**Transformação de frações em números:
uma experiência no Ensino Fundamental**

Izabela Cesario Correa Ananias

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ana Paula Jahn

São Paulo, janeiro de 2019

**Transformando Frações em Números:
uma experiência no Ensino Fundamental**

Esta é a versão original da dissertação elaborada
pela candidata Izabela Cesario Correa Ananias, tal
como submetida à Comissão Julgadora.

RESUMO

ANANIAS, I. C. C. **Transformação de frações em números**: uma experiência no Ensino Fundamental. 2018. 111 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Este estudo se insere na problemática do ensino e aprendizagem de frações no Ensino Fundamental e, mais particularmente, no que se refere à apreensão das frações como números pelos alunos. Essa concepção da fração como número é descrita na literatura da área de Educação Matemática como problemática para os alunos, pois, em geral, concebem a representação $\frac{a}{b}$ (com a e b naturais e b não nulo) apenas como um duplo processo de contagem no modelo parte-todo. Decidiu-se, portanto, investigar o impacto de algumas abordagens que ampliassem a referida concepção de fração como parte de inteiro. Para tanto, tomou-se como base algumas pesquisas que destacam diferentes ideias e situações para conceituar frações, bem como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, devido à importância de se abordar as frações em seus vários significados, por meio de diferentes representações. Realizou-se um estudo experimental de caráter qualitativo, inspirado na metodologia de *Design Experiment*, envolvendo 24 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola em Goiânia. A elaboração das atividades fundamentou-se nos constructos teóricos do levantamento bibliográfico, bem como em um questionário inicial que permitiu identificar as principais dificuldades do grupo de alunos. As hipóteses consideradas no *design* foram: ênfase em atividades de conversão de representações entre os registros numérico ou figural e o gráfico (reta numérica), em ambos os sentidos; e foco na ideia da fração como representação do resultado de uma divisão de dois números naturais. Foram realizadas quatro atividades, com diversas tarefas em cada uma delas, ao longo de nove encontros no âmbito das aulas regulares de Matemática. As propostas transitaram entre trabalhos em grupo e individuais, envolvendo recursos tradicionais e materiais concretos, sendo que a coleta de dados se deu essencialmente a partir das observações da pesquisadora e dos registros orais e escritos das produções dos alunos. Na atividade principal, foi introduzido um recurso para realizar a divisão de segmentos em partes congruentes, visando dar condição para os alunos representarem frações não decimais em retas numéricas, sem realizar a conversão para a representação decimal e/ou efetuar aproximações imprecisas. As análises mostraram que houve, em geral, um amadurecimento dos estudantes em relação às ideias apresentadas, aproximando-os da concepção de fração como número uma vez que explicitaram compreensão de aspectos de equivalência e ordem ao posicionar frações em retas numéricas e perceberam que tais frações correspondiam a resultados de divisões entre dois números naturais, isto é, a quocientes vistos como quantidades.

Palavras-chave: Frações. Números decimais. Representações. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

ANANIAS, I. C. C. **The transformation of fractions into numbers**: an experience in Basic Education. 2018. 111 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

This study concerns the issue of teaching and learning fractions in Basic Education and, more particularly, regards the students' apprehension of fractions as numbers. The notion of fractions as numbers is described in Mathematics Education literature as problematic for students, since, generally, they understand the representation $\frac{a}{b}$ (where a and b are natural numbers and b is different than zero) only as a double counting process in the part-whole model. Therefore, we decided to investigate the impact of some approaches that broadened the notion of fraction as part of a whole. In order to achieve that, we used as a basis research that highlights different ideas and situations to conceptualize fractions, as well as Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation, due to the importance of approaching fractions in their diverse meanings, through different representations. We carried out an experimental study of qualitative character, inspired by the Design Experiment methodology, with 24 students in the 6th grade from a school in Goiânia. The activities were written based on the theoretical constructs analyzed in the bibliographic search, as well as based on an initial questionnaire that allowed us to identify the main difficulties that the student group had. The hypotheses considered in the design were: emphasis on activities concerning representation conversion between numerical or figural registers and graphical (number line) in both directions; and focus on the idea of fraction as the representation of a division of two natural numbers. Four activities were carried out, with several tasks in each one, along nine meetings in the context of regular Math classes. The activities varied between group and individual tasks, involving traditional resources and concrete materials, with the data collection taking place essentially through the researcher's observations and oral and written records of the students' productions. In the main activity, we introduced a resource to facilitate the division of segments into congruent parts, aiming to help the students depict non-decimal fractions in number lines without converting them into the decimal register and/or using inaccurate approximations. The analysis shows that, generally, there was an improvement in the students concerning the ideas presented in the activities, bringing them closer to the concept of fractions as numbers, as they demonstrated understanding aspects of equivalence and order by placing fractions in number lines and realized that these fractions corresponded to the results of divisions of two natural numbers, that is, quotients perceived as quantities.

Keywords: Fractions. Decimal numbers. Representations. Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: <i>Questão do SAEB (2013)</i>	2
Figura 2: <i>Introdução ao estudo de frações em um livro didático</i>	8
Figura 3: <i>Frações de um retângulo</i>	10
Figura 4: <i>Fração como razão</i>	11
Figura 5: <i>Exercícios e Problemas</i>	12
Figura 6: <i>Representação da fração $1/3$ tomando o círculo como unidade</i>	15
Figura 7: <i>Diferentes interpretações de uma fração</i>	16
Figura 8: <i>Fração indicando a relação entre áreas da superfície de corte</i>	16
Figura 9: <i>Equivalência entre frações</i>	17
Figura 10: <i>Questão 1 – Questionário inicial</i>	30
Figura 11: <i>Questão 2 – Questionário inicial</i>	31
Figura 12: <i>Questão 3 – Questionário inicial</i>	31
Figura 13: <i>Questão 4 – Questionário inicial</i>	32
Figura 14: <i>Questão 5 – Questionário inicial</i>	32
Figura 15: <i>Questão 6 – Questionário inicial</i>	32
Figura 16: <i>Questão 7 – Questionário inicial</i>	33
Figura 17: <i>Questão 8 – Questionário inicial</i>	34
Figura 18: <i>Raciocínio utilizado na Questão 1 – Questionário inicial</i>	37
Figura 19: <i>Resposta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	37
Figura 20: <i>Resposta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	38
Figura 21: <i>Resposta incorreta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	38
Figura 22: <i>Resposta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	39
Figura 23: <i>Resposta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	39
Figura 24: <i>Resposta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	39
Figura 25: <i>Resposta à Questão 2 – Questionário inicial</i>	39
Figura 26: <i>Legenda da Questão 3 – Questionário inicial</i>	40
Figura 27: <i>Resposta incorreta da Questão 3 – Questionário inicial</i>	41
Figura 28: <i>Resposta à Questão 3 – Questionário inicial</i>	42
Figura 29: <i>Resposta incorreta à Questão 3 – Questionário inicial</i>	43
Figura 30: <i>Resposta à Questão 4 – Questionário inicial</i>	43
Figura 31: <i>Questão 1 – Atividade 1</i>	47
Figura 32: <i>Questão 2 – Atividade 1</i>	48
Figura 33: <i>Questão 3 – Atividade 1</i>	48
Figura 34: <i>Questão 4 – Atividade 1</i>	49
Figura 35: <i>Questão 7 – Atividade 1</i>	49
Figura 36: <i>Questão 5 – Atividade 1</i>	50
Figura 37: <i>Questão 6 – Atividade 1</i>	50
Figura 38: <i>Questão 11 – Atividade 1</i>	51
Figura 39: <i>Questão 12 – Atividade 1</i>	51
Figura 40: <i>Questão 9 – Atividade 1</i>	52
Figura 41: <i>Questão 8 – Atividade 1</i>	52
Figura 42: <i>Questão 10 – Atividade 1</i>	53
Figura 43: <i>Resposta à Questão 2 – Atividade 1</i>	54
Figura 44: <i>Resposta correta à Questão 3 – Atividade 1</i>	55

Figura 45: <i>Comentário sobre a Questão 3 – Atividade 1</i>	55
Figura 46: <i>Resposta incorreta à Questão 6 – Atividade 1</i>	57
Figura 47: <i>Associação de dois tipos de registro – Atividade 1</i>	58
Figura 48: <i>Resposta parcialmente correta à Questão 8 – Atividade 1</i>	58
Figura 49: <i>Resposta à Questão 9 – Atividade 1</i>	59
Figura 50: <i>Legenda da Questão 8 – Atividade 1</i>	61
Figura 51: <i>Material auxiliar – Atividade 2</i>	63
Figura 52: <i>Fichas auxiliares – Atividade 2</i>	64
Figura 53: <i>Momento da explicação das regras da gincana</i>	66
Figura 54: <i>Aluno do grupo T justificando a falsidade da afirmação 13</i>	69
Figura 55: <i>Alunos do grupo E discutindo sobre a afirmação 11</i>	70
Figura 56: <i>Alunos do grupo T usando a lousa individual como recurso para a discussão</i> ...	71
Figura 57: <i>Lousa preparada para aplicação da Atividade 3</i>	73
Figura 58: <i>Questão 1 – Atividade 3</i>	74
Figura 59: <i>Questão 2 – Atividade 3</i>	75
Figura 60: <i>Questão 3 – Atividade 3</i>	75
Figura 61: <i>Questão 4 – Atividade 3</i>	75
Figura 62: <i>Questão 5 – Atividade 3</i>	75
Figura 63: <i>Resposta ao Item 2 – Atividade 3</i>	76
Figura 64: <i>Quadro valor lugar desenhado na lousa</i>	77
Figura 65: <i>Resposta à Questão 1 – Atividade 3</i>	78
Figura 66: <i>Resposta à Questão 2 – Atividade 3</i>	79
Figura 67: <i>Resposta esperada à Questão 2 – Atividade 3</i>	79
Figura 68: <i>Resposta esperada à Questão 2 – Atividade 3</i>	80
Figura 69: <i>Resposta esperada à Questão 2 – Atividade 3</i>	80
Figura 70: <i>Resposta à Questão 3 – Atividade 3</i>	81
Figura 71: <i>Resposta à Questão 3 – Atividade 3</i>	81
Figura 72: <i>Resposta à Questão 4 – Atividade 3</i>	82
Figura 73: <i>Resposta à Questão 5 – Atividade 3</i>	83
Figura 74: <i>Questão 1 – Atividade 4</i>	85
Figura 75: <i>Questão 2 – Atividade 4</i>	86
Figura 76: <i>Feixe de retas paralelas determinando segmentos congruentes</i>	87
Figura 77: <i>Questão 3 – Atividade 4</i>	88
Figura 78: <i>Questão 4 – Atividade 4</i>	88
Figura 79: <i>Questões 5 e 6 – Atividade 4</i>	89
Figura 80: <i>Resposta à Questão 2 – Atividade 4</i>	93
Figura 81: <i>Resposta à Questão 4 – Atividade 4</i>	94
Figura 82: <i>Resposta à Questão 4 – Atividade 4</i>	95
Figura 83: <i>Resposta à Questão 4 – Atividade 4</i>	95
Figura 84: <i>Resposta à Questão 6 – Atividade 4</i>	96

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	4
2.1 Conceitos e suas denominações.....	4
2.2 Os múltiplos significados.....	7
2.2.1 Parte-todo.....	7
2.2.2 Razão.....	10
2.2.3 Quociente.....	12
2.2.4 Operador.....	14
2.3 As múltiplas representações.....	15
2.4 Questões estruturantes do conceito.....	16
2.5 Abordagens equivocadas.....	17
3 QUESTÃO NORTEADORA E OBJETIVOS.....	19
3.1 Objetivos.....	19
4 REFERENCIAL TEÓRICO.....	21
4.1 Registros de representação semiótica.....	21
4.2 Acessando objetos matemáticos.....	22
4.3 <i>Noesis</i> e <i>semiosis</i>	23
4.4 Representações, tratamentos e conversões.....	24
5 METODOLOGIA.....	28
5.1 <i>Design Experiment</i>	28
5.2 Procedimentos metodológicos.....	29
5.3 Questionário inicial.....	30
5.3.1 Objetivos e hipóteses.....	30
5.3.2 Entrevista com professores.....	34
5.3.3 Resultados.....	36
5.4 Atividade 1.....	46
5.4.1 Objetivos e hipóteses.....	47
5.4.2 Resultados.....	53
5.4.3 Entrevista com alunos.....	60
5.5 Atividade 2.....	62
5.5.1 Objetivos e hipóteses.....	65
5.5.2 Resultados.....	66
5.6 Atividade 3.....	72
5.6.1 Objetivos e hipóteses.....	72

5.6.2 Resultados	76
5.7 Atividade 4	85
5.7.1 Objetivos e hipóteses	85
5.7.2 Resultados	89
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
REFERÊNCIAS	103

1 INTRODUÇÃO

Muito se ouve falar sobre como a Matemática é “maltratada” nos primeiros anos do Ensino Fundamental e como os professores dessa fase são continuamente desafiados a lidar com diversos temas problemáticos dessa disciplina, no sentido de apresentarem dificuldades de ensino e de aprendizagem. Acreditamos que um dos papéis do professor licenciado em Matemática seja, então, encarar os problemas advindos dessa fase da escolaridade.

Por esse e outros motivos que serão apresentados na sequência, escolhemos estudar um conteúdo do 6º ano do Ensino Fundamental. Muitos conceitos são revisitados em tal ano e, nesse contexto, acreditamos existir oportunidades de suscitar um novo olhar sobre saberes matemáticos já introduzidos aos alunos.

Ao fazer essa escolha, recorreremos, num primeiro momento, aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para pensar na importância dos assuntos que devem ser contemplados e nas propostas que o documento traz. Conhecer e saber operar com números fracionários é ter acesso a uma “nova” noção de número, sendo isso algo de relevância formadora.

Neste ciclo, são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal (BRASIL, 1998, p. 57).

Especificamente em relação ao ensino dos números racionais, diferentes propostas curriculares e materiais didáticos são encontrados no Brasil e parece haver recomendações diversas para orientar esse ensino. Enquanto algumas propostas recomendam que seja dado um maior enfoque na representação decimal, por ocorrer com mais frequência no contexto diário dos alunos, outras tratam as diferentes representações com igual importância.

Pensando um pouco em nossos alunos, podemos dizer que é um assunto que tem muitos problemas a serem resolvidos. Um deles, por exemplo, refere-se à utilização excessiva de regras e algoritmos que acabam confundindo-os e tirando o foco do real significado desses números e de suas operações.

Em conversas com colegas professores da Educação Básica e considerando outras experiências ao longo da formação universitária, percebemos que muito se pesquisou e ainda se pesquisa sobre o tema. Entretanto, parece que dificuldades

permanecem, tanto do ponto de vista do ensino quanto da aprendizagem. Isso pode ser observado também nos resultados oficiais de avaliações bienais realizadas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), em todo o Brasil. Vejamos um exemplo.

Figura 1: Questão do SAEB (2013)

Fonte: <http://devolutivas.inep.gov.br/itens_publicados/599>. Acesso em: dez. 2016.

A questão reproduzida na Figura 1 foi retirada do site indicado na legenda, no qual são apresentadas estatísticas referentes às provas realizadas em 2011 e 2013. Para os filtros *estudantes de escolas municipais*, em *regiões urbanas* e cursando o *9º ano do Ensino Fundamental*, o percentual de alunos que acertou a questão foi de 13%, enquanto a maioria dos alunos (54%) assinalou a alternativa C.

O comentário pedagógico que acompanha as estatísticas da referida questão aponta que dois erros podem ser percebidos neste caso: um operacional com frações (somar numeradores e denominadores) e outro que se refere à leitura e interpretação da situação, já que o solicitado foi a quantidade de figurinhas que restou. Além desta, outras questões revelam que o ensino dos números racionais requer atenção, especialmente quando lidamos com a representação fracionária.

Cabe observar que, para o 9º ano, levando-se em conta o que é prescrito e o que é apresentado nos livros didáticos atuais, o índice de acerto pode ser considerado baixo, representando um resultado que coloca os alunos num nível muito aquém das aquisições esperadas para essa etapa da escolaridade. Isso nos chama a atenção e nos interpela, enquanto professores, sobre quais abordagens e estratégias didáticas podem ajudar os alunos a suplantar tais dificuldades.

Ao tomar esse exemplo, não podemos deixar de refletir sobre o pouco significado e aplicabilidade que ele apresenta aos alunos. Não é difícil que encontremos problemas com contextualizações forçadas em Matemática, principalmente quando o assunto é operações entre frações. E esse problema se

estende desde a sala de aula e os materiais didáticos até avaliações nacionais, como é o caso aqui apresentado.

A presença dos números fracionários no cotidiano das crianças brasileiras é restrita. As representações decimais e percentuais, por sua vez, estão mais presentes, e é indispensável que elas saibam interpretar seus significados, operar e resolver problemas envolvendo esses números. Entretanto, não acreditamos que deva haver a valorização de algumas representações em detrimento de outras, independentemente da frequência de uso de cada uma. Ao contrário, cremos que cada representação tem seu valor no processo de aprendizagem, e é o trabalho com transformações e conversões que irá consolidar esse processo.

Assim sendo, o estudo dos números fracionários é essencial para dar suporte à conceitualização de números racionais e demais conteúdos, como razões, proporções, porcentagens, entre outros. É nessa temática que esta dissertação se insere. Para iniciar o estudo e verificar se as impressões e suposições mencionadas se confirmam, iniciamos um levantamento de trabalhos acadêmicos nesse tema na área de Ensino da Matemática.

Na sequência, no Capítulo 2, é feita uma síntese de alguns trabalhos acadêmicos ressaltando questões problemáticas do ensino de frações que se repetem nos diferentes textos em que nos baseamos. Neste momento já identificamos questões de investigação que serão mais bem explicitadas no capítulo seguinte.

O que poderia favorecer o entendimento dos números fracionários junto a alunos do Ensino Fundamental? No Capítulo 3 são levantadas algumas hipóteses, mas apostando principalmente no trabalho com diferentes representações, frações decimais e a ideia de quociente.

A apresentação do referencial teórico é feita no Capítulo 4 considerando que trabalhamos com objetos matemáticos abstratos e que necessitam de representações para serem acessados. A Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval irá embasar todas as intervenções feitas com os alunos no decorrer do trabalho.

Para metodologia escolhemos o *Design Experiment*, melhor apresentado no Capítulo 5, que tem se adequado muito bem a situações de pesquisa em ambientes de ensino. Seu caráter cíclico permite ajustes tanto para o processo formativo quanto para o investigativo, suportando a complexidade do papel professora e pesquisadora. Neste capítulo também são relatadas as experiências obtidas com os alunos e o percurso de aprendizagem que foi traçado.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Depois de realizadas algumas leituras, é possível relacionar problemas que são considerados obstáculos ao ensinar frações ou, ainda, os números fracionários. Em muitos trabalhos, como, por exemplo, em Bertoni (2008), Druck (1994) e Silva (2005), problemas recorrentes são descritos e vêm acompanhados de diversas propostas para enfrentá-los e, com isso, mudar o cenário do ensino desse tema no Ensino Fundamental.

Discorreremos a seguir sobre cinco questões problemáticas no ensino de frações presentes nos materiais estudados e agrupadas para melhor entendimento do leitor.

2.1 Conceitos e suas denominações

O conjunto dos racionais é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de fração. Essa afirmação é bem conhecida, aparece com frequência nos livros didáticos brasileiros e, talvez por isso, seja pouco questionada na Educação Básica. Porém, deve-se tomar muito cuidado com as terminologias utilizadas. Desta forma, sentimos necessidade de explicitar os nomes (ou termos) e significados que adotaremos neste trabalho. Para isso nos baseamos principalmente no trabalho de Bertoni (2009).

Fração: representa tanto uma parte da unidade quanto o registro numérico associado a essa parte. Na frase: “Temos meio chocolate”, a fração está designando uma parte da unidade, enquanto na frase “A figura corresponde a $\frac{1}{2}$ chocolate”, temos uma representação numérica associada a uma parte. Algumas frações podem ser equivalentes a outras, por representarem a mesma parte da unidade, como $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{2}{4}$, por exemplo.

Número fracionário: É o número único (embora com várias representações) associado a uma classe de frações equivalentes. Expressa o resultado da divisão de dois números naturais. Pode ser identificado com um número racional positivo. Vejamos: O número $\frac{1}{2}$ expressa o resultado da divisão de 1 por 2, que em sua representação decimal vale 0,5. Mas o número $\frac{2}{4}$, que expressa o resultado da divisão

de 2 por 4, também tem como representação decimal o número 0,5, sendo eles então pertencentes à mesma classe de equivalência.

Número racional: são os números que expressam resultados das divisões de dois números inteiros (o segundo, não nulo). Os resultados dessas divisões também podem aparecer na representação decimal. Os números racionais podem ser positivos, negativos ou nulos. Podemos concluir, então, que os racionais são uma extensão dos números fracionários, assim como os inteiros são uma extensão dos naturais, em que os opostos estão inclusos.

Não é inédito que seja feita uma diferenciação entre frações e números fracionários. Mesmo na Educação Básica, estudos indicam que os alunos não reconhecem frações como números com os quais se pode operar, quantificar, comparar e que podem ser posicionados numa reta numérica.

Devemos lembrar também que, muitas vezes, as subclassificações dadas às frações – própria, imprópria, aparente e mista – configuram-se como obstáculos à compreensão do assunto. Apesar de alguns materiais didáticos ainda abordarem as diferentes classificações, estudos mostram que elas não são significativas para o aprendizado dos alunos.

Essa terminologia, no entanto, só é ensinada para fins de classificação de frações, mas não leva o aluno a compreensão das diferentes formas de representação das frações. [...] As definições sobre os diversos tipos de frações, além de não fazer sentido para o aluno, trazem conceitos abstratos e de difícil compreensão. Está claro que o aluno não compreende esses termos, apenas os memoriza e os reproduz em exercícios propostos em sala de aula. Não que esses termos não possam vir a ser conhecidos pelos alunos, mas é preciso um trabalho de construção de conceitos primeiramente e não de memorização (NASCIMENTO, 2008, p. 201-202).

