**Sequências e séries: uma proposta
duvaliana para a educação básica**

Caio Moura Quina

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de
Matemática

Orientador: Oscar João Abdounur

São Paulo, dezembro de 2015

CAIO MOURA QUINA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES:
UMA PROPOSTA DUVALIANA
PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Educação
Matemática do Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo para
obtenção de título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

SÃO PAULO
2015

TERMO DE APROVAÇÃO

CAIO MOURA QUINA

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UMA PROPOSTA DUVALIANA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção de título de Mestre e analisado pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Oscar João Abdounur
Orientador – Instituto de Matemática e Estatística, USP.

Prof. Dr. Ricardo Bianconi
Instituto de Matemática e Estatística, USP.

Profa. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP.

São Paulo, ____ de Dezembro de 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço minha mãe Isabel e meu pai Roberto pelo apoio incondicional aos meus estudos. Sem eles, este trabalho não seria possível.

Aos meus colegas de curso que pela troca experiências me trouxeram valiosíssimo crescimento profissional e pessoal. Em especial, à Wanessa Aparecida Trevizan, Herbert Wesley Azevedo, Liliane Soares de Siqueira Feola e Marilia Prado. Ringrazio anche Paolo Pontiggia.

À Profa. Cristina Cerri e ao Prof. Marcos Nascimento Magalhaães que conversaram comigo no momento em que estava prestes a desistir do mestrado antes mesmo do fim do primeiro semestre.

Ao meu orientador Prof. Oscar João Abdounur pelo tempo e dedicação.

À Profa. Esther Pacheco de Almeida Prado e ao Prof. Ricardo Bianconi pelas excelentes sugestões para aperfeiçoar o texto desta dissertação.

Ao Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM-USP) e ao Laboratório de Ensino de Matemática (LEM-USP) por permitirem a consulta de seus excelentes materiais de ensino à Matemática.

À toda equipe pedagógica da Escola Estadual Conde do Pinhal e, em especial, à coordenadora Alexsandra Candida Gonçalves e ao Prof. Eydher Gama.

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

RESUMO

QUINA, C. M. **Sequências e séries:** uma proposta duvaliana para a educação básica. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2015.

Esta dissertação versa sobre o ensino de Sequências e Séries na educação básica. A questão é entender em que medida o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica se mostra favorável à criação de atividades que sejam propícias à aprendizagem dos alunos. Foram elaboradas dez atividades sobre Sequências e Séries e foi feita uma aplicação de quatro destas atividades com alunos de 1ª série do ensino médio. Com esta aplicação, procurou-se buscar evidências de que o uso de diversos registros de representação semiótica favorecem a aprendizagem dos alunos em Matemática. Como escopo secundário, buscamos também investigar a concepção de infinito que os alunos manifestaram durante a aplicação das atividades. Antes, porém, buscamos na história da Matemática diferentes maneiras de como filósofos e matemáticos concebiam e utilizavam o infinito. Visto que Sequências e Séries também são assunto tratados no ensino superior, foram abordadas algumas dificuldades de transição ensino básico/ensino superior tendo em vista diferenças culturais entre os dois níveis de ensino. Concluímos que o uso de materiais concretos para representação de objetos matemáticos se mostrou favorável à compreensão dos alunos e a concepção de infinito dos alunos está predominantemente ligada a ideia de infinito potencial.

Palavras-chave: Sequências, Séries, Infinito, Representação semiótica, Ensino Médio.

ABSTRACT

QUINA, C. M. **Sequences and series**: a Duvalian proposal for primary school. Thesis (MA) – Instituto de Matemática e Estatística, University of São Paulo, 2015.

The subject of this research is about teaching and learning sequences and series in primary education. The research question is to understand how favorable is the use of the theory of semiotic representation registers to create activities that help students to learn. Were created ten activities about sequences and series and four of these were chosen to be used in a classroom with 1st year students of a secondary school. By observing these activities being used in classroom, evidences were searched to evaluate if including different semiotic representation registers facilitates student's learning on mathematics. As a secondary aim, the student's infinity conception is investigated in the classroom. We also researched mathematics' history to find different conceptions adopted by philosophers and mathematicians on infinity. As sequences and series are also studied in college, some transition difficulties (from High School to College) were discussed considering cultural differences between the two educational levels. It was concluded that concrete teaching materials to the students' comprehension and the students' concept of infinity is mainly linked to potential infinity.

Keywords: Sequences, Series, Infinity, Semiotic representation, Secondary school.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO COM REVISÃO DE BIBLIOGRAFIA.....	8
1. O INFINITO NA MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO.....	15
2. SEQUÊNCIAS E SOMAS INFINITAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.....	20
3. CONTRIBUIÇÕES DE REZENDE E ARTIGUE PARA O TEMA.....	43
3.1 MAPEAMENTO COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO.....	51
3.2 IDEIAS FUNDAMENTAIS.....	53
3.3 O CÁLCULO COMO COLUNA VERTEBRAL DA MATEMÁTICA.....	54
3.4 SOBRE A NECESSIDADE DE DEMONSTRAÇÕES.....	64
4. CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES PARA O TEMA.....	69
4.1 REFLETINDO SOBRE APLICAÇÕES DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES.....	79
5. ATIVIDADES SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES COMENTADAS.....	83
5.1 “PROVAS SEM PALAVRAS”.....	89
5.2 ELABORANDO ATIVIDADES COM UMA PROPOSTA DUVALIANA.....	93
5.3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES COMENTADAS.....	95
5.3.1 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS I.....	95
5.3.2 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS II.....	98
5.3.3 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS ÍMPARES I.....	99
5.3.4 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS ÍMPARES II.....	102
5.3.5 SOMA DE CUBOS.....	104
5.3.6 SOMA DE INTEIROS E SOMA DE CUBOS.....	110
5.3.7 SOMA DOS QUADRADOS DOS NÚMEROS DE FIBONACCI.....	114
5.3.8 SÉRIE GEOMÉTRICA.....	117
5.3.9 ESCADARIA DE GABRIEL.....	126
5.3.10 SOMA DE POTÊNCIAS DE TRÊS.....	131
6. METODOLOGIA E APLICAÇÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	134
6.1 APLICAÇÃO DE ATIVIDADES: 'SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS I' E 'SOMA DE CUBOS'.....	137
6.2 APLICAÇÃO DE ATIVIDADES: 'SOMA DOS QUADRADOS DOS NÚMEROS DE FIBONACCI' E 'SÉRIE GEOMÉTRICA'.....	141

CONCLUSÃO.....	144
REFERÊNCIAS.....	147
APÊNDICES.....	152

INTRODUÇÃO COM REVISÃO DE BIBLIOGRAFIA

Nesta introdução, vamos apresentar algumas reflexões que estão relacionadas em maior ou menor grau aos objetos matemáticos que tratamos: Sequências e Séries. Além disso, explicamos a contribuição de alguns dos autores que compõem os argumentos desta dissertação. A nossa questão é entender em que medida o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica se mostra favorável à criação de atividades que sejam propícias à aprendizagem dos alunos. E dado que os assuntos das atividades que criamos são Sequências e Séries, procuramos também investigar, como questão secundária, concepções de infinito de alunos do 1º ano do Ensino Médio. Nossa última subquestão é: dado que Sequências e Séries também são assuntos estudados no ensino superior para cursos de ciências exatas, quais são as dificuldades de transição que existem entre o ensino básico e o ensino superior. Antes de fornecermos uma visão geral de como organizamos os capítulos deste trabalho, queremos expor algumas de nossas reflexões sobre o ensino de Matemática.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (PCN+) (2002, p.8) encontramos uma visão de “ensino médio como etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil – e não somente uma preparação para outra etapa escolar ou para o exercício profissional”. Em seguida, adjetiva como inaceitável um ensino médio de escopo pré-universitário visto como etapa intermediária e propedêutica ao ensino superior; também rejeita um ensino médio de caráter estritamente profissionalizante visto que isto comprometeria a formação geral dos alunos para a vida pessoal e cultural. Compartilhamos deste ponto de vista, pois não acreditamos que o nível superior tenha obrigatoriamente que ser cursado por todos como se fosse a única alternativa de se obter sucesso profissional; há várias escolhas profissionais bem sucedidas que prescindem de um diploma de nível superior. Por outro lado, um ensino médio estritamente profissionalizante não é propício ao ampliado de horizontes que a diversidade de temas normalmente tratados neste nível de ensino. Ou seja, não queremos que os alunos sintam que o ensino médio só faz sentido após o ingresso no ensino superior e tão pouco queremos que restringir o ensino ao aprendizado de uma profissão que, como se observa na história, pode desaparecer dada velocidade com que a sociedade tem se transformado e mudado os meios de produção.

Muitas são as discussões sobre as finalidades do ensino. Dificilmente haverá um consenso sobre quais são os objetivos da educação escolar. Dentre os objetivos que consideramos importantes na formação escolar estão a compreensão da sociedade e da política bem como desenvolvimento da capacidade de argumentação e a autonomia para prosseguir seus estudos em qualquer área do conhecimento. Uma alteração na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996) ocorrida em 2008 endossa nosso ponto de vista quanto a importância da compreensão da sociedade e da política. Esta alteração inclui no artigo 36 o seguinte inciso: “IV – serão incluídas a Filosofia e a Sociologia como disciplinas obrigatórias em todas as séries do ensino médio.”. O ensino de ciências naturais, por outro lado, tem um papel importante quanto ao desenvolvimento da capacidade de argumentação, pois nos ajudam a compreender e não apenas a aceitar os fenômenos naturais que ocorrem à nossa volta. Elas também compõem um elemento argumentativo que se reflete nas decisões políticas, econômicas e sociais; logo, cidadãos que ignoram as ciências naturais, têm menos ferramentas para avaliar ou contra-argumentar uma decisão política, por exemplo. A Matemática, neste contexto, tem um papel de destaque. Ela, por exemplo, se amalgama a língua portuguesa, visto que, ideias de maior e menor, contagem, proporção e etc. compõem nossa comunicação cotidiana. Ao nosso ver, ainda que a Matemática possa ser estudada com um fim em si mesma, é também uma ferramenta inestimável para as ciências naturais. O modo de raciocinar com o qual a Matemática opera seus objetos de estudo é um treino valioso para o cultivo do raciocínio em geral; este treino é útil até mesmo para alguém que não prossiga seus estudos em ciências exatas.

Tendo em vista estes fatos, destaca-se a importância do aprendizado de Matemática. Não é desejável que o ensino se limite à repetição de algoritmos os quais os alunos não vêem significado, mas que precisam reproduzir em avaliações para, no final de semestre, “ganharem” um número chamado nota. Os aspectos técnicos e semânticos da Matemática caminham juntos e não são auto-excludentes.

Quanto a revisão de literatura, procuramos artigos, dissertações e consultamos livros didáticos. Na dissertação de Luis Chiconello (2013) há um exemplo de aplicação de uma atividade que explora o aspecto geométrico que podemos atribuir a uma sequência numérica. Além dos números triangulares e quadrados, existem muitas outras sequências de números que carregam uma interpretação geométrica e

que podem ser trabalhadas em sala de aula como os números pentagonais, hexagonais, estrelados, cúbicos, tetraédricos entre outros. Quanto à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, destacamos a dissertação de Marília Prado (2015), que inspirada em uma competição internacional chamada “Rali Matemático”, aplicou atividades para alunos da 1ª série do ensino médio e, dentre outros autores, usa a teoria de Duval para analisar os dados que coletou.

Foram-nos de relevante inspiração os materiais arquivados no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM-USP)¹, um órgão de extensão do Instituto de Matemática e Estatística da USP que oferece diversos cursos com o escopo de contribuir com o aperfeiçoamento de professores de Matemática da educação básica. Em seu arquivo destacamos o curso “Números: sua história e sua aplicação”, ministrado em 2000 que versa sobre diversas sequências numéricas e suas aplicações. No mesmo ano, foi oferecida a oficina “Progressões geométricas com geometria” que nos trouxe inspiração para várias atividades que elaboramos nesta dissertação ao frisar diversas formas de representar, via geometria, as progressões geométricas.

Em um segundo momento, procuramos saber, através de alguns livros didáticos, como os temas Sequências, PA e PG são abordados. Está fora do nosso escopo empreender uma análise dos livros consultados. Procuramos, entretanto, em livros didáticos de Matemática para 1ª série do ensino médio por representações gráficas (cartesianas) e geométricas usadas no capítulo de Sequências, P.A. e P.G. E, dos livros consultados², poderíamos separar, com ressalvas, os livros produzidos antes de 2010 e a partir de 2010 incluindo alguns dos livros aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2015. Desconsiderando questões de qualidade gráfica dos livros anteriores a 2010 (derivados de eventuais limitações técnicas), observamos que estes apresentaram comparativamente menos contextualização dos conteúdos, por exemplo através da história das ciências ou de aplicações, e fizeram menos uso de representações gráficas ou geométricas como forma de abordar problemas de P.A. e de P.G. Nos livros a partir de 2010, em geral, observamos um cuidado em não descuidar das características de rigor e precisão tão caras à Matemática. Por exemplo, não há só a preocupação em exemplificar o

1 No site do CAEM-USP encontramos a programação de suas atividades (cursos e oficinas) destinados a professores de Matemática do ensino básico com diversos temas oferecidos a preços realmente acessíveis sendo que alguns são gratuitos. Site: <http://www.ime.usp.br/caem/>

2 v. referências dos livros didáticos no final desta dissertação.

que são sequências, mas, por exemplo, definir sequências infinitas como funções cujo domínio é o conjunto dos naturais. Percebe-se também uma atenção em relacionar P.A. com função afim e P.G. com função exponencial. Ressaltamos que fazer menos uso de representações gráficas ou geométricas não implica em um julgamento de valor quanto a qualidade do livro. Trata-se apenas de uma característica que procuramos detectar em nossa busca. Observando o “Edital de Convocação para o Processo de Inscrição e Avaliação de Obras Didáticas” do PNLD 2015 que é centrado em livros de ensino médio para alunos e professores, procuramos saber em que medida as características que encontramos derivam de exigências de caráter avaliativo ou eliminatório do edital. De fato, encontramos considerações gerais sobre o que se espera do livro didático, independentemente do componente curricular, e específicas para o livro didático de Matemática que explicam algumas das diferenças. Sobre o rigor matemático, por exemplo, é esclarecedor o seguinte excerto:

No que tange à Matemática enquanto conhecimento acumulado e organizado, é preciso dosar, em progressão criteriosa, o emprego de seu método próprio de validação dos resultados: o método dedutivo. É indispensável que o aluno estabeleça gradualmente a diferença entre os vários procedimentos de descoberta, invenção e validação e que, em particular, venha a compreender a distinção entre uma prova lógico-dedutiva e uma verificação empírica, seja esta baseada na visualização de desenhos, na construção de modelos materiais ou na medição de grandezas. Dessa forma, o ensino médio cumpre seu papel de ampliação, aprofundamento e organização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental, fase esta em que predominam, na abordagem da Matemática, os procedimentos indutivos, informais, não rigorosos. (BRASIL, 2013, p. 58, grifo nosso)

Assim, evidencia-se a necessidade das demonstrações sem exageros. Não se abandonam os procedimentos indutivos (ou intuitivos) e é desejável que etapas de descoberta e validação sejam reconhecidas pelos alunos como momentos distintos do fazer matemático. Especificamente em relação a P.A.'s e P.G.'s, percebemos que os livros mais recentes fazem um maior uso de gráficos.

Tendo em vista que o tema que tratamos tem intersecção com a ideia de infinito, elaboramos no capítulo 1 uma breve reflexão sobre os desafios de tratar do infinito ainda no ensino básico.

No capítulo 2, escolhemos escrever um recorte histórico sobre sequências, séries e infinito. Dessa forma, pode-se acompanhar alguns desdobramentos do conceito de série. E este está muito ligado à maneira de interpretar (ou de aceitar) o conceito de infinito. Vemos que, por exemplo, o pensamento aristotélico foi muito influente desde a antiguidade até o fim da Idade Média e isto tem reflexo no conceito de série infinita. A história da Matemática também pode oferecer reflexões ao educador sobre possíveis dificuldades de seus alunos. Por exemplo, é interessante ver que o infinito em ato foi por muito tempo rejeitado enquanto que o infinito em potência, pensado como um processo, era melhor aceito. Tendo isto em vista, o professor pode estar atento a este tipo de dificuldade (por exemplo, não entender o infinito em ato) e elaborar maneiras de ajudar a superar esta dificuldade. Mas este é só um exemplo e não supomos que os conceitos que historicamente tiveram dificuldade de aceitação (e que hoje são aceitos) pela comunidade matemática necessariamente sejam as dificuldades dos alunos. A história também pode contribuir com boas ideias para iniciar a exposição de um tema ou contextualizar um conteúdo. Nem sempre o problema que originou um novo assunto é a melhor forma de ensiná-lo. Ainda assim, saber mais sobre sua dimensão cultural ajuda a quebrar a ideia, comum entre os alunos, de que a Matemática está toda pronta e lembrá-los de que o conhecimento que temos é o resultado do esforço de muitas pessoas com suas dúvidas incertezas durante o processo de descoberta. Nosso recorte é pensado principalmente ao professor de Matemática, considerando que tratamos de alguns assuntos que exigem conhecimento de Cálculo.

Ao escolhermos Sequências e Séries como objeto matemático de destaque nesta dissertação, consideramos o fato que estes conteúdos também estão presentes no ensino de Cálculo. No capítulo 3, ainda que o enfoque dado nos diferentes níveis de ensino difira em objetivos e nível de rigor, optamos por também tratar de dificuldades de aprendizagem referentes à transição ensino básico/ensino superior. Para tal, consideramos pertinente o artigo de Michèle Artigue sobre a transição entre a cultura do *secondaire*³ para a cultura do ensino superior na França. Apesar de haver diferenças significativas de conteúdo entre o currículo francês e o currículo brasileiro⁴, consideramos que muitas das diferenças culturais entre os dois

3 Etapa do ensino francês que engloba o equivalente ao segundo ciclo do ensino fundamental e o ensino médio no Brasil.

4 O currículo oficial francês prevê, por exemplo, o ensino de noções de inferência estatística (flutuação de amostra, intervalo de confiança), limites, derivadas e integrais elementares.

níveis de ensino são semelhantes nos dois países. A esta discussão, unimos as considerações de Rezende (2003) que se mostram mais específicas em relação às Sequências e Séries. Na verdade, este autor investiga em sua tese o lugar-matriz das dificuldades de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Portanto, enriquece a discussão ao sugerir maneiras de mitigar, já no ensino médio, as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos no ensino superior durante a disciplina de Cálculo. Vale notar que a contribuição de Rezende não é tornar o ensino de Matemática da educação básica uma etapa propedêutica para o ensino superior. Também discutimos características mais formais sobre séries e mostramos um exemplo em que a falta de critérios precisos no uso de séries pode leva a um absurdo como somar infinitos números positivos e obter $-1/12$ como resultado!

Ainda no capítulo 3, procurando refletir sobre maneira maneiras organizar nosso próprio trabalho docente, introduzimos a ideia de mapa de relevância como alegoria do planejamento docente. Por experiência própria, observamos que a maneira de conceber o conhecimento influencia como o professor ensina. Conceber, por exemplo, os conteúdos escolares como se fossem uma rígida cadeia numerada de pré-requisitos em que o conteúdo número $n+1$ não pode ser aprendido sem que se saiba o conteúdo número n e assim por diante, leva o professor a ter menos flexibilidade em relação à ordem do que ensina. De fato, existem assuntos que exigem pré-requisitos, mas parece-nos mais natural conceber os conteúdos como que dispostos em um mapa em que a relevância⁵ dos mesmos é determinada de acordo com os objetivos do plano docente. Esta alegoria está presente tanto em Rezende(2003) quanto em Machado (2011, p.108). Junto à alegoria de mapa, está presente o conceito de ideias fundamentais que são como pontos que naturalmente se destacam no mapa. Esta alegoria não tem um papel de central entre os assuntos desta dissertação, porém cremos proveitosa sua inclusão.

Usamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval para propor reflexões sobre os objetos em Matemática, suas representações e, assim, elaborar atividades que visam evidenciar o caráter semântico destes objetos. No capítulo 4 versamos sobre as características principais desta teoria. Dentre os possíveis objetos matemáticos que poderíamos escolher para ilustrar seu uso em sala de aula, escolhemos Sequências e Séries Numéricas de forma a evidenciar os benefícios de se utilizar mais de um registro de

5 A palavra “relevância” lembra a palavra “relevo”.

representação. Verificamos que muitas Sequências e Séries permitem o uso de representações geométricas (ou seja, não apenas algébricas). Destacamos dois livros de Nelsen (1993 e 2000) que sob o título de “*Proofs without words*” reúne diversas figuras referentes a teoremas e identidades não apenas da Geometria, mas também da Álgebra e do Cálculo. Este autor contribui significativamente para a elaboração de atividades que levam em conta algumas ideias de Duval para o ensino de Matemática.

No capítulo 5, temos a elaboração de dez atividades em que partimos de representações pictóricas para alcançar uma identidade algébrica. Nas primeiras que propomos, incentivamos que se comece por uma via indutiva para que os alunos, gradualmente, consigam fazer correspondências entre o registro figural e o registro algébrico. Mas não nos contentamos com o convencimento que esta abordagem pode propiciar. Incentivamos que, ao final da atividade, haja um momento em que se demonstre o resultado destacando que a figura não é suficiente para comprová-lo ainda que seja uma grande aliada no processo de descobri-lo (etapa heurística).

No capítulo 6, apresentamos a metodologia referente a aplicação de quatro das dez atividades com alunos de 1ª série do ensino médio em uma escola pública estadual do estado de São Paulo. Queremos entender em que medida as atividades propiciam o uso de diversas representações semióticas de forma que os alunos obtenham uma maior compreensão do objeto matemático que subjaz às suas representações. Estamos certos de que não há como aferir de maneira objetiva e através de apenas uma aplicação se nossas atividades propiciam uma melhor compreensão de um objeto matemático. Todavia, procuramos indícios de que elas propiciam autonomia em realizar conversão entre registros semióticos no intento de que o uso de mais de uma representação ajude os alunos a não confundir um objeto matemático com sua representação.

Por fim se encontram nossas conclusões. Todos os gráficos presentes nesta dissertação, salvo menção contrária, foram criados através do software de geometria dinâmica Geogebra⁶. Trata-se de um *software* gratuito com diversos recursos que podem auxiliar o ensino de geometria, álgebra, funções entre outros conteúdos.

6 Disponível para download gratuito no site: www.geogebra.org

1 O INFINITO NA MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

Se versamos sobre Sequências e Séries, por que tratar do infinito? Porque tanto uma sequência pode ter infinitos termos quanto uma série poder ter infinitos termos somados. Ainda que o professor não se aprofunde em aspectos filosóficos ou explore algum paradoxo em sala de aula, é importante que esteja bem preparado para reconhecer as dificuldades e os desafios que a ideia de infinito traz consigo. A primeira dificuldade, tratando de séries, seja o fato de somar infinitas grandezas não necessariamente torna infinito o resultado desta soma. Pensando do ponto de vista do aluno, que não tem como observar um processo infinito, tão pouco um infinito em ato⁷, é importante que o professor desenvolva um trabalho que não se restrinja ao formalismo matemático e que se possa desenvolver uma intuição sobre o assunto.

Afinal, em quais momentos do ensino básico em Matemática, os alunos têm contato com o infinito?

Já no 1º semestre do 6º ano (ciclo II do ensino fundamental), o “Currículo do Estado de São Paulo” (SÃO PAULO, 2011, p.57) prevê o conteúdo “Números naturais”; é somente na 1ª série do ensino médio que o currículo (ibidem, p.65) traz o conteúdo “Conjuntos numéricos”. Entretanto, acreditamos que muitos alunos já tenham, antes de chegar no 6º ano, uma noção intuitiva de que podem começar a contar do zero até o número que quiserem. São limitados talvez ao chegarem em um número cujo nome não saibam. Idealmente, sempre é possível somar mais 1 a um número qualquer. Isto não deixa de ser um contato com o conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$ e, logo, com a noção de infinito como algo ilimitado.

Outro infinito vem da densidade de um intervalo numérico. Por exemplo, no intervalo limitado $[a;b]$ contido no conjunto dos números reais, com $b > a$ quaisquer, temos infinitos números. Esta ideia é importante no 9º ano do ensino fundamental, pois neste espera-se desenvolver a habilidade de utilizar números irracionais através de aproximações com números racionais (ibidem, p.63). Pode-se aproximar um número irracional cercand-o com um intervalo; podemos proceder diminuindo até um tamanho determinado este intervalo de forma que sempre contenha o número irracional e escolher os extremos do intervalo como limitante superior e limitante inferior do número irracional. Independentemente do método, o fato dos segmentos de reta serem densos é um outro aspecto da ideia de infinito presente no ensino

7 Também conhecido por infinito real ou infinito completo.

básico. Na verdade, este processo que narramos acima pode envolver dois infinitos diferentes. O infinito em ato que vem do fato do segmento ter (em ato) infinitos pontos e o infinito em processo (ou potencial) que vem do fato de podermos, indefinidamente continuar obtendo aproximações de um número irracional com quantas casas decimais quisermos.

O infinito em ato, conforme vemos no recorte histórico do próximo capítulo, se mostrou um conceito difícil de aceitar. Pode-se pensar uma circunferência como um polígono regular de infinitos lados, ou seja, infinito como resultado de um processo e não apenas um processo em si. Outro exemplo vem da geometria fractal. Nesta, há um processo de formação do fractal, mas o fractal em si já é o resultado de um processo infinito. Além disso, neste tema há um aspecto estético que pode atrair a atenção dos alunos. Entretanto, não o abordamos em detalhes nesta dissertação. Na atividade 9 do capítulo 5 incentivamos a consulta de autores cujas dissertações versam sobre este tema também do ponto de vista educacional.

Voltemos à ideia de contagem. Podemos terminar de contar todas as estrelas do universo? Se são finitas pode ser uma contagem demorada, mas a contagem é possível. E se as estrelas formassem um conjunto infinito? Ainda podemos contá-las? Bom, não se pode começar com 1, 2, 3, 4, ... e chegar em ∞ . A primeira razão para não chegar ao fim é que a vida é finita e também porque o infinito não é um número. E é uma confusão comum que os alunos do ensino básico pensem no infinito como um número. Simbolizamos a ideia de infinito, mas não o tratamos como número visto que incluí-lo nas regras da álgebra geraria problemas. Para citar um exemplo, as equações $2^\infty = \infty$ e $3^\infty = \infty$ são verdadeiras, todavia implicam em $2^\infty = 3^\infty$; como $\infty \neq 0$, então $2=3$. Esta é uma contradição simples para mostrar em sala de aula. Ainda, o que podemos afirmar sobre o “número” $\infty^{1/\infty}$? É igual a 1 ou igual a ∞ ? Mudando um pouco a pergunta inicial, podemos enumerar infinitos elementos de um conjunto? A resposta é: depende da cardinalidade do conjunto⁸. Pode ser possível numerar um conjunto de infinitos elementos. Um exemplo clássico é a maneira que se enumerar o conjunto dos números racionais.

Uma forma de enumerar os números racionais.
Disponível em: https://simple.wikipedia.org/wiki/Countable_set

8 Para os argumentos concernentes a Análise Real deste capítulo, consultamos Lima (2004) e Maor (1991).

Todos os números racionais estão listados neste diagrama e as setas indicam a ordem para enumerar cada número sendo que os números em vermelho representam números que já foram contados, ou seja, redundâncias. Dizemos que $1/1$ é o primeiro número, $2/1$ é o segundo, $1/2$ é o terceiro, $1/3$ é o quarto e seguindo as setas é possível associar todos os números racionais com os números naturais. Nem todos os conjuntos infinitos podem ser enumeráveis. O conjunto dos números reais é um exemplo. Mas o que significa ser não enumerável? No caso dos números racionais, por mais que, em princípio, não se saiba como numerar seus elementos, o diagrama acima nos ajuda a estabelecer uma regra que permite listar todos seus elementos. Para mostrar que não é possível enumerar os reais, vamos mostrar, por simplicidade, que não é possível enumerar os números do intervalo $]0;1[$. Suponha, por absurdo, que o conjunto de números em $]0;1[$ fosse enumerável. Na lista que criamos abaixo, não temos uma regra para associar o cada número natural ao seu correspondente real (se houvesse regra então seria enumerável). Queremos evidenciar um absurdo que haveria do fato de criar uma enumeração para $]0;1[$.

0 1	→	0 , 0 1 9 2 8 3 7 4 6 5 6 7 5 8 4 9 3 0 2 1 ...
0 2	→	0 , 6 3 8 9 0 1 7 3 3 4 9 9 1 0 3 7 5 0 7 7 ...
0 3	→	0 , 1 1 0 3 6 0 3 7 9 9 6 7 2 9 1 7 7 8 5 9 ...
0 4	→	0 , 4 4 9 2 7 4 0 5 6 7 2 7 6 4 9 0 2 7 8 5 ...
0 5	→	0 , 9 8 4 7 5 9 6 2 8 8 9 4 6 6 2 0 0 2 8 4 ...
0 6	→	0 , 5 0 2 3 7 7 7 1 8 9 4 6 6 2 0 2 0 0 0 2 ...
0 7	→	0 , 3 3 3 1 0 0 0 2 8 6 4 5 6 5 7 6 5 6 6 8 ...
0 8	→	0 , 7 0 9 9 8 4 7 4 3 4 6 3 4 1 2 4 1 2 3 4 ...
0 9	→	0 , 0 0 0 0 0 0 3 2 9 4 8 8 2 3 4 4 2 1 2 3 ...
1 0	→	0 , 8 3 0 1 0 6 2 6 6 7 4 8 9 3 6 5 9 0 9 3 ...
1 1	→	0 , 2 5 5 5 5 3 4 3 5 7 2 9 3 2 3 1 1 1 2 7 ...
1 2	→	0 , 7 2 6 3 2 2 3 8 8 8 8 3 8 8 8 1 3 2 2 1 ...
1 3	→	0 , 7 3 7 2 4 3 6 4 8 9 2 3 8 4 7 2 9 0 3 4 ...
1 4	→	0 , 9 1 8 2 3 8 4 6 3 4 8 9 0 1 8 3 6 0 8 0 ...
1 5	→	0 , 1 1 7 3 6 4 3 2 4 6 3 4 0 9 8 3 8 4 3 4 ...
1 6	→	0 , 5 3 2 6 2 6 4 7 6 3 2 8 7 6 0 1 7 2 4 7 ...
1 7	→	0 , 0 0 1 0 0 2 1 3 2 4 4 5 4 7 5 3 2 7 6 4 ...
1 8	→	0 , 1 2 1 2 5 3 3 2 8 9 4 7 2 3 9 4 3 3 7 7 ...
1 9	→	0 , 0 4 5 3 4 7 3 8 4 3 6 3 2 2 3 4 8 7 2 4 ...
2 0	→	0 , 4 9 3 4 1 0 8 3 7 4 1 0 8 3 4 0 9 2 8 4 ...
⋮		⋮

Eis um esboço da nossa lista de números $]0;1[$ numerados. Podemos mostrar que, independentemente da lista que se crie, nunca será possível enumerar todos seus números. Sempre haverá um número que está fora da lista. Como encontrar este número fora da lista? Criamos um número x cuja n -ésima casa decimal seja igual à n -ésima casa decimal do n -ésimo número somado uma unidade caso o dígito seja 0,1, ..., 8 e atribuímos valor 0 caso o dígito seja 9. Por esta regra, o número x é:

x	→	0 , 1 4 1 3 6 8 1 5 0 8 3 4 9 2 9 2 3 4 3 5 ...
-----	---	---

Veja que o número x não pode ser igual a nenhum dos 20 primeiros números de nossa lista, pois garantimos que tem um dígito diferente de todos eles. E, se continuarmos este raciocínio para os infinitos números listados, fica claro que x não pertence à lista. Então pode-se pensar que apenas um elemento sempre fica de fora da lista. Mas não é assim. Pode-se criar infinitos números só mudando a regra de como se modifica os elementos da diagonal de uma lista qualquer. Porém, para nossa conclusão, é suficiente mostrar que há um número que não foi listado. Isto vai contra nossa suposição de que todos os elementos de $]0;1[$ já estavam enumerados, ou seja, temos uma contradição. Logo, não há modo deste conjunto ser numerado e, tão pouco o conjunto dos números reais.

Este argumento que usamos se chama “Diagonal de Cantor”⁹, em homenagem a Georg Cantor (1845-1918 d.C.) que demonstrou que o conjunto dos racionais é enumerável (pode ser colocado em correspondência com o conjunto dos números naturais) enquanto que o conjunto dos números reais é não-enumerável (EVES, 2004, p.663-665). Podemos afirmar que o infinito do conjunto dos reais é maior que o infinitos dos números racionais por causa deste argumento.

Entretanto, nem sempre as representações dos conjuntos numéricos que se estudam na 1ª série do ensino médio são fiéis a este resultado. Encontramos alguns diagramas de Venn que podem levar os alunos a pensar que são poucos os números irracionais sendo que na verdade ocorre o contrário: a cardinalidade (números de elementos) do conjunto dos números irracionais é maior que a cardinalidade do conjunto dos números racionais. Um teorema simples da disciplina Análise Real nos mostra que podemos colocar todos os números racionais da reta real em um intervalo de tamanho tão pequeno quanto se queira. O restante da reta é preenchida com números irracionais. Não queremos nos aprofundar muito nesta questão,

Exemplo de diagrama de Venn para conjuntos numéricos. Acessado em: 24 jul. 2015. Disponível em: <http://www.matematiques.com.br/image/conjnum2.bmp>

9 v. ref. (OS INFINITOS DE CANTOR, 2010). O mesmo recurso educacional multimídia está disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1120> Acessado em: 9 ago. 2015. Trata-se de um vídeo em que um ator representando o próprio Cantor explica ao seu amigo como um infinito pode ser maior que outro infinito.

porém é importante alertar os alunos sobre equívocos que este tipo de representação pode comunicar. Não apenas raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos e o número π são irracionais, mas dado um número irracional y e um número racional r , $r+y$ é um número irracional e, caso $r \neq 0$, $r.y$ também é irracional.

O infinito não é um conceito intuitivo e gera consequências que precisam ser bem explicadas visto que em nossa experiência cotidiana não observamos processos, de fato, sem fim. Podemos acreditar que o sol sempre vai nascer amanhã (ainda que entre nuvens). Os astrônomos porém, estudando o ciclo de vida das estrelas, nos garantem que o sol não durará para sempre; quando seu combustível acabar, deixará de brilhar¹⁰. Dentre os paradoxos gerados pelo infinito, podemos citar o Hotel de Hilbert¹¹. Um hotel comum não pode aceitar mais hóspedes quando está cheio. Mas se o hotel for infinito, ainda que esteja cheio, pode sempre aceitar um ou até mesmo infinitos (enumeráveis) hóspedes a mais apenas pedindo aos atuais hóspedes que mudem de quarto dentro do hotel. De certo que não se trata de uma história que pode ser confirmada de forma empírica. Isto é mais um argumento que mostra como o infinito costuma confundir o senso comum. E pode ser um tema realmente instigante aos alunos.

10 Estima-se que a vida na Terra não será mais viável daqui a 1,5 bilhão de anos por causa do gradual esgotamento de hidrogênio do Sol. Para mais detalhes, vide a matéria da revista Superinteressante edição 115. Disponível em: <http://super.abril.com.br/tecnologia/a-morte-do-sol> Acessado em: 09 ago. 2015.

11 À primeira vista, pode parecer difícil que tratar do infinito com o paradoxo do Hotel de Hilbert no ensino básico. Entretanto, a compreensão desta história pode ser facilitada o uso de objetos de aprendizagem. v. ref. (HOTEL DE HILBERT, 2010). Trata-se de um vídeo em que um funcionário de um hotel infinito explica como faz para receber mais hóspedes ainda que o hotel esteja sem quartos disponíveis. O mesmo recurso educacional multimídia está disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1117> Acessado em: 9 ago. 2015.

2. SEQUÊNCIAS E SOMAS INFINITAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, gostaríamos de situar o nascimento e o desenvolvimento das ideias de sequências de séries. Isto é relevante para o professor de Matemática na medida em que pode mostrar aos alunos que as ideias em Matemática têm um aspecto social com homens e mulheres que perseguiram problemas e, por vezes, nos surpreendem pelos caminhos que trilharam para encontrar uma resposta. A história, ao revelar a trajetória e/ou a heurística de um resultado, pode ajudar a desmistificar o fazer matemático e desconstruir o mito de que precisa ser um gênio para descobrir fatos novos na área. Podemos perceber em nossa experiência docente muitos alunos que acreditavam que a Matemática que aprendem sempre foi do jeito que é atualmente (notações, conteúdos, algoritmos e etc.) e que não há nada de novo para ser descoberto em Matemática. Estas crenças podem derivar de uma ausência da história da Matemática durante as aulas.

Ainda nos lembramos de uma frase proferida por um professor no nosso primeiro ano de graduação: “Você precisaria de mais de uma vida para ler tudo que é publicado de novo em Matemática durante um único ano”. Acontece que muito do que é produzido não costuma ser de fácil leitura nem para recém-graduados em Matemática. Além disso, poucos resultados se tornam célebres a ponto de ganhar a atenção dos jornais. Logo, a história da Matemática é um recurso que traz à tona este aspecto humano do fazer matemático.

Nossa exposição procede de maneira cronológica: dos autores mais antigos aos mais contemporâneos. Após termos concluído a escrita deste capítulo (cujo escopo principal é o infinito, as sequências e as séries), percebemos que existem alguns assuntos que vão além do objetivo inicial. Cremos que estes enriquecem o capítulo sem perda de foco dos temas principais, portanto, decidimos mantê-los.

Começamos pela Matemática egípcia. Há um papiro egípcio que tem sua data estimada em 1650 a.C. e que é uma transcrição feita pelo escriba Ahmoses de um trabalho ainda mais antigo (entre 2000 a.C. e 1800 a.C.). Este já continha um problema que hoje pode ser reconhecido como uma soma de PG. O papiro de Rhind, como o conhecemos hoje, é uma compilação de 84 problemas de Matemática. O 79º problema, está expresso da seguinte forma (GONZÁLEZ-VELASCO, 2011, p.196):

Problema 79 do papiro de Rhind. Fonte: Robins e Shute, *The Rhind mathematical papyrus, an ancient Egyptian text*, The British Museum Press, London, 1987, 1998. apud GONZÁLEZ-VELASCO, 2011, p. 196.

Traduzindo:

Uma escala		Casas	7
1	2801	Gatos	49
2	5602	Ratos	343
4	11204	Spelt ¹²	2301
Juntos	19607	Hekat ¹³	16807
		Juntos	19607

Os números à direita são potências de 7 exceto 2301 que acredita-se ser um erro de cópia ($7^4 = 2401$) e o número 19607 que é a solução do problema. O problema em si não é explicitado, mas como $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19607$, podemos deduzir que é seja do seguinte tipo: em um povoado há 7 casas, em cada casa há 7 gatos, para cada gato há 7 ratos e assim por diante. Já a coluna da esquerda auxiliaria a fazer o cálculo o produto 7×2801 através de uma técnica chamada multiplicação por duplicação. Segundo Gonzáles-Velasco (2011, p.197), a tabela da esquerda sugere que a resposta para este problema foi obtida com o seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned}
 7 &= 7 \\
 7 + 7^2 &= 7 (1 + 7) = 56 \\
 7 + 7^2 + 7^3 &= 7 (1 + 56) = 399 \\
 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 &= 7 (1 + 399) = 2800 \\
 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 &= 7 (1 + 2800) = 19607
 \end{aligned}$$

¹² Uma espécie de trigo de grão duro.

