**Máximos e mínimos na Educação Básica:
abordagens elementares sem derivadas.**

Wilian Oliveira Rocha

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO NO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Elvia Mureb Sallum

Coorientadora: Iole de Freitas Druck

SÃO PAULO
agosto de 2019

**Máximos e mínimos na Educação Básica:
abordagens elementares sem derivadas.**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante defesa pública ocorrida em 28 de maio de 2019.

*“Não se deve ir [apenas] atrás de objetivos fáceis,
é preciso buscar o que se pode ser alcançado
por meio dos maiores esforços”*

(Albert Einstein)

*Aos meus queridos pais **Arnaldo e Marlene**
que com todo amor, humildade e sabedoria possível
me tornaram o homem que sou.*

Agradecimentos

Início meus agradecimentos a Deus, pois acredito que diante das dificuldades, mudanças e impossibilidades na vida, ele é capaz de nos prover força através de inumeráveis modos, como a base de uma família, o ombro de um amigo, um pequeno gesto de solidariedade ou até mesmo o nascimento de uma filha para nos tornar mais fortes e capazes de cumprir qualquer difícil e prazerosa tarefa, como foi realizar este trabalho numa fase bastante desafiadora de minha vida.

Agradeço imensamente também:

À minha mãe Marlene e ao meu pai Arnaldo que sempre me incentivaram a estudar, tornaram-me no cidadão que hoje sou e foram essenciais para a realização do meu sonho de ser professor. E a minha querida irmã “Guim”, que compartilhou comigo e com a nossa família momentos felizes (em grande parte do tempo) e difíceis (na outra pequena parte) diante de um simples e belo trecho de minha vida. Amo vocês.

À minha esposa Maiara que ao lado de nossos filhos me apoiou todos os dias como mulher, mãe e amiga, compreendendo os momentos de desafio para tornar possível a realização deste trabalho. Sem dúvidas, a vida nos uniu para andarmos pela mesma estrada intensa, inesperada e feliz. Amo você e os nossos filhos: Gu e Livia.

Ao meu amigo Pavan, que além de me ajudar muito com diversas revisões e discussões sobre as ideias presentes nesta dissertação, entre um e outro café, foi capaz de com suas sábias palavras e “amigos” ouvidos me mostrar na prática o significado das palavras amizade e empatia.

Aos inesquecíveis professores da minha graduação no IFSP (Henrique, César, Rogério, Graziela e Iracema, dentre outros) e aos professores deste programa de Mestrado (Ana Paula, Brolezzi, Barbara, Claudia e Magalhães) por terem enriquecido meus conhecimentos acadêmicos e principalmente aprimorado minha concepção sobre o ensino de matemática. Agradeço também aos professores Severino Toscano (IME-USP) e Victor Giraldo (UFRJ) por terem aceitado o convite em participar da minha banca de defesa e qualificação, seus apontamentos, análises e sugestões foram essenciais para melhorias e completude deste trabalho.

E por fim, às minhas maravilhosas e inesquecíveis professoras Elvia Mureb Sallum e Iole de Freitas Druck. Suas valiosas aulas e orientações foram extremamente

relevantes para todo conteúdo deste trabalho. Agradeço por toda paciência, força de vontade, palavras amigas e principalmente por acreditarem no meu potencial e não me deixarem desacreditar nele. Foi muito prazeroso e engrandecedor cada minuto de conversa e de trabalho com cada uma de vocês.

Resumo

Rocha, W. O. **Máximos e mínimos na Educação Básica: abordagens elementares sem derivadas**. 2019. 164 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Nosso objetivo com este trabalho é contribuir para o aperfeiçoamento da ação educativa do professor de matemática na Educação Básica, tanto em formação inicial quanto em formação continuada. Apresentamos algumas abordagens elementares para estudo de Máximos e Mínimos que utilizam conteúdos próprios dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio embasados principalmente na obra *Maxima and Minima without Calculus* (NIVEN, 1981). Discutimos os conceitos de *Conhecimento Especializado* e de *Horizontes de Conteúdo Matemático* como justificativa para a relevância do uso deste material, que foram cunhados por pesquisadores da Universidade de Michigan, liderados por Deborah Ball no artigo – *Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?* (2008).