Em geral, o adjetivo “própria” tem significado de autêntica ou verdadeira, mas, por outro lado, não podemos afirmar que as frações impróprias seriam frações “falsas”. Mesmo quando o numerador de uma fração é maior que o denominador, não deixa de representar partes da unidade considerada; a peculiaridade é que, em conjunto, essas partes serão maiores do que a unidade.

Diferentes terminologias são apresentadas por estudiosos do tema. Fazendo esse tipo de classificação, os diferentes significados do conceito de fração ficam mais explícitos. Acreditamos que essa diferenciação seja esclarecedora no que se refere ao ensino e aprendizagem, ou seja, no contexto educacional.

Podemos observar, por exemplo, que para frações é necessário tomar uma unidade como referência – trata-se da concepção¹ parte-todo –, enquanto os números fracionários podem ser vistos “isoladamente” como qualquer outro número. Ou ainda que, em situações contextualizadas, não faz sentido tratarmos de relações parte-todo negativas.

Não podemos deixar de comentar sobre as expressões do tipo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{17}{x}$ e $\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$.

Niven (1984) afirma que “a palavra fração, sozinha, é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador” (NIVEN, 1984, p. 31), incluindo assim os exemplos dados. Essa definição não está de acordo com o que explicitamos até o momento, porém, ao fazer este tipo de generalização, o autor estende a essas expressões os construtos de equivalência e operações.

É importante analisar ainda sua definição de número racional, que vai ao encontro do que foi exposto: “um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{d}$, onde a e d são inteiros e d não é zero” (NIVEN, 1984, p. 31). Ele esclarece que, quando diz “pode ser colocado na forma $\frac{a}{d}$ ”, tem a intenção de considerar todos os infinitos modos de descrever um dado número racional. Da seguinte forma:

Uma fração é definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número, assim só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa ou não um número racional. Considere, por exemplo, os números $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$, nenhum dos quais está na forma $\frac{a}{d}$ com a e d inteiros. Podemos, porém, efetuar certas manipulações aritméticas com a primeira expressão e obter 2 e portanto $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ é racional, o que não acontece com $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ que representa $\sqrt{5}$ (NIVEN, 1984, p. 32).

Nesse ponto, há uma divergência em relação à definição que utilizaremos, que considera somente números naturais. A nossa intenção não é abordar um tratamento geral com frações ao longo da trajetória escolar, mas sim seus conceitos introdutórios e a passagem à ideia de número fracionário. A própria sequência em que os números são ensinados no decorrer da escolaridade básica não permite que representações do tipo $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ sejam, inicialmente, consideradas como frações.

¹ Estamos empregando o termo concepção em seu amplo significado, como sinônimo de ideia.

2.2 Os múltiplos significados

Não é possível dizer que um trabalho trata da introdução “do” conceito de fração, pois este é considerado um “megaconceito”², constituído por diferentes subconceitos. Uma das maiores dificuldades apontadas pelos autores é a redução do significado das frações à relação parte-todo. “Nossa preocupação maior é com o conhecimento das frações e do conceito de número fracionário, que não pode ser conseguido só com a divisão de figuras geométricas em partes iguais e a memorização das regras operatórias” (BERTONI, 2009, p. 16).

Vamos discorrer um pouco sobre alguns dos significados das frações, suas abordagens, vantagens e desvantagens a seguir.

2.2.1 Parte-todo

Segundo o que apresentam os livros didáticos, a concepção parte-todo é a mais utilizada para introduzir as frações. A partir de experiências feitas por Bertoni (2009, p. 22) ela relata “[...] ao indagarmos o que é fração, são comuns respostas do tipo é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras”. Isso mostra que essa interpretação para as frações é muito forte para as crianças, e que privilegia a utilização de figuras contínuas.

O artigo de Silva, Canova e Campos (2016), que estudou em específico as abordagens apresentadas em livros didáticos, confirma essa predominância do tratamento de frações como parte-todo num momento inicial.

Em geral, a abordagem inicial se dá por meio de figuras, utilizando-se, principalmente, do significado parte-todo, ou seja, as situações apresentadas podem ser resolvidas por dupla contagem. As coleções apresentam uma valorização de situações perceptuais. (SILVA; CANOVA; CAMPOS, 2016, p. 47)

Essa abordagem é a primeira a ser adotada e pode ser encontrada em livros desde o 4º ano do Ensino Fundamental no Brasil. Vejamos o exemplo da Figura 2 retirado de um livro de Matemática (MODERNA, 2013).

² Citado por Llinares e Garcia (2003).

Que números são estes?

Vamos conhecer

- Veja a figura que Clara pintou. Em quantas partes iguais ela dividiu a figura? Quantas partes ela pintou de verde?

Clara dividiu a figura em ____ partes iguais e pintou ____ partes de verde. Podemos dizer que ____ das 6 partes estão pintadas de verde, ou, ainda, que ____ dois sextos ____ ou $\frac{2}{6}$ da figura foram pintados de verde.

$\frac{2}{6}$ é um número na forma de **fração**.
Nós o lemos: dois sextos.

Número de partes pintadas de verde da figura

Número de partes iguais em que a figura foi dividida

$$\frac{2}{6}$$

Numerador da fração

Denominador da fração

- Que fração representa as partes pintadas de amarelo da figura de Clara? Como a lemos?

Fração ▶

Lemos ▶ _____

Figura 2: Introdução ao estudo de frações em um livro didático
Fonte: Moderna (2013, p.188).

Apesar de existirem muitos tipos de grandezas contínuas (comprimento, massa, tempo...), a área é a mais explorada. As propostas geralmente trazem divisões em forma de grade para retângulos ou setores circulares para círculos, não dando ao aluno a oportunidade de explorar diferentes configurações.

Talvez devido à facilidade de construir modelos a partir de malhas quadriculadas, essa seja realmente a melhor abordagem para os anos iniciais. Mas cabe aqui lembrar que as partes obtidas do todo devem ser equivalentes no que se deseja comparar. Por isso, exemplos como os da Figura 2 são considerados insuficientes para explorar a ideia de parte-todo.

Mais adiante, discutiremos como diferentes representações veiculam diversos aspectos conceituais que compõem um objeto considerado. Além disso, veremos como cada uma se torna mais ou menos adequada ao longo dos níveis escolares, reforçando assim a ideia de que um objeto matemático é construído ao longo de anos de escolaridade, sempre sendo retomado e ampliado em novas situações e ocorrências.

O trabalho com quantidades discretas (coleção de objetos), que também é pouco explorado, fica mais banalizado ainda quando apresentado com regras para resolução de problemas. Em uma de nossas experiências, com uma turma de reforço de 6º ano, os alunos tiveram que responder às seguintes questões:

- 1) Se Lúcia tem 12 ovos e vai usar $\frac{5}{6}$ deles para fazer quindins, quantos ovos ela vai usar? Faça desenhos para ilustrar.
- 2) Calcule quantos carros iniciaram uma corrida de Fórmula Indy, sabendo que os 12 carros que completaram todas as voltas representam $\frac{2}{3}$ dos que iniciaram a corrida (DANTE, 2015, p. 182, adaptado).

Na primeira situação, alguns nos perguntaram: “Professora, esse é aquele que divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima?”. Foi dito aos alunos que essa técnica funcionaria e explicado o porquê. Ao se depararem com a segunda situação, os alunos queriam utilizar a mesma regra para resolver o problema, mas não tiveram sucesso e não mostraram evidências de que entenderam por que a referida regra funcionava.

Em livros didáticos do 6º ano, os diferentes significados começam a ser explorados em situações contextualizadas, visando levar à percepção de que eles estão interligados. Na questão 1, por exemplo, podemos interpretar a fração não só

como parte de um todo discreto, mas também como operador, como ficará claro mais adiante.

Uma observação a ser feita é que existem situações, no caso discreto, em que as partições são impossíveis. Por exemplo, não podemos dividir igualmente 12 ovos entre 8 pessoas. Silva (2005) afirma que, nesse tipo de situação, a linguagem fracionária é inadequada e que se trata de um caso típico das divisões com resto dos naturais. Isso ocorre porque a autora considera objetos discretos como sendo objetos distintos e indivisíveis (que quando divididos perdem suas características) e objetos contínuos como sendo aqueles que podem ser fracionados em qualquer situação. É usual que se apresente figuras planas apenas divididas em partes congruentes. Observa-se que neste caso o contínuo é “discretizado”, pois basta uma contagem das partes indicadas para que sejam identificados tanto o numerador quanto o denominador.

Esse tipo de situação, na qual as figuras estão divididas em partes congruentes, pode induzir o aluno a entender que a “igualdade entre as partes” – exigida na definição de fração – implica em congruência. Porém, a interpretação parte-todo depende da capacidade de se particionar uma quantidade contínua ou discreta em partes de mesma medida. No caso dos exemplos abaixo (Figura 3), é preciso que o aluno entenda a noção de área.

Figura 3: *Frações de um retângulo*

As ideias em torno das frações e dos números fracionários devem se desenvolver e se aprimorar até o final do Ensino Fundamental, dando suporte a muitos outros assuntos. Por isso, é muito importante que os alunos tenham contato com todos os diferentes significados desses números tão complexos.

2.2.2 Razão

Behr, Lesh, Post e Silver (1983) afirmam que a razão é uma relação que transmite a noção de grandeza relativa e, portanto, é mais considerada como um

índice de comparação do que como um número. Talvez por isso o estudo de razões e proporções pareça distante do estudo das frações. No entanto, eles estão ligados pelo construto de equivalência, constituindo uma importante ferramenta na resolução de problemas.

Além das situações parte-todo, as razões são utilizadas para comparar parte-parte e todo-todo. Por exemplo, quando se estabelece a relação entre meninos e meninas num todo trata-se de uma relação parte-parte, ou ainda quando se estabelece um índice de densidade demográfica trata-se de uma situação todo-todo. Outras situações seriam, por exemplo, escalas, receitas, probabilidades e porcentagem.

Fração como comparação de dois números naturais

João vende balões. Ele tem 7 balões; 3 deles são vermelhos. Podemos também dizer que 3 em 7 dos balões de João são vermelhos, ou seja, **três sétimos** dos balões são vermelhos.

$\frac{3}{7}$

← número de balões vermelhos

← número total de balões

A fração $\frac{3}{7}$ expressa uma comparação dos números naturais 3 e 7. Veja outros dois exemplos:

1ª) Quando lançamos uma moeda, há duas possibilidades de resultado:

• pode sair cara:

Face "cara" de uma moeda

• pode sair coroa:

Face "coroa" de uma moeda

OU

Por isso, dizemos que a **chance** ou a **probabilidade** de sair cara é $\frac{1}{2}$ (1 em 2). Observe que, nesse caso, também estamos usando a fração para expressar uma **comparação** de dois números naturais.

2ª) Quando lançamos um dado, há seis possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima:

A probabilidade de sair o número 5 é de 1 em 6, ou seja, $\frac{1}{6}$.

A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6 ou $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Balões

Sérgio Costa / Arquivo da editora

Dados

Paulo Marafiotto / Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Figura 4: Fração como razão
 Fonte: Dante (2015, p. 175).

Exercícios e problemas

8. Observe a figura dos balões de João no alto da página e escreva as frações que representam:
 a) os balões azuis;
 b) os balões que não são vermelhos.

9. Na equipe de Alzira há 3 meninos e 2 meninas. Escreva as frações que indicam os meninos e as meninas em relação ao total de alunos da equipe.

10. Escreva a fração que representa as figuras pintadas em cada grupo de figuras geométricas.
 a) c)
 b) d)

11. A fração é $\frac{2}{5}$. Invente um conjunto de elementos e identifique nele a parte correspondente a essa fração.

12. **Atividade em dupla**
 Troque ideias com um colega.
 a) Quantas faces tem um dado?
 b) No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair a face 4?
 c) Qual é a probabilidade de sair uma face com número par de pontos?
 d) Qual é a probabilidade de sair uma face com número de pontos maior do que 1?

 Dado

Unidade 3 • Frações e números decimais 175

Figura 5: Exercícios e Problemas
 Fonte: Dante (2015, p. 175).

O livro do 6º ano de Luiz Roberto Dante, da coleção *Projeto Teláris* (DANTE, 2015), reserva uma página para apresentar esse significado. O autor utiliza apenas três exemplos de situações e todos os “Exercícios e problemas” estão baseados nesses exemplos. Com isso, perde a oportunidade, por exemplo, de relacionar o tema com proporções em receitas ou, ainda, com escalas em mapas.

Percebe-se que ele associa a concepção fração a situações que podem ser lidas com a preposição “em” entre os números. No exercício 10 fica ainda mais difícil dissociar essa ideia da de parte-todo, pois trata-se apenas de uma dupla contagem numa situação discreta.

Procurar nas razões índices de comparação é a melhor maneira de identificá-las, pois esses são aplicáveis em todas as situações. Por exemplo, a proporção de ingredientes numa receita é sempre a mesma, assim como a escala em um mapa é válida para qualquer distância entre dois pontos naquele mapa.

2.2.3 Quociente

Na interpretação “parte-todo”, o símbolo $\frac{a}{b}$ se refere à medida de uma parte de uma quantidade. Na interpretação “razão”, o símbolo $\frac{a}{b}$ refere-se a uma relação entre

duas quantidades. Já na interpretação denominada “quociente”, o símbolo $\frac{a}{b}$ é usado para se referir ao resultado da operação $a \div b$.

A ideia de quociente está presente em dois tipos de situações: aquelas em que repartimos igualmente ou aquelas em que agrupamos. Se temos 36 ovos e desejamos dividi-los em 3 caixas, trata-se da situação de repartição igualitária, o quociente, neste caso será 12 ovos. Se temos 36 ovos desejamos dividi-los em grupos de 12 ovos, trata-se da situação de agrupamento, o quociente, neste caso será 3 caixas.

O significado quociente das frações está predominantemente associado à ideia de repartição igualitária, nas quais o quociente representa o tamanho de cada grupo quando se conhece o número de grupos a ser formado. Por exemplo: “Uma pizza foi dividida igualmente para 3 pessoas. Quanto da pizza recebeu cada uma?”. Os alunos, num primeiro momento, podem até responder que cada pessoa recebeu 1 pedaço, mas devemos lembrá-los que o todo, neste caso, é a pizza, e não os pedaços, o quociente é portanto $\frac{1}{3}$ de pizza.

Em seu livro intitulado *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Bento de Jesus Caraça (1951) fala sobre as vantagens da criação dos números racionais, incluindo o significado quociente nesses ganhos.

Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais ou *campo racional* – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números *fraccionários*; estes são, de facto, os números novos.

As vantagens obtidas pela sua criação aparecem desde já como sendo as seguintes:

1ª – É possível exprimir *sempre* a medida dum segmento tomando outro como unidade; se, por exemplo, dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz que a medida é o *número* $\frac{2}{5}$.

2ª – A divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$ – o quociente de 2 por 5 é o número *racional fraccionário* $\frac{2}{5}$, o quociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5} = 2$ (CARAÇA, 1951, p. 36-37).

Acreditamos que nossos alunos devem ser convidados a refletir sobre os contextos, representações e significados do que propomos a eles. O trabalho de transitar entre as representações fracionária e decimal não deve ser focado na mera memorização de procedimentos. Ele revela características dos números e operações, desenvolvendo nos estudantes novos olhares e estratégias que irão compor sua experiência de cálculo mental e resolução de problemas. Conhecemos alunos que

usam o método da chave para efetuar divisões como $\frac{34}{10}$, ou que cometem erros do tipo $\frac{34507}{40} = \frac{3457}{4}$, entre outras dificuldades básicas. Acreditamos que um trabalho cuidadoso com as frações decimais, considerando suas diferentes representações, bem como a concepção quociente podem auxiliar em problemas desse gênero por aproximar as noções de fração e número.

2.2.4 Operador

Quando consideramos um número fracionário como operador, sua característica de número fica muito evidente, pois desde muito cedo os estudantes aprendem que os números foram criados para as operações e essas não existem sem eles. Nessa interpretação, o número fracionário tem a função de ser um dos elementos de uma multiplicação, sendo usado então em diversas situações-problema.

As frações unitárias como meio, terço e quarto são as primeiras com as quais os alunos têm contato. Eles aprendem, ainda no 2º ano do Ensino Fundamental, que cada uma dessas palavras significa dividir por 2, por 3 e por 4, respectivamente. Assim, o triplo de 1 real são 3 reais, e um terço de 3 reais é 1 real.

Com o passar dos anos, as crianças aprenderão que a preposição “de” expressa a operação de multiplicação e, traduzindo as sentenças acima em linguagem matemática, temos $3 \times 1 = 3$ e $\frac{1}{3} \times 3 = 1$. Pensando nas diferentes representações que os objetos matemáticos possuem, esse tratamento revela especialmente que dividir por 3 é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{3}$.

De alguma forma, os alunos já aprenderam que a multiplicação e a divisão são operações inversas. Mas, nesse caso, eles passam a conhecer os números inversos e a saber que eles podem ser representados por frações. Tendo uma base sólida do conceito de fração, não é difícil que as crianças passem das operações com frações unitárias para operações com as não unitárias (já que elas são composições umas das outras).

É a primeira vez que uma multiplicação entre dois números tem como produto um número menor que um dos fatores, sendo isso revelador e importante para as próximas fases do estudo, a das operações de multiplicação e divisão entre números racionais.

2.3 As múltiplas representações

O uso, talvez abusivo, de representações contínuas, vinculadas a retângulos e círculos, também está na lista dos “vilões” da aprendizagem dos números racionais. Um dos principais grupos de pesquisa sobre o tema que aponta a importância das diferentes representações no ensino é o *Rational Number Project* (BEHR et al., 2001)³. Garcia (2003) afirma que os diagramas podem gerar, por exemplo, dificuldades em reconhecer que frações próprias são números menores que 1, ou, ainda, que podem representar uma situação de distribuição.

Por exemplo, ao se deparar com a representação da Figura 6, a seguir, um aluno pode realizar uma dupla contagem e concluir que se trata da fração $\frac{2}{3}$. Porém, como 2 e 3 são maiores que 1, pode não estar claro para ele que essa fração representa um número menor que a unidade considerada. O foco principal, para muitos alunos, acaba sendo nos dois números naturais, obtidos pela dupla contagem, e não no inteiro ou unidade considerada.

Figura 6: Representação da fração $\frac{1}{3}$ tomando o círculo como unidade

A Figura 7 também pode causar confusão. O primeiro problema está em decidir se estamos tratando da fração $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{6}$, por isso a ideia de unidade ou todo deve estar bem clara. Campos e Rodrigues (2007) identificam em seu estudo dificuldades referentes a definição do referencial em situações que envolvem o conceito de fração e discorrem sobre práticas pedagógicas empregadas no ensino que podem causar tais dificuldades.

Outro problema é perceber que esta figura pode ser uma representação do resultado da divisão de 2 por 3.

³ Para mais detalhes, ver: <<http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/>>. Acesso em: dez. 2016.

Figura 7: Diferentes interpretações de uma fração

2.4 Questões estruturantes do conceito

Também permeiam os trabalhos discussões sobre quais seriam os mecanismos construtivos fundamentais desse conceito. Entre eles estão a ideia de unidade ou todo, de partição igualitária, de equivalência entre as partes da unidade e da relação de equivalência entre frações.

Já mencionamos, no exemplo anterior, como a compreensão da ideia de unidade é necessária. A necessidade de “igualdade” entre as partes que compõem o todo diz respeito apenas à igualdade da medida que se deseja comparar. Isso se torna um obstáculo na aprendizagem quando os exemplos transitam entre os diferentes modelos (discretos e contínuos).

A equivalência entre as partes da unidade é algo delicado de se tratar, como podemos observar no exemplo da Figura 8, encontrado em um vídeo na internet.

Figura 8: Fração indicando a relação entre áreas da superfície de corte

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=J3-bqEdgWiM>>. Acesso em: dez. 2016.

Nessa imagem, a fração está representando uma relação entre áreas da superfície de corte representada. Porém, o limão é um objeto tridimensional e talvez, para os alunos, seja espontâneo considerar o volume como objeto de comparação. Além disso, dificilmente um objeto do mundo real estará dividido em partes iguais. O

que deve estar claro é que, muitas vezes, as partes comparadas são supostamente equivalentes.

Essa discussão será aprofundada mais adiante, no capítulo sobre o referencial teórico, quando falaremos sobre as várias representações de um mesmo objeto matemático em diferentes registros e a importância de analisá-las em atividades cognitivas de produção, tratamento e conversão de uma representação.

Figura 9: *Equivalência entre frações*

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=J3-bqEdgWiM>>. Acesso em: dez. 2016.

Neste vídeo, encontramos ainda a Figura 9, no qual a relação de equivalência entre frações é estabelecida através de um exemplo simples. Aqui, podemos observar também que o todo aparece sempre dividido em partes congruentes, quase nunca sendo considerada a possibilidade de o aluno fazer a repartição que achar mais conveniente.

2.5 Abordagens equivocadas

Além disso, há um procedimento que é apresentado em alguns livros didáticos para verificar se duas frações são equivalentes, que consiste na comparação dos resultados da chamada “multiplicação cruzada” ou “multiplicação em cruz” – os produtos do numerador de uma fração pelo denominador da outra devem ser iguais. Essa regra, como muitas outras em Matemática, não é “deduzida” pelos alunos de forma a ajudar na compreensão do conceito, mas dada sem oportunidade de reflexão sobre as propriedades que garantem sua validade⁴.

Nesse sentido, uma abordagem que tenha foco no significado de quociente talvez ajude na compreensão dessa ideia, pois podemos afirmar, por exemplo, que o resultado da divisão de 1 por 4 é o mesmo que o da divisão de 2 por 8.

⁴ As propriedades que garantem a validade da “regra” enunciada decorrem da compreensão da relação de equivalência entre frações ou da igualdade da fração representada por numeradores e denominadores proporcionais.

Outra regra que pode constituir um obstáculo à compreensão das operações com frações é o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.). A diferença entre os algoritmos operatórios dos números naturais e dos fracionários descaracteriza as operações, não parecendo que elas estejam efetivamente ligadas a uma situação real. Bertoni (2009, p. 17), referindo-se a uma experiência com alunos, aponta que “[...] as noções de mínimo múltiplo comum e de máximo divisor comum interrompiam o caminho da construção da ideia de fração pela criança, e, além do mais, não eram imprescindíveis aos cálculos”.

