proporcionalidade e matemática financeira: uma abordagem tendo como princípios motivação e contextualização

Tadeu Alexandre de Araújo

Dissertação de mestrado do programa Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientador Antônio Luiz Pereira

Julho de 2017

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Título: **Proporcionalidade e matemática financeira: uma abordagem tendo como princípios motivação e contextualização**

Autor: **Tadeu Alexandre de Araújo**

Este exemplar corresponde à **versão original** da dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

_____

Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira

Orientador

Comissão Julgadora

_____

Profa. Dra. Cristina Cerri

_____

Profa. Dra. Gleiciane Aragão

2017

RESUMO

O presente trabalho contém algumas ideias, no nível do Ensino Médio, dos tópicos da Matemática, quais sejam proporcionalidade e Matemática Financeira. A apresentação de ambos os tópicos tem uma marca que é a resolução de problemas que consideramos motivadores, e que podem ser encontrados em múltiplos contextos. A seguinte linha de pensamento no desenvolvimento dos tópicos é adotada: em proporcionalidade, de início, problemas são apresentados e logo na sequência se foca o aspecto conceitual numa exposição minuciosa dos aspectos teóricos e práticos do tópico. O desenvolvimento da teoria é feita com detalhes desde a definição passando pelos resultados centrais até se chegar à caracterização de variáveis proporcionais. Notas explicativas são inseridas para evidenciar certos aspectos na rotina de estudantes e professores na situação de apreender/ensinar e que enriquecem o texto, um exemplo disso é a nota explicativa acerca dos limites de aplicação da teoria. A Matemática Financeira é apresentada a partir de problemas contextualizados e cujas resoluções são munidas de registros figurais que facilitam a apreensão conceitual. Em todo o desenvolvimento do tópico se discute o significado dos termos mais frequentes e há uma tentativa de evidenciar que a importância do tópico hoje reside no fato que se trata de uma ferramenta que subsidia a tomada de decisão financeira.

Palavras-chave: Proporcionais. Preço Justo. Valor Equivalente.

ABSTRACT

The present work contains some ideas, for the high school level, about the topics from Mathematics, which are Proportionality and Financial Mathematics. The presentation of both topics carries a mark that is the solution for the problems we consider motivating, and they can be found in several contexts. The following sequence of thought in thedevelpment of the topics is adopted: initially, in proportionality, problems are presented, and right afterwards, the conceptual aspect focuses the detailed demonstration of the theoretical and practical apspects of the topic. The theory development is carried out with details since the definition going across the central results till reaching the characterization of proportionals variables. Explaining notes are inserted to show certain aspects in the routines of students and teachers in the aprehending/teaching situation that enrich the text, and an example of this is the explaining note about the limits of the theory application. The Financial Mathematics is presented from the contextualized problems and their solutions are provided with pictorial records that facilitate the conceptual aprehension. The whole development of the topic discusses the meaning of the terms most frequently found and there is an attempt to evidence that the importance of the topic nowdays resides in the fact that such a tool subsidizes the financial decision making.

Key-words: Proportionals. Fair Price. Equivalent value.

SUMÁRIO

Resumo.....iii

Abstract.....iv

Sumário.....v

Introdução

Apresentação.....01

Objetivos.....03

Estrutura do trabalho.....04

Capítulo I

Proporcionalidade.....05

1.1 Funções.....06

Definição de função.....06

Funções reais.....06

Funções crescentes e funções decrescentes.....06

1.2 Variáveis diretamente proporcionais.....07

Área e lado de paralelogramos.....08

O volume e a massa de um líquido homogêneo.....09

Número de torneiras e o tempo para encher um depósito.....09

Definição de variáveis diretamente proporcionais.....10

Teorema fundamental da proporcionalidade direta.....10

Problema 1.1.....12

Problema 1.2.....12

Área e o raio do círculo.....13

1.3 Caracterização de variáveis diretamente proporcionais.....13

Regra de sociedade.....14

A área e a base do retângulo 15

O comprimento e o raio da circunferência.....15

A distância e o tempo gasto para percorrer um trajeto a uma velocidade constante.....15

1.4 Variáveis inversamente proporcionais.....15

Teorema fundamental da proporcionalidade inversa.....16

Problema 1.3.....16

Problema 1.4.....16

Problema 1.5.....17

1.5 Caracterização de variáveis inversamente proporcionais.....17

1.6 Grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais para mais de duas variáveis.....19

Definição de grandeza diretamente proporcional a uma e inversamente proporcional a outra.....19

Problema 1.6.....20

Problema 1.7.....21

Problema 1.8.....22

Problema 1.9.....23

Problema 1.10.....24

1.4 Proporções.....25

Uma definição de proporção.....27

A Matemática do papel.....29

Capítulo II

A noção de justo, e o que seria vantagem e desvantagem no pagamento à vista e a prazo.....32

2.1 As funções exponencial e logarítmica e matemática financeira.....32

Função exponencial.....32

O logaritmo.....33

Função logarítmica.....34

Capitalização.....35

Juros simples.....36

Juros compostos.....37

2.2 Um problema contextualizado.....39

Problema 2.1.....42

2.3 Generalizações de pagamento parcelado e à vista.....46

Problema 2.2.....48

Problema 2.3.....49

Problema 2.4.....50
Problema 2.5.....51
Problema 2.6.....51
Problema 2.7.....52
Considerações finais.....53
Apêndice A.....55
Referências.....57

Introdução

Apresentação

Ao iniciar a elaboração desse trabalho, embora já tivéssemos uma ideia sobre o que escrever e para quem escrever; o aluno do Ensino Médio e o professor do Ensino Médio e do Ensino Fundamental. Porém, passava bem longe de nossa mente como escrever e em que bases fazê-lo. Não demorou muito, após algumas leituras, o surgimento do sentimento que precisávamos agregar algo que nos desse a certeza que seja qual fosse o tópico sobre o qual escreveríamos deveria conter nas entrelinhas algo que despertasse o interesse do leitor. Elegemos então *motivação e contextualização* como sendo referências centrais no desenvolvimento desse trabalho.

Outra atitude foi a de escolher dentre os tópicos possíveis de estudo na Educação Básica aqueles que se encaixavam mais facilmente nesse perfil. Pelo interesse que despertam e importância que têm na Matemática elementar e em diversos contextos, os tópicos eleitos foram proporcionalidade e Matemática Financeira. Creditamos a escolha dos tópicos, também, às experiências vividas por nós quando da ministração de disciplinas, em curso de graduação, voltadas para a formação matemática de futuros professores da Educação Básica, quando rotineiramente constatávamos, por um lado, interesse dos estudantes pelos assuntos e, por outro lado, conhecimento insuficiente da parte deles.

Proporcionalidade é um tópico motivador e amplamente utilizado em muitos contextos. Ao estudar proporcionalidade surge, naturalmente, a noção de proporção, objeto matemático que aparece em inúmeras aplicações e em muitos contextos.

Via formato impresso, televisão ou Internet, todos os dias, uma enxurrada de informação chega aos nossos olhos, sendo que algumas delas, de natureza propagandística, oferecem supostas vantagens financeiras na aquisição de uma

mercadoria. Percebe-se, nessas mensagens, a ênfase na forma de pagamento que, geralmente, é oferecida em duas modalidades, à vista ou a prazo, refletindo a estratégia das empresas que, cientes das dificuldades que tem o cidadão para decidir qual forma de pagamento melhor lhe convém, focam nesse detalhe.

Uma característica da Matemática Financeira é utilizar a matemática abstrata nas aplicações, e trabalha com ideias que, no final das contas, afetam a vida financeira dos cidadãos. Apesar disso,

> A Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico OCDE[1], constatou que muitas pessoas em diferentes países não só carecem dos conhecimentos e competências necessários para lidar de modo adequado com suas finanças pessoais como também desconhecem a própria necessidade de tais conhecimentos. [ENEF, 2010]

É lamentável perceber que as pessoas frequentemente pagam mais do que deveriam na aquisição de um bem. Essa problemática tem uma raiz, a pouca informação de que dispõe o cidadão em assuntos básicos da Matemática Financeira, refletindo o pouco que os alunos aprendem na escola sobre esse tema.

A constatação: "no fundo, só há um problema em Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo", [LIMA; et al, 2000], indica o foco central da Matemática Financeira. E seu desconhecimento impossibilita resolver corretamente problema como:

"uma mercadoria foi paga em quatro prestações de R$ 250,00. Qual seria o valor "justo" para o preço à vista?".

A resposta surpreendentemente comum: R$ 1000,00 reflete a falta de compreensão de que os valores variam com o tempo. E que quantias só podem ser comparadas, somadas ou subtraídas quando deslocadas para seus valores equivalentes numa mesma data. Uma resposta correta depende de diversos fatores, e envolve diversos elementos de que tratam a Matemática Financeira: a taxa de juro cobrada, o número de prestações, a data dos pagamentos e a taxa de atratividade, isto é, a taxa com a qual se consegue fazer render o dinheiro. A resposta depende, também, da data em que se deseja saber o preço. No ato da compra? No momento do pagamento da última prestação? A depender da escolha na forma de pagar pode-se perder dinheiro, ou não. É evidente então que o exercício pleno da cidadania fica comprometido se o indivíduo desconhece as regras mais simples de proteção do seu próprio dinheiro e, isso implica que a cidadania não

[1] *OCDE*: sigla da *Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico*, organismo de cooperação internacional composto por 34 países, e que tem dentre outros objetivos buscar o desenvolvimento econômico permanente entre os países membros.

pode ser exercida plenamente sem o conhecimento das noções básicas da Matemática Financeira.

Um trunfo da Matemática Financeira frente a outros tópicos da Matemática abstrata é, sem dúvida, seu potencial de motivação, por ela abordar e se desenvolver a partir de problemas de importância clara no cotidiano das pessoas. Por outro lado, muitos problemas em Matemática Financeira requerem conhecimento de outros tópicos da Matemática.

As progressões geométricas e aritméticas, as funções exponencial e logarítmica são exemplos bem conhecidos. Em Matemática Financeira, certos problemas levam naturalmente ao cálculo da raiz de um polinômio de grau n. Tratam-se, como se pode observar, de situações que podem motivar o estudo da Matemática Financeira. Por outro lado, o estudo de alguns tópicos de Matemática Financeira pode criar um ambiente propício ao desenvolvimento de temas abstratos da Matemática, que viriam preencher lacunas e oferecer resposta à pergunta tão repetida na Educação Básica, "para que serve isso professor?".

Ao escrever sobre proporcionalidade e Matemática Financeira tivemos a preocupação de apresentá-las antes em alguns de seus múltiplos contextos e aplicações, numa espécie de motivação, para finalmente fazer uma apresentação formal.

Objetivos

Um dos objetivos do presente trabalho é apresentar a noção de proporcionalidade e algumas de suas aplicações, relacionando-a, sempre que possível, com proporção. Mostramos diversas situações nas quais a noção de proporcionalidade surge de modo inevitável e decisivo.

Discorremos ainda, neste trabalho, sobre como certas ideias da Matemática Financeira podem interferir no momento de decidir sobre as vantagens e desvantagens de uma compra à vista ou a prazo. Uma abordagem de tópicos da Matemática Financeira é apresentada utilizando uma metodologia que dentre outras coisas agrega elementos visuais, que favorecem a apreensão dos assuntos estudados, sem a

utilização repetida de fórmulas, como frequentemente ocorre na Educação Básica. A escolha dos assuntos foi feita apresentando problemas do dia-a-dia, e que fazem parte de um contexto de interesse geral. O desenvolvimento dos tópicos é feito apresentando uma situação particular, passando por etapas de depuração e compreensão para então se chegar às generalizações.

No presente trabalho, problemas contextualizados são apresentados desde o início dos capítulos, e cuja intenção é a de inteirar o leitor do objeto de estudo, para então apresentar a definição. Atitude que, se não estabelece de imediato a apreensão conceitual dos assuntos, amplia a possibilidade de apreensão tendo em vista que o leitor é induzido a uma releitura das coisas, na sequência da definição. Os problemas não são apresentados, como de costume, apenas como atividade final do assunto.

Estrutura do trabalho

O presente trabalho é constituído de uma parte inicial, a Introdução, seguida de dois capítulos e as Considerações Finais, além de um Apêndice. No Capítulo I desenvolvemos o tópico proporcionalidade. No Capítulo II, fazemos uma apresentação de tópicos da Matemática Financeira. Em ambos os capítulos, os focos são contextualização e motivação. Nas Considerações Finais fazemos uma reflexão da contribuição do trabalho e, no Apêndice, tratamos do tópico funções inversas.

Capítulo I

Proporcionalidade

Ao escrever sobre ensino de Matemática, Machado e D'Ambrósio afirmam que em cada conteúdo devem ser identificadas as ideias fundamentais a serem exploradas, [MACHADO; D'AMBRÓSIO, 2014]. Segundo os autores, é possível estudar muitos conteúdos sem dar atenção às ideias fundamentais, assim como também amplificar tais ideias explorando poucos conteúdos. Escrevem ainda os autores que a lista dos conteúdos a serem estudados é sempre extensa, mas a lista das ideias fundamentais não é extensa. E explicam: o fato de serem fundamentais "conduz a uma reiteração delas no estudo de uma grande diversidade de assuntos". E toma como exemplo de uma ideia fundamental na Matemática a proporcionalidade, diz conforme o autor, "se encontra presente tanto no raciocínio analógico, em comparações tais como *O Sol está para o dia assim como a Lua está para noite*, quanto no estudo das frações, razões e proporções, no estudo da semelhança de figuras, nas grandezas diretamente proporcionais, no estudo das funções do primeiro grau e assim por diante".

O que expõe Machado reflete sobremaneira a relevância desta noção. Este capítulo é dedicado ao estudo da noção de proporcionalidade, por se tratar de um tema de comprovada utilidade em problemas contextualizados e, também, pelo interesse que desperta nos estudantes, caracterizando- se como um tema motivador.

Neste capítulo é apresentada a noção de proporcionalidade guiado pelas atitudes seguintes: inicia-se com apresentação de problemas para em seguida estabelecer a definição clássica do que vem a ser variáveis proporcionais, propor e resolver alguns

problemas tendo como instrumento apenas a definição e os teoremas fundamentais da proporcionalidade, para em seguida demonstrar caracterizações de variáveis proporcionais, alargando o leque de opções de ferramentas teóricas para atacar e resolver problemas em proporcionalidade.

A fim de fixar a terminologia usada neste trabalho, vamos estabelecer algumas definições sobre funções. Uma abordagem sobre funções no nível da próxima seção pode ser encontrada em [LIMA, et al, 1998].

1.1 Funções

Definição 1.1 Fixados dois conjuntos não vazios *A* e *B*, uma função *f* de *A* em *B* é uma correspondência que a cada *x* em *A* associa um único *y* em *B*. Diz-se então que y é função de x, e escreveremos $y = f(x)$. Nesse caso, o conjunto *A* é chamado de domínio da função, e *B* é o contradomínio da função *f*.

O conjunto *Im(f)* = $\{y \in B : y = f(x), x \in A\}$, também denotado por *f(A),* é chamado de imagem da função *f*.

Uma função é dita função real se tem por domínio e contradomínio o conjunto dos números reais ou subconjuntos deste.

Neste trabalho serão consideradas apenas funções cujo domínio e o contradomínio são subconjuntos constituídos por números reais positivos. O conjunto dos números reais será denotado por |*R*, o conjunto dos números reais positivos por $|R_+$, e o conjunto dos números naturais por |*N*.