Trazemos uma análise crítica da abordagem utilizada para o tema em alguns livros didáticos de Ensino Médio. Discorremos sobre os quatro conceitos de Médias – aritmética, geométrica, harmônica e quadrática – partindo de problemas que originaram tais conceitos. Mostramos ainda como podem ser naturalmente associados a medidas de segmentos definidos em quadrados, trapézios e semicírculos que evidenciam claramente certas desigualdades entre elas.¹ A seguir, como aplicação de produtos notáveis e trinômios do segundo grau, apresentamos problemas algébricos e geométricos envolvendo máximos e mínimos e discutimos suas soluções. Estabelecemos e provamos algebricamente as desigualdades entre as quatro médias (de até quatro números positivos), que são aplicadas para a determinação de pontos de máximo ou mínimo de funções variadas em problemas contextualizados. Por fim generalizamos e provamos as desigualdades entre as médias para n números positivos e desenvolvemos várias outras aplicações.

Palavras-chave: Máximos e Mínimos, Médias, Desigualdades entre médias, Conhecimentos Matemáticos Especializado e de Horizontes de Conteúdo.

¹ As figuras correspondentes a construções geométricas apresentadas no trabalho foram editadas com o software livre Geogebra.

Abstract

Rocha, W. O. **Maxima and minima in Basic Education: elementary approaches without derivatives**. 2019. 164 f. Dissertation (Master degree) - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2019.

This work intends to be a contribution to the improvement of the educational action of mathematics school teachers in both initial or continuous formation. We present some elementary approaches for the study of Maxima and Minima that use final years of Elementary and High School contents' only, mainly based on Ivan Niven's book *Maxima and Minima without Calculus* (NIVEN, 1981). We discuss the concepts of *Specialized and Horizons Knowledge of Mathematical Content* as a justification for the relevance of the use of this material, which were been introduced by the University of Michigan's researchers, led by Deborah Ball, in the article - *Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?* (2008).

We bring a critical analysis of the approach employed for the topic (maxima and minima) in some high school textbooks. We discuss the four concepts of averages - arithmetic, geometric, harmonic and quadratic - starting from problems that originated them. We also show how they can be naturally associated with measures of segments defined in squares, trapezoids and semicircles so that we can clearly visualise certain inequalities between them.² Next, as an application of notable products and of second degree trinomials, we present algebraic and geometric problems of maxima or minima and discuss their solutions. We establish and prove algebraically the inequalities between the four averages (up to four positive numbers), which are applied to determine maximum or minimum points of varied functions in contextualized problems. Finally we generalize and prove the averages' inequalities for n positive numbers and we develop several applications.

Keywords: Maxima and Minima, Averages, Averages' Inequalities, Specialized and Horizons Knowledge of Mathematical Content.

² The figures corresponding to geometric constructs presented in the work were edited with the free software Geogebra.

Sumário

Lista de Figuras.....	14
Introdução	17
Capítulo 1 – Pertinência do tema desta dissertação: Justificativa e embasamento teórico	23
1.1 Abordagens de máximos e mínimos em livros didáticos de Ensino Médio	24
1.2 Sobre articulações matemáticas em documentos oficiais do MEC	31
1.3 Conhecimentos matemáticos especializados e de horizontes para o ensino.....	33
1.4 Abordagens significativas possíveis para as questões da área máxima de um retângulo com perímetro fixo e da relação entre função quadrática com a curva parábola	44
Capítulo 2 – Médias	55
2.1 Média aritmética	56
2.2 Média geométrica.....	61
2.3 Média harmônica.....	65
2.4 Média quadrática.....	71
2.5 Médias em quadrados, trapézios e semicírculos.....	75
Capítulo 3 – Extremos de duas funções de 1 ou 2 variáveis e produtos notáveis	85
3.1 Aplicações algébricas de produtos notáveis.....	85
3.2 Aplicações geométricas de produtos notáveis e trinômios de grau 2	95
3.3 Desigualdades entre as médias para 2 números reais positivos.....	108
Capítulo 4 – Desigualdades entre médias para 3 e 4 números positivos	121
Capítulo 5 – Desigualdades entre médias para n números positivos	135
Considerações finais	153
Referências bibliográficas	157