As notações e nomenclaturas utilizadas ao ensinar o assunto são um dos maiores alvos de críticas na literatura. Segundo Druck (1994), uma abordagem que apresente as frações de forma simples desde os anos iniciais é sugerida, pois, como a nomenclatura envolvida nesse estudo é extensa, o quanto antes ela for apresentada, mais oportunidades de se familiarizar com a ideia e suas diferentes representações serão proporcionadas aos alunos. Como veremos mais adiante, com base na teoria de Duval (2012a), concordamos com a autora no sentido da importância de relacionar a aprendizagem com as atividades cognitivas envolvendo diferentes representações e as relações entre elas.

Nesta dissertação, pretendemos investigar as concepções de um grupo de alunos, propondo atividades diferenciadas que explorem as frações, em particular as frações decimais, de forma a articular as representações fracionárias e decimal, e a ideia de quociente entre dois números naturais, visando à concepção de número fracionário. Buscaremos, junto aos alunos, avaliar a influência da experiência com tais atividades nas estratégias de resolução de problemas envolvendo frações.

Por se tratar de uma investigação qualitativa, a metodologia adotada será experimental e de natureza intervencionista. O trabalho pretende contribuir na perspectiva de ensino e aprendizagem visando a que os alunos dominem os conceitos, representando, operando e utilizando-os na resolução de problemas.

3 QUESTÃO NORTEADORA E OBJETIVOS

Diante das leituras realizadas e inquietações indicadas anteriormente, a questão norteadora do nosso estudo pode ser assim formulada: em que medida um trabalho com diferentes representações, enfatizando as frações decimais e a ideia de quociente, favorece o entendimento dos números fracionários e, por consequência, auxilia na conceitualização⁵ dos números racionais junto a alunos do Ensino Fundamental?

3.1 Objetivos

Como pretendemos fazer uma pesquisa com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, os pré-requisitos assumidos são que os alunos já tiveram contato com esses números nos anos iniciais.

Em geral, no referido nível de escolaridade, o significado dado a esses números é o da relação parte/todo, porém, para avançar no estudo dos números racionais, é interessante explorar os outros significados, não esquecendo que a fração é, em todo caso, um quantificador.

Para uma aprendizagem significativa, não basta que os alunos saibam simplesmente executar algoritmos. Deve haver uma compreensão do significado das operações, bem como a realização delas em resolução de problemas.

Espera-se que o aluno resolva problemas utilizando conhecimentos relacionados aos números naturais e racionais (na forma fracionária e decimal), às medidas e aos significados das operações, produzindo estratégias pessoais de solução, selecionando procedimentos de cálculo, justificando tanto os processos de solução quanto os procedimentos de cálculo em função da situação proposta (BRASIL, 1998, p. 63).

Optamos então por um estudo no qual serão concebidas e testadas experimentalmente diversas tarefas com o objetivo de revisitar as frações, dando ênfase em sua caracterização como números. Desejamos investigar, do ponto de vista do ensino e da aprendizagem, os seguintes aspectos:

- meios ou estratégias didáticas que permitem a passagem do modelo parte-todo à ideia de número fracionário;

⁵ Conceitualização: ação ou resultado de conceituar, de criar, desenvolver ou enunciar conceitos.

- tipos de situações didáticas que enfatizam a percepção da fração como um número e a natureza das dificuldades encontradas pelos alunos na conceitualização de número fracionário.

Como já mencionado no capítulo anterior, os estudos das diferentes ideias de frações envolvem diversas situações e interpretações, além de suscitarem o uso de diferentes representações. Temos interesse em aprofundar essa questão das relações entre representações e aprendizagens e, para tanto, fomos buscar apoio nas ideias de Duval (2012a). É o que apresentamos na sequência.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Ao dissertar sobre ensino, é natural que haja uma preocupação com aprendizagem. Neste trabalho, fundamentaremos nossos estudos na teoria do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, que investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático. O objetivo desta seção é esclarecer os aspectos mais relevantes desta teoria e justificar porque ela se faz adequada ao nosso estudo.

4.1 Registros de representação semiótica

Quando alguém afirma conhecer algo, não é muito difícil que esse alguém saiba representar o que conhece de alguma forma. Essas atividades – conhecer e representar – estão ligadas em diversas situações, e no ambiente escolar não é diferente. Quantas vezes você já fez verificações de aprendizagem propondo atividades como escreva, desenhe ou represente?

Existem inúmeros estudos sobre representações, e não se contesta a existência de diferentes perspectivas teóricas acerca das relações entre representação e pensamento. Entretanto, os registros de representação semiótica têm se mostrado grandes aliados à descrição e explicação de processos cognitivos ligados ao estudo de objetos matemáticos. Isso porque eles atendem às funções de comunicação, tratamento de informação e tomada de consciência (DUVAL, 2009, p. 34).

Duval (2009) define representação semiótica como sendo o conjunto {signo, objeto}, interpretando signo como {registro semiótico utilizado, conteúdo da representação}. Em resumo, signo trata-se da forma de representar e o conteúdo de uma representação. Por exemplo, quando se deseja fazer referência ao resultado da divisão de 1 por 4, podemos escrever o número $\frac{1}{4}$. Em termos semióticos, essa representação se encontra no registro numérico, cujo conteúdo da representação é o resultado da divisão, ou seja, o quociente e o objeto matemático é o número fracionário $\frac{1}{4}$.

Sabemos, porém, que essa não é a única forma de representar esse número. Portanto, quando estamos lidando com o ensino de Matemática, devemos considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto. A não utilização de

diferentes registros pode ser danosa à construção cognitiva do que se representa, pois cada um irá veicular aspectos conceituais diferentes de um mesmo objeto.

Devemos então refletir a respeito dos significados veiculados por uma representação, além de atentar a possíveis erros conceituais atrelados a ela. Nós, docentes, em princípio, conseguimos identificar todas as componentes conceituais envolvidas num objeto, enquanto os alunos identificam, em geral, as mais evidentes, as mais usuais. Mesmo ao longo do percurso escolar, há uma ênfase em alguns sistemas semióticos, e é papel do professor organizar um trabalho simultâneo entre diferentes sistemas.

Apesar de tudo isso, diferenciar objetos de conceitos e conhecer diferentes representações não basta para o estudo de objetos matemáticos. A coordenação entre diferentes registros é a atividade que consolida a apreensão de um conceito matemático, como veremos a seguir.

4.2 Acessando objetos matemáticos

Estudar sobre como se dá a construção de um conceito não é algo novo e muito menos simples. D'Amore (2015, p. 46) afirma que “fazer a distinção entre o ‘conceito’ e sua construção não é fácil e, talvez, não seja possível nem sequer desejável”. Isso porque um conceito está permanentemente em construção, sendo essa a beleza do estudo. O que seria então a conceitualização?

No caso da Matemática, que se mostra especial em relação às outras disciplinas, é muito mais do que simplesmente reconhecer ou nomear objetos. Objetos matemáticos, muitas vezes, contrariam as leis do mundo físico ou da intuição. Como pode haver uma infinidade de pontos em um intervalo limitado? Ou, ainda, como é possível falar em sobreposição de dois sólidos congruentes?

Em Física, Química ou Biologia, podemos realizar experiências com objetos concretos e lidar com fenômenos naturais perceptíveis aos nossos sentidos, enquanto que os conceitos matemáticos necessitam de representações, uma vez que não existem objetos reais para serem exibidos em seu lugar.

Ao se deparar com isso, conclui-se que a conceitualização desses objetos não pode estar baseada em significados apoiados na realidade concreta. Por outro lado, somente passando por diferentes representações é que se acessam objetos matemáticos, instaurando-se assim um paradoxo.

Vejamos o que Duval (2012b, p. 268-269) afirma sobre tal paradoxo:

[...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, por outro lado, somente por meio de representações semióticas é possível uma atividade sobre objetos matemáticos. Esse paradoxo pode constituir um verdadeiro círculo vicioso para aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam deixar de confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles apenas podem estabelecer relações com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, a não ser por meio de representação semiótica, torna a confusão praticamente inevitável. E, ao contrário, como podem esses indivíduos adquirir o domínio dos tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se ainda não possuem uma apreensão conceitual dos objetos representados?

É preciso que, como professores, estejamos atentos a essa situação. Nossos alunos não sabem que estão lidando apenas com signos e que estes podem ter muitas outras características que não estão explícitas. É nosso papel auxiliá-los a compreender os conceitos da forma mais ampla possível.

Em Matemática, portanto, a aquisição conceitual de um objeto passa necessariamente pela aquisição de uma ou mais representações semióticas. Essa será a base da teoria de Duval, sobre a qual discorreremos um pouco mais no próximo tópico.

4.3 Noesis e semiosis

Para Duval (2009), as representações semióticas são um sistema particular de signos essenciais à atividade cognitiva de pensamento. Com isso, ele considera que a apreensão conceitual de um objeto matemático ocorre através do trabalho com representações semióticas significativas. Tudo isso pode ser facilmente resumido na afirmação por ele enunciada: não existe *noesis* sem *semiosis*.

Ainda segundo Duval (2009) podemos definir *semiosis* como a representação realizada por meio de signos e *noesis* como a aquisição conceitual de um objeto. No entanto, a relação entre *noesis* e *semiosis* vai além de simplesmente determinar várias representações de um mesmo objeto. Essa relação, que permite analisar o desenvolvimento de conhecimentos e seus obstáculos, envolve três fenômenos que estão estreitamente ligados. São eles:

- diversificação dos registros de representação semiótica;
- diferenciação entre representante e representado;
- coordenação entre os diferentes registros.

O primeiro diz respeito à complexidade, variedade e complementaridade dos sistemas de representação, que, sendo tão diferentes entre si, ressaltarão questões de aprendizagem específicas.

A diferenciação entre representante e representado, ou seja, entre forma e conteúdo, foi tema do tópico anterior. Ela não é simples, mas é essencial para as atividades de tratamento e conversão, que serão apresentadas mais adiante.

E, por fim, coordenar os diferentes registros irá depender do conhecimento de regras de correspondência entre diferentes sistemas. Essa atividade se apresenta como elemento central para a aprendizagem e será discutida juntamente com as atividades de tratamentos e conversões.

A noção de representação semiótica, portanto, irá considerar registros diferentes e as operações cognitivas de conversão de um registro a outro, referindo-se sempre a um mesmo objeto de conhecimento. Em resumo, é a mudança na forma de representação de um conhecimento, preservando-se o conteúdo.

4.4 Representações, tratamentos e conversões

Já destacamos que a construção dos conceitos matemáticos depende fortemente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica. Em Matemática, são considerados principalmente quatro tipos de registros: língua natural, figural, sistemas de escritas e cálculo e gráficos cartesianos.

Para Duval (2012a), quanto maior for a facilidade do sujeito para mobilizar diferentes registros de um mesmo objeto matemático, maiores serão suas possibilidades de apreensão desse objeto. Porém, isso só será possível se os estudantes puderem exercer as três atividades seguintes:

- Representar os objetos em um dado registro.

A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc.

Esta formação implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto. Desta maneira, a formação de uma representação poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição.

Esta formação deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...). A função destas regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos. São regras

de conformidade, não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer que o conhecimento de regras de conformidade não está relacionado a competência para formar representações, mas somente para reconhecê-las (DUVAL, 2012a, p. 271-272).

- Tratar as representações no interior de um mesmo registro.

O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). [...] Há, naturalmente, regras de tratamento próprio a cada registro. Sua natureza e seu número variam consideravelmente de um registro a outro (DUVAL, 2012a, p. 272).

- Converter tais representações de um dado registro para outro.

A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. [...] A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística (DUVAL, 2012a, p. 272).

Portanto, analisar as dificuldades na aprendizagem matemática passa por investigar as transformações entre os registros de representação, ou seja, estar atento às atividades de conversão e tratamento. Dependendo do registro de representação adotado para o objeto matemático a ser estudado, diferente será o custo cognitivo para o sujeito. Por exemplo:

Tratamento – As operações $3,5 + 0,4$ e $\frac{7}{2} + \frac{4}{10}$ são equivalentes. Mas, para os alunos, esses tratamentos são de diferentes graus de dificuldade (custo cognitivo). Eles dependerão do domínio do registro em cada sistema de representação. O domínio de uma só forma de tratamento é insuficiente para se apropriar de um objeto.

Conversão – Localizar o número fracionário $\frac{7}{2}$ em uma reta numérica é o mesmo que localizar o número 3,5. Porém, para alguns alunos, é muito mais simples localizar o número que está na forma decimal. Ao lidar com as diferentes representações, consciente de que seu conteúdo não se altera, o estudante se aproxima cada vez mais da conceitualização de um objeto (BASSOI, 2006).

Para Duval, dois grandes equívocos ocorrem no ensino da Matemática. Um deles é utilizar predominantemente o tratamento nos processos de ensino. Isso

provoca vícios e faz com que a representação utilizada pelo aprendiz seja confundida com o objeto matemático representado.

O outro é considerar os sentidos de uma conversão entre registros como equivalentes, por exemplo, passar da representação decimal de um número para a representação fracionária equivale a passar da representação fracionária para a representação decimal. Entretanto, coordenar dois registros não é uma atividade direta em todos os casos. Por isso, deve-se verificar as relações entre representações em dois registros, ou, o que Duval denomina de *congruência* ou *não congruência* entre duas representações.

Quando a conversão de um sistema de representação a outro ocorre espontaneamente, ela é dita congruente⁶. Como ocorre, por exemplo, na conversão entre uma representação em língua natural falada, como “um terço mais dois terços é igual a três terços”, para sua representação na escrita matemática, $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$. Há uma correspondência termo a termo, como uma simples codificação.

Quando a conversão é não trivial, ela é considerada não congruente. Nesses casos, a representação de partida precisa ser reorganizada para que se obtenha o registro correspondente na representação de chegada, não havendo então a correspondência termo a termo como nas congruentes. Para o autor, essa atividade tem grande importância na conceitualização.

Se a conceitualização implica coordenação de registros de representação, o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por esses tratamentos ou por essa compreensão. A coordenação de registros aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em Matemática e em Francês (DUVAL, 2012a, p. 284).

⁶ Os três critérios de congruência são:

- a possibilidade de uma correspondência “semântica” de elementos significantes: a cada unidade significativa simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade elementar;
- a univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significativa elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significativa elementar no registro da representação de chegada;
- a organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações (DUVAL, 2012a, p. 283).

Nas atividades propostas, serão considerados os aspectos da Teoria de Duval aqui expostos. O próximo capítulo irá tratar da metodologia utilizada nesta pesquisa, expondo os objetivos, hipóteses e atividades elaboradas com base na teoria referida.

5 METODOLOGIA

Buscando atingir os objetivos deste trabalho, optamos por realizar uma pesquisa qualitativa adotando como metodologia de trabalho o *Design Experiment*. Neste capítulo, iremos apresentar as bases da metodologia escolhida e a relação entre essa escolha e nossa fundamentação teórica.

5.1 *Design Experiment*

Tendo em vista que os ambientes de pesquisa em educação são complexos, dinâmicos e em contínuo processo de adaptação, o *Design Experiment* se configura como uma proposta adequada a esse contexto. Sua natureza intervencionista e pragmática busca capturar a complexidade das interações que acontecem no ambiente, respeitando as dimensões institucional e cultural dos processos de ensino e aprendizagem.

Este tipo de metodologia é considerado uma ecologia de aprendizagem, no sentido de representar um sistema complexo e interativo, envolvendo múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis. Isto ocorre por meio da modelagem de seus elementos e da antecipação de como esses elementos funcionam em conjunto, para dar suporte à aprendizagem (KARRER, 2006, p. 197).

Sendo assim, as atividades propostas são elaboradas com o cuidado de se considerar determinados elementos. Além das questões a serem propostas, deve-se levar em consideração o provável discurso a ser desenvolvido, as regras de participação a serem estabelecidas, as ferramentas e os materiais que serão utilizados e os significados das relações entre esses elementos.

O foco da investigação deve ser a análise do pesquisador a respeito do pensamento matemático dos estudantes e das modificações desses pensamentos. Assim, as situações devem ser criadas prevendo interações e encorajando os estudantes a modificar seus pensamentos usuais.

Com isso, há uma aproximação entre a prática da pesquisa e a prática de ensino, na qual as contribuições individuais dos estudantes têm papel fundamental na condução do trabalho. Por outro lado, o professor pesquisador pode refletir sobre como possibilitar, sustentar e modificar esquemas matemáticos dos alunos.

A seguir serão apresentadas as cinco características da metodologia segundo Cobb (2003):

- Desenvolve teorias tanto sobre o processo de aprendizagem quanto sobre os materiais que são utilizados para dar suporte à aprendizagem.
- Tem natureza intervencionista que objetiva investigar possibilidades de novas formas de aprendizagem visando mudanças educacionais.
- Envolve a revisão contínua do design do projeto que se mostra flexível, uma vez que há um conjunto de tentativas iniciais que são revistas em função do seu sucesso na prática.
- Quebra da visão tradicional em que pesquisador, professores e alunos desempenham papéis fixos no processo.
- É pragmático, pois as teorias que envolvem as atividades estão relacionadas a um domínio específico.

Os registros podem ser escritos, gravados, fotografados ou filmados, para que as reações e tomada de consciência dos sujeitos seja objeto de análises durante e ao final dos processos.

5.2 Procedimentos metodológicos

As tarefas elaboradas foram realizadas em sua maioria com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola particular em Goiânia envolvendo em média 24 estudantes ao longo de um ano letivo. O quadro a seguir resume as tarefas que foram elaboradas na sequência em que ocorreram.

Instrumentos	Finalidade
Questionário Inicial	Auxiliar no levantamento das primeiras hipóteses e subsidiar o <i>design</i> das tarefas do experimento. Identificar os conhecimentos e dificuldades iniciais dos alunos
Atividade 1	Trabalhar a ideia de equivalência, no registro figural, envolvendo reconfiguração de figuras.
Atividade 2	Trabalhar a composição e decomposição de inteiros.
Atividade 3	Trabalhar a representação de números racionais na forma decimal na reta numérica.
Atividade 4	Enfatizar a importância da unidade bem definida e a representação de frações na reta numérica.

Quadro 1: Descrição dos instrumentos utilizados para a coleta de informações

Nos próximos tópicos as tarefas serão explicadas com mais detalhes seguidas de suas análises e resultados. Esta sequência de apresentação foi escolhida pois em muitos casos os resultados de uma tarefa antecedente influenciaram na concepção das atividades seguintes buscando maior aproximação dos objetivos estabelecidos.

5.3 Questionário inicial

Um questionário inicial foi elaborado a fim de auxiliar no levantamento das primeiras hipóteses e subsidiar o *design* das tarefas do experimento. Destinou-se a alunos do 6º ano, contendo oito questões envolvendo frações, com o objetivo de identificar os conhecimentos e dificuldades iniciais dos alunos.

5.3.1 Objetivos e hipóteses

Nesta seção, iremos apresentar as questões presentes no Questionário Inicial, o objetivo de cada uma delas e as hipóteses envolvendo as respostas esperadas.

A questão 1 tem como objetivo identificar parte de um todo num modelo contínuo. Esperamos que os alunos não apresentem dificuldades para resolvê-la, visto que é uma questão presente em materiais didáticos voltados ao estudo do tema.

Figura 10: Questão 1 – Questionário inicial

Na questão 2, o objetivo é que os alunos identifiquem o todo dada uma parte num modelo contínuo. Acreditamos que essa questão não seja recorrente para os alunos, entretanto, quando se trata da fração meio, não há grandes dificuldades.

Inserimos a fração um quinto para avaliar as estratégias de resolução que podem aparecer.

- 2) No final da festa de aniversário de Luís, sobrou a metade de um bolo. Esta metade se parece com a seguinte imagem. Agora, faça o desenho do bolo inteiro.

Como ficaria o desenho do bolo inteiro caso essa parte correspondesse a um quinto do bolo?

Figura 11: Questão 2 – Questionário inicial

Para resolver a questão 3, os alunos devem fazer subdivisões para obter a fração desejada em alguns casos; em outros, basta conhecer a ideia de equivalência entre frações. Levantamos a hipótese de que alguns alunos, utilizando-se da dupla contagem das partes, podem cometer erros, dado que algumas figuras possuem partes não congruentes.

- 3) Em cada item, considere cada figura um inteiro. Olhe para todas as imagens com atenção, depois marque um "X" ao lado das imagens que representam dois quartos pintados. Se desejar, você pode traçar algumas linhas para te ajudar a identificar os quartos. Ao final, desenhe uma outra figura que represente esta fração.

A)

()

()

()

B)

()

()

()

()

()

()

Figura 12: Questão 3 – Questionário inicial

A questão 4 irá avaliar a capacidade de comparar frações em três situações: mesmo numerador, denominadores múltiplos e diferentes numeradores e

denominadores. A estratégia mais esperada é a transformação das frações numa equivalente de denominador comum.

4) Ordene as seguintes frações da menor para a maior.

A) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{2}{7}$

B) $\frac{14}{15}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{3}{5}$

C) $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{7}$

Figura 13: Questão 4 – Questionário inicial

Na questão 5, deve-se identificar parte e todo num modelo discreto. Algumas regras acompanham esse tipo de questão, então desejamos avaliar se os alunos conhecem as estratégias de resolução e utilizam-nas corretamente.

5) Para preparar a massa de um bolo, Jéssica usou $\frac{2}{3}$ de uma xícara com nozes. Restaram então 15 nozes para decoração do bolo. Quantas nozes Jéssica usou na massa? Quantas nozes haviam na xícara inicialmente?

Figura 14: Questão 5 – Questionário inicial

6) Fernando afirmou que $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Aqui está a figura feita por ele para representar o que pensou:

Comente se você concorda ou não com a afirmação de Fernando e por que.