Definição 1.2 Uma função real f é crescente[2] quando para quaisquer valores x e x' em seu domínio, com $x < x'$ se tem $f(x) < f(x')$. Se, para quaisquer valores $x < x'$ ocorrer que $f(x) > f(x')$, diz-se que f é uma função decrescente.

[2] A definição de função crescente e decrescente dada aqui coincide com a de função estritamente crescente e decrescente em certos contextos, nos quais a definição de funções crescentes e decrescentes difere ligeiramente da que demos aqui, que imaginamos não cabe no presente trabalho por ele ser voltado para o ensino na Educação Básica.

Exemplos.

1. Dados os números reais *a* e *b*, com *a* > 0, definindo a função f(x) = *a*x+b, com xpercorrendo |R, então f é função crescente. De fato, sendo x e x' quaisquer em |R com $x < x'$, então $ax < ax'$, pois *a* > 0. Somando-se o número real *b* de ambos os lados dessa desigualdade se tem, $ax + b < ax' + b$, isto é, $f(x) < f(x')$. Logo, f é função crescente.

2. A função $f(x) = \frac{1}{x}$, considerando x no domínio dos números reais positivos, é decrescente. Com efeito, sendo *x* e *x*' números reais positivos quaisquer e *x < x'*, então *x'- x* > 0 e *xx' > 0*. Logo $(x'-x).\frac{1}{xx'} = \frac{x'}{xx'} - \frac{x}{xx'} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} > 0,$ de onde obtemos $\frac{1}{x} > \frac{1}{x'}$, ou seja, $f(x) > f(x')$ e a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente no intervalo $]0, \infty[$.

Um fato curioso é que a função $g(x) = \frac{1}{x}$, considerando *x < 0*, é também uma função decrescente. A verificação desse fato é semelhante a que se fez acima para *x > 0*. Mais curioso ainda é o fato que $h(x) = \frac{1}{x}$, com *x* diferente de *0* (zero), não é uma função decrescente. Com efeito, tomando *x = -1 e x' = 1* se tem *x < x'* e

$$h(x) = h(-1) = -1 < 1 = h(1) = h(x').$$

Isso mostra que não pode ser *h* uma função decrescente. Imagina-se então que h pode ser uma função crescente. O que também não é verdade porque no intervalo $]-\infty, 0[$ contido no domínio da função *h, h* é decrescente. Tudo, porém, está dentro da normalidade, existem funções que não são crescentes e nem decrescentes.

No Apêndice A e na Seção 2.1 escrevemos mais algumas coisas sobre funções que são de interesse nesse trabalho.

1.2 Variáveis diretamente proporcionais

Nesta seção, suporemos conhecidas as propriedades dos números reais para obter alguns resultados sobre proporcionalidade.

As referências, [LIMA, 1991], [ÁVILA, RPM 8, 1985], [ÁVILA, RPM 9, 1986] e [MELLO, 2008] serviram de inspiração para o que foi escrito no restante deste capítulo.

Antes de darmos a definição de variáveis proporcionais, consideremos algumas situações onde o conceito aparece.

Área e lado de paralelogramos. Sejam *r* e *s* duas retas paralelas e *t* uma reta transversal a elas em um plano. Consideremos um segmento de medida $x \in \mathbb{R}_+$, sobre a reta *s* (Figura 1).

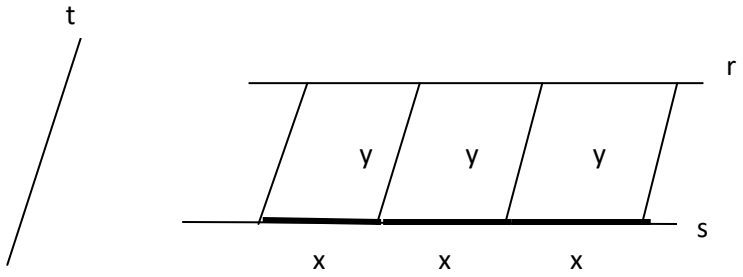

Figura 1. Três paralelogramos de base medindo *x* e área *y*.

Traçando pelas extremidades de *x*, segmentos paralelos à transversal *t*, determina-se um paralelogramo com dois lados contidos nas retas *r* e *s*.

Seja *y* a área do paralelogramo. Considere a correspondência $x \to y$. Essa correspondência é uma função, isto é, para cada valor de $x \in \mathbb{R}_+$, medida da base do paralelogramo, existe um único valor correspondente $y \in \mathbb{R}_+$, que é a área do paralelogramo, ou seja, $y = f(x)$ e, além disso,

(1) dados paralelogramos cujas bases têm medidas *x* e *x'* com $x < x'$, então como a altura é constante para cada paralelogramo, tem-se a área do paralelogramo de base *x*, menor que a área do paralelogramo de base *x'*, isto é, $f(x) < f(x')$. A correspondência é uma função crescente.

(2) se o paralelogramo tem base de medida *nx*, podemos dividi-lo em *n* paralelogramos congruentes e justapostos de base medindo *x*, obtendo dessa maneira n paralelogramos de área *y*. Então o paralelogramo de base medindo *nx* tem área *ny*, ou seja, $f(nx) = ny = nf(x)$ para todo número natural *n*. Nessa situação, dizemos que *y* é diretamente proporcional a *x*.

O volume e a massa de um líquido homogêneo. Seja $x \in |R_+$, o volume de um líquido homogêneo, e $y \in |R_+$ a massa do líquido em quilogramas. A correspondência $x \to y$ é uma função, $y = g(x)$, porque nas mesmas condições de temperatura e pressão, todo volume do líquido possui uma única massa em quilogramas. E ainda,

(1) se x e x' são dois valores do volume do líquido, com $x < x'$, então $g(x) < g(x')$, isso implica que g é função crescente.

(2) para todo valor do volume x que tem peso $y = g(x)$, o volume do líquido de valor nx terá peso ny, ou seja, $g(nx) = ng(x)$ para todo n natural.

Novamente, dizemos que y é diretamente proporcional a x.

Número de torneiras e o tempo para encher um depósito. Seja $x \in |N$, o número de torneiras idênticas a encher um depósito d'água, e $t \in |R_+$ o tempo gasto para o depósito ficar totalmente cheio. A correspondência $x \to t$ é uma função, $t = f(x)$, pois para cada número x de torneiras a encher o depósito, existe um único tempo t gasto para enchê-lo totalmente. E ainda,

(1) se x e x' são números de torneiras tais que $x < x'$ então $f(x) > f(x')$, porque aumentando o número de torneiras a encher o depósito, o tempo t gasto para encher o depósito deve diminuir. Logo, f é decrescente.

(2) se x torneiras enchem o depósito no tempo t, o número de torneiras $2x$, $3x$, $4x$ torneiras enchem o depósito nos tempos, $t/2$, $t/3$ e t/4, respectivamente. Vê-se então que nx torneiras devem encher o depósito no tempo t/n, ou seja, $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$ para todo natural n.

Nesse caso, dizemos que t é inversamente proporcional a x.

A noção de variáveis proporcionais é dividida em duas, são elas: proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa. As Definições *1.3* e *1.4*, que daremos a seguir, são as definições clássicas e estabelecem com precisão a noção de proporcionalidade, distinguindo quando a proporcionalidade é direta ou inversa.

Definição 1.3 Dadas as variáveis reais $x > 0$ e $y > 0$, diz-se que y é diretamente proporcional a x se $y = f(x)$, f uma função crescente, e $f(nx) = nf(x)$ para todo natural n e todo valor da variável x.

Da Definição *1.3*, dizer que a variável y é diretamente proporcional à variável x significa dizer que y é função crescente de x e quando multiplicamos n por x, y fica multiplicado por n, para todo natural n e todo valor da variável x.

Nesse caso escreveremos y e x são vdp.

Da definição de vdp, podemos aferir que se y e x são vdp, então x e y são vdp.

Isso pode ser demonstrado como segue: y e x vdp, existe uma função crescente f tal que $y = f(x)$ para todo valor y e todo valor x.

No Apêndice A, sobre função inversa, mostramos que a função f tem uma função inversa g, $x = g(y)$ existe, isto é, x é função de y, sendo g também uma função crescente de y. Finalmente, com a notação $y = f(x)$ e $x = g(y)$, para todo n natural, $g(ny)$ deve ser um valor, digamos, b $[g(ny) = b]$ tal que $f(b) = ny = nf(x) = f(nx)$. O fato de ser f crescente nos permite concluir que $b = nx$ (se fosse b diferente de nx, teríamos $f(b)$ diferente de $f(nx)$). Logo, sendo g a função inversa de f, $g(ny) = b = nx = ng(y)$ para todo n natural.

Resulta que, $x = g(y)$, x é função de y, sendo g uma função crescente de y; e $g(ny) = ng(y)$, para todo natural n e todo valor da variável y, ou seja, x e y são vdp.

Teorema 1.1 (Teorema fundamental da proporcionalidade direta)

Se $y = f(x) > 0$ é uma função crescente de $x > 0$, e $f(nx) = nf(x)$ para todo natural n, então

$$f(zx) = zf(x),$$

para todo real $z > 0$, e todo valor da variável x.

Demonstração. Vamos supor primeiro que $x = \frac{r}{s}$ um número racional, onde r e $s \in |N$. Então,

$$rf(x) = f(rx) = f(s.\frac{r}{s}.x) = sf(\frac{r}{s}.x).$$

Logo,

$$f(\frac{r}{s}.x) = \frac{rf(x)}{s} = \frac{r}{s} f(x) \ ,$$

e a propriedade vale para $\frac{r}{s}$ racional positivo. Afirmamos que ela vale para todo número real $z > 0$. Se não fosse esse o caso teríamos $f(zx) > zf(x)$ ou $f(zx) < zf(x)$, para algum $x > 0$ e algum $z > 0$. Suponha que $f(zx) < zf(x)$). Então $\frac{f(zx)}{f(x)} < z$ pois $f(x) > 0$, por hipótese. Seja t um racional tal que

$$\frac{f(zx)}{f(x)} < t < z,$$

(tal racional t existe[3] porque Q é denso em $|R$.)

Dessas desigualdades

$$f(zx) < tf(x) < zf(x),$$

isto é,

$$f(zx) < f(tx),$$

pois $t > 0$ é racional. Disso decorreria $zx < tx$ pois f é crescente, o que nos daria $z < t$ pois $x > 0$, que contradiz a hipótese $t < z$. Se, por sua vez, fosse $f(zx) > zf(x)$, então $\frac{f(zx)}{f(x)} > z$ pois $f(x) > 0$. Seja t um racional tal que

$$\frac{f(zx)}{f(x)} > t > z \ .$$

Dessas desigualdades, $f(zx) > tf(x) > zf(x)$, tendo em vista que $f(x)>0$. Da primeira desigualdade, $f(zx) > f(tx)$ pois $tf(x) = f(tx)$, visto que t é racional. Decorre que $zx > tx$ pois f é crescente. Logo $z > t$, pois $x > 0$, o que contradiz a hipótese $t > z$.

---

[3] Dados dois números reais x e y com x < y, então existe um número racional r tal que x < r < y. Devido essa propriedade se diz que o conjunto Q dos números racionais é denso no conjunto |R dos números reais.

Resta então a única possibilidade $f(zx) = zf(x)$. □

Apresentamos a seguir, como esta caracterização pode ser usada para resolver problemas em proporcionalidade.

Problema 1.1 Um lote retangular de dimensões *500m x 500m* é limpo em *144* horas. Em quantas horas seria limpo um sublote desse de dimensões *100m x 100m* ?

Solução. Se *A*, em *m²*, é a área do lote, e *t*, em horas, é o tempo gasto para limpá-lo, a correspondência $A \rightarrow t$ é tal que para cada valor da área *A* de um lote, existe um único tempo para limpá-lo. Logo, *t* é função de *A*, digamos $t = f(A)$. E ainda:

(1) se *A* e ***A'*** são valores da área de dois lotes, e $\boldsymbol{A < A'}$ então $t = f(A) < t' = f(A')$, pois à medida que se aumenta a área do lote, aumenta-se também o tempo para limpá-lo. Logo *f* é função crescente.

(2) Considerando que $t = f(A)$, e interpretando a área *nA* como n áreas de valor *A*, o tempo para limpar o lote será *nt*, isto é, $f(nA) = nf(A)$ (supondo que a área limpa por unidade de tempo não varie com o tempo). Decorre que *t* é diretamente proporcional a *A*. Logo, a área do lote maior *250.000m²* e a área do lote menor *10.000m²* são tais que

$\frac{1}{25}.250.000 = 10.000$. Pelo Teorema 1.1, se a área é multiplicada por $\frac{1}{25}$ o número de horas fica multiplicada por $\frac{1}{25}$. Então, em $\frac{1}{25}.144 = 5{,}76$ horas o lote de *100m x 100m* seria limpo. □

Problema 1.2 Um pneu de raio *0,3 m*, acoplado na roda de um automóvel, numa viagem, gira *250.000* vezes em torno do eixo da roda. Supondo que a cada giro da roda, uma distância correspondente ao comprimento do pneu é percorrida, isto é, não há escorregamento, qual será a distância percorrida pelo automóvel ?

Solução. O comprimento, correspondente a *1* giro, da parte de rolagem do pneu é $C = 2\pi.0{,}3\ m = 0{,}6.\pi\ m$. Como a variável quantidade de giros da roda é proporcional a variável distância percorrida, e para ir de *1* (um) giro para *250.000* giros se multiplica

por 250.000, da definição de vdp, a distância percorrida será de $250.000.0,6.\pi\ m = 150.000\pi\ m = 150\pi\ Km$. □

Um erro frequente é concluir que duas variáveis y e x são vdp quando se tem apenas $y = f(x)$, sendo f função crescente. Por exemplo, tomando $y = x^2$, para x e z números reais com $0 < x < z$, temos $x^2 < xz$ pois $x > 0$ e $xz < z^2$ pois $z > 0$, o que acarreta $x^2 < z^2$. Logo, $y = x^2$ é função crescente de x, para x no intervalo $]\ 0, \infty\ [$. Porém, tomando $x = 2$ obtemos $y = 4$; tomando $x = 6 = 2.3$ então $y = 6^2 = 36$. Para x igual a 2, o valor y correspondente é 4, e quando multiplicamos 2 pelo número natural 3 o valor y correspondente $y = 18$, não é o produto 3.4. Logo as variáveis y e x com $y = x^2$, e $x > 0$, não são vdp.

Área e o raio do círculo. Se r é um número real, $r > 0$, a área A do círculo de raio r é $A = \pi r^2$. Fixado um valor r_1 para o raio, a área A_1 do círculo de raio r_1 é $A_1 = \pi(r_1)^2$. Multiplicando-se r_1 por 3, por exemplo, a área A_2 do círculo de raio $3r_1$ é $A_2 = \pi(3r_1)^2 = 9\pi(r_1)^2$. Vemos que quando multiplicando o raio de uma circunferência pelo inteiro positivo 3, a área fica multiplicada por 9. Se fossem a área do círculo e seu raio vdp, deveríamos ter o valor da área multiplicado por 3. Decorre que a área e o raio do círculo não são vdp.