¹³ Um medida de volume usado para grãos. É um pouco menor que 5 litros.

Não há como ter certeza que foi este o método utilizado. Ainda assim, deste problema milenar pode surgir uma maneira criativa de introduzir ou contextualizar o assunto de soma de PG em sala de aula.

Antes de começarmos a versar sobre a história das séries infinitas, começamos por alguns recortes históricos da ideia de infinito.

Segundo Maor (1991, p.2) “O infinito matemático começa com os gregos”. Antes destes, outros povos da antiguidade já haviam desenvolvido muitas técnicas para problemas práticos: medidas de comprimentos, áreas, volumes, tempo. Com os gregos a Matemática passou a ter problemas que escapavam das necessidades cotidianas ou do comércio. Foram os primeiros, até onde sabemos, a reconhecer a existência do infinito.

Se nos permite uma digressão, é de se notar termo que grego ἄπειρον nem sempre significa “sem fim, infinito, incontável, inextrincável” conforme se encontra no dicionário grego *Bailly* (2000, p.209). Encontramos na Wikipédia¹⁴ que para Anaximandro, o princípio de todas as coisas é o *ápeiron* traduzindo este termo como “ilimitado”. Mas Semerano (2004, p.51) discorda desta tradução para o termo: “As digressões de Aristóteles sobre o ἄπειρον, entendido como 'ilimitado', não têm clara pertinência com o elemento originário concebido por Anaximandro;”¹⁵ Semerano (2004, p.49-50) não exclui que em outras obras o termo grego possa significar “infinito”. Entretanto, observando vários trechos do Gênesis¹⁶, ele encontra a palavra *'afar* que significa “pó da terra” e relaciona este termo com o semítico *'apar* e com o acádio *'eperu* (pó, terra); todos estes têm uma assonância com o a palavra grega ἄπειρον. Logo, conclui (Ibid., p.60) que Anaximandro se refere ao pó de terra, não ainda organizado, como a substância material que deu origem ao universo.

Fora do contexto de Anaximandro, queremos mostrar o ponto de vista de Aristóteles de Estágira (384-322 a.C.) sobre o infinito (ἄπειρον). Para tal, utilizamos uma obra de Thomas Heath chamada “*Mathematics in Aristotle*” onde o autor escolheu trechos do estagirita concernentes à Matemática e os comenta; nos detemos no capítulo sobre o infinito (p. 102-113); consultamos também a tradução italiana de Antonio Russo (2008) e a de Marcello Zanata (1999). No livro III da Física, Aristóteles afirma que o movimento e o tempo são finitos ou infinitos e,

¹⁴ <https://pt.wikipedia.org/wiki/Anaximandro>

¹⁵ “Le soste esplicative di Aristotele sull'ἄπειρον, inteso come 'illimitato', non hanno chiara pertinenza com l'elemento originario concepito da Anassimandro;” (SEMERANO, 2004, p.51)

¹⁶ Gen. 28, 14; Gen. 13, 16; Gen. 22, 17.

portanto, convém a quem se ocupa da natureza (περὶ φύσεως) refletir sobre o infinito¹⁷.

E a crença de que pode haver algo de infinito ou ilimitado vem de 5 considerações: do tempo (este, de fato, é infinito); de divisão de grandezas (matemáticos também usam a noção de infinito); se o surgimento e a ruína não se fazem notar, isto só pode ser verdade supondo que a fonte das coisas é infinita; o limitado sempre deve chegar em algum limite, portanto segue que não pode haver limite se uma coisa deve sempre tender a uma outra como seu limite; mas o motivo mais importante e fundamental está no fato que isto suscita dificuldade no pensamento de todos e por isso, não podendo suprimir o infinito do pensamento, também o número parece ser infinito, e assim também as grandezas matemáticas bem como o que está fora do céu. (Arist. Física III, 203b, 15-25, tradução nossa)

Há um trecho em que o filósofo deixa clara a necessidade do infinito visto que:

Se o infinito não existisse, muitas impossibilidades surgem: o tempo terá um começo e um fim, grandezas não serão divisíveis em outras grandezas, e o número não será infinito. Mas já que é evidente, quando o caso é colocado como acima, nenhuma das possibilidades parecem ser admissíveis, precisamos de um árbitro; do qual resultará claro que há um sentido que o infinito existe e em outro sentido no qual ele não existe. (Arist. Física III, 206a, 6-14, tradução nossa)

Já em Aristóteles encontramos uma discussão sobre infinito atual e infinito potencial. Segundo ele, nenhuma grandeza (física ou corpo sensível) é atualmente infinita. O infinito só existiria potencialmente; e algo potencialmente infinito não pode se tornar atualmente infinito assim como um pedaço de material que é potencialmente uma estátua porque será, em algum momento, uma estátua. Heath (1970, p. 107) cita o comentário de Temístio (c.317-c.387 d.C.), um exegeta de Aristóteles, a este respeito:

No caso de um material para uma estátua, que é potencialmente uma estátua, existe um momento em que a estátua está terminada e se torna um todo completo. Naquele momento, a potencialidade cessa ou é destruída e a atualidade toma seu lugar. O mesmo não ocorre com o infinito. Sua potencialidade nunca termina; você pode sempre adicionar ou subtrair do infinito. Se pudermos supor que a

17 Arist. Física, III, 202b, 30-35.

potencialidade terminou e a coisa se tornou uma coisa atual, um todo completo, isto implicaria em algo fixo, algum estado ou forma; supor o infinito atual neste sentido seria impor-lhe barreiras ou limites e isto destruiria seu caráter infinito. Em resumo, se a 'potencialidade' no infinito chegasse a um fim, deixaria de ser infinito(...).

Em Heath (1970, p.112) vemos que a rejeição ao infinito atual se limita às grandezas físicas. O próprio estagirita esclarece este fato:

Assim, nosso argumento não pretende suprimir os estudos dos matemáticos porque se exclui a existência do infinito por acréscimo seja um infinito atual. Na verdade eles mesmos não precisam ou não fazem uso do infinito; eles apenas precisam de uma reta finita tão longa quanto quiserem; e dada uma proporção na qual a maior grandeza é cortada, ou grandeza de qualquer tamanho possa ser cortada na mesma proporção. Portanto meu argumento não faz diferença para matemáticos para o propósito das suas demonstrações; nem lhes importa se existem grandezas infinitas entre as grandezas existentes. (Arist. Física III, 207b, 27-34, tradução nossa)

Podemos conjecturar que a rejeição ao infinito atual seja motivada pelo fato da Matemática grega não dispor de uma notação algébrica que a permitisse representar quantidades desconhecidas. Os gregos dispunham de uma álgebra geometrizada e isto, conjecturamos, não propiciou a criação de maneiras de lidar com o infinito atual. Esta dificuldade de aceitação é conhecida como *horror infiniti*.

Ainda no período clássico, nossa revisão histórica estaria claudicante se não tratássemos de Zenão (Ζήνων) de Eleia (c.490-c.430 a.C.). Foi um filósofo pré-socrático discípulo de Parmênides de Eleia. As principais fontes de suas ideias estão na “Física”, de Aristóteles (VI, 239b-240a) e no diálogo Parmênides, de Platão. É conhecido pelos paradoxos que elaborou para mostrar que o movimento não existe e seria apenas uma ilusão. Curiosa a maneira que Aristóteles começa a apresentar quatro destes paradoxos: “São quatro os raciocínios de Zenão a respeito do movimento os quais deixam de mau humor aqueles que os tentam resolver (...)”¹⁸. Vamos nos deter em apenas dois deles: o paradoxo da dicotomia e no paradoxo de Aquiles e a tartaruga; Aquiles é o nome do herói mítico do poema épico grego “Ilíada”. Os nomes que atribuímos a estes paradoxos não são dados por Aristóteles.

18 Arist. Física, VI, 239b, 10. tradução nossa.

Ainda na “Física”, se referindo ao primeiro paradoxo: “O primeiro tem por escopo provar a inexistência do movimento pelo fato que o objeto movido deve chegar à metade antes de atingir o final”¹⁹. E não informa mais nenhum detalhe deixando que o leitor deduza o que vem em seguida. O que se entende por paradoxo da dicotomia é uma situação em que um corpo sai em linha reta partido de A para chegar em B sendo que antes disso, deve atingir o ponto C que é a metade do caminho AB. Depois de chegar em C, para finalmente chegar em B, deve atingir o ponto D que é a metade do caminho CB. Continuando este raciocínio, Zenão concluiria que é impossível percorrer infinitos trechos (cada vez menores) do caminho, logo o movimento é impossível. Esta é uma interpretação visto que Aristóteles não relatou maiores detalhes sobre o paradoxo. Em notação Matemática, podemos representar este problema pela série geométrica infinita, sendo L o comprimento total do caminho:

$$S = L/2 + L/4 + L/8 + L/16 + \dots + L/2^n + \dots$$

Uma segunda interpretação diz que para chegar a atravessar uma sala é necessário chegar na metade do caminho. Mas antes de chegar nesta metade, é preciso percorrer metade da metade do caminho (ou seja, $\frac{1}{4}$ do caminho). Mas antes ainda, deve-se percorrer a metade da metade da metade (ou seja, $\frac{1}{8}$ do caminho). Continuando este raciocínio, como são infinitos os trechos a percorrer, o movimento não seria possível. Lembrando que esta é apenas outra interpretação derivada da descrição do estagirita.

Representação do paradoxo da dicotomia. Acessado em: 25 jul. de 2015. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno%27s_paradoxes#/media/File:Zeno_Dichotomy_Paradox.png>

¹⁹ Arist. Física, VI, 239b, 11-13. tradução nossa.

Já o paradoxo de Aquiles e a tartaruga conclui simplesmente que o mais lento não será jamais alcançado pelo mais veloz. Para Aquiles alcançar a tartaruga que se afasta, deve primeiro chegar no ponto de onde a tartaruga partiu (digamos T_1). Entretanto, quando Aquiles chega em T_1 , a tartaruga já se encontra em T_2 ainda que seja mais lenta que Aquiles. Quando Aquiles finalmente chega em T_2 , a tartaruga está em T_3 . Portanto, continuando este raciocínio, Zenão concluiria que como são infinitos os trechos necessários para alcançar a tartaruga, o movimento não seria possível.

Apesar de não se citar qual distância Aquiles está da tartaruga e, em nenhum momento do texto aristotélico ser relatada uma corrida entre os dois personagens, é comum ouvir uma versão em que os dois estão em uma corrida e Aquiles permite que a tartaruga inicie na metade do trajeto. Quando Aquiles chega no ponto de partida da tartaruga ($1/2$ do caminho), esta já percorreu metade da distância que lhe faltava para a linha de chegada (andou um $1/4$ do caminho). Em seguida, quando Aquiles chegou a $1/2 + 1/4$ do caminho, a tartaruga já percorreu mais metade do caminho que lhe faltava (andou $1/8$ do caminho). Logo, ainda está na frente de Aquiles. Continuando este raciocínio, chegamos à mesma conclusão: que o herói mítico jamais alcançaria a tartaruga. Pensando num contexto de sala de aula, esta versão é mais amigável aos alunos, para que entendam mais o argumento com mais facilidade.

Lembramos que estes paradoxos de Zenão foram criados para argumentar indiretamente, por contradição (*reductio ad absurdum*), que o movimento não existe. Ainda que saibamos que o movimento existe independente de argumentos, estes devem ser refutados com contra-argumentos.

Mas, uma vez que o paradoxo foi entendido, como esclarecê-lo à luz do conhecimento atual? Pensando na situação de corrida que descrevemos acima, pode-se argumentar que Aquiles conseguiria alcançar a tartaruga após infinitas aproximações. Podemos escrever uma série para Aquiles e outra para a tartaruga. Seja L o tamanho da pista de corrida:

$A = L/2 + L/4 + L/8 + L/16 + \dots + L/2^n + \dots$, a série de deslocamentos de Aquiles

$T = L/4 + L/8 + L/16 + \dots + L/2^m + \dots$, a série de deslocamentos da tartaruga

Deve-se lembrar que a tartaruga começa $L/2$ de distância à frente de Aquiles. Assim sendo, ainda que aquela esteja sempre na frente, este consegue alcançá-la quando ambos estão na linha de chegada. As duas séries geométricas são convergentes, sendo $A=L$ e $T=L/2$.

Representação do paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Acessado em: 25 jul. de 2015. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno's_paradoxes#/media/File:Zeno_Achilles_Paradox.png>

Outra forma de encarar o problema original é estabelecer velocidades constantes para Aquiles e para a tartaruga bem como o valor da vantagem inicial que se dá à esta. E então desenhar o gráfico da posição em função do tempo para ambos no mesmo sistema de coordenadas. Se a velocidade de Aquiles for maior do que a da tartaruga, ele não apenas a alcança como também a ultrapassa. De fato,

Um exemplo de representação gráfica do movimento de Aquiles e da tartaruga. Fonte: Elaborada pelo autor.

Aquiles passa por infinitos pontos onde a tartaruga esteve até alcançá-la. Mas basta um simples olhar para a representação gráfica do movimento dos dois personagens para perceber que isto não suscita nenhum problema ao herói da guerra de Troia para ultrapassar uma tartaruga.

Para mais detalhes sobre Zenão de Eleia, recomendamos o verbete “Zeno's Paradoxes” escrito por Dowden²⁰, onde encontramos um conteúdo amplo, com muitas referências e discussões sobre os paradoxos e sua repercussão em outros filósofos.

Na obra “Os Elementos” de Euclides de Alexandria (fl.300a.C.), obra dividida em 13 volumes que compilou a maior parte do conhecimento matemático até então e se tornou referência para ensino de geometria por mais de 2000 anos, encontramos uma proposição que nos é de especial interesse. Trata-se da proposição 35 do livro IX. Transcrevemo-la abaixo. O que está entre colchetes é adição nossa para facilitar o entendimento da proposição:

Se tantos números quanto quisermos são continuamente proporcionais, e se subtraem do segundo e do último número [uma quantidade] igual ao primeiro, então o que sobrou do segundo está para o primeiro [número], assim o que sobrou do último estará para [a soma de] todos os anteriores a ele.

(EUCLIDES, 1994,p.236, tradução nossa)

Os números continuamente proporcionais são, na linguagem atual, os termos de uma progressão geométrica, visto que $a_2/a_1 = a_3/a_2 = \dots = a_n/a_{n-1} = a_{n+1}/a_n$. Heath (1908b, p.421) comenta que “Esta proposição é talvez a mais interessante dos livros aritméticos, visto que fornece um método muito elegante para somar qualquer série de termos em progressão geométrica”.

Observando a proposição de Euclides, vamos escrever, semelhantemente a Heath (Ibid.), em notação moderna a tese desta proposição em um modo que nos é muito familiar:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}$$

Sejam $a_1, a_2=a_1q, a_3=a_1q^2, \dots, a_n=a_1q^{n-1}, a_{n+1}=a_1q^n$ os termos de uma PG e seja $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ a soma dos n primeiros termos desta PG. A equação acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{a_1q - a_1}{a_1} &= \frac{a_1q^n - a_1}{a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}} \\ \Rightarrow \frac{a_1(q - 1)}{a_1} &= \frac{a_1(q^n - 1)}{S_n} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

20 The Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <<http://www.iep.utm.edu/zeno-par/>>

que é uma expressão frequentemente encontrada nos livros didáticos de Matemática. Vale lembrar que, não havendo a notação algébrica que dispomos hoje, Euclides partiu da hipótese e chegou à tese desta proposição com argumentos geométricos.

O último personagem da antiguidade que gostaríamos de tratar nesta revisão histórica é Arquimedes de Siracusa (c.287-212a.C.). Foi matemático, físico e também um engenheiro militar. Suas obras matemáticas são mais conhecidas do que os aparatos militares que neutralizaram o poderio romano frente ao cerco que faziam a sua cidade natal. Apesar de Siracusa dispor de uma grande muralha e de estar localizada em uma região cujo relevo lhe favorecia, Arquimedes fez a diferença durante sua defesa. No contexto da 2ª Guerra Púnica, os romanos, comandados por Ápio Cláudio e Marcos Cláudio Marcelo, vieram em superioridade numérica, eram militarmente mais experientes que os gregos e esperavam capturar a cidade em 5 dias; só após 2 anos de cerco e com a ajuda de um desertor²¹ que Siracusa caiu nas mãos dos romanos e foi saqueada. De todos os autores responsáveis pelo que sabemos sobre Arquimedes enquanto personagem histórico, dois deles se destacam: Políbio de Megalópolis (c.200-c.118 a.C.) militar e historiador que versa especialmente sobre a história de Roma entre 264 a.C. à 146 a.C.; e Plutarco (46-120 d.C.) conhecido pelas suas obras filosóficas e, principalmente, por suas biografias de pessoas célebres da antiguidade. Enquanto o primeiro destaca as proezas militares de Arquimedes, é do segundo que vem as histórias caricatas e engraçadas e as versões do seu óbito.

Reconhecemos que este aspecto se afasta do tema central desta dissertação. Porém, do ponto de vista do ensino, pode ser uma boa oportunidade de criar uma discussão ou conscientização do papel da Matemática e da Física para a criação de equipamentos militares. Pode-se tratar, em sala de aula, o fato que o uso de Matemática não serve apenas para a criação de jogos de videogame ou celulares (para a indústria do entretenimento em geral), mas a segurança da população, em caso de guerra, pode ser aumentada através de seu uso em engenharia militar. Durante o assédio à Siracusa, Arquimedes mostrou que o potencial de seu gênio matemático, aliado ao desejo de sobrevivência do seu povo, é capaz de resistir a um dos exércitos mais bem preparados de seu tempo.

Dentre as obras matemáticas do siracusano estão “A quadratura da parábola”,

21 Políbio, História, VIII, 37.

“Sobre a medida do círculo”, “Sobre a esfera e o cilindro”, “Sobre as espirais”, “Sobre conoides e esferoides”, “*Stomachion*”, “O problema bovino”, “O contador de areia” e “O método”. Este último, considerado perdido, foi encontrado em 1906 pelo dinamarquês J. L. Heiberg (1854-1928 d.C.). Heath (1912, p.5) nos narra que Heiberg soube da existência de um manuscrito em 1899 através do catálogo da **biblioteca** do “patriarcado Greco-Ortodoxo de Jerusalém” **localizada em Constantinopla** (atual Istambul). O autor do catálogo, Papadopulos Kerameus, relata um palimpsesto (ou seja, um pergaminho ou papiro que foi lavado ou raspado para ser usado novamente) com conteúdo matemático e que devia conter algo sobre Arquimedes. Em 1906, Heiberg foi à Constantinopla, inspecionou e fotografou o manuscrito que estava legível em sua maior parte apesar de ter sido lavado para escrever um eucolégio (livro de preces). Mas, afinal de contas, o que faz desta obra recuperada tão especial dentre as outras de Arquimedes? Deixemos o próprio Heath (1912, p.6-7, tradução nossa) nos explicar:

(...) Nada é mais característico dos trabalhos clássicos dos grandes geômetras gregos, ou mais tentador, do que a ausência de qualquer indicação dos passos pelos quais eles seguiram para a descoberta dos seus grandes teoremas. Da forma que chegaram a nós, estes teoremas são obras de arte acabadas que não deixam nenhum traço de qualquer estágio penoso [durante o processo de descoberta] e nenhuma dica do método pelo qual eles foram desenvolvidos. Podemos apenas supor que os gregos tinha algum método ou métodos de análise dificilmente menos poderosos do que os da análise moderna; além disso, eles parecem ter se esforçado para limpar todos os traços dos meios usados e todas as tentativas sem sucesso, por assim dizer, antes de se permitirem publicar os resultados obtidos tendo primeiro seguido uma cuidadosa reflexão sobre as provas científicas definitiva e rigorosamente estabelecidas. Uma exceção parcial é-nos dada pelo “Método”; aqui temos uma espécie de levantar do véu, um olhar do interior da oficina de Arquimedes tal como era. (...)

Seus métodos lhe permitiam investigar ($\theta\epsilon\omega\rho\epsilon\acute{\iota}\nu$) teoremas, mas não prová-los ($\acute{\alpha}\pi\omicron\delta\epsilon\iota\kappa\acute{\upsilon}\nu\alpha\iota$).

N”A quadratura da parábola”, Arquimedes começa seu texto de maneira epistolar endereçada a Dositeus. Ele lamenta a morte de seu amigo Conon, mas nos faz saber que Dositeus também é versado em geometria e conhecia Conon. Sobre a quadratura da parábola, ele menciona que primeiro o descobriu por meio da mecânica e então o exibiu por meio da geometria (HEATH, 1897, p.233).

Veja que, entretanto, não sabíamos os detalhes heurísticos até a descoberta do “Método”. A obra matemática em si composta por 24 proposições, sendo que na 17ª a demonstração de que a área limitada por um arco de parábola QPq (P é o vértice parábola) e uma corda Qq²² mede quatro terços da área do triângulo ΔQPq. Nas outras 7 proposições restantes, o siracusano nos oferece uma segunda maneira de chegar ao mesmo resultado. Seja A a área do triângulo ΔQPq. Descobre-se que soma das áreas dos triângulos ΔqrP e ΔPRQ é igual a A/4. Construindo, de maneira similar, os triângulos de base qr, rP, PR e RQ, temos que a soma das áreas é igual a A/16. Podemos continuar este processo indefinidamente, com notação atual, obter a seguinte série:

$$A + A(1/4) + A(1/4)^2 + A(1/4)^3 + \dots + A(1/4)^n + \dots$$

Já na linguagem de Arquimedes, na proposição 23, está escrito (HEATH, 1987, p.249):

Dadas as áreas A, B, C, D, ... Z das quais A é a maior, e cada uma é igual a 4 vezes a próxima na ordem, então:

$$A + B + C + \dots + Z + (1/3)Z = (4/3)A.$$

Heath (1879, p.xlvii) nos chama a atenção para o fato que Arquimedes não usa a proposição 35 do livro IX d’“Os Elementos” para fazer a soma $A + A(1/4) + A(1/4)^2 + A(1/4)^3 + \dots + A(1/4)^n$, lidando com ela de maneira muito similar ao que se faz em livros didáticos (*text-books*).

Entretanto, ele não obtém o resultado através da fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG conforme fazemos hoje, pois esta fórmula depende do conceito de infinito atual. Arquimedes está inserido na cultura grega e, se lembrarmos do *horror infiniti* em Aristóteles (que claramente rejeita o infinito atual), é de se esperar que a comunidade de matemáticos contemporâneos a ele não apreciassem um

A quadratura da parábola. Fonte: Heath, 1879, p.249.

22 Esta **área** limitada por um arco de parábola QPq e uma corda Qq é chamada “segmento de parábola”.

argumento que envolvesse o infinito em ato; acredita-se também que o siracusano tenha estudado em Alexandria. Mas então, sem o uso do infinito em ato, como mostrar que a soma das áreas dos infinitos (em potência) triângulos resulta em $(4/3)A$? A saída escolhida foi usar duas vezes o argumento por absurdo: supor que o segmento de parábola mede mais que $(4/3)A$ e chegar em um absurdo e, depois supor que vale menos que $(4/3)A$ chegando em outro absurdo. Por sua habilidade em lidar com o infinito, sem estar em desacordo com o *modus operandi* de sua época, Arquimedes é considerado um dos precursores do Cálculo e um dos matemáticos gregos de maior destaque. Recomendamos, a quem se interessar, a leitura de uma abordagem para a quadratura da parábola que se inspira nas ideias de Arquimedes, mas faz uso de geometria analítica encontrada em Guidorizzi (2001, p.491-496).

Saindo da antiguidade, é possível afirmar que houve um declínio na produção de trabalhos originais durante a Idade Média, cujo início é datado com a queda do Império Romano do ocidente em 476 d.C. A cultura romana era mais prática e não incentivava estudos mais abstratos ou teóricos; outra razão para o declínio é o rigor lógico grego, apontado por Edwards (1979, p.78-79), que não permitia o uso de conceitos que não estivessem bem definidos. Ainda que este seja um traço distintivo da Matemática atual, pode ser que isto tenha atrapalhado os avanços em álgebra (afinal, como usar uma incógnita sem definir precisamente o que ela é?) e muitos dos avanços do Cálculo (que teve pouca formalização em seu nascimento) talvez demorassem mais para surgir se estivessem sob a pressão do rigor grego.

Muitas das obras dos autores gregos foram perdidos na Europa, porém, foram preservados pelos muçulmanos. Em 641 d.C., estes conquistaram Alexandria e entre 711 e 718 d.C conquistaram a península Ibérica sendo gradualmente expulsos desta até que em 1492 foi conquistada Granada, a última região de domínio árabe na península. Muitas das obras de autores gregos foram recuperadas através das traduções em árabe. Traduções do árabe para o latim começaram a surgir entre os séculos XII e o XIII (Ibid., p.77-78).

Entretanto, a Matemática árabe da Idade Média não se resumiu em estudar e preservar as obras gregas. O matemático Al-Haitam (c.965-1039 d.C) escreveu um tratado sobre ótica geométrica e estendeu alguns resultados das obras de Arquimedes. Aquele chegou a trabalhar com somas de cubos e potências quartas enquanto que este usou apenas soma dos primeiros naturais e soma de quadrados

(Ibid., p.83-84). Deve-se à cultura árabe a introdução dos algarismos hindo-arábicos na Europa; estes foram popularizados principalmente por Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170-c.1240 d.C.) em sua obra chamada *Liber Abbaci* (1202 d.C.).

Neste período, temos que o status do infinito atual continuou dominado pelas ideias de Aristóteles evitando-se o infinitamente grande ou considerando-se o potencialmente infinito em relação à divisão de um segmento. Entretanto, alguns pensadores da época discordavam em alguns pontos. Guilherme de Occam (ou, em inglês, William of Ockham) (c.1287-1347 d.C) afirma que “uma linha reta consiste em pontos atualmente (e não apenas potencialmente)” (BOYER, 1959, p.67); para Gregório de Rimini (c.1300-1358 d.C.) “não há auto-contradição envolvida na ideia do infinito atual (...)”(Ibid., p.69).

Em relação às séries, destacamos o trabalho de Nicole Oresme (c.1323-1382 d.C.), filósofo com obras em economia, matemática, física, astronomia e teologia; foi bispo de Lisieux (norte da França). No capítulo 3 desta dissertação, usamos sua demonstração, escrita em notação moderna, da divergência da série harmônica ($S=1+1/2+1/3+1/4+1/5+\dots$) publicada em sua obra *Quæstiones super geometriam Euclidis* em c.1360 (GONZÁLES-VELASCO, 2011, p.203).

Richard Swineshead (também chamado Suiseth)(séc. XIV), em sua obra *Liber calculationum*, propõe o seguinte problema:

Se durante a primeira metade de um intervalo de um tempo dado uma variação [de espaço] continua em uma certa intensidade [ou seja, velocidade constante], durante o próximo um quarto do intervalo [de tempo] dobra a intensidade, durante um oitavo [do intervalo de tempo] triplica a intensidade e assim *ad infinitum*; então a intensidade média para todo o intervalo será a intensidade de variação durante o segundo subintervalo (ou o dobro da intensidade inicial). (BOYER, MERZBACH, 2011, p. 241, tradução nossa)

Nos livros que consultamos, encontramos que este enunciado, usando notação moderna, é equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$$

Entretanto, conforme o texto do próprio Suiseth, isto só é verdade se a velocidade inicial V_1 é igual a 1. Há um resultado em cinemática demonstrando que

dado um intervalo de tempo T , e para cada sub-intervalo $t_1, t_2, \dots, t_n$ associamos uma velocidade constante $V_1, V_2, \dots, V_n$ respectivamente, tal que $t_1+t_2+\dots+t_n=T$, então a velocidade média é a média ponderada no tempo das velocidades. Logo, para este problema, usando notação atual, a expressão fica:

$$\begin{aligned}
 V_{média} &= \frac{V_1.t_1 + V_2.t_2 + \dots + V_n.t_n + \dots}{t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots} \\
 &= \frac{V_1.\frac{T}{2} + 2V_1.\frac{T}{2^2} + 3V_1.\frac{T}{2^3} + \dots + nV_1.\frac{T}{2^n} + \dots}{\frac{T}{2} + \frac{T}{2^2} + \frac{T}{2^3} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots} \\
 &= \frac{V_1 T}{T} \left(\frac{1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2^2} + 3.\frac{1}{2^3} + \dots + n.\frac{1}{2^n} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots} \right) \\
 &= V_1 \left(1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2^2} + 3.\frac{1}{2^3} + \dots + n.\frac{1}{2^n} + \dots \right) = 2V_1
 \end{aligned}$$

A convergência da série do numerador e do denominador é absoluta.

Detalhes técnicos à parte, o próprio Suiseth chega à resposta correta. Entretanto, seu estilo prolixo bem como a ausência de diagramas ou referência à intuição geométrica, argumentando somente com o texto e com números, dificulta a compreensão de sua demonstração (BOYER, 1959, p.80). Oresme, por outro lado, demonstra o mesmo resultado usando uma representação geométrica que facilita compreensão (vide figura abaixo). No capítulo 5 desta dissertação, propomos uma atividade que faz uso desta representação.

Representação geométrica para a série de Suiseth para velocidade inicial igual a 1. Fonte: Edwards, 1979, p.92.

Oresme, além da solução da série acima, trata de séries similares como:

$$1.\frac{3}{4} + 2.\frac{3}{4^2} + 3.\frac{3}{4^3} + \dots + n.\frac{3}{4^n} + \dots$$

cujo resultado é $4/3$ (BOYER, MERZBACH, 2011, p. 241).

Segundo Edwards (1979, p.93), principal contribuição destes estudos sobre séries infinitas não reside nos resultados obtidos, mas pelo incentivo à aceitação de processos infinitos em Matemática, preparando o caminho para o século XVII, época em que mais técnicas aritméticas e algébricas estavam disponíveis.

Nosso recorte histórico não pretende ser exaustivo em relação ao infinito, Sequências e Séries. Até do século XVII temos vários desenvolvimentos que culminaram no Cálculo Diferencial e Integral; ainda não se trata do Cálculo formalizado como dispomos atualmente com épsilons e deltas. Mas as técnicas de Newton, Leibniz e vários outros matemáticos desta época abriram caminho para muitos resultados principalmente na Física. Para fechar o recorte histórico que escolhemos para esta dissertação, trataremos de algumas séries numéricas infinitas até Euler. Acreditamos que assim, o leitor tem à disposição um bom panorama sobre este tema.

Segundo Roque (2012, p.347), Bonaventura Cavalieri (1598-1647 d.C.), discípulo de Galileu, escreveu um método de cálculo usando a ideia de indivisíveis, pois “(...) uma linha é composta de pontos assim como um cordão é formado por contas; um plano é feito de linhas assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos assim como um livro, de páginas”.

Gilles de Roberval (1602-1675 d.C.), Pierre de Fermat (1601-1665 d.C.) e Blaise Pascal (1623-1662 d.C.) usaram o método dos indivisíveis para encontrar áreas limitadas, mas com uma modificação: em vez de lidas com infinitos segmentos de reta, usavam retângulos infinitamente finos e em quantidade indefinida em que a diferença entre a área procurada e a soma das áreas dos retângulo é tão pequena quanto se queira (ROQUE, 2012, p.348).

Apresentamos um exemplo do raciocínio escrito em notação atual. Para calcular a área da região limitada pelo eixo das abscissas e a curva $y=x^3$ no intervalo de $[0; b]$ (no caso exemplificado pela próxima figura usamos $b=2$) podemos cercar a curva com retângulos que sobrestimam sua área (em vermelho) e por retângulos

que subestimam sua área (em azul). Veja a figura abaixo²³:

Vamos calcular a área dos retângulos em vermelho. Se são n o número de retângulos todos com base de mesma medida ($d = \frac{b}{n}$), temos que a área destes retângulos é dada pela soma:

$$A = d \cdot d^3 + d \cdot (2d)^3 + d \cdot (3d)^3 + \dots + d \cdot (nd)^3 \\ = d^4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$$

Para continuar, é necessário conhecer uma expressão que facilite o cálculo da soma dos cubos. Há uma maneira sistemática de descobrir uma expressão para a soma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, para todo k natural. Para $k=3$ e lembrando que $d=b/n$:

$$A = d^4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \\ = d^4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ = \frac{b^4}{4} \frac{n^2(n+1)^2}{n^4} = \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Retângulos que subestimam e sobestimam a área sob a curva $y=x^3$.

Veja que ao aumentar o muito número n de retângulos, a área resultante se aproxima da área procurada e o termo $(1+1/n)^2$ pode ser desconsiderado.

Um raciocínio semelhante pode ser feito para os retângulos que subestimam a área procurada, chegando a um resultado similar. Logo, a área procurada é igual a $b^4/4$. E, novamente, como há uma expressão para a soma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, para todo k natural, uma grande quantidade de curvas pode, por esse método, ter sua área obtida. Segundo Roque (2012, p.349) “por volta de 1636, Fermat já sabia que, para n racional e diferente de -1 , a área sob o gráfico de $y=x^n$ entre dois pontos O e B (a uma distância a de O) é dada por $a^{n+1}/(n+1)$ ”.

Esta técnica obtém a área de modo direto e não depende do comprimento do intervalo. Mas não há uma formalização que garanta este método. “Este é um

23 Esta figura foi obtida através do software geogebra, com um material dinâmico disponível em seu site: <http://www.geogebra.org/material/show/id/254255> Acessado em: 30 jul. 2015.

exemplo de 'arte da invenção', típica do contexto francês da época" (Ibid., p.350). Usa-se uma intuição geométrica e álgebra para obtenção de métodos de resolução. É uma quebra com a tradição grega em que tudo deveria ser definido e demonstrado.

Saltemos para o final do século XVII. Em 1672, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716 d.C.), polímata e célebre por suas obras em filosofia e matemática, encontrou Christiaan Huygens (1629-1695 d.C.), matemático holandês, em Paris e, deste encontro, Leibniz desenvolveu seu interesse por Matemática (GONZÁLES-VELASCO, 2011, p.204). No mesmo ano, foi-lhe proposto descobrir o resultado da seguinte série:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots$$

ou seja, uma série cujos termos são inversos dos números triangulares. Os números triangulares, a saber, podem ser gerados com a fórmula $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ para encontrarmos o k-ésimo número triangular.

O caminho que Leibniz usou para encontrar a resposta correta, igual a 2, não seria considerada satisfatória para os padrões de rigor atuais.

Uma maneira de chegar à convergência é mostrar o seguinte:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right] \end{aligned}$$

Veja que os termos intermediários desta série se cancelam e, quando $n \rightarrow \infty$, a série converge para 2.

De certo, as contribuições de Leibniz para o Cálculo mereceriam um capítulo próprio. A ele é atribuída a notação $\int$ para o operador integral, d/dx para o operador diferencial (sendo que a notação de ponto usada por Newton era considerada menos prática) e que $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ (BOYER, MERZBACH, 2011, p.387). Igualmente influentes foram seus trabalhos em filosofia.

Mas como podemos mostrar a igualdade $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$?

Não sei se você também se sente intrigado sobre como uma série de termo geral tão simples $\left[\frac{(-1)^k}{2k-1} \right]$ pode gerar uma aproximação para $\pi/4$? Pois bem, em nossa pesquisa, não encontramos de que forma Leibniz chegou a este resultado. Mas podemos propor uma maneira para chegar a este resultado usando Cálculo. Veja que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots \text{ para } |x| < 1$$

Temos à direita uma série de potências que só representa $1/(1+x^2)$ se for convergente e isto só ocorre, nesta série, para $|x| < 1$. Vamos tentar reescrever esta série de potências infinita com a ajuda de uma série finita somada a uma função para um k fixado:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^k x^{2k} + f(x) \text{ para } |x| < 1$$

só que não sabemos a expressão de $f(x)$. Mas veja também que a série finita

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-x^2)^{k+1}}{1 - (-x^2)}$$

pois é uma soma de PG de razão $q = -x^2$. Logo, torna-se simples descobrir $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1 - (-x^2)^{k+1}}{1 - (-x^2)} + f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}$$

Assim podemos escrever:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^k x^{2k} + \frac{(-x^2)^{k+1}}{1+x^2} \text{ para } |x| < 1.$$

Podemos aplicar a integral definida com extremos 0 e 1 dos dois lados desta equação, pois assim ainda estamos dentro de intervalo de convergência $|x| < 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^k x^{2k}) dx + (-1)^{k+1} \int_0^1 \frac{(x^2)^{k+1}}{1+x^2} dx$$

Chamemos esta equação de (1).

Observe que :

$$0 < \int_0^1 \frac{(x^2)^{k+1}}{1+x^2} dx < \int_0^1 (x^2)^{k+1} dx = \frac{1}{2k+3}$$

Podemos também integrar a série finita:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^k x^{2k}) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

Já o lado esquerdo da equação (1) é de simples resolução:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) \Big|_0^1 = \arctg(1) - \arctg(0) = \frac{\pi}{4}$$

O que acontece com o lado direito da equação (1) quando $k \rightarrow \infty$? Temos que a expressão $1/(2k+3)$ tende a zero e, conseqüentemente, a integral definida da $f(x)$ que encontramos também tende a zero.

Logo,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Por fim, vamos tratar de uma abordagem para resolução de séries dada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783 d.C). Foi um dos matemáticos mais prolíficos da história tendo escrito mais de 500 publicações com uma média de 800 páginas por ano em pesquisas em Matemática. E continuou escrevendo ainda depois de ter perdido a visão aos 69 anos. Boa parte das notações que usamos atualmente em Matemática são devidas à sua obra; por exemplo, e , π , i , o uso de letras minúsculas para os lados dos triângulos e letras maiúsculas para os ângulos opostos, Σ para a somatória e, não menos importante, $f(x)$ para a função de x (BOYER, MERZBACH, 2011, p.407-409).

Segundo Boyer e Merzbach (2011, p.409, tradução nossa):

É justo dizer que Euler fez pela análise infinita de Newton e Leibniz o que Euclides fizera por Eudoxo e Teeteto ou o que Viète fizera pela álgebra de Al-Khwarizmi e Cardano. Euler pegou o cálculo diferencial e o método das fluxões e fez deles uma parte de um ramo mais geral da Matemática que, desde então, ficou conhecido como 'Análise' (...).

E, é claro, não poderíamos esquecer da famosa identidade de Euler: $e^{\pi i} + 1 = 0$. Em uma só equação aparecem o e do Cálculo, o π da geometria, o i dos números complexos e os números zero e um.

Agora que conhecemos um pouco sobre este matemático, vamos comentar a solução que encontrou para uma notável série infinita. Em 1647, Pietro Mengoli (1626-1686 d.C.) matemático italiano, propôs encontrar o valor da soma dos inversos dos quadrados dos números naturais, ou seja,

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Entretanto, não teve sucesso em encontrar a resposta. Através de uma carta em 1673, Henry Oldenburg (c.1618-1677 d.C) sugeriu este problema a Leibniz. Um mês depois, este respondeu que ainda não tinha encontrado o valor da série. E, de fato, nunca a encontrou (GONZÁLES-VELASCO, 2011, p.206).