Figura 15: Questão 6 – Questionário inicial

Na questão 6, desejamos avaliar se os alunos reconhecem que frações de diferentes unidades não podem ser comparadas. Consideramos que essa questão seja difícil, talvez porque o trabalho com a unidade seja restrito.

A questão 7 traz um dos grandes focos do nosso trabalho à tona, que é a transição entre diferentes representações. Esperamos que os alunos encontrem as equivalências entre as cinco diferentes representações de um mesmo número.

7) Complete o quadro com cada uma das representações indicadas.

Por extenso	Grade 10x10	Fração	Decimal	Porcentagem
Trinta e sete centésimos

$\frac{66}{100}$
	0,98
	5%

Figura 16: Questão 7 – Questionário inicial

A questão 8 tem a mesma proposta da anterior, mas incluindo desta vez a reta numérica, que parece ser a representação menos explorada.

8) Represente cada um dos números a seguir na grade 10 x 10 e na reta numérica.

a)

$0,09$

b)

$\frac{3}{4}$

c)

46%

Figura 17: *Questão 8 – Questionário inicial*

5.3.2 Entrevista com professores

No dia 23 de março de 2017, foi realizada uma entrevista na escola de campo com duas professoras do quinto ano do Ensino Fundamental. Elas se dispuseram a

conversar sobre o questionário inicial, comentando as questões propostas, visando identificar pontos positivos ou negativos no referido instrumento.

Iniciamos a conversa falando brevemente sobre o objetivo do trabalho e a metodologia a ser utilizada, em particular o objetivo do questionário inicial. Esclarecemos que, a partir das considerações e sugestões das docentes, poderíamos rever o questionário e, eventualmente, alterar suas questões. Elas permitiram que a conversa fosse gravada em áudio, para posterior consulta, sem que as identidades fossem reveladas.

Analisaram a primeira questão como sendo “tradicional” e presente no cotidiano dos alunos. Disseram que os alunos não teriam dificuldades de reconhecer que um quarto da barra de chocolate foi consumido. Acharam que dificilmente os alunos fugiriam da resposta esperada, respondendo corretamente à questão. Uma das professoras relatou que realiza experiências com chocolates em sala, quando introduz o tema.

A segunda questão também foi considerada “fácil” pelas professoras. Diferentemente do que pensamos, as duas professoras relataram que tarefas de recomposição do todo são comuns no ensino. Uma delas fez a consideração de que o bolo redondo pode ser mais intuitivo para alguns alunos.

Na questão 3, nenhuma das professoras sugeriu uma configuração diferente daquelas figuras apresentadas. Uma delas teve dificuldades em identificar os dois quartos em alguns casos. Ela disse que algumas figuras “não são comuns para ela”, por não encontrá-las facilmente em materiais didáticos que costuma usar ou consultar.

A quarta questão foi considerada difícil. Uma das professoras relatou que no quinto ano somente frações com mesmo numerador ou mesmo denominador são comparadas, sendo isto talvez um obstáculo. Foi explicado que desejamos manter a questão para analisar as estratégias utilizadas pelas crianças

Questionamos sobre a contextualização forçada presente na questão cinco. Elas relataram que dificilmente os alunos se importam com isso e que estão acostumados com questões desse tipo, com contextualizações “esdrúxulas”.

Uma das professoras considerou a questão 6 muito interessante; disse, porém, que os alunos poderiam encontrar dificuldades em justificar seu raciocínio.

Uma das professoras elogiou muito a proposta das questões 7 e 8. Ela acredita que essa abordagem, transitando entre as diferentes representações, seja adequada ao quinto ano. Destacou que nunca trabalhou com frações na reta

numérica, mas que irá incorporar a sugestão em sua prática. As outras representações são trabalhadas nas últimas aulas do ano, dando foco nas frações com denominador 10, 100 e 1000. Talvez por isso os alunos não apresentem grandes dificuldades.

Questionamos sobre o potencial da atividade enquanto pesquisa, e elas responderam que algumas abordagens são desconhecidas para alunos que ingressam no sexto ano, por exemplo, as envolvidas nas questões 4 e 8; dessa forma, eles necessitariam de alguma intervenção.

Nesse sentido, perguntou-se a uma das professoras se ela acha que é possível aprender com a resolução de problemas. Ela respondeu que costuma utilizar algumas atividades do tipo em momentos em que elas possam ser socializadas e discutidas, concluindo que a avaliação não é um bom momento para reflexão. Nesse momento, sentimos a necessidade de explicar um pouco melhor como ocorrerá a pesquisa, ressaltando o caráter cíclico das intervenções.

5.3.3 Resultados

O questionário inicial foi aplicado a 10 alunos do 6º ano e 14 do 7º ano. Nessas turmas há apenas um aluno repetente, na turma do 7º ano, sendo o mais velho deles, com 15 anos. Os demais alunos tinham entre 10 e 13 anos.

No que segue, apresentamos os resultados de cada questão separadamente e, no final, faremos uma análise mais geral, destacando o que era esperado e o que foi observado a partir das respostas dadas pelos alunos.

Na primeira questão, a resposta mais frequente foi $\frac{4}{16}$ (3 alunos no 6º ano e 5 alunos no 7º ano), seguida de $\frac{1}{4}$ (4 alunos no 6º ano e 4 alunos no 7º ano), que é sua equivalente. Sendo assim, tivemos 16 respostas corretas para essa questão no total.

Com relação aos erros, não era esperado que tantos alunos (4 alunos, 2 em cada turma) colocassem como resposta a relação entre a quantidade de pedaços comidos e a quantidade de pedaços restantes ($\frac{4}{12}$ e $\frac{1}{3}$), entretanto isso ocorreu. Nesses casos, a estratégia utilizada foi a dupla contagem das partes, representando, para esses alunos, falta de compreensão do que deve ser indicado no numerador e no denominador.

As respostas mais discrepantes foram $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{16}{4}$ e 4, que ocorreram somente uma vez cada, todas no 7º ano. A fração $\frac{16}{4}$ também indica que o aluno não consegue

distinguir o que significam o numerador e o denominador em uma fração. A respeito das outras respostas, é difícil elaborar alguma hipótese sobre por que elas apareceram. Apenas um aluno deixou explícito seu raciocínio para responder a essa questão (Figura 18).

1) Bia tinha um barra de chocolate como a ilustrada ao lado.

$\frac{16}{16}$

Ela comeu um pedaço da barra de chocolate e restou o que mostra a imagem abaixo.

$\text{restou} = \frac{12}{16}$

$\text{comeu} = \frac{4}{16}$

Nesta situação, pode-se afirmar que o pedaço que Bia comeu é $\frac{4}{16}$ do todo da barra de chocolate.

Figura 18: Raciocínio utilizado na Questão 1 – Questionário inicial

Praticamente todos os alunos conseguiram realizar a atividade de recompor o bolo apresentado na questão 2 (20 alunos). Nem todos os alunos optaram pelo uso da régua, mas, mesmo fazendo os desenhos à mão livre, obtiveram um bom resultado.

Desses 20 alunos, 18 desenharam apenas a outra metade do bolo, completando o desenho, como indicado na Figura 19. Se fôssemos analisar as respostas com mais rigor, só poderíamos considerar corretas as respostas da Figura 20, já que o enunciado pede que seja feito o desenho do bolo inteiro, e não da outra metade.

2) No final da festa de aniversário de Luís, sobrou a metade de um bolo. Esta metade se parece com a seguinte imagem. Agora, faça o desenho do bolo inteiro.

Figura 19: Resposta à Questão 2 – Questionário inicial

- 2) No final da festa de aniversário de Luís, sobrou a metade de um bolo. Esta metade se parece com a seguinte imagem. Agora, faça o desenho do bolo inteiro.

Figura 20: Resposta à Questão 2 – Questionário inicial

Esse resultado já era esperado, por se tratar da fração meio, que é uma das primeiras frações com que os alunos têm contato. Segundo Lamon (2005, p. 100) as crianças utilizavam-se de ideias de metade, dobro e meio antes mesmo de frequentar a escola. Entre o restante dos alunos, tivemos dois que deixaram a questão em branco, um que desenhou o bolo de forma desproporcional e outro que desenhou três partes não congruentes (Figura 21) – cabe observar que neste último caso o estudante faz o desenho representando a visão frontal do bolo, que para ele deve conter confeitos e vela, revelando, possivelmente, uma falta de compreensão do significado matemático da palavra “inteiro”.

- 2) No final da festa de aniversário de Luís, sobrou a metade de um bolo. Esta metade se parece com a seguinte imagem. Agora, faça o desenho do bolo inteiro.

Figura 21: Resposta incorreta à Questão 2 – Questionário inicial

Na segunda parte da questão, na qual o enunciado pede que a parte seja considerada como um quinto, houve algumas dificuldades. Um primeiro aspecto observado foi relativo à forma: talvez o espaço disponível para realização dessa etapa estivesse pequeno, impossibilitando que os alunos explorassem diferentes disposições das barras. Em muitos casos (50% do total), os alunos fizeram desenhos que continham cinco partes congruentes, que não necessariamente eram iguais à parte previamente desenhada, como mostram as figuras abaixo.

Figura 22: Resposta à Questão 2 – Questionário inicial

Figura 23: Resposta à Questão 2 – Questionário inicial

Figura 24: Resposta à Questão 2 – Questionário inicial

Figura 25: Resposta à Questão 2 – Questionário inicial

Esse tipo de resposta pode gerar a seguinte dúvida: os alunos acham que essa parte tem que ser subdividida ou multiplicada? Entretanto, se os alunos usaram a mesma estratégia da primeira parte da questão, então entendem o que seria um quinto e como compor um inteiro a partir dessa parte (usando cinco partes iguais a essa).

Nos casos em que a imagem aparece ampliada (Figura 22 e Figura 23), pode-se entender que essa foi a estratégia utilizada (a maioria dos casos). Nos casos em que a imagem aparece menor que a original, fica a dúvida se os alunos acreditam que

a parte original deveria ser subdividida ou se utilizaram essa estratégia por conta da limitação do espaço.

Vale comentar que o aluno da Figura 24 deixa uma afirmação incorreta em sua atividade – apesar de ter feito um desenho “correto”, representando cinco quintos –, diferentemente do aluno da Figura 22, que entende que inteiros são formados por frações do tipo $\frac{n}{n}$. De qualquer forma, pode-se entender que as crianças sabem que quintos referem-se a cinco partes congruentes, atendendo parcialmente ao resultado esperado nessa questão.

Na questão 3, nenhum aluno traçou linhas auxiliares, como permite o enunciado. Não é possível fazer uma análise geral dessa questão, por isso a análise será subdividida de acordo com as respostas mais discrepantes, utilizando a seguinte legenda.

Figura 26: Legenda da Questão 3 – Questionário inicial

As frações A – I e B – I eram as mais simples, por identificar um quarto de maneira direta, sem precisar analisar equivalências ou relações entre áreas. As respostas mais discrepantes foram de dois alunos, em que um deles não marcou a opção A – I e outro não marcou a opção B – I (Figura 27). Sendo assim, não foi possível entender muito bem qual o critério usado para a marcação de cada um desses alunos.

Figura 27: Resposta incorreta da Questão 3 – Questionário inicial

Cabe observar que, nessa questão, houve uma intervenção no momento da aplicação, no sentido de lembrar os alunos sobre a existência das frações equivalentes. As frações A – II e B – II representavam diretamente a fração $\frac{1}{2}$, que é a única simplificação possível para a fração $\frac{2}{4}$. Ainda assim, apenas uma criança marcou a opção A – II. A opção B – II não foi marcada por nenhum aluno. A hipótese é que essa divisão é pouco comum para os sujeitos da pesquisa, não sendo associada à fração meio. Esse dado é muito significativo e com certeza irá nortear a elaboração de tarefas na fase do *design*.

Como já esperávamos, muitos dos alunos assinalaram as figuras A – III (apenas 1 aluno no 7º ano não assinalou essa alternativa) e B – III (6 alunos no 6º ano e 9 alunos no 7º ano), importando-se somente com a quantidade de partes em que a figura estava dividida – ambas as figuras estavam divididas em quatro partes, mas de áreas distintas. Isso indica que é preciso enfatizar mais a divisão em partes equivalentes, em que as áreas das partes precisam ser congruentes.

Todos os alunos assinalaram corretamente a alternativa B – IV. É importante ressaltar a dificuldade que encontramos em analisar o critério utilizado pelo aluno da Figura 27, já que consideramos as representações das alternativas B – I e B – IV quase equivalentes. Uma hipótese é que a disposição dos parênteses para marcação das alternativas tenha ficado confusa.

Apenas três alunos assinalaram a alternativa B – V, sendo 1 do 6º ano e 2 do 7º ano. Uma hipótese é a maioria tenha utilizado o mesmo critério que o da alternativa B – III, não levando em conta a área das partes, mas sim a quantidade de partes, e considerado, portanto, essa fração como sendo $\frac{1}{3}$.

Cinco alunos assinalaram a alternativa B – VI. Esta foi posta para analisar se os alunos fazem uso da técnica da dupla contagem de forma correta. O índice de erros foi considerado dentro do esperado. Desses alunos, nenhum errou a questão 1.

No enunciado da questão, é pedido que seja desenhada uma figura que represente a fração $\frac{2}{4}$. Apenas 7 alunos fizeram essa representação, sendo 2 do 6º ano e 5 do 7º ano. Os alunos do 7º ano fizeram retângulos ou círculos, não fugindo das representações “tradicionais”. Um dos alunos do 6º ano fez um desenho mais ousado (Figura 28), deixando dúvidas sobre o que ele realmente conhece do assunto, já que algumas alternativas da questão 3 estão incorretas. O outro aluno do 6º ano foi o único que fez uma representação incorreta da fração (Figura 29).

Os estudos de Jahn et al (1999) já apresentava resultados que indicavam que os alunos tem mais dificuldades quando as áreas das figuras subdivididas não são congruentes.

3) Em cada item, considere cada figura um inteiro. Olhe para todas as imagens com atenção, depois marque um “X” ao lado das imagens que representam dois quartos pintados. Se desejar, você pode traçar algumas linhas para te ajudar a identificar os quartos. Ao final, desenhe uma outra figura que represente esta fração.

A)

Figura 28: Resposta à Questão 3 – Questionário inicial

Figura 29: Resposta incorreta à Questão 3 – Questionário inicial

O item A da questão 4 teve apenas 5 acertos na turma do 7º ano, sendo que apenas um dos alunos transformou as frações em decimais antes de fazer a ordenação (Figura 30) – neste caso, observa-se que o estudante usa erroneamente o sinal de igualdade mesmo quando tratam-se de aproximações. Já no 6º ano, o resultado foi melhor, com 5 acertos. Percebemos que os alunos mais novos se empenharam mais no desafio de concluir a atividade, recorrendo a desenhos e solicitando a intervenção da professora. Apesar disso, foram feitas poucas intervenções, buscando sempre incentivar o registro das estratégias de resolução.

4) Ordene as seguintes frações da menor para a maior.

A) $\frac{2}{3} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{2}{7} = \frac{2}{3} = 0,6 \quad \frac{2}{10} = 0,2 \quad \frac{2}{7} = 0,2 \quad \frac{2}{10}, \frac{2}{7}, \frac{2}{3}$

B) $\frac{14}{15} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{3}{5} = \frac{14}{15} = 0,9 \quad \frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{14}{15}$

C) $\frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{7} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{4}{5} = 0,8 \quad \frac{1}{7} = 0,1 \quad \frac{1}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

Figura 30: Resposta à Questão 4 – Questionário inicial

Como o item B trata de uma ordenação mais complicada que a do item anterior, ficamos surpreendidas com o índice de acertos, que aumentou para 8 alunos no 7º ano. Uma hipótese é que os alunos tenham utilizado os numeradores para ordenar as frações, já que os mesmos eram distintos e utilizando essa estratégia era possível chegar à resposta correta. Talvez esse erro atrapalhe a análise dos resultados dessa questão. Apenas 4 alunos no 6º ano responderam a esse item corretamente. Nenhum dos alunos parece ter usado frações equivalentes para resolver essa questão.

A grande maioria dos alunos – 10 no 6º ano e 7 no 7º ano – percebeu que a fração $\frac{1}{7}$ era a menor das três no item C. Entretanto, apenas 13 alunos do total acertaram o item por completo. Infelizmente, poucos deixaram registrados seus critérios de ordenação e, com isso, temos poucos indícios das estratégias ou raciocínios utilizados.

A questão 5 teve um índice de acertos maior do que o esperado, 15 alunos no total. Três alunos acertaram apenas a quantidade inicial de nozes na xícara. Muitos utilizaram como recurso fazer o desenho da xícara para visualizar a situação. Um dos alunos havia desenhado uma xícara cônica, mas, quando foi fazer as divisões, considerou que a xícara deveria ser cilíndrica para facilitar que as partes ficassem equivalentes. Isso nos chamou muito a atenção, pois revela que entende sobre a equipartição da área necessária no tratamento com frações.

Houve muita confusão acerca da resolução da questão 6. Apenas três alunos concordaram com a afirmação de Fernando, entretanto nenhum deles conseguiu expressar bem suas ideias. Um deles escreveu: “Concordo, pois o que vale é a parte pintada da fração”.

A resposta esperada era que os alunos observassem que eram frações de inteiros diferentes e que, nesse caso, não cabe a comparação direta. Os alunos que chegaram mais próximo dessa conclusão escreveram:

- “Não concordo. Porque ele acrescentou um desenho” – querendo se referir à parte que excede o tamanho da primeira barra.
- “Não, pois a terceira parte está em tamanho aumentado, pois então a parte da primeira imagem é maior” – demonstrando consciência de que meio é maior que um terço.
- “Não, porque ele simplesmente aumentou o tamanho da figura.”

A partir de tais respostas, observa-se que esses alunos perceberam corretamente que as figuras (ou unidades) não eram iguais.

Também apareceram respostas que usam a transformação da fração em número decimal como justificativa: “Eu não concordo, porque $\frac{1}{2}$ é igual a 0,5 e $\frac{1}{3}$ é igual a 0,3.” (nota-se aqui que os alunos não continuaram a divisão – assim como ocorreu na Figura 30) e “Não, pois se transformarmos $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ em números decimais serão números diferentes.”. Neste caso, os alunos só conseguiram justificar seu

pensamento utilizando um terceiro registro, não encontrando o erro dentro do registro figural.

Não foram observados grandes problemas para completar a tabela proposta na questão 7. Todos os alunos entenderam que se tratava das múltiplas formas de representar os números pedidos. Percebemos que alguns alunos utilizaram o algoritmo da divisão por cem “na chave” para obter os números na forma decimal. Além disso, 3 alunos do 6º ano e 2 alunos do 7º ano escreveram que 5% é equivalente a 0,5. Este foi o único erro apresentado em todos os itens da questão. Esse erro é considerado comum entre alunos que estão iniciando o estudo de frações.

Alguns alunos tiveram um certo bloqueio para iniciar a questão oito, mas depois de uma intervenção do professor, mostrando a similaridade com a questão 7, eles se sentiram mais seguros. O maior obstáculo encontrado pelos alunos foi o item B, pois a fração $\frac{3}{4}$ não tinha denominador 100 como nos outros casos. Poucas crianças se confundiram marcando o ponto 0,9 em vez do ponto 0,09 – apenas 2. Outras não marcaram os pontos, respondendo somente no registro figural – 4 alunos.

A partir da análise dos resultados do questionário inicial, foram propostas novas tarefas a fim de proporcionar um ambiente rico para o desenvolvimento da aprendizagem. Desejávamos, então, analisar as trajetórias de aprendizagem de um grupo de alunos e se haverá evolução até o objetivo principal, a saber, um trabalho sistemático com frações decimais e diversas representações, em particular as atividades de conversão do numérico para o gráfico (reta numérica) para fazer evoluir a compreensão da fração como número.

Algumas das atividades concebidas foram inspiradas em trabalhos do *Rational Number Project* e em questões do Livro Aberto *Frações no Ensino Fundamental*⁷ (RIPOLL et al., 2016).

A primeira atividade envolve um trabalho com equivalência entre frações. Percebemos que os alunos pouco utilizam as frações equivalentes como apoio na resolução de problemas. Essa atividade busca trabalhar dificuldades encontradas nas questões 3 e 4.

⁷ Disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/livro/lib/exe/fetch.php?media=livro_aluno_completo.pdf>.

Para a segunda atividade, será trabalhada a recomposição do inteiro em situações discretas e contínuas. Esse assunto foi tratado nas questões 2 e 5, e julgamos que necessitaria ser mais bem explorado.

Já na terceira atividade, estarão em foco as dificuldades encontradas nas questões 6 e 8 do questionário inicial. Estas trabalham a importância da unidade bem definida e a representação de frações em retas numéricas.

Todo esse trabalho buscou familiarizar os alunos com diferentes representações das frações, realizando atividades de tratamentos e conversões. Acreditamos que a análise detalhada das atividades tem a contribuir para a aprendizagem dos alunos, consolidando a ideia de fração como número.

5.4 Atividade 1

Notamos, por meio de nossos estudos, que a equivalência de frações tem sido trabalhada de forma “rígida” e cheia de regras. Essas impressões foram confirmadas em nosso questionário inicial. As figuras têm aparecido nesses estudos de forma pronta e previsível, impedindo que as crianças criem, percebam regularidades, explorem diversas configurações e outros aspectos que lhes ajudariam a resolver problemas envolvendo frações. Em razão disso, a primeira atividade irá trabalhar com a ideia de equivalência, no registro figural, envolvendo reconfiguração de figuras.

Toda figura pode ser modificada de muitas maneiras, entretanto, Duval (2012b) distingue três tipos de modificações: mereológicas, óticas e posicionais. Trataremos, em particular, da modificação mereológica.

Uma modificação mereológica é uma modificação que faz surgir uma forma como um todo fracionado em partes homogêneas ou em partes heterogêneas. Em um fracionamento homogêneo, as partes obtidas têm a mesma forma que o todo: o quadriculado constitui uma modificação mereológica, a mais familiar. Em um fracionamento heterogêneo, as partes obtidas não têm a mesma forma do que o todo: por exemplo, repartir um quadrilátero em dois, três ou quatro triângulos. Estas modificações se traduzem graficamente pela adjunção de um ou mais traços à figura inicial. Elas podem ser realizadas por recortes ou dobramentos (DUVAL, 2012b, p. 127).