1.3 Caracterização de variáveis diretamente proporcionais

Suponhamos y e x, $y = f(x)$, vdp. Do Teorema 1.5, tomando $x = 1$ tem-se $f(z) = zf(1) = az$, onde $a = f(1) > 0$, para todo $z > 0$ real. Logo,

$$f(x) = ax,$$

para todo valor da variável x. Reciprocamente, se $y = ax$, com $a > 0$, então y é função crescente de x, pois se x e x' são tais que $x < x'$, então $ax < ax'$ pois $a > 0$, isto é, $y < y'$. Para todo número natural n, $a(nx) = (an)x = (na)x = n(ax) = ny$, quando multiplicamos n por x, o valor correspondente y fica multiplicado por n. Logo, y e x são vdp.

Obtivemos desse modo uma *caracterização* de variáveis diretamente proporcionais:

a variável y é diretamente proporcional à variável x se, e somente se, existe uma constante $a > 0$ *tal que* $y = ax$.

O número a é chamado *constante de proporcionalidade*.

Em muitas aplicações, a constante de proporcionalidade é o número a ser determinado.

Um famoso problema que usa a noção de vdp e onde, em particular, a constante de proporcionalidade é útil, é a "regra de sociedade" como veremos agora.

Regra de sociedade. Três indivíduos entram com *R$ 12.000,00, R$ 18.000,00* e *R$ 20.000,00* para constituir uma pequena empresa. Se o lucro ao longo de um período foi de *R$ 10.000,00*, e esse mesmo lucro deve ser dividido de maneira diretamente proporcional ao valor que cada um dispôs inicialmente, calcular quanto caberá a cada um.

Solução. Sejam x, y e z os lucros, em reais, então existe uma constante a - a constante de proporcionalidade -, tal que

$$x = a(12.000) = 12.000a,$$

$$y = a.(18.000) = 18.000a,$$

$$z = a(20.000) = 20.000a,$$

somando-se as três equações lado a lado, vem que

$$10.000 = x+y+z = 12.000a + 18.000a + 20.000a = 50.000a.$$

Logo, $a = \frac{1000}{5000} = \frac{1}{5}$, o que resulta em $x = 12.000.\frac{1}{5} = 2.400$, $y = 18.000.\frac{1}{5} = 3.600$ e $z = 20.000.\frac{1}{5} = 4.000$. Portanto, *R$ 2.400,00*, é o lucro de quem entrou com *R$ 12.000,00*, *R$ 3.600,00* o lucro de quem entrou com *R$ 18.000,00* e *R$ 4.000,00* de quem entrou com a maior fatia, *R$ 20.000,00*. □

A área e a base do retângulo. Fixada a altura h, e sendo b a medida da base, A área A do retângulo e a base b são vdp, pois $A = bh$, onde h é a constante de proporcionalidade.

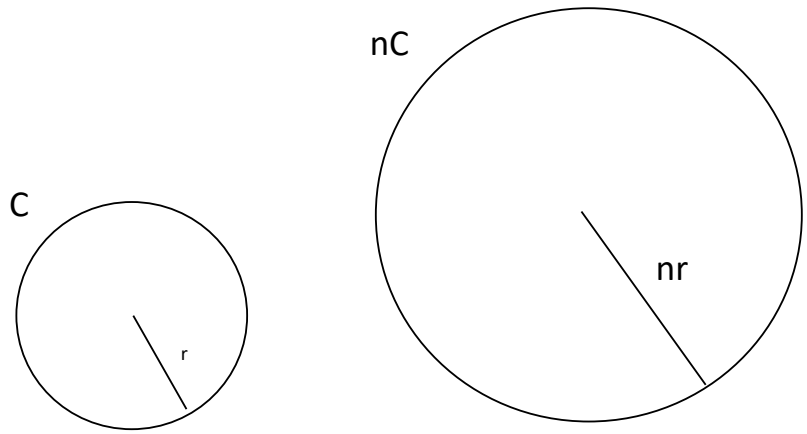

Figura 2. Quando se multiplica o raio r > 0 pelo número natural n, o comprimento C fica multiplicado por n. O comprimento C e o raio r > 0 da circunferência são variáveis diretamente proporcionais.

O comprimento e o raio da circunferência. Sabe-se da geometria que $C = 2\pi r$, sendo C o comprimento da circunferência de raio $r > 0$. Claramente C e r são vdp e, nesse caso, a constante de proporcionalidade é a = 2π (Figura 2).

A distância e o tempo gasto para percorrer um trajeto a uma velocidade constante. A distância d percorrida por um móvel a velocidade constante v é $d = v\,t$, onde t é o tempo gasto para percorrer o trajeto. A distância d e o tempo t são vdp, sendo que a velocidade v é a constante de proporcionalidade.

1.4 Variáveis inversamente proporcionais

Definição 1.4 Duas variáveis reais $y > 0$ e $x > 0$ são ditas inversamente proporcionais se $y = f(x)$, f é uma função decrescente, e $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$, para todo natural n e todo valor da variável x.

Da Definição 1.4, dizer que y é variável inversamente proporcional a x significa dizer que y é função decrescente de x e quando multiplicamos n por x, y fica multiplicado por $\frac{1}{n}$ (ou dividido por n) para todo natural n e todo valor da variável x.

Teorema 1.2 (Teorema fundamental da proporcionalidade inversa)

Se $y = f(x) > 0$ é uma função decrescente de $x > 0$, e $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$ para todo natural n, então $f(zx) = \frac{1}{z} f(x)$ para todo $z > 0$ real, e todo valor x.

A demonstração do Teorema 1.2 é análoga à do Teorema 1.1, e não será feita aqui. Vamos, porém, usá-lo para obter uma caracterização de variáveis inversamente proporcionais.

Se a variável y é inversamente proporcional à variável x escreveremos que y e x são vip. Do que foi dito no exemplo *número de torneiras e o tempo para encher um depósito*, na Seção 1.2, e da Definição 1.4, a variável t, o tempo gasto para encher totalmente o depósito, é inversamente proporcional a x, o número de torneiras a encher o depósito.

Problema 1.3 Supondo que cinco torneiras enchem o depósito em dez horas, qual será o tempo gasto para que quatro torneiras façam o mesmo?

Solução. Veja que $\frac{4}{5}.5 = 4$, isto é, passar de *5* para *4* torneira se multiplica por $\frac{4}{5}$. Logo, por serem t e o número de torneiras x vip, o tempo t gasto para *4* torneiras encher o depósito é, pelo Teorema 1.2, $t = \frac{1}{\frac{4}{5}}.10 = \frac{5}{4}.10 = 5.(2,5) = 12,5$, isto é, *4* torneiras enchem o depósito em *12,5* horas. □

Problema 1.4 Dez torneiras enchem o depósito em quatro horas, qual o tempo gasto por *6* torneiras?

Solução. Passar de *10* para *6* torneiras se multiplica por $\frac{6}{10}$. Pelo Teorema 1.2, $\frac{10}{6}.4 = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$ horas é o tempo gasto para *6* torneiras encher o depósito. □

Problema 1.5 Se x torneiras enchem o depósito em 30 horas, e 30 torneiras em $100-x$ horas, qual é o valor de x?

Solução. Para passar de x torneiras para 30 torneiras se multiplica por $\frac{30}{x}$, decorre que na passagem de 30 horas para $100-x$ horas, deve-se multiplicar por $\frac{x}{30}$, pois número de torneiras e horas são vip, ou seja, $\frac{x}{30}.30 = 100 - x \Rightarrow x = 100 - x \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50.$ □

Em proporcionalidade, a apresentação dos problemas deve ser feita de modo que o modelo utilizado para resolvê-los tenha validade. É o caso do problema, bem conhecido em proporcionalidade, número n de operários e número de dias d gasto para completar uma obra. Deve ficar claro que a variável n não pode ser muito grande, pois caso contrário, se houver uma quantidade muito grande de operários, decerto haverá uma grande confusão e não se terá obra nenhuma construída. Nas situações como a do Problema 1.5, os enunciados devem ser feitos de modo que, se for o caso de se pedir para calcular o número de torneiras x, esse valor deve ser inteiro positivo. Via de regra, tais observações são válidas para situações mais gerais em proporcionalidade e evidenciam, de certo modo, os limites de aplicação da teoria.

1.5 Caracterização de variáveis inversamente proporcionais

Se y e x são vip, do Teorema 1.2, $f(zx) = \frac{1}{z}f(x)$ para todo valor da variável $x > 0$, e todo valor real $z > 0$. Fazendo $x = 1$, $f(z) = \frac{1}{z}\ f(1) = \frac{a}{z}$ onde $a = f(1)$. Logo, $f(x) = \frac{a}{x}$. Reciprocamente, se $y = \frac{a}{x}$, com $a > 0$, e se forem $x, z > 0$ com $x < z$ se tem $\frac{1}{x} > \frac{1}{z}$, o que implica $\frac{a}{x} > \frac{a}{z}$ pois $a>0$ e a função $y = \frac{a}{x}$ é decrescente no intervalo $]\,0, \infty\,[$. E ainda, $\frac{a}{nx} = \frac{1}{n}.\frac{a}{x} = \frac{1}{n}.y$, ou seja, quando multiplicamos n por x, o valor correspondente y fica dividido por n, para todo n natural.

Obtivemos desse modo uma *caracterização* de quando a variável y é inversamente proporcional à variável x:

a variável y é inversamente proporcional à variável x se, e somente se, existe uma constante $a > 0$ tal que $y = \frac{a}{x}$ ou $xy = a$.

O número *a* é chamado *constante de proporcionalidade.*

A caracterização de vip aponta outro caminho para resolver os Problemas 1.3, 1.4 e 1.5 e outros equivalentes como, por exemplo, a velocidade *v* ou tempo *t* gasto para percorrer uma mesma distância *d*.

Voltando ao Problema 1.3, sendo *t* o tempo gasto para encher o depósito e *x* o número de torneiras, *t* e *x* são vip. Então existe uma constante *a* tal que $5.10 = a = 4.t$, o que fornece $t = \frac{50}{4}$ horas = *12,5* horas. □

Os outros dois problemas podem ser resolvidos, também, rapidamente, por este argumento. A resolução do Problema 1.5, "Se *x* torneiras enchem o depósito em *30* horas, e *30* torneiras em *100-x* horas. Qual o valor de *x* ?", também é rápida. Existe uma constante *a* tal que $x.30 = a = 30(100-x) \Rightarrow x = (100-x) \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50.$ □

A nota de uma prova é dada em função do número de erros, conforme Tabela 1.

Número de erros	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nota	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabela 1. Nota da prova em função do número de erros.

Uma leitura rápida, sem o devido cuidado, pode levar a conclusão que o número de erros e nota são vip, pois à medida que o número de erros aumenta, o valor da nota diminui. Entretanto vemos que $1.9 = 9$, que é diferente de $2.8 = 16$, isto é, quando multiplicamos o número de erros x pelo valor da nota y não obtemos, para todos os pares (x,y), que x.y = *a*, para alguma constante não nula *a*. Logo, número de erros e os valores das notas não são vip.

Os resultados seguintes são úteis nas aplicações.

Teorema 1.3 Para as variáveis reais positivas x, y, as seguintes afirmações são equivalentes.

G1) y e x são vdp

G2) y e $\frac{1}{x}$ são vip

G3) $\frac{1}{y}$ e x são vip

Demonstração. **(G1)** $\Rightarrow$ **(G2)** Se y e x são vdp, então existe $a>0$ tal que $y=ax \Rightarrow y.\frac{1}{x}=a \Rightarrow$ y . $\frac{1}{x}=a$. Logo, y e $\frac{1}{x}$ são vip.

(G2) $\Rightarrow$ **(G3)** Sendo y e $\frac{1}{\text{x}}$ vip => $y.\frac{1}{x}=a \Rightarrow \frac{1}{\text{x}}=\frac{a}{y} \Rightarrow x=\frac{y}{a} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{a} \Rightarrow x.\frac{1}{y}=\frac{1}{a}.$ $\Rightarrow \frac{1}{\text{x}}=\frac{a}{y} \Rightarrow x=\frac{y}{a} \Rightarrow x.\frac{1}{y}=\frac{1}{y}.x=\frac{1}{a}$, para alguma constante $a>0$.Então $\frac{1}{y}$ e x são vip.

(G3) $\Rightarrow$ **(G1)** Existe a tal que $\frac{1}{y}.x=a$ pois $\frac{1}{y}$ e x são vip. Logo, $x=ay \Rightarrow x$ e y são vdp$\Rightarrow y$ e x são vdp. □

1.6 Grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais para mais de duas variáveis

Definição 1.5 Dizemos que a variável z é diretamente proporcional à variável x e inversamente proporcional à variável y, se e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1. z é função de x e y, isto é, $z=f(x,y)$;
2. fixada a variável y, z é diretamente proporcional a x; e fixada a variável x, z é inversamente proporcional a y.

O teorema fundamental da proporcionalidade direta e o da proporcionalidade inversa valem para o caso que $z=f(x,y)$, com z e x vdp e z e y vip:

Corolário de Teorema 1.1 $f(wx, y) = wf(x, y)$, para todo número real $w > 0$ e todos os valores das variáveis x e y.

Demonstração. As variáveis z e x satisfazem todas as hipóteses do Teorema 1.1 quando y é fixado. Resulta que $f(wx, y) = wf(x, y)$. □

Corolário do Teorema 1.2 $f(x, wy) = \frac{1}{w} f(x, y)$ para todo número real $w > 0$ e todos os valores das variáveis x e y.

Demonstração. As variáveis z e y satisfazem todas as hipóteses do Teorema 1.2 quando x é fixado. Então $f(x, wy) = \frac{1}{w} f(x, y)$. □

Voltemos ao *número de torneiras e o tempo para encherem um depósito*, e acrescentemos ao problema a variável v, o volume do depósito. Então, o tempo t gasto para encher o depósito é diretamente proporcional à variável v, porque fixado um número de torneiras,

(1) aumentando o volume v, o tempo t gasto para enchê-lo aumenta, o que implica que t é função crescente de v;

(2) depósitos de volume $2v$, $3v$ e $4v$ terão os tempos $2t$, $3t$ e $4t$, respectivamente para enchê-los e, mais geralmente, o depósito de volume nv ficará totalmente cheio no tempo nt horas, para todo n natural.

Já vimos que o tempo t e o número x de torneiras para encher um depósito de volume v fixo, são variáveis inversamente proporcionais. De modo que $t = f(x, y)$, isto é, t é função de x e de v, com t e x vip, e t e v vdp.

Problema 1.6 Para encher um depósito de volume *80 m³* se usa *30* torneiras em *24* horas. Em quanto tempo se enche um depósito de *100 m³* usando *20* torneiras?

Solução. Para passar de *80 m³* para *100 m³* multiplica-se por $\frac{100}{80} = \frac{5}{4}$. Como volume e

tempo são vdp, o tempo fica multiplicado por $\frac{5}{4}$, pelo Corolário do Teorema 1.1. Para ir de 30 para 20 torneiras se multiplica por $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$, então o tempo fica multiplicado por $\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$, pelo Corolário do Teorema 1.2, pois tempo e número de torneiras são vip. Logo,

$\frac{3}{2}(\frac{5}{4}.24)$ horas = *45* horas será o tempo gasto para *20* torneiras encher um depósito de *100 m³*. □

Problema 1.7 A tinta de uma caneta dura *6* meses usando-a *6* dias por mês, e *2* horas por dia. Quantos meses deve durar a tinta da caneta se usada *4* dias por mês, meia hora por dia ?