Lista de figuras

Figura 1 – Domínios do conhecimento matemático para o ensino	37
Figura 2 – Soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	41
Figura 3 – Soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{4^n}, \dots\right)$	42
Figura 4 – Área máxima para um retângulo de comprimento fixo	47
Figura 5 – Parábola de foco $F=(4,6)$ e equação da reta diretriz $y=2$	49
Figura 6 – Foco e diretriz da parábola como gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$	51
Figura 7 – Quadrado inscrito num triângulo retângulo e a média geométrica	63
Figura 8 - Relação da M_H com as medidas dos segmentos AC, FE e BD.	67
Figura 9 – A desigualdade $M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$ por meio de quadrados	75
Figura 10 – A desigualdade $M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$ por meio de quadrado e triângulos. ..	76
Figura 11 – As médias no trapézio	77
Figura 12 – Construção da média geométrica o trapézio	78
Figura 13 – Construção da média quadrática no trapézio	80
Figura 14 – Construção da $M_G(a,b) = h$	82
Figura 15 – Construção da $M_H(a,b) = FG = x$	82
Figura 16 – Construção da $M_Q(a,b) = HD = q$	83
Figura 17 – $M_H(a,b) = M_G(a,b) = M_A(a,b) = M_Q(a,b)$ no semicírculo	84
Figura 18 – A dinâmica de $M_H(a,b) \leq M_G(a,b) \leq M_A(a,b) \leq M_Q(a,b)$ no semicírculo.....	84
Figura 19 – Máximo de $f(x,y) = xy$ restrita à reta $x + y = c > 0$..	89
Figura 20 – Máximo de $f(x,y) = xy$ restrita à reta $x + y = c = 0$.	89

Figura 21 – Máximo de $f(x, y) = xy$ restrita à reta $x + y = c < 0$.	89
Figura 22 – Mínimo de $f(x, y) = x + y$ restrita à hipérbole $xy = c > 0$.	90
Figura 23 – Extremos de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.	91
Figura 24 – Gráfico de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ em $]0, \infty[$ para $k > 0$.	92
Figura 25 – Gráfico de $f(x) = x + \frac{k}{x}$ para $x \in]-\infty, 0[$.	92
Figura 26 – Gráfico de $f(x) = x - \frac{k}{x}$, $k > 0$.	93
Figura 27 – Distância mínima de $(c, 0)$ à curva $y^2 = 4x$ (caso $c = 2$) .	94
Figura 28 – Distância mínima de $(c, 0)$ à curva $y^2 = 4x$ (caso $c > 2$) .	94
Figura 29 – Distância mínima de $(c, 0)$ à curva $y^2 = 4x$ (caso $c < 2$) .	95
Figura 30 – Problema do cercado sobre a margem do rio .	95
Figura 31 – Retângulo $ABCD$ inscrito em uma circunferência λ .	96
Figura 32 – Triângulo ABC com segmento $DE = m$.	97
Figura 33 – Ângulo QOR com segmento HK passando por P .	98
Figura 34 – Paralelogramo $MPNO$ inscrito no triângulo HOK .	98
Figura 35 – Circunferência λ tangente ao $\angle QOR$.	99
Figura 36 – Dedução geométrica para o mínimo de $PH \cdot PK$.	100
Figura 37 – Problema do observador e a estátua .	103
Figura 38 – Altura do observador menor que a do pedestal ($m < p$) .	103
Figura 39 – Altura do observador igual a do pedestal ($m = p$) .	104
Figura 40 – Altura do observador maior que a do pedestal ($m > p$) .	105
Figura 41 – Altura do observador igual a do pedestal com a estátua ($m = p + h$) .	105