Outro notável matemático que se dedicou, ainda que sem sucesso, a encontrar o valor desta série foi Jakob Bernoulli (1654-1705 d.C.). Aparentemente, ele empreendeu muito esforço em sua busca, visto que, em seu "*Tractatus de seriebus infinitis*" escreveu que esta série "(...) é mais difícil do que alguém poderia esperar (...). Se alguém descobrir e nos comunicar o que escapou dos nossos esforços até então, este alguém ganhará nossa profunda gratidão" (*apud* GONZÁLES-VELASCO, 2011, p.206). Esta série intrigante ficou conhecida como "Problema de Basileia" provavelmente por esta ser a cidade natal de Jakob e de Euler.

Sabe-se que entre 1730 e 1731, Euler calculou uma aproximação para o valor da série igual a 1,644934, mas em 1735 Euler encontrou a resposta e a publicou em "*De summis serierum reciprocarum*" (*Ibid.*, p.206-207).

Gostaríamos de apresentar, em notação atual, os principais passos que conduziram Euler à uma resposta surpreendente.

Primeiramente nos perguntamos: a série $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

é convergente? A resposta é sim porque a partir do segundo, todos os termos são menores do que os termos correspondentes da série dos inversos dos números triangulares (que é convergente), ou seja

$$1/2^2 < 1/3; \quad 1/3^2 < 1/6; \quad 1/4^2 < 1/10; \quad 1/5^2 < 1/15; \quad 1/6^2 < 1/21; \quad \dots$$

Observemos a série de Taylor para a função seno:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

A aposta de Euler é que as propriedades que valem para um polinômio finito também valem para um polinômio infinito. E esta aposta se mostrou acertada.

Se pensamos na função seno como um polinômio, de fato seria um polinômio de infinitas raízes, pois o seno se anula para $x=k\pi$, para todo k pertencente ao conjunto dos números inteiros. Seja $xp(x)$ a série de Taylor para seno de x . Vamos determinar $p(x)$:

$$xp(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \dots$$

Veja que o polinômio p tem as mesmas raízes que a função seno exceto pela raiz $x=0$. Assim sendo, usando a aposta de Euler, vamos fatorar este polinômio:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \times \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \times \dots \end{aligned}$$

Em seguida, vamos aplicar a propriedade distributiva para estes infinitos binômios. Por serem infinitos, talvez não seja simples visualizar seu resultado, mas veja que a constante 1 de um binômio qualquer, sempre vai multiplicar o termo

$x^2/(n\pi)^2$ de outro binômio.

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots \right) x^2 + \dots$$

Como se trata de uma igualdade de polinômios, temos que

$$\frac{x^2}{3!} = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots \right) x^2$$

e portanto

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Ou seja, a série que desafiou tantos matemáticos notáveis tem π^2 em seu valor. Este resultado, de certo, impressiona ainda que tenha despertado a desconfiança alguns pelo fato de Euler usar propriedades de polinômios finitos em um polinômio infinito. Ainda assim, percebendo que suas respostas estavam de acordo com as aproximações das séries, Euler confiou no seu procedimento e o generalizou para toda potência par chegando a calcular o valor de todas as séries de potências pares até a 26ª potência (Ibid., p.212). Eis alguns exemplos:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} \quad \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945}$$

Seu método permite descobrir o resultado da soma infinita do inverso de potências pares apenas. Ainda não se sabe uma forma de encontrar o valor exato no caso de potências ímpares (Ibid., p.212).

Uma generalização destas séries é feita pela função zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Em que a função ζ é definida para $s = a+bi$ pertencente ao conjunto dos números complexos e converge para $a>1$ (STEIN; SHAKARCHI, 2003, p. 169).

E assim finalizamos este recorte histórico. Esperamos que nossa exposição seja de alguma valia para a cultura geral do professor de Matemática e auguramos que também possa ser de alguma inspiração às suas aulas.

3. CONTRIBUIÇÕES DE REZENDE E ARTIGUE PARA O TEMA

Neste capítulo, trazemos as contribuições de Rezende e Michèle Artigue para discutir a causa das dificuldades dos alunos ingressantes em cursos de Cálculo I e possíveis maneiras de, já no Ensino Básico, enfrentar algumas ideias fundamentais. Sendo esta uma discussão que pode se estender bastante, mantemos a ênfase nas Sequências e Séries infinitas. Mostramos também alguns paradoxos advindos do uso de propriedades de somas finitas em somas infinitas.

Antes de iniciarmos, gostaríamos de explicar o porquê de tratar de dificuldades de transição ensino básico/ensino superior se a proposta desta dissertação é enfatizar as Sequências e Séries no ensino básico. Todos sabemos que o ensino básico não é o momento de introduzir uma escrita matemática rigorosa, mas de motivar conceitos e dar aos alunos a oportunidade de serem protagonistas de sua própria aprendizagem e não apenas expectadores passivos de aulas que assistem. Por outro lado, sabemos que o que se ensina antes da faculdade tem uma influência na compreensão e no desempenho dos estudantes no ensino superior. Podemos lembrar que até um estudante de gastronomia cursa disciplinas de administração de restaurante onde usa conceitos de juros e proporção. No caso de Sequências e Séries, são os cursos de exatas que mais se beneficiam de alunos com boa compreensão destes temas. Logo, há uma articulação entre o que (e como) se aprende no ensino básico e o que se aprende no ensino superior. Assim, os professores das duas etapas de ensino devem estar atentos a esta transição.

Michèle Artigue apresenta em um congresso de 2004 o tema “*Le défi de la transition secondaire/supérieur: que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine*” (O desafio da transição secundário/superior: o que podem nos trazer as pesquisas didáticas e as inovações desenvolvidas nesta área, em tradução livre). Na França, o ensino secundário tem alunos dos 11 ao 18 anos e é a etapa final antes do ensino superior. Artigue reflete sobre as dificuldades mais recentes que afligem o ensino superior francês de Matemática, entre elas:

- A massificação do ensino que conduz à universidade estudantes de perfis diferentes daqueles que já estava habituada.

- As expectativas do ensino superior frente ao que se espera do aluno que termina o ensino básico cresceu.
- O ensino deve levar em conta as evoluções tecnológicas e a evolução da própria matemática.
- A perda de prestígio que vem sofrendo a ciência.
- A mercantilização dos sistemas educativos (educação como produto sujeito às leis de mercado).

Entre todos estes problemas, concordamos com Artigue quanto a existência de dificuldades advindas de uma transição cultural que no caso brasileiro ocorre entre o final do ensino básico e o início do ensino superior.

Dentre estas dificuldades, está o valor primordial que as demonstrações têm no ensino superior em Matemática.

Se me permitem uma digressão, foi com a Matemática grega da antiguidade que teve início a cultura de demonstrar proposições matemáticas. Antes dos gregos, babilônios e egípcios já haviam desenvolvido métodos para resolver problemas matemáticos. A questão é que não há registros de que tenham desenvolvido raciocínios que legitimassem o bom funcionamento destes métodos.

Segundo Nagafuchi (2008, p.50) há três hipóteses quanto ao uso de demonstrações na Matemática da Grécia Antiga:

- O uso das demonstrações foi pouco a pouco fazendo parte da atividade matemática dando-lhe um caráter dedutivo, remontando esta tradição a Tales de Mileto (século VII a.C.).
- Uma hipótese que atribui a necessidade da demonstração como uma consequência do problema da incomensurabilidade.
- A hipótese de que a argumentação que fazia parte da esfera política grega acabou por contribuir para a adoção deste mesmo tipo de pensamento para a justificação das afirmações em Matemática.

Simpatizamos mais com a terceira hipótese. Uma crítica que Sócrates, de Platão, faz é a falta de concordância das afirmações entre aqueles que estudavam a natureza (φύσις). O desenvolvimento de métodos que, uma vez que se concorda

com o método, permitem criar consenso sobre a verdade ou a falsidade de uma afirmação em Matemática é algo de grande valor, visto que os sofistas das cidades-estado gregas alegavam que podiam convencer as pessoas sobre a verdade ou a falsidade de qualquer afirmação.

Até hoje, não podemos ignorar a existência de um aspecto social daquilo que chamamos de demonstração válida. De acordo com Arsac (2007, p.27 *apud* NAGAFUCHI, 2009, p.47) existe:

- um pólo formal em que a prova matemática é caracterizada por sua forma, como um texto que respeita algumas regras precisas[...]: uma afirmação é conhecida como verdadeira, ou é deduzida a partir de precedentes usando-se uma regra de inferência tomada em um conjunto bem definido de regras;
- um pólo social, ou cultural, no qual a prova matemática é caracterizada como procedimento de validação usado pelos matemáticos. Então um texto é uma prova matemática se ele é reconhecido como válido pelos matemáticos.

Sendo a demonstração de proposições uma atividade de suma importância para a Matemática, será que ela também auxilia aos estudantes a entender conceitos, ideias e significados das proposições que são demonstradas? A resposta é... Nem sempre. Rezende (2003, p.10-13) questiona o pensamento de que, uma vez que uma proposição é demonstrada e o aluno entendeu a demonstração, então é garantido que o aluno compreendeu do significado da proposição. Entretanto, sabe-se que há muitas demonstrações que não ajudam a atribuir significado ao que se está demonstrando. Algumas destas não evidenciam o processo eurístico que as originaram, de forma que aparentam ser resultados muito técnicos. Em Nelsen (2000, p.ix) há uma citação do matemático Morris Kline (1908-1992) que nos ajuda a ilustrar um outro aspecto deste problema:

Muita pesquisa para novas provas de teoremas corretamente demonstrados é empreendida simplesmente porque as provas existentes não têm apelo estético. Existem demonstrações matemáticas que são meramente convincentes; usando uma frase do famoso físico-matemático Lord Rayleigh, elas 'impõem concordância'. Existem outras provas que 'galanteiam e fascinam o intelecto. (...)'.

A decisão sobre o que demonstrar em uma disciplina depende dos objetivos do professor. Rezende (2003, p.12), por exemplo, é da opinião que não é necessário

demonstrar algumas proposições. E dá como exemplo a história do professor, em uma aula de cálculo, que quer demonstrar que se uma função tem derivada igual a zero em todos os pontos em um intervalo aberto I , então é constante em I . Nesta história, um aluno questiona o professor se é necessário mostrar que “um objeto que tem velocidade nula, não se move, e portanto, sua posição permanece constante”. Rezende não vê necessidade desta demonstração nesta situação. Cremos, por outro lado, que a qualquer conceito matemático deve-se conceder uma independência entre suas próprias características e eventuais interpretações que possamos atribuir a este conceito. Uma teoria matemática não tem obrigação de estar conforme um fenômeno do mundo real. Logo, a necessidade de demonstrar não deveria ser guiada pelas possíveis interpretações que temos de uma teoria. Num curso voltado para matemáticos ou não, não há problemas em demonstrar proposições que conceitualmente estão claras aos alunos. Até melhor assim. Num curso de Física, pode ser que a demonstração de uma proposição, como a exemplificada acima, não seja premente. Há uma segurança, advinda da comunidade matemática, sobre os limites e as condições de legitimidade de uma teoria matemática que auxilie a modelar um fenômeno físico. Isto não é uma desculpa para ministrar um curso de Cálculo para aplicações em Física totalmente sem demonstrações. Mas nos faz refletir sobre como equilibrar as necessidades do público de um determinado curso e o *modus operandi* característico da Matemática. Para finalizar esta reflexão, concordamos que a demonstração não é a única maneira de se entender um resultado matemático e que “A demonstração é apenas uma justificação lógica da validade do resultado, e muitas vezes não carrega em si a ideia que permitiu intuí-lo.”(REZENDE, 2003, p.11)

Rezende também critica a confusão entre Cálculo e Análise. De fato, não há uma linha clara que separa até onde vai o Cálculo, do ponto de vista de conteúdos, abordagens, exigência de linguagem, e em que ponto se chega à Análise. Há professores que concebem o Cálculo como uma pré-Análise. Concordamos com Rezende quanto a necessidade de não fazer do Cálculo uma pré-Análise. Ainda que seja difícil afirmar com precisão o que diferencia as duas disciplinas, podemos afirmar que ao arquiteto, ao engenheiro, ao oceanógrafo há menos interesse em saber o que é uma sequência de Cauchy comparado aos alunos do curso de Matemática. Questiona-se, portanto, os benefícios que um aprendizado de uma pré-Análise conceda a alunos que veem a Matemática como ferramenta e não veem

sentido em aprofundar-se em conteúdos que provavelmente terão pouco uso em suas vidas profissionais. Além do mais, a linguagem da Análise é muito mais exigente do que o esperado em Cálculo. Logo, este permite ao aluno ingressante um contato menos rigoroso com a Matemática do ensino superior e, logo, não supõe uma maturidade matemática que talvez não fora bem desenvolvida durante o ensino básico. Se nos for concedido opinar sobre o que seria um curso de Cálculo ideal, nossa resposta é a seguinte: um curso cujo planejamento procure considerar as expectativas da graduação na qual está inserido, procure soluções para as dificuldades mais comuns que os alunos costumam ter e que busque um ponto de equilíbrio entre rigor e intuição em sua exposição. Esta resposta pode não ser precisa, mas é uma tentativa de resposta a uma questão difícil.

Voltando para a comunicação de Artigue (2004, p.2), “a matemática pode ser percebida como cultura.” As formas dos matemáticos de pensar, de fazer e as práticas que guiam como concebem e constroem conhecimento também constituem o que é a Matemática e não apenas a dimensão lógico-formal da atividade matemática. Durante a história da matemática, o conceito rigor em demonstrações foi se alterando com o passar do tempo. Por exemplo, a obra de David Hilbert “*Grundlagen der Geometrie*” (Os Fundamentos da Geometria), publicado em 1899, é considerado uma revisão da geometria de Euclides. Este, por exemplo, define ponto como “aquilo que não tem parte” (HEATH, 1908a, p.153). Mas como definir algo por aquilo que não é? Hilbert, por sua vez, não se preocupa em definir o que é um ponto e põe a ênfase da geometria nas relações que os conceitos de ponto, reta e plano têm entre si.

Se a Matemática tem uma dimensão cultural, é natural que não haja uma cultura unificada entre todas as escolas do ensino básico ou entre todas as universidades. Por exemplo, escolas que têm por meta que todos seus alunos sejam aprovados nos vestibulares não têm a mesma cultura matemática que uma escola Waldorf. Se este exemplo parece muito extremo, basta conceber duas escolas em um mesmo bairro, com o mesmo currículo em que a primeira tenha um enfoque em memorização de fórmulas e repetição de exercícios enquanto que a segunda tenha uma abordagem mais contextualizada e integrada com as outras disciplinas. Temos nesta situação, duas culturas matemáticas diferentes ainda que os conteúdos dos currículos sejam os mesmos. Costuma haver uma descontinuidade entre a Matemática que aprende no ensino básico e a Matemática do ensino superior.

Acreditamos que isto está relacionado à expectativa que o aluno saiba demonstrar as proposições que lhe são apresentadas. Isto exige um aprendizado do uso correto da linguagem matemática e das regras de demonstração. E estas habilidades não costumam ser estimuladas no ensino básico visto que, geralmente, a ênfase deste nível de ensino se detém em aplicar corretamente resultados de um teorema; espera-se que o aluno, dadas as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, saiba calcular o valor da hipotenusa e não se costuma esperar que ele saiba demonstrar o teorema de Pitágoras.

Mas como a ideia de cultura pode nos ajudar a entender a natureza das dificuldades dos alunos na transição entre o ensino básico e o ensino superior?

Após apresentar a ambiciosa mudança curricular para matemática do sistema de ensino francês que começou em 2000 e após descrever em detalhes uma polêmica ocorrida no *Baccalauréat*²⁴ em 2003, Artigue (2004, p.6) surpreende ao afirmar que, em parte, a fragilidade saberes dos alunos que terminam o *secondaire* é devida ao caráter muito contextualizado do que aprendem. Esta é uma conclusão que nos surpreende uma vez que um ensino que não seja alheio a um contexto motivador é uma busca que muitos educadores perseguem com a intenção de melhorar a compreensão do que ensinam. Mas, veja bem, o que Artigue aponta é um excesso de contextualização, pois, segundo ela, basta propor pequenas modificações a problemas que são familiares aos alunos “para que seus saberes percam toda a eficácia”, ou seja, uma modificação simples em um problema rotineiro faz com que os alunos não saibam mais como resolvê-lo. De um ponto de vista antropológico, “os saberes emergem de práticas e estas práticas são situadas”. Para relatar uma experiência pessoal, percebemos que muito alunos do ensino médio de uma escola em que atuamos tinham dificuldades em efetuar as quatro operações com números decimais. Entretanto, quando o contexto do problema era a compra de um produto que tinha por preço um número decimal, as operações de soma, subtração e multiplicação se lhes tornavam mais simples. Isto é um indício de que o conhecimento está associado a um contexto. Somar as coordenadas $(1,30; 0,80)$ e $(2,20; 1,20)$ em geometria analítica se mostrava mais difícil do que propor o resultado de uma compra de produtos em que operação a efetuar fosse $1,30+0,80+2,20+1,20$.

Na transição dos alunos para o ensino superior, há também uma perda de

24 Prova nacional que costuma ser pré-requisito para o acesso às universidades francesas.

contexto. Segundo Artigue, “uma parte da experiência matemática se torna inexplorável”. Concordamos com isto em parte. Ainda que haja uma mudança de contrato didático e se utilize uma outra terminologia para se referir aos conceitos aprendidos no ensino básico, o aluno, em sua trajetória universitária, tende a “criar pontes” entre o que aprendeu e o que está aprendendo. Este processo de criar pontes pode ser grandemente facilitado caso o professor universitário tenha consciência das dificuldades advindas de fatores culturais. E como o professor universitário pode facilitar esta transição? Primeiramente, procurando conhecer as culturas de ensino de Matemática que seus alunos têm antes de ingressarem na universidade. Este contato tende a propiciar uma compreensão de quais são as principais dificuldades que os discentes sentem em seus primeiros semestres na universidade. Depois, auxiliar os alunos na tarefa de criar pontes entre o que aprenderam no ensino básico, em princípio, com o uso de uma linguagem semelhante ao do ensino básico para logo em seguida introduzir a linguagem que se julga mais adequada ao ensino superior pontuando semelhanças e diferenças. O sentimento de hostilidade que alguns professores externam, quanto à formação matemática cheia de lacunas com que alguns alunos chegam ao ensino superior, não ajuda a uma superação das dificuldades que os alunos sentem. A propósito, o que propomos acima não deve ser visto como uma panaceia ou uma solução mágica que resolveria todos os problemas de transição entre culturas escolares. Mas é uma opinião semelhante à de Artigue (2004, p.7): “Compreender suficientemente o que realmente sabem os estudantes que chegam à universidade para determinar o que se pode aproveitar dos seus saberes, o que deve ser reconstruído e sobre quais bases se deve operar esta reconstrução é uma tarefa ao mesmo tempo necessária e difícil”.

Só para ilustrar com um pequeno exemplo, em alguns conteúdos de uma aula de cálculo pode ser necessário o uso da identidade $x=e^{\ln(x)}$, para $x>0$. Pode ser que o aluno tenha aprendido o que são funções inversas, que as funções $f(x)=e^x$ e $g(x)=\ln(x)$ são funções inversas. Pode ter resolvido vários exercícios que faziam uso desta propriedade com $\log_{10}x = 7 \Rightarrow x=10^7$, ou ainda $2^x = 16 \Rightarrow x=4$. Pode, entretanto, não ser de fácil compreensão ou não ser imediato o fato de que $x=e^{\ln(x)}$, para $x>0$. Se o professor universitário tem consciência deste tipo dificuldade que seus alunos podem sentir, torna-se mais fácil procurar um enfrentamento desta dificuldade de forma a reatar esta identidade com todo o conhecimento que o aluno

provavelmente tem sobre funções logarítmicas e exponenciais e inversas. Pois, caso contrário, esta identidade corre o risco de se tornar algo a mais para memorizar e usar nas avaliações. E ao final da disciplina, há grande chance de ser esquecida.

Ressaltamos que não se trata de mudar a cultura universitária para que se torne mais semelhante ou tenha que dar continuidade à cultura do ensino básico. A cultura do ensino superior tem suas próprias características as quais esta dissertação não está propondo mudanças. Entre estas características, Artigue (2004, p.8) cita em comparação ao *secondaire*:

- [há] uma renovação mais rápida dos objetos de ensino que obriga uma assimilação mais rápida;
- [há] um conjunto maior de tarefas que tornam mais difícil a rotinização;
- [exige-se] uma maior autonomia na resolução [de exercícios][...];
- [há] um novo equilíbrio entre o geral e o particular que dá uma outra função ao trabalho sobre os enunciados: não é suficiente memorizar alguns enunciados para fazer referências a eles em alguns casos particulares onde tudo funciona bem; é necessário também se questionar sobre a validade de um tal enunciado e, assim, vislumbrar além dos exemplos familiares as situações menos banais que as podem invalidar; [...]

Ela também cita que no *secondaire* os resultados ou métodos eram mais valorizados do que as demonstrações que as legitimam. As demonstrações seriam apenas uma cereja sobre o bolo.

Por outro lado, afirma Artigue (2004, p.11), “parece-me um erro profundo rejeitar ou fingir ignorar a cultura do *lycée*²⁵ como frequentemente ocorre. Mas é necessário auxiliar o processo de adaptação cultural”.

Até agora versamos sobre o que o professor do ensino superior pode fazer frente a problemas de ordem cultural. Haveria algo que o professor de ensino básico pode fazer ou adotar para tornar esta transição menos difícil? Certamente não se trata de adotar as características do ensino superior no ensino básico. Entretanto, vislumbramos a possibilidade de adotar abordagens adequadas ao ensino básico que não evitam ou se distanciam dos conceitos os quais serão abordados de maneira mais precisa e rigorosa no ensino superior.

No próximo subcapítulo propomos a metáfora de mapa para nos referir ao

²⁵ Nível de ensino francês equivalente ao Ensino Médio.

planejamento do professor. Em seguida definimos o que são ideias fundamentais segundo o Prof. Nílson Machado (2014). Por fim, mostramos como a ideia de mapeamento pode auxiliar o planejamento do professor, não apenas para o caso de Sequências e Séries.

3.1 MAPEAMENTO COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO

É importante que o professor do ensino básico (de Matemática ou não) tenha uma noção sistemática das principais ideias que permeiam a disciplina que leciona. Isto difere de saber resolver 99% dos problemas de sua disciplina, mas está relacionado com reconhecer e saber equilibrar em seu planejamento as diversas ideias nela presentes. Dessa forma, espera-se que ao final do curso o aluno tenha uma noção clara sobre o que versa a disciplina que cursou como um todo. Logo, é indesejado que a sequência de um curso pareça fragmentada ou que os conteúdos abordados não pareçam ter conexão entre si; ou ainda que não haja um objetivo global que justifique a escolha dos temas vistos em um período letivo. Como alegoria do planejamento de um curso, julgamos profícua a ideia de mapa. Isto porque uma representação pictórica dá a possibilidade de representar diversos elementos que não necessariamente têm uma relação de ordem entre si. No campo da educação isto é muito comum. Há professores que concebem o ensino como uma cadeia ordenada de conteúdos, ou como bem caracteriza Machado (2011, p.256) em sua crítica a esta concepção de “conhecimento como cadeia cartesiana, cujos elos devem ser construídos linear e paulatinamente na escola(...)”. Por mais que existam conteúdos que dependam de conteúdos anteriores para serem bem compreendidos, não é razoável supor que todos conteúdos tenham sempre uma organização linear.

Vamos, portanto, expor uma maneira de interpretar a alegoria de mapa como instrumento metodológico de análise epistemológica.

Segundo Rezende (2003, p.53-59), o primeiro dos três mecanismos presentes na alegoria de mapa é a escala. Esta está relacionada com o esquecimento seletivo. Em uma escala pequena, em que podemos visualizar continentes, por exemplo, não faz sentido representar com um ponto vermelho cada escola de educação infantil existente no espaço representado pelo mapa. Talvez possa até ser útil para comparar como se distribuem as escolas pelos continentes, mas não nos ajuda a

quantificá-las, pois os pontos ficariam muito próximos uns dos outros. Além disso, este amontoado de pontos vermelhos pode esconder características que são mais bem vislumbradas nesta escala como montanhas, fronteiras entre países. Por outro lado, não costuma ser útil um mapa que, em escala grande, não mostre (esqueça seletivamente) as ruas de uma cidade ou seus pontos turísticos. É neste jogo de esquecimento seletivo determinado pelos interesses do autor do mapa é que, assim como mapas de geografia física nos mostram o relevo, o mapa como instrumento epistemológico nos mostra a relevância dos componentes constitutivos de um tema.

O segundo mecanismo é a projeção. A exemplo da Terra, não se pode mapeá-la sem que haja distorções dado seu formato quase-esférico. Um cartógrafo tem que escolher o que quer conservar em seu mapa: se quer conservar os ângulos terá que deformar as áreas; se quer conservar as áreas terá que deformar os ângulos. De acordo com Rezende (2003, p.55):

A decisão sobre o tipo e o grau de distorção a privilegiar é condicionada muitas vezes por fatores técnicos, mas não deixa de ser baseada na ideologia do cartógrafo e no uso específico a que o mapa se destina. Assim, podemos assegurar que não existe neutralidade e ingenuidade nas atitudes de mapear. Nesse sentido, podemos dizer que se, por um lado, a escala determina o grau de pormenorização desejado, a projeção faz o mesmo com o grau de distorção pretendido.

O último mecanismo é a simbolização que se refere a como se representa os elementos de interesse no mapa. São-nos naturais algumas padronizações que vemos em mapas com atribuir a cor verde aos parques ou a grandes porções de vegetação de uma área e reservar a cor azul às grandes porções de água como rios, lagos e oceanos. Entretanto não podemos esquecer que estas cores são uma linguagem através da qual o mapa nos comunica algo. Outro exemplo, se pensarmos em mapas políticos, é o dos conflitos de território. Uma forma de sinalizar que um território é disputado entre dois países é representar suas fronteiras com uma linha pontilhada. O leitor do mapa, caso não entenda o que significa esta linha, pode procurar na legenda do mapa seu significado. O fato é que cores verde, azul e a linha pontilhada não são “palavras” obrigatórias para todas as linguagens cartográficas. Nada impede que na minha linguagem, os mares sejam representados em branco e que um território disputado tenha um ícone com duas espadas

cruzadas. Mas ao mudarmos a simbolização, devemos estar cientes das mudanças de interpretação que podem ser causadas.

Para concluir nossa alegoria de mapa, Rezende (2003) arremata as ideias afirmando que “Se a palavra-chave associada à projeção é projeto, a relacionada à escala é relevância, e à simbolização, é a linguagem”.

Uma forma de interpretar esta alegoria no ato de planejar uma disciplina pode ser a seguinte: a escala está para o grau de detalhamento dos conteúdos. Afinal de contas, cada o conteúdo escolar exige um tempo e atenção próprios para favorecer a aprendizagem dos alunos; a projeção está para o viés interpretativo dos conteúdos em analogia ao fato de que a escolha da projeção cartográfica acaba deformando de algum modo a região que representa; e, por fim, a simbolização está para a escolha da linguagem mais apropriada ao planejamento escolhido.

3.2 IDEIAS FUNDAMENTAIS

Já estabelecemos o que se entende nesta dissertação por mapa. Uma forma de mapeamento que consideramos útil aos nossos objetivos consiste em escolher ideias fundamentais para expressar com simplicidade a relevância os temas que investigamos. Assim, em um primeiro momento, é possível construir um mapa simples e que evidencia os temas mais importantes que tratamos podendo, em um segundo momento, empreender um grau de detalhamento maior.

Citaremos Machado (2014) para definir, em poucas palavras, o que são ideias fundamentais:

Em qualquer tema, uma ideia fundamental deve apresentar simultaneamente três características cruciais:

- sua importância pode ser justificada por meio da linguagem ordinária, sem necessidade de arsenais terminológicos de especialistas;
- não é isolada, articulando-se naturalmente com diversas outras ideias do tema, o que favorece a articulação interna do conteúdo estudado;
- não se limita às fronteiras de uma disciplina específica, transbordando inevitavelmente para outras, e explicitando conexões interdisciplinares.

Equivalência, energia, narrativa, mapa, sistema são ideias fundamentais em múltiplos contextos;(...)

Acreditamos que uma das nossas tarefas, enquanto professores, é o mapeamento de relevâncias. Isto nos leva a procurar uma visão abrangente do conteúdo que pretendemos lecionar, bem como indicar (mapear) quais são os conhecimentos mais importantes para atingir nossos objetivos, estabelecidos durante o planejamento de sua disciplina. O mapeamento de Rezende (2003), por exemplo, consiste em cinco eixos com conceitos complementares em seus extremos totalizando dez conceitos importantes no ensino de Cálculo. Assim, conhecendo de maneira sistematizada as características da disciplina que leciona, o professor tem a possibilidade de incluir em seu planejamento atividades que visam superar as dificuldades discentes.

No próximo subcapítulo, discutiremos como a evitação de algumas ideias importantes colaboram para uma visão da Matemática limitada a efetuar contas e de seguir algoritmos que pouco significado têm aos alunos. Ao evidenciarmos estes problemas, exemplificamos com problemas que estão ligados ao Cálculo e não apenas aos temas do ensino básico. Cremos conhecer mais do que aquilo que ensina é sim importante. Argumentos do Cálculo são usados com o intuito de ilustrar diversas ideias que queremos evidenciar. Ainda assim, ressaltamos que não defendemos que o curso de Cálculo seja feito no ensino básico.

3.3 O CÁLCULO COMO COLUNA VERTEBRAL DA MATEMÁTICA

Ainda que nosso tema se centre no ensino de Sequências e Séries, julgamos importante nos referir ao Cálculo visto que muitos problemas deste são traduzidos como Sequências e Séries.

Concordamos com Rezende (2003, p.37) quando afirma:

Outro aspecto notável no Cálculo diz respeito ao seu caráter integrador do próprio conhecimento matemático: o Cálculo é imprescindível para o desenvolvimento e organização interna da matemática e suas diversas áreas específicas. Numa linguagem alegórica diríamos que, se a geometria e a aritmética formam a 'base' do conhecimento matemático, o Cálculo representa sua 'espinha dorsal', isto é, é o domínio de conhecimento da matemática que dá sustentação e realiza as diversas interfaces entre as outras áreas do próprio conhecimento matemático. (...)

Este autor também identifica 5 dualidades essenciais para o Cálculo e seu ensino: discreto/contínuo; finito/infinito; variabilidade/permanência; local/global;

sistematização/construção e argumenta que (2003, p.403) “A evitação/ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática.”

Assim sendo, no capítulo 5 desta dissertação, elaboramos atividades que procuram abordar (e não evitar) as dualidades do Cálculo no contexto de Sequências e Séries. Veja que esta busca não é proveitosa apenas para alunos que no futuro cursarão uma graduação que contenha Cálculo entre suas disciplinas. Como vimos acima, o uso de ideias fundamentais no planejamento de um curso de Matemática tem em vista não tornar o ensino uma simples enumeração de conteúdos desprovidos de articulação entre si e chamar a atenção do aluno para características que diversos conteúdos têm em comum. Dessa forma, prestigia-se uma dimensão semântica da Matemática, visto que esta é frequentemente identificada com a atividade de calcular (visão algorítmica da Matemática). Sabemos que calcular é só uma das diversas atividades que se aprende em Matemática. A atividade de raciocinar corretamente sobre objetos abstratos pode até envolver o uso de cálculos, mas não é o ato de calcular que melhor caracteriza o que se aprende nesta disciplina.

Primeiramente, nos questionamos se as 5 dualidades podem ser encontradas (ou fazem sentido) no ensino de Sequências e Séries.

Começamos pela dualidade discreto/contínuo. Sequências e séries têm um papel importante na caracterização dos números reais. Um exemplo disto é quando ensinamos que um número é racional se puder ser escrito na forma a/b com a e b pertencentes aos inteiros e b diferente de zero; usando uma representação decimal, o número racional é aquele cuja representação é finita ou infinita e periódica a partir de alguma casa decimal. O problema começa quando a partir destas definições, o professor ensina um algoritmo muito conhecido no ensino básico para transformar um número racional de representação infinita e periódica em uma fração. Por exemplo, queremos escrever $0,\overline{875}$ em representação fracional. Neste caso escrevemos que $x=0,\overline{875}$ e que, portanto, $1000x=875,\overline{875}$. Logo, subtraindo a segunda equação pela primeira equação, temos $999x=875$, e assim, $x=875/999$. Este algoritmo pode ser adaptado para converter qualquer dízima periódica em uma fração. E funciona. O problema não é a eficácia do algoritmo, mas, pensando numa dízima periódica como uma soma infinita de termos, não se discute com o aluno se

as propriedades de soma, subtração, multiplicação e divisão usados para números inteiros e frações podem ser usados em somas infinitas de termos. E temos um bom exemplo para mostrar que estas propriedades nem sempre são válidas.

No livro “Curso de Análise, v.1” de Lima (2004, p.150-151), encontramos o seguinte exemplo:

Exemplo 40. Sabemos que $s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots$ é convergente (e até já informamos que $s = \log 2$, mas isto não vem ao caso). É lícito multiplicar os termos de uma série convergente por um número real. Multiplicando por $1/2$, obtemos $s/2 = 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - \dots$. Podemos escrever, evidentemente,

$$s = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots$$

$$\frac{s}{2} = 0 + 1/2 + 0 - 1/4 + 0 + 1/6 + 0 - 1/8 + \dots$$

Também é lícito somar termo a termo duas séries convergentes.

Logo

$$\frac{3s}{2} = 1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \dots$$

Vê-se que os termos da série acima, cuja soma é $3s/2$, são os mesmos da série inicial, cuja soma é s , apenas com uma mudança de ordem. Logo um rearranjo na ordem dos termos de uma série convergente pode alterar o valor da sua soma.

Em seguida é demonstrado que toda a série condicionalmente convergente, como é o caso da série s , pode ser reordenada de forma a assumir qualquer valor real.

Podemos nos perguntar então sobre a real necessidade de mostrar aos alunos este aspecto de série que as dízimas periódicas têm. Seria este aspecto apenas uma complicação trazida pelo mundo acadêmico que poderia muito bem ser ignorada? Afinal de contas, o algoritmo que transforma dízimas periódicas em frações funciona sempre. É com este tipo de argumento que ocorre uma evitação de uma ideia presente no cálculo. A ideia de que uma soma infinita pode ter um resultado finito. E este resultado não útil apenas para trabalhar com números racionais. As séries convergentes podem ser usados para introduzir a ideia de números irracionais. Ao invés definir o que é um número irracional por aquilo que

não é, por exemplo, não pode ser escrito na forma a/b com a e b pertencentes aos inteiros e b diferente de zero, podemos enfrentar a questão do número irracional também com o auxílio de uma série que converge para este número. Definir algo pela negação não costuma ser útil, pois só nos informa o que um objeto não é. E isto não o caracteriza de fato. O próprio Euclides fez isto ao definir ponto como “aquilo que não tem parte”. Especula-se que os gregos tinham uma necessidade filosófica de definir todos os objetos matemáticos com os quais lidava e, inclusive, que esta necessidade tenha freado o desenvolvimento de uma álgebra grega dissociada da geometria.

O que não é desejável no ensino de Matemática é contornar a discussão sobre o caráter irracional (da maioria dos números da reta real) com o uso de aproximações como $\pi \approx 355/113$ ou $\sqrt{2} \approx 1,4142$. Ou seja, fazer da aritmética um disfarce para não trabalhar com séries.

Na 1ª série do ensino médio, quando o aluno tem contato com progressões geométricas infinitas, pode-se propor uma maneira alternativa para escrever $0,8\overline{75}$ em representação fracional. Não é tão prática quanto o algoritmo que mostramos acima. Mas faz uso da ideia de número como série:

$$0,8\overline{75} = 8/10^1 + 7/10^2 + 5/10^3 + 8/10^4 + 7/10^5 + 5/10^6 + 8/10^7 + 7/10^8 + 5/10^9 + \dots$$

$$= (8/10^1 + 8/10^4 + 8/10^7 + \dots) + (7/10^2 + 7/10^5 + 7/10^8 + \dots) + (5/10^3 + 5/10^6 + 5/10^9 + \dots)$$

Usando a fórmula da soma de P.G. infinita em cada uma destas somas (veja que a razão da P.G. de cada uma destas somas é $1/10^3$), temos:

$$\begin{aligned} &= (8/10)/(1-1/10^3) + (7/10^2)/(1-1/10^3) + (5/10^3)/(1-1/10^3) \\ &= 800/999 + 70/999 + 5/999 \\ &= 875/999 \end{aligned}$$

Neste momento, você pode se perguntar o que garante que esta reordenação não está alterando o resultado final desta soma infinita. O motivo é que a série geométrica infinita de razão $0 < q < 1$ não converge condicionalmente.

Segundo Lima (2004, p.138), uma série $\sum a_n$ chama-se absolutamente convergente se quando $\sum |a_n|$ é uma série convergente. Veja que todos os termos de

nossa série são positivos, portanto a convergência é absoluta. É possível demonstrar que, para séries absolutamente convergentes, permutações dos seus termos não alteram seu valor. Por isso, pode-se multiplicar, somar e subtrair como se faz no algoritmo para transformar dízimas periódicas em frações sem que o valor que chamamos de x esteja se alterando por conta destas operações.

Talvez você esteja se perguntando se todos estes detalhes devem realmente ser apresentados aos alunos. Não aconselhamos que um curso de Cálculo seja planejado como uma pré-Análise. Logo, tão pouco pretendemos que uma abordagem pré-Análise seja adotada no ensino básico. Não vemos problemas, entretanto, em conversar com os alunos sobre estas ideias sem a necessidade de demonstrar estes fatos. Um professor não é alguém que demonstra todos os fatos que afirma, nem alguém cuja autoridade dispensa demonstrações. Neste caso, em que as demonstrações exigem uma maturidade matemática que não esperamos em alunos do ensino médio, o melhor a fazer é expor as ideias necessárias como forma de não evitar ideias importantes da Matemática por medo de que os alunos não entendam. O uso deste nível de detalhamento (ou escala, se pensarmos como um mapa de relevância) que equilibra rigor e intuição é adequado ao aluno do ensino médio.

Rezende (2003, p.330-331), alega que o algoritmo que transforma dízimas periódicas em frações é uma forma aritmética de camuflar e “resolver” uma dízima periódica deixando as séries em segundo plano. E continua:

(...) torna-se inevitável no campo pedagógico o hiato entre a representação decimal de um número irracional (discreto) e sua representação geométrica (contínua). Nesse sentido, seriam interessantes que se realizassem algumas antecipações do binômio séries/limites no ensino básico para que houvesse uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais. Não se pretende com isso antecipar a construção formal dos números reais para o ensino básico. O que se quer é oferecer ao estudante um cenário real das dificuldades da significação deste conceito, ao passo que, com esta apresentação, alguns elementos essenciais do 'pensamento diferencial' – como a noção intuitiva de limite e as séries – já pudessem ser iniciadas.

É fato que os números irracionais que mais frequentemente encontramos em sala de aula são as raízes quadradas, raízes cúbicas, o número π . Mas, se olharmos

com mais cuidado, no ensino médio encontramos logaritmos e várias funções trigonométricas que facilmente nos trazem números irracionais seja quando os calculamos em valores tabelados como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ou ainda quando nos perguntamos quanto vale $\operatorname{tg}(1)$ ou $\log_{10}(3)$. E será que quando há números irracionais em uma expressão, o resultado é sempre irracional? Talvez seja motivo de surpresa que a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

tenha como resultado os números da sequência de Fibonacci, ou seja, números naturais para cada n natural em que a calculamos. Ou ainda algo tão simples como $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ser escrito apenas com números irracionais e ser igual a 2.