Solução. Para ir de *2* para $\frac{1}{2}$ hora por dia se multiplica por $\frac{1}{4}$.Por serem número de meses e horas/dia vip, número de meses fica multiplicado por $\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$. Para ir de *6* para *4* dias por mês, multiplica-se por $\frac{4}{6}$, e então por serem número de meses e dias por mês vip, número de meses fica multiplicado por $\frac{6}{4}$. Portanto, $\frac{6}{4}.4.6=36$ meses deve durar a tinta da caneta. □

Estamos em condições de obter uma caracterização para $z=f(x,y)$, *z* e *x* vdp e *z* e *y* vip. O Corolário do Teorema 1.1 garante que $z=f(x,y)=f(x.1,y)=xf(1,y)$, e o Corolário do Teorema 1.2 que

$$z=f(x,y)=f(x.1,y)=xf(1,y)=xf(1,y.1)=x.\frac{1}{y}f(1,1)=\frac{x}{y}f(1,1)=k\frac{x}{y},$$

Reciprocamente, $z=k\frac{x}{y}$, fixado x = x_0, se *y* e *y'* são > 0 com $y>y'$, $z'=k\frac{x_0}{y'}$ e $z=k\frac{x_0}{y}$ tem-se $\frac{1}{y}<\frac{1}{y'}$ e $k\frac{x_0}{y}<k\frac{x_0}{y'}$, pois $kx_0>0$, isto é, $z<z'$. Isso mostra que *z* é função decrescente de $y>0$. Se $z=k\frac{x}{y}$, então para todo natural *n*, $k\frac{x}{ny}=\frac{1}{n}(k\frac{x}{y})=\frac{z}{n}$, isto é, quando multiplicamos *y* por *n*, o valor correspondente *z* fica dividido por *n*, para todo natural n. Logo, *z* e *y* são vip.

Semelhantemente, fixando $y = y_0$ então z é função crescente de $x > 0$, pois $z = k\frac{x}{y_0} = cx$, $c = \frac{k}{y_0} > 0$, é função afim, e quando se multiplica x por n, z fica multiplicado por n, qualquer que seja n natural. Logo, z e x são vdp. Essa demonstração é equivalente a que foi feita acima (para $y = ax$) tendo em vista que $z = cx$, com $c = \frac{k}{y_0}$.

Obtivemos então uma *caracterização* para z e x vdp e z e y vip:

a variável z é diretamente proporcional à variável x, e é inversamente proporcional à variável y se, e somente se, existe uma constante positiva k tal que $z = k\frac{x}{y}$.

A definição de variáveis diretamente e inversamente proporcionais, assim como a caracterização, se estendem facilmente para mais de três variáveis. Por exemplo, no caso de cinco variáveis:

as variáveis z e x , e z e r são vdp; z e s, e z e y são vip se, e somente se, existe uma constante positiva k tal que $z = k\frac{xr}{ys}$.

As caracterizações enunciadas neste trabalho são ótimas ferramentas para atacar e resolver problemas ditos de "regra de três composta".

Problema 1.8 O Problema 1.7 pode ser facilmente resolvido a partir da caracterização de variáveis diretamente e inversamente proporcionais.

Solução. A duração em meses da tinta e número de dias de uso por mês são vip, pois fixado a quantidade de horas por dia, dobrando, triplicando, quadruplicando... os dias de uso, o número de mês fica dividido por *2, 3* e *4* ...respectivamente, e quantidade de meses e de horas de uso por dia são vip, porque fixado o número de dia, dobrando, triplicando, quadruplicando... o número de horas por dia, número de meses fica dividido por *2,3,4*,.....etc (ver Figura 3). Pela caracterização de vip existe uma constante a tal que

$$6 = a.\frac{1}{6}.\frac{1}{2} = a.\frac{1}{12} \Rightarrow a = 12.6 = 72.$$

Vemos que os valores constantes da primeira equação acima 6, 6 e 2 são os valores da primeira linha da tabela da Figura 3. O número 6, refere-se ao número de meses, aparece também como fator no denominador porque num meses e dias/mês são vip.

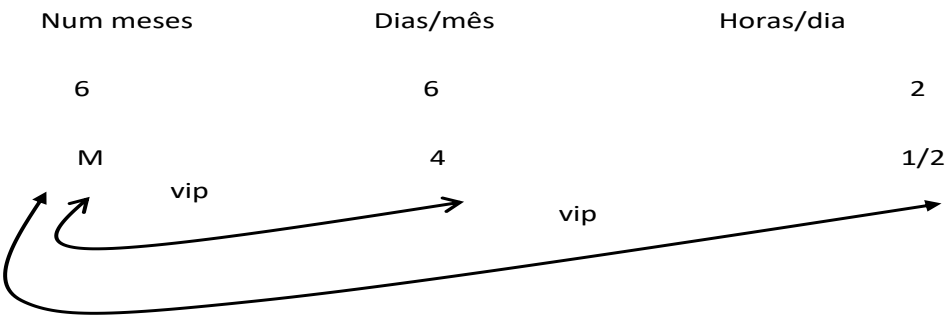

Figura 3. Número de meses e número de dias por mês; número de meses e número de horas por dia, são variáveis inversamente proporcionais.

O mesmo argumento se aplica ao número *2*, fator do denominador, número de meses e horas por dia são vip. Logo, sendo M o número de meses

$$M = a.\frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{1}{2}} = a.\frac{1}{2} = 72.\frac{1}{2} = 36\ ,$$

(observe-se que os números *M, 4* e $\frac{1}{2}$ na equação $M = a.\frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{1}{2}}$ são precisamente os da segunda linha da tabela). A tinta duraria *36* meses. □

Um pouco de atenção e de treino pode facilitar/agilizar a resolução deste problema: existe uma constante *a* tal que

$$6 = a.\frac{1}{6}.\frac{1}{2} = \frac{a}{12} \text{ (valores da primeira linha),}$$

e

$$M = a.\frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \text{ (valores da segunda linha).}$$

Da primeira equação *a = 72*, valor que substituído na segunda equação dá $M = \frac{72}{2} = 36.$

□

Problema 1.9 O Problema 1.6 agora pode ser resolvido assim: o volume do depósito e o número de torneiras são vdp, e esse mesmo volume e o tempo gasto para enchê-lo são vdp. Pela caracterização de vdp, existe uma constante *a* tal que *80 = a.30.24*, e daí,

$$a = \frac{80}{30.24} = \frac{8}{3.24} = \frac{1}{3.3} = \frac{1}{9}.$$

Para essa mesma constante *a*, se *t* é o tempo gasto para encher o depósito, dos dados do problema, $100 = a.20.t = \frac{1}{9}.20.t.$ Logo, $t = \frac{9}{20}.100 = 9.5 = 45.$

Portanto, *20* torneiras deverão encher o depósito de $100\ m^3$ em 45 horas. □

Problema 1.10 Para uma tiragem de *2000* livros, uma impressora trabalhou *20* dias por mês, *8* horas por dia e demorou *6* meses. Para uma tiragem de *2500* livros, trabalhando *10* horas por dia, o tempo gasto foi de *5* meses. Supondo que as condições de trabalho sejam as mesmas, quantos dias/mês teve que trabalhar a impressora?

Solução. A Figura 4 contém informações às quais nos referimos nas linhas seguintes.

(1) número de dias por mês e número de horas por dia são vip,
(2) número de dias por mês e tiragem são vdp, e
(3) número de dias por mês e número de meses são vip.

Logo, existe uma constante *a* tal $20 = a.\frac{2000}{8.6} = \frac{2000}{48} = a.\frac{125}{3} \Rightarrow a = \frac{3.20}{125} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$.

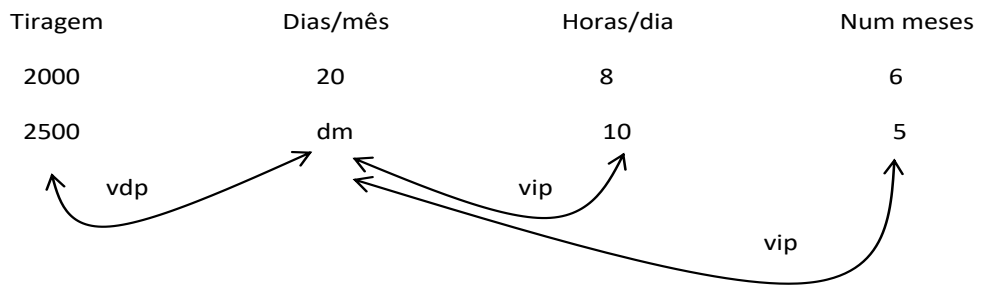

Figura 4. Dias por mês e horas por dia; e dias por mês e número de meses são variáveis inversamente proporcionais; dias por mês e tiragem são variáveis diretamente proporcionais.

Sendo *dm* o número de dia por mês, e $dm = a.\frac{2500}{10.5} = \frac{12}{25}.50 = 12.2 = 24$ dias por mês. □

Um olhar mais atento permite concluir que tiragem é gdp a dias por mês, a horas por dia e ao número de meses.

Decorre que existe uma constante *a* tal que

$$2000 = a.20.8.6 \text{ (valores da primeira linha)}$$

e

$$2500 = a.dm.10.5 \quad \text{(valores da segunda linha).}$$

Da primeira equação tiramos $a = \frac{25}{12}$, que substituindo na segunda equação nos fornece

$$2500 = \frac{15}{12}.dm.10.5,$$

para finalmente obter

$$dm = \frac{2500.12}{25.10.5} = \frac{2500.12}{1250} = 2.12 = 24,$$

que é uma forma de resolver o problema, estabelecendo outras relações, porém ainda usando caracterização de vdp e vip. □

Alguns autores como Ávila, [ÁVILA, RPM 09], tomam as caracterizações de variáveis diretamente proporcionais, estabelecida nas Seções 1.3 e 1.5, e variáveis inversamente proporcionais, nas Seções 1.4 e 1.5, como sendo a própria definição de tais noções.

Estudar proporcionalidade tomando como ponto de partida as caracterizações têm vantagens e desvantagens: uma vantagem é a de atacar e resolver um grande número de problemas rapidamente. Uma desvantagem seria a omissão da definição clássica de vdp e vip o que faria da apresentação um estudo incompleto. Some-se a isso o fato que há estudantes que gostam de teoria. De posse da definição, os teoremas fundamentais seriam então ótimos momentos de se treinar algumas manipulações com funções reais e relembrar (ou quem sabe, apreender) conhecimentos teóricos como, por exemplo, que o conjunto *Q* dos números racionais é denso em |*R*.

1.7 Proporções

Ao estudar proporcionalidade surge naturalmente a noção de proporção. De fato, se *x* e *y* são grandezas diretamente proporcionais, $y = a\,x$ para alguma constante $a > 0$; e se y_1 é o valor correspondente ao valor x_1, y_2 o valor que corresponde a x_2, vale $y_1 = a\,x_1$ e

$y_2 = a\, x_2$, ou seja,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = a\ ,$$

uma igualdade denominada *proporção*.

De certa forma a noção de proporção se confunde com a noção de proporcionalidade. Proporcionalidade se beneficia da noção de proporção e de suas propriedades; e, em certa medida proporção implica em proporcionalidade. De modo que proporcionalidade e proporção são ideias que, em vários contextos, se complementam.

Consta no manual de qualquer mestre de obras misturas de areia, brita e cimento que compõem o chamado traço, com características próprias para um lugar específico de uma edificação, segundo o manual da boa engenharia. As misturas são apresentadas em termos de proporção. Uma dessas misturas para piso é a de cimento, areia, brita na proporção *1:2:3*, isso significando que em se tomando uma medida qualquer de cimento, um balde, por exemplo, deve-se ter duas medidas de areia, e três medidas de brita para que o traço seja apropriado para o piso. Isto é o mesmo que $C = \frac{1}{2}A$ e $C = \frac{1}{3}B$ isto é, *C* e *A* vdp, e *C* e *B* vdp. Resulta que se pode escrever $\frac{C}{1} = \frac{A}{2} = \frac{B}{3}$, onde *C* é a quantidade de cimento, *A* é a quantidade de areia, e *B* a quantidade de brita que deve conter um traço padrão apropriado para piso. Vemos que as contas ficam fáceis, pois se, digamos, *B = 12* imediatamente se obtém $A = 2.\frac{12}{3} = 2.4 = 8$ e $C = 4$ – o traço contendo *12* baldes de brita deve conter *8* baldes de areia e *4* baldes de cimento.

Proporção é um conceito matemático impossível de ser ignorado em razão de sua inevitabilidade em Matemática e em muitos contextos práticos. Na Física, na Química, na Medicina, e em farmacologia, etc, muitos problemas levam invariavelmente a uma proporção. O fato de muitos aspectos do mundo atual funcionarem em acordo com regras de proporcionalidade faz com que a capacidade de raciocinar com proporção seja extremamente útil na interpretação desse mundo.

Apesar de toda sua importância, alguns autores questionam o estudo da proporção. O questionamento, a crítica que se faz, não é para a ideia matemática de proporção, mas geralmente é direcionada para o fato que se define proporção, até nos livros mais atuais, como sendo a igualdade de duas razões. E, dizem os críticos, isto traz os resquícios, que devem ser evitados, da Matemática dos gregos.

No artigo “Razão, proporção e regra de três” Ávila, [ÁVILA, RPM 08], escreve que

a forma como é apresentada hoje a noção de proporção traz resquícios das ideias de Eudoxo, tanto é que ainda se escreve palavras "antecedentes" e "conseqüentes" em lugar de numerador e denominador. Ainda, escreve-se *A:B = C:D ou A:B::C:D* no lugar de $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Segundo Ávila, a teoria das proporções de Eudoxo tem apenas valor histórico depois da formalização de número reais, feito creditado ao alemão Dedekind, há pouco mais de *100* anos.

Porém, por mais simples que seja a noção de proporção, existem trabalhos que estudam a noção de proporção segundo concepções da Educação Matemática, [BERNAL, 2004].

O exposto acima sugere que podemos dar uma definição de proporção tendo em vista as propriedades dos números reais, e a nomenclatura de acordo com a da Matemática encontrada na literatura atual.

1.7.1 Uma definição de proporção

Damos agora uma definição sem fazer referência à razão de dois números, que historicamente sempre foi motivada e/ou ligada à razão de dois valores de certas grandezas, como era comum na Grécia antiga, e que segundo Ávila deve ser evitado. O autor se refere à parte da nomenclatura encontrada no estudo da proporção como ultrapassada e, em alguns casos, infeliz. E usa como um exemplo o fato de que, tradicionalmente, proporção e "regra de três" andam juntas, sugerindo que se abandone o uso da expressão "regra de três", e explica: "no uso da regra aparecem sempre mais de três números, por que seria então de "três"? Sugere, ainda o autor, que a nomenclatura tradicional das proporções, algumas delas citadas acima, são arcaicas e deveriam ter sido retiradas dos livros desde a apresentação dos números reais, feita por Dedekind. Argumenta, ainda, que se deveria deixar de citar a denominada propriedade fundamental das proporções: "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos", pois sua apresentação é feita como se fosse ela uma propriedade exclusiva das proporções. Trata-se, diz o autor, de uma propriedade das equações que é deduzida das propriedades dos números reais.

Dados os números reais *a ,b, c e d* diz-se que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

se

$$ad = bc.$$

A primeira igualdade é comumente chamada de *proporção.*

Algumas propriedades das proporções são úteis nas aplicações. Se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

valem:

P$_1$) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ e $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$,

P$_2$) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

A primeira das propriedades em P$_2$ pode ser generalizada.

P$_3$) Se $\frac{a_1}{b_1} = ...= \frac{a_n}{b_n}$, então $\frac{a_1 + ... + a_n}{b_1 + ... + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = ...= \frac{a_n}{b_n}$.