Segundo Duval (2012b), esse tipo de tratamento é interessante pois as partes elementares obtidas podem ser reagrupadas em várias subfiguras, todas pertencentes à figura inicial. Isso implica em, por exemplo, reconhecer equivalências ou, ainda, obter a medida de áreas através da soma de partes elementares.

A predominância de fracionamentos homogêneos no estudo de frações ressalta e incentiva a identificação de frações por meio da dupla contagem das partes, trazendo algumas consequências indesejadas ao estudo do tema, como, por exemplo, o tipo de erro cometido na questão 3 do questionário inicial. Por isso, acreditamos que o trabalho com fracionamentos heterogêneos é favorável ao nosso estudo.

5.4.1 Objetivos e hipóteses

Nesta seção, iremos apresentar as situações de investigação propostas na Atividade 1, o objetivo de cada uma delas e as hipóteses envolvendo as resoluções esperadas.

Os alunos, em dupla, deveriam pensar nas soluções e, ao mesmo tempo, manipular as imagens (fornecidas em folha separada e colorida) com tesoura e cola. As respostas poderão ser validadas sobrepondo as imagens coloridas às imagens da folha de questões. Acreditamos que propor a tarefa em grupo é um fator estimulante às crianças, além de fornecer mais elementos da interação entre elas para nossas análises e compreensão de seus procedimentos.

- 1) Esta figura é formada por 20 (vinte) quadradinhos. Divida-a em quatro partes iguais, isto é, partes de mesma área e mesmo formato. Marque sobre a figura os traços da divisão.

Figura 31: Questão 1 – Atividade 1

Nas questões 1 e 2, esperamos que as crianças explorem diferentes formas de subdividir uma figura dada. Entretanto, pedimos que, além da área, o formato das figuras também seja igual, ou seja, congruente. Isso pode se configurar como uma dificuldade para aqueles que estão habituados com subdivisões lineares e mais

convencionais. Em todas as questões optamos por não utilizar a expressão congruente, pois ela não é habitualmente relacionada ao estudo de frações.

- 2) Esta figura é formada por 12 (doze) quadradinhos. Divida-a em quatro partes de mesma área e mesmo formato. Marque sobre a figura os traços da divisão.

Figura 32: Questão 2 – Atividade 1

As questões 3, 4 e 7 propõem um trabalho com reconfiguração da figura, sendo que algumas partes se “encaixam”, facilitando a contagem das partes pintadas. Escolhemos utilizar configurações diferentes das “pizzas” e “chocolates”, pois os estudos prévios indicaram que são muito recorrentes. Ainda instigam os alunos a respeito das frações equivalentes, conceito que será utilizado em questões mais adiante.

- 3) A figura abaixo é constituída por quadrados iguais. Escreva a fração que representa a parte sombreada. É possível escrever outra fração que representa a mesma parte sombreada? Justifique.

Figura 33: Questão 3 – Atividade 1

- 4) A figura representa um quadrado dividido em triângulos iguais. Escreva a fração que representa a parte sombreada desse quadrado.

Figura 34: Questão 4 – Atividade 1

- 7) A figura abaixo é constituída por 12 quadrados iguais. Qual fração representa a parte da figura pintada de preto?

Figura 35: Questão 7 – Atividade 1

A questão 5 foi escolhida para explorar o conceito de fração equivalente, tendo apresentado três imagens bem diferentes representando a mesma fração. Desejamos entender também o tipo de justificativa que os alunos utilizarão, se será relacionada à reconfiguração das imagens, ao registro numérico ou figural.

- 5) Beatriz e Luís observaram os três quadrados seguintes. Cada quadrado está dividido em partes iguais. Para cada um dos três quadrados, Beatriz e Luís escreveram uma fração que representa a parte colorida da figura. Beatriz afirmou: as três frações são equivalentes. Luís afirmou: apenas duas das três frações são equivalentes. Quem tem razão? Por quê?

Figura 36: Questão 5 – Atividade 1

As questões 6 e 11 são praticamente iguais, e a questão 12 também trabalha a mesma competência. Elas foram colocadas em posições diferentes a fim de verificar quais crianças utilizariam naturalmente a mesma estratégia e quais não perceberiam a similaridade entre as atividades. O fato de apresentar uma fração com denominador 4 no enunciado e “denominador 8” no registro figural pode causar algum tipo de obstáculo que deve ser vencido novamente pela equivalência.

- 6) A figura abaixo é formada por quadrados iguais. Alguns deles estão pintados de cinza. Quantos quadrados devem ser pintados para que $\frac{3}{4}$ da figura seja cinza?

Figura 37: Questão 6 – Atividade 1

- 11) Na figura abaixo, formada por quadrados congruentes, foram pintados dois quadrados. Quantos quadrados ainda devem ser pintados para que $\frac{3}{4}$ da figura fique colorida?

Figura 38: Questão 11 – Atividade 1

- 12) Quantos quadradinhos devem ser pintados para que $\frac{1}{5}$ da figura fique colorida?

Figura 39: Questão 12 – Atividade 1

Uma das possibilidades para resolver a questão 9 é utilizar o cálculo de áreas – do quadrado e dos triângulos. É a única atividade que apresenta a medida dos lados da figura em centímetros, dando abertura para esse tipo de estratégia. Além do mais, consideramos que a reconfiguração, nesse caso, fica mais complexa.

9) Que fração do quadrado está sombreada?

Figura 40: Questão 9 – Atividade 1

Para responder às questões 8 e 10, é necessário apenas identificar as frações. Em meio às figuras, novas reconfigurações devem ser feitas.

8) As figuras abaixo são formadas por quadrados iguais. Em quais das figuras a parte cinza corresponde a $\frac{1}{3}$.

Figura 41: Questão 8 – Atividade 1

10) As figuras representadas são triângulos geometricamente iguais. Qual entre elas não pode ser representada pela fração $\frac{3}{4}$?

[A]

[B]

[D]

[C]

Figura 42: Questão 10 – Atividade 1

5.4.2 Resultados

Ao apresentarmos a atividade, as crianças ficaram muito empolgadas. Acreditamos que o fato de ser uma aula diferenciada – na qual elas estariam trabalhando em dupla, com a liberdade de recortar e colar imagens – tenha sido fundamental para o bom desenvolvimento das tarefas. As duplas foram estabelecidas pela disposição das crianças na sala de aula, pois pedimos apenas que elas aproximassem as carteiras dos colegas ao lado. Não houve problemas com essa determinação.

Na primeira questão, tivemos um índice de acerto de 7 entre as 11 duplas. Em duas duplas, percebeu-se que as respostas foram alteradas depois do diálogo com colegas que tinham dado respostas corretas. As outras duas duplas dividiram a figura em cinco partes iguais, faltando compreender corretamente o enunciado. Algumas crianças fizeram o uso do material auxiliar por mero capricho, visto que já haviam encontrado as respostas.

Apesar de a segunda questão ser bem parecida com a primeira, a quantidade de erros foi maior. Algumas crianças deixaram o registro da conta de divisão que

deveria ser feita em ambas as questões. Duas duplas dividiram a imagem em apenas três partes, cometendo o mesmo erro citado de não ter compreendido a proposta, e duas duplas acertaram completamente a questão.

- 2) Esta figura é formada por 12 (doze) quadradinhos. Divida-a em quatro partes de mesma área e mesmo formato. Marque sobre a figura os traços da divisão.

Figura 43: Resposta à Questão 2 – Atividade 1

Curiosamente, 14 crianças deram a resposta que se pode ver na Figura 43. Fica difícil saber, neste caso, o que motivou tantos alunos a dar essa resposta, já que a maioria havia acertado a questão anterior. Outro detalhe é que apenas as duas duplas que acertaram deram a resposta utilizando o material auxiliar.

O fato de as imagens não estarem em configurações parecidas com as tradicionais não foi um obstáculo, até porque os estudantes trataram as repartições como se fossem casos discretos, nas quais apenas a contagem era importante.

Quatro duplas acertaram parcialmente a terceira questão, não tendo encontrado nenhuma fração equivalente, e uma dupla acertou completamente a questão (Figura 44). Antes de iniciarmos a atividade, dissemos que não haveria certo ou errado para as questões e que gostaríamos de saber quais ideias estariam norteando a resolução dos problemas, então nos deparamos com a resposta da Figura 45.

- 3) A figura abaixo é constituída por quadrados iguais. Escreva a fração que representa a parte sombreada. É possível escrever outra fração que representa a mesma parte sombreada? Justifique.

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Figura 44: Resposta correta à Questão 3 – Atividade 1

- 3) A figura abaixo é constituída por quadrados iguais. Escreva a fração que representa a parte sombreada. É possível escrever outra fração que representa a mesma parte sombreada? Justifique.

$$\frac{4}{12}$$

porque as cores
da direita e
esquerda se
completam por isso

Figura 45: Comentário sobre a Questão 3 – Atividade 1

Nas outras seis duplas, tivemos o seguinte resultado: duas delas responderam $\frac{6}{12}$; duas responderam $\frac{8}{12}$; e as outras duas responderam $\frac{5}{11}$. Para o primeiro caso, a hipótese é que eles tenham considerado os quadrados que tivessem pelo menos uma parte sombreada, que são 6, nesse caso. No segundo caso, as crianças responderam a fração complementar à resposta esperada, podendo ter

contado as partes em branco então. O último caso é o mais difícil de ser analisado, apenas infere-se que essas duplas tenham dado essa resposta de forma conjunta.

Sete duplas acertaram a questão 4. Três duplas responderam $\frac{2}{6}$, entre elas as citadas no terceiro caso do parágrafo anterior. Aqui, supõe-se que as crianças compuseram a fração considerando a relação parte-parte, $\frac{\text{partes pintadas}}{\text{partes não pintadas}}$, o que é um erro comum e esperado para aqueles que estão iniciando o estudo da concepção parte-todo. Houve apenas uma dupla que escreveu $\frac{1}{8}$ como resposta, mas não deixou nenhum tipo de raciocínio esboçado.

Nesse momento, durante a resolução da questão 4, algumas crianças entenderam que o uso do material de apoio era dispensável, talvez por essa ser a questão mais “fácil” da atividade. Até esse ponto, a aula correu de forma dinâmica e rápida, e poucas crianças haviam pedido auxílio.

Algumas duplas pediram auxílio para interpretar a questão 5. Percebemos uma pouco de desatenção de alguns alunos, dado que era uma questão com detalhes importantes. Isso se refletiu um pouco nas respostas também; um dos alunos escreveu: “Luiza porque se você divide todas as figuras vai dar a mesma $\frac{4}{16}$ avos”, sendo que este é o argumento de Beatriz.

Houve aqueles que utilizaram o conceito de fração equivalente para justificar sua resposta: “Beatriz está certa porque $\frac{4}{16}$ dividido por 2 é $\frac{2}{8}$ e 2 dividido por $\frac{2}{8}$ é $\frac{1}{4}$ ”. Quem percebeu que todas as imagens poderiam ser subdivididas escreveu: “Bia, se eu dividir vai todos vão dar 4”. Não podemos deixar de comentar que os estudantes precisam ser estimulados a melhorar sua capacidade de argumentar, tanto na fala quanto na escrita.

As duplas começaram a pedir bastante ajuda na questão 6. Entreviemos fazendo as seguintes perguntas: “Qual fração está representada? Qual fração está sendo solicitada no enunciado? Qual fração é equivalente a $\frac{2}{8}$ com denominador 4?”. Logo as crianças começaram a encontrar $\frac{6}{8}$ e responder que 4 quadrados deveriam ser pintados. Isso fez com que as intervenções na questão 11 fossem menores.

- 6) A figura abaixo é formada por quadrados iguais. Alguns deles estão pintados de cinza. Quantos quadrados devem ser pintados para que $\frac{3}{4}$ da figura seja cinza?

Figura 46: Resposta incorreta à Questão 6 – Atividade 1

Cinco duplas encontraram as equivalências e acertaram a questão. Quatro duplas disseram que apenas um quadrado deveria ser pintado, encontrando erroneamente a fração $\frac{3}{8}$ ao invés de $\frac{3}{4}$ (Figura 46). As duas duplas restantes não deixaram explícito seu raciocínio e nem sua resposta.

É muito interessante como o trabalho ocorre de forma colaborativa. Se um dos estudantes se esquece de alguma orientação, o outro se lembra; quando eles discordam, a discussão fica muito produtiva, pois a linguagem utilizada é própria do convívio entre eles. Acreditamos que isso tenha ocorrido pois as atividades não solicitavam simples cálculos, uso de fórmulas e regras.

Estranhamente, o índice de acerto na questão 7 foi maior do que na questão 4, que era bem similar. Apenas uma dupla respondeu erroneamente $\frac{4}{8}$, tendo permanecido com a mesma estratégia utilizada na questão 4. Pode-se supor aqui que a configuração em triângulos – questão 4 – é menos familiar às crianças e gerou algum tipo de confusão para elas, ou que na troca de experiências, no decorrer da tarefa, alguns alunos tenham corrigido sua maneira de ler as frações.

- 7) A figura abaixo é constituída por 12 quadrados iguais. Qual fração representa a parte da figura pintada de preto?

$$\frac{4}{12 \text{ avos}}$$

Figura 47: Associação de dois tipos de registro – Atividade 1

- 8) As figuras abaixo são formadas por quadrados iguais. Em quais das figuras a parte cinza corresponde a $\frac{1}{3}$.

$$\frac{4}{12}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{6}$$

Figura 48: Resposta parcialmente correta à Questão 8 – Atividade 1

Uma curiosidade observada foi o registro que se pode ver na Figura 47. Por três vezes, a criança fez o registro numérico associado ao registro na língua natural, incluindo a palavra avos para denominadores maiores que dez.

Ninguém acertou completamente a questão 8. Tivemos 4 duplas que marcaram a figura a, 1 dupla que marcou a figura d e 1 dupla que se aproximou mais da resposta esperada (Figura 48) – nesse caso, cometeram o mesmo erro encontrado na questão 3, compondo a fração d como sendo $\frac{\text{partes pintadas}}{\text{partes não pintadas}}$. Sendo assim, 6 duplas conseguiram fazer a leitura das frações e suas equivalências. Para as outras 5 duplas, 2 delas consideram correta a alternativa b, e 3 delas, a alternativa c.

O erro de compor frações utilizando a relação parte-parte foi recorrente até aqui e pode ser observado também nos trabalhos de Merlini (2005) e Moutinho (2005). Merlini observou que 44% dos alunos dos quintos e sextos anos cometeram esse equívoco em tarefas enquanto Moutinho encontra o mesmo erro em 27% dos alunos da quarta série (hoje quinto ano) e 55% dos alunos da oitava série (hoje nono ano).

A maioria das crianças encontrou na questão 9 um grande obstáculo. Orientamos os estudantes a utilizar o material de apoio, quadricular a imagem, fazer partições, etc. Mesmo assim, não obtivemos sucesso, pois esse é o caminho mais complicado. Nenhum deles propôs o trabalho com áreas, entretanto, uma das duplas foi orientada nesse sentido e conseguiu encontrar a fração pedida.

Figura 49: Resposta à Questão 9 – Atividade 1

Os outros estudantes não souberam muito bem como proceder, tendo deixado a questão sem responder ou tentado fazer qualquer tipo de operação que relacionasse os números fornecidos pelo problema. Uma das respostas mais interessantes se encontra na Figura 49, já que os estudantes obtiveram a fração que relaciona o perímetro pelo qual a parte sombreada passa e o perímetro total.

Na questão 10, tivemos 5 duplas que marcaram erroneamente a opção *c*, 1 dupla que marcou a opção *b* e 1 dupla que respondeu que não seria nenhuma das alternativas. As outras 4 duplas responderam que as alternativas *a* e *c* não representariam $\frac{3}{4}$ e, entre elas, duas disseram que seria porque as divisões não eram iguais. Percebe-se uma maturidade dessas duplas para perceber e justificar essa questão, mesmo tendo marcado a opção *a* erroneamente.

Os resultados da questão 11 foram exatamente iguais aos da questão 6. Felizmente isso ocorreu, indicando que as crianças estavam envolvidas e atentas ao padrão que se estabeleceu entre as atividades, mantendo sua estratégia de resolução do problema até o final da tarefa.

Na questão 12, das cinco duplas que acertaram as questões 6 e 11, duas responderam que 5 quadradinhos deveriam ser pintados e três responderam que 2 quadradinhos deveriam ser pintados – sendo esta a resposta correta. Nenhuma outra dupla apresentou respostas coerentes.

Acreditamos que os erros cometidos nas questões 8 e 10 deveriam ser investigados mais profundamente, então entrevistamos as duplas de forma isolada para ouvir as ideias e estratégias dos alunos. Os resultados serão apresentados a seguir.

5.4.3 Entrevista com alunos

Nos dias que se passaram entre a realização da primeira atividade e a entrevista, a professora regente iniciou o estudo sobre frações, pois é um dos conteúdos previstos para o segundo bimestre em seu plano anual. Percebeu-se nas falas das crianças que o estudo cotidiano e a pesquisa estão sendo colaborativos, complementando-se em muitos aspectos – em alguns momentos comentaram umas com as outras: - Lembra que a professora falou?.

Escolhemos analisar mais a fundo os erros cometidos nas questões 8 e 10, pois foram as questões com maior índice de erros e apresentam-se ligadas pelas mesmas competências (ver pág. 53). Elas apresentavam figuras diferenciadas e exigiam a reconfiguração das mesmas para obtenção dos resultados.

Tivemos um pouco de dificuldade de classificar os erros e criar uma estratégia de intervenção, já que as duplas apresentaram justificativas variadas para suas

respostas. Iremos elencar algumas para que fique clara essa diversidade de pensamentos.

O momento da entrevista foi de reflexão e aprendizado, já que o assunto tem sido recorrente nas aulas regulares do ano. As perguntas foram semiestruturadas a fim de não induzir nenhuma resposta. Utilizamos questionamentos do tipo: “Como vocês escolheram essa resposta?”; “Que fração está representada por esta figura?”; “Vocês dariam certo ou errado para esta resposta?”; “Se vocês fossem corrigir essa questão, o que vocês iriam avaliar?”.

Figura 50: *Legenda da Questão 8 – Atividade 1*

Resposta de um aluno quando foi questionado sobre o porquê de ter marcado a alternativa *b* como sendo $\frac{1}{3}$: “A gente achou que era essa porque tem três partes cinzas aqui a branca tá no meio dela então a gente achou que era um terço dessas três daqui.”

Nesse momento, eles foram convidados a escrever a fração dessa imagem utilizando o mesmo critério que utilizaram para a figura ao lado dela e então se deram

conta de que a parte cinza representa, na verdade, $\frac{3}{7}$ da figura. Depois disso, conseguiram estabelecer as equivalências e encontrar a resposta correta.

Outra dupla também mudou o critério para determinar a fração segundo o que estavam lendo no enunciado. É como se eles quisessem adequar ou estabelecer qualquer relação entre o que veem nas figuras e o que é pedido, mesmo que para isso tenham que mudar sua estratégia.

Isso é algo relevante a ser investigado, pois há indícios de que eles sabem o significado do numerador e do denominador, mas às vezes deixam os conceitos de lado, como se não tivessem tanto valor diante do que o professor propõe. Outra hipótese é que o contrato didático estabelece que o que o professor enuncia é verdade absoluta e não deve ser questionado.

Um paralelo pode ser feito também para algumas crianças que acharam que a questão 8 só tinha uma resposta correta, sendo isso apenas um vício adquirido durante a vida escolar dos alunos. Muitos acham que as questões têm apenas uma resposta correta e uma forma de se chegar ao resultado. Desejamos trabalhar isso nas tarefas seguintes.

Tivemos casos de alunos que “desistiram” de encontrar a fração d da questão 8, pois disseram que era difícil, porém não tiveram grandes dificuldades quando estavam sendo auxiliados durante a entrevista, entendendo que poderia ser $\frac{2}{6}$ ou $\frac{4}{12}$ (se considerassem os triângulos).

Na questão 10, um dos alunos disse que escolheu a alternativa c porque todas as figuras têm três partes cinza, enquanto a questão c tem 12 partes cinza, algo que não havíamos considerado na elaboração das questões.

Entre os alunos que responderam a e d , tivemos duas duplas que disseram que, em ambas as alternativas, a imagem não está dividida em partes congruentes, entretanto concordam que subdivisões poderiam ser feitas para obter o resultado esperado.

5.5 Atividade 2

Para esta fase da intervenção, foi planejada uma atividade com o objetivo geral de trabalhar a composição e decomposição de inteiros. Foi feita uma gincana entre as crianças a fim de despertar o interesse pela atividade. Além disso, acreditamos que seria uma oportunidade para os alunos retomarem a nomenclatura

– com significado – acerca do estudo de frações, cálculos mentais e aproximações envolvendo frações próprias, impróprias e aparentes e a fração como medida.

Figura 51: *Material auxiliar – Atividade 2*

O grupo foi dividido em duas equipes e as afirmações que seguem foram sorteadas uma a uma, devendo ser julgadas pelos alunos como verdadeiras ou falsas. Além disso, deveriam ser justificadas as respostas de forma verbal ou escrita por um representante do grupo em cada rodada, que devia ilustrar – da forma que o grupo desejar – o argumento usado para decidir sobre a validade ou não da afirmação.

Caso alguma resposta estivesse incorreta, o grupo oponente teria a possibilidade de respondê-la. Desejamos, com isso, expor e analisar o pensamento dos alunos quanto ao assunto e sua compreensão dos conceitos envolvidos.

Para auxiliá-los, as fichas do desenho a seguir estavam disponíveis em papel cartão, fixadas por fita crepe na lousa. Além disso, disponibilizamos papel quadriculado, régua graduada, caneta, folha sulfite, tesoura, barbante, compasso e frações em setores circulares (círculos já divididos em quartos).

Nestas afirmações, as unidades variam e é trabalhada a composição e decomposição do inteiro nos dois sentidos (fração $\rightarrow$ inteiro e inteiro $\rightarrow$ fração).