Figura 42 – Altura do observador maior que a do pedestal com a estátua ($m > p + h$)	106
Figura 43 – Solução de Regiomontanus – passo 1	107
Figura 44 – Solução de Regiomontanus – passo 2.....	107
Figura 45 – Problema do cercado sobre a margem do rio	110
Figura 46 – Solução por reflexão sobre a margem do rio	111
Figura 47 – Circunferência com centro na origem e raio de 8 u.c.....	113
Figura 48 – Dedução do triângulo de maior área por meio de uma Elipse.....	121
Figura 49 – Ponto P no interior do ângulo reto QOR	122
Figura 50 – Solução por reflexão sobre a base sem tampa do paralelepípedo.....	124
Figura 51 – Solução por reflexão sobre a base sem tampa do cilindro.....	125
Figura 52 – Transformação do setor circular em cone	126
Figura 53 – Gráfico de $f(x) = 2x(12 - x^2)$ em $\mathbb{R}$	129
Figura 54 – Paralelogramo $MPNO$ inscrito no triângulo HOK	141

Introdução

Se quisermos traçar o caminho mais curto entre dois pontos dispostos em um plano, sabemos (ainda que intuitivamente) que esse caminho é um segmento de reta. Não tão intuitivo, mas ainda assim facilmente aceitável, é o fato de um arco de círculo máximo ser a curva mais curta a unir dois pontos que jazem sobre uma esfera. De modo análogo poderíamos pensar, por exemplo: entre todos os quadriláteros de perímetro dado, qual compreende a maior área? E dentre todas as regiões planas delimitadas por curvas fechadas e com uma mesma área, qual delas possui o menor perímetro? Essas e outras questões envolvendo os chamados pontos de **máximo** ou de **mínimo** de uma função sempre desafiaram e ainda desafiam a mente humana. Atualmente tais problemas envolvendo valores extremos são tratados em detalhes apenas em curso superior, na disciplina de Cálculo Diferencial, como aplicações das derivadas.

Entretanto muito antes da formalização, ou mesmo dos primórdios do estudo dessas ferramentas serem desenvolvidas por Newton e Leibniz, os matemáticos na Grécia antiga já buscavam métodos para responder a tais questões, como se pode ler em (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 400): *Propriedades de máximos e mínimos deste tipo eram conhecidas dos gregos, embora os resultados fossem enunciados sem uma tentativa real de prova.*

Na realidade, problemas envolvendo máximos e mínimos aparecem nos mais variados ramos das ciências puras ou aplicadas, como por exemplo:

- ✓ Qual é o formato de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- ✓ Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração)
- ✓ Qual o raio de uma traqueia contraída que expelle mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- ✓ Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue? (STEWART, 2010, p. 253).

No que tange à área pedagógica, o estudo de problemas envolvendo valores máximos ou mínimos de funções pode ser usado para a exploração de diversos conceitos matemáticos. Aparecem com frequência em problemas de otimização permitindo articulações entre aplicações da matemática às ciências exatas, ou entre

áreas da própria matemática.

De acordo com Stewart (2010), valores de máximo ou de mínimo em problemas de Matemática Aplicada podem auxiliar a encontrar a maneira ótima de fazer alguma coisa. Mas podemos ir muito além, e foi justamente essa uma das minhas maiores motivações ao optar pela escolha deste tema. Quais conhecimentos prévios eu trazia para lidar com problemas de máximos e de mínimos, e quais as contribuições que esse estudo poderia trazer ao campo do ensino de matemática básica? Ou, em outras palavras, como eu poderia elaborar um trabalho que ao mesmo tempo cumprisse as exigências acadêmicas, me trouxesse prazer enquanto pesquisador e fosse útil como material de apoio didático para professores de Educação Básica em sua prática docente, em formação inicial ou continuada?