Demonstração de P$_1$. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, por hipótese, temos $ad = bc$. Logo,

$$(a+b)d = ad+bd = bc+bd = b(c+d),$$

então, por definição,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}. \qquad \square$$

A demonstração da outra propriedade em P$_1$ é idêntica.

Demonstração de P$_2$. Seja $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a = kb$ e $c = kd$, de onde vem que a+c = kb+ kd = k(b+d) o que resulta em $\frac{a+c}{b+d} = k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que é a primeira propriedade em P$_2$. □

Demonstração de P$_3$. Pondo $k = \frac{a_1}{b_1} = ...= \frac{a_n}{b_n}$, resulta que $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, ..., $a_n = kb_n$. Logo,

$$a_1+a_2+....+a_n = kb_1+kb_2+...+kb_n = k(b_1+b_2+...+b_n),$$

donde

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{b_1 + ... + b_n} = k = \frac{a_1}{b_1} = ...= \frac{a_n}{b_n},$$

que é a propriedade P$_3$. □

Um contexto clássico que utiliza proporção e suas propriedades é a decomposição de um número real positivo como soma de n números, sendo cada um dos números da divisão direta ou inversamente proporcional aos valores $r_1, r_2, ..., r_n$ – que são também números reais positivos - previamente conhecidos. A *regra de sociedade*, na Seção 1.3,

à Pag. 14, é precisamente um problema do tipo.

Consideremos um exemplo. Escrever o número real *300* como soma de dois números *x* e *y*, de maneira que *x* e *y* são diretamente proporcionais a *10* e a *15*.

Solução. Tem-se $x+y = 300$ e $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}$. O fato de serem *x* e *y* diretamente proporcionais a *10* e a *15*, respectivamente, é que permite escrever a proporção acima, pois $x = a.10$ e $y = a.15$, para alguma constante *a*. Da propriedade P_2, $\frac{x+y}{10+15} = \frac{y}{15}$. Decorre que $\frac{300}{25} = \frac{y}{15}$ o que implica $12 = \frac{y}{15}$ o que dá $y = 180$ e $x = 120$. □

1.7.2 A Matemática do papel

No artigo "A matemática do papel" do Projeto SEMA - "Seminários de Ensino de Matemática", Mello, [MELLO, 2008], apresenta uma interessante justificativa do formato de folhas de papel que usamos no nosso dia-a-dia, na qual se usa a ideia de proporção.

> O formato do papel que usamos rotineiramente nos serviços de impressão ou fotocópia possui uma história fascinante e repleta de matemática. Neste artigo, compartilho com o leitor algumas ideias que estão por trás dessa história, com o desejo que elas possam servir de material de apoio para aulas contextualizadas de matemática.
>
> **[**MELLO, 2008**]**

O papel A_4, como todos sabemos, é o mais usado para imprimir textos escolares e fotocópias. Quem já não comprou um pacote de papel A_4 e observou as medidas *210* milímetros de altura por *297* milímetros de largura? Por trás desses números há uma pequena dose de Matemática e uma história interessante para ser contada. Suponhamos que temos uma folha de papel retangular. Qual devem ser as dimensões da folha para que quando dividida ao meio as duas folhas de papel da divisão tenham a altura e o comprimento na mesma proporção que a folha original? Esse problema é fácil de resolver, conforme mostramos agora: Se $\frac{A}{L} = \frac{\frac{L}{2}}{A}$, decorre que $L = \sqrt{2}A$ ou $\frac{L}{A} = \sqrt{2}$, onde *A* é a largura e *L* a altura da folha de papel, (ver Figura 5). Observa Mello que *297/210* é uma aproximação racional para $\sqrt{2}$, e a aproximação é ótima. Uma classificação de papéis da qual o papel A_4 faz parte é chamada de série *A*, que vai de A_0 até A_{10}.

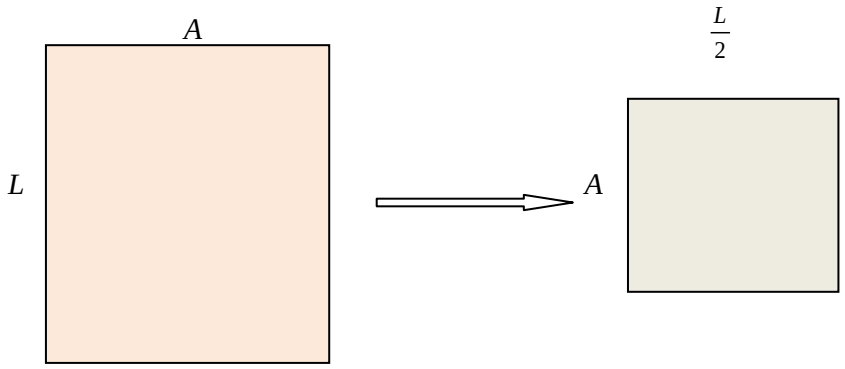

Figura 5. Para definir retângulos semelhantes se usa a noção de proporção.

Todas as folhas A_i têm uma propriedade em comum, a razão da largura L da folha e da altura A é aproximadamente $\sqrt{2}$. A folha A_0 tem área *1m²*. Então para calcular suas dimensões basta resolver o sistema

$$\begin{cases} LA = 1 \\ \dfrac{L}{A} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Substituindo $L = A\sqrt{2}$ em $LA = 1$, temos $(A.\sqrt{2}.A) = 1 \Rightarrow A^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 0{,}840896$, que aproximado para o milímetro mais próximo fornece $A = 0{,}841$ e $L = 1{,}189$. Essas são as dimensões da folha A_0. A folha A_1 é obtida dividindo A_0 ao meio, e assim sucessivamente, de modo que a folha A_k terá dimensões, em metros, dadas aproximadamente por $2^{\frac{-2k-1}{4}}$ e $2^{\frac{-2k+1}{4}}$. Tomando, digamos, $k = 4$, obtemos os números *297* mm e *210* mm como sendo as dimensões do papel A_4. Fazendo $k = 0,1,2,....9,10$, obtemos as dimensões de cada folha de papel da série A, conforme tabela da Figura 6.

	k	A_K	largura	altura	
	0	A_0	1,189	0,841	
	1	A_1	0,841	0,595	
	2	A_2	0,595	0,420	
	3	A_3	0,420	0,297	
	4	A_4	0,297	0,210	
	5	A_5	0,210	0,149	
	6	A_6	0,149	0,105	
	7	A_7	0,105	0,074	
	8	A_8	0,074	0,053	
	9	A_9	0,053	0,037	
	10	A_{10}	0,037	0,026	

Figura 6. Medidas da largura e da altura de uma folha de papel da série *A*.

E qual é a vantagem da largura L e a altura A obedecer à proporção $\frac{L}{A} = \sqrt{2}$?

Para algumas pessoas, folhas de papeis que obedecem as dimensões da proporção em tela são visualmente mais agradáveis. Opinião, porém, que não é compartilhada por todas as pessoas. Outro motivo é que para obter a folha A_{k+1} basta dividir a folha A_k ao meio. Isso facilita o processo de fabricação, e gera economia.

Capítulo II

A noção de justo, e o que seria vantagem e desvantagem no pagamento à vista e a prazo

Neste capítulo desenvolvemos a Matemática Financeira. Nele discutimos do ponto de vista da Matemática Financeira o que é vantajoso, ou não, na hora de tomada de uma decisão financeira; na compra da casa própria, por exemplo. Isso é feito tendo em vista que há basicamente duas opções de pagamento quando da compra da casa própria, de um imóvel ou de um empréstimo bancário: à vista e a prazo.

As referências [DOLCE, et al, 2013] contém material que cobre a Matemática abstrata da Seção 2.1. O que escrevemos no restante deste Capítulo II, da Seção 2.2 em diante, foi influenciado pelo trabalho dos professores do Projeto Fundão - UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, ver [SOUSA, et al 2010].

2.1 As funções exponencial e logarítmica e matemática financeira

Apresentamos a seguir uma rápida discussão sobre algumas funções elementares necessária para o entendimento dos assuntos subsequentes.

2.1.1 Função exponencial

Definição 2.1 Dado o número real, positivo e diferente de *1*, *a*, denomina-se função exponencial a função definida por $f(x) = a^x$, com *x* percorrendo o conjunto |*R* dos números reais.

A função exponencial tem algumas propriedades básicas que enunciaremos sem demonstrá-las: se *a > 0*, para todos os números reais *x* e *y*, valem:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{e} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Fazendo $x = 0$, da primeira propriedade $a^y = a^0 a^y$. A única possibilidade para que tal igualdade seja verdadeira é que se defina $a^0 = 1$. Admitiremos que $a^x > 0$, para todo x real.

Se $a > 1$, $f(x) = a^x$ é crescente em $|R$, e valem:

$$a^x > 1 \Leftrightarrow x > 0, \text{ e } 0 < a^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ e decrescente em $|R$, e valem:

$$a^x > 1 \Leftrightarrow x < 0, \quad \text{e} \quad 0 < a^x < 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Infelizmente estudar a função exponencial deduzindo todas suas propriedades, é impossível no nível da Educação Básica. E o impasse reside em estabelecer o significado da expressão a^x, para x irracional.

2.1.2 O logaritmo

Definição 2.2 Para a um real positivo e diferente de 1, se $y = a^x$, diz-se que x é o logaritmo de y na base a, e escrevemos: $x = \log_a y$.

Tem-se $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$ e $\log_a a = 1$ tendo em vista que $a^1 = a$.

Algumas propriedades do logaritmo são úteis e, especialmente, a propriedade L_4 seguinte, no contexto das equações exponenciais. Se x e y são números reais positivos, valem:

L_1) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$,

L_2) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$,

L_3) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

Para todo t real, vale:

L_4) $\log_a b^t = t \log_a b$,

o logaritmo de uma potência é igual o expoente multiplicado pelo logaritmo da base da potência.

Essas propriedades se verificam facilmente desde que se tenha como verdade as propriedades da função exponencial. Para ver que L_1 é verdadeira, chamemos $m = \log_a x$ e $n = \log_a y$. Então $a^m = x$ e $a^n = y$. Logo, $a^{m+n} = a^m a^n = xy$ e, por definição, $m + n = \log_a(xy)$ isto é, $\log_a x + \log_a y = m + n = \log_a(xy)$. A propriedade L_2 se demonstra pondo $y = -\log_a x$ de onde resulta $a^{-y} = x$, isto é, $\frac{1}{a^y} = x$, ou ainda, $\frac{1}{x} = a^y$. Da definição de logaritmo,

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = y = -\log_a x.$$

A propriedade L_3 decorre de L_1 e L_2. De fato,

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x.\frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x + (-\log_a y) = \log_a x - \log_a y$. Finalmente, para ver que L_4 é válida, seja $y = t\log_a b$ .Então $\frac{y}{t} = \log_a b$, onde t é não nulo (se $t = 0$ é imediato que L_4 se verifica, porque ambos os lados são iguais a 0 (zero)). Decorre da definição que vale a segunda igualdade dentre as seguinte, enquanto que a primeira delas resulta da propriedade $(a^x)^y = a^{xy}$, válida para todos x,y reais.

$$(a^y)^{\frac{1}{t}} = a^{\frac{y}{t}} = b \Rightarrow a^y = b^t,$$

então

$$\log_a b^t = \log_a a^y = \mathrm{y} = t\log_a b,$$

onde usamos que $\log_a a^y = \mathrm{y}$, que resulta imediatamente da definição, conforme estabelecemos a seguir.

A definição $x = \log_a y$, é válida para todo y tal que $y = a^x$, com x variando em $|R$. De modo que existe $x = \log_a y$. Está, portanto, definida uma função denominada

2.1.3 Função logarítmica

Definição 2.3 A função logarítmica de base a é definida como sendo a função

$x = g(y) = \log_a y$,e tem por domínio todos os números reais $y > 0$ tais $y = f(x) = a^x$, com x percorrendo $|R$.

Vimos acima que $x = \log_a y$, existe – admitindo que existe $y = a^x$ para todo x real .Seja B o conjunto constituído por todos os valores y tais que $y = a^x$ com x em |R.

Então, como veremos a seguir,

$$f(g(y)) = f(\log_a y) = a^{\log_a y} = y,$$

para todo y em B, e

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x,$$

para todo x real. Logo, a função logarítmica é a inversa da função exponencial (ver Apêndice A, sobre funções inversas.)

A propriedade $a^{\log_a y} = y$, para todo y em B, é fácil de ser deduzida. Fazendo $x = \log_a y$ obtemos $a^x = y$, isto é, $a^{\log_a y} = y$. Quanto à propriedade $\log_a a^x = x$, fazendo $a^x = y$, vem que $x = \log_a y = \log_a a^x$, para todo x real.

Acima fixamos o conjunto $B = \{y : y = a^x, x \in |R\}$. É claro que B contém apenas números reais positivos, porque $a^x > 0$, seja qual for o número real x. Uma pergunta que surge naturalmente é: B contém **todos** os números reais positivos, isto é, B =]0, ∞ [? A resposta a essa pergunta é afirmativa. E se sustenta no fato que dado um número real qualquer b > 0, $a > 0$ e diferente de 1, a equação $a^x = b$ tem (uma única) solução real x, a saber $x = \log_a b$. A unicidade decorre do fato que $f(x) = a^x$ é uma função crescente ou decrescente.

2.1.4 Capitalização

Ao emprestar uma quantidade de dinheiro C, chamado de capital, geralmente, recebe-se de volta o valor C acrescido de um prêmio pelo empréstimo, denominado juro. O juro é cobrado tendo como referência o capital C emprestado, e é calculado com base na chamada de taxa de juros, apresentada como uma taxa percentual, e o tempo t de empréstimo. Esse tempo t é comumente dividido em períodos. De modo que é comum a taxa de juros no cálculo do juro ser válida por unidade de período.

O processo de, para todo capital emprestado, computar sempre o juro é chamado de capitalização. Existem duas formas básicas de cálculo do juro, os chamados juros simples e juros compostos.

Juros simples

No regime de juros simples, o juro *j* em um período é sempre calculado sobre o capital inicial C e computado em cada período. De maneira que se *C* é o capital e *p%* é a taxa de juros em termos percentuais, tomando $i = \frac{p}{100}$, chamada de taxa unitária, então Ci é o juro em um período e

$$j = Cit,$$

é o valor do juro em t períodos.

Vemos que fixados o capital *C* e a taxa de juros *i*, o juro *J=J(t)* é *diretamente proporcional* a *t*, a quantidade de período de capitalização do capital, isto é, de composição dos juros. Sendo que nesse caso, *a = Ci* é a constante de proporcionalidade.

Tomando, em reais, *C = 485*, à taxa de juro i = 0,02 por mês, então *J(12)= =485.0,02.12 = 116,4,* em reais, é o juro em *12* meses.

Juros simples não é adotado pelo sistema financeiro como modo de capitalizar quantias/valores. Ele, entretanto, é utilizado em pequenas transações entre pessoas, e, muito utilizado, por exemplo, em agiotagem, face à facilidade de cálculo.

Em juros simples, se J_1 é o juro decorrente da aplicação de um capital no período t_1, e J_2 é o juro no período t_2, então

$$\frac{j_1}{t_1} = \frac{j_2}{t_2},$$

uma proporção que relaciona os valores dos juros e seus respectivos períodos de aplicação. Uma proporção pode ser bem útil para resolver problemas em juros simples.