Dimensões das barras: A: 3 cm $\times$ 3 cm; B: 3 cm $\times$ 6 cm; C: 3 cm $\times$ 9 cm; D: 3 cm $\times$ 12 cm; E: 3 cm $\times$ 15 cm; F: 3 cm $\times$ 18 cm; G: 3 cm $\times$ 21 cm; H: 3 cm $\times$ 24 cm; I: 3 cm $\times$ 27 cm.

Figura 52: *Fichas auxiliares – Atividade 2*

Considerando os retângulos vermelhos apresentados:

- 1- (V) O comprimento de A é $\frac{1}{8}$ do comprimento de H.
- 2- (F) O comprimento de D é $\frac{3}{4}$ do comprimento de G.
- 3- (F) O comprimento de F é $\frac{2}{3}$ do comprimento de H.
- 4- (V) O comprimento de B é $\frac{2}{5}$ do comprimento de E.
- 5- (V) Se retirarmos $\frac{1}{5}$ de E, obtemos D.
- 6- (F) Se retirarmos $\frac{2}{6}$ de G, obtemos E.
- 7- (V) Se C corresponde a $\frac{2}{4}$, então F corresponde a $\frac{4}{4}$.
- 8- (V) A fração $\frac{1}{9}$ pode ser usada para relacionar as barras A e I.
- 9- (F) A fração $\frac{3}{8}$ pode ser usada para relacionar as barras C e G.
- 10- (V) A fração $\frac{7}{3}$ pode ser usada para relacionar as barras G e C.
- 11- (V) A fração $\frac{8}{2}$ pode ser usada para relacionar as barras H e B.

Considerando um inteiro qualquer idealizado pelo aluno:

- 12- (V) $\frac{5}{4}$ é maior que um inteiro.
- 13- (F) $\frac{6}{4}$ é menor que um inteiro.
- 14- (V) $\frac{3}{4}$ é menor que um inteiro.
- 15- (V) $\frac{10}{4}$ é maior que dois inteiros.

16-(V) $\frac{5}{8}$ está mais próximo de meio do que de um inteiro.

17-(V) $\frac{4}{6}$ é o mesmo que dois terços.

18-(F) $\frac{10}{12}$ é o mesmo que cinco quartos.

19-(V) $\frac{10}{8}$ é o mesmo que cinco quartos.

20-(V) $\frac{12}{4}$ é o mesmo que três inteiros.

Os itens a seguir serão considerados como desafios em meio as afirmativas.

21-Sabendo que a barra E corresponde a $\frac{1}{3}$ de um inteiro, desenhe esse inteiro.

22-Sabendo que a barra C corresponde a $\frac{3}{4}$ de um inteiro, desenhe esse inteiro.

23-Sabendo que a barra D é $\frac{4}{3}$ de um inteiro, desenhe esse inteiro.

24-Sabendo que a barra I é $\frac{9}{3}$ de um inteiro, desenhe esse inteiro.

5.5.1 Objetivos e hipóteses

A competência exigida nas afirmações de 1 a 4 seria a capacidade de identificar frações próprias em inteiros variados. Espera-se que os alunos não tenham dificuldade de julgar essas afirmações, visto que essa competência é considerada simples e muito trabalhada no estudo de frações.

As afirmações de 5 a 7 podem ser julgadas fazendo a decomposição das frações ou a operação de subtração entre frações. Esperamos que os alunos percebam o padrão em que aumentam os tamanhos das barras, para que possam usar parâmetros confiáveis ao invés de aproximações. Eles devem considerar que o inteiro é qualquer fração do tipo $\frac{n}{n}$.

O grupo de afirmações de 8 a 11 suscita o olhar para as frações como medida, pedindo que sejam relacionados dois comprimentos por meio de uma fração. Estas são similares ao primeiro grupo de afirmações, entretanto variou-se o tipo de fração enunciada (fração unitária – 7; fração própria – 8; fração imprópria – 9; fração aparente – 10).

As frações de 12 a 16 podem ser interpretadas como números que podem ser posicionados numa reta numérica. Para todas as afirmações, há muitas formas de

argumentar, utilizando o registro numérico, figural ou os materiais disponíveis, sendo assim é difícil supor que os alunos irão preferir algum tipo de registro.

No bloco seguinte, de 17 a 20, tratamos das frações equivalentes, assunto da tarefa anterior que parece ter sido bem resolvido. A fração da afirmação 17 só pode ser simplificada por 2 e é a mais simples entre as quatro. A fração $\frac{5}{4}$ aparece nas afirmações 18 e 19 propositalmente – podemos observar se as crianças farão alguma associação entre elas caso as duas sejam sorteadas.

De 21 a 24, poderiam ter sido feitas também afirmações para serem julgadas como verdadeiras ou falsas (por exemplo: 22- Sabendo que a barra C corresponde a $\frac{3}{4}$ de um inteiro, então o inteiro é D.), entretanto decidimos deixar questões abertas para analisar os métodos de resolução utilizados e os meios que utilizariam para garantir a precisão dos inteiros. Além disso, garantimos que aparecesse uma fração unitária, uma própria, uma imprópria e uma aparente, tendo cada uma delas um grau diferente de dificuldade para recompor o inteiro.

Algumas afirmações podem ser consideradas fáceis e corriqueiras, mas aparecem com o objetivo de impulsionar a gincana caso as crianças estejam distantes da zona de desenvolvimento esperada.

5.5.2 Resultados

A atividade ocorreu nas duas últimas aulas do dia, que acontecem após o recreio. Quando as crianças chegaram à sala, a lousa já estava com as barras coladas, conforme a Figura 53.

Figura 53: Momento da explicação das regras da gincana

Começamos a explicar como seria a dinâmica da aula e as regras da gincana. Demos a oportunidade aos alunos de escolher seus times. Depois de estabelecido isso, eles deram nomes às equipes: Estrelinhas (E) e Terabítia (T), e assim iniciamos a atividade. No intervalo de 2 aulas (1 hora e 40 minutos), foram sorteadas 14 afirmações no total, iniciando pelos Terabítia, que ganharam o par ou ímpar.

O time T iniciou sorteando a primeira afirmação, que foi a de número 23. Determinamos um tempo de três minutos para o grupo elaborar sua justificativa. Eles estranharam muito a fração $\frac{4}{3}$ e não conseguiram pensar nela como quatro partes de um terço de um inteiro. Alguns chegaram a propor a divisão da barra D em 4 partes, mas outros insistiam que eram terços e, por isso, deveria ser dividida em 3 partes.

Depois de alguma discussão, não conseguiram chegar a uma resposta final e, então, o grupo E teve sua oportunidade. Este dispunha de dois minutos para réplica e também não conseguiu representar o inteiro. Optamos por não fazer qualquer intervenção naquele momento, pois se tratava da primeira afirmação e consideramos que haveria outras oportunidades de esclarecer essa situação. O que ficou claro nesse início, com o sorteio de tal afirmação, é que os alunos têm dificuldades para interpretar uma fração imprópria e, no caso, cogitaram representar $\frac{3}{4}$, pois para eles não era familiar que o numerador fosse maior que o denominador. Tal questão será retomada na próxima atividade.

Em outra rodada posterior (não na sequência), quando o grupo E sorteou a afirmação 24, conseguiu responder corretamente, dizendo que $\frac{9}{3}$ representavam nove partes de $\frac{1}{3}$ e que três delas deveriam ser tomadas para completar um inteiro, dividindo com giz a barra I colada na lousa. Entendemos que isso ocorreu pois, ao longo da atividade, as crianças foram tendo mais contato com frações impróprias e fazendo associações corretas com as barras. Cabe ainda observar que um dos alunos registrou na lousa 9:3 “na chave” e afirmou que “como o resultado é 3, tinha que pegar 3 partes”, mas não demonstrou domínio da relação entre a operação numérica e a representação figural na barra e, com isso, não expressou uma justificativa clara do porquê de “pegar 3”.

O fato de as afirmações serem sorteadas foi negativo, pois o grupo T teve que lidar com situações mais complexas, ficando em “desvantagem”, de certo modo, em relação ao time adversário. Deveríamos ter estabelecido uma sequência em que as

afirmações fossem aparecendo da mais fácil para a mais difícil. Acreditamos que o fator “sorte” foi até um pouco desmotivador para o grupo, que não estava conseguindo evoluir em sua pontuação.

Apesar disso, afirmações representantes de todos os grupos foram sorteadas.

Grupo	1 – 4	5 – 7	8 – 11	12 – 16	17 – 20	21 – 24
T		5 e 6		12, 13 e 15	18	23
E	2 e 4	7	8 e 11		17	24

Quadro 2: Distribuição de afirmações sorteadas por grupo

As discussões aqui apresentadas não obedecerão à ordem em que foram sorteadas as afirmações. A exposição será realizada obedecendo aos grupos de afirmações e comparando as diferentes respostas obtidas.

Não houve dificuldade alguma para os alunos quando se depararam com as afirmações 17 e 18. No caso da afirmação 17, que é verdadeira, o aluno porta-voz da equipe E disse que “se você simplificar aqui por dois, quatro sextos é equivalente a dois terços” (A7 da equipe E). Enquanto ele dizia isso, registrava na lousa as duas frações ligadas por setas com o símbolo $\div 2$. Achamos interessante ele utilizar corretamente o termo “equivalente” em sua justificativa, quando na afirmação original a expressão utilizada foi “é o mesmo que”. Aliás, esse termo foi usado também por outros alunos do grupo.

Quando a afirmação 18 foi sorteada, um dos alunos do grupo T dizia indignado: “MAS DEZ DOZE AVOS É IGUAL A CINCO SEXTOS E NÃO A CINCO QUARTOS!” (A12 da equipe T). E a professora da turma disse a ele: “Mas você pode responder que a afirmação é falsa!”. Essa intervenção foi necessária ao perceber que o aluno estava resistindo em ter que justificar algo que tinha certeza que estava “errado”. Essa reação pode estar relacionada ao contrato didático, na medida em que não é habitual solicitar justificativas de afirmações falsas na sala de aula. A professora regente e a pesquisadora estiveram presentes em todo o tempo, gerando situações-problema e revezando no auxílio aos grupos.

A afirmação 15 foi a primeira a ser sorteada do bloco 12 a 16. Ambos os grupos responderam incorretamente que a afirmação era falsa e não conseguiram justificar suas respostas. Nesse momento, o grupo T voltou a cogitar a possibilidade de a fração estar invertida. Optamos por fazer um esclarecimento utilizando os discos

que estavam divididos em quartos, disponíveis no material. Sugerimos que os alunos reunissem dez discos na lousa formando círculos. Com isso, foram obtidos dois discos e meio, o que levou os alunos a constatarem que dez quartos ultrapassam dois inteiros e responderem rapidamente que a afirmação era verdadeira.

Observamos que, para muitos, o problema foi esclarecido e esperávamos que essa interpretação pudesse ser usada para justificar outras afirmações. Apesar de eles não utilizarem os discos de frações, conseguiram verbalizar para as afirmações 12 e 13, respectivamente, que: “Se quatro quartos é igual a um inteiro, então cinco quartos é maior que um inteiro, pois o numerador cinco é maior que quatro” (A6 da equipe T) e “Se quatro quartos é igual a um inteiro então seis quartos é maior que um inteiro, pois o numerador seis é maior que quatro” (A19 da equipe T).

Figura 54: Aluno do grupo T justificando a falsidade da afirmação 13

O grupo E não teve dificuldades para julgar as afirmações 8 e 11. Para a afirmação 8, disseram que a barra A caberia nove vezes na barra I. Para a afirmação 11, fizeram a representação de 4 círculos divididos ao meio, ou seja, $\frac{8}{2}$, e disseram então que assim como $\frac{8}{2}$ são quatro, também precisariam de 4 barras B para compor a barra H, julgando a afirmação como verdadeira.

As afirmações 5 e 6 foram sorteadas pelo grupo T. Para a afirmação 5, as crianças, após comparação por sobreposição das barras na lousa, disseram que A representaria um quinto de E e que $D + A = E$, o que estava correto. Para justificar a afirmação 6, tentaram utilizar um argumento similar, mantendo a estratégia de sobreposição. Disseram que B representaria $\frac{2}{6}$ de G, então $E + B = G$. É verdade que

as barras E e B se sobrepõem perfeitamente a G, entretanto não observaram que B representa, na realidade, dois sétimos de G e E, cinco sétimos de G. Eles deveriam ter usado como unidade base a barra A, como foi feito na afirmação anterior, mas acabaram se deixando levar pela fração que encontraram no enunciado.

Foi dito aos alunos que a afirmação era falsa e que sua justificativa estava errada, então foi dada a chance ao outro grupo de acertar a justificativa. O grupo E não conseguiu desenvolver o raciocínio esperado e não pontuou nessa rodada. Aproveitamos esse momento para mostrar o padrão existente nas barras, que aumentavam 1 barra A em cada letra. Dissemos que a barra A poderia representar diferentes frações unitárias, por exemplo: para a barra C, A representa um terço; para a barra D, A representa um quarto; e assim sucessivamente.

Além disso, pudemos estabelecer algumas relações mais complexas, por exemplo: a barra C representa $\frac{3}{2}$ da barra B – isto é, se B é o inteiro, então A é meio, e como C é composto por três barras A, então C é $\frac{3}{2}$ de B. Expor essa regularidade foi esclarecedor aos alunos, pois mostrou que o inteiro sempre deve estar bem estabelecido.

Essas ideias foram sendo desenvolvidas juntamente com os alunos. A pesquisadora propunha questões que a maioria da sala já conseguia responder. Foi um momento de descoberta com expressões como “Nossa, era isso...”. Alguns dos alunos do grupo T, depois de compreender seu erro, disseram até que acharam “pegadinha” colocar sextos na afirmação, quando na realidade se tratava de sétimos.

Figura 55: Alunos do grupo E discutindo sobre a afirmação 11

O item 7 foi a última afirmação sorteada pelo grupo E. Sua resolução estava intimamente ligada à explicação anterior, mas havia um fator complicador: A não poderia mais ser a fração unitária do inteiro ali tratado. O aluno porta-voz do grupo nessa tarefa disse que, assim como $\frac{4}{4}$ é o dobro de $\frac{2}{4}$, a barra F é o dobro da barra C, e sua justificativa foi considerada.

A resolução dos itens 2 e 4 foi muito tranquila. As crianças conseguiram provar o que pediam as afirmações subdividindo as barras em quartos e quintos, respectivamente, e sobrepondo-as. O grupo E conseguiu, inclusive, justificar que o comprimento de D é na realidade $\frac{4}{7}$ do comprimento de G.

Em decorrência do tempo que foi limitado e determinado para chegar à resposta final, as crianças se reuniram na lousa, rabiscaram as barras e não se preocuparam em utilizar muitos dos recursos que estavam disponíveis. O grupo T ficou muito apegado à régua, tendo medido as barras em quase todas as rodadas. Entretanto, não utilizaram argumentos numéricos em momento algum. Por outro lado, o grupo E não se apegou à precisão de medir os comprimentos das barras. Em certo momento, a professora interveio sugerindo que eles utilizassem o compasso para verificar algumas medidas.

Já havíamos percebido na atividade anterior que as crianças tendem a simplificar os meios de solucionar os problemas e que, apesar de termos disponibilizado tesoura e cola na atividade, elas optaram por utilizar meios mais simples. Desta vez ocorreu da mesma forma: os estudantes buscaram os recursos que julgaram ser mais imediatos, que foram a lousa individual, a lousa da sala e as barras que poderiam ser reposicionadas na lousa.

Figura 56: Alunos do grupo T usando a lousa individual como recurso para a discussão

Nas duas últimas afirmações, acordamos que elas valeriam mais pontos (4 pontos) para dar a oportunidade de o grupo T se recuperar na gincana, buscando motivá-los para a última pergunta. Eles acabaram acertando a última afirmação e passando à frente do grupo E, mas o grupo E, que estava muito entrosado, conseguiu mais uma vez alcançar o objetivo e se consagrar, merecidamente, campeão.

A ideia inicial era que cada aluno pudesse ser porta-voz de seu grupo pelo menos uma vez. Como são 24 alunos, então tivemos 24 afirmações e calculamos um tempo de aproximadamente 4 minutos por item. Entretanto, conseguimos fazer 14. Apesar disso, foi um momento muito proveitoso, em que as crianças puderam aumentar seu conhecimento acerca do assunto e ter contato com uma metodologia diferente das tradicionais aulas. Acreditamos que o trabalho em grupo colaborativo é sempre proveitoso, pois as crianças possuem repertórios parecidos e isso é usado de forma positiva na resolução das tarefas.

No dia seguinte, entregamos a premiação como forma de tentar aproximar as crianças do estudo, fazendo-as ver a Matemática como algo prazeroso e interessante, buscando nisso colaboradores parceiros para o estudo.

5.6 Atividade 3

Quando a Atividade 2 foi aplicada, os alunos estavam cursando o segundo bimestre letivo e estudando frações, mais especificamente, o reconhecimento de frações no modelo parte-todo, equivalência de frações, comparação de frações, operações com frações e representação de frações na reta numérica.

A aplicação da Atividade 3 foi prevista para um momento posterior, no início do terceiro bimestre letivo, quando a professora estaria trabalhando números decimais. Nesse contexto, ao invés de seguir com o planejamento inicial e propor atividades para enfatizar a importância da unidade bem definida e a representação de frações na reta numérica, buscando sua apreensão como número racional, decidimos incluir atividades envolvendo representações de números decimais e de frações decimais para investigar algumas questões.

5.6.1 Objetivos e hipóteses

Inicialmente, desejamos verificar qual o nível de familiarização dos alunos com a representação de números racionais na forma decimal na reta numérica, o que

corresponde a atividades de conversão do registro numérico decimal para o registro gráfico e vice-versa. Para tanto, foram desenhadas duas atividades, uma coletiva e uma individual, que passamos a descrever no que segue.

Primeiramente, como uma forma de introduzir (ou revisar), foi previsto desenhar na lousa uma reta numérica indicando os pontos de coordenadas 1, 2 e 3. Como a lousa é quadriculada, utilizamos um intervalo de 30 quadradinhos do zero ao três. Esperávamos que esse momento fosse breve para que conseguíssemos desenvolver melhor as atividades do segundo momento, apoiadas em uma ficha e devendo ser desenvolvidas pelos alunos, com o registro escrito de suas produções.

Figura 57: Lousa preparada para aplicação da Atividade 3

Os alunos foram convidados, em duplas, a realizar as seguintes representações de números na reta:

- 1) Posicione os números 0,5 e 1,5 na reta numérica.
- 2) Posicione na reta os números 1,2 e 2,1.
- 3) Posicione na reta os números 1,6 e 1,06.
- 4) Posicione na reta os números 1,9 e 1,90.
- 5) Posicione na reta os números 2 e 2,00.
- 6) Posicione na reta os números 1,35 e 1,4.
- 7) Posicione na reta os números 3,01 e 3,007
- 8) Posicione na reta dois números que estejam entre 0 e 3.
- 9) Posicione na reta dois números que estejam entre 2,5 e 3,5.
- 10) Posicione na reta dois números que estejam entre 1,7 e 1,8.
- 11) Posicione na reta dois números que estejam entre 0,75 e 0,80.

12) Posicione na reta dois números que estejam entre 0,25 e 0,26.

Os números foram escolhidos considerando as seguintes variáveis: inverter a posição do algarismo das unidades com o dos décimos; deslocar o algarismo da ordem dos décimos para a ordem dos centésimos colocando um zero na casa dos décimos; inserir um ou dois zeros após a casa dos décimos; intervalo entre inteiros, décimos e centésimos.

Com esta atividade, esperamos conseguir observar e compreender as estratégias utilizadas pelos alunos para a localização dos números, a forma como leem os números decimais, se os relacionam às frações quando realizam esse tipo de atividade e se utilizam o quadro valor lugar (QVL). Outro conceito trabalhado indiretamente será a comparação entre decimais.

Não foram propostos números na ordem dos milésimos, pela dificuldade de realizar essas representações com precisão no modelo utilizado. As intervenções feitas no decorrer da atividade serão relatadas na seção de apresentação dos resultados.

No segundo momento da atividade, foi fornecido aos alunos um material impresso com as seguintes questões.

1) Escreva no retângulo o número que está indicado pela seta:

Figura 58: Questão 1 – Atividade 3

- 2) Faça o mesmo que foi feito no exercício anterior para um número de sua escolha que esteja entre 100 e 1000.

Figura 59: Questão 2 – Atividade 3

- 3) Agora, represente na reta numérica as seguintes frações decimais:

- a) $\frac{2}{5}$
- b) $\frac{7}{2}$
- c) $\frac{3}{20}$
- d) $\frac{46}{100}$

Figura 60: Questão 3 – Atividade 3

- 4) Represente o número 3,72 através de uma:

- a) adição
- b) subtração
- c) multiplicação
- d) divisão
- e) figura

Figura 61: Questão 4 – Atividade 3

- 5) Agora, reproduza as operações da atividade anterior utilizando frações.

Figura 62: Questão 5 – Atividade 3

5.6.2 Resultados

Quando os alunos chegaram à sala de aula, a representação da reta já estava desenhada na lousa. Eles inferiram que naquele dia seria feita uma intervenção diferenciada. Levou um tempo para se acalmarem, pois se tratava da aula após o recreio. Quando conseguimos a atenção dos alunos, explicamos como seria a dinâmica daquelas duas aulas.

No primeiro momento, fazíamos a pergunta e as duplas, voluntariamente, iam até a lousa marcar na reta os pontos solicitados. Assim ocorreu até que todas as duplas fossem contempladas. O fato de fazer a pergunta primeiro e depois pedir que a dupla se manifestasse fez com que os alunos pensassem sobre a dificuldade de cada item e procurassem se oferecer num momento oportuno, quando ambos soubessem a resposta.

Isso não significa que só houve acertos ou que as diferentes competências não tenham sido verificadas para a maioria dos alunos. Sempre, ao final de cada resposta, era perguntado a toda a sala se as marcações estavam corretas ou não, e observou-se que muitos alunos foram capazes de corrigir autonomamente as respostas incorretas.