Não se trata de enumerar curiosidades sobre números irracionais. Trata-se de não evitar características da Matemática que não se percebem no cotidiano. Só para citar uma, sabemos que não ha um computador consiga registrar na sua memória todos os dígitos de um número irracional (dentre os infinitos irracionais que existem). Potencialmente, podemos obter uma aproximação tão boa quanto quisermos. Do ponto de vista físico, podemos obter aproximações tão boas quanto pudermos pagar visto que a memória do computador e a energia consumida para o funcionamento do mesmo têm um custo. Se alguém quiser uma aproximação de 10^{100} casas decimais, precisa adquirir ou ter acesso ao equipamento necessário para tal. E que a calculadora utiliza aproximações para lidar com números irracionais. Quanto maior o número de casas decimais exatas da aproximação, mais precisos são os resultados. E que a aproximação utilizada costuma ser suficiente para os cálculos em que utilizamos os irracionais. Isto é importante para desfazer a ideia de que a calculadora consegue executar qualquer conta.

Outra dualidade se mostrou pertinente ao nosso tema é a finito/infinito. O infinito é uma ideia muito utilizada em Matemática. Mas não são muitos os conteúdos do ensino básico que lidam com esta ideia. Dentre os primeiros contatos estão as dízimas periódicas, as retas e planos da geometria.

Uma distinção que não costuma ser tratada com os alunos é a distinção entre infinito atual e infinito potencial. O primeiro é familiar aos alunos. Potencialmente podemos aumentar o tamanho de um segmento de reta que traçamos no papel, podemos sempre somar mais uma unidade a um número qualquer e etc. Porém,

ainda que não haja filosoficamente nada de errado com o finito potencial (esta foi inclusive a concepção de infinito adotada por Platão e Aristóteles), no ensino de Matemática ele pode causar problemas para compreender alguns temas.

Uma vez perguntamos aos nossos alunos de ensino médio se $0,9999...=1$ é uma igualdade verdadeira ou não. E a resposta da maioria deles era: $0,9999...$ não é um, mas está se aproxima muito do valor de 1. Esta é uma pergunta em que a ideia de infinito potencial lhes atrapalha ao procurar pela resposta correta, pois a ideia de que o número está em processo de aproximação deriva da ideia de que o número está continuamente mais próximo do valor 1. Acontece que os números são quantidades estáticas e não variáveis. Entre os argumentos que dispomos para mostrar que $0,9999...$ é uma representação diversa para o valor 1 é o seguinte: apelando para o pensamento indutivo dos alunos mostramos a representação decimal de algumas frações $1/9=0,1111...$; $2/9=0,2222...$; ...; $8/9=0,8888...$. Neste instante, paramos e perguntamos qual seria a representação decimal da fração $9/9$? Pelo pensamento indutivo, os alunos costumam todos responder $0,9999...$ “Mas quanto vale $9/9$?” perguntamos. “Vale 1”. Percebemos que alguns alunos permaneciam com a ideia de que $0,9999...$ não pode ser igual a 1.

Não queremos com isso incentivar um uso abusivo da ideia de indução. O pensamento indutivo é importante para a vida e ajuda, sim, a intuir padrões em Matemática. Mas enumerar casos particulares que confirmam aquilo que se quer mostrar em Matemática não constitui uma demonstração. E não importa o número de casos particulares que se calcule, a demonstração depende de um argumento dedutivo para ser considerada válida.

Quando os alunos já conhecem a série geométrica infinita de razão $0 < q < 1$, pode-se argumentar que $0,9999... = 9/10^1 + 9/10^2 + 9/10^3 + 9/10^4 + 9/10^5 + 9/10^6 + 9/10^7 + 9/10^8 + ...$ ou seja, muda-se a representação do número para evidenciar o caráter de série do número e, assim, mostrar a convergência para o valor 1 de maneira semelhante a que mostramos três páginas atrás.

Pela nossa experiência, isto se mostrou mais claro aos alunos do que o uso do raciocínio indutivo. E pode ser uma excelente oportunidade para discutir a diferença entre infinito potencial e infinito atual. A operação de limites que se estuda num curso de Cálculo faz uso do infinito atual. Por isto que o limite, quando existe, é um número e não está tendendo a um número. Incluir um pouco desta discussão, que tem uma apreciável intersecção com a filosofia, enriquece a aula principalmente

quando os alunos percebem a diferença entre as duas ideias de infinito. Além disso, a soma acima mostra que o infinito não precisa estar associado a algo ilimitado. Somar infinitos valores não precisa resultar em um valor infinito.

Rezende (2003, p.360) detecta 4 tipos de ideias que estudantes universitários têm sobre o infinito:

1. Infinito como algo que não tem fim;
2. Infinito como algo incontável;
3. Infinito como algo ilimitado;
4. Infinito como forma indeterminada.

O símbolo do infinito, por vezes, é usado de maneira inadequada como no caso de $\lim_{x \rightarrow \infty} (10x+5) = 10\infty+5 = \infty$. Este é um equívoco comum facilmente corrigível quando o professor alerta os alunos para não usar o símbolo do infinito como um número.

O infinito é um conceito que por vezes desafia nossa intuição. Um exemplo contraintuitivo que envolve o uso do infinito é a superfície chamada “trombeta de Gabriel”. Trata-se de uma superfície de revolução obtida ao girar a curva

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ para } x \in [1, \infty[\text{ ao redor do eixo das abscissas.}$$

O volume limitado por esta superfície, semelhante a uma taça, tem volume finito, mas a área desta superfície é infinita. De maneira bem intuitiva, poderíamos encher de tinta o sólido limitado pela trombeta, mas nem toda a tinta do mundo poderia pintar sua superfície. Este exemplo não precisa de conhecimentos muito avançados para ser entendido além de técnicas de derivação, integração e critério

da comparação para divergência de integrais impróprias. Entretanto há um argumento mais simples que permite a um aluno do ensino médio entender a ideia que permeia o problema:

Para compreender como uma superfície infinita pode encerrar uma região de volume finito, vamos lançar mão de uma analogia simples. Considere uma massa de moldar (massinha de criança) em forma de uma cobra (aqui imaginada como perfeitamente cilíndrica). Se o raio inicial da cobra é r e o seu comprimento é l , então o volume da cobra é dado por $V = \pi r^2 l$, enquanto a área superficial é dada por $A = 2\pi r l$. Considere agora uma segunda situação. Se rolamos a massa de

modelar no chão, fazendo o seu raio se reduzir pela metade (ou seja $r_2 = \frac{r}{2}$), o seu volume se manterá inalterado ($V_2 = V$), onde estamos imaginando um material totalmente incompressível. Mas, uma vez que o volume não se modifica, o seu comprimento quadruplicará (ou seja $l_2 = 4l$), como se vê em

$$V_2 = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 (4l) = V. \text{ Nesta situação, a área superficial da cobra será dada por}$$

$$A_2 = 2\pi \left(\frac{r}{2} \right) (4l) = 2A, \text{ ou seja, ela fica o dobro de antes. Assim, a medida que}$$

se reduz o raio da cobra, a área superficial da região cilíndrica tende ao infinito enquanto o volume se mantém constante. Isto é exatamente o que ocorre no aparente Paradoxo da Trombeta de Gabriel. (WIKIPÉDIA, 2014)

Apesar de contraintuitivo, este exemplo chama a atenção e pode servir de contraexemplo para a ideia de que o infinito esteja necessariamente ligado a algo ilimitado. A citação que reproduzimos acima pode servir de proposta para tratar do cilindro de volume fixo, mas de área que dobra cada vez que reduzimos seu raio pela metade. Veja que a ideia de infinito potencial está presente neste exemplo. Neste trabalho, não nos colocamos contra o infinito potencial. Acreditamos, porém, que esta forma de pensar o infinito não deve ser a única com que o aluno tenha contato durante o ensino básico. É enriquecedor que em sua cultura geral, um aluno compreenda a ideia de infinito atual. Este está presente em todos os números reais se os pensarmos como o limite de uma série de números racionais. Segundo Maanen (1995, p.87) não se sabe se Torricelli foi o primeiro a descobrir que uma

figura de dimensões infinitas pode ter um volume finito; entretanto, a descoberta de Torricelli “foi uma sensação de primeira ordem no mundo científico de seu tempo”.

Podemos conjecturar que uma dificuldade dos alunos em lidar com problemas que envolvem o conceito de infinito está em usar a intuição que já têm para objetos ou problemas finitos. Logo, os alunos precisariam construir uma intuição sobre o que difere e o que se mantém ao lidar com objetos infinitos. Cremos que o uso de problemas que aparentemente são paradoxos ajudam os alunos a desenvolver sua intuição sobre o uso do conceito de infinito.

Já discutimos bastante que a ideia de infinito ligado à convergência. Mas certamente, nem toda sequência converge. A série harmônica é certamente uma que engana a intuição. Trata-se da série cuja soma parcial é dada por:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Esperamos não estragar a surpresa: esta série diverge para $+\infty$. Mas diverge “lentamente” a ponto de, caso façamos algumas contas com os dez ou vinte primeiros termos desta série, nossa intuição é levada a concluir que série converge. Este é um ótimo exemplo para ilustrar que não basta que cada novo termo que é somado à série seja menor que o termo anterior para que a série convirja.

Uma maneira simples de mostrar a divergência da série é a seguinte:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Traduzindo em palavras, colocamos parênteses, sem modificar a posição dos termos, e substituímos neles números que formam uma série menor que a série harmônica. Entretanto, esta série menor diverge, equivalendo à soma de infinitos termos $1/2$. Logo, se a série menor diverge para $+\infty$, então a própria série harmônica também diverge.

Em relação à divergência desta série Geraldo Ávila (1995, p.56-57) nos revela uma curiosidade que julgamos válido citar:

(...) a divergência da série jamais seria descoberta por inspeção através de cálculos. Vamos supor que fossemos capazes de somar cada termo da série em um segundo de tempo. Como um ano tem aproximadamente

$$365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.557.600 \text{ segundos}$$

nesse período de tempo seríamos capazes de somar até $n = 31.557.600$, obtendo para a soma um valor pouco superior a 17; em 10 anos a soma chegaria a um pouco com de 20; em 100 anos, a pouco mais de 22. Como se vê, esses números são muito pequenos para indicar divergência da série; não somente isso, mas depois de 100 anos já estaríamos somando algo muito pequeno, da ordem de 3×10^{-9} .

E para deixar claro o quão lenta é a divergência desta série, Ávila supõe que existisse um computador cujo tempo gasto para efetuar uma soma fosse de 10^{-23} segundos e que estivesse ligado calculando a série harmônica desde a origem do universo há 16 bilhões de anos. Hoje, o valor aproximado por este computador seria de 94,2999. No restante do artigo, é explicada a maneira do autor para chegar a estas conclusões e entre outros resultados.

3.4 SOBRE A NECESSIDADE DE DEMONSTRAÇÕES

Voltando um pouco para a discussão da necessidade de demonstração dos resultados matemáticos em sala de aula, sabemos que é possível convencer os alunos sobre veracidade de algo que é falso, ao apelar para a intuição. É igualmente possível demonstrar algo sobre o qual os alunos não estejam convencidos, seja porque acreditavam no oposto e não se sentem convencidos ou porque não entenderam a demonstração. As duas coisas não são benéficas. Também não é desejável que uma classe acredite na verdade de uma afirmação pela autoridade do professor.

Destacamos estes fatos para apresentarmos os argumentos de um vídeo que se tornou razoavelmente popular na internet. Trata-se de um vídeo em inglês disponível no site Youtube com o título “*ASTOUNDING: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... = -1/12*”²⁶, . A palavra *astounding* significa espantoso, assombroso, assustador em inglês. As pessoas que participam do vídeo, de fato, constroem uma argumentação

26. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=w-l6XTVZXww>

concluindo que $1+2+3+4+5+\dots=-1/12$. O grande problema deste vídeo é não esclarecer o método de soma utilizado. É evidente que o resultado da soma de todos os números naturais diverge para $+\infty$. Porém, de fato, existem maneiras diferentes de somar a séries divergentes de forma que podemos atribuir um número a esta série. Se podemos mudar a forma de somar os termos da série, pode ser que que esta possa convergir, sendo que divergia pela forma usual de definir convergência. Entretanto, o vídeo em questão não esclarece este fato e manipula séries divergentes sem aparentemente se preocupar com rigor matemático. Afinal, como é possível afirmar que a soma de números positivos tenha como resultado um número negativo. E como não se esclarece nada sobre o método de soma usado para chegar aos resultados, só podemos supor que se trata do modo usual de lidar com séries. Porém, se desconhecêssemos critérios de convergência de séries, poderíamos ser persuadidos com os argumentos utilizados. Um fato que chama a atenção é o número de visualizações deste vídeo: mais de 3,123 milhões em 05/05/2015. É um número de visualizações expressivo se considerarmos que o tema (Matemática) não é propriamente algo popular entre os usuários do site. Com o acesso cada vez mais fácil à internet, os alunos têm acesso a muitas informações.

Mas afinal de contas, que raciocínio é usado neste vídeo? Nós o detalhamos a seguir.

O raciocínio inicia mostrando a convergência da série S_1 chamada série de Grandi (em homenagem ao matemático Luigi Guido Grandi (1671-1742 d.C.)):

$$S_1 = 1-1+1-1+1-1+\dots$$

Usa-se a fórmula da soma do termos da série geométrica infinita que é válida para séries geométricas de razão $|q|<1$. A razão da série de Grandi é -1 . Logo, Não poderíamos usar a fórmula $S = a_1/(1-q)$ com o valor de $q=-1$. Mas é isto mesmo que é feito. Só para acrescentarmos um fato histórico, o próprio Leibniz, um dos criadores do Cálculo, cometeu este erro. A fórmula para $a_1=1$ e $q=-1$ fornece o valor $1/2$ para a “convergência” da série de Grandi. Todavia, um resultado simples de ser provado em Análise Real afirma que se a série $\sum a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Assim sendo, como o termo geral a_n da série de Grandi não tende a zero (fica oscilando entre 1 e -1), então a série não converge. Na verdade, se comutarmos os termos desta série

convenientemente, podemos obter com resposta o número inteiro que quisermos²⁷.

Depois, com ajuda do valor obtido com a série de Grandi, descobre-se o “valor” da série

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots$$

Trata-se de somar esta série por ela mesmo, de um jeito especial:

$$\begin{aligned} 2S_2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots \\ &\quad + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \end{aligned}$$

Ou seja, o termo -2 da primeira linha é somado a termo 1 da segunda linha, o termo 3 da primeira linha é somado a termo -2 da segunda linha e assim por diante. Assim, obtém-se a série de Grandi cujo valor já foi obtido. Portanto, $2S_2 = 1/2 \Rightarrow S_2 = 1/4$. Veja que pelo mesmo motivo da série de Grandi, esta série não converge²⁸.

Por fim, seja $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$. Calculemos

$$\begin{aligned} S - S_2 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots \\ &\quad - [1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots] \\ &= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + \dots \\ &= 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) = 4S \end{aligned}$$

Usando que $S_2 = 1/4$:

$$S - S_2 = 4S \Rightarrow -S_2 = 3S \Rightarrow S = -1/12$$

Após vários passos feitos de maneira simples e sem grande preocupação com o rigor, obtemos o resultado polêmico. Não queremos que os alunos criem, erroneamente, que podem manipular os termos de uma série sem se questionar se podem lidar com uma soma infinita da mesma forma que lidam com uma soma finita. Este tipo de questionamento pode ser levantado já no ensino médio e a série geométrica não deveria ser a única a ser estudada. É desejável que os alunos

27 Apesar de não podermos a fórmula da série geométrica para $q = -1$, podemos atribuir à série de Grandi o valor $1/2$ através do método de soma de Cesàro que consiste em avaliar a convergência da média aritmética das séries parciais. Para mais detalhes, v. Shawyer e Watson (1994, p.6).

28 Porém, através do método de soma de Hutton pode-se obter o valor $1/4$. v. Hardy (1949, p.22).

conheçam pelo menos a série de Grandi como um exemplo de série não convergente e até mesmo “calcular o valor desta série” (não convergente) com a fórmula da soma da série geométrica infinita como forma de alertar os alunos para estarem atentos aos limites de uso dos resultados em Matemática. No capítulo anterior mostramos algumas propostas de como lidar visualmente com o tema. Cabe ao professor decidir de que forma e em que momento apresentar estas ideias aos alunos. Só não é bom evitá-las. O infinito é surpreendente e pode ser apresentada de maneira que não gere desconfiças análogas às dos gregos antigos que, como vimos na revisão histórica, tinham uma certa rejeição ao infinito atual, provavelmente por não terem este conceito bem formalizado. Arquimedes soube contornar esta limitação filosófica e conseguiu demonstrar resultados que hoje associamos à ideia de integral, ou seja, soma infinita de termos. Acreditamos ser desejável já no ensino médio um primeiro contato com ideias de infinitude.

Outra dualidade que julgamos pertinente ao tema desta dissertação é a sistematização/construção. Entretanto ela transborda o tema Sequências e Séries e chegando a discutir o excesso de formalismo que, não raramente, permeia as aulas de Cálculo bem como as de outras disciplinas de Matemática na universidade. Rezende (2003, p.391) comenta que o excesso de sistematização tem como consequência a “desmaterialização” dos resultados e dos conceitos básicos. Na mesma página, há o seguinte comentário: “Não são as ideias de velocidade e coeficiente angular, interpretações do conceito de derivada, mas, ao contrário, são elas, efetivamente, as ideias geradoras e construtoras do campo semântico de derivada”. Concordamos em parte com esta afirmação. Como já comentamos, os objetos matemáticos não têm obrigação de corresponder a fenômenos reais. Especula-se que Gauss deixou de publicar seus trabalhos sobre geometria não-euclidiana por causa das ideias que os filósofos de sua época publicavam. Estas privilegiavam a geometria euclidiana. Logo, é importante que as ideias em Matemática estejam livres de amarras que a realidade pode impor ao seu desenvolvimento. No caso do Cálculo, porém, temos um desenvolvimento histórico de suas ideias muito ligado à Física. Logo, não é desejável que o ensino deste tema se restrinja à dimensão formal, mas que, de maneira espontânea, o professor relacione as ideias do Cálculo à Física. Não se trata de uma obrigação, mas de algo que só tem a beneficiar os alunos visto que aumenta o conjunto de significados e a intuição deles frente a conceitos como derivada e integral.

Mas o que o professor do ensino básico pode aproveitar de toda esta discussão? Cremos que o ensino básico não padece de um excesso de formalização. Vemos, porém, que técnica pode estar assumindo um destaque neste nível de ensino em detrimento dos significados dos objetos matemáticos. Reforçamos o fato de que técnica e significado não são aspectos dicotômicos do ensino. É interessante que o ensino de matemática propicie o aumento do campo semântico dos alunos frente a qualquer tema que se ensine. Seja no ensino básico ou no ensino superior. No ensino médio, isto pode implicar em um trabalho mais próximo com o professor de física sendo benéfico para ambas as disciplinas e contribuindo para diminuir o grau de compartimentalização do conhecimento escolar. Em outras palavras, não vemos como saudável que o ensino de Matemática esteja totalmente alheio ao ensino de física. É importante aproveitar as oportunidades em que o professor tem de realizar um trabalho em conjunto com outras disciplinas tendo, inclusive, em consideração as metas do Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola em que leciona.

Finalizando este capítulo, esperamos que as ideias aqui presentes possam servir apenas como ponto de partida para uma reflexão pedagógica do ensino de Séries. De certo, não pretendemos esgotar o tema, mas enriquecê-lo apresentando possibilidades de como abordá-lo.

4. CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES PARA O TEMA

Raymond Duval é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale, na França. Ele investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão de conhecimento matemático. É responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Através desta teoria, propõe uma base para um modelo cognitivo de funcionamento do pensamento em Matemática que leva em consideração os problemas advindos de seu ensino.

Primeiramente, é importante compreender a diferença entre um objeto e a representação deste mesmo objeto. Só para exemplificarmos, podemos, com papel e caneta, desenhar o sol. Claramente, não se trataria de um desenho comparável às fotos obtidas por telescópios espaciais. É bem simples desenhar algo que simbolize o sol. Por mais que minhas habilidades como desenhista beirassem à perfeição, meu desenho é apenas uma representação do sol. O desenho não é o sol. Tudo isto é muito evidente quando tratamos de objetos concretos. Mas não é tão evidente quando tratamos de objetos abstratos como são todos os objetos matemáticos. Desde objetos corriqueiros como números e formas geométricas, passando por polinômios e funções trigonométricas, nenhum destes objetos têm uma correspondência física da mesma maneira como desenho do sol está para o próprio objeto concreto que é o sol. Só temos acesso aos objetos matemáticos através das representações que fazemos deles. Segundo Duval (2012, p.268). “A distinção entre um objeto e a sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática”.

Quando se ensina Matemática, a representação não é um fim em si mesmo. Ensina-se para que os alunos compreendam o objeto matemático e saibam operá-lo para resolver problemas.

Um aluno pode não se apropriar ou não sentir confiante de ter entendido um objeto matemático, mas saber operar suas representações de maneira que obtém uma resposta correta para os problemas que lhe são propostos. Neste caso, evidencia-se que lidar com a representação de um objeto matemático não é o mesmo que aprender. Fazendo uma analogia, manipular símbolos matemáticos de maneira correta sem compreender o objeto matemático que subjaz à representação,

é como saber pronunciar as palavras de um texto em língua estrangeira e não ter ideia do que elas significam.

Entretanto, durante sua trajetória escolar, os alunos (e por vezes os professores) podem confundir a compreensão de um objeto matemático com o ato de operar corretamente sobre as representações semióticas. Novamente, isto é em grande parte devido ao fato dos objetos matemáticos não terem uma existência física. Duval (2012, p.269) afirma que esta confusão é quase inevitável. Para este autor, as representações mentais, ou seja a apreensão do conhecimento, são um conjunto de imagens e conceituações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. Por outro lado, as representações semióticas seriam os símbolos que usamos para significar e trabalhar com o objeto abstrato.

Por exemplo, ao traçarmos uma circunferência de raio 1 e centro (0,0) no plano cartesiano, estamos nos referindo à mesma circunferência que quando escrevemos $x^2+y^2=1$, para todo (x,y) pertencente ao $\mathbb{R}^2$. A representação, entretanto, muda completamente a maneira do como posso operar sobre esta representação. Problemas que são de difícil resolução em um sistema de representação podem se tornar fáceis com o uso de outra representação e vice-versa.

Circunferência de raio 1 centrada na origem do sistema cartesiano. Fonte: elaborado pelo autor.

Existem duas palavras-chave na teoria de Duval: a semiose e a noesis. Por semiose, entende-se a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e, por noesis, a apreensão conceitual de um objeto (2012, p.270). Para Duval, existem representações mentais, englobando um conjunto de imagens e conceitualizações de um indivíduo sobre um objeto ou uma situação, e representações semióticas que “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.” Para exemplificar, podemos afirmar que a linguagem natural, a

algébrica, a geométrica e gráficos em um plano cartesiano apresentam sistemas semióticos diferentes (2012, p.269). Quando se afirma que o importante em Matemática é compreender o objeto matemático e não apenas saber operá-lo, coloca-se noesis em uma posição de superioridade e relação a semiose. É comum pensar, portanto, que a função do registro semiótico se restrinja apenas à comunicação. Mas esta impressão é incorreta. Através da semiose que se forma a noesis para cada aluno. Logo, sem a semiose, não há a formação da noesis. Além disso, as representações semióticas que são particulares à Matemática auxiliam a tornar inequívoco ou reduzir possíveis ambiguidades que uma representação em língua natural poderia trazer. Além disso, pode trazer facilidades operatórias que a língua natural teria dificuldades em fornecer.

Só para exemplificarmos este fato, deixo ao lado um trecho do *Ars Magna*, de Cardano (1501-1576). Na época em que foi escrito, não havia a notação algébrica que temos atualmente. E a dificuldade de entender a álgebra deste trecho, não advém apenas do fato de ser escrito em latim, mas que a língua natural, ainda que não seja impedimento para se desenvolver ideias algébricas, mostra-se inadequada para certas visualizações de propriedades e para realizar operações.

Logo, é evidente a importância da representação adequada, não apenas para comunicar, mas também para criar conhecimentos.

A história da álgebra nos traz outro bom exemplo de como um sistema de representação interfere na maneira de representar o objetos matemáticos. Há um

C A P V T III.

De æquationibus capitulorum simplicium.

ÆSTIMATIO rei, est quantitas. in qua veritatem experimur propositorum in capitulo & quæstione. Exemplum est, cum quis dixit, feci ex 10. duas partes, & duxi earum singulas in se, & fuit productorum differentia 60. Quia igitur nescimus quæ quantitas sit maior aut minor, ponemus minorem esse rem ignotam, quam vocamus positionem, erit igitur pars maior

1. positio.	1. Quadratum.
10. m. 1. posit.	1. quad. p. 100. m. 20. pos.
1. quadrat. p. 20. position.	1. quad. p. 100.
60. p. 20. positionibus æqualia 100.	
20. positiones æuales 40.	

residuum ad 10. scilicet 10. m. 1. positione, tunc sequemur quod est propositum, & dumus partes in se, & fiet quadratum minoris 1. quadratum & maioris 1. quadratum p. 100. m. 20. positionibus, adde quod est m. alteri parti, fiet 1. quadratum p. 100. ex vna parte, & 1. quadratum p. 20. positionibus, horum diffe-

rentia fuit 60. ex supposito, addemus igitur 60. minori parti, & tunc fient æquales 1. quadratum p. 100. & 1. quadratum p. 20. positionibus, p. 60. abiciemus 1. quadratum & 60. ex vtraque parte, remanebunt igitur 20. positiones æquales 40. Quia si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquantur sunt æqualia, diuidendo igitur 40. per 20. numerum positionum, exibat 2. æstimatio positionis, in hoc itaque 2. veritatem propositæ quæstionis experimur, nam si eius quadratum quod est 4. ex 64. quadrato 8. residui 2. & 10. abiciatur, relinquetur 60. propositus numerus. Est etiam verum de 2. quod proponitur in capitulo, scilicet quod quadratum eius quod est 4. cum 100. æquatur quadrato positionis, quod est iterum 4. & 20. positionibus, quæ sunt 40. & 60. simul iunctis, nam vtroque modo colliguntur 104. dicemus igitur merito, propter hoc, quod 2. est rei æstimatio, & cum recte operatus fueris, in æstimatio ne seu æquatione, vtraque experientia succedit.

D E M O N S T R A T I O.

Vt verò rei veritas apertius deprehendatur, atque cum ea ratio, scire enim est per demonstrationem, vt dicunt, intelligere, sint gratiæ exempli, cubi tres æquales

Extrato do livro Ars Magna, de Cardano

comentário presente na tradução da obra “Os Elementos”, de Euclides, feito por Heath (1968, p. 372-374) que nos ajuda compreender o caráter fortemente geométrico de proposições que hoje são facilmente representadas através da álgebra. Na obra de Euclides, estão presentes diversas proposições que podemos classificar como “álgebra geométrica”. Os próprios números eram interpretados em termos de segmentos e retângulos. O produto de dois números é representado por um retângulo formado por dois segmentos. E a motivação para fazê-lo estaria na chamada crise dos incomensuráveis, visto que este tipo de representação pode ser feita independentemente do caráter comensurável ou não dos dois segmentos utilizados. Desta aritmética geometrizada, é possível conceber uma álgebra geometrizada contanto que o grau do problema equivalente em álgebra não fosse maior que dois. Segundo Heath, as dez primeiras proposições do livro II d’“Os Elementos” são equivalentes a várias identidades, por exemplo:

1. $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots,$	6. $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2,$
2. $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2,$	or $(a + \beta)(\beta - a) + a^2 = \beta^2,$
3. $(a + b)a = ab + a^2,$	7. $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2,$
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$	or $a^2 + \beta^2 = 2a\beta + (a - \beta)^2,$
5. $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$	8. $4(a + b)a + b^2 = \{(a + b) + a\}^2,$
or $(a + \beta)(a - \beta) + \beta^2 = a^2,$	or $4a\beta + (a - \beta)^2 = (a + \beta)^2,$
	9. $a^2 + b^2 = 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right\},$
	or $(a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = 2(a^2 + \beta^2),$
	10. $(2a + b)^2 + b^2 = 2\{a^2 + (a + b)^2\},$
	or $(a + \beta)^2 + (\beta - a)^2 = 2(a^2 + \beta^2).$

Expressões equivalentes às 10 1^{as} proposições do livro II d’“Os Elementos”, de Euclides. (HEATH 1960, p.372-373)

Heath ressalta que isto não quer dizer que o conhecimento “algébrico” grego estivesse limitado a poucas identidades simples, visto que Apolônio de Perga, em seu livro sobre cônicas, “frequentemente apresenta proposições [“algébricas”] muito mais complicadas e sem demonstração” (Ibid., p.373).

Gostaríamos, para fechar esta digressão histórica, de escrever uma última citação de Heath:

É importante, entretanto, perceber que todo procedimento do livro II é *geométrico*; retângulos e quadrados são mostrados nas figuras e a igualdade de certas combinações é provada por estas figuras. Concluímos que este foi o método clássico ou padrão de provar tais proposições (...).(Ibid., p.373, tradução nossa)

Tudo isto para evidenciar a predominância do registro geométrico na antiguidade clássica.

Qualquer sistema semiótico é um registro de representação? Por exemplo, se temos um conjunto de símbolos que representam objetos de um assunto matemático, isto é suficiente para que os alunos tenham acesso a estes objetos durante seus estudos? Segundo Duval, não. Faz-se necessário que este conjunto de símbolos tenha três características:

1º Deve seguir regras próprias de para a formação de uma representação. Uma frase agramatical em língua natural é um exemplo de um uso que não permite representação de um sistema semiótico. Se escrevo “mesa antigo o está sobre a livro” não formo uma representação identificável; mas se escrevo “o livro antigo está sobre a mesa” passo a fazer uso identificável de símbolos que em língua portuguesa podemos atribuir a um estado que queremos comunicar. Semelhantemente, os símbolos algébricos não são usados de maneira aleatória para representar uma objeto determinado e um círculo não aparece representado como um zigue-zague visto que isto também não permitiria a identificação do círculo que se quer representar. Logo, existem **regras de conformidade** que homologam uma determinada representação a um determinado objeto. A existência destas regras é condição necessária para formar um registro de representação.

2º Deve permitir **tratamento**, ou seja, transformações internas a um registro (Duval, 2012, p.272). Na mesma página, o autor cita alguns exemplos de tratamentos:

A **paráfrase** e a **inferência** são formas de tratamento em língua natural. O **cálculo** é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A **reconfiguração** é um tipo de tratamento particular para figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A **anamorfose** é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.

3º Deve permitir a **conversão** entre registros. Por exemplo ao transformar um enunciado puramente verbal de um problema em uma equação que conduza à sua resposta com base nos elementos do enunciado, estamos convertendo a representação verbal em uma representação algébrica. Outro exemplo de conversão menos comum ocorre quando de um gráfico de uma parábola sabemos as coordenadas de 3 pontos distintos e queremos sua expressão algébrica (representação gráfica para a representação algébrica). Uma característica da conversão é não depender dos tratamentos próprios do registro inicial, nem dos tratamentos do registro final. Só para termos um exemplo, um aluno pode saber manipular bem a representação algébrica da função $f(x)=\ln(x)$ quando está presente em uma equação e pode conhecer e saber esboçar seu gráfico. Entretanto, pode não saber o que ocorre com o gráfico quando escrevemos $f(x+3)=\ln(x+3)$. Por experiência, é comum que alguns alunos afirmem que o gráfico se move três unidades para cima ou três unidades para a direita. Ou ainda dizer que não têm a menor ideia do que pode se modificar no registro gráfico.

A reação de surpresa ocorre quando o gráfico, na verdade, é movido três unidades para a esquerda.

Gráficos das funções $f(x)=\ln(x)$ e $g(x)=\ln(x+3)$. Fonte: elaborado pelo autor

Ou seja, reconhecer os tratamentos em cada registro não implica em saber fazer conversões entre registros.

O próprio Duval relata em seu artigo “Graphiques et équation: L'articulation de deux régistres” de 1988, o qual tivemos acesso a uma tradução (Duval, 2011), faz um estudo focado nas funções afins. Neste, verifica-se uma ênfase em passar do

registro algébrico para o registro gráfico com a construção de pontos no plano. Mas isto, por si só, não dá aos alunos condições passar de observar o gráfico escrever a equação da reta correspondente. Um ensino que foca em simplesmente unir muitos pontos que o aluno transfere para o plano cartesiano pode inclusive constituir um dificuldade para a compreensão da passagem entre os dois registros. Uma das razões, é que o ato mecânico de transferir pontos para o gráfico não permite aos alunos desenvolver a percepção de características geométricas de uma curva e suas correspondências algébricas destas características.

Por exemplo, visualizar no plano cartesiano os gráficos correspondentes as equações $y=1x$, $y=-3x$ e $y=x/10$ perceber que, algebricamente, as curvas têm o mesmo coeficiente linear e diferentes coeficientes angulares é uma percepção que uma abordagem ponto a ponto não estimula. Além disso, perceber que uma das curvas coincide com a bissetriz dos quadrantes ímpares, que a outra tem coeficiente angular abaixo de -1 (mostrando-se decrescente) e que terceira reta tem coeficiente entre 0 e 1 (mostrando um gráfico com “crescimento suave”), é uma habilidade que mostra uma considerável compreensão sobre a conversão entre os dois registros semióticos. Só para citar outras habilidades de conversão, temos o fato de que duas retas paralelas no plano têm o mesmo coeficiente angular; e que uma reta qualquer pode ter várias formas de representação algébrica como, por exemplo, $y-7x+10=0$ ou $2y-14x+20=0$. Duval (2011, p.107-109) mostra os resultados de um teste aplicado a 105 alunos franceses que cursam o equivalente à 2ª série do ensino médio. Neste teste, verificou a porcentagem de acerto da conversão de registros verbais para registros gráficos e também de registros gráficos para registros algébricos. Chama atenção que a atividade “Hachurar os pontos do [plano cartesiano] cuja abscissa e ordenada têm o mesmo sinal” verificou 56% de acerto enquanto houve 25% de acerto na atividade de visualizar o plano cartesiano com os quadrantes ímpares hachurados e perceber a correspondência com a expressão algébrica $xy>0$. Duval usa o termo *variáveis visuais* ao se referir às características de uma curva que têm uma correspondência no registro algébrico. Julgamos relevante este termo, visto que o termo *variáveis* é costumeiramente associado a álgebra.

Voltando para Duval (2012, p.277), concordamos que o ensino de Matemática costuma ser muito focado nas regras de formação (ou regras de conformidade) de um objeto matemático e nos tratamentos. A conversão é, por vezes, considerada uma consequência de compreensão do objeto em um registro após muitas

experiências com o tratamento de um registro. Isto é, acredita-se que a habilidade de conversão entre registros aconteça naturalmente quando se compreende bem os tratamentos de um registro. Por nossa própria experiência de ensino, vemos que a conversão entre registros não costuma acontecer de forma espontânea.

Neste ponto da leitura, alguém poderia nos perguntar se não estaríamos sobrestimando a importância da conversão entre registros semióticos. Granger (1979 *apud* Duval, 2012) afirma que “O progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que mais ou menos coexistem com o primeiro entre eles, o sistema da língua natural”. Concordamos com Granger e mesmo quem não tem formação em Matemática pode perceber o poder da complementaridade de registros no seu cotidiano. Basta observar anúncios publicitários, por exemplo, em outdoors ou na internet. A linguagem não-verbal, muito estudada em semiótica, costuma reforçar e complementar uma mensagem verbal. Pode inclusive assumir uma gama de significados que escapam do controle da pessoa que criou um anúncio publicitário. Ainda que uma imagem tenha o poder de evidenciar fatos que um relato escrito pode omitir ou minimizar, há certamente limitações que as representações não-verbais não conseguem suprir. Para evidenciar isto, basta uma frase de Millôr Fernandes que brinca com um ditado popular: “Se uma imagem vale mais do que mil palavras, então diga isto com uma imagem”.

Pois bem, se é a noesis, a compreensão do objeto matemático, que o professor em vista quando ensina, percebemos que não podemos subestimar a habilidade de conversão entre registros. Mesmo porque, a conversão não é uma atividade que constitui um fim em si mesma, mas é importante, também, pelas novas possibilidades de tratamento que outros registros podem proporcionar.

Um segundo registro pode facilitar certas operações que se fazem com esforço num primeiro registro ou até mesmo permitir operações que não eram vislumbradas num primeiro registro.

Por exemplo, há alguns problemas geométricos que pedem para encontrar uma determinada medida de uma figura que se mostram de difícil solução se procuramos uma resposta algebrizando o problema e trabalhando, com muito empenho com várias identidades trigonométricas que sejam pertinentes ao problema. A algebrização da geometria que se verifica com frequência no ensino básico não incentiva os alunos a reconfigurar a figura original. Há quase uma

proibição tácita sobre os alunos quanto a reconfigurar as figuras geométricas para encontrar a solução de problemas em geometria. Pode ser que um trabalho que enfatize a resolução de problemas, sem descartar o registro algébrico, reconfigurando a figura do problema original traga uma solução mais simples e elegante. Este é um ponto também defendido por Duval (2012, p. 280) quanto a complementaridade dos registros:

(...) as figuras e, de maneira geral, todas as representações analógicas, podem representar somente estados, configurações ou produtos de operações, não ações ou transformações. Para representar operações é preciso um registro que tenha as propriedades de uma língua: língua natural ou álgebra. Por outro lado, as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem o objeto ou a situação.

Veja que em nenhum momento considera-se que uma representação semiótica seja melhor do que outra em termos absolutos. O que se argumenta é a complementaridade de tratamentos que ambas proporcionam e seu papel na formação da noesis. O uso de mais de um registro auxilia comparação entre tratamentos dados a um mesmo objeto matemático. Tudo isto com o fito de não conduzirmos os alunos a confundir o objeto com a sua representação.

Apresentamos abaixo um diagrama que o papel das conversões entre registros semióticos para a formação da noesis (DUVAL 2012, p.282).

Diagrama das relações entre representante e objeto representado

Na mesma página há uma explicação para o diagrama:

No esquema desta figura, as flechas 1 e 2 correspondem as transformações internas a um registro e as flechas 3 e 4 às transformações externas, quer dizer, mudança de registro por conversões. A flecha C corresponde a compreensão integral de uma representação: ela supõe uma coordenação de dois registros. As flechas pontilhadas marcam a distinção clássica entre representante e representado. Naturalmente, o esquema encara o caso mais simples de coordenação entre dois registros: em alguns domínios, como a álgebra linear, uma coordenação entre três registros, pelo menos, pode ser requisitada.

Fazemos uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no capítulo 5 ao elaborar 10 atividades que estimulam o uso de mais de um registro para encontrar suas soluções.

4.1 REFLETINDO SOBRE APLICAÇÕES DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES

Após esta breve introdução à Teoria das Representações, podemos nos questionamos sobre como podemos implementar em nossa prática docente a conversão entre registros semióticos de um objeto matemático. À luz desta teoria, cremos proveitoso refletir sobre como elaborar atividades que beneficiem o aprendizado dos alunos pelo uso de diversos registros e que não se limitem a representar os objetos matemáticos a apenas um registro.