Mas não é somente em juros simples que se utiliza a noção de proporção na Matemática financeira. Quando fomos estudantes da Educação Básica, no Ensino Fundamental, que coincidiu com uma época que se estudava a chamada Matemática Moderna no Brasil, os livros didáticos estabeleciam uma relação estreita entre porcentagem e proporção: no cálculo de porcentagem entrava necessariamente proporção. Apenas para ilustrar, apresentamos um problema típico da época: qual o valor obtido quando se acrescenta *30%* de *90* ao próprio *90* ?

Primeiro se calculava 30% de *90*. A solução era apresentada utilizando um esquema de flecha bem típico da época.

$$90 \rightarrow 100$$
$$x \rightarrow 30$$

Se 90 corresponde a 100 (por cento), x corresponderá a 30 (por cento). De onde resulta a proporção

$$\frac{90}{x} = \frac{100}{30},$$

que fornece $x = \frac{30.90}{100} = 27$, para obter que *90* acrescido de 30% é igual a *90 + 27 = 117*. É claro que não tem nada de errado nessa abordagem, muita gente aprendeu por esse viés. Hoje (à época também se podia fazer assim) muitos livros ensinam que para acrescentar *30%* de um valor a ele próprio, basta multiplicá-lo por *1,3*. Ainda nos dias de hoje, o cálculo de porcentagem no Ensino Fundamental, as setas e a proporção aparecem. Copiamos na íntegra um problema do cálculo de porcentagem encontrado em material didático utilizado no treinamento de professores do Ensino Fundamental.

"*Calcular 30% de 400.*

Vamos apresentar três modos de resolver este problema. Você pode escolher aquele que preferir.
***Modo 1**: Utilizar uma regra de três simples em que o valor total, 400, corresponda a 100%. Então, representando os 30% de 400 por x, podemos escrever*

$\begin{array}{l} 400 \rightarrow 100\% \\ x \rightarrow 30\% \end{array}$ *o que fornece* $x = \frac{30.400}{100} = 30.4 = 120.$"

[DUTENHEFNER, et al, 2009]

Na verdade, o valor de x foi obtido da proporção $\frac{400}{x} = \frac{100}{30}$. Os autores apresentam outros modos de resolver o problema.

Juros compostos

No sistema de capitalização a juros compostos, o juro é calculado sobre o capital C, apenas no primeiro período, que é somado ao capital para formar o montante. A partir do segundo período o juro é calculado sobre o montante, que é somado ao montante para formar um novo montante sobre o qual incidirá o juro no próximo período, isso é feito sucessivamente até se completar o total de períodos t de aplicação do capital. De modo que sendo C o capital, i a taxa de juros unitária por período, então o montante M ao fim de t períodos será

$$M = M(t) = C(1+i)^t.$$

Logo, em juros compostos, o juro J no número de período t é dado por

$$J(t) = M(t) - C = C(1+i)^t - C = C[(1+i)^t - 1].$$

Em juros composto, $J(t)$ e t não são grandezas diretamente proporcionais. Vejamos o que ocorre quando multiplicamos o tempo t por, digamos, n = 2:

$$J(2t) = C[(1+i)^{2t}-1] = C[((1+i)^t)^2-1] = C((1+i)^t-1)((1+i)^t+1) = J(t)((1+i)^t+1),$$

expressão obviamente diferente de $2J(t)$. Isso pode ser mais facilmente concluído observando que $J(t)$ não é uma função do tipo $J(t) = at$, para alguma constante positiva a.

Fato bastante conhecido é que um capital C, aplicado a uma taxa de juros i por período, rende mais sob o regime de juros compostos que em juros simples, mas isso é verdade apenas depois do primeiro período, isto é, para $t > 1$.

Diferentemente de juros simples, juros compostos são uma das ferramentas centrais do comércio, dos bancos, das instituições financeiras em geral para capitalizar quantias no tempo. Até mesmo no dia-a-dia as pessoas fazem referência a uma dívida com um banco, por exemplo, como algo que cresce exponencialmente. É claro que isso tem relação com o fato que o montante em juros compostos é uma função do tipo exponencial do tempo t, *para t restrito aos números inteiros positivos*. E uma dívida, geralmente, é corrigida no tempo t do mesmo modo que o montante em juros compostos se não for deduzido nenhum pagamento. A fim de fixar as ideias, consideremos o problema de determinar em quanto tempo a juros compostos um capital C dobra se for corrigido por uma taxa de juro de *2,29%* ao mês, uma das menores do mercado atualmente. Resolver esse problema é o mesmo que obter t solução da equação,

$$2C = M(t) = C(1+i)^t = C(1+0{,}0229)^t = C.(1{,}0229)^t,$$

ou

$$2 = (1{,}0229)^t.$$

Não tem jeito, a Matemática abstrata é a única ferramenta disponível para o cálculo de t: aplicando logaritmo de base qualquer, digamos, base *10*, usando a propriedade L_4 do logaritmo, obtemos $t = \dfrac{\log 2}{\log(1{,}02290)} \cong 30{,}6137$.

No tempo de aproximadamente *31* meses o capital dobra. Tais cálculos servem para ilustrar o que ocorre com uma dívida. Logicamente isso deveria influenciar na decisão de se fazer um empréstimo em um banco diante da possibilidade de não se poder quitar o empréstimo normalmente.

Imaginemos então quando se tem uma taxa de juros de *5%* ao mês, também praticada atualmente por algumas instituições financeiras. Com essa taxa ter-se-ia $t = \dfrac{\log 2}{\log(1{,}05)} \cong 14{,}2067$. Em pouco menos de *15* meses o capital dobra.

2.2 Um problema contextualizado

A Matemática Financeira é uma área da Matemática que existe a partir de problemas práticos ligados as transações monetárias. Ela estuda a variação de valores ao longo do tempo. Hoje, o principal objetivo de estudá-la é tê-la como suporte para tomada de decisão.

Nosso propósito no restante deste Capítulo é fazer uma abordagem de problemas contextualizados da Matemática Financeira guiada por uma metodologia utilizada por um grupo de professores do Projeto Fundão, da UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro. A metodologia enfatiza a visualização com o auxílio de setas para estudar o valor do dinheiro no tempo.

> Nós, do grupo do Projeto Fundão (IM-UFRJ), estamos desenvolvendo um trabalho com o objetivo de propor uma abordagem prática e visual para o ensino de Matemática Financeira. Nossa proposta se baseia no uso da porcentagem (na notação decimal) como fator e na representação gráfica da situação no eixo das setas. Essas estratégias permitem visualizar a variação do dinheiro no tempo e facilitam a resolução dos problemas com o uso da calculadora.
>
> [SOUSA, et al, 2010]

O grupo de professores do Projeto Fundão fez uma pesquisa com professores licenciados de escolas públicas e privadas e constatou que muitos cometem enganos comuns ao lidar com situações financeiras, como comparar ou somar quantias que se referem a datas distintas, sem as devidas correções.

O grupo então propôs um diagnóstico, elaborando um problema ligado à realidade do aluno e do professor, e que os professores deveriam resolver. Apresentamos a seguir o problema na íntegra.

> A diretora da escola juntou dinheiro para comprar um computador. Comparando os preços de mercado, encontrou a seguinte oferta numa loja*: Computador: R$ 1 800,00 à vista ou em 3 x iguais sem juros (entrada + 2).* A diretora pediu um desconto para o pagamento à vista, mas o vendedor respondeu que o preço a prazo sem juros era igual ao preço à vista e, portanto, não era possível dar desconto. Considerando que o dinheiro pode render *4%* ao mês, qual seria o preço justo para o pagamento à vista?
>
> [SOUSA, et al, 2010]

Na avaliação dos professores proponentes do teste, no primeiro grupo de quinze professores, apenas um ofereceu uma resposta correta. Os professores do Projeto Fundão apresentaram algumas dessas soluções. Damos a seguir uma das soluções considerada incorreta.

> Vamos supor que o 1º pagamento seja de x reais, na data da compra. Um mês após, com *4%* de juros, a prestação seria de *1,04.x* e dois meses após a compra, o último pagamento seria de $(1,04)^2x$. Então: $x+1,04.x+(1,04)^2.x=1800$. Resolvendo essa equação encontra-se $3,1216.x=1800$ e $x=576,63$. Portanto, o preço justo para o pagamento à vista seria *de 3 × 576,63 = R$1 729,89.*
>
> [SOUSA, et al, 2010**]**

O "preço justo" que se refere SOUZA, [SOUSA, et al 2010**],** acima é, como dizemos em vários momentos no presente trabalho, o valor equivalente à soma das três parcelas no instante $t = 0$ da compra.

A solução supõe que os valores das prestações são x, $(1,04)x$ e $(1,04)^2x$ com $x = 576,63$. Esta solução está incorreta, entre outras coisas, porque, por hipótese do problema, os valores de todas as prestações são iguais a *R$ 600,00*.

Os professores do Projeto Fundão apresentam então duas soluções consideradas corretas. Uma delas utiliza o seguinte argumento:

⟶ entrada de *R$ 600,00;*

⟶ na compra à vista, deve-se trazer o valor da segunda e da terceira prestações de *R$ 600,00* cada uma, para seu valor na data da compra;

⟶ o dinheiro rende *4%* ao mês. Então, a segunda prestação tem o mesmo valor que

$\frac{600}{1,04} = 576,92$ reais na data da compra;

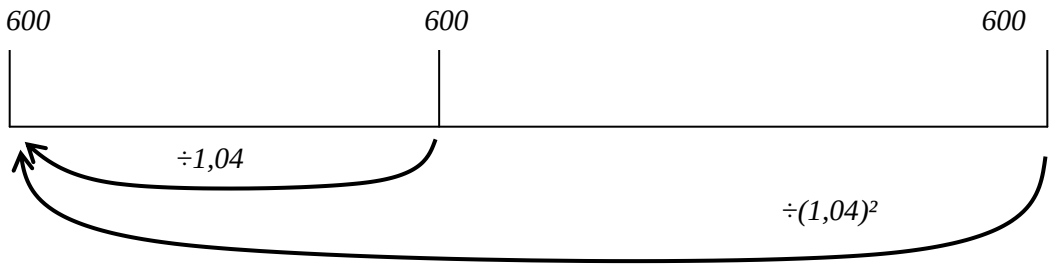

Figura 7. Para obter os valores da segunda e da terceira prestações na data da primeira se divide os valores por 1,04 e $(1,04)^2$, respectivamente.

⟶ terceira prestação tem valor $\frac{600}{(1,04)^2} = 554,73$ reais na data da compra.

⟶ logo,

$$R\$\ 600{,}00 + R\$\ 576{,}92 + R\$\ 554{,}73 = R\$\ 1\ 731{,}65,$$

é o valor do computador à vista.

A solução do problema é ilustrada por um registro figural contendo o eixo das setas, recurso didático que agrega elementos visuais e aguça a percepção do entender/compreender o problema (Figura 7).

A metodologia usada pelos professores Projeto Fundão que utiliza uma "representação gráfica da situação no eixo das setas", nada mais é que um registro no sistema de signos figural, mostrando o sentido das setas. Cada seta indica uma operação. Se o sentido for da esquerda para direita, o valor indicado no início da seta é multiplicado pelo número constante no meio da seta. Se o sentido for da direita para esquerda, o valor no início da seta é dividido pelo número. Com relação ao número do meio da seta, quando se tratar de multiplicação, ele indica um acréscimo percentual, ao contrário, quando se divide por ele, é a indicação de que se está trazendo o valor do início da seta para o valor no final da seta.

Outra solução correta consiste em calcular o valor equivalente a cada prestação na data da terceira e última prestação.

⟶ a primeira prestação tem valor $600.(1{,}04)^2 = 648{,}96$ reais na data da terceira prestação.

⟶ a segunda tem valor $600.(1{,}04) = 624$ reais, na data da terceira prestação.

⟶ logo, $R\$\ 648{,}96 + R\$\ 624{,}00 + R\$\ 600{,}00 = R\$\ 1\ 872{,}96$ é a soma das prestação na data da última prestação. Porém, deseja-se o valor da soma das prestações na data da compra. Basta dividir esse valor por $(1{,}04)^2$.

A Figura 8 apresenta um registro figural da situação.

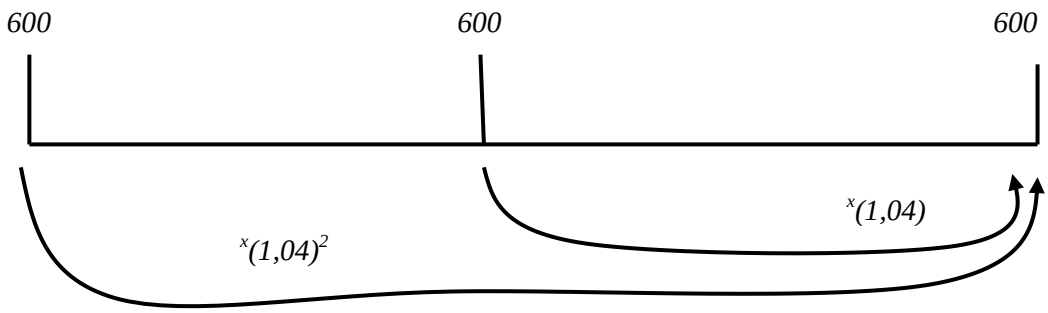

Figura 8 . Para obter os valores da primeira e da segunda prestação na data da terceira prestação se multiplica os valores por $(1{,}04)^2$ e $1{,}04$, respectivamente.

Sendo assim,

$$\frac{1872,96}{(1,04)^2} = 1731,65\,,$$

reais, é o valor à vista.

⟶ Na compra sem entrada, ter-se-ia, o valor equivalente em reais, na data da compra

$$\frac{600}{1,04} + \frac{600}{(1,04)^2} + \frac{600}{(1,04)^3} = 1665,10\,,$$

que corresponde ao "preço justo" para o pagamento à vista. □

Problema 2.1 Se o dinheiro rende *4%* em um mês, e a compra for em dez prestações de *R$ 600,00*, com entrada, os valores equivalentes à segunda, à terceira até a décima prestações na data da compra são $600/(1,04)$, $600/(1,04)^2$,...,$600/(1,04)^9$, respectivamente. O "valor justo" do bem na data da compra, isto é, o valor à vista, em reais, é igual à soma

$$600 + \frac{600}{1,04} + \frac{600}{(1,04)^2} + \frac{600}{(1,04)^3} + \ldots + \frac{600}{(1,04)^9} = 600\left(1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{(1,04)^2} + \frac{1}{(1,04)^3} + \ldots + \frac{1}{(1,04)^9}\right).$$

Entre parêntesis se tem a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica, cujo primeiro é *1* e a razão $\frac{1}{1,04}$.