Os alunos perceberam rapidamente que entre as unidades havia dez quadradinhos e que, portanto, poderiam ser usados para marcar os décimos. Para os centésimos, dividiam de forma livre o quadradinho em outras dez partes.

Serão expostas aqui as situações de erros e as mais relevantes para este estudo.

Figura 63: Resposta ao Item 2 – Atividade 3

Os alunos que responderam ao item 2 posicionaram o 1,6 e o 1,06 no mesmo lugar (Figura 63). Nesse momento, representamos na lousa um quadro valor lugar e fizemos alguns questionamentos de forma a levar os alunos à reflexão sobre a diferença entre 6 décimos e 6 centésimos, primeiramente pela leitura dos números e, na sequência, pela decomposição deles de acordo com as ordens no quadro valor lugar. Esse quadro foi usado por outros alunos em outras situações (Figura 64).

Figura 64: Quadro valor lugar desenhado na lousa

Entre uma resposta e outra, foram sendo feitas intervenções – de forma dialogada entre pesquisadora e alunos – com correções, exemplos e comparações com o sistema monetário. Em alguns momentos, foi preciso intervir pedindo que os alunos contassem novamente os quadradinhos, pois estavam distraídos, ou ainda sugerir que posicionassem os números no quadro valor lugar.

A sequência escolhida foi facilitadora, pois uma vez que entenderam a igualdade entre 1,9 e 1,90 (item 4), por exemplo, não tiveram dificuldade em julgar que $1,35 < 1,4$, já que $1,4 = 1,40$. Essa forma de comparação foi explicitada por algumas duplas oralmente além das situações já previstas, quando questionamos, por exemplo, se poderiam encontrar um número entre 0,25 e 0,26.

Quase ao final dessa primeira fase – que teve duração aproximada de 40 minutos –, alguns alunos já estavam dispersos, principalmente os que tinham respondido aos primeiros questionamentos.

Finalizamos então essa fase e distribuímos as fichas para os alunos iniciarem a tarefa. *A posteriori*, percebemos que essa segunda etapa poderia ter sido feita em duplas ou trios, pois como se tratava de algo novo, demandou tempo de explicação

da tarefa pela professora e pela pesquisadora, que foram passando de mesa em mesa.

O entendimento da primeira questão proposta foi demorado para a maioria dos alunos, sendo que poucos chegaram à resposta final sem intervenção da professora ou da pesquisadora. Era esperado que a representação fosse associada a uma régua, e, assim como entre os centímetros ficam os milímetros, entre as centenas ficariam as dezenas, mas isso não foi compreendido inicialmente.

Tivemos 11 alunos que apresentaram a resposta final correta entre os 23 que realizaram a atividade. Muitos alunos preferiram escrever todos os números correspondentes aos traços das divisões, como ilustra a Figura 65.

Figura 65: Resposta à Questão 1 – Atividade 3

Na questão 2, a compreensão foi ainda mais difícil. Apesar de a proposta ser muito similar à da questão 1, o fato de ter que organizar as retas na malha quadriculada foi um grande obstáculo. Alguns alunos, ao invés de considerar os vértices dos quadradinhos como sendo os números inteiros, consideravam o quadradinho todo, como na Figura 66.

Figura 66: Resposta à Questão 2 – Atividade 3

Na Figura 67, na Figura 68 e na Figura 69, apresentamos algumas respostas mais próximas do esperado.

Figura 67: Resposta esperada à Questão 2 – Atividade 3

Figura 68: Resposta esperada à Questão 2 – Atividade 3

Figura 69: Resposta esperada à Questão 2 – Atividade 3

Estávamos próximo ao final da aula e muitos alunos ainda não tinham iniciado a questão 3. Então, a turma toda foi convidada a terminar a atividade no dia seguinte, num horário no contraturno. Nessa aula, 13 alunos compareceram e tiveram suas fichas devolvidas para terminar a tarefa.

Há um resultado a ser observado entre os alunos que não participaram desse segundo momento. No item *a* da questão 3, entre os dez alunos, dois deles não responderam, sete disseram que $\frac{2}{5} = 2,5$ e um afirmou que $\frac{2}{5} = 5,2$. Um desses alunos ainda cogitou a possibilidade de realizar a divisão $2:5$, como se pode ver na Figura 70, mas optou por marcar o ponto 2,5; o mesmo ocorreu com o item *c* para este aluno.

Figura 70: Resposta à Questão 3 – Atividade 3

No item *b*, três não responderam, quatro afirmaram que $\frac{7}{2} = 7,2$, um afirmou que $\frac{7}{2} = 2,5$, um que $\frac{7}{2} = 3,5$ e o último apresentou a resposta reproduzida na Figura 71. Pode-se perceber que este aluno não teve cuidado ao utilizar a régua, não obedecendo a uma escala, tendo isso ocorrido em muitos casos. Além disso, ficou difícil saber o critério utilizado por este aluno. Só se pode inferir que ele colocou no extremo da reta o maior número encontrado em cada fração (seja numerador ou denominador).

Figura 71: Resposta à Questão 3 – Atividade 3

Podemos concluir que alguns alunos ainda acham que, para transformar frações em números decimais, basta substituir a barra pela vírgula. Os mesmos quatro

alunos que afirmaram que $\frac{7}{2} = 7,2$ disseram que $\frac{3}{20} = 3,20$. Ponte e Quaresma (2011) observam o mesmo erro para alunos do 5º ano em Portugal e afirmam que tal fato é um indício de que as relações entre as representações fracionária e decimal não são compreendidas.

No item c, apenas o aluno da Figura 70 acertou o a representação decimal ao fazer a divisão 3:20. Nessas divisões em que o divisor é maior que o dividendo, muitos alunos costumam se confundir ou sequer tentam realizar a operação. Foi o caso de um aluno que respondeu que $3:20 = 1,5$. Houve mais divergências no item d. Tivemos como resposta: 4,6 – dois alunos; 46,1 – dois alunos; e 0,46 – dois alunos.

Por muito tempo, na vida escolar dos alunos, eles realizam divisões nas quais o divisor é menor que o dividendo; talvez por isso haja uma resistência em realizar divisões diferentes deste modelo. Isso pode se configurar como um obstáculo para a apreensão da concepção quociente, já que no estudo de frações é sempre dada ênfase às frações próprias.

Já na questão 4 não houve grandes problemas. Os alunos não tiveram dificuldade em encontrar adições e subtrações que resultassem no número pedido. Muitos, na multiplicação e divisão, utilizaram a estratégia de fazer a operação inversa antes de dar a resposta e utilizando multiplicações ou divisões por números baixos, como 1 ou 2. Um dos alunos chegou a perguntar: “Professora, pode ser vezes um?”.

4) Represente o número 3,72 através de uma:

a) adição

b) subtração

c) multiplicação

d) divisão

e) figura

Figura 72: Resposta à Questão 4 – Atividade 3

A resposta mais criativa ao item e foi a que se encontra reproduzida na Figura 72, na qual o aluno representou moedas que resultavam no montante R\$ 3,72. Muitos utilizaram o posicionamento do número na reta numérica para responder a esse item, muito provavelmente por influência das questões anteriores. Com isso, usaram o registro gráfico no lugar do figural, o que não era esperado.

5) Agora, reproduza as operações da atividade anterior utilizando frações.

$$a) \frac{112}{100} + \frac{260}{100} = \frac{372}{100} = 3,72$$

$$b) \frac{1085}{100} - \frac{713}{100} = \frac{372}{100}$$

$$c) \frac{372}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{372}{100}$$

$$d) \frac{744}{100} \div \frac{2}{1} = \frac{744}{100} \times \frac{1}{2} = \frac{372}{100}$$

Figura 73: Resposta à Questão 5 – Atividade 3

Dos dez alunos em questão, sete não responderam à questão 5 por falta de tempo. Na Figura 73, podemos ver uma das respostas corretas para a questão. Esse foi um resultado satisfatório, pois o aluno conseguiu efetuar a tarefa no tempo proposto fazendo a relação correta entre a questão 4 e a questão 5.

Agora, como permite o *Design*, falaremos um pouco sobre como foi a dinâmica da segunda intervenção, que ocorreu no contraturno. Para não cometer o erro de não conseguir atender todos os alunos, como ocorreu na primeira aula, fizemos as atividades socializando as ideias e dando um tempo para o registro.

Foi um momento muito importante, pois os alunos davam as respostas oralmente e discutiam entre eles a viabilidade de cada uma, utilizando exemplos e contraexemplos. A intervenção da pesquisadora foi feita de forma a extrapolar os exemplos da ficha e organizar os diferentes métodos de pensar dos alunos.

Iniciamos a partir da questão 3. A maioria dos alunos estava utilizando o algoritmo usual da divisão (divisão na chave) para encontrar os números decimais, entretanto foi chamada atenção para a expressão “frações decimais”, que se encontra no enunciado da questão. Depois de esclarecido do que se tratava, exploramos a transformação de frações decimais para números decimais, comparando com o método que estava sendo utilizado.

Foi dito a eles que não há um método certo ou errado, mas que eles poderiam escolher aquele com qual se sentem mais confortáveis para trabalhar. Depois de encontrados os números na representação decimal, não houve dificuldade para posicioná-los na reta numérica.

Ao final dessa questão, estavam todos muito envolvidos e passamos então a resolver a questão 4. Assim como ocorreu na primeira aula, não houve grande dificuldade para expressar o número por meio de operações. Esse momento foi breve e com poucos erros a serem corrigidos – por exemplo, o de um aluno que escreveu a multiplicação $3,72 \times 0,01$.

Devemos ressaltar que é muito diferente o trabalho com uma turma envolvida e interessada. Todos os alunos que compareceram à aula no contraturno estavam ali por escolha e com vontade de adquirir novos conhecimentos, estando abertos a ouvir e dialogar sobre as propostas.

Todos ficaram confortáveis para realizar a questão 5, indicando que bastava passar os números da questão anterior para a forma fracionária. Dissemos isso pois era o que tinha sido praticado até o momento na questão 3. O que os deixou “inquietos” era saber como uma sentença como a da Figura 73 se relaciona com o item *d* da questão 4.

A explicação foi dada lembrando aos alunos como é realizada a divisão de frações. Nesse momento, uma afirmação curiosa foi feita por um aluno: “Professora, essa é a melhor divisão que eu já vi na vida! Você só precisa fazer uma multiplicação”. Acreditamos que esse é um dos grandes benefícios desse tipo de atividade: fazê-los perceber que existem equivalências na Matemática que podem ser facilitadoras.

Finalizamos assim a terceira atividade, tendo a certeza de ter suscitado um senso investigativo nos alunos e despertado novos olhares para alguns conceitos que há tempo são trabalhados de forma engessada.

5.7 Atividade 4

Para esta próxima atividade, o foco é enfatizar a importância da unidade bem definida e a representação de frações na reta numérica. Parte deste trabalho foi feito na atividade anterior, que contemplou a conversão de números racionais na forma de frações decimais para representação decimal e o posicionamento desses números em representação decimal em retas numéricas.

Verificamos que os alunos, em geral, estão familiarizados com essas duas representações e suas conversões, não apresentando dificuldades. O novo desafio, nesta atividade, seria o posicionamento de frações ordinárias (não decimais) na reta numérica. Como localizar na reta numérica uma fração do tipo $\frac{1}{3}$, por exemplo, que tem sua representação decimal infinita? Essa será a problematização principal nesta atividade.

5.7.1 Objetivos e hipóteses

Figura 74: Questão 1 – Atividade 4

Para iniciar a atividade, foi realizada a mesma dinâmica de posicionar números na reta numérica, entretanto, desta vez, tratam-se de frações em sua representação numérica e figural. Toda essa discussão foi norteadada pelas atividades da folha impressa entregue aos alunos (Questão 1).

2) Usando o recurso que lhe foi dado, faça o que se pede:

a) Cubra $\frac{2}{5}$ do segmento f abaixo.

b) Cubra $\frac{2}{5}$ do segmento g abaixo:

c) Se as frações dos itens a e b são as mesmas, porque o tamanho do segmento coberto em cada segmento é diferente?

d) Cubra $\frac{1}{3}$ do segmento h abaixo:

e) Cubra $\frac{1}{2}$ do segmento i abaixo:

f) Se as frações dos itens d e e são diferentes, porque os tamanhos dos segmentos cobertos são iguais?

Figura 75: Questão 2 – Atividade 4

Ao final desta primeira etapa, propusemos o problema do posicionamento de uma fração ordinária (Questão 2), pois em todas as situações até o momento foram dadas retas subdivididas ou de fácil subdivisão. Pode ser que alguns alunos quisessem utilizar a “divisão na chave”, aproximações ou régua graduada, entretanto houve uma intervenção de modo que se pudesse negociar a respeito da imprecisão desses métodos e introduzir a ideia de que no desenho geométrico é usada a régua não graduada. Dessa forma, a estratégia escolhida foi a da introdução das ideias do desenho geométrico para a divisão de um segmento em partes iguais, como sendo um tipo de “método” para realizar tal construção.

A escolha do segmento inclinado e não graduado foi proposital, já que as representações de retas numéricas mais corriqueiras são graduadas e aparecem na posição horizontal ou vertical. Desejamos verificar se há algum estranhamento em relação a esses aspectos pelos alunos.

Depois disso, foi apresentado um recurso que auxilia na divisão de segmentos de reta em n partes iguais, sendo este o ponto chave para representar pontos que correspondem a frações ordinárias na reta numérica, considerando que os segmentos das unidades não estão graduados. Esse recurso é baseado na construção de um feixe de retas paralelas equidistantes, que irão determinar segmentos congruentes segundo o Teorema de Tales.

Figura 76: Feixe de retas paralelas determinando segmentos congruentes

Essa ferramenta foi inspirada em um material francês⁸ de apoio para professores que consiste numa folha de papel vegetal com retas paralelas e equidistantes entre si que pode ser sobreposto a qualquer segmento de reta, determinando segmentos congruentes, como na Figura 76, na qual foram determinados 10 segmentos congruentes no intervalo.

⁸ Disponível em: <<http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html>>.

Como no nível do 6º ano não se dispõe de todas as propriedades geométricas envolvidas na referida construção (em particular, o Teorema de Tales), a validação da construção será experimental, baseada em propriedades conhecidas pelos alunos e em aspectos intuitivos e visuais, enfatizando sobretudo que, nesse traçado, a equidistância entre as retas do feixe de paralelas é “transposta” para o segmento que está sendo dividido.

A ideia principal é mostrar que a régua e alguns outros materiais possuem uma limitação em relação à precisão do que se consegue representar. É preciso ampliar o repertório de recursos e métodos dos alunos, no caso, visando à divisão de segmentos em partes iguais, sem o uso da régua graduada.

O recurso será utilizado para todo o restante da atividade, questões 2 a 5. Vale ressaltar que, além de manipular o novo recurso na Questão 2, os alunos tiveram que analisar duas situações nas quais as unidades trabalhadas são diferentes e perceber as consequências em cada caso.

3) Na reta abaixo já estão marcados os pontos que correspondem aos números 0 , $\frac{1}{2}$, 1 e $\frac{3}{2}$. Agora, usando o recurso que lhe foi dado, marque pontos que correspondem a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{11}{8}$ e $\frac{5}{9}$.

Figura 77: Questão 3 – Atividade 4

A Questão 3 pede que algumas frações ordinárias sejam marcadas na reta numérica. O primeiro passo é entender que a unidade a ser tomada é a distância entre 0 e 1. Depois disso, as frações que podem chamar a atenção dos alunos seriam a $\frac{3}{6}$, que é igual a $\frac{1}{2}$, e $\frac{11}{8}$, que é maior que 1.

4) Na reta abaixo já estão marcados os pontos que correspondem aos números 0 , $\frac{1}{2}$, 1 e $\frac{3}{2}$. Agora, usando o recurso, escreva os números que correspondem aos pontos A, B, C, D e E.

Figura 78: Questão 4 – Atividade 4

Já a Questão 4 seria o outro sentido da conversão. Dado o ponto na reta, qual fração ele representa? Os alunos devem entender que, para encontrar as frações, é preciso que a origem, o ponto em questão e a unidade estejam sob uma reta (do recurso).

Para a finalização da tarefa, escolhemos propor uma questão na qual as frações são relacionadas a resultados de divisões. A diferença da Questão 5 para a Questão 6 é que uma trabalha uma fração própria, e a outra, uma fração imprópria. Esta proposta está intimamente ligada ao que foi desenvolvido até o momento, pois do item *a* para o item *b* a unidade é alterada.

5) Faça o que se pede na reta numérica a seguir:

a) Encontre o número $\frac{4}{7}$.

b) Divida 4 unidades em 7 partes iguais.

c) Observe os resultados dos dois itens e responda: Qual é o resultado da divisão 4:7?

6) Faça o que se pede na reta numérica a seguir:

a) Encontre o número $\frac{5}{3}$.

b) Divida 5 unidades em 3 partes iguais.

c) Observe os resultados dos dois itens e responda: Qual é o resultado da divisão 5:3?

Figura 79: Questões 5 e 6 – Atividade 4

5.7.2 Resultados

No início da aplicação da atividade, fizemos uma introdução para apresentar as tarefas explicando que se tratavam de seis questões sobre frações e sua representação na reta numérica. Alguns poucos alunos, aproximadamente cinco, associaram com o que tinha ocorrido na intervenção anterior. Depois dessa breve introdução, foram entregues as fichas aos alunos e a primeira questão foi lida coletivamente. A partir daí, foi pedido aos alunos que respondessem a cada item individualmente, anotando as respostas na ficha.

Apenas um aluno errou o item *a*. Ele marcou corretamente a fração $\frac{1}{2}$ e ligou a figura que correspondia à unidade ao 0. Julga-se que ele cometeu um equívoco por desatenção, já que em nenhum dos outros itens ele cometeu o mesmo erro.

No item *b*, tivemos 20 respostas corretas entre os 23 alunos presentes. Dois alunos não responderam ao item, o que nos pareceu estranho, já que não deixaram outro item em branco. O outro caso marcou apenas a fração $\frac{5}{9}$ e não ligou à unidade.

Nem sempre é possível verificar, no momento da aplicação da tarefa, o andamento das produções. Quando identificamos alguma resposta incompleta ou incorreta a tempo de questionar o aluno, fazemos isso, o que não foi o caso aqui exposto.

O item *c* gerou um desconforto em alguns alunos, pois, para eles, o hexágono estaria dividido em sextos e não havia fração com denominador 6 representada na reta. Doze alunos responderam corretamente ao item, entendendo que a fração $\frac{2}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{3}$. Os outros 11 alunos marcaram incorretamente a fração $\frac{2}{3}$, tendo sido confundidos pelo seu numerador. É importante observar que muitos entre esses 11 alunos tiveram ótimo desempenho na atividade sobre equivalência de frações, mas as ideias e reflexões apresentadas naquela ocasião não foram transferidas para essa questão. Com isso, pode-se concluir que o uso de frações equivalentes é algo de assimilação mais delicada, necessitando ser revisitado.

No item *d*, tivemos apenas um erro. O aluno em questão assinalou a fração $\frac{3}{4}$ quando deveria ter assinalado $\frac{1}{4}$. A hipótese é que ele tenha considerado a parte branca ao invés da parte cinza da figura, já que os itens *a*, *b* e *c* estavam corretos. Ainda se deve observar que ele não respondeu aos próximos dois itens e foi direto para a Questão 2. Além desse caso, houve mais um aluno que não respondeu ao item *d*. Os outros 21 alunos acertaram o item.

Há três interpretações possíveis para essa interrupção: o aluno estranhou o fato de os itens *d* e *e* possuírem três frações; o aluno perdeu o interesse em terminar a questão; ou o aluno se interessou mais pela proposta da Questão 2. No momento da atividade, por mais que a proposta seja individual, foi permitido que as crianças trocassem ideias sobre as tarefas e se ajudassem à medida que surgissem dúvidas.

A hipótese mais provável de ser confirmada é o interesse na Questão 2, dado que foi levantada uma discussão na sala sobre métodos de divisão, aproximações e

imprecisão na utilização de réguas graduadas que antecedeu o início da referida questão, como será exposto mais adiante.

O índice de acertos no item *f* foi de 18 entre os 23 alunos. Curiosamente, dois alunos ligaram as figuras das extremidades à fração $\frac{3}{16}$. Foram questionadas sobre como poderia isso ocorrer sendo que se tratavam de frações diferentes, e mesmo assim elas optaram por não alterar suas respostas.

Ao questionar os alunos sobre como poderia ser feito o item *a* da Questão 2, muitos souberam verbalizar que o segmento deveria ser dividido em cinco partes iguais e tomadas duas delas. Foi aí que teve início um momento de negociação com os alunos de que não era conveniente realizar essa operação perceptivamente, ou usando a régua graduada, pois ela tem escala decimal e dificulta divisões em outras quantidades de partes, tais como terços, sétimos, nonos, e principalmente quando o número de partes é maior. Por meio de intervenção dialogada, buscou-se levar os alunos à percepção da imprecisão causada pela régua e justificar sua não utilização no desenho geométrico. Sugeriu-se uma situação hipotética em que não havia réguas graduadas disponíveis.

Com isso, seria apresentado um procedimento geométrico, com utilização do recurso previsto – feixe de retas paralelas impressas em papel vegetal. As folhas foram distribuídas aos alunos e procedeu-se a uma demonstração na lousa – com a execução passo a passo da divisão de um segmento – visando ilustrar seu funcionamento e discutir sua utilidade. Em diversos momentos, fomos pedindo aos alunos que explicitassem o que estavam fazendo e percebendo, em uma tentativa de dar sentido àquela construção.

Muitos dos alunos ficaram interessados ao perceber que podiam realizar diversas divisões com o auxílio do material. Entretanto, levou um tempo para alguns perceberem que contar os espaços (número de partes) era diferente de contar as retas paralelas. Outros ainda não atentaram para o cuidado e precisão exigidos na tarefa, ignorando o fato de que as extremidades dos segmentos deveriam coincidir com uma das retas do material auxiliar. Esses alunos talvez não tenham sido suficientemente convencidos da necessidade do uso do recurso para o tipo de operação geométrica que estavam realizando.