Sabemos que os objetos da álgebra costumam ter representações geométricas. Os números complexos, por exemplo, não precisam se limitar à representação $(a+bi)$ ou ainda serem tratados como pares ordenados $(a;b)$, mas ganham outros significados quando são convertidos para o registro gráfico e interpretados como vetores no plano. As operações de soma, multiplicação e potenciação são equivalentes nos dois registros. Entretanto, a álgebra por si só não oferece recursos de interpretação do registro gráfico. Conceitos como 'módulo' e 'argumento' de número complexo deixam de ser apenas fórmulas e oportunidades de treinar tratamentos algébricos com senos e cossenos, para conceitos com significados que são inclusive úteis à Física.

Uma ideia que deveria ser questionada é que basta o aluno tornar-se competente em um registro para que, por consequência, aprenda a fazer conversões entre registros. Pode até acontecer desta ideia ser verdadeira para alguns poucos alunos. Mas, pela teoria de Duval, é mais provável que ao ser confrontado com um segundo registro, o aluno entenda melhor os conceitos e as operações do primeiro registro e vice-versa. E, assim, tenha a compreensão do objeto matemático com o auxílio dos dois registros de representação semiótica. É a noesis se formando através da semiose.

Só para registrar um outro exemplo, a soma de duas matrizes de mesma dimensão é uma operação bastante intuitiva. Elementos de mesma coordenada de duas matrizes são somados e o resultado desta soma tem as mesmas coordenadas na matriz resultado. Nada de estranho até que os alunos da 2ª série do ensino médio se deparem com a operação de produto de matrizes. Esta não tem nada de intuitivo em seu processo algorítmico. E, dificilmente se explica em sala de aula a motivação dos matemáticos para definirem a multiplicação de matrizes da forma que é definida. Em geral, só durante um curso de álgebra linear é que o aluno, caso

escolha seguir uma graduação em exatas, descobre que multiplicar matrizes tem uma correspondência com a operação de composição de funções lineares. Se A e B são as matrizes que representam as funções lineares f e g respectivamente, o produto AB equivale à composição de funções lineares $f \circ g$. Logo, a operação de multiplicação de matrizes, da forma que é usualmente definida, mantém o significado de composição de funções lineares. Por exemplo, sabemos que se f é função linear bijetora, existe uma função inversa f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = I$ onde I é a função identidade. O mesmo ocorre para a representação matricial A desta função f . Sabemos que $AA^{-1} = I$ onde I é a matriz identidade. Veja que na representação matricial, em vez de afirmarmos que A deve ser bijetora para que exista A^{-1} , dizemos que A deve ser não-singular. Mas, apesar desta diferença de nomenclaturas, há uma correspondência entre estes conceitos. E estamos certos de que esta conversão entre matrizes e funções lineares não é algo que os alunos costumam fazer de maneira espontânea. A ausência desta conversão torna sem significado a operação de multiplicação de matrizes para a maioria dos alunos do ensino médio. Por mais competentes que sejam com o conteúdo de funções e com o conteúdo de matrizes.

Isto sem falar nas possibilidades de conversão entre registro algébrico e gráfico do conteúdo referente aos autovalores e autovetores (conteúdos estes concernentes ao ensino superior).

No caso de representações semióticas complexas em que o problema é enunciado em um registro linear (língua natural e álgebra, por exemplo), Duval (2012, p.294) considera essencial o uso de um registro que não tenha regra de formação linear (figura, esquema, gráfico, etc.) e, em seguida, um segundo registro linear para descrever o raciocínio derivado do registro não linear. Isto é pensado para facilitar a aprendizagem do raciocínio dedutivo.

De todos os registros de representação, o registro de língua natural é um registro de partida para a compreensão de grande parte dos problemas que surgem no cotidiano. Dificilmente encontramos um desafio profissional ou um problema cotidiano (não-escolar) que é proposto como: “resolva a seguinte equação” ou “demonstre a seguinte proposição”. O mais comum é encontrar um problema que é descrito em detalhes através de língua natural e que passa por uma conversão de representação para ter sua solução facilitada. Ou seja, modelar matematicamente um problema corresponde a fazer uma 'conversão entre registros' à luz da teoria de Duval. Nesta dissertação, advogamos que o registro em que ocorre a resolução do

problema não seja sempre o registro final. Em outras palavras, se ao final de uma situação-problema o aluno obteve a resposta através do registro algébrico, por exemplo, e finaliza sua questão sem refletir sobre as consequências e implicações de sua resposta no registro de partida (língua natural), então deixa de refletir sobre as consequências de sua resposta. De fato, existem situações-problema que são construídos de maneira artificial ou não verossímil. Quando a contextualização de um problema se mostra ser apenas um pretexto para disfarçar problemas de rotina, o aluno percebe. Entretanto, há problemas em matemática cuja a análise em língua natural da resposta obtida através de um registro matemático pode suscitar inclusive um debate ético sobre as consequências da resposta. Ainda que não seja um problema que tenha implicações sociais, refletir se a resposta obtida é razoável no contexto em que o problema foi introduzido é um procedimento que pode ajudar os alunos a identificar eventuais erros de procedimentos ou de interpretação que tenham cometido no processo de resolução.

Uma vez que expomos os principais pontos da Teoria das Representações de Duval, gostaríamos de refletir sobre as possíveis maneiras de elaborar atividades tendo esta teoria como suporte. Sabemos que as possibilidades de aplicação não se restringem às Sequências e Séries e, em especial, pode ser de grande ajuda ao ensino de Cálculo dada a versatilidade de registros que o conceito de função pode assumir. Neste trabalho, defendemos que o uso de mais de um registro de representação seja usado para um mesmo objeto matemático sempre que for possível fazê-lo. Não saberíamos como medir de maneira absoluta o quão abstrato um objeto matemático é em relação a outro objeto matemático. Todavia, quando os objetos em Matemática se tornam menos intuitivos aos alunos, aumenta a necessidade do professor criar ligações entre o conhecimento que o aluno já sabe e o conhecimento que se quer ensinar. E, como já dissertamos, a pluralidade de registros é uma ferramenta que pode auxiliar no aprendizado do aluno ao apresentar uma forma alternativa de trabalhar com o objeto. Por experiência, percebemos que o ensino de Matemática tem um grande enfoque em álgebra. De fato, a álgebra nos fornece uma notação relativamente simples e métodos para resolução de problemas que permite modelar um grande número de problemas. Por outro lado, ela esconde significados que outros registros evidenciam. Na própria geometria, uma vez que um determinado problema tem seu registro mudado para o algébrico, os métodos de resolução próprios da álgebra não discriminam o fato do problema original ser

geométrico (exceto talvez estabelecer restrições de resposta como não permitir que a medida de um segmento seja negativa). E também não costumam ser reveladores de como um processo puramente geométrico poderia nos revelar as mesmas soluções. O uso sistemático da álgebra pode inclusive desestimular a procura por métodos em outros registros de representação. Só para apresentarmos um exemplo simples em números complexos, o cálculo a potência $(\sqrt{3} + i)^6$ pode perfeitamente ser feito através de operações algébricas. Não sem algum esforço no caso de não dispormos de um computador com software adequado. Porém, quando o aluno conhece a forma trigonométrica de um número complexo, neste exemplo $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, e sua representação gráfica no plano de Argand-Gauss como um vetor e, além disso, conhece a correspondência entre a operação algébrica de potenciação e seu efeito na correspondente representação como vetor, há então a possibilidade de uma resolução por demais facilitada em comparação à resolução algébrica (neste exemplo, igual a -2^6). Além disso, a representação gráfica dos números complexos atribui aos objetos deste assunto um significado que não se alcança com um ensino restrito ao registro algébrico. Veja que no exemplo que apresentamos não basta saber converter registros, mas também conhecer uma correspondência entre uma operação da álgebra com uma operação da geometria (que no exemplo, é a rotação do vetor tendo por eixo a origem do sistema).

5. ATIVIDADES SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES COMENTADAS

Antes de continuarmos a tratar sobre o aspecto pedagógico das Sequências, vamos primeiro mostrar algumas definições úteis ao nosso tema.

Definição [Sequência Finita]: Chamamos sequência finita uma função f cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Logo, $f(n)=a_n$, em que a_n chama-se o *n-ésimo termo da sequência* e o n chama-se *índice*. Podemos representar uma sequência finita como $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Definição [Sequência Infinita]: Chamamos sequência infinita uma função f cujo domínio é o conjunto $\mathbf{N}$. Logo, $f(n)=a_n$, em que a_n chama-se o *n-ésimo termo da sequência* e n chama-se *índice*. Podemos representar uma sequência infinita como $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$.

Definição [Progressão Aritmética] (Iezzi, Hazzan, 1977): Chama-se progressão aritmética (P.A.) uma sequência dada pela seguinte regra de recorrência:

$$a_1 = a$$

$$a_n = a_{n-1} + r, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}, n \geq 2, \text{ onde } a \text{ e } r \text{ são números reais dados.}$$

Definição [Progressão Geométrica] (Iezzi, Hazzan, 1977): Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte regra de recorrência:

$$a_1 = a$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}, n \geq 2, \text{ onde } a \text{ e } q \text{ são números reais dados.}$$

Definição [Série]: Seja (a_n) uma sequência. Definimos série como a sequência (S_n)

em que cada $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ é chamado soma parcial. Quando (a_n) é uma sequência infinita, dizemos que a série $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge se o limite $\lim S_n$ existe.

É digno de nota que colocamos estas definições de sequência e série como uma formalidade útil para esta dissertação. Não cremos necessário formalizar absolutamente tudo em uma sala de aula do ensino básico. Se o professor diagnostica que seus alunos têm maturidade para uma aula mais formal, ok.

Entretanto, como estamos copiosamente tratando dos assuntos acima definidos, sentimos a necessidade de apresentá-los ao leitor com uma definição mais formal.

Dadas estas definições, veja que para termos uma sequência, não é necessária uma regra de formação. Durante o ensino médio, sequências podem virar sinônimo de P.A. ou de P.G. Estas sequências, de fato, têm um lugar privilegiado dados os fenômenos que pode modelar e dada a simplicidade de sua regra de formação. Sequências, entretanto, podem não ter uma expressão algébrica simples que forneça seus valores para cada índice n . Sequências podem ter uma regra de formação visual como é o caso da sequência (1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...). O site “The On-line Encyclopedia of Integer Sequences”²⁹ nomeia esta sequência como “sequência Olhe e Diga: descreva o termo anterior!”. Por exemplo, o sexto termo desta sequência tem o seu valor porque o quinto termo, se lido da esquerda para a direita, possui 3 dígitos 1, 2 dígitos 2 e 1 dígito 1. Por curiosidade, esta sequência só é formada por números com dígitos 1, 2 e 3, não importa quão grande seja seu índice. Este é um exemplo de sequência autorreferente.

A própria sequência de Fibonacci possui regra de formação simples e é um bom exemplo de que o ensino de sequências não precisa se limitar à P.A. e à P.G. Pode-se argumentar que não se costumam variar os tipos de sequências apresentadas aos alunos por causa do tempo ou porque outras sequências podem pertencer a uma Matemática de caráter mais recreativo. Ainda assim, valeria a pena introduzir algumas sequências que fujam um pouco da hegemonia P.A./P.G. E até mesmo introduzir um desafio que motive os alunos a pensar em sequências que têm uma regra de formação que não seja estritamente algébrica.

Procuramos mapear as ideias que permeiam as sequências. Uma ideia motivadora para este tema é a busca por padrões. De maneira genérica, uma das tarefas de um matemático é a busca por padrões. A procura por tornar algo que em princípio parecia desordenado e revelar uma ordem que pode não ser nada evidente à primeira vista. Ordem, por tanto é uma outra ideia fundamental.

Um subtópico da busca por padrões é a ideia de crescimento e decrescimento de uma sequência numérica. Em um segundo momento, podemos nos atentar a como ocorre o crescimento ou decrescimento de uma sequência. Em muitos

29. Disponível em: <https://oeis.org/> .Acessado em: 01 jul. 2015

fenômenos do cotidiano, não importa apenas o que ocorre, mas também como algo ocorre. Exemplificando, imagine que um aluno receba por mês uma mesada de 10 reais. Traduzindo em notação usual $(10,00; 10,00; 10,00; \dots)$ em que cada coordenada representa o quanto um aluno ganhou em um mês. Suponha que o filho peça ao pai um aumento na mesada. Suponha que o pai faça a seguinte proposta: “filho, a cada mês vou aumentar 50 centavos no valor da sua mesada”. Isto geraria a seguinte sequência: $(10,00; 10,50; 11,00; 11,50; \dots)$. Por outro lado, se o pai propusesse o seguinte: “filho, a cada 2 meses aumento 1 real na sua mesada”, a sequência de valores tornasse $(10,00; 10,00; 11,00; 11,00; 12,00; \dots)$. Em ambas as propostas, não há decrescimento nas sequências, mas percebe-se que há diferença nos padrões das sequências e até no resultado da soma dos valores dependendo da proposta que o pai faça. A primeira trata-se claramente de uma progressão aritmética. A segunda não é uma progressão aritmética, mas certamente se percebe um padrão semelhante à PA. Um exemplo de decrescimento pode ser o da represa que tem 32% do seu volume e diminui, por mês, 4%. Neste caso temos uma PA finita, pois não faz sentido que uma represa tenha uma porcentagem negativa de volume. Ao contrário do exemplo da mesada em que a regra do aumento pode se estender gerando para infinitos termos, neste exemplo, pelo contexto do problema, não podemos gerar infinitos termos. Sendo o primeiro termo igual a 32, o nono e último termo é zero. Uma sequência de números reais, sendo uma função discreta, gera um gráfico cujos pontos se alinham a uma reta. Se observarmos a expressão do termo geral da P.A., que é

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ onde } a_1 \text{ e } r \text{ são números reais dados.}$$

O valor r é o coeficiente angular e o valor $(a_1 - r)$ é o coeficiente linear. No exemplo da mesada aumentada 50 centavos a cada mês e no caso da represa que diminui 4% de seu volume por mês, temos os seguintes gráficos:

Gráfico Mesada de razão 0,5. Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico Represa de razão -4. Fonte: elaborado pelo autor

Analogamente, é possível construir um gráfico referente a um problema de P.G.

O termo geral de uma P.G é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Veja que apesar tradicionalmente chamarmos o primeiro termo de a_1 não há impedimento em chamá-lo de a_0 , tendo por consequência a mudança na fórmula do termo geral para $a_n = a_0 \cdot q^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Um exemplo de modelagem matemática na área farmacêutica: chamamos de meia-vida biológica o tempo necessário para que metade da quantidade de uma substância que um organismo tenha absorvido seja eliminada. Suponha que uma pessoa tenha tomado uma dose de antibiótico cuja meia-vida seja de uma hora. Em quantas horas podemos afirmar que ainda restaram menos de 10,0% do antibiótico no organismo desta pessoa?

Nesta pergunta, supondo que os alunos ainda não foram apresentados aos logaritmos, ainda assim é possível encontrar a resposta e o registro gráfico pode lhes ser de grande ajuda:

Gráfico da meia-vida do antibiótico. Fonte: elaborado pelo autor

Percebemos que o uso do registro gráfico auxilia verificar que na quarta hora já se pode ter certeza que o organismo da pessoa tem menos de 10,0% do antibiótico em seu organismo. Alguns alunos podem comentar que um pouco antes da quarta hora o organismo já atinge o valor de 10,0%. Esta é uma boa oportunidade de comentar, sem grande aprofundamento, que com o uso de logaritmos é possível determinar o tempo exato necessário para que o organismo tenha 10,0% do antibiótico não eliminado. Pode ser que alguns alunos não percebam o fato de que a_5 corresponda à porcentagem do antibiótico na quarta hora. Isto porque $a_1=1=100\%$ é o momento em que a pessoa toma o antibiótico. Se o professor perceber que isto pode causar confusão, pode-se chamar de $a_0=1=100\%$ o momento inicial de forma que os valores no eixo x correspondam a quanto tempo se passou em horas.

Um comentário concernente a estas contextualizações. Sabemos que problemas da vida real que frequentemente modelamos com ferramentas matemáticas estão sujeitas a variabilidade. Várias equações na Física como a fórmula da força da mola ($F=k.x$) ou a equação fundamental da calorimetria ($Q = m.c.\Delta\theta$), só para citar dois exemplos, são apenas aproximações visto que a constante k da mola é costumeiramente obtida por ajuste de pontos que, na verdade, não estão todos sobre uma única reta. Já a constante c utilizada em calorimetria, é na verdade uma variável. Mas para fins de ensino médio, não é mau que seja tratado como uma constante para variações cotidianas de temperatura. Segundo Nussenzveig (2002, p.169),

O calor específico $[c]$ varia geralmente com a temperatura; assim, no intervalo entre 0°C e 1°C , o calor específico da água é $1,008\text{cal/g}^{\circ}\text{C}$ [e não $1\text{cal/g}^{\circ}\text{C}$ que é o valor adotado no ensino médio]; na prática, neste caso, podemos desprezar tal variação.

Se os problemas reais são tão cheios de variações e incertezas, porque insistimos em modelar fenômenos físicos e de várias outras disciplinas com o uso de hipóteses que simplificam a realidade?

Um argumento possível é vem da filosofia de Descartes. Da sua obra “Regras para a Direção do Espírito”³⁰, composta por 21 regras, reproduzimos a seguir uma tradução nossa, do francês, da regra V:

Todo o método consiste na ordem e na disposição dos objetos sobre os quais o espírito [ou a mente] deve investir seus esforços para chegar a alguma verdade. Em seguida, é necessário simplificar gradualmente as proposições embaraçadas e obscuras a fim de torná-las mais simples, e em seguida, a partir da intuição destas e através dos mesmos degraus, chegar ao conhecimento de outras [proposições].

A filosofia cartesiana nos propõe começar do mais simples, ainda que inicialmente seja obscuro e embaraçado, para em seguida encontrar novas proposições. Logo, deste ponto de vista, estudar um objeto que não sofre variações de caráter aleatório para, posteriormente, incluir as variações de causa aleatória é um caminho para chegar a novos conhecimentos; este procedimento pode facilitar a criação de um modelo que seja mais próximo ou mais preditivo de fenômenos naturais.

Esta discussão um pouco mais filosófica é uma maneira de responder o porquê de estudar Matemática. Não é a única resposta. Há várias outras razões. Mas é uma resposta para o frequente argumento de que o que se vê no ensino básico em Matemática não tem utilidade fora da escola.

30 Obra originalmente escrita em latim. Não encontramos uma tradução para o português. Fonte do texto em francês: https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gles_pour_la_direction_de_l'esprit. Acessado em: 05 jul. 2015

5.1 “PROVAS SEM PALAVRAS”

Em seguida, propomos como forma de estimular diversas representações de Sequências e Séries algumas ideias vindas de dois livros: “*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*” e “*Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*” ambos de Roger B. Nelsen. Percebemos que a proposta destes livros suscita alguma polêmica no meio matemático. Primeiro porque não podemos rigorosamente considerar cada diagrama apresentado nos livros como uma demonstração.

Traduzimos abaixo uma citação, presente na introdução de “*Proofs Without Words II*”, que julgamos simples e concisa para trazer os principais pontos envolvidos na proposta dos livros de Nelsen:

Matemáticos, como nós, apreciam ideias engenhosas; particularmente se encantam com uma figura engenhosa. Mas esta apreciação não subjuga seu constante ceticismo. Além do mais, um diagrama é, na melhor das hipóteses, apenas um caso particular e, portanto, não demonstra um teorema. E o pior, pode ser evidentemente enganoso. Apesar de não ser universal, a atitude usual é tratar figuras como não mais que recursos heurísticos; elas são psicologicamente sugestivas e pedagogicamente importantes (mas não *provam* nada). Eu quero me opor a este ponto de vista e argumentar em favor das figuras terem um papel legítimo servindo como evidência e justificação, incluindo um papel que vai além da heurística. Em resumo, figuras podem provar teoremas. (Fonte: James Robert Brown do livro *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures* apud Nelsen, 2000, p.x, tradução nossa)

Exceto pela última afirmação, concordamos com esta citação. Existem demonstrações que apenas suscitam concordância do ponto de vista lógico, mas parecem estéreis ou pouco elegantes. Figuras podem auxiliar a intuição a chegar na razoabilidade da afirmação fornecendo argumento heurístico. Do ponto de vista pedagógico, seu uso chega a ser essencial dependendo do teorema a ser demonstrado.

Se nos permite uma digressão, até mesmo alguns diagramas se mostram úteis em aspectos práticos da teoria em Matemática como a multiplicação de quatérnios ou a derivação/integração de senos e cossenos. Ou seja, auxilia a compreensão e também a memorização. A título de nota, não defendemos um ensino que se resume a memorização dos conteúdos escolares. Porém, é digno de apreço dispor de recursos que ajudem os alunos a resgatar na memória um conhecimento que entenderam. Isto é benéfico para o desempenho em aprender outros conteúdos. Nossa experiência como professor de Cálculo nos fez perceber o seguinte: ainda que os alunos tenham entendido o conceito de integral, a falta de fluidez (ou facilidade) em encontrar primitivas faz com que alguns sintam dificuldades com outros conteúdos que dependem do cálculo de integrais. Logo, o uso de recursos de qualquer natureza que auxiliem a memória são bem-vindos. Pode ser que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Adaptado de NELSEN, 2000, p.46

alguém discorde afirmando que uma vez que se tenha realmente aprendido algo, a memorização é uma consequência. Discordamos desta afirmação. Há alguns resultados, como as fórmulas do seno ou do cosseno da soma, que exigem dos alunos a habilidade de memorização. Um recurso gráfico como o apresentado na figura acima pode atribuir mais significado às fórmulas em questão. Em vez de ser apenas um resultado técnico, há um ganho em significado. Veja, entretanto, que a compreensão do diagrama não é imediata.

Saindo desta digressão, podemos mencionar outra crítica às obras de Nelsen: não são totalmente sem palavras visto que as representações do registro algébrico têm relação com a linguagem natural. A álgebra que Tartaglia e Cardano representavam através da língua latina ou italiana, hoje fazemos com o auxílio de uma notação que simplifica representações e operações de objetos matemáticos. Mas são raras as figuras de seu livro que vêm com um texto explicativo. Assim, é razoável ter no título dos livros o termo “Without Words”. É interessante notar que algumas “demonstrações” foram usadas na China antiga, no renascimento italiano, Grécia do período clássico, e na Índia do século XII d.C. A título de curiosidade, o

verbo $\epsilon\lambda\delta\omega$ em grego antigo significa tanto *ver* quanto *saber* (BAILLY, 2000, p.584). Isto estabelece uma relação, em língua grega, da visão como sentido propício ao contato com o conhecimento. Veja, porém, que este é só um entre vários verbos que significam *saber*, entre eles, $\gamma\iota\gamma\nu\omega\sigma\kappa\omega$ e $\mu\alpha\nu\theta\acute{\alpha}\nu\omega$.

Nos livros de Nelsen, a representação pictórica de uma sequência é sempre feita no contexto de uma série. Logo, os termos de uma sequência são representados de acordo com o formato final da série. Existem séries infinitas de razão entre 0 e 1 que são bem representadas no registro figural. E nas séries finitas em que se procura uma fórmula generalizadora, ainda que a figura represente uma quantidade de números finita, ainda é possível que o aluno que a visualiza assuma que ao somar o próximo termo da sequência o padrão visual se

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

Soma dos primeiros "n" naturais. Fonte: Nelsen, 1993, p.69.

mantenha. A impossibilidade de 'demonstração figural' das identidades apresentadas se deve a impossibilidade das figuras representarem generalidade. Não conseguimos rigorosamente representar em uma figura o caso n (qualquer) para a soma $1+2+3+4+5+\dots+n$. Podemos bem representar em uma folha de papel as somas parciais, 1; 1+2; 1+2+3; 1+2+3+4 e com uma folha de papel bem grande e muita boa vontade é possível criar uma representação pictórica da soma $1+2+3+\dots+99+100$. Entretanto, como representar a soma $1+2+3+4+5+\dots+n$, sendo n um número natural qualquer? Para a figura nos ajudar, de maneira heurística, a provar uma identidade com generalidade é preciso assumir que um padrão, um formato, se mantém não importa o número de termos que sejam representados em uma folha de papel. Logo, cabe àquele que vê a figura abstrair a generalidade e, caso deseje demonstrar aquilo que intuiu, recorrer à álgebra. As figuras podem ser consideravelmente sugestivas quanto a expressão algébrica que é resultado de uma soma e, por indução matemática, pode-se proceder uma demonstração.

Todavia, lembrando a teoria de Duval, não se pode dar por certo que os alunos saibam como fazer conversões entre registros de representações diferentes. É

desejável que se explicita a maneira de como converter as representações pictóricas em representações algébricas. Pode até haver casos em que os alunos tenham entendido a correspondência entre as duas representações. Caso os alunos sintam dificuldades com a conversão, não há ganho do ponto de vista pedagógico com a representação pictórica visto que não se reconhece nesta sua correspondente na representação algébrica.

Para citarmos um exemplo prático, sabemos que muitos dos nossos alunos costumam se equivocar afirmando que $(a+b)^2$ seja igual a $a^2 + b^2$. Talvez a causa deste erro esteja em acreditar que a operação acima seja análoga a $2(a+b) = (2a+2b)$. Ou seja, uma aplicação da propriedade distributiva usada indevidamente para potenciação de binômios. A explicação usual que damos aos alunos é:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Algun tempo após explicarmos, não raramente vemos este mesmo erro se repetir. Trata-se de um erro sistemático. A própria notação algébrica $(a+b)^2$ pode induzir o aluno a escrever $a^2 + b^2$ se este não estiver atento. Eis aí uma boa oportunidade de apresentar aos alunos uma representação geométrica da identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

Não existe garantia de que um segundo registro solucione de vez erros sistemáticos como o que exemplificamos. Mas traz ao aluno uma segunda forma de

visualizar o problema e, talvez, lembrar que $(a+b)^2$ não resulta apenas nos quadrados a^2 e b^2 , mas também é formado por dois retângulos ab . O aluno que não lembre da identidade em questão, pode desenhar um quadrado de lado $(a+b)$ e assim lembrar dos dois retângulos. Encontramos este exemplo em uma palestra sobre o uso de diversos registros de representação semiótica ministrada pela Profa. Ana Paula Jahn em outubro de 2014. Através desta palestra que tivemos um primeiro contato com a teoria dos registros de representação semiótica de Duval.

Representação geométrica do quadrado da soma. Fonte: http://moodle.wfo-brunneck.info/file.php/1/wichtige_produkte.jpg

5.2 ELABORANDO ATIVIDADES COM UMA PROPOSTA DUVALIANA

Utilizamos diversas representações pictóricas dos livros “*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*” e “*Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*” que representam alguma identidade algébrica. Nossa proposta é principalmente guiada pelo uso de passos indutivos que ajudem os alunos a perceberem um paralelo entre as figuras que apresentamos e a identidade algébrica que se quer visualmente evidenciar. Uma vez que os alunos saibam fazer conversões entre registros, queremos que as atividades propostas deem a eles a oportunidade de fazer as próprias descobertas.

Quanto ao planejamento das atividades, em princípio não nos parece proveitoso criar uma aula só com este tipo abordagem que relaciona figuras com identidades algébricas. A não ser que se trate de um mini-curso com esta temática. Logo, por exemplo, as representações que envolvem soma dos n primeiros naturais ou soma dos n primeiros naturais ímpares podem auxiliar o professor antes ou depois de deduzir a fórmula da soma de uma P.A.; as que envolvem séries geométricas podem ser trabalhadas antes ou depois do professor deduzir a fórmula da soma de P.G. Outras somas, podem ser vistas como forma de não se limitar à P.A. e à P.G. Logo, são atividades que enriquecem as interações em sala de aula ao alimentar a intuição dos alunos antes de uma demonstração de caráter algébrico.

Queremos destacar uma coisa. O uso destas atividades não dispensa o professor de demonstrar as fórmulas que usa. Como já afirmamos, o professor de matemática não precisa demonstrar 100% de todas as fórmulas e argumentos que utiliza. Mas também não pode apenas procurar e aplicar modos de convencimento (ou uso de argumentos de autoridade) para justificar os resultados em Matemática. Demonstrar é uma atividade caracterizada pelo pensamento dedutivo. Portanto, deve haver momentos em que as principais afirmações de uma aula de matemática sejam demonstradas. De outra forma, se está descaracterizando uma das metas do ensino de Matemática que é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. E, no lugar, corre-se o risco de se tornar uma atividade de simplesmente memorizar fatos, fórmulas e aplicá-las em avaliações. Ao propormos atividades que envolvem uma figura para obter uma intuição da veracidade de identidades algébricas, isto deve ser visto como um apoio para uma demonstração algébrica e não um substituto persuasivo para evitar demonstrações.

Pode ser que se queira, nas primeiras atividades, destacar o significado de usar uma letra no lugar de um número para generalizar uma identidade. Este uso pode não ser simples de entender aos alunos e, logo, exige um cuidado por parte do professor. Nossa proposta nesta dissertação é, em cada atividade, partir de representações pictóricas simples acompanhadas de seu registro aritmético (e não algébrico) em um primeiro passo. Depois, evidenciar aos alunos as características geométricas em comum que se observam em cada representação pictórica simples. Em seguida, questionar os alunos: “se criássemos a próxima representação pictórica (não com estas palavras!) usando o mesmo raciocínio que gerou os anteriores, o formato da figura e a representação aritmética se manteriam?” Neste momento, introduzimos a ideia de generalidade e apresentamos o uso de uma letra (variável) como forma de generalizar, de maneira algébrica, diversas afirmações aritméticas. Uma vez que os alunos tenham entendido a passagem da aritmética para a álgebra e, tão importante quanto, a passagem da representação pictórica para a representação aritmética, esperamos que as atividades seguintes sejam feitas com cada vez mais autonomia por parte dos alunos. Podemos afirmar que uma meta a se atingir com o uso de mais de uma representação semiótica não é apenas causar persuasão quanto a veracidade de resultados algébricos, mas também estimular o raciocínio geométrico e a autonomia para fazer conversões entre registros.

5.3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES COMENTADAS

Neste capítulo, apresentamos propostas de trabalho pensados para aplicação em sala de aula. Procuramos elaborar procedimentos indutivos de forma a, pouco a pouco, evidenciar as maneiras de converter representações entre registros. No caso, entre o registro figural e o registro algébrico. A maioria delas pode ser apresentada apenas com lousa e giz. Para outras percebemos que, para trabalhos em grupos, a criação de um material feito de papel cartão ou cartolina pode ser de grande ajuda.

Alguns dos nossos comentários supõem que as atividades serão aplicadas na ordem aqui proposta. Adiantamos que um dos objetivos que buscamos é a autonomia do aluno para fazer conversões entre registros. A cada atividade, esperamos que o aluno se sinta cada vez mais apto a generalizar identidades algébricas que são sugeridas pelo formato que as representações pictóricas conservam. Logo, à medida que detalhamos nossas atividades, a ideia de generalizar se torna cada vez mais presente nos comentários. Mas pode-se perfeitamente seguir uma outra sequência de atividades. Neste caso, é desejável que se procure adaptar as sugestões que aqui apresentamos de maneira que os alunos entendam como converter representações entre os dois registros. Deste a primeira atividade, buscamos desenvolver este entendimento. Mas, nas posteriores, o foco se volta para a habilidade de generalizar partindo da aritmética para uma identidade algébrica.

5.3.1 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS I

Começamos o exercício propondo a seguinte atividade: encontrar uma forma simples de somar $1+2+3+4+\dots+119+120$ sem precisar somar número por número. Nossa pergunta inicial não é uma procura por generalização, mas a solução de um problema pontual pode ser um bom motivador para, em seguida, tentar uma generalização. Para isso, vamos representar somas menores sendo que cada número é representado por uma coluna de bolinhas. Seja com a lousa ou em pequenos grupos usando cubinhos de material dourado, por exemplo, uma ideia importante é que, em cada retângulo representado, a quantidade total de bolinhas é sempre o produto do número de bolinhas da base pelo número de bolinhas que compõem a altura.

$$2(1+2) = 3.2$$

$$= (2+1).2$$

base x altura

$$2(1+2+3) = 4.3$$

$$= (3+1).3$$

base x altura

$$2(1+2+3+4) = 5.4$$

$$= (4+1).4$$

base x altura

$$2(1+2+ \quad) = _ . _$$

$$= (_ + 1) . _$$

base x altura

Nesta figura, queremos calcular somente o número de bolinhas claras sem contar uma por uma. Com a ajuda do raciocínio que desenvolvemos para as figuras anteriores, existe um jeito fácil de fazer este cálculo?

Mas como queremos somente uma soma, podemos dividir os dois lados da equação por 2:

$$(1+2+ \quad) = \frac{1}{2}(_ . _)$$

Atividade adaptada de Nelsen, 1993, p.69.

E trabalhando esta ideia desde a segunda figura (pois talvez uma bolinha clara ao lado de uma escura não evidenciem um retângulo com medida de base 2 e altura 1), queremos que os alunos detectem, por si mesmos, um padrão entre o último termo da soma e os números que multiplicamos para obter o total de bolinhas. Formamos uma equação entre o dobro da soma e quantidade total de bolinhas obtida de forma semelhante à fórmula da área de um retângulo.

Observando na figura correspondente a $2(1+2+3+4+5)$, como queremos o valor da soma, deve-se dividir os dois lados da equação correspondente por 2. Nesta etapa, saímos de uma atividade de conversão entre registros, para um tratamento aritmético com a equação que criamos.

Na representação seguinte, queremos que os alunos façam por si só a conversão entre registros e obtenham o valor da soma $1+2+3+4+5+6$. Todos estes passos, visam assegurar que os alunos tenham realmente compreendido a conversão entre registros e resolvam por si só o problema. Neste momento, voltamos para o problema inicial de somar $1+2+\dots+119+120$. Primeiramente, uma representação figural da soma dos 120 primeiros números naturais não é simples de ser feita. Demanda muito tempo e uma folha de papel muito grande para ser representado. Os alunos sabem disso. Pois bem, esperamos que eles tenham percebido o padrão geométrico que se forma não depende o tamanho do n e que o resultado da soma só depende do valor do seu último termo. Entretanto, não é desejável que se evidencie prontamente este fato, mas, através dos exemplos, que os alunos cheguem à esta conclusão por si mesmos. É importante que eles participem do desenvolvimento das ideias e não apenas o assistam. Cremos que fazer perguntas que vão pouco a pouco conduzindo os alunos às respostas é uma forma torná-los participantes do raciocínio que se produz em sala de aula. Pode-se perguntar se o número de termos que se quer somar altera ou não a maneira de calcular o resultado. A pergunta visa introduzir ideia de generalização para calcular a soma.

Nesta primeira atividade, visto que a ideia de generalização pode não ser familiar a todos os alunos, cremos benéfico que se explique o significado do n e o fato da generalização permitir o uso de um raciocínio sem precisar de um desenho para cada soma de números naturais que se queira fazer. Nas próximas atividades, já se espera que eles percebam que o uso de casos particulares tem por objetivo criar generalização com o uso do registro algébrico. Introduzimos a pergunta: existe alguma característica que cada uma das figuras acima têm em comum? Pois queremos que o registro figural auxilie a descoberta da identidade. Não se trata somente de ilustrar algo algébrico, mas que o aluno perceba que as representações pictóricas têm um formato comum para cada soma representada. Ainda que o uso da lousa ou de slides nos pareçam recursos suficientes para aplicar nossa proposta, para trabalhos em grupos, pode ser proveitoso dispor de algum material que os alunos possam manipular.

Nelsen atribui aos gregos antigos esta representação da soma dos n primeiros números naturais.

5.3.2 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS II

Esta é uma segunda proposta para introduzir a identidade $1+2+\dots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$. Desta vez, a representação pictórica usada é relacionada com áreas. Em especial, com a área de triângulos.

Atividade adaptada de Nelsen (1993, p.70)

Há um pressuposto nesta representação: cada quadrado tem lado 1 e, logo, área 1. E como a soma está ligada a ideia de área, é prudente que se relembre os alunos sobre como calcular a área de um triângulo. Uma maneira de trabalhar esta atividade é conduzi-la de maneira semelhante à atividade 1, ou seja, de forma indutiva. A partir do segundo termo pode-se calcular a área do triângulo branco (aquele que tem dois de seus lados medindo o mesmo que a altura da pilha de quadrados) e, sabendo que a área de cada triângulo escuro é $\frac{1}{2}$, adicionar a área de todos os triângulos escuros. Um cuidado que esta atividade exige é a compreensão de que os números são representados por áreas e, portanto, é

desejável que os alunos saibam calcular as áreas envolvidas. Mais do que na primeira atividade, pode ocorrer que um aluno que não tenha compreendido a relação figuras e números simplesmente faça esta atividade de maneira mecânica, com o seguinte raciocínio: de uma figura para outra, basta acrescentar uma unidade. Uma forma de tentar contornar este problema é a seguinte: após apresentar a figura referente à soma $1+2+3+4$, pedir aos alunos que convertam para o registro aritmético a figura correspondente à soma $1+2+3+4+5+6$. Ou seja, quebrar um pouco a ordem. Caso se perceba que já é possível pedir aos alunos que generalizem por conta, é aconselhável que o façam. Caso contrário, não vemos problema que o professor, nesta segunda atividade, generalize a expressão com o uso de uma letra para caracterizar o fato da expressão obtida depender do último termo da soma. Pode ser que alguns alunos não percebam que $n^2/2 + n/2 = \frac{1}{2} n(n+1)$. Vale o comentário de que as atividades 1 e 2 representam a mesma identidade, porém de formas diferentes.

5.3.3 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS ÍMPARES I

Esta atividade é similar à Soma dos Primeiros Números Naturais I por causa da forma de representar os números. Pensando numa sequência didática, esperamos que os alunos, uma vez que refletiram sobre as atividades anteriores, já se sintam mais motivados a fazer conversões de representações com mais autonomia e, talvez, chegar a uma generalização da identidade proposta com pouca intervenção do professor.

Antes mesmo do início desta atividade, recomendamos ressaltar aos alunos o fato de que, em registro algébrico, os números ímpares podem ser representados na forma $2n-1$, onde n pertence ao conjunto dos inteiros. Isto com exemplos como: para $n=3$, formamos o número $2 \cdot 3 - 1 = 5$; o número 15, se o igualarmos a $2n-1$, podemos trabalhar algebricamente e encontrar $n=8$. Isto porque, especialmente neste exercício, ter facilidade com o tratamento algébrico beneficia a compreensão da conversão entre registros. Nas atividades anteriores, o termo final da soma tem uma relação mais evidente com a identidade encontrada. Já nesta, $1+3+5+7$ não é igual a 7^2 . Outro fato que o professor pode lembrar em sala de aula é que $2 \cdot 3 - 1 \neq 2 \cdot (3-1)$; ou ainda que $5+2 \cdot 8 \neq (5+2) \cdot 8$. Este erro que advém de efetuar somas e subtrações antes de multiplicações e divisões é muito comum. Logo, merece ao menos um comentário.

$1+3+5+7+9 = 1+3+5+7+(2 \cdot 5-1)$
 $= (\quad)^2$

A partir dos exemplos que mostramos ao lado, escreva a soma correspondente da última figura e o valor simplificado desta soma. Em seguida, escreva uma generalização que facilita o cálculo da soma dos n primeiros ímpares naturais.