Essa soma é igual a

$$\frac{1-\left(\frac{1}{1,04}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{1,04}\right)} = 8,435332,$$

o que fornece

$$600\left(1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{(1,04)^2} + \frac{1}{(1,04)^3} + \ldots + \frac{1}{(1,04)^9}\right) = 600.8,435332 = 5\,061,20,$$

valor equivalente à vista, em reais. □

Para ver que de fato

$$1+\frac{1}{1{,}04}+\frac{1}{(1{,}04)^2}+\frac{1}{(1{,}04)^3}+\ldots+\frac{1}{(1{,}04)^9}=\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)},$$

façamos

$$S=1+\frac{1}{1{,}04}+\frac{1}{(1{,}04)^2}+\frac{1}{(1{,}04)^3}+\ldots+\frac{1}{(1{,}04)^9}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade pelo número $\frac{1}{1{,}04}$ temos

$$\frac{S}{1{,}04}=\frac{1}{1{,}04}+\frac{1}{(1{,}04)^2}+\frac{1}{(1{,}04)^3}+\ldots+\frac{1}{(1{,}04)^9}+\frac{1}{(1{,}04)^{10}}.$$

Então,

$$S\left(1-\frac{1}{1{,}04}\right)=S-\frac{S}{1{,}04}=\left(1+\frac{1}{1{,}04}+\frac{1}{(1{,}04)^2}+\frac{1}{(1{,}04)^3}+\ldots+\frac{1}{(1{,}04)^9}\right)-$$
$$\left(\frac{1}{1{,}04}+\frac{1}{(1{,}04)^2}+\frac{1}{(1{,}04)^3}+\ldots+\frac{1}{(1{,}04)^9}+\frac{1}{(1{,}04)^{10}}\right).$$

Logo,

$$S\left(1-\frac{1}{1{,}04}\right)=1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{10},$$

portanto,

$$S=\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)}.$$

□

Uma palavra sobre expressão "*3 x* iguais" constante do enunciado do problema dado no início desta seção. Para o cidadão não muito afeito a questionamentos, ela é vista como uma vantagem financeira, por razões óbvias, o preço à vista é diluído em prestações sem que se acrescente juro, imaginam alguns. Há, entretanto, aqui uma

questão, a qual não é esclarecida, que as prestações quando deslocadas para seus valoresequivalentes no instante *t* da compra, o preço justo para o pagamento à vista é um valor menor que *R$ 1800,00*, porque em teoria o dinheiro sempre rende juro. De forma que o preço justo para o pagamento à vista, que seria outra opção de pagamento, por vezes vantajoso, em geral, sequer é colocado como opção ao parcelamento.

O "preço justo" para o pagamento à vista, ao qual faz referência o enunciado do problema, significa deslocar os valores da segunda e da terceira prestações, tendo como verdade que o dinheiro rende *4%* ao mês, para seus valores equivalentes no instante t da compra e, então, somá-los com o valor da entrada *R$ 600,00*. Conforme estabelecido acima, a soma

$$600+\frac{600}{1{,}04}+\frac{600}{(1{,}04)^2}=1731{,}65,$$

reais, é o "preço justo" para o pagamento à vista. Isso quer dizer que o pagamento à vista *R$ 1800,00*, não é uma boa opção, tendo em vista o desembolso maior de dinheiro.

Tal constatação fica evidente se adotando o pagamento parcelado: de posse de *R$ 1800,00*, ao pagar a primeira prestação sobrariam *R$ 1800,00-R$ 600,00 = =R$ 1200,00* e, devido ao rendimento de *4%* ao mês, no fim do primeiro mês se teria *R$ 1248,00*, isto é, *R$ 1200,00* acrescido de *4%*. Ao pagar a segunda prestação sobrariam *R$ 1248,00-R$ 600,00 = R$ 648,00* que se tornaria *R$ 673,92*, após a correção de *4%* ao final do segundo mês. Finalmente, sobrariam *R$ 673,92-R$ 600,00 = R$ 73,92*, após o a quitação total da compra. Vê-se que a opção de parcelar a compra, nesse caso, é vantajoso, isto é, há um desembolso menor de dinheiro em valores corrigidos.

Logo, se a opção for o pagamento à vista da quantia *R$ 1800,00*, há desembolso maior de dinheiro, enquanto que se a opção for pelo parcelamento, há um desembolso menor de dinheiro.

Mesmo sem a informação que o dinheiro pode render *4%* ao mês, em qualquer compra com opção de ser paga à vista ou parcelada, ao dividir o preço à vista em n parcelas a iguais, é razoável considerar a existência de juros. A justificativa reside no fato que, hoje, pode-se sempre aplicar qualquer quantia e fazê-la render. De modo que o "preço justo" à vista depende da taxa que o dinheiro rende. Quanto maior for essa taxa, menor será o preço justo à vista, em comparação com a soma dos valores pagos na compra a prazo.

Suponha que dividimos o valor à vista *V* em n parcelas de valor *P*. Então $V= nP$. Seja i a taxa unitária que o dinheiro pode render, então $1+i>1$. Logo,

$$(1+i)^n>1$$

e daí

$$\frac{1}{(1+i)^n} < 1,$$

o que fornece

$$\frac{P}{(1+i)^n} < P,$$

para todo n natural. Então vale:

$$\frac{P}{1+i} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n} < P + \ldots + P = nP = V,$$

com o parcelamento sem entrada, ou seja, a soma dos valores equivalentes de cada parcela no instante *t* da compra é sempre menor que *V*. Portanto, uma compra que pode ser paga à vista ou a prazo, sendo o valor à vista dividido em n parcelas iguais, o pagamento à vista só é justo se tiver um desconto. Qual seria esse desconto? Na Seção 2.3, apresentamos uma generalização que permite decidir criteriosamente se o pagamento à vista é justo ou mesmo vantajoso frente ao parcelamento.

Nesse tipo de problema que não faz referência direta à inflação, ela, porém, não é desprezada. O percentual de *4%* do enunciado do problema do Fundão, trás quase sempre embutido a taxa de inflação a qual não entra nos cálculo explicitamente. Em geral, a taxa de inflação faz parte dos cálculos quando se discute, por exemplo, perdas ou ganhos reais de uma aplicação financeira.

Vale a pena, ainda, por um instante, explicar o significado da expressão "valor equivalente", que por vezes usamos aqui. Nós a usamos para fazer referência a dois valores V_1 e V_2, em instantes distintos do tempo, que em teoria têm o mesmo poder de compra.

O processo de deslocar o valor V_1 para seu valor equivalente V_2 (ou deslocar V_2 para V_1), em geral, é feito multiplicando um deles por um fator obtido de uma taxa percentual, como é o caso do fator *1,04* do problema acima, ou de um fator obtido da taxa de inflação num período. Para uma inflação de, digamos, *10,5%* ao ano, de janeiro a dezembro, uma quantia A no início de janeiro é equivalente à quantia *1,105A* no final de dezembro, isto é, ao final do ano, desde que se estabeleça – isso é implicitamente estabelecido em Matemática Financeira - que duas quantias, em momentos distintos, são equivalentes se uma delas for o deslocamento da outra corrigida pela taxa de inflação ou, se não for o caso, uma taxa de atualização/correção previamente estabelecida. Analogamente, tendo em vista uma taxa de inflação de *10,5%* ao ano, uma quantia A no

fim de dezembro equivale, tendo em vista essa taxa de inflação, a $\frac{A}{1{,}105}$, no início de janeiro.

2.3 Generalizações de pagamento parcelado e à vista

Como foi visto na Seção 2.2, as operações em Matemática Financeira fazem uso repetido da noção de calcular, acrescentar e/ou retirar um percentual *p%* de uma quantia *X* − algumas vezes sucessivamente, de período em período. Calcular *p%* de *X* é o mesmo que calcular o valor $\frac{p}{100}.X$: *3%* de *500* é $\frac{3}{100}.500=3.5=15$. Então acrescentar ao valor *X*, *p%* de *X* é o mesmo que

$$X+\frac{p}{100}.X=X\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Analogamente, retirar de *X*, *p%* de *X* é o mesmo que

$$X-\frac{p}{100}.X=X\left(1-\frac{p}{100}\right).$$

É bem comum depararmos com frases do tipo:

"*À vista com desconto de p% ou a prazo dividido em n parcelas iguais a X*".

Afinal qual das opções de pagamento é mais em conta? Vamos à procura de um critério que permita decidir a forma de pagamento mais vantajosa, isto é, com um menor desembolso de dinheiro em valores equivalentes em uma determinada data. A ideia é procurar os valores p de modo que pagar à vista com desconto de *p%* há desembolso menor de dinheiro que o parcelamento. Isso depende do conhecimento de n, número de parcelas do pagamento parcelado, e do percentual *q%*, taxa que o dinheiro rende em um período. Suponhamos que se tem a opção de pagar à vista com desconto de *p%* ou a prazo, com o preço à vista diluído em n parcelas, a primeira no instante *t* da compra. As n parcelas de valor *X* fornece *nX* que fica reduzida a $nX\left(1-\frac{p}{100}\right)$ após o desconto de p%. Deve-se comparar esse valor com o valor que é a soma das n parcelas no instante *t* da compra. Os valores $\frac{X}{1+i},...,\frac{X}{(1+i)^{n-1}}$ são os valores equivalentes à segunda até a enésima parcela, respectivamente, no instante da compra. E

$$X+\frac{X}{1+i}+\frac{X}{(1+i)^2}+...+\frac{X}{(1+i)^{n-1}}$$

é o valor da soma das n parcelas no instante t da compra, com $i = \frac{q}{100}$. Pagar à vista com desconto de *p%* é mais em conta que o parcelamento se, e somente se,

$$nX\left(1-\frac{p}{100}\right) < X + \frac{X}{1+i} + \frac{X}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{X}{(1+i)^{n-1}}$$

$$< X\left(1+\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right).$$

De onde vem, multiplicando pelo número positivo $\frac{1}{X}$ ambos os lados, a desigualdade equivalente,

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right) < \left(1+\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)},$$

ou

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right) < \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)},$$

ou ainda,

$$\frac{p}{100} > \left(1 - \frac{\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}}{\frac{1+i}{n}}\right),$$

e, finalmente, obtemos a estimativa: $p > 100\left(1 - \frac{\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}}{\frac{1+i}{n}}\right)$. □

Se o valor do lado direito da desigualdade for igual a *p*, então *p%* de desconto, à vista, equivale ao parcelamento em *n* parcelas de valor *X*.

Problema 2.2 No primeiro problema da Seção 2.2, no parcelamento com entrada tem-se *i = 0,04*, pois o dinheiro rende *4%* ao mês. Decorre daí e de *n = 3* - outro dado do problema -, que

$$100\left(1-\frac{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^{n}}{\dfrac{i}{1+i}}}{n}\right)=100\left(1-\frac{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1+0{,}04}\right)^{3}}{\dfrac{0{,}04}{1+0{,}04}}}{3}\right)=100\left(1-\frac{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1{,}04}\right)^{3}}{\dfrac{0{,}04}{1{,}04}}}{3}\right)=3{,}7968442$$

Logo *p>3,7968442*. Então qualquer desconto percentual acima de *3,7968442%* sobre *R$ 1800,00* há menor desembolso de dinheiro em se pagando à vista. Na Seção 2.2, obtivemos *R$ 1731,65* o "valor justo" à vista. Esse valor é *R$ 1800,00* - soma das três parcelas – com desconto de *3,7968442%.* □

	n	i	p maior que	n	i	p maior que
	1	0,01	0,00	1	0,007	0,00
	2	0,01	0,50	2	0,007	0,35
	3	0,01	0,99	3	0,007	0,69
	4	0,01	1,48	4	0,007	1,04
	5	0,01	1,96	5	0,007	1,38
	6	0,01	2,44	6	0,007	1,72
	7	0,01	2,92	7	0,007	2,06
	8	0,01	3,40	8	0,007	2,40
	9	0,01	3,87	9	0,007	2,74
	10	0,01	4,34	10	0,007	3,07
	12	0,01	5,27	12	0,007	3,74
	18	0,01	7,99	18	0,007	5,70
	24	0,01	10,60	24	0,007	7,60
	30	0,01	13,11	30	0,007	9,46
	36	0,01	15,53	36	0,007	11,26
	42	0,01	17,86	42	0,007	13,01
	48	0,01	20,10	48	0,007	14,72
	60	0,01	24,33	60	0,007	18,00
	100	0,01	36,34	100	0,007	27,75
	120	0,01	41,34	120	0,007	32,02
	150	0,01	47,80	150	0,007	37,78
	180	0,01	53,25	180	0,007	42,85
	300	0,01	68,03	300	0,007	57,96

Figura 9. Em uma compra parcelada, conhecidos o número de parcelas n e o percentual i que seria a taxa de atratividade do dinheiro, é possível estimar p. A tabela fornece estimativa para p o percentual de desconto a partir do qual o pagamento à vista é vantajoso.

Na tabela (Figura 9), damos estimativas de *p* quando o desconto de *p%* para pagar à vista é vantajoso frente ao parcelamento, o rendimento do dinheiro é *0,7%* e *1%* em cada mês, para alguns valores para *n*, o número de parcelas, e o parcelamento é com entrada.

O que fizemos acima foi obter o *p* em função de *i* de *n*. Ocorre, por vezes, que queremos obter *i* em termos de *p* e de *n*. Suponhamos o parcelamento com entrada.

Então,

$$nX\left(1-\frac{p}{100}\right)=X+\frac{X}{1+i}+\frac{X}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{X}{(1+i)^{n-1}},$$

onde *X* é o valor de cada prestação, *p* é o número que fornece o percentual *p%* de desconto no pagamento à vista, e *i* é a taxa unitária que se deseja calcular. Logo,

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right)=1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}.$$

Pondo $x = 1+i$ temos

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}},$$

ou equivalentemente

$$\left(n\left(1-\frac{p}{100}\right)-1\right)x^{n-1}-x^{n-2}-x^{n-3}-\ldots-x-1=0,$$

um polinômio de grau *n-1* em *x*. □

Problema 2.3 Um exemplo é a seguinte situação: uma televisão de *R$ 1000,00* pode ser paga à vista com desconto de *15%* ou em *10* (dez) parcelas de *R$ 100,00*. Qual deve ser o rendimento do dinheiro para que as duas formas de pagamento sejam equivalentes?

Solução. Seja *q%* o rendimento do dinheiro, e $i=\frac{q}{100}$ a taxa unitária. Suponhamos o parcelamento com entrada.

Então,

$$100+\frac{100}{1+i}+\frac{100}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{100}{(1+i)^9}$$

é a soma dos valores das parcelas no instante t da compra. Esse valor deve ser igual a *850*:

$$850=100+\frac{100}{1+i}+\frac{100}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{100}{(1+i)^9},$$

isto é,

$$8{,}5 = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^9},$$

com $x = 1+i$, ou seja,

$$7{,}5x^9 - x^8 - \ldots - x - 1 = 0,$$

um polinômio em x, de grau 9. Uma planilha eletrônica ou uma calculadora apropriada fornece as raízes do polinômio. Interessa ao problema apenas as raízes reais. Existe uma única raiz real $x \cong 1.038103732 8526$. De $1+i = x = 1{,}038$ implica que $i = 0{,}038 = \frac{3{,}8}{100}$. Logo $q\%\ 3{,}8\%$ é o rendimento do dinheiro. □

Em alguns problemas, mesmo não se tendo explicitamente um desconto no preço à vista, existe embutido no pagamento parcelado uma taxa de juro. Essa situação ocorre se a soma das n parcelas for maior que o preço à vista.

Problema 2.4 Tomando no Problema 2.3 o pagamento em dez parcelas de *R$ 125,00* – a primeira no instante t da compra - tem-se 10 vezes *R$ 125,00* igual a *R$ 1250,00*, que é maior que o preço á vista *R$ 1000,00*.

Solução. A taxa de juro j escondida no pagamento a prazo satisfaz

$$1000 = 125 + \frac{125}{x} + \frac{125}{x^2} + \ldots + \frac{125}{x^9},$$

onde $x = 1+j$.

Ou seja,

$$8 = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^9},$$

isto é,

$$7x^9 - x^8 - \ldots - x - 1 = 0,$$

cuja única solução real é $x \cong 1.029890676 0584$. Daí e de $1+j = x = 1{,}029$ implica que $j = 0{,}029 = \frac{2{,}9}{100}$. Logo, $2{,}9\%$ é a taxa de juro embutida (implícita) no pagamento a prazo.