Para o item *a*, tivemos 17 acertos, dois alunos que dividiram os segmentos em quartos e quatro que não conseguiram usufruir da precisão fornecida pelo recurso.

Esse cenário repetiu-se no item *b*. Isso refletiu diretamente nas respostas do item *c*, que não foi respondido apenas por 3 alunos. Para alguns que pediram ajuda em relação ao questionamento do item *c*, foi dada a dica de que a resposta estava relacionada ao tamanho dos segmentos, buscando suscitar a reflexão desses alunos. Apesar disso, dois alunos, em específico, se apresentaram inseguros em deixar seus registros no papel, fazendo uso da borracha e pedindo ajuda da professora para confirmar suas respostas a todo tempo.

Como era esperado nesse tipo de questão, os alunos encontraram dificuldades em expressar suas ideias por escrito. Entretanto, as respostas foram muito positivas, tendo três alunos respondido “porque as unidades são diferentes”. Outros 8 alunos conseguiram perceber que o resultado obtido estava relacionado à diferença de tamanho entre os segmentos *f* e *g*. Dois alunos justificaram a diferença dizendo que as frações unitárias obtidas no segmento *g* eram menores do que as do segmento *f*, o que pode ser verificado na Figura 80.

Nos itens *d* e *e*, 18 alunos responderam corretamente. Entre os alunos que erraram, três foram por falta de cuidado ao posicionar o material auxiliar e dois, por considerar as retas ao invés dos espaços entre elas. Nenhum desses 5 alunos conseguiu desenvolver satisfatoriamente sua justificativa. No total, 6 alunos não responderam ao item *f*, dando um indício de que esta conclusão foi mais complexa do que a exigida no item *c*.

Algumas das respostas obtidas foram: “porque as unidades são iguais”; “porque foi retirada a mesma quantidade”; “porque elas são equivalentes”; “porque os dois têm que cobrir só uma”; “as frações são diferentes e o tamanho não é igual”. Diante dessas respostas, percebemos que muitos alunos não concordaram com o fato de os segmentos cobertos serem iguais, e como não dispunham de réguas graduadas para fazer uma verificação, é provável que tenham se pautado em uma apreensão perceptiva das figuras.

A hipótese inicial era de que eles deveriam respeitar o que estava sendo dito no enunciado da questão, que afirma que o tamanho dos segmentos cobertos é igual. Dois alunos mantiveram corretamente o argumento do item *c* de que as unidades consideradas são diferentes. Pode-se perceber que esses dois acompanharam a atividade de forma integral.

2) Usando o recurso que lhe foi dado, faça o que se pede:

a) Cubra $\frac{2}{5}$ do segmento f abaixo.

b) Cubra $\frac{2}{5}$ do segmento g abaixo:

c) Se as frações dos itens a e b são as mesmas, porque o tamanho do segmento coberto em cada segmento é diferente?

Porque o tamanho dos retas não é diferente a reta f é maior que a reta g, então na reta f o segmento g tem que ficar mais tempo, fazendo a distância ficar mais

Figura 80: Resposta à Questão 2 – Atividade 4

A Questão 3 não foi respondida por 6 alunos e teve apenas 4 acertos. Os demais alunos apresentaram respostas de difícil compreensão. Pode-se destacar que, entre estes, apenas dois atribuíram a fração $\frac{3}{6}$ ao ponto 0,5 e oito deles atribuíram a fração $\frac{11}{8}$ a um ponto maior do que um.

Uma parte dos alunos iniciou a Questão 3 considerando toda a reta, marcando o ponto $\frac{2}{3}$, portanto, além do ponto 1. Como as questões anteriores estavam tratando de segmentos, muitos alunos presumiram que as frações deveriam ser marcadas em relação a toda a reta. Uma intervenção foi realizada de forma a destacar o que era suposto ser considerado nesse caso.

Nenhum aluno realizou a divisão numerador por denominador como foi feito na Atividade 3. A intervenção foi feita a fim de lembrar que essas frações podem ser transformadas para representação decimal e que a unidade a ser considerada seria o trecho da reta de 0 a 1, portanto os terços, sextos, sétimos, oitavos e nonos deveriam ser encontrados nesse intervalo.

Quando elaboramos a atividade, foi previsto que essa situação poderia acontecer. Portanto, já nos preparamos para essa intervenção, elaborando exemplos

e questionamentos que pudessem levar os alunos à reflexão. O fato de o ponto $\frac{2}{3}$ ficar além do ponto 1 não foi pensado durante a elaboração da tarefa, entretanto, foi de grande serventia, visto que pudemos questionar os estudantes da seguinte forma: “A fração $\frac{2}{3}$ é maior ou menor que 1? Agora, julgue se ela está posicionada corretamente na reta.”.

A escolha de quando e como intervir é bastante complexa, mas fez parte de nosso experimento. Em alguns momentos, a intervenção é necessária para que haja progresso e um melhor desenvolvimento das atividades. Nesse caso, se a socialização dessas ideias não tivesse sido feita, muitos alunos ficariam estagnados nas questões 3 e 4, sendo isso negativo para o estudo, já que o nosso objetivo era que todos chegassem à reflexão de fechamento presente nas questões 5 e 6.

É claro que essas interrupções, quando feitas em demasia, atrapalham o estudo, pois podem tirar o protagonismo do estudante e seus efeitos são difíceis de serem avaliados. Julgamos que a “ajuda” aos alunos nessa tarefa, em específico, foi necessária e produtiva, pois envolvia orientações a respeito do uso correto do recurso apresentado.

As respostas mais próximas do esperado para a questão 4 foram dos 4 alunos que acertaram totalmente a questão 3. Eles conseguiram encontrar boas aproximações para os pontos. O aluno cuja resposta está reproduzida na Figura 81 ainda comentou com a pesquisadora que havia percebido que o ponto E era do mesmo tipo que a fração $\frac{11}{8}$ – referindo-se ao fato de ser uma fração imprópria.

Figura 81: Resposta à Questão 4 – Atividade 4

Um resultado curioso encontrado na Questão 4 foi o da Figura 82. Esse aluno atribuiu números decimais aos pontos fazendo subdivisões – “a olho”, perceptivamente – sem o uso do recurso, obtendo significativa imprecisão em suas

respostas. O critério por ele utilizado tem grande relação com o que foi feito na atividade de posicionamento de números decimais na reta desenhada na lousa.

Na lógica utilizada por ele, o ponto B, que é anterior ao ponto 0,5, seria então o 0,4, e o ponto A, anterior ao ponto B, seria o 0,3. O ponto C está próximo do ponto 1, mas não o suficiente para ser o ponto 0,9; além do mais, ainda existe o ponto D entre o C e o 1. E assim ele determinou que $C = 0,8$, $D = 0,85$ e $E = 1,35$.

Figura 82: Resposta à Questão 4 – Atividade 4

A resposta da Figura 83 seguiu a mesma lógica do aluno anterior, porém, ao invés de escrever os números na representação decimal, utilizou-se a representação fracionária. O ponto B seria o $\frac{4}{10}$, já que está antes do 0,5, e o ponto A seria $\frac{3}{10}$, já que está antes do ponto B. Os pontos C e D, que estão após o 0,5, seriam $\frac{6}{10}$ e $\frac{7}{10}$. E, apesar de o ponto E ser maior que 1, o estudante respondeu que ele seria $\frac{9}{10}$.

Figura 83: Resposta à Questão 4 – Atividade 4

Para as questões 5 e 6, a unidade mudaria novamente, ficando ainda menor. Apesar disso, os alunos estavam atentos e não tiveram problemas para resolver o item a. Já no item b, houve dois obstáculos: a divisão de quatro unidades em sete partes não estava explícita, pois para isso a distância entre as retas paralelas deveria ser maior, então foi sugerido aos alunos que pensassem em uma divisão “equivalente” e de forma dialogada, foi introduzida a ideia da divisão em quatorze partes; quando

os alunos conseguiram encontrar a divisão em quatorze partes, estavam marcando o ponto $\frac{8}{14}$, que é equivalente a $\frac{4}{7}$, entretanto não executava o pedido de dividir quatro unidades em sete partes.

A pergunta de fechamento da pesquisa, que seria o item c, foi respondida corretamente por 6 alunos. Esse resultado não foi obtido de forma autônoma pelos alunos, pois próximo ao final do encontro, a pesquisadora fez uma intervenção explicando o objetivo dessas questões. Pode-se observar na Figura 84 que um dos alunos pensou em utilizar a divisão na chave para resolver a divisão de 5 por 3.

Figura 84: Resposta à Questão 6 – Atividade 4

Foram feitas duas grades diferentes de retas paralelas, uma com espaçamento 1 cm e outra com espaçamento 1,5 cm entre elas. Poucos alunos tiveram a curiosidade de saber se qualquer feixe de retas poderia ser usado para resolver as atividades. Apenas dois alunos trocaram de grade durante a execução da tarefa.

Diversos momentos durante essa atividade explicitaram dificuldades relacionadas a certa resistência dos alunos em apreender as frações como números. Um dos alunos, no momento da explicação final, verbalizou para a sala que o objetivo das duas últimas questões era mostrar que $\frac{4}{7}$ corresponde ao mesmo ponto que o encontrado na divisão de 4 por 7. Essa colocação foi a mesma revelação que tiveram os seis alunos que acertaram o item c.

Ainda antes de finalizar a atividade, a pesquisadora perguntou aos alunos se a experiência da aula tinha sido interessante para eles, e a grande maioria respondeu que havia sido confusa. Percebemos que a notação $4:7 = \frac{4}{7}$, em específico, gerou grande incômodo entre os estudantes, que insistem que $4:7$ é 0,571428...

Quando a pesquisadora questionou se $\frac{4}{7}$ era um número, um dos alunos respondeu que não, que “são dois números”. Ela aproveitou a oportunidade e questionou em seguida: “o numero 35 é um número ou dois números?”. Sem obter a resposta, disse que se trata de um número com dois algarismos, assim como acontece no número $\frac{4}{7}$.

Um dos estudantes pediu que a explicação fosse feita novamente, e isso foi atendido inserindo-se mais um elemento na discussão, referente ao traço que compõe a fração. Buscou-se discutir com os alunos que esses elementos que compõem a representnação do número e não são algarismos têm um significado, uma função, e não é só a de separar o todo da parte – que é o que ocorre na concepção parte-todo.

Como resultado principal dessa atividade, podemos destacar a instalação de um contexto favorável ao aparecimento de ideias ou dúvidas dos alunos, normalmente implícitas no ensino usual. O tratamento adequado de tais questões pode representar oportunidade de fazer evoluir a compreensão dos alunos acerca dos conceitos em jogo. A análise realizada aponta alguns elementos que merecem maior atenção para esse tratamento e que devem compor um trabalho mais sistemático para auxiliar os alunos nessa passagem conceitual complexa da ideia de fração no modelo parte-todo e representante do resultado da divisão de dois números.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos este trabalho delimitando primeiramente a série (ano) da Educação Básica com que gostaríamos de trabalhar em um projeto de Mestrado. Motivada pela experiência da pesquisadora, a escolha do 6º ano vem carregada de compromisso com o desenvolver da Matemática nos anos seguintes e refletir sobre a possibilidade de abordagens mais significativas.

A escolha do tema frações considerou, além da grande importância do conteúdo em toda a Matemática escolar, a experiência negativa que muitas pessoas têm do Ensino Fundamental a partir do ensino desses números. Dizemos números por ser exatamente o que este estudo buscou perseguir, a apreensão de frações como números racionais. Os questionamentos iniciais acerca do ensino e da aprendizagem desse conteúdo eram: “Por que algumas pessoas demonstram receio em trabalhar com frações? Por que as frações parecem tão distantes dos números decimais e porcentagens? Por que a concepção de fração, para muitos, remete simplesmente a uma figura dividida em partes iguais?”.

A partir daí, buscamos uma aproximação maior com o tema e passamos a considerar alguns trabalhos de pesquisa que trataram questões relacionadas a essa problemática. Estudos citados revelam que o ensino dos números racionais tem, em geral, muitos problemas a serem resolvidos. Entre eles, podemos citar o uso excessivo de regras, o apelo a contextualizações forçadas e a priorização das representações decimais e percentuais.

Depois de analisar as questões suscitadas, nos mais diversos textos, levantou-se a hipótese de que a ênfase no modelo parte-todo inibe ou até impede a compreensão das frações como números e que dando foco a outros aspectos haveria uma possibilidade de mudar esse cenário.

Uma questão norteadora foi então assim formulada: Em que medida um trabalho com diferentes representações, enfatizando as frações decimais e a ideia de quociente, favorece o entendimento dos números fracionários e, por consequência, auxilia na conceitualização dos números racionais junto a alunos do Ensino Fundamental?

Para tanto, decidimos nos apoiar na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que nos auxiliaria a evidenciar a fração como número, o qual pode ser quantificado, usado em operações, comparado com outros números

e representado (posicionado) numa reta numérica, como ocorre com os elementos de outros conjuntos numéricos. Foi preciso determinar então uma estratégia que coubesse no tempo disponível e que contemplasse o que consideramos mais importante para a apreensão deste objeto matemático tão complexo que é uma fração.

Apesar de os estudos apontarem as principais dificuldades dos alunos e sugerirem algumas abordagens, optamos por realizar um questionário inicial para estabelecer nosso plano de trabalho. O *design experiment* foi a metodologia que consideramos fornecer bases adequadas para a pesquisa, visto que seu caráter intervencionista nos permitiria analisar as complexas interações que acontecem no ambiente, bem como ajustar nossos propósitos ao tempo disponível para realização da pesquisa.

Os estudos da revisão bibliográfica e o questionário inicial nos auxiliaram na elaboração das hipóteses das quatro atividades subsequentes. Buscamos, em todas elas, aproximar a prática da pesquisa com a prática do ensino, encorajando os alunos a reverem suas estratégias e modificarem seus pensamentos usuais que, em geral, são os de associar as frações quase exclusivamente à sua relação parte-todo.

A equivalência entre frações, a recomposição do inteiro em situações discretas e contínuas, a importância de a unidade estar bem definida e a representação de frações em retas numéricas foram os elementos inicialmente escolhidos para nortear as atividades. Como a metodologia do *design* tem caráter cíclico e permite adaptações de acordo com os resultados obtidos em cada etapa ou atividade, foi incluída uma atividade contemplando transformações entre números decimais e frações decimais.

Na primeira tarefa, sobre equivalência de frações, ficou evidente que encontrar equivalências não é uma estratégia usual para resolução de problemas entre os alunos. Eles em geral restringem a utilização de equivalências à resposta final das questões. Isso se deve provavelmente a uma cultura de sala de aula, na qual se espera a resposta em sua forma mais simplificada.

Sabemos que esse não é o principal objetivo pelo qual se ensina a equivalência entre frações, por isso, foi crucial que as atividades tivessem o caráter de investigação e, ao mesmo tempo, de ensino. Esse conceito seria, e foi, de extrema importância para o desenvolvimento das tarefas posteriores.

Percebemos que propor o uso de materiais concretos nessa tarefa teve a função de despertar a curiosidade e o interesse dos alunos. Inferimos que levar

diferentes recursos para a sala de aula, sem direcionar o uso ou impor a utilização deles, não é habitual para os alunos, por isso, logo abandonaram as tesouras e colas. Esse fato provocou uma quebra de expectativa, mas também nos alertou sobre a ausência desses recursos na rotina escolar.

Para a segunda tarefa, decidimos fazer a intervenção em forma de competição entre dois grupos. É surpreendente como essa modalidade de trabalho é convidativa aos alunos, entretanto não é algo difícil de supor, visto que o ingresso na segunda fase do Ensino Fundamental vem com grandes transformações, entre elas a diminuição de atividades educativas de caráter mais lúdico.

A estratégia de utilizar a competição vem como forma de motivar os alunos a se envolverem na tarefa, mas não deixa de lado a preocupação com a investigação. Perdemos a vantagem de obter registros escritos em fichas de atividades, mas ganhamos em interação e diálogo.

O fato de as afirmações dessa atividade terem sido sorteadas foi de grande relevância para a decisão de não fazer o mesmo na atividade seguinte. A cada tarefa, ganhamos experiência e pudemos repensar a construção das propostas seguintes. Isso, porém, não nos isentou de erros.

Fazer uma relação entre as operações com decimais e as operações com frações foi algo que não estava inicialmente planejado e foi incorporado à terceira atividade. Sentimos a necessidade de apresentar aos alunos essas opções, visto que o custo cognitivo de algumas operações com decimais pode ser menor quando realizadas por meio de frações decimais – seria o caso da multiplicação e divisão entre decimais. Nos anos seguintes, essas operações poderão ser facilitadas por meio do entendimento da notação científica e propriedades de potências, mas por que não apresentar essas opções por meio das frações enquanto os alunos estão ainda no primeiro ano da segunda fase do Ensino Fundamental?

A atividade final buscou consolidar a noção de fração como número. Esse objetivo vinha sendo perseguido durante todo o trabalho, e percebemos que o posicionamento de frações em retas numéricas seria mesmo uma boa ideia, visto que na tarefa anterior esse posicionamento foi feito com os números decimais.

O grande desafio seria o posicionamento de frações não decimais, que em sua representação decimal resultam em dízimas. Para os estudantes, não há grandes problemas em efetuar a divisão, realizar um arredondamento e fazer uma aproximação na marcação utilizando uma régua graduada. Entretanto, levantamos

uma discussão sobre os inconvenientes que esse método proporciona. O simples fato de trabalhar com unidades diferentes já é um grande indício de que esse recurso é no mínimo trabalhoso – encontrar $\frac{1}{7}$ de 6 cm é diferente de encontrar $\frac{1}{7}$ de 12 cm, por exemplo.

Depois de causar inquietação com a problemática exposta, apresentamos aos alunos um recurso inédito que os auxiliaria a fazer as divisões necessárias. Alguns gostaram muito da proposta, sendo isso gratificante para nós. O mais importante é que o material é de fácil utilização, capaz de produzir divisões de segmentos sem recorrer a medições na régua graduada. Além disso, é de fácil construção, podendo até ser substituído por qualquer folha pautada. Ainda assim, avaliamos que sua introdução carece de uma problematização mais efetiva do que a realizada, de forma que sua função seja melhor compreendida pelos alunos. Talvez a construção de uma narrativa visando explicitar um contexto mais significativo para sua introdução, possa contribuir nesse sentido.

Essa atividade final resgatou muitos dos conceitos trabalhados nas atividades anteriores: as frações equivalentes, a identificação do inteiro, a importância da unidade bem definida e a representação de frações em retas numéricas. Por isso, entendemos que o trabalho obedeceu a uma sequência produtiva de atividades.

Comparando com o início das tarefas, percebeu-se que houve um amadurecimento dos alunos em relação às ideias apresentadas, sendo isso reflexo do trabalho com diferentes registros e recursos. A consolidação da fração como número não ocorreu em todos os casos; houve certa resistência de alguns alunos quando se discutiu que uma fração expressa sempre o resultado de uma divisão.

Esse estudo nos deixa grandes reflexões. Percebe-se o valor que a formação tem quando atrelada à pesquisa, mas ao mesmo tempo nos interpela sobre como fazê-la com qualidade em meio às demandas da escola. O planejamento e a execução das atividades aqui expostas demandam tempo e dedicação, por isso foi preciso estabelecer prioridades.

Neste momento, conseguimos entender melhor a complexidade dos processos que envolvem uma passagem conceitual importante que tentamos abordar. E mesmo que o estudo não tenha atingido a abrangência inicialmente prevista, acreditamos dispor de diversos elementos que permitem ampliar uma abordagem de ensino visando a aprendizagem com compreensão.

O caminho percorrido para o desenvolvimento deste projeto representou apenas um primeiro passo em um processo de qualificação profissional que objetivou, essencialmente, articular a reflexão sobre conteúdos específicos visitados na formação inicial e práticas de sala de aula incluindo estratégias e recursos didáticos diversificados.

REFERÊNCIAS

BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do Ensino Fundamental**. 2006. 176 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

BEHR, M. et al. **Rational Number Project**. 2001. Disponível em: <<http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/>>. Acesso em: maio 2016.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational-Number Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-128.

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. **Bolema**, Rio Claro – SP, ano 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

_____. **Educação e Linguagem Matemática IV**: frações e números fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, T. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 68-93, jan. 2007. ISSN 1981-1322.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. **Educational Researcher**, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DRUCK, I. F. **Frações**: uma análise de dificuldades conceituais. São Paulo: IME/USP, 1994.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem, 2011.

_____. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Tradução de T. M. Méricles. **REVEMAT**, Florianópolis: UFSC, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a.

_____. Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. Tradução de T. M. Méricles. **REVEMAT**, Florianópolis: UFSC, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012b.

GARCIA, M. V. S. Dificuldades específicas em el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. In: INSTITUTO Superior de Formación del Profesorado. **Dificultades del aprendizaje de las matemáticas**. Espanha: Ministério de Education, Cultura y Desporte, 2003. p. 10-27.

JAHN, A. P. et al. Lógica das equivalências. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED - ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 22, 1999, Caxambu - MG.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: Um Estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. 435 f. Tese (Doutorado em Educação) – PUC, São Paulo, 2006.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2. ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 2005.

NASCIMENTO, J. do. Perspectivas para aprendizagem e ensino dos números racionais. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, Marília - SP, v. 8, n. 2, p. 196-208, 2008.

NIVEN, I. N. **Números**: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

PONTE, J. P., QUARESMA, M. Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. In: **Quadrante**, v. XX, nº, p. 55 – 81, 2011.

PROJETO Buriiti: Matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

RANGEL, L. G. **Teoria de Sistemas**: Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo – estabelecendo relações em um estudo colaborativo. 2015. 268 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

RIPOLL, C. C. et al. **Frações no Ensino Fundamental**. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016. v. 1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. 1ª ed. atual. São Paulo: SE, 2011.

SILVA, A. F. G.; CANOVA, R. F.; CAMPOS, T. M. M. A fração em Livros Didáticos de Matemática para os Anos Iniciais. **Revista Acta Scientiae**, v. 18, p.41 – 54, 2016.

SILVA, M. J. F. da. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2005.

WALLE, J. A. W. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.