Atividade adaptada de Nelsen (1993, p.71)

Apesar desta atividade, assim como as anteriores, começar a trabalhar a conversão de registros com $n=2$, o professor pode destacar o fato da identidade encontrada no final da atividade funcionar para $n=1$. Não elaboramos uma conversão a partir do $n=1$, porque talvez não seja evidente ao aluno visualizar uma bolinha e enxergar um “quadrado de lado 1”. Com $n=2$, já é possível perceberem uma forma quadrada; além disso, sendo o tema de nossa atividade uma soma de números ímpares, começar a representar pelo primeiro termo, sendo que este não é representado figuramente como uma soma de elementos, talvez não seja proveitoso

de início. Aconselhamos que, antes do término desta atividade, se pergunte aos alunos se a identidade encontrada também vale para $n=1$.

Veja que, após representar o quadrado cujo número de elementos é 4^2 ($n=4$), pedimos ao aluno que complete as informações do registro figural para o registro aritmético do caso $n=6$. Esta é uma tentativa de evitar que o aluno simplesmente siga a sequência indutiva de maneira automática e sem pensar na questão que, de fato, lhe é proposta. Esperamos que a figura auxilie o raciocínio desenvolvido pelo aluno e não que a sequência indutiva o faça pensar, sem entender, que a próxima resposta é obtida apenas adicionando 1 ao caso anterior.

Podemos ainda, propor nesta atividade uma conversão do registro algébrico, para o figural. Veja que não exploramos o caso $n=5$. Assim, após o aluno ter tentado generalizar a identidade algébrica, sugerimos o seguinte: “Um quadrado formado por $5^2=25$ bolinhas é o resultado da soma dos primeiros números ímpares. Assim sendo, represente este quadrado de maneira semelhante aos quadrados que representados esta atividade e responda qual é o valor do maior termo da soma de ímpares. Há alguma forma de descobrir o último termo da soma sem precisar representar o quadrado?”.

Esta ideia fazer o registro no sentido inverso visa criar uma compreensão maior entre as duas representações. O registro figural não foi dado, precisa ser criado e auxilia a descobrir o valor do maior termo da soma. Entretanto, esta pergunta quer também reforçar a relação entre o último termo da soma e o resultado da mesma.

Podemos lançar uma outra ideia correlata para que os alunos desenvolvam a ideia de generalização: “se partirmos de um quadrado com n^2 bolinhas, como descobrir o valor do último termo da soma dos primeiro números ímpares?” Visumbramos duas maneiras simples de chegar à resposta. A primeira é, observando o registro figural que temos na “prova sem palavras” de Nelsen, o último número ímpar somado é representado pela aresta da direita somada à aresta superior do quadrado. Ambas as arestas medem n . Mas a resposta não é $2n$, pois neste caso estamos somando o vértice superior direito duas vezes. Portanto, a resposta, é $2n-1$. Esta maneira parte do registro figural para chegar ao registro algébrico favorecendo, portanto, o uso de mais de um registro semiótico para a obtenção da resposta.

Uma segunda maneira, é fazer uso de uma tabela.

Caso	Soma	Último termo	Resultado da soma
1	1	$1=2.1-1$	$1=1^2$
2	1+3	$3=2.2-1$	$4=2^2$
3	1+3+5	$5=2.3-1$	$9=3^2$
4	1+3+5+7		
5			
6			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			n^2

Tabela 1: Organização de dados.

O uso da tabela, ao organizar as informações, é uma maneira de construir um pensamento indutivo e, assim, perceber elementos de um problema que nos conduzem a uma generalização. O pensamento indutivo pode ser útil para evidenciar um padrão. Todavia, é interessante que o professor enfatize que um resultado obtido com este pensamento não constitui uma demonstração, ainda que possa revelar características do resultado que se procura. Por outro lado, nos restringimos ao registro algébrico. Como consideração final, pode ser que os alunos façam uma associação entre o número de termos somados e o resultado da soma. Por exemplo, no caso 4, há 4 números ímpares somados e o resultado é 4^2 . Seria interessante que os alunos cheguem a esta conclusão por si mesmos.

5.3.4 SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS ÍMPARES II

A próxima atividade apresenta uma representação com um argumento que envolve a relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Há nesta representação uma simplicidade que encanta. Entretanto, pensando do ponto de vista dos alunos, é necessário cuidado para que esta “prova sem palavras” faça algum sentido a eles, como faz sentido para professores de matemática. Antes de comentarmos mais, mostramos abaixo como Nelsen a apresenta:

$$\Delta + 3 \cdot \Delta + \dots + (2n - 1) \cdot \Delta = A = n^2 \cdot \Delta$$

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Soma dos n primeiros ímpares. Nelsen, 1993, p.73.

É interessante perguntar aos alunos o que sabem sobre semelhança de triângulos. Sabemos que, sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos semelhantes,

$$\text{Área}(\triangle ABC)/\text{Área}(\triangle DEF) = (AB/DE)^2 = (BC/EF)^2 = (CA/FD)^2.$$

Pois bem, este teorema não lhes seja familiar ainda que já o tenha estudado anteriormente. Certamente, podemos proceder de maneira indutiva conforme sugerimos nas atividades anteriores. Primeiro o professor desenha um triângulo (caso $n=1$), depois desenha ao lado os 4 triângulos formando um único triângulo para o caso $n=2$, e assim por diante. Em vez de ganhar um grande quadrado, com na atividade 3, ganha-se um grande triângulo. Esta abordagem indutiva, como a que temos feito até então, é totalmente válida. Entretanto, com esta representação temos a oportunidade de obter uma identidade algébrica por um argumento que vem de um teorema da geometria. Se os alunos realmente souberem usar este teorema, a resposta generalização é rápida. Mas caso eles ainda não saibam, esta “prova sem palavras” pode ser adaptada e usada como exercício quando o professor estiver justamente ensinando a relação entre as áreas de triângulos (ou polígonos) semelhantes. Isto mostra que uma atividade como a que estamos propondo e que

envolve o uso de mais de um registro de representação não precisa ser tratada em uma aula especial, mas pode estar inserida no cotidiano do ensino de matemática.

5.3.5 SOMA DE CUBOS

Em seu primeiro livro, Nelsen mostra seis representações diferentes de soma de cubos. No segundo livro, há uma sétima representação. Logo, este tema foi bem explorado pelo autor. Para atividade que propomos, vamos usar duas das “provas sem palavras”. A primeira, representa cubos e os decompõem para formar uma placa única:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Soma de cubos. Nelsen, 1993, p.86

Já a segunda representação torna-se mais simples de compreender após visualizarmos a anterior:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Soma de cubos em uma placa. Nelsen, 1993, p.85

Neste caso, a exemplo das nossas primeiras atividades, não queremos simplesmente informar aos alunos que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ após mostrar figuras que os persuadam disto. Queremos que eles usem as figuras como guias para a descoberta de padrões. E que saibam escrever estes padrões em representação algébrica.

Há a possibilidade de trabalharmos estas representações com giz e lousa. Mas, assim, perdemos a chance de explorar de maneira diversa uma representação espacial. Tendo isto em vista, procuramos elaborar um material adequado para tal de forma que os alunos possam decompor cubo e transformá-los em placas. Nossa ideia é adaptar peças de material dourado e, assim, possibilitar representações espaciais dos cubos. De certo, estas adaptações não são revertíveis, portanto, caso queira criar um material semelhante ao nosso, aconselhamos comprar um material dourado extra para este fim. Descrevemos abaixo os passos que seguimos para representação palpável da identidade que queremos mostrar:

Primeiro, usamos três placas do material dourado fazendo a seguinte marcação:

Marcação em placas de material dourado. Fonte: elaborado pelo autor

As placas foram cortadas seguindo estas marcações. Limpas da serragem, foram-lhes aplicadas duas mãos de tinta fosca para artesanato e duas mãos de verniz para maior acabamento e durabilidade. Obtivemos o seguinte resultado usando duas placas de material durado para cada tipo de marcação:

Material para representar somas de cubos. Fonte: elaborado pelo autor

Usamos este material para fazer representações semelhantes às de Nelsen:

Representando os cubos 1^3 , 2^3 , 3^3 , 4^3 e 5^3 . Fonte: elaborado pelo autor

Decompondo estas peças e remontando-as sem empilhamento obtemos a seguinte configuração:

Decomposição e reordenamento plano das peças dos cubos. Fonte: elaborado pelo autor

Observação: Obtivemos algumas peças sobressalentes.

Eis uma atividade que podemos propor aos alunos: “Sem empilhar as peças que formam os cubos, encontre um formato comum para as seguintes somas: 1^3+2^3 , $1^3+2^3+3^3$ e $1^3+2^3+3^3+4^3$. A partir do formato comum obtido, é possível calcular a soma dos cubos sem precisar calcular cada um dos termos ao cubo e somá-los?” Talvez a expressão “formato comum” não tenha significado evidente aos alunos. Caso tenha feito a atividade 3, por exemplo, é mais simples lembrar que a soma de números ímpares não modificavam o formato quadrado do resultado naquela atividade, por exemplo. Logo, será que podemos, com as peças que formam os cubos, encontrar também um padrão que se mantém nas diversas somas de cubos?

Veja que nesta atividade há a chance dos alunos encontrarem um formato que não estamos esperando. Isto não é um problema. Caso isto ocorra, é interessante procurar um correspondente algébrico para o formato encontrado. Isto contanto que o formato encontrado se mantenha com a soma do próximo termo da sequência.

O uso de materiais como o que criamos são desejáveis para esta atividade. Entretanto, é viável tratar do tema “somas de cubos” sem o auxílio destes materiais. Mostramos na atividade 6 um exemplo de soma de cubos sem o uso de uma representação em 3 dimensões.

Supondo que os alunos já conheçam as atividades anteriores, acreditamos que tenham uma noção do que significa encontrar padrões e generalizar uma identidade. Mas supondo que o professor queria utilizar esta atividade primeiro, o que pode ser feito para que os alunos aprendam a fazer conversões entre os registros aqui trabalhados? Oferecemos uma sugestão:

O total de quadrados de menor tamanho é $3 \times 5 = 15$

O total de quadrados de menor tamanho é $3 \times 5 - 3 = 12$

O total de quadrados de menor tamanho é $3 \times 5 - 2 \times 3 = 15 - 6 = 9$

É importante que os alunos percebam que não é necessário contar todos os quadradinhos para obter o total. E que é possível, como no terceiro exemplo, calcular o número de quadradinhos como se não faltasse nenhum do retângulo 5 por 3 e subtrair pelo número de quadradinhos ausentes (que formam um retângulo 3 por 2). Esta ideia é relevante para que os alunos observem o registro figural e consigam

convertê-lo para o registro aritmético. Não sabemos se esta sugestão seja suficiente para que os alunos cheguem à resposta que esperamos. Mas caso seja realmente a primeira atividade aplicada aos alunos, aconselhamos uma abordagem indutiva para que o aluno possa entender, começando de casos mais simples para casos mais complexos, como se relacionam o registro figural e o registro aritmético. Produzimos abaixo um exemplo de abordagem indutiva:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= 3 \cdot 3 \\ &= (1+2) \cdot (1+2) \\ &= (1+2)^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 6 \cdot 6 \\ &= (1+2+3) \cdot (1+2+3) \\ &= (1+2+3)^2 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 10 \cdot 10 \\ &= (1+2+3+4) \cdot (1+2+3+4) \\ &= (1+2+3+4)^2 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 15 \cdot 15 \\ &= (1+2+\underline{\hspace{2cm}})^2 \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Neste instante, você já deve ter percebido que decompor os cubos dos n primeiros números naturais em vários cubinhos de lado 1 e organizá-los sem empilhamento pode formar um padrão que se mantém nos diversos casos. Caso tenhamos $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, há maneira mais simples de calcular sem ter calcular cada número ao cubo e somar os resultados?

Proposta de atividade indutiva. Adaptado de Nelsen, 1993, p.85

Entretanto, se os alunos já tiverem refletido sobre as atividades anteriores, não nos parece proveitoso continuar insistindo em um abordagem indutiva. Isto porque se espera que estes alunos já tenham noções de como realizar conversões entre registros. Assim, compensa investir tempo em atividades que eles tenham maior autonomia para que se sintam autores do próprio conhecimento e não apenas

participantes de um processo indutivo que direciona os resultados para a resposta esperada pelo professor.

5.3.6 SOMA DE INTEIROS E SOMA DE CUBOS

Nesta atividade, com uma única representação figural, conseguimos representar a soma dos n primeiros números naturais e a soma dos n primeiros cubos de lado natural. Analogamente à atividade anterior, cremos que o uso de um material palpável seja aconselhável, ainda que não seja essencial para o trabalho em sala de aula. Antes de continuarmos mais comentários, vamos mostrar a “prova sem palavras” a qual nos baseamos para propor nossa atividade:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n + 1)\right)^2$$

Prova sem palavras. Fonte: Nelsen, 1993, p.90

Para chegar nas identidades propostas, podemos apostar no uso de pensamento indutivo. Como veremos na próxima figura, procuramos escrever o aspecto aritmético das figuras nos casos $n=1$, $n=2$ e $n=3$ de maneira a não evidenciar as características das figuras que se mantêm. Queremos permitir que os alunos cheguem às identidades que procuradas percebendo por si mesmos estas características. Não sabemos se bastaria apresentar a figura acima para que eles elaborem um raciocínio sobre como a figura os ajuda a chegar nas identidades. Surpreende nesta atividade o fato de nos permitir uma fórmula para a soma de cubos através de uma representação em 2 dimensões.

Prova sem palavras. Adaptado de Nelsen, 1993, p. 90

Dois fatos são importantes para esta atividade: que podemos decompor e reconfigurar uma figura preservando sua área. Em especial, que quadrados podem ser transformados em triângulos e ao decompô-los da maneira apresentada acima, a medida da base é sempre o dobro da medida da altura. Logo, para o caso n , $2(1+2+3+\dots+n) = (n+1)n$; concluímos que $(1+2+3+\dots+n) = (n+1)n/2$.

Por sua vez, ainda no caso n , a área do triângulo formado após o rearranjo dos quadrados empilhados é $A = (\text{base} \times \text{altura})/2 = [(n+1)n] \times [(1+2+\dots+n)]/2$. Mas sabemos que $[(n+1)n]/2$ é igual a $1+2+\dots+n$. Então, a área é $(1+2+\dots+n)^2$ ou, como escrito por Nelsen, $[(n+1)n/2]^2$. Antes da decomposição da pilha dos quadrados tínhamos por 1 quadrados de área 1^2 (ou seja, $1 \times 1^2 = 1^3$) mais 2 quadrados de área 2^2 (ou seja, $2 \times 2^2 = 2^3$) até somarmos as áreas de n quadrados de área n^2 (ou seja, $n \times n^2 = n^3$), logo, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$.

Ainda não explicamos o porquê da base do triângulo formado ter medida $n(n+1)$. Seja ABCD um quadrado e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ (ver figura abaixo). Temos que o quadrado pode ser decomposto em duas figuras: O trapézio AMCD e o triângulo $\triangle MBA$. Vamos renomear os pontos deste triângulo para $\triangle MB'A'$. Podemos reconfigurar o quadrado original de forma que o ponto B' do triângulo coincida com o ponto C do trapézio e, assim, figura resultante seja um triângulo $\triangle AA'D$.

Reconfigurando um quadrado em um triângulo. Fonte: elaborado pelo autor

Veja que $CA' = CD + A'B' = 2CD$. Em cada fileira de quadrados de mesmo tamanho temos que apenas um quadrado reconfigurado em um triângulo. Temos que a pilha de quadrados da figura original no caso n tem base de medida n e ao ser reconfigurada em um triângulo terá base $(n+1)n$ por causa do último quadrado à direita da fileira que é transformado em triângulo.

Como propor aos alunos uma atividade que os conduzam verificar, através da representação figural, as identidades algébricas da “prova sem palavras”? Não sabemos o quanto eles estão acostumados com ideia de decompor e recompor figuras geométricas. Logo, o professor pode começar explicando lhes a decomposição do quadrado em um triângulo retângulo e pedir para que, primeiro, escrevam a soma das medidas das áreas dos quadrados abaixo da seguinte figura:

Três fileiras de quadrados. Fonte: elaborado pelo autor

Esperamos que escrevam $1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$. Mas se perguntarmos se é possível colocar os termos iguais em evidência, é esperado que cheguem em $1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2$.

Em seguida, pedimos que transformem o último quadrado da direita de cada fileira em um triângulo retângulo e informem o formato que a pilha de quadrados assumiu. Perguntamos se houve mudança de área quando modificamos o formato da pilha de quadrados. Em seguida, pedimos para verificar se existe uma relação entre a medida altura da pilha de quadrados reconfigurada e sua base. Se sim, esta mesma relação se mantém caso nossa pilha de quadrados tivesse quatro quadrados embaixo?

Quatro fileiras de quadrados. Fonte: elaborado pelo autor

Podemos generalizar a relação da medida da altura e da base para o caso de haver n fileiras de quadrados? Veja que no caso n , a altura representa a soma $1+2+3+\dots+n$. Com a relação que encontramos nas n fileiras de quadrados, é possível encontrar uma identidade para a soma dos n primeiros números naturais?

Agora nos voltamos para as áreas envolvidas na figura reconfigurada. Se recompor a figura, da maneira que propomos não modifica o valor de sua área, podemos afirmar que $1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ é igual à área da figura reconfigurada. Mas esta área também pode ser obtida considerando o formato da pilha de quadrados reconfigurada em um triângulo. Para o caso n , pode-se pedir

para que se obtenha uma identidade que nos ajude a calcular a soma dos cubos $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$. Pode-se fornecer como dica usar a relação encontrada entre a altura e a base da pilha de quadrados reconfigurada.

Com a atividade assim elaborada, esperamos incentivar os alunos a fazer decomposições nas figuras que aprende e não apenas fazer da geometria do problema um pretexto para trabalhar uma ideia algébrica.

5.3.7 SOMA DOS QUADRADOS DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci tem muitas aplicações e possui muitas propriedades. Como referência, há a dissertação de mestrado de Sena (2013) que versa sobre muitas destas aplicações. Segundo Vorob'ev (1961), problema original que motiva o surgimento desta sequência na literatura matemática está presente no livro *Liber Abbaci*, de Fibonacci, nas páginas 123-124 do manuscrito de 1228. Vorob'ev (1961, p.8) afirma que o problema é apresentado da seguinte forma:

Alguém colocou um par de coelhos em um certo local, fechado em todos os seus lados por uma parede, para descobrir quantos pares de coelhos nascerão no período de um ano. Assume-se que a cada mês um par de coelhos produz outro par e que os coelhos começam a dar a luz dois meses após o próprio nascimento.

O problema é solucionado pelo próprio Fibonacci. Em sua resolução, chega que no primeiro mês há 2 pares de coelhos, no segundo mês há 3 pares até concluir que no décimo segundo mês há 377 coelhos.

Atualmente, costuma-se chamar $(f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$ de sequência de Fibonacci. Trata-se de uma sequência recursiva, pois $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, é uma sequência simples de ser tratada no ensino básico e que pode ser uma alternativa para não nos limitarmos a apresentar somente P.A.'s e P.G.'s ao tratarmos de sequências. Caso contrário, corre-se o risco dos alunos pensarem que toda sequência que existe em matemática tem uma razão. Lembremos que para ser sequência, não precisa nem haver regra de formação ou um padrão.

Dentre as diversas identidades associadas à sequência de Fibonacci, escolhemos a que Nelsen (1993, p.83) nos mostra:

$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Sequência de Fibonacci e soma de quadrados. Adaptado de Nelsen (1993, p.83)

Sabemos que o conceito de beleza é subjetivo, mas consideramos bela esta representação por representar uma identidade algébrica de maneira tão simples. Os quadrados $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$, por exemplo, são dispostos de maneira que formam um retângulo cujos lados medem f_4 e f_5 (ou seja, 3 e 5).

Para elaborarmos uma atividade relacionada a esta representação, consideramos suficiente uma abordagem indutiva. Isto porque esta representação é simples do ponto de vista geométrico. Poderíamos propor uma atividade em que entregamos em pequenos grupos de alunos envelopes com quadrados de papel cartão recortados e de áreas 1^2 , 1^2 , 2^2 , 3^2 , 5^2 , 8^2 e 13^2 ; e pedir que encontrem uma relação das medidas dos lados do retângulo formados pelos quadrados dados. Pode até ser que um grupo consiga chegar na identidade algébrica que propomos chegar. Ainda assim preferimos, nesta atividade, sugerir um caminho que o conduza à identidade algébrica por receio de que uma atividade mais aberta possa frustrar os alunos que participam. Ainda assim, a ideia do envelope com quadrados recortados poderia bem servir como um desafio extraclasse. Pois o aluno, fora das pressões de tempo e sociais que possam haver em sala de aula, pode, com maior chance, chegar a uma solução.

Bom, após os alunos serem apresentados à sequência de Fibonacci ($f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, \dots$) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...) e conhecerem a regra de formação da sequência ($f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$), sugerimos a seguinte abordagem:

Este retângulo tem base $f_3 = 2$ e altura $f_4 = 3$.

Este retângulo tem altura $f_4 = 3$ e base $f_5 = 5$.

Podemos associar a base e a altura deste retângulo a termos de sequência de Fibonacci da mesma forma que fizemos para os retângulos anteriores?

Sugestão de abordagem. Adaptado de Nelsen (1993, p.83)

Lembramos que pode não ser evidente aos alunos que $f_3^2 = 2^2$ seja geometricamente representado como um quadrado de lado 2, por exemplo. Ainda que a própria representação que usamos seja sugestiva a evidenciar este fato, é melhor ser prudente quanto ao supor que os alunos saibam fazer conversões entre registros que utilizamos. Ou seja, é importante que se procure saber se os alunos realmente sabem fazer conversões entre registros.

Como exercício, podemos destacar o fato de que a área do primeiro retângulo é escrita como $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$, mas, sendo um retângulo, pode também ser escrita como base vezes altura. Neste caso, observando que a medida da base é $f_1 + f_2 = f_3$ e que a altura é $f_2 + f_3 = f_4$, a área é $f_3 \times f_4$. Um raciocínio semelhante pode ser aplicado para o segundo retângulo. Após os alunos verificarem o mesmo fato para o terceiro retângulo, podemos lançar a pergunta: há uma maneira simples de calcular a soma $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2$? Esperamos por conclusão que $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \times f_{n+1}$. Dada a simplicidade da questão, esta é uma ótima oportunidade de, por fim, demonstrar por indução à identidade encontrada.

A vantagem se trabalhar com a sequência de Fibonacci é a copiosa quantidade de aplicações que encontramos para esta sequência dentro e fora do âmbito matemático. Encontramos na internet diversas possibilidades de abordá-la, incluindo sua relação com a razão áurea (ou 'razão extrema e média'). Entretanto, ela não costuma ter destaque no ensino básico. Com esta atividade, esperamos chamar a atenção para o potencial de atividades que esta sequência pode motivar.

5.3.8 SÉRIE GEOMÉTRICA

Nos dois livros de Nelsen que consultamos, encontramos um total de 6 representações diversas para a série geométrica de razão $0 < q < 1$. Decidimos escolher duas destas representações para criar atividades.

Diferentemente das atividades anteriores, sentimos necessidade de criar contextos para estas atividades. Isto porque, refletindo sobre as possíveis formas de apresentar os problemas aos alunos, nos questionamos se detalhar suas características seria suficiente para lhes motivar. Julgamos que, para estas atividades, a criação de um contexto é benéfica para reforçar o envolvimento dos alunos com o problema em si. O que se deve ter cuidado na criação de um contexto, é não permitir que este ofusque o conteúdo matemático subjacente. Se o contexto vir a distrair os alunos por ser inverossímil ou por causar alguma polêmica que distâncie o professor dos seus objetivos de ensino, deve-se considerar uma reelaboração do contexto proposto. A propósito, acreditamos que às atividades anteriores desta dissertação poderiam ser elaboradas com um contexto. Cabe ao professor avaliar as vantagens e desvantagens de fazê-lo.

Eis uma adaptação de como é apresentada uma das “provas sem palavras” que utilizamos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

Soma de P.G. Adaptado de Nelsen (1993, p.121)

$$(1-r)^2 + r^2(1-r)^2 + r^4(1-r)^2 + \dots = \frac{(1-r)^2}{1-r^2} = \frac{1-r}{1+r}$$

Veja que nos são apresentados um caso particular com $r=1/2$ e um caso geral. Em relação àquele, propomos o seguinte problema:

Um robô foi construído para colorir uma chapa de metal com muita precisão. Para fazer uma obra de arte em chapa quadrada de 1 metro de lado, o robô procede da seguinte maneira: Primeiro, divide a chapa em 4 quadrados de mesma área e colore apenas 3 deles. Depois, divide o quadrado que não foi colorido em outros 4 quadrados de mesmo tamanho e, novamente, colore apenas 3 deles. E continua colorindo o resto da chapa da mesma maneira. Sabemos que um robô consegue colorir quadrados muito pequenos neste processo. Entretanto não é possível que ele siga este processo de colorir para sempre por causa de limitações de ordem física. Mas, neste problema, suponha que ele fosse capaz de seguir este processo infinitas vezes. Qual seria a área da chapa colorida de branco?

Esquema do processo de colorir. Fonte: elaborado pelo autor

Aparência da chapa após muitas repetições do processo de pintura adotado. Fonte: elaborado pelo autor

Um comentário: tentamos elaborar um contexto que não seja absurdo e que, permita ao aluno conceber com naturalidade um processo infinito. Ainda que no cotidiano não existam processos infinitos.

Pois bem, após problematizar, precisamos um meio de tornar esta atividade em algo que os alunos possam refletir e buscar a resposta por si mesmos. Esperamos que eles não se sintam incomodados com a notação de fração. Em nossa experiência profissional, encontramos diversos alunos de 3º EM que não sabiam efetuar operações com frações e outros que, além disso, tinham dificuldades em entender o significado de frações como $17/13$ ou $25/34$. Nesta atividade, esperamos que os alunos que não saibam operar frações com autonomia ainda possam entender, com o auxílio do registro geométrico, o significado das frações (ou da notação decimal) utilizadas para resolver o problema.

Uma forma de apresentá-lhes este problema é apagar todas as frações que representamos ao lado das figuras. Num primeiro momento, queremos ver como os alunos fazem uma conversão do registro geométrico para o registro aritmético. Ainda que surjam, num primeiro momento, dificuldades como uma sensação de não saber como começar o exercício, cremos que isto faz parte do processo de descoberta e permite ao professor avaliar se os alunos sabem interpretar o enunciado e converter registros sem sua ajuda. Além disso, é possível que alguns alunos usem um registro de numeração decimal; não há problemas quanto a isso. Num segundo momento, com uma lousa, mostra-se que a divisão da chapa em 4 quadrados iguais divide o lado da chapa pela metade. Um passo importante para resolver o exercício está em elaborar um raciocínio que leve o aluno a concluir que o lado do segundo quadrado branco mede $1/4$, que o lado do terceiro quadrado branco mede $1/8$ e assim por diante para então encontrar a soma das áreas. Não queremos ser muito prescritivos sobre a forma de elaborar este raciocínio. Com o auxílio do registro geométrico, torna-se mais simples perceber dois aspectos do problema: que o processo de colorir a chapa que descrevemos pode ser repetido indefinidamente visto que sempre sobra um quadrado que não foi colorido; e que apesar de estarmos realizando a soma da área de infinitos quadrados, temos que o resultado é finito pois a área da chapa é finita. E isto é importante, visto que é comum, num primeiro momento, pensar que a soma de infinitos números positivos resulta em infinito; podemos sim obter um número como resultado de uma soma infinita. Ainda que inicialmente isto pareça estranho aos alunos.

Uma vez concluída esta atividade, o próximo passo é sair do caso $r=1/2$ e propor um caso $r \neq 1/2$, mas ainda numérico ou, dependendo do tempo disponível, considerar a possibilidade tratar o r como incógnita entre zero e um. Conforme a notação usada por Nelsen 3 páginas acima, sugerimos o caso $r=1/3$. Para auxiliar a visualização, criamos abaixo alguns registros geométricos. Caso decida usar $0 < r < 1$ como incógnita, pode ser útil começar explicando que um segmento de reta de medida L poder ser dividido em duas partes: uma com tamanho rL e e outra com tamanho $(1-r)L$. Se julgar necessário, mostrar um exemplo numérico com $L=10$ e $r=0,30$, por exemplo.

Decomposição um segmento em em duas partes em função de r .
 Fonte: elaborado pelo autor

Esquema de chapas para $r=1/3$. Fonte: elaborado pelo autor

Há ainda uma variação deste exercício, só que para um formato triangular:

Nesta “prova em palavras”, temos que a soma feita abaixo se refere à medida dos infinitos espaços em branco representados na figura ao lado. E, observando melhor, esta soma também pode se referir à soma das áreas dos triângulos escuros ou dos triângulos cinza claros. Um pressuposto é que o maior dos triângulos tem área igual a 1. Vemos que esta representação é mais simples que a anterior, pois não é necessário que o aluno use conhecimentos de geometria como a fórmula da área do triângulo. E é

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$$

Sequência de triângulos. Adaptado de Nelsen (2000, p.111)

simples elaborar uma atividade em que se parte representando um triângulo de área 1 e se retira um quarto de sua área representando este vazio por um triângulo branco. E se repete este processo infinitas vezes com triângulos cada vez menores. De forma a obter uma figura similar à de Nelsen.

Aproveitamos este momento para exortar o professor conhecer sempre mais do que aquilo que o currículo oficial estabelece. É fortemente recomendável conhecer uma aplicação interessante dos conteúdos que ensina. Mas que não seja reservada para os momentos finais da disciplina (caso haja tempo). Seria uma atividade inclusa no planejamento de sua disciplina e que mobilize os conhecimentos com que os alunos já entraram em contato. Uma finalidade é despertar-lhes o interesse de forma que eles mesmos queiram saber mais sobre um assunto que faça uso da matemática que aprendem. Com a popularização da internet, incluindo o acesso facilitado por smartphones, os alunos têm cada vez mais acesso a informações. Logo, saber mais sobre algum tema específico torna-se cada vez mais uma questão do quão interessados eles estão para buscá-lo ainda que isto nem sempre seja condição suficiente para o aprendizado. Claro que isto não nos exime de nos preocuparmos em estabelecer uma boa comunicação e buscar formas eficientes de facilitar a aprendizagem de seus alunos. Sabemos que um grande

desafio em sala de aula é despertar o interesse sobre o que queremos ensinar.

No caso das séries geométricas, um tema correlato pode ser a construção de objetos geométricos chamados fractais. Neste trabalho, não versaremos sobre os detalhes deste tema. Recomendamos a dissertação de Nunes (2006)³¹ que se detém em aspectos mais técnicos dos fractais e a dissertação de Faria (2012)³² que elaborou atividades com uso de software de geometria dinâmica com alunos do 1ºEM. Estes são trabalhos que têm um enfoque educacional ao tratar do tema. Faria (2012, p.34) considera que para reconhecer um fractal é suficiente observar três propriedades: a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fractal.

A autossimilaridade pode ser visualizada nas semelhanças identificadas através das escalas, de modo que partes menores dos objetos que vão compondo os níveis de um fractal se assemelham com o todo. (FARIA, 2012, p.34)

A complexidade infinita (...) está associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente.(FARIA, 2012, p.35)

Para ilustrar estas propriedades vejamos uma representação do fractal de Mandelbrot:

Ilustrando propriedade de autossimilaridade e complexidade infinita com o software UltraFractal.
 Fonte: Nunes (2006, p.52)

O interesse por estes objetos geométricos não se restringe à matemática. Na natureza encontramos pseudo-fractais, visto que possuem autossimilaridade em um número finito de níveis:

31 Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> Acesso em: 10 jul. 2015.

32 Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/faria_rejane_me_rcla.pdf Acesso em: 12 jul. 2015.

Couve-flor e réplica observada numa porção da mesma. Fonte: Nunes, 2006, p.33.

Duas fotos do brócolis romanesco. Acesso em: 15 jul. 2015. Fonte: <http://biogilmendes.blogspot.com.br/2012/04/brocoli-romanesco-uma-variedade-exotica.html>

Dessa forma, gostaríamos de justificar a sugestão deste tema por suas características e pela beleza de suas representações.

Em especial, propomos que os alunos calculem a área de do triângulo de Sierpiński. Este é construído conforme a sequência que ilustramos abaixo:

Passos para formar o triângulo de Sierpiński. Acesso em: 15 jul. 2015. Fonte: <https://orderinchoas.files.wordpress.com/2013/05/sierpinskytrianglewikipedia.gif>

Esta atividade é similar à atividade da soma das áreas dos triângulos brancos, mas difere pelo número de triângulos criados em cada iteração.

Vamos calcular as áreas em branco de cada figura. Suponha que a área do primeiro triângulo seja 1. No segundo triângulo temos uma área em branco que corresponde a $1/4$ da área original. Já no terceiro, surgiram 3 triângulos menores de área $(1/4)^2$ cada um; logo, é retirado $3 \cdot (1/4)^2$ da área. No quarto triângulo, por sua vez, surgiram 9 triângulos menores ainda: têm área $(1/4)^3$ cada um; logo formam uma área em branco de $9 \cdot (1/4)^3$. Veja que se somarmos as áreas em branco de cada iteração, obtemos a seguinte expressão:

$$1/4 + 3 \cdot (1/4)^2 + 9 \cdot (1/4)^3 = 1/4 + (1/4) \cdot (3/4) + (1/4) \cdot (3/4)^2$$

Já possível vislumbrar um padrão de soma infinita de PG com $a_1=1/4$ e $q=3/4$. Aplicando a fórmula da soma infinita de PG, temos o seguinte resultado:

$$1/4 + 3 \cdot (1/4)^2 + 9 \cdot (1/4)^3 + 27 \cdot (1/4)^4 + \dots = (1/4)/(1-3/4) = 1$$

Na prática, isto significa que ao realizar infinitas iterações, a área da região escura do triângulo de Sierpiński, que inicialmente era 1, se torna 0.

Só para termos uma noção da aparência do fractal, se continuássemos a seguir os passos para produzir o fractal, o oitavo triângulo da sequência que mostramos na página anterior seria:

Oitavo triângulo da sequência. Acesso em: 16 jul. 2015. Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/80/SierpinskiTriangle.svg/1183px-SierpinskiTriangle.svg.png>

Uma vez os alunos entenderam a construção e a medida da área deste fractal, um desafio que pode-se propor é que descrevam a construção e o modo de calcular a área de um outro fractal parecido: o tapete de Sierpiński.

*Passo para construir o tapete de Sierpiński. Acesso em: 16 jul. 2015.
Fonte: <https://www.math.uwaterloo.ca/~wgilbert/MathCircles/Carpet.jpg>*

Fractais são uma sugestão entre várias possibilidade de aplicações de PG's e abordamos de maneira superficial este tema. Recomendamos fortemente a leitura de nossas fontes para mais ideias de trabalho em sala de aula com uso de fractais.

5.3.9 ESCADARIA DE GABRIEL

Este é mais um problema em que o uso de mais que uma representação se mostra benéfico à compreensão e à busca pela solução.

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2} \quad 0 < r < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} r^i = \frac{r}{(1-r)^2}$$

Escadaria de Gabriel. Adaptado de Nelsen, 1993, p.123.

Não sabemos se Gabriel seria o nome do autor desta representação ou uma alusão ao anjo Gabriel.

O fato é que a área desta figura é convergente para $0 < r < 1$.

Mas antes de começarmos a explicar nossa proposta de atividade, lançamos uma pergunta ao leitor: você já ouviu falar em Progressão Aritmético-Geométrica (PAG)? Cremos que poucos professores de Matemática conhecem este tema. Igualmente, poucos livros o apresentam. A atividade que propomos está relacionada à PAG, mas não depende do conhecimento prévio de suas fórmulas para ser solucionado. Ainda assim, gostaríamos de despretensiosamente apresentá-la ao nosso leitor.

Definição [Progressão Aritmético-Geométrica] (ARANHA, RODRIGUES, 1994, p. 75)

Dados os números reais a_1 , ρ e q , chamamos progressão aritmético-geométrica (PAG) à sequência:

$$(a_1, (a_1 + \rho)q, (a_1 + 2\rho)q^2, (a_1 + 3\rho)q^3, (a_1 + 4\rho)q^4, \dots)$$

Logo, o termo geral da PAG é dado por:

$$a_n = [a_1 + (n-1)\rho]q^{n-1}$$

Assim como as outras progressões, é possível elaborar-lhe uma representação gráfica. Na próxima figura, representamos uma PA de $a_1=2$ e $r=-1/2$, uma PG de $a_1=2$ e $q=1/2$ e uma PAG de $a_1=2$, $\rho=1$ e $q=1/2$:

Representação gráfica de um PA, uma PG e uma PAG todas não-crescentes. Fonte: elaborado pelo autor

Em seguida, representamos ao lado uma PA de $a_1=2$ e $r=2$, uma PG de $a_1=2$ e $q=2$ e uma PAG de $a_1=1$, $p=1$ e $q=2$. Mas estas são apenas representações de duas opções entre as diversas possibilidades de escolher os parâmetros da PAG. Vale observar que os pontilhados que usamos para ligar os pontos de cada progressão servem apenas para evidenciar o padrão de crescimento ou decrescimento das mesmas.

Voltemos ao nosso problema de interesse. Não nos pareceu tão evidente, à primeira vista, como as duas representações geométricas da escadaria de Gabriel poderiam nos ajudar a encontrar o valor do somatório localizado no topo da figura. É a conversão entre o registro algébrico e o registro geométrico que nos permitiu entendê-las melhor.

Veja que podemos representar geometricamente o produto $1.r$ pelo retângulo de base r e altura 1; semelhantemente, $2.r^2$ pode ser o retângulo de base r^2 e altura 2. Logo, na figura de Nelsen, a escadaria à esquerda é uma conversão para o registro geométrico da somatória

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = 1r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + 5r^5 + \dots$$

Como $0 < r < 1$, sabemos que a medida da soma infinita das bases dos retângulos converge. Para melhor ilustrar o que ocorre entre as duas escadarias, criamos duas figuras intermediárias. Esperamos que assim, facilitar o entendimento dos somatórios localizados no canto inferior direito da figura de Nelsen. Para estes, também escrevemos alguns passos intermediários. Merece especial atenção o passo em que abrimos a somatória em várias somas infinitas.

Se prestarmos atenção na configuração que as somas formam, sua escrita se assemelha à representação figural usada pela “prova sem palavras” de Nelsen.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} r^i = \sum_{k=1}^{\infty} (r^k + r^{k+1} + r^{k+2} + r^{k+3} + r^{k+4} + \dots) \\
 &= (r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots) \\
 &\quad (r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots) \\
 &\quad (r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots) \\
 &\quad (r^4 + r^5 + r^6 + \dots) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{r}{1-r} + \frac{r^2}{1-r} + \frac{r^3}{1-r} + \frac{r^4}{1-r} + \frac{r^5}{1-r} + \dots \\
 &= \frac{1}{1-r} (r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots) \\
 &= \frac{1}{1-r} \left(\frac{r}{1-r} \right) = \frac{r}{(1-r)^2}
 \end{aligned}$$

Veja que apesar do nosso problema ser uma PAG de parâmetros $p=a_1=q=r$ com $0 < r < 1$, não é necessário saber o que é uma PAG para solucioná-lo. Os pré-requisitos são converter representações entre registros e soma infinita de PG. Todavia, talvez esta não seja a melhor atividade para um primeiro contato com a ideia de conversão entre registros figural e aritmético dado que as bases dos retângulos usados são incógnitas. A atividade 7 (Fibonacci) nos parece mais simples visto que base e altura dos retângulos envolvidos são números naturais. Uma vez que os alunos já compreenderam como converter, pode-se-lhes apresentar o problema conforme Nelsen, só que com a somatória aberta visto que muitos alunos do ensino médio têm dificuldades ou não sabem abrir uma somatória. Pode inclusive ser uma oportunidade para explicar-lhes como se abre uma somatória.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k = 1r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + 5r^5 + \dots$$

Algo que pode lhes gerar dificuldades é a interpretação do significado dos três pontinhos na representação figural. Talvez, para os alunos, não lhes seja simples entender seu significado. Caso a representação de Nelsen não seja suficiente para que os alunos prossigam com essa atividade, pode-se usar as duas primeiras escadarias que mostramos na página anterior e relacioná-las com a segunda

escadaria de Nelsen como forma de evidenciar a conexão entre as figuras. Pode-se frisar que, entre as figuras, não houve nenhum tipo de rotação ou translação, mas uma mudança na forma de visualizar “as peças” retangulares que formam a escadaria. Deixamos de vê-las como blocos verticais para interpretá-las como blocos horizontais e, com a conversão para o registro algébrico, solucionar o problema.