□

A visão apresentada nesta seção permite resolver problemas em Matemática Financeira por múltiplos caminhos, basta seguir o que diz Lima [LIMA, 1991], quando fala em deslocar quantias no tempo. Deslocar quantias é essencial em Matemática financeira, e a operação de fazê-la deve ser no intuito de se ter quantias equivalentes numa mesma data.

Problema 2.5 Uma compra de *R$ 531,00* deve ser paga em *3* (três) parcelas: em *30, 60* e *90* dias. Os valor de cada parcela fica a critério do cliente. Se na primeira se pagou o valor nominal de *R$ 150,00* e na segunda *R$ 200,00*, e a loja trabalha com uma taxa de juro de *2,5%* ao mês, qual deverá ser o valor da terceira parcela no instante t do seu vencimento?

Solução. A solução desse problema pode ser feita pela escolha de um dentre diversos caminhos disponíveis. Porém, qualquer que seja o caminho escolhido, é necessário deslocar valores. Vamos escolher dois caminhos. Os valores numéricos a seguir são dados sempre em reais.

→ O mais natural é deslocar os valores do dinheiro para o instante do pagamento da terceira prestação. Tendo isso em mente, $531{,}00 \,.\, (1{,}025)^3 = 571{,}83$, $150.(1{,}025)^2 = 157{,}59$ e $200.(1{,}025) = 205$ são os valores da compra, da segunda e da terceira prestações no momento do vencimento da terceira. Então $571{,}83 - 157{,}59 - 205 = 209{,}24$ é o valor da terceira parcela, no instante que ela vence.

→ Outro caminho é deslocar os valores das duas prestações pagas para o instante $t = 0$ da compra. Tem-se $\frac{150}{1{,}025} 146{,}34$ e $\frac{200}{(1{,}025)^2} = 190{,}36$ valores da primeira e segunda parcelas, respectivamente, no momento da compra. Resulta que $531 - 146{,}34 - 190{,}36 = 194{,}3$ é o valor da terceira parcela no tempo $t = 0$. Deslocando esse valor para o tempo t do pagamento da terceira, acarreta que $194{,}3.(1{,}025)^3 = 209{,}24$ é o valor da terceira prestação no instante de seu vencimento. □

Problema 2.6. (Um problema real) Uma fatura da Prefeitura de Rio Branco/Acre, poderia ser paga em valor único (em reais) de *442,98*, ou em duas parcelas com vencimento em *30* e *60* dias, de valor nominal, ambas, iguais a *242,14*, sempre em reais. Vê-se que existe uma taxa de juros *i* quando do pagamento parcelado. Vamos calculá-la.

Solução. A taxa de juros unitária i deve satisfazer

$$442{,}98 = \frac{242{,}14}{1+i} + \frac{242{,}14}{(1+i)^2}.$$

De onde vem, fazendo $x = 1+i$, que

$$442{,}98\,x^2-242{,}14x-242{,}14 = 0,$$

uma equação quadrática cujas soluções são $x \cong -051492629\quad 809$ e $x \cong 1{,}06154239\quad 98587$ .Essa última é a única que interessa, pois a primeira fornece $i < 0$. A igualdade $1+i = 1{,}0615$ fornece $i = 0{,}0615 = \frac{6{,}15}{100}$. Resulta que a taxa de juros percentual é de *6,15%* ao mês. □

O problema seguinte é tipicamente um problema de Matemática Financeira, porque estabelece as condições para tomada de decisão consciente.

Problema 2.7 Suponhamos que o dinheiro rende *5%* em um mês. Decidir qual das alternativas é melhor financeiramente na compra de uma mercadoria:

1. à vista, com *10%* de desconto;

2. pagamento em *1* mês, com *5%* de desconto, ou

3. pagamento em três parcelas (*0, 30 e 60* dias) sem juros.

Solução. Vamos chamar de *P* o preço da mercadoria, e imaginemos que as condições 1, 2 e 3 se aplicam a *P*. Vamos, ainda, escolher o instante $t = 0$ da compra para onde os valores serão deslocados com objetivo de compará-los.

→ Se a opção for a alternativa *1*, *0,9P* é o valor do pagamento pela mercadoria no instante $t = 0$ da compra.

→ Se a alternativa *2* for a escolhida, descontado *5%* de *P* pagar-se-á *0,95P* após *1* mês, valor que equivalente $\frac{0{,}95}{1{,}05}P = 0{,}9048\,.P$ no instante $t = 0$, e

→ Finalmente, se a alternativa *3* for a escolhida teremos

$$\frac{P}{3}+\frac{\frac{P}{3}}{1{,}05}+\frac{\frac{P}{3}}{(1{,}05)^2} = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.(1{,}05)}+\frac{1}{3.(1{,}05)^2}\right)P = 0{,}953\,P\,,$$

o valor pago pela mercadoria no instante $t = 0$ da compra. Vemos que a alternativa *1* é financeiramente mais em conta. □

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na introdução, ao começar a escrever este trabalho, fizemos referência a três coisas: para quem escrever, o que escrever, e em que base fazê-lo.

Para quem escrever, essa era a única das três indagações iniciais sobre a qual não tínhamos dúvidas: as pessoas que estão na condição de estudante ou professor na Educação Básica; professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, estudantes do Ensino Médio e dos cursos de licenciatura que, em sua maioria, vai atuar como professor na Educação Básica.

O que escrever era uma das duas dúvidas principais. A escolha dos tópicos proporcionalidade e Matemática Financeira, não foi por acaso, sempre foram o plano B caso um plano A não vingasse. Esses são tópicos que, apesar de não se conseguir estabelecer uma relação matemática consistente entre eles, ambos têm uma característica: são extremamente motivadores e vastamente contextualizados, conforme fica estabelecido no texto.

Em que base fazê-lo, merece uma reflexão mais apurada. A parte mais delicada é sem dúvida proporcionalidade, no Capítulo I, que de vez em quando, mas, apenas em uma ou outra situação, a compreensão tá ligeiramente acima do nível de compreensão e da fundamentação matemática que têm o estudante do Ensino Médio. No mais, o que foi escrito sobre proporcionalidade é bem completo, com alguns destaques.

Ao escrever sobre de proporcionalidade tivemos a preocupação de, antes da definição, mostrar alguns exemplos onde o conceito aparece, para logo após a definição apresentar os resultados principais; teoremas fundamentais da proporcionalidade, e resolver problemas tendo apenas esses resultados como ferramentas. Os Problemas 1.1, 1.2, 1.3 1.4, 1.5, 1.6 e 1.7 se encaixam nas coisas das quais estamos falando e, diga-se de passagem, o tipo de resolução desses problemas são escassos na literatura atual. Porém, apenas para uma minoria de problemas as coisas dão certo, aqueles que têm no máximo quatro variáveis, por exemplo. Em um problema com muitas variáveis, perde-se facilmente o controle. Nesses casos, onde há um grande número de variáveis, o uso de apenas esses teoremas não seria recomendado. Um outro aspecto no desenvolvimento do tópico são as notas esclarecedoras aos alunos e professores na situação de ensinar/aprender. Uma delas trata dos limites de aplicação da teoria: ao selecionar os problemas em proporcionalidade, deve-se ter em mente sempre certas restrições. Nessa direção, comentários esclarecedores e de ampla utilidade são feitos à

Pag. 17, logo após o Problema 1.5. Isso se aplica à totalidade dos problemas em proporcionalidade. Finalmente, o texto apresenta caracterizações de variáveis diretamente e inversamente proporcionais que são, do ponto de vista ferramental de atacar e resolver os problemas, realmente eficientes. Há de se observar ainda os registros figurais que permitem, depois de estabelecidas se as variáveis são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. visualizar essas características quando da resolução do problema e, que, de certa maneira agrega elementos no perceber/entender/resolver os problemas, sendo esse os casos das Figuras 3 e 4.

Algo que não deveríamos ignorar em Educação são as coisas que deram certo ou estão dando certo. Tendo esse principio em mente, buscamos algo com essa característica no desenvolvimento da Matemática Financeira, no Capítulo II. De início, na seção 2.2, apresentamos um problema de um texto didático escrito por professores do Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, ver [SOUSA, 2010]. Essa referência contém as impressões iniciais e finais de professores desse projeto, ao ensinar Matemática Financeira por um viés metodológico que utiliza um sistema figural na apresentação e na resolução de problemas, e que agrega elementos visuais permitindo melhor compreende-los e resolve-los.

A metodologia utilizada pelos professores do Projeto Fundão é adotada no presente trabalho, no início da Seção 2.2. Em todo o texto, há uma preocupação de explicar os termos principais do tópico, à medida que se avança no sentido de esclarecer as vantagens e as desvantagens de se pagar, por exemplo, um empréstimo, ou uma compra, à vista ou a prazo. Ao longo do texto a exposição é feita tendo como verdade o que escreve Lima, que o problema principal da Matemática Financeira é deslocar quantias no tempo [LIMA; et al, 2000].

Ademais, problemas variados são apresentados e resolvidos, e, vale destacar, a tabela da Figura 9, numa compra parcelada, conhecidos o número de parcelas n e o percentual i que seria a taxa de atratividade do dinheiro, é possível estimar p. A tabela fornece estimativa para p, a partir do qual o percentual de desconto p%, em se pagando à vista, é vantajoso.

Apêndice A

Funções inversas

Neste apêndice dispusemos uma parte teórica sobre funções cuja compreensão está acima da proposta do trabalho.

Suponha que *f* é uma função crescente no domínio D. Seja *f(D)* a imagem de *D* por *f*: f*(D) = {y: y = f(x), x em D}.* Dado o valor qualquer *y* em *f(D)*, existe um *único* valor **x** em *D* tal que *y = f(x),* porque se *x'* em *D* é outro valor tal que *f(x')=y*, tem-se necessariamente *x'= x,* caso contrário, se fosse *x'* diferente de *x*, digamos, *x' < x* então *f(x') < f(x)*, pois *f* é crescente. Isso contradiz o fato de ser *f(x') = y = f(x).* Podemos então definir uma função *g*, de domínio *f(D), x = g(y)* onde o valor $x \in D$ assumido por *g* em $y = f(D)$, é o único valor *x* tal que *f(x) = y*. Essa função *g* é geralmente conhecida como função inversa da função *f*. Valem as propriedades seguintes para a função *f* e sua inversa *g*:

$$f(g(y)) = f(x) = y, \text{ para todo } y \in f(D),$$

e

$$g(f(x)) = f(y) = x, \text{ para todo } x \in D.$$

Se *y* e *y'* são dois valores quaisquer em *f(D),* com *y'< y*, tem-se necessariamente *g(y') < g(y)* pois caso contrário, isto é, se fosse *g(y') ≥ g(y)*, tomando *x'* e *x* em *D* tais que *g(y') = x'* e *g(y) = x* teríamos então $x' \geq x$ e, o fato de ser *f* crescente garantiria y' = f(x') ≥ f(x) = y, contradizendo o fato de ser *y' < y.* O que mostra que *x = g(y)* é função crescente de *y*.

Analogamente, se *f* é uma função decrescente, então *f* tem uma função inversa g que é também decrescente. Os argumentos para mostrar tais fatos são semelhantes aos utilizados para *f* crescente.

Tomemos a função *f(x) = ax+b, (a >0) x* em |*R*, então f é uma função crescente, conforme estabelecemos na secção sobre funções crescentes e decrescentes. Sua inversa é a função $x = g(y) = \frac{y-b}{a}, y \in |R$.

A função inversa quando existe é única. Para mostrar essa afirmação, considere que *g'* é outra função inversa de *f* e que tem também domínio *f(D).* Então *y = f(x)* se, e

somente se, $x = g'(y)$, para todo x em D e todo y em $f(D)$ e, ainda, $f(g'(y)) = y$ para todo y em $f(D)$. Aplicando g de ambos os lados tem-se $g(f(g'(y))) = g(y)$. Como $g'(y) = t \in D$ e para todo t em D, $g(f(t)) = t$, segue que $g(y) = g(f(g'(y))) = g(f(t)) = t = g'(y)$ para todo y em $f(D)$. Isso mostra que g e g' são funções iguais. Do fato que, a partir das propriedades,

$f(g(y)) = f(x) = y$, para todo $y \in f(D)$, e

$g(f(x)) = g(y) = x$, para todo $x \in D$,

ser possível estabelecer que a função inversa g da função f é única, para mostrar que uma função é a função inversa da função f, basta exibir uma função g cujo domínio é a imagem de f, e essa função cumpre as duas propriedades acima.

Tomando a função $f(x) = ax+b$, x em $|R$, então $g(y) = \frac{y-b}{a}$, y em $|R$, cumpre

$$f(g(y)) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = (y-b) + b = y,$$

para todo y real, e

$$g(f(x)) = g(ax+b) = \left(\frac{(ax+b)-b}{a}\right) = \frac{ax}{a} = x,$$

para todo x real. O que mostra que, de fato, g é a função inversa da função f.

Referências

ÁVILA, Geraldo. **Razões, proporções e regra de três.** Revista do Professor de Matemática nº 08 – RPM 08 - Sociedade Brasileira de Matemática - SBM com apoio da USP – Universidade de São Paulo - SBM com apoio da USP – Universidade de São Paulo,1985.

ÁVILA, Geraldo. **Ainda sobre regra de três.** Revista do Professor de Matemática nº 09 – RPM 09 - Sociedade Brasileira de Matemática - SBM com apoio da USP – Universidade de São Paulo, 1986.

BERNAL, M. M.. **Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado**. Dissertação de mestrado-UFSC, Florianópolis, 2004.

ENEF. **Orientações para educação financeira nas escolas**. Grupo de Apoio pedagógico – GAP – MEC/Brasil, 2010.

DOLCE, Osvaldo e IEZZI, Gelson **e MUKARAMI,** Carlos **Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 2 - Logaritmos - 9ª Edição, Atual Editora, 2013.**

DUTENHEFNER, Francisco e **SABATUCCI,** Jorge e **CARNEIRO,** Mário Jorge Dias e **SPIRA,** Michel**. Porcentagem e Juros - Matemática - Ensino Fundamental –** CRV: Centro de Referência Virtual do Professor - SEE-MG, 2009.

LIMA, E. L.. **MEU PROFESSOR DE MATEMÁTICA e outras histórias.** Coleção do professor de Matemática - SBM, RJ, 1991.

LIMA, E. L., **CARVALHO**, P. C. P., **WAGNER**, E., **MORGADO**, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 1, 3ª Edição. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIMA, E. L., **CARVALHO**, P. C. P., **WAGNER**, E., **MORGADO**, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 2, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2000.

MACHADO, José N. , **D'AMBRÓSIO**, Ubiratan. **ENSINO DE MATEMÁTICA: PONTOS E CONTRAPONTOS.** Organizado por Valéria Amorim Arantes, Summus Editorial, São Paulo, 2014.

MELLO, J. L. P.. **A Matemática do papel.** Seminários de Ensino de Matemática (SEMA). Faculdade de Educação da USP, 2008.

SOUSA, G. A.; **PEREIRA**, J. A.; **NASSER**, L.; **MEDINA** L.; **TORRACA** M.; **SANTOS**, R. P.; **DIAS**, D. S.; **SIMÕES**, R e **VANESSA**, M.. **Capacitando Professores para o Ensino de Matemática Financeira** - Projeto Fundão - IM-UFRJ. 2010.