Ao relembrar meu processo pessoal de aprendizado, associei somente às técnicas aprendidas na época de aluno da Licenciatura em Matemática em meu curso de Cálculo I, ocasião em que aprendi sobre como igualar a derivada de uma função polinomial a zero a fim de encontrar pontos críticos. Talvez pelo excesso de vezes que pratiquei tais técnicas, pela falta de conhecimento de outros meios que me possibilitassem a obtenção dos mesmos resultados ou pela ausência de um significado que fosse além da própria técnica, em um primeiro momento não considerei o assunto como algo promissor e também não consegui vislumbrar todo seu potencial.

Vejo agora, porém, que é possível aprofundar uma visão pedagógica do assunto. A partir da leitura do excelente livro de Ivan Niven (NIVEN, 1981 – *Maxima and Minima without Calculus*), me convenci que, uma vez que desvencilhamos esses conceitos das ferramentas aprendidas no Cálculo Diferencial e abrimos margem para trilhar um novo caminho, podemos perceber conexões possíveis entre uma série de tópicos matemáticos elementares e a busca de valores mínimos ou máximos em determinada situação. Fez-se claro para mim um potencial bastante rico de articulações entre os objetos que aqui são estudados e a possibilidade de maior atribuição de significados pelos alunos a conceitos presentes nos currículos de matemática da Educação Básica.

Elaboramos aqui um material que acreditamos poder gerar reflexões e aprofundamentos conceituais visando ampliar o repertório de conhecimentos matemáticos do professor e o domínio de recursos pedagógicos mais elementares

sobre o tema. Examinando a abordagem do tema de máximos e mínimos em livros didáticos de Educação Básica destacamos dois pontos que passaram a nos preocupar: a limitação do tratamento ao vértice do gráfico de uma função quadrática e a abordagem mecânica deste tema. Discutimos isso em maiores detalhes no capítulo 1, seção 1.1. Em relação à abordagem, ela se dá por meio de fórmulas prontas e acabadas que restringem o aluno a encontrar as coordenadas do vértice e assim determinar o ponto e o valor de mínimo ou máximo. Muitas vezes sequer uma justificativa é apresentada ao aluno. Em resumo, o tema aparece unicamente na unidade temática das funções quadráticas e o tratamento adotado não colabora de modo significativo para a construção do conhecimento do aluno nem tampouco com a formação do professor.

Neste sentido, o **objetivo principal de nosso trabalho** é elaborar um material de apoio a professores em formação inicial ou continuada onde se discute diferentes possibilidades e representações elementares para o tratamento do tema dos Máximos e Mínimos na Educação Básica. Para tanto utilizamos conhecimentos já vistos pelos estudantes, o que possibilita a retomada com maior profundidade e abrangência dos mesmos. Como exemplo, veremos à frente (no capítulo 3) que o simples conhecimento de um trinômio quadrado perfeito e técnicas de completamento de quadrados podem ser diretamente associados a aplicações que demandam a determinação de valores de máximos ou de mínimos. Além disso, o mesmo tipo de trinômio pode ser relacionado e usado em conjunto com desigualdades entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, visando encontrar valores que maximizam ou minimizam uma função. Por completude, discutimos ainda uma contextualização das médias e as referidas desigualdades (em representações algébricas e geométricas) em problemas do cotidiano ou de outras disciplinas (por meio dos conceitos de velocidade e ótica na Física). Mostramos também algumas aplicações das desigualdades entre médias que estabelecem conexões intra-matemáticas, como na determinação de aproximação de raízes de números que não são quadrados perfeitos.

Como **questão motivadora e norteadora** de nossa pesquisa, colocamos o seguinte problema clássico e introdutório:

Dentre todos os retângulos de perímetro P , como encontrar o de área máxima utilizando procedimentos elementares, sem o emprego de derivadas?