Na próxima atividade, esperamos mostrar que não só a série geométrica de razão entre 0 e 1 tem atividades que envolvem conversões entre registros.

5.3.10 SOMA DE POTÊNCIAS DE TRÊS

Nesta última atividade que propomos, semelhantemente às primeiras, temos que a configuração das figuras que usamos para representar os números é o que auxilia os alunos a solucionar o problema:

Soma finita de potências de 3. Adaptado de Nelsen, 2000, p.108

Rapidamente percebemos uma semelhança com o triângulo de Sierpiński. Veja que cada unidade é representada por uma bolinha. Assim, caso esta “prova sem palavras” esteja entre as primeiras atividades propostas aos alunos que envolve

conversão de registros, recomendamos uma abordagem indutiva assim como fizemos para a soma dos n primeiros naturais em que a unidade também é representada por bolinhas.

Temos as seguintes representações de potências de 3:

Veja que

$$\begin{aligned} 2(3^0 + 3^1 + 3^2) &= 26 \\ &= 27 - 1 \\ &= 3^3 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) &= 80 \\ &= 81 - 1 \\ &= 3^4 - 1 \end{aligned}$$

Assim sendo, verifique se a figura abaixo também é composta de triângulos que representam potências de 3.

Verifique também se a soma de todas as bolinhas desta figura também pode ser escrita de maneira parecida com a que escrevemos a soma das bolinhas dos triângulos ao lado.

Atividade sobre potências de três utilizando figuras de Nelsen (2000, p.108)

Como se trata de uma proposta de caráter mais indutivo, a ideia é que os exemplos à esquerda mostre como fazer conversões entre registros e, ao mesmo tempo perceber um padrão que o dobro da soma de potências conserva. Após esta primeira observação, que o aluno constate que este padrão também vale para o triângulo da direita. Por fim, esperamos que o aluno associe esta invariância do formato triangular com um padrão para o caso $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n)$ e que conclua que esta expressão resulta em $3^{n+1} - 1$.

Porém, se eles já tiverem feito atividades que envolvem generalização partindo de uma figura e chegando em uma identidade algébrica, uma outra possibilidade é,

trabalhando em grupos, distribuir envelopes contendo pares das potências de 3 (3^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3 e 3^4) representados já em forma triangular em papel cartão ou cartolina. Então propor que encontrem um formato que se mantenha usando somente os pares de peças de cartolinas triangulares que representam 3^0 , 3^1 e 3^2 , depois só os pares que representam 3^0 , 3^1 , 3^2 e 3^3 . Deve ficar claro que o formato da figura obtida seja similar em cada uma das duas situações. Por não falarmos de antemão como seria esta configuração, esperamos que os alunos hajam com mais autonomia para descobrir o formato. Depois de algum tempo (estabelecido pelo professor), pergunta-se adicionarmos à figura que representa a soma de $2 \cdot 3^0$, $2 \cdot 3^1$, $2 \cdot 3^2$, $2 \cdot 3^3$ um par de peças que representam 3^4 , se a figura resultante mantém seu formato. Este par de cartões com a representação de triângulos com 3^4 bolinhas é entregue a cada grupo para que verifiquem o que achavam de acordo com a figura que encontraram. Agora, queremos que eles relacionem o formato que se conserva ao adicionarmos $2 \cdot 3^{n+1}$ à soma $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n)$ com a soma de potências de 3. Neste ponto, queremos que eles percebam que $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3^{n+1} - 1$. Para isto, pode sugerir que escrevam em uma folha de sulfite a representação de $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2)$ e que escrevam o valor da soma; pode-se perguntar se este valor é próximo de uma potência de 3. Neste momento, caso se perceba que os alunos sintam dificuldades com potências, pode-se ajudá-los a perceber que o resultado deste caso é $3^3 - 1$. Pedido semelhante para representação de $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$. Veja que a ideia é que os alunos associem a invariância no formato da figura total formada por bolinhas dispostas a formar um grande triângulo (em que sempre falta a bolinha do topo) no caso n com a representação algébrica $2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3^{n+1} - 1$. Para isso, é que sugerimos a folha de sulfite em que os alunos escrevam as duas representações lado a lado e as associem.

Não sugerimos que esta forma de conduzir esta atividade seja a primeira que os alunos tenham para entender como se faz conversões entre registros. Porém, esperamos que esta forma de trabalho permita que eles sejam mais participativos do processo do próprio aprendizado. Entretanto, esta forma de conduzir o trabalho é mais trabalhosa ao professor exigindo um planejamento mais cuidadoso sobre como aplicar a atividade para atingir os objetivos de seu plano de aula.

6. METODOLOGIA E APLICAÇÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo relatamos a metodologia e a aplicação de uma sequência didática com o uso das atividades inspiradas nas “provas sem palavras” de Nelsen. Consideramos esta etapa de grande importância ao nosso projeto de pesquisa, pois nos permite avaliar em que medida nossas atividades são favoráveis ao uso mais de um registro de representação semiótica e se os alunos sinalizam que isto tem um impacto positivo em suas aprendizagens.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.47-49), podemos classificar como qualitativa nossa investigação por três fatores principais:

- Os dados obtidos foram buscados na própria escola propiciando um contato direto com os alunos. Além disso, os dados são obtidos de forma contextualizada;
- Predomina o caráter descritivo dos dados;
- O foco da pesquisa se volta mais para o processo do que para os resultados ou produtos.

Preocupamo-nos também com o aspecto ético da pesquisa. Solicitamos que os alunos interessados em participar de nossa sequência didática trouxessem o formulário do Apêndice C assinado por pais ou responsáveis autorizando a participação.

Além das atividades em si, criamos um questionário que acompanha o termo de consentimento para obter informações como idade, se já estudou progressão aritmética (P.A.) ou progressão geométrica (P.G.) e o conceito que o aluno tem sobre Matemática (Perguntar também se ele se considera um bom aluno em Matemática e o porquê). No final de cada dia de aplicação, entregamo-lhes outro questionário para rastrear, considerando suas opiniões, em que medida nossa sequência didática possibilitou uma maior compreensão sobre séries e sequências bem como perguntar quais as principais dificuldades que sentiram durante os desafios que lhes foram propostos. Na leitura de Rea e Parker (2000, p.57-75) encontramos diretrizes para bem criar nossos questionários evitando perguntas que induzam as respostas do alunos e procurando clareza e simplicidade em sua elaboração. Usamos perguntas iguais ou inspiradas em Prado (2015, p.108-115; p. 154-159) visto que em nossa

avaliação queremos sondar as impressões dos alunos frente aos desafios propostos para que o professor que queira usar as atividades aqui propostas tenham um retrato inicial de como as atividades foram interpretadas pelos alunos.

No questionário inicial, a primeira pergunta (Você gosta de Matemática? Por quê?) visa conhecer o conceito que os alunos têm sobre a disciplina e os que o motiva a gostar ou não. Já a segunda questão (Você se considera um bom aluno em Matemática? Por quê?) visa uma auto-avaliação de seu desempenho. A questão 3 (Você acha que a Matemática que você aprende na escola será útil para o seu futuro? Por quê?) nasce da nossa preocupação com a motivação intrínseca do aluno para estudar. Em nossa experiência profissional, percebemos que os alunos do 3º ano do Ensino Médio que se mostravam mais motivados para os estudos eram os que tinham um plano sobre o que fazer após o término do ensino médio. Nem todos os alunos que se mostravam motivados queriam continuar seus estudos na área de exatas, mas ainda assim percebíamos destes uma dedicação maior se comparado aos outros alunos. A quarta questão do questionário (Você já estudou o assunto Sequências, Progressão Aritmética (P.A.) e Progressão Geométrica (P.G.) na disciplina de Matemática? Se sua resposta é sim para algum dos temas acima, escreva brevemente o que você lembra nestes assuntos.) é apenas um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos. Esperamos que aqueles que já estudaram Sequências, P.A. e P.G. tenham maior facilidade com nossas atividades. Visto que apenas uma questão envolve P.G., supomos a priori que o trabalho com o registro figural e com a conversão entre registros semióticos lhes seja pouco familiar. Apesar das atividades serem feitas em grupo, os questionários são respondidos individualmente.

Foram convidados a participar voluntariamente de nossa sequência didática os alunos da 1ª série A e B do ensino médio de uma escola estadual do interior de São Paulo. Esta escola adota o Novo Modelo de Escola em Tempo Integral. De acordo com o site da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2015), o

Novo Modelo de Escola de Tempo Integral, presente em 257 escolas, a jornada é de até nove horas e meia, incluindo três refeições diárias. Na matriz curricular, os alunos têm orientação de estudos, preparação para o mundo do trabalho e auxílio na elaboração de um projeto de vida. Além das disciplinas obrigatórias, os estudantes contam também com disciplinas eletivas, que são escolhidas de acordo com seu objetivo.

Os professores desse modelo atuam em regime de dedicação exclusivo e, para isso, recebem gratificação de 75% em seu salário, inclusive sobre o que foi incorporado durante sua carreira.

A adoção do novo modelo de escola em tempo integral implica em uma série de mudanças na organização escolar e não apenas em um aumento da carga horária dos alunos e dos professores.

Primeiramente, entramos em contato com a coordenadora geral e marcamos uma reunião em que também estava presente a coordenadora da área de Ciências da Natureza. Conforme pode-se observar no apêndice B desta dissertação, nosso plano de aula original previa a aplicação de todas as 4 atividades em uma aula dupla. Isto porque tínhamos receio que uma proposta que durasse mais de um dia não fosse aceita pela escola por interferir demais no planejamento da disciplina de Matemática. Mas conversando com as coordenadoras, houve a possibilidade de dispor de duas segunda-feiras para a turma de 1ª série B e de duas quarta-feiras para a turma de 1ª série A. Aplicar a sequência em dois dias para cada turma se mostrou a decisão mais acertada, pois durante o primeiro dia aplicando apenas as duas primeiras atividades previstas em nosso plano de aula, concluímos que o tempo que dispunhamos foi adequado. Logo, aplicar as 4 atividades em um só dia se mostraria inviável. Apreciamos e adotamos o seguinte conselho da coordenadora da área da Área de Ciências da Natureza: além de explicar aos alunos a necessidade do termo de consentimento para a participação na nossa sequência didática, explicar também as linhas gerais da pesquisa que estamos empreendendo para que eles não se sintam apenas um objeto da pesquisa, mas que estejam participando cientes do que a mesma se trata. As coordenadoras conversaram com os professores e, na mesma semana, recebemos um e-mail autorizando a realização da sequência didática no horário das aulas de Orientação de Estudos (12h55 às 14h35). A sequência didática foi aplicada do dia 28/09/2015 ao dia 07/10/2015 todas as segundas e quartas. Aproveitamos para agradecer a excelente acolhida da escola em relação ao nosso projeto de pesquisa. O professor da disciplina de Orientação de Estudos estava à disposição para nos auxiliar no que fosse necessário. Não houve filmagem, nem fotografia visto que no termo de livre consentimento dos alunos está previsto o anonimato dos alunos que escolheram participar das atividades. Pelo mesmo motivo, as atividades entregues por cada

grupo foram codificadas como GA1, GA2, GA3,... e GB1, GB2, GB3, conforme feitos pela 1ª série A ou 1ª série B. Aos questionários (preenchidos individualmente), solicitamos que os alunos informem sua série e seu número de chamada. Como eles preenchem um questionário a cada dia de atividade, queremos poder juntar os questionários dos dois dias feitos pelo mesmo aluno, mas ainda assim sem identificá-lo. Após juntá-los, os codificamos como QA1, QA2, QA3, ... e QB1, QB2, QB3, ... semelhantemente ao que fizemos com as atividades em grupo.

A partir de agora, relatamos o andamento das atividades e as reflexões delas derivadas. Separamos os relatos por dias. Em cada relato, analisamos as respostas que nos chamaram a atenção, seja por revelar um raciocínio específico (correto ou não) ou por nos revelar de que forma os alunos interagiram com o registro figural fornecendo indícios de como este registro lhes foi útil.

6.1 APLICAÇÃO DE ATIVIDADES: 'SOMA DOS PRIMEIROS NÚMEROS NATURAIS I' E 'SOMA DE CUBOS'

Atividades aplicadas dia 28 de setembro na 1ª série EM B com 30 presentes e dia 30 de setembro na 1ª série EM A com 27 alunos presentes.

Em ambas as classes, o autor desta dissertação, na qualidade de pesquisador, se apresentou aos alunos após o término da chamada. Procurou-se frizar o fato de que a participação é voluntária, foram expostos os objetivos da atividade e da importância da assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido do próprio aluno bem como do responsável. Em seguida, foi anunciado que o tema das atividades está relacionado com P.A. e P.G., mas que não é pré-requisito um estudo prévio destes assuntos para bem participar das mesmas.

Foram entregues as folhas da atividade 1 (Soma dos Primeiros Números Naturais I). Durante o processo de criação desta atividade, tínhamos receio de que houvesse excesso de exemplos. Com a aplicação concluímos que não houve excesso de exemplos, pois alguns grupos mostraram dificuldade em entender a relação entre as figuras e a soma dos números naturais. Além disso, metade dos grupos do 1ºB que fizeram esta questão, apresentaram em sua escrita a mesma notação usada em soma de P.A. Nestes casos, pode ser que o uso de figuras não foi tão significativo para encontrar resposta da soma $1+2+3+\dots+120$ e também da sua generalização.

Já no 1ºA, o grupo GA9 foi o único que escreveu uma resposta para todas as questões desta atividade. Ainda que as respostas não estejam todas corretas, é digno de nota que além dessa resolução, o grupo escreveu, em uma folha separada, como encontrar a soma de $1+2+3+\dots+120$ considerando que $1+120=2+119=3+118$ e assim por diante.

Ao conversar com cada grupo, percebemos que alguns alunos não associavam de imediato que cada coluna de bolinhas de uma mesma cor representava um número natural, ou que os retângulos formados eram uma representação do dobro da soma escrita abaixo da figura. Procuramos esclarecer este ponto em cada grupo de forma que esta dificuldade não se tornasse algo desmotivador. Ao mesmo tempo, tomamos cuidado em não revelar as respostas das questões, permitindo ao aluno que raciocinasse com a ajuda dos dois registros e pudesse por si só responder as questões. No caso do grupo GA9, o conhecimento prévio de soma de P.A., fez com que os alunos preferissem recorrer ao que já aprenderam e reputassem as representações figurais como desnecessárias para solucionar os problemas propostos.

A atividade 2 (Soma de Cubos) tem um diferencial. A figura remete a uma representação em 3 dimensões. Isto faz com que os alunos tenham que interpretar as figuras para depois atribuir valores

numéricos a elas. No caso, convencionamos que cada cubinho representa o número 1. Pudemos observar alguns alunos contando a quantidade de paralelogramos que compõem a

GA9

1. Soma dos Primeiros Números Naturais I

Neste exercício, queremos que você descubra uma maneira fácil de fazer a seguinte soma: $1+2+3+\dots+119+120$. Para isto, representamos cada número como colunas de bolinhas e somamos duas vezes somas menores do que a que queremos (1 ; $1+2$; $1+2+3$; ...) usando bolinhas claras e escuras para cada soma. Queremos que seu grupo perceba um padrão em cada um dos retângulos que mostramos abaixo e a soma que eles representam.

$2(1+2) = 3 \cdot 2$
 $3 \cdot 2 = (2+1) \cdot 2$
base x altura

$2(1+2+3) = 4 \cdot 3$
 $4 \cdot 3 = (3+1) \cdot 3$
base x altura

$2(1+2+3+4) = 5 \cdot 4$
 $5 \cdot 4 = (4+1) \cdot 4$
base x altura

$2(1+2+3+4+5) = 15 \cdot 5$
 $= (9+1) \cdot 5$
base x altura

$2(1+2+3+4+5+6) = 21 \cdot 6$
 $= (12+1) \cdot 6$
base x altura

Mas como queremos somente uma soma, podemos dividir os dois lados da equação por 2:

$(1+2+3+4+5) = \frac{1}{2}(15 \cdot 2) = 15$

Nesta figura, queremos calcular somente o número de bolinhas claras sem contar uma por uma. Com a ajuda do raciocínio que desenvolvemos para as figuras anteriores, existe um jeito fácil de fazer este cálculo?

1) Existe alguma característica que cada uma das figuras acima têm em comum?

2) Este raciocínio que desenvolvemos acima é útil para calcular a soma $1+2+3+\dots+119+120$? Se sim, qual é o resultado?

3) Conseguimos generalizar o resultado para a soma $1+2+3+\dots+n$?

1- todas elas são semelhantes a um quadrado

2- Não achei tão necessário, prefiro somar o primeiro (a_1) com o último (a_n) que dá 121 e multiplicar pela metade do (a_2) = $121 \cdot 120 / 2 = 7260$.

3) $S_{120}, N_{120} = N_1 + N_{120} \div 2$

Sim, usando o mesmo modo da anterior, só que dividindo o total por 2, pois queremos só metade

Respostas do grupo GA9 à Atividade 1

representação dos objetos de 3 dimensões. Isto evidencia uma dificuldade inicial que esperávamos encontrar.

Esta atividade é dividida em duas folhas. Na primeira, favorecemos aos alunos que interajam e interpretem os objetos de 3 dimensões através da representação em 2 dimensões. Poucos minutos depois, entregamo-lhes os materiais dourados adaptados de maneira que possam decompor peças de madeira, que também são formas de representação dos cubos da atividade 2, e obtenham uma placa quadrada de forma similar ao que sugere a sequência de representações figurais. Consideramos que este esforço inicial de interpretar a figura sem o auxílio de um material palpável é válido para que os alunos desenvolvam sua habilidade de interpretar corretamente objetos tridimensionais representados em um suporte de duas dimensões. Em torno de cinco minutos após este primeiro contato, distribuímos o material dourado adaptado e a segunda folha da atividade de Soma de Cubos. Vários grupos de ambas as classes relataram uma maior compreensão do que pedia a atividade com o auxílio deste material. Por outro lado, observamos também usos lúdicos do mesmo material. Casinhas, torres e gazebos eram construídos em várias mesas. “Bom, mas você já usou as peças para ajudar a resolver os problemas do desafio, certo?”, perguntávamos a estes alunos. Ao final da aula, o professor que nos acompanhava, que leciona Biologia além de disciplina de Orientação de Estudos, colocou a seguinte hipótese: “Talvez este uso do material dourado vem da falta de costume. Nas primeiras vezes que levei os alunos ao laboratório, eles também brincavam com os materiais, mas depois pararam com isso”.

Avaliando o desempenho dos alunos quanto a esta segunda atividade, a maioria dos grupos reconheceu que a recomposição dos cubos resultava em uma placa quadrada, mas nenhum grupo conseguiu relacionar a medida do lado desta placa com os lados dos cubos utilizados. Entretanto, notamos que o material dourado adaptado auxiliou a conversão do registro figural para o registro aritmético ao associar os cubos iniciais a números ao cubo. Porém, não sabemos em que medida esta compreensão foi facilitada pela língua portuguesa visto que a representação aritmética “ 4^3 ”, por exemplo, é lida como “quatro ao cubo”, logo faz referência direta ao objeto geométrico que estamos tratando.

Após a primeira semana de aplicação das atividades, temos algumas considerações gerais. A primeira se refere à postura do pesquisador na sala de aula. Uma escolha possível seria a de apenas distribuir as atividades e observar como os

alunos buscam solucionar as questões sem nossa interferência. Em princípio, acreditamos que o ideal seria permanecer na condição de observador focado nas interações em sala de aula. Todavia, não foi esta a nossa escolha visto que talvez este tipo de postura causasse desmotivação ou indiferença frente às atividades que propomos. Logo, agimos como um professor interessado em favorecer o aprendizado dos alunos. Acompanhamos cada um dos grupos perguntando as dificuldades que sentiam, tirando dúvidas e incentivando a participação dos grupos que aparentavam menos motivados. Isto dificulta avaliar em que medida o pesquisador, na condição de professor, influenciou o desempenho do grupos. Por outro lado, isto nos permitiu, ao questioná-los diretamente, descobrir alguns raciocínios utilizados nas atividades.

Outra consideração se refere à participação efetiva dos grupos. Foi frizado durante a apresentação inicial que a participação dos alunos é volutária. Não usamos nenhum motivador de participação como as frases: “a participação vale um ponto na nota” ou “quem não participar perde um ponto na nota” ou ainda o uso de prêmios para os que terminarem primeiro. Houve grupos que, de fato, escolheram não participar. Entretanto não se manifestaram verbamente quanto a esta decisão. Procurou-se incentivar a participação destes grupos perguntando e conversando de mesa em mesa sobre as dificuldades que sentiam em relação às atividades. Ou seja, não pré-julgamos estes alunos, mas nos perguntamos em medida nossas atividades não foram suficientemente atraentes para motivá-los ou ainda que as dificuldades que sentem em Matemática ou o medo de errar os intimidem a ponto de preferirem não participar. Não queremos nos aprofundar nas possíveis causas desta escolha, mas acreditamos que este assunto mereceria uma investigação própria.

Por fim, cremos apropriado uma autocrítica em relação ao layout das atividades entregues aos alunos. Convidamos o leitor a observar as atividades 1, 5, 7 e 8 que se encontram no apêndice A. Durante a aplicação é que nos demos conta que as perguntas das atividades deveriam ser numeradas ou/e destacadas em relação ao restante do texto. Durante o processo de criação das questões, isto não nos parecia tão importante. Logo, recomendamos ao professor interessado em aplicar as atividades que nesta dissertação elaboramos, que adapte as questões numerando as perguntas e reservando um espaço suficiente para as respostas. Isto diminui a chance de que questões sejam ignoradas por falta de atenção dos grupos.

6.2 APLICAÇÃO DE ATIVIDADES: 'SOMA DOS QUADRADOS DOS NÚMEROS DE FIBONACCI' E 'SÉRIE GEOMÉTRICA'

Atividades aplicadas dia 05 de outubro na 1ª série EM B com 33 presentes e dia 07 de outubro na 1ª série EM A com 29 alunos presentes.

Sendo esta a segunda vez que aplicávamos atividades com estas classes, decidimos novamente nos apresentar, lembrar do que trata nosso projeto de pesquisa e frizar o fato da participação ser voluntária e muito importante para as conclusões do projeto de pesquisa. Perguntamos aos alunos se gostariam de ver uma resolução das atividades feitas na semana anterior. Ambas as classes quiseram ver uma resolução. Logo em seguida, distribuímos as duas folhas referentes a atividade de Fibonacci e lemos a primeira folha, explicando com cuidado a regra de formação da sequência de Fibonacci e sobre a possibilidade de interpretar números ao quadrado como quadrados (objetos geométricos) ainda que esta não seja a única forma de interpretar geometricamente um número. Ainda que não estivesse no planejamento, decidimos incluir nesta atividade algumas peças do material dourado adaptado que são mais concernentes ao problema em questão. Fizemos isto para verificar se o uso deste materiais também auxilia o raciocínio dos alunos no processo de formação dos retângulos. Infelizmente, não verificamos proveitoso o uso deste material para esta atividade. Talvez porque trata-se um problema de geometria plana que tentamos converter para o registro algébrico. As peças, por outro lado, estão mais relacionadas a uma representação espacial e, talvez por isso, não foram úteis aos alunos. Apenas 3 grupos tentaram responder todas as perguntas esta atividade.

Ao circular pela sala, verificamos que um erro bastante comum dos alunos era confundir a ordem de um termo da sequência de Fibonacci, informado pelo índice, e o valor do termo. Apenas o quinto termo tem o mesmo valor que seu índice ($f_5=5$). Ainda assim, alertamos em vários grupos visto que este era um equívoco frequente.

Ao criarmos a atividade 1, colocamos uma representação aritmética correspondente a cada figura como forma dos alunos perceberem a relação entre as representações e terem à disposição um exemplo de conversão entre registros. Já para a atividade 3, continuamos a ressaltar alguns elementos das representações figurais do problema; porém, esperávamos que os alunos já tivessem autonomia de converter da representação figural para uma equação que relacione os quadrados dos termos de Fibonacci com a área do retângulo resultante. Entretanto, o máximo

que verificamos foi um grupo cuja resposta sugeria um entendimento de como os quadrados se relacionam com o retângulo só que sem o uso de uma notação adequada.

Quanto a atividade 4 (Série Geométrica), tivemos

experiências distintas nas duas classes. Em ambas lemos a atividade, discutimos com a classe a ideia de infinito em ato

que está presente na suposição de que o robô já coloriu os quadrados infinitas vezes. Na 1ª série B, percebemos sinais de desmotivação dos grupos por não conseguirem desenvolver uma

resposta para a única questão da primeira folha. Na 1ª série A tentamos contornar este efeito

indesejado distribuindo as duas folhas da atividade e pedindo que tentem responder primeiro as perguntas de segunda folha e depois tentem responder a pergunta da primeira folha. Houve um efeito positivo nesta decisão

visto que no 1º A os grupos se mostraram mais interessados nesta atividade.

Uma dificuldade que verificamos foi confundir a medida de área dos quadrados

brancos com a medida dos seus respectivos lados. E uma concepção frequente sobre o infinito foi que é impossível somar infinitos números. Consideramos que isto merece a atenção do professor de Matemática do ensino básico, pois indica que boa parte dos alunos concebe o infinito apenas potencialmente. E conforme argumentamos ao tratar de séries infinitas, isto dificulta a compreensão dos alunos quanto a representação dos números reais. Conversando com alguns grupos, procuramos questionar se realmente é impossível somar infinitos números.

Continuação da atividade 3. Soma dos Quadrados dos Números de Fibonacci

Queremos encontrar uma identidade que relacione as áreas das figuras que compõem os retângulos e área total de cada retângulo de forma que seja fácil encontrar a área total. Veja alguns exemplos:

Este retângulo tem base $f_1 = 2$ e altura $f_2 = 3$.

Este retângulo tem altura $f_4 = 3$ e base $f_5 = 5$.

Sim, da forma que
 $F_1 + F_2 = F_3$
 $F_3 + F_4 = F_5$
há o padrão de obter
 Para cada um dos três retângulos acima, escreva uma equação que relaciona as áreas das figuras que compõem os retângulos e área total de cada retângulo.

Podemos associar a base e a altura deste retângulo a termos de sequência de Fibonacci da mesma forma que fizemos para os retângulos anteriores?

seguinte ou a soma dos anteriores.
 $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_6^2$ | $F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_{10}^2$ | $F_5^2 + F_6^2 + F_7^2 = F_{15}^2$

Na figura abaixo, temos como relacionar os quadrados contornados com linha escura com os termos da sequência de Fibonacci? Se sim, justifique.

Neste caso, há um jeito simples de calcular a área deste retângulo acima sem calcular a área de cada quadrado? Este jeito mais simples está relacionado com a sequência de Fibonacci? Se sim, explique.

Sim pois temos o termo que queremos somando os dois termos anteriores.

Atividade 3 do grupo GA4 evidenciando equívoco entre índice e valor dos termos da sequência de Fibonacci

Faltando em torno de cinco minutos para o término da aula, mostramos aos alunos das duas classes uma maneira de responder as perguntas da atividade 4. Uma solução que adotamos para a primeira pergunta foi chamar a atenção para o fato de que nenhuma das cores da chapa ocupa uma área maior do que as outras. Como temos apenas três cores, um terço da área total é branca. Preferimos esta solução por não supormos dos alunos um conhecimento prévio de soma infinita de P.G. Esta atividade também visa diagnosticar as concepções de infinito que os alunos carregam.

Neste momento, gostaríamos de expor os dados provenientes dos dois questionários entregues a todos os alunos que participaram das atividades. Porém, apenas 4 alunos devolveram preenchidos o primeiro questionário e 3, o segundo questionário sendo que destes apenas 1 aluno devolveu preenchido os questionários dos dois dias de atividades. Por isso, não desenvolvemos nesta dissertação uma análise exploratória dos dados obtidos. Pedimos ao professor que nos acompanhou durante os 4 dias de atividades que relembresse os alunos a respeito dos termos de livre consentimento e dos questionários. Porém, segundo o professor, os alunos alegaram esquecimento ao não trazê-los nas aulas seguintes. Isto nos dificulta elaborar um diagnóstico mais preciso sobre uso do material dourado adaptado considerando a opinião dos alunos. Gostaríamos também de avaliar suas percepções sobre o grau de dificuldade de cada uma das atividades. Talvez a não entrega dos questionários esteja ligada a alguma intimidação gerada por pedirmos a assinatura do termo de livre consentimento que também teve baixa devolução. Mas não sabemos as causas ao certo.

Finalizando este capítulo, apesar dos resultados obtidos não serem todos os que imaginamos antes da aplicação das atividades, esperamos que esta experiência de aplicação que relatamos seja útil para bem adaptar as ideias de atividades desenvolvidas nesta dissertação. Esperamos, assim, otimizar as oportunidades de aprendizado dos alunos em Matemática.

CONCLUSÃO

Vemos nesta parte da dissertação a oportunidade de revisitar diversos temas aqui discutidos. Questionamo-nos principalmente se o uso de diversos registros de representação semiótica são benéficos para favorecer o aprendizado dos alunos na disciplina de Matemática.

Expomos as principais ideias de Raymond Duval, criador da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para situar o que entendemos por representação semiótica ou registro visto que são termos ligados aos estudos de linguística. Passamos por exemplos de como esta teoria pode aguçar nossa percepção sobre a importância da representação em Matemática. E que, além disso, não se deve supor que um aluno apresentando bom desempenho em resolver problemas em um determinado registro de representação semiótica saiba naturalmente converter o mesmo objeto matemático para outro registro. Vimos também que o uso de diversos registros, de acordo com a mesma teoria, pode permitir uma maior compreensão do objeto matemático que se estuda, pois diversas representações permitem o uso de tratamentos diferentes em cada registro. Logo, o aluno estaria menos propenso a confundir o objeto matemático que estuda com sua correspondente representação.

Não queríamos nos restringir a aspectos teóricos, portanto escolhemos os assuntos Sequências e Séries como forma de fornecer exemplos diferentes dos que observamos nos autores consultados. Uma motivação para a escolha destes assuntos foi o contato com os dois livros “*Proofs without Words*”, de Nelsen (1993 e 2000). Estes nos forneceram inspiração para as dez atividades que elaboramos e que relacionam uma ou várias representações figurais com representações algébricas. Procuramos destacar o fato de haver uma grande variedade de sequências que podem ser exploradas no ensino básico; ou seja, sequências não precisam se restringir à P.A. e à P.G.

Motivados pelos assuntos Sequências e Séries, decidimos também incluir como um questionamento secundário as dificuldades da transição entre ensino básico/ensino superior. Acreditamos que esta discussão é benéfica para o professor do ensino superior para que leve em consideração aspectos culturais que alunos ingressantes trazem de suas experiências escolares.

Como tratamos de Séries, consideramos frutífera a discussão de diferentes

concepções de infinito. Assim sendo, elaboramos um recorte histórico que versa sobre o infinito começando por Aristóteles e terminando em séries infinitas.

Tendo em vista os assuntos tratados teoricamente em nossa dissertação, elaboramos e discutimos dez atividades que envolvem Sequências e Séries e que utilizam mais de um registro de representação semiótica. Destas, selecionamos quatro e as aplicamos em uma escola estadual localizada no interior do estado de São Paulo. Refletindo sobre os resultados desta aplicação, o que podemos afirmar sobre o uso de diversos registros de representação semiótica? Consideramos insuficiente o período da pesquisa para arriscarmos uma conclusão categórica. Contudo, foi adequado o tempo que a escola nos concedeu para a aplicação das quatro atividades. Conforme esperávamos, não foi de imediato que os alunos associavam os registros figurais com o registro algébrico. O uso do material dourado adaptado foi relevante para a atividade “Soma de Cubos” segundo o que os próprios alunos nos relataram. Houve até um uso lúdico deste material, visto que vários alunos construíram casinhas e torres com suas peças. O mesmo material, por outro lado, não se mostrou tão eficaz para a atividade dos Quadrados de Fibonacci. Em geometria é comum ter que traduzir um problema em uma equação. Logo, um mérito da teoria de Duval é nos lembrar que a tarefa de conversão entre registros não é tão espontânea quanto em princípio possa parecer.

Em nossas atividades, nos preocupamos também com a habilidade de generalizar padrões apresentados. Utilizamos diversas figuras organizadas de forma a estimular um raciocínio indutivo. Não esperávamos nem pedimos demonstrações, mas que o registro figural unido aos raciocínios indutivos proporcionem um significado para uma identidade algébrica.

Diversos fatores podem ter colaborado para que um número expressivo de grupos devolvessem várias das atividades em branco. Incluindo a escolha, que lhes era facultada, de não participar das atividades. Os questionários poderiam ser instrumentos eficientes para evidenciar o quanto o uso de diversos registros semióticos realmente auxiliou os alunos a entenderem melhor os objetos matemáticos com que trabalham. Mas conforme relatamos, não foi possível empreender uma análise mais profunda pela baixa devolução dos dois questionários. Por todos estes fatores, não nos foi possível entender profundamente o uso de diversos registros de representação semiótica como forma de propiciar uma melhor compreensão dos objetos matemáticos. Ainda assim, esta dissertação

propôs atividades que têm em vista os princípios da teoria das representações em sua elaboração através de Sequências e Séries. Em nossa pesquisa bibliográfica, não encontramos aplicações com estes temas. Além disso, nos preocupamos em facilitar o uso das atividades pelo professor ao criarmos um apêndice que as contém de maneira simples e fácil de imprimir. Esperamos que os professores que se interessarem por estas atividades se sintam livres para fazer modificações que melhor acharem conveniente no intuito de favorecer o aprendizado de seus alunos. Outro ponto que relembramos é a necessidade de se melhorar o layout das atividades que criamos. Ao criá-las, procuramos focar nos objetivos das questões e não demos tanta atenção à aparência e legibilidade das mesmas. Durante a aplicação, observamos que algumas questões deixaram de ser respondidas e cremos que, em parte, isto se deveu ao fato destas não estarem em destaque ou por não conterem espaço útil que permitisse escrever a resposta na própria folha de perguntas.

Durante a aplicação das atividades, escolhemos interagir como um professor para a turma e não apenas com um observador das interações em sala de aula. O ponto negativo desta escolha foi não poder se dedicar exclusivamente à observação em sala de aula. Por outro lado, foi-nos uma oportunidade de questionar cada grupo quanto as dificuldades que sentiam durante a resolução das atividades e de esclarecer alguns equívocos de interpretação que poderiam desmotivá-los. Por exemplo, na atividade sobre Séries Geométricas, perguntamos a diversos alunos quanto as suas ideias sobre o infinito. Conforme prevíamos, frases como “É impossível somar infinitos números” ou “Somar infinitos números é igual a infinito” surgiram durante sua aplicação. Isto sugere que o infinito potencial predomina na concepção de infinito dos alunos, enquanto o infinito em ato lhes aparenta ser algo exótico e não intuitivo. Isto corrobora com o alerta de Rezende(2003) quanto ao evitamento de ideias fundamentais do Cálculo que poderiam estar presentes no ensino básico. O infinito pode ser discutido com os alunos já no ensino médio. Se o evitarmos, os alunos perdem uma oportunidade de compreender melhor esta ideia instigante e que se faz presente em muitas áreas da ciência.

Esperamos que esta dissertação seja útil ao professor de Matemática e que a trajetória que percorremos possa contribuir com reflexões ao ensino de Matemática e ideias de como favorecer o aprendizado dos alunos.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. C. de; MASETTO, M. T. **O professor universitário em aula: prática e princípios teóricos**. 8. ed. São Paulo: Mg Editores Associados, 1990.

ARANHA, A. Z.; RODRIGUES, M. B. **Progressões aritméticas e geométricas**. 2 ed rev. melhor. São Paulo: Policarpo, 1994. v. 3: Exercícios de matemática.

ARISTÓTELES. **Física**, Tradução: Marcello Zanata. Torino: Editrice Torinese, 1999.

_____. **Física**. Tradução: Antonio Russo. Milano: Arnoldo Mondadori Editore, 2008.

ARTIGUE, M. **Le défi de la transition secondaire/supérieur**: que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine? In: 1er CONGRÈS CANADA/FRANCE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 2004, Toulouse. Disponível em: <http://www2.ac-toulouse.fr/math/liaisons/post_bac/informations/colltoulouse.pdf>. Acesso em: 01 mai. 2015.

ÁVILA, G. **A série harmônica e a Fórmula de Euler-MacLaurin**. Revista Matemática Universitária, São Paulo, n. 19, p.55-63, 1995.

BAILLY, A. **Le grand Bailly**: dictionnaire grec-français. 26^a ed. Paris: Hachette, 2000.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 1.ed. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **The history of the calculus and its conceitual development**. New York: Dover Publications, 1959.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U.C. **A history of mathematics**. 3.ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 01-09.

_____. **PCN+ - Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002.

_____. **Editais de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas para o programa nacional do livro didático PNLD 2015**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2013. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/165-editais?download=8304:editais-pnld-2015-ensino-medio-03-07-2013> Acesso em: 03 ago. 2015.

CHICONELLO, L. A. **Números figurados e as sequências recursivas**: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados. 2013. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

DOWDEN, B. **Zeno's Paradoxes**, The Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <http://www.iep.utm.edu/zeno-par/>. Acessado em: 25 jul. de 2015.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>>. Acesso em: 02 Mai. 2015. Tradução Mércles Thadeu Moretti.

_____. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Graphiques et équations: L'articulation de deux registres*. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, mai. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96>>. Acesso em: 07 Jun. 2015. Tradução Mércles Thadeu Moretti.

EDWARDS Jr., C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. Unicamp, 2004.

EUCLIDES, **Elementos**: libros V-IX; tradução: María Luisa P. Castaños. Madrid: Editorial Gredos, 1994.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais: Contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos**. 2012. 197 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

GONZÁLEZ-VELASCO, E. A. **Journey through mathematics**: creative episodes in its history. New York: Springer-Verlag, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HARDY, G. H. **Divergent series**. Oxford: Clarendon Press, 1949.

HEATH, T. L. **The works of Archimedes**. Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

_____. **The thirteen books of The Elements**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press. 1908a. v.1.

_____. **The thirteen books of The Elements**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press. 1908b. v.2.

_____. **The method of Archimedes**: recently discovered by Heiberg. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1912.

_____. **The thirteen books of The Elements**. 2.ed. New York: Dover Publications. 1968. v.1.

_____. **Mathematics in Aristotle**. Oxford: Clarendon Press. 1970.

HOTEL DE HILBERT, Pedro Siaretta (direção), Casablanca (produtora), 01 maio 2010. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?t=559&v=BsS0Kt1f8QY>
Acessado em: 9 ago. 2015. Conteúdo do vídeo: Conjuntos infinitos. Duração: 10min. Recurso educacional desenvolvido pela UNICAMP.

IEZZI, Gelson; HAZZAN Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 4**: Sequências, matrizes, determinantes e sistema. 2. Ed., São Paulo: Editora Atual, 1977.

LIMA, E. L.. **Curso de análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. v.1.

MAANEN, J. A. van. Alluvial deposits, conic sections, and improper glasses, or history of Mathematics applied in the classroom. In: SWETZ, F. et al. **Learn from the masters**. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1995.

MACHADO, N. J. **Educação**: competência e qualidade. 2 ed. São Paulo: Escrituras, 2010.

_____. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 2011.

_____. **Mil e uma #324**: aprender o fundamental. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/mil-e-uma-324-aprender-o-fundamental>. Acesso em: 22 jul. 2014.

MAOR, E. **To infinity and beyond**: a cultural history of infinite. Princeton: Princeton University Press, 1991.

NAGAFUCHI, T. **Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em Matemática**. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

NELSEN, R. B. **Proofs without words**: exercises in visual thinking. Washington: Math. Assoc. Amer., 1993.

_____. **Proofs without words II**: more exercises in visual thinking. Washington: Math. Assoc. Amer., 2000.

NUNES, R. S. R. **Geometria fractal e aplicações**. 2006. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto, Portugal, 2006.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2002.

OS INFINITOS DE CANTOR, Pedro Siaretta (direção), Casablanca (produtora), 03 nov. 2010. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=YXt8QzTNLcw> Acessado em: 9 ago. 2015. Conteúdo do vídeo: Conjuntos numéricos. Duração: 14min01s. Recurso educacional desenvolvido pela UNICAMP.

PRADO, M. **Resolução de problemas e representações semióticas: uma experiência no ensino médio inspirada no rali matemático**. 2015. 167 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

REA, L. M.; PARKER, R. A. **Metodologia de pesquisa**: do planejamento à execução. São Paulo: ed. Thomson Pioneira, 2000.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 450 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. Coord. geral, Maria Inês Fini; coord. de área, Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo: SE, 2011. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>>. Acessado em: 06 ago. 2015

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Escola de tempo integral**. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/escola-tempo-integral>>. Acessado em: 10 nov. 2015.

SENA, C. A. R. **Sequência de Fibonacci: propriedades, aplicações e curiosidades**. 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2013.

SEMERANO, G. **L'infinito**: un equivoco millenario. Milano: Ed. Bruno Mondatori, 2004.

SHAWYER, B.; WATSON, B. **Borel's methods of summability**: theory and applications. Oxford: Clarendon Press, 1994.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Complex analysis**. vol.II. Princeton: Princeton University Press, 2003.

VOROB'EV, N. N. **Fibonacci numbers**. 1ª. ed. Pergamon Press, 1961.

WIKIPÉDIA. **Trombeta de Gabriel.** Disponível
<http://pt.wikipedia.org/wiki/Trombeta_de_Gabriel>. Acesso em: 28 jul. 2014.

REFERÊNCIAS DOS LIVROS DIDÁTICOS CONSULTADOS

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio**: volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 3.ed. v.1. São Paulo: Ática, 2004.

_____. **Matemática**: contexto e aplicações. 1.ed. v.1. São Paulo: Ática, 2010.

GENTIL, N. et al. **Matemática para o 2º grau**. v.1. 11ª ed. São Paulo: Ática, 2001.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática**: uma nova abordagem. v.1: versão progressões. São Paulo: FDT, 2000.

_____. **Matemática completa**. 2.ed.renov. v.1 São Paulo: FTD, 2005.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 4.ed. v.1. São Paulo: Atual, 2006.

LEONARDO, F. M. de. (Ed.). **Conexões com a matemática**. 2. ed. v.1. São Paulo: Moderna, 2013.

MACHADO, A. S. **Matemática na escola do 2º grau**. v. 1. São Paulo: Atual, 1994.

RIBEIRO, J. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. v.1. São Paulo: Scipione, 2010.

SILVA, C. X. da; BARRETO FILHO, B. **Matemática aula por aula**: ensino médio. v.1. São Paulo: FTD, 2005.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática**: ensino médio. 5 ed. São Paulo: Ed. Saraiva, 2005.

_____. **Matemática**: ensino médio. 8 ed. São Paulo: Ed. Saraiva, 2013.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar**: matemática. 1.ed. v.1. São Paulo: FTD, 2010.

_____. de. **Novo olhar**: matemática. 2.ed. v.1. São Paulo: FTD, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A - COMPÊNDIO DE ALGUMAS ATIVIDADES PROPOSTAS.....	153
APÊNDICE B - PLANO DE AULA PARA A APLICAÇÃO DE ATIVIDADES.....	169
APÊNDICE C - TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO E QUESTIONÁRIOS.....	174

APÊNDICE A - COMPÊNDIO DE ALGUMAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Durante o capítulo 5, elaboramos e comentamos diversas atividades. Este apêndice cumpre duas funções: Mostrar as atividades utilizadas na pesquisa de campo e oferecer aos professores interessados materiais para que possam com mais comodidade utilizar as atividades em sua sala de aula. Aproveito para manifestar meu interesse sobre os resultados (positivos ou não) das atividades aqui sugeridas. Caso queira contar sua experiência com o uso destas atividades, pode-se enviar um e-mail ao autor: moura_caio@yahoo.com.br.

Estas atividades são pensadas para pequenos grupos (3 alunos no máximo) de forma que os alunos se ajudem e que haja espaço para que todos participem. Encorajamos o professor a adaptá-las de acordo com sua sala de aula. Uma sugestão que podemos vislumbrar, por exemplo, é apagar alguns ou todos os registros aritméticos das atividades e ver em que medida a observação dos padrões geométricos favorecem a descoberta de identidades das séries numéricas que propomos. Gostaríamos que se o uso destas atividades, adaptadas ou não, se refletirem de maneira proveitosa ao aprendizado dos alunos, que o professor possa divulgar entre seus colegas estas ideias ou esta dissertação de forma que nosso trabalho não fique esquecido em uma prateleira, mas tenha bom uso em benefício do ensino de Matemática. É o que augura o autor desta dissertação.

1. Soma dos Primeiros Números Naturais I

Neste exercício, queremos que você descubra uma maneira fácil de fazer a seguinte soma: $1+2+3+\dots+119+120$. Para isto, representamos cada número como colunas de bolinhas e somamos duas vezes somas menores do que a que queremos (1 ; $1+2$; $1+2+3$; ...) usando bolinhas claras e escuras para cada soma. Queremos que seu grupo perceba um padrão em cada um dos retângulos que mostramos abaixo e a soma que eles representam.

$$2(1+2) = 3 \cdot 2$$

$$= (2+1) \cdot 2$$

base x altura

$$2(1+2+3) = 4 \cdot 3$$

$$= (3+1) \cdot 3$$

base x altura

$$2(1+2+3+4) = 5 \cdot 4$$

$$= (4+1) \cdot 4$$

base x altura

$$2(1+2+\dots) = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$$

$$= (\underline{\hspace{1cm}}+1) \cdot \underline{\hspace{1cm}}$$

base x altura

Nesta figura, queremos calcular somente o número de bolinhas claras sem contar uma por uma. Com a ajuda do raciocínio que desenvolvemos para as figuras anteriores, existe um jeito fácil de fazer este cálculo?

Mas como queremos somente uma soma, podemos dividir os dois lados da equação por 2:

$$(1+2+\dots) = \frac{1}{2}(\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}})$$

Existe alguma característica que cada uma das figuras acima têm em comum?

Este raciocínio que desenvolvemos acima é útil para calcular a soma $1+2+3+\dots+119+120$? Se sim, qual é o resultado?

Conseguimos generalizar o resultado para a soma $1+2+3+\dots+n$?

2. Soma dos Primeiros Números Naturais II

Neste exercício, cada quadradinho representa o número 1. Queremos encontrar uma forma simples de calcular a soma em cada caso ($1+2$; $1+2+3$; $1+2+3+4$;...). Verifique se, para somas grandes, existe uma forma simples de encontrar seu valor sem ter que somar todos os números que compõem a soma.

$$1+2 = \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2}$$

área do
triângulo
branco área dos
triângulos
escuros

$$1+2+3 = \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}$$

área do
triângulo
branco área dos
triângulos
escuros

$$1+2+3+4 = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}$$

área do
triângulo
branco área dos
triângulos
escuros

$$1+2+ \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$$

O que as figuras têm em comum e o que elas têm de diferente ao representar cada soma? Quanto vale a área de cada triângulo escuro? Justifique.

Existe uma relação entre a soma $1+2+3+4+5$, por exemplo, e os valores das áreas claras e escuras das figuras? Se sim, diga qual é.

O formato de cada figura que representa uma soma é importante para chegarmos a uma identidade algébrica? Se sim, por quê?

Conseguimos, com a ajuda das figuras acima, uma identidade para $1+2+\dots+n$?

3. Soma dos Primeiros Números Naturais Ímpares I

Veja que só utilizamos número ímpar de bolinhas para cada soma representada abaixo. Queremos encontrar uma forma simples de calcular a soma em cada caso ($1+3$; $1+3+5$; $1+3+5+7$;...). Verifique se, para somas grandes, existe uma forma simples de encontrar seu valor sem ter que somar todos os números que compõem a soma.

A partir dos exemplos que mostramos ao lado, escreva a soma correspondente da última figura e o valor simplificado desta soma. Em seguida, escreva uma generalização que facilita o cálculo da soma dos n primeiros ímpares naturais.

Há alguma relação entre o último termo da soma e do valor total da soma? O formato de cada figura tem relação com o resultado final de cada soma? Justifique.

É possível encontrar uma identidade para o valor da soma dos 10 primeiros números ímpares? E para os n primeiros números ímpares?

4. Soma dos Primeiros Números Naturais Ímpares II

Nesta atividade, podemos observar na parte de baixo da figura uma identidade que relaciona a área Δ de cada triângulo pequeno com um triângulo maior formado por vários triângulos pequenos idênticos.

$$\Delta + 3 \cdot \Delta + \dots + (2n - 1) \cdot \Delta = A = n^2 \cdot \Delta$$

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Com 4 triângulos pequenos $1\Delta + 3\Delta$ verifique se a área total realmente é de forma $x^2\Delta$. Agora, com 9 triângulos pequenos, verifique se $1\Delta + 3\Delta + 5\Delta$ tem área total igual a $y^2\Delta$.

Existe algum teorema que garante que se posicionarmos os triângulos pequenos formando um triângulo semelhante a um triângulo pequeno, podemos chegar no resultado $n^2\Delta$ como a soma das áreas? Se sim, como podemos usá-lo para demonstrar que $1\Delta + 3\Delta + 5\Delta + \dots + (2n-1)\Delta = n^2\Delta$?

Podemos usar as conclusões desta atividade para descobrir a soma dos n primeiros números primos $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$?

5. Soma de Cubos

Nesta atividade, partimos do desenho de três cubos, os decompomos em placas, as reordenamos para formar uma placa única.

Nesta atividade, cada cubinho representa o número 1. Assim sendo, quais números estamos representando com os três cubos iniciais. Tem como representá-los como números elevados ao cubo?.

Veja que reconfigurar os cubos em uma única placa é o mesmo que somar os números que os cubos iniciais representam.

É possível relacionar a placa formada com os cubos que usamos? Esta placa tem um formato conhecido?

Continuação da atividade 5. Soma de Cubos

E se juntarmos aos 3 três cubos um outro cubo de lado 4, conseguimos formar uma placa parecida com a que formamos com apenas 3 cubos? Ainda conseguimos relacionar esta nova placa com os 4 cubos usados? Se sim, qual é o formato desta nova placa.

Observe próxima figura:

É possível interpretar esta figura em relação à figura anterior? Existe uma relação entre elas? Se sim, explique qual.

Com a ajuda dos cubos de madeira, tente encontrar uma relação entre as somas $1^3+2^3+3^3$, $1^3+2^3+3^3+4^3$, $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ e suas respectivas placas obtidas após reconfigurar os cubos.

Por fim, é possível encontrar uma identidade que ajude a encontrar o valor da soma $1^3+2^3+\dots+n^3$ sem precisar calcular os valores ao cubo?

6. Soma de Inteiros e Soma de Cubos

Nesta atividade, observe o padrão encontrado nas figuras abaixo. Temos que alguns quadrados da figura têm um pedaço recortado que é reencaixado formando um grande triângulo. Vamos analisar se este novo formato nos ajuda a encontrar uma forma encontrar com facilidade o valor da soma $1+2+3+\dots+n$.

Antes, veja que podemos reconfigurar um quadrado em um triângulo. Mas, para isso, como escolhemos o ponto M?

Observe as figuras abaixo:

$$\text{Área} = 1^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \\ &= \frac{2 \times 1}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\text{Área} = 1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 = 9$$

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(3 \times 2) \times (1+2)}{2} \\ &= \frac{6 \times 3}{2} = 9\end{aligned}$$

$$\text{Área} = 1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 = 36$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(4 \times 3) \times (1+2+3)}{2} = 36$$

Em cada um dos três casos acima, existe alguma relação entre a medida da base e a medida da altura dos triângulos formados? Se sim, que relação é essa?

Continuação da atividade 6. Soma de Inteiros e Soma de Cubos

Observe a figura abaixo:

É possível transformá-la em um grande triângulo como foi feito anteriormente? Se sim, podemos verificar a mesma relação entre medida de base e medida de altura que verificamos nas outras figuras?

Como podemos escrever, algebricamente, a relação entre base e altura do triângulo que formamos?

Agora, suponha que a pilha de quadrados fosse formada por n fileiras seguindo o padrão das pilhas de quadrados que vimos nas figuras acima. Escreva uma identidade (ou uma igualdade) que relaciona base e alturas desta pilha de n fileiras quando a reconfiguramos em um triângulo.

Continuação da atividade 6. Soma de Inteiros e Soma de Cubos

Observe a figura abaixo:

Esta figura consegue mostrar, ao mesmo tempo a pilha de n fileiras de quadrados e um triângulo. Agora estamos interessados na área da pilha de quadrados.

Antes de reconfigurarmos a pilha de quadrados, como podemos escrever a soma das áreas dos quadrados neste caso?

E depois de transformarmos a pilha em um único triângulo, haveria um outro jeito de calcular a mesma área? Se sim, escreva em uma igualdade as expressões das duas áreas para o caso de n fileiras de quadrados.

7. Soma dos Quadrados dos Números de Fibonacci

Para esta atividade, vamos usar a sequência de Fibonacci. Trata-se de uma sequência que tem uma regra muito simples para descobrir qual é o próximo valor. Dizemos que o valor do primeiro e o segundo termo da sequência é igual a 1 e, a partir do terceiro termo, dizemos que é igual à soma dos dois termos anteriores. Por exemplo $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$. Logo, $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$. Um outro exemplo é $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$. E assim por diante. Para generalizar esta ideia, escrevemos em Matemática da seguinte maneira: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$.

Em seguida, veja alguns termos da sequência de Fibonacci:

$(f_1 = 1, f_2 = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$

Uma outra ideia que pode te ajudar nesta atividade é saber que podemos interpretar um número ao quadrado com a figura de um quadrado. Por exemplo:

Nesta figura temos um quadrado cujo lado mede 5 unidades. Podemos então afirmar que sua área é igual a 5^2 . Veja que o número 5^2 é apenas a representação da área do quadrado e que podemos encontrar uma outra forma geométrica que também tem área 5^2 . Mas, se quisermos, podemos observar o número 5^2 e imaginar que esta é a medida da área de um quadrado de lado 5.

Você também deve achar intuitivo pensar que encaixar duas ou mais figuras geométricas seja interpretado como somar suas áreas.

Continuação da atividade 7. Soma dos Quadrados dos Números de Fibonacci

Queremos encontrar uma identidade que relacione as áreas das figuras que compõem os retângulos e área total de cada retângulo de forma que seja fácil encontrar a área total. Veja alguns exemplos:

Este retângulo tem base $f_3 = 2$ e altura $f_4 = 3$.

Este retângulo tem altura $f_4 = 3$ e base $f_5 = 5$.

Podemos associar a base e a altura deste retângulo a termos de sequência de Fibonacci da mesma forma que fizemos para os retângulos anteriores?

Para cada um dos três retângulos acima, escreva uma equação que relaciona as figuras que compõem os retângulos e área total de cada retângulo.

Na figura abaixo, temos como relacionar os quadrados contornados com linha escura com os termos da sequência de Fibonacci? Se sim, justifique.

Neste caso, há um jeito simples de calcular a área deste retângulo acima sem calcular a área de cada quadrado? Este jeito mais simples está relacionado com a sequência de Fibonacci? Se sim, explique.

8. Série Geométrica

No nosso dia-a-dia, não vemos nenhum fenômeno que se repete infinitas vezes. O número de grãos de areia em uma praia, ainda que seja muito grande, é um número finito de grãos. No mundo, não observamos nada que seja infinito.

Mas, em Matemática, podemos usar o conceito de infinito sem pensar neste infinito como um processo. A ideia é pensar em algo que já aconteceu infinitas vezes. Um processo infinito, porém acabado. Vamos exemplificar esta ideia de infinito com o seguinte problema:

Um robô foi construído para colorir uma chapa de metal com muita precisão. Para fazer uma obra de arte em chapa quadrada de 1 metro de lado, o robô procede da seguinte maneira: Primeiro, divide a chapa em 4 quadrados de mesma área e colore apenas 3 deles. Depois, divide o quadrado que não foi colorido em outros 4 quadrados de mesmo tamanho e, novamente, colore apenas 3 deles. E continua colorindo o resto da chapa da mesma maneira. Sabemos que um robô consegue colorir quadrados muito pequenos neste processo. Entretanto, não é possível que ele siga este processo de colorir para sempre por causa de limitações de ordem física. Mas, neste problema, suponha que ele fosse capaz de seguir este processo infinitas vezes. Qual seria a área total da chapa colorida de branco?

Continuação da atividade 8. Série Geométrica

Independentemente da resposta que seu grupo chegou na questão anterior, responda as seguintes perguntas:

Quantos quadradinhos brancos o robô colore no problema?

Cada quadradinho branco tem um valor de área. É possível somar todos os infinitos números das áreas do problema e conseguir uma área finita como resultado?

Escreva a soma da área dos primeiros 5 quadrados brancos do problema.

A soma de todos valores de área deste problema é também conhecido como série geométrica. Caso já tenham aprendido em suas aulas de Matemática a calcular o valor da soma dos infinitos termos deste problema, mostre os cálculos abaixo.

Última pergunta: é possível somar infinitos números e ainda assim ganhar um resultado finito ?

9. Escadaria de Gabriel

Nesta atividade queremos descobrir a área total dos infinitos retângulos da figura:

Cada retângulo da figura tem medida de base igual a r^n e altura igual a n . Por exemplo, o primeiro retângulo tem base r e altura igual a 1. O segundo retângulo tem base r^2 e altura 2 e assim por diante. A todos os infinitos retângulos dispostos como na figura damos o nome de escadaria de Gabriel. Uma razão para ter este nome é que a altura de cada um dos “degraus” é igual a 1 enquanto que a largura dos degraus vai sempre diminuindo. Veja que r é um valor positivo entre zero e um ($0 < r < 1$).

Os três pontos que vemos na figura simbolizam que temos infinitos retângulos nesta “escadaria”. Mas, posso te revelar que a soma das áreas destes infinitos retângulos é **finita**! E

nesta atividade, queremos que seu grupo tente calculá-la. Para isso, vamos fatiar esta escadaria em vários pedaços como na próxima figura:

Depois, em vez tentarmos encontrar o valor da soma pensando nos retângulos verticalmente, que tal tentar somar fileiras horizontais da escadaria para encontrar o resultado procurado? Veja que apesar do desenho ao lado, lembrem que temos infinitas camadas horizontais porque a “escadaria” tem altura infinita. Para encontrar o resultado, vejam que os “pedaços da escadaria” ao lado lembram os termos de uma PG. Tem alguma maneira de somar infinitos termos de uma PG de razão $0 < r < 1$?

10. Soma de Potências de 3

Apresentamos abaixo uma forma de representar potências de 3 através de bolinhas que formam triângulos. Observe os exemplos abaixo:

Temos as seguintes representações de potências de 3:

Veja que

$$\begin{aligned} 2(3^0 + 3^1 + 3^2) &= 26 \\ &= 27 - 1 \\ &= 3^3 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) &= 80 \\ &= 81 - 1 \\ &= 3^4 - 1 \end{aligned}$$

Assim sendo, verifique se a figura abaixo também é composta de triângulos que representam potências de 3.

Verifique também se a soma de todas as bolinhas desta figura também pode ser escrita de maneira parecida com a que escrevemos a soma das bolinhas dos triângulos ao lado.

A representação das potências 3^3 pode ser criada com a ajuda da figura da potência 3^2 ? Se sim, explique com um desenho e com algum comentário escrito.

O mesmo acontece com a representação da potência 3^4 em relação à potência 3^3 ? Se sim, explique com um desenho.

Existe uma maneira fácil de calcular a soma $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$ sem precisar calcular cada potência e depois somar os resultados?

Existe uma maneira fácil de calcular a soma $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$ sem precisar calcular cada potência e depois somar os resultados? Veja que n é um número inteiro positivo.

APÊNDICE B - PLANO DE AULA PARA A APLICAÇÃO DE ATIVIDADES

Para a aplicação em sala de aula destas atividades, escolhemos as de número 1, 5, 7 e 8 presentes no apêndice A. Para escrever este plano de aula, usamos ideias de Abreu e Masetto (1990, p.19-21) de maneira a organizar o andamento das atividades e explicitar objetivos e estratégias de ensino adotadas. Estes autores recomendam um planejamento subdividido em 5 partes: I. Identificação: Nome da disciplina, semestre, ano, número de alunos entre outros dados que ajudem o professor a consultar seu planejamento no futuro e ter em mente se as estratégias escolhidas são adequadas para o número de alunos ou para a infraestrutura da instituição de ensino. II. Objetivos: explicita-se o papel da disciplina no curso como um todo, em que aspectos ela se faz útil aos alunos que a cursam e qual a expectativa de aprendizado ao seu final. III. Tema (Conteúdo Programático). Bibliografia: Nesta parte do planejamento é que se explicita os conteúdos que corroboram para alcançar os objetivos estabelecidos, as subdivisões do tema para cada aula e sua duração. IV. Estratégias: Indica-se quais as atividades que visam alcançar os objetivos estabelecidos e em que sequência. A aula expositiva é apenas uma dentre as diversas estratégias que podem ser colocadas em prática em sala de aula. V. Avaliação: Explicitam-se os instrumentos adequados para verificar o quanto a expectativa de aprendizagem do professor se confirma no aluno. Para tal, é necessário o uso de mais de um instrumento de avaliação de forma que o aluno perceba em quais aspectos ele mesmo pode melhorar.

Defendemos que a atividade de avaliar também seja usada como oportunidade de aprendizagem. Ao ter consciência do que errou, o aluno seja incentivado a resgatar os conteúdos ou cultivar as habilidades necessárias para um melhor desempenho futuro. Isto porque, conforme pensamos, a finalidade maior da ação docente é favorecer o aprendizado dos alunos e não classificá-los. Concordamos que a busca do aluno por aperfeiçoar-se depende da sua própria maturidade e interesse em relação ao que é ensinado. Logo, tão importante quanto criar um ambiente de sala de aula favorável à aprendizagem dos alunos, é desejável que estes se sintam motivados a ponto de se tornarem agentes ativos do próprio aprendizado e não apenas expectadores da ação docente.

Tendo em vista esta subdivisões, delineamos abaixo um plano de aula que visa orientar as ações gerais que pretendemos aplicar em sala de aula. Não se trata de uma série de regras inflexíveis, mas de uma previsão que leva em consideração os alunos (número de alunos, suas idades, conhecimento prévio que têm sobre o assunto, etc), o

tempo disponível, o grau de profundidade que se pretende em relação ao assunto abordado e que tem sempre em vista os objetivos de aprendizagem escolhidos. A ideia é fazer uma previsão realista de forma que não seja necessário se desviar do que foi planejado. Entretanto, é uma virtude reconhecer quando o planejamento não foi adequado e que a aula pode ser bem conduzida com outras estratégias.

Plano de Atividades

I. Identificação

Atividades sobre Sequências e Séries para 1ª série do Ensino Médio

Instituição de Ensino: Escola Estadual _____

Data: De ____/____/____ a ____/____/____ Horário: Das ____h__ às ____h__

Discentes: Por volta de ____ alunos cursando com idade entre 15 e 16 anos que se voluntariaram a participar. Não é pré-requisito ter estudado Sequências e Séries, mas estimamos que um conhecimento prévio destes tópicos pode facilitar a execução das atividades propostas. Em um questionário entregue antes do início das atividades perguntamos aos alunos se têm conhecimento prévio destes temas.

II. Objetivos

Ao final desta aula, pretende-se levar os alunos a:

1. Saberem resolver problemas de Sequências e Séries com o auxílio de representações figurais. Que saibam fazer conversões entre representações semióticas dos objetos matemáticos de forma que percebam as vantagens e desvantagens de cada registro.
2. Perceber que as representações do objeto matemático não são o próprio objeto matemático.
3. Se sentirem motivados com a proposta de atividades e que possam aplicar a ideia de conversão de registros em outros assuntos dentro da Matemática.
4. Entender a diferença entre infinito real (ou infinito atual) e o infinito potencial.
5. Percebam a importância de não apenas se convencerem da validade de um resultado que parece ser correto e perceber que, em Matemática, é através da demonstração que se garante que um resultado é verdadeiro. Entretanto, exemplos, analogias e figuras são importantes para a descoberta de novos resultados.

III. Tema (Conteúdo Programático). Bibliografia

Somas dos n Primeiros Números Naturais;

Soma de Cubos;

Sequência de Fibonacci e Soma de Quadrados da Sequência de Fibonacci;

Série Geométrica e Ideia de Infinito Real (ou Infinito em Ato).

Para o professor que se interessar por uma abordagem visual em relação a outros temas matemáticos, recomendamos os seguintes livros:

NELSEN, R. B. **Proofs without words**: exercises in visual thinking. Washington: Math. Assoc. Amer., 1993.

NELSEN, R. B. **Proofs without words II**: more exercises in visual thinking. Washington: Math. Assoc. Amer., 2000.

IV. Estratégias

Tempo

Estratégias

1. Antes da entrada dos alunos, organizar as carteiras de forma que naturalmente formem pequenos grupos de 3 alunos e que o uso de material dourado esteja de fácil acesso a todos os membros do grupo.

5min

2. Professor cumprimenta a classe e se apresenta. Fala o tema da aula e comenta o fato desta ser uma etapa importante para uma pesquisa em Educação Matemática. Ressalta-se que devem fazer as atividades no máximo em grupos de 3 alunos e que podem tirar dúvidas sobre a atividade a qualquer momento. Os alunos são avisados que precisam fazer as atividades com rapidez em cada desafio, mas também com atenção para acertar as questões.

25min

3. O professor, antes de entregar a primeira atividade, exemplifica que em uma cartela de ovos ou de remédio não é necessário contar todos os buracos da cartela para saber o total de ovos ou de comprimidos. Que basta multiplicar o total de buracos da largura e do comprimento para saber o total. Dito isso, o professor entrega a cada grupo com a primeira atividade (Soma dos Primeiros Números Naturais I). Ele lê todas as atividades com os alunos e se coloca à disposição para ajudar em caso de dúvidas. Avisa a classe que eles têm 15 minutos para fazer o primeiro desafio. Ainda é

esperado que usem os 25 minutos previstos. Esperamos que tenham dúvidas quanto ao que significa generalizar. Esta etapa tem em vista os objetivos 1, 2, 3 e 5.

10min 4. A próxima atividade (Soma de Cubos) é dividida em duas partes. Nesta primeira parte, entregamos a primeira folha de perguntas referentes a soma de cubos. Esperamos que os alunos resolvam duas perguntas sem acesso ao material dourado adaptado que dispomos. Queremos ver como os alunos resolvem um problema de 3 dimensões sem objetos em 3 dimensões para manipular. As perguntas se concentram em conversão do registro geométrico para o registro aritmético. Esta etapa tem em vista os objetivos 1, 2 e 3.

20min 5. Nesta segunda etapa, o professor entrega a segunda folha de atividades e, após ler as perguntas, entrega-lhes um kit com material dourado adaptado para esta atividade. Queremos observar como os alunos utilizam este material. Espera-se que a etapa anterior ajude os alunos a compreender ainda mais a ideia de conversão entre registros abordada nesta etapa que, à propósito, tem em vista os objetivos 1, 2, 3 e 5.

15min 6. O professor entrega aos grupos a primeira folha referente à próxima atividade (Soma dos Quadrados dos Números de Fibonacci). Neste momento, não há questões a responder. O professor lê o conteúdo da folha junto com os alunos e para sua exposição para exemplificar melhor certos pontos sobre a sequência de Fibonacci. É esperado que interaja com os alunos de forma que participem da descoberta de como se formam os termos da sequência de Fibonacci. O professor pode contextualizar a sequência com o clássico exemplo do casal de coelhos, mas está livre para usar (ou não) outros exemplos que contextualizem o problema. Esta é uma etapa de descoberta que não está fortemente ligada com os 5 objetivos.

15min 7. A segunda folha referente à Soma dos Quadrados dos Números de Fibonacci é entregue aos alunos desta vez com perguntas. Nota-se que não há uma pergunta sobre generalização do resultado, mas espera-se que a última questão proposta seja um passo intermediário que pode preparar os alunos para generalizar o resultado deste exercício. Mas por questão de tempo, preferimos não incluir uma questão que peça uma generalização. Esta etapa tem em vista os objetivos 1, 2, 3 e 5.

10min 8. O professor entrega aos grupos a primeira folha referente à próxima

atividade (Série Geométrica). Nesta, há uma contextualização que visa facilitar o entendimento do infinito em ato. Visa confrontar este infinito com as ideias que os alunos tenham sobre infinito potencial. Deseja-se que os alunos trabalhem com a ideia de áreas para perceber que a soma de infinitos números pode ter um resultado finito. O professor enfatiza que no processo de colorir a chapa, sempre fica um quadrado que não é colorido, mas que estamos supondo que o robô terminou de colorir infinitas vezes. Estima-se que alguns alunos sintam dificuldades com esta ideia de infinito. Esta etapa está conectada aos 5 objetivos e, em especial, ao objetivo 4.

17min 9. Nesta etapa os alunos respondem a questões que envolvem o fato de uma soma infinita poder resultar em um número (convergir) e não necessariamente divergir. O exemplo da chapa auxilia nesta compreensão visto que a área da chapa é finita e há infinitos números de quadrados brancos na chapa formando uma área branca finita. Pode ser também que alguns alunos sintam dificuldades em usar frações para poder criar os 4 primeiros termos da sequência. Não contamos que os alunos usem soma de PG infinita de razão $0 < q < 1$, mas se souberem, há uma pergunta dá a oportunidade de usar este conhecimento. Há ênfase no objetivo 4.

3min 10. Os alunos preenchem o último questionário avaliando as atividades que fizeram.

Tempo Total Previsto: 2 horas.

V. Avaliação

O foco é como os alunos avaliam as atividades que fizeram (e não o contrário). Para tal, respondem um questionário ao final das atividades que visa colher suas opiniões sobre o que aprenderam de novo, entre outras perguntas que avaliam em que medida os 5 objetivos foram alcançados. Ainda assim, observamos o desempenho dos alunos, pois é seus erros e acertos são informações que podem ser esclarecedoras sobre a clareza das questões propostas e em que medidas elas auxiliam a alcançar nossos objetivos educacionais.

Observações:

As perguntas são entregues aos alunos à medida em que vão elaborando as respostas e não todas de uma vez. Materiais dourados adaptados para a atividade de Soma de Cubos e de Sequência de Fibonacci são entregues quando necessários.

APÊNDICE C - TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO E QUESTIONÁRIOS UTILIZADOS

Consultando o site do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática³³, encontramos 5 princípios que regem o aspecto ético da pesquisa:

1. Autonomia: se refere à informação e livre participação dos sujeitos da pesquisa. Esse direito é garantido pelo preenchimento do “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido” (TCLE).
2. Beneficência: a pesquisa precisa estar comprometida com o bem de seus sujeitos individuais ou coletivos, reais e potenciais.
3. Não-maleficência: compromisso de não causar danos de nenhuma natureza aos participantes.
4. Justiça: que a pesquisa tenha relevância social e uma destinação humanitária. Custos e benefícios devem ser repartidos equitativamente entre os sujeitos da pesquisa, sendo particularmente protegidos os sujeitos vulneráveis.
5. Privacidade e Confidencialidade: todas as informações obtidas pela pesquisa ficam preservadas, com seu uso dentro dos objetivos da pesquisa. Este item se relaciona com a Autonomia através do TCLE.

Nesta mesma página, são sugeridos modelos de termos de consentimento. Sendo necessária a autorização dos pais, dos alunos e da escola para a realização da sequência didática fora do horário de aula dos alunos, usamos os modelos sugeridos para este fim. Apresentamos abaixo o modelo de termos de consentimento utilizados e os questionários que usamos para sondar o autoconceito dos alunos participantes quanto a Matemática.

33 Disponível em: <http://www.ime.usp.br/posmpemat/etica> Acessado em: 15 ago 2015.

Para escolas e/ou contatos institucionais

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu compreendo os direitos dos participantes da pesquisa intitulada *Sequências e Séries: Uma Proposta Duvaliana para a Educação Básica*, orientada pelo Prof. Dr. Oscar João Abdounur, e que tem como pesquisador responsável Caio Moura Quina, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, os quais podem ser contatados pelo e-mail moura_caio@yahoo.com.br ou abdounur@gmail.com ou telefone (016)98176-4264. Na qualidade de responsável pela _____ (nome da escola ou instituição), autorizo a participação de _____ (estudantes/professores/coordenadores) na mencionada pesquisa e compreendo como e porque esse estudo está sendo realizado. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

*** Local, Data, Nome, Cargo e Assinatura do responsável.

Para os alunos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada *Sequências e Séries: Uma Proposta Duvaliana para a Educação Básica*, que tem como pesquisador responsável Caio Moura Quina, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado pelo Prof. Dr. Oscar João Abdounur, os quais podem ser contatados pelo e-mail moura_caio@yahoo.com.br ou abdounur@gmail.com ou telefone (016)98176-4264. O presente trabalho tem por objetivos: avaliar em que medida as atividades de Matemática criadas auxiliam no aprendizado dos alunos. Minha participação consistirá em preencher um questionário e participar de Desafios de Matemática! Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

*** Local, Data, Nome e Assinatura.

São Carlos, ____ de Setembro de 2015

Carta introdutória destinada aos pais e alunos como incentivo à presença dos alunos nas atividades planejadas

Senhores Pais ou Responsáveis

Todos sabemos da importância da educação na formação de todos os cidadãos. Muito tempo e esforço são empregados para colaborar com a melhoria do ensino. Estamos realizando na E.E. Conde do Pinhal nos dias ____/____/2015 e ____/____/2015 das 12h55 às 14h35 uma atividade especial de Matemática. Esta atividade é o resultado de um projeto de pesquisa de Mestrado pela Universidade de São Paulo (USP). Esta atividade visa avaliar em que medida as atividades de Matemática criadas auxiliam no aprendizado dos alunos. A participação é facultativa. É esperado que até o início 2016, os resultados desta atividade estejam disponíveis gratuitamente pelo site do banco de teses da USP (<http://www.teses.usp.br/>) de forma que os professores de Matemática possam aproveitar ideias e resultados. Esperamos, assim, colaborar com boas reflexões para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática no Brasil.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, RG _____, declaro saber da participação de meu/minha filho/a _____ na pesquisa *Sequências e Séries: Uma Proposta Duvaliana para a Educação Básica*, desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelo pesquisador Caio Moura Quina, orientado pelo Prof. Dr. Oscar João Abdounur, os/as quais podem ser contatados pelos e-mails moura_caio@yahoo.com.br ou abdounur@gmail.com ou telefone (016) 98176-4264. O presente trabalho tem por objetivos: avaliar em que medida as atividades de Matemática criadas auxiliam no aprendizado dos alunos, e os instrumentos utilizados são: 4 atividades referentes ao tema Sequência e Séries. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos alunos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Carlos, ____ de _____ de 2015

Nome e Assinatura do responsável.

Questionário Inicial

Idade: _____ Data: ____/____/2015; Cidade: São Carlos; Série: _____ nº _____

Escola: E.E. Conde do Pinhal

1. Você gosta de Matemática? Por quê? _____

2. Você se considera um bom aluno em Matemática? Por quê? _____

3. Você acha que a Matemática que você aprende na escola será útil para o seu futuro? Por quê? _____

4. Você já estudou o assunto Sequências, Progressão Aritmética (P.A.) e Progressão Geométrica (P.G.) na disciplina de Matemática? Se sua resposta é sim para algum dos temas acima, escreva brevemente o que você lembra estes assuntos.

Questionário de Auto-Avaliação

Idade: _____ Data: ____/____/2015; Cidade: São Carlos; Série: _____ nº _____

Escola: E.E. Conde do Pinhal

1. O 1º desafio (Soma de $1+2+\dots+119+120$) foi:

- ☐ Muito fácil; ☐ Fácil; ☐ Nem fácil, nem difícil; ☐ Difícil; ☐ Muito difícil

Por quê? _____

Neste desafio, você aprendeu algo novo? Se sim, o que? _____

2. O 2º desafio (Soma de Cubos) foi:

- ☐ Muito fácil; ☐ Fácil; ☐ Nem fácil, nem difícil; ☐ Difícil; ☐ Muito difícil

Por quê? _____

Neste desafio, você aprendeu algo novo? Se sim, o que? _____

4. No 2º segundo desafio (Soma de Cubos) houve o uso de cubinhos e placas de madeira: (Escreva **C** para as frases que você concorda e **D** para as frases que você discorda)

- ☐ Ajudaram a entender a atividade;
- ☐ Sem este material, não conseguiria fazer esta atividade;
- ☐ Não fizeram diferença;
- ☐ Me atrapalharam.

Questionário de Auto-Avaliação

Idade: _____ Data: ____/____/2015; Cidade: São Carlos; Série: _____ nº _____

Escola: E.E. Conde do Pinhal

1. O 3º desafio (Sequência de Fibonacci) foi:

☐ Muito fácil; ☐ Fácil; ☐ Nem fácil, nem difícil; ☐ Difícil; ☐ Muito difícil

Por quê? _____

Neste desafio, você aprendeu algo novo? Se sim, o que? _____

2. O 4º desafio (Soma infinita de PG) foi:

☐ Muito fácil; ☐ Fácil; ☐ Nem fácil, nem difícil; ☐ Difícil; ☐ Muito difícil

Por quê? _____

Neste desafio, você aprendeu algo novo? Se sim, o que? _____

3. Todos os desafios apresentavam pelo menos uma figura relacionada com o problema. O processo de interpretar a figura para resolver o exercício é algo comum nas suas atividades escolares de Matemática? Você acha fácil ou difícil transformar figuras em números e/ou equações?

4. Quanto a observar um número e pensar nele como uma figura, como fizemos na atividade da sequência de Fibonacci, você considera este processo mais simples de entender depois de fazer estes desafios ou você considera esta ideia um tanto difícil? Explique. _____