Acreditamos que distintas soluções e abordagens, como as da seção 1.2, podem oferecer ao professor a oportunidade de trabalhar o objeto de estudo através de um ensino e aprendizado em forma de espiral. Isso possibilita contornar o mesmo assunto de modo a introduzir diferentes conceitos ou ainda revisitar conceitos passados, aumentando o conhecimento matemático do aluno ou até mesmo oferecendo outro modo de compreensão para o mesmo conceito. No caso dessas soluções, o professor pode percorrer a mesma situação-problema em momentos distintos, apresentando novas abordagens e técnicas de resolução como: relações na geometria e o conceito intuitivo de prova geométrica; definição de área ou perímetro; produtos notáveis e completando quadrados; e até mesmo com o uso de função quadrática e seus pontos de máximo e mínimo. Observemos ainda que algumas das abordagens discutidas possibilitam o uso de aplicativos de geometria dinâmica como metodologia de ensino (o que não discutimos neste trabalho).

No capítulo 1 discorremos sobre as justificativas e a fundamentação teórico-pedagógica da nossa pesquisa. Fazemos uma análise crítica de abordagens de máximos e mínimos em livros didáticos. Apontamos algumas propostas que vêm ao encontro de recomendações de documentos oficiais do MEC (como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a BNCC para o ensino médio). Discutimos os conceitos de *conhecimento especializado* e de *conhecimento de horizontes de conteúdos matemáticos* (BALL et al., 2008), nos quais enquadramos grande parte dos conteúdos matemáticos discutidos posteriormente. Por fim, retomamos parte dos apontamentos e discussões anteriores para apresentarmos de forma sistemática soluções para a questão norteadora do nosso trabalho, assim como discorrermos sobre sugestões que podem aprimorar as abordagens analisadas nos livros didáticos.

No capítulo 2 apresentamos as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática a partir das soluções e análises das situações-problemas colocadas que motivaram suas definições. Com isso fornecemos os pré-requisitos elementares para o trabalho com máximos e mínimos sem derivadas a ser desenvolvido, além do interesse intrínseco deste apanhado sistemático sobre as médias. Introduzimos geometricamente as desigualdades entre estes quatro tipos de médias, que serão aprofundadas nos capítulos seguintes.

No capítulo 3 mostramos como o conhecimento dos produtos notáveis e dos trinômios de grau dois, sem ou com o uso das desigualdades das médias, podem

ser utilizados para a determinação de pontos de máximos e mínimos. Apresentamos exemplos, demonstrações, problemas associados à geometria ou aos extremos de funções e diversas aplicações atreladas a essas desigualdades, assim como fazemos no decorrer de todo o trabalho.

No capítulo 4 abordamos as desigualdades entre as médias para o caso de três ou quatro elementos, oferecendo ao professor provas algébricas das mesmas, assim como aplicações em geometria elementar e problemas de extremos condicionados a funções que, mesmo sendo trabalhadas apenas nos cursos de cálculo diferencial, podem ser explorados no Ensino Médio, a critério do professor (1º, 2º ou 3º ano).

Por fim, no capítulo 5, apresentamos teoremas com suas demonstrações e aplicações das desigualdades entre as médias para o caso geral de n elementos ($n > 4$). Discutimos problemas de desigualdades retirados de provas de olimpíadas internacionais de matemática para um possível aprofundamento do assunto por parte do docente ou de estudantes interessados em potencializar seus conhecimentos sobre o tema. Dentre algumas importantes desigualdades, destacamos a de Cauchy e a de Nesbitt que também demonstramos e usamos em algumas aplicações.

Em resumo, pretendemos que este trabalho se constitua em um material de auxílio ao professor ou ao licenciando em Matemática no sentido de fornecer subsídios para ampliar os seus conhecimentos sobre a temática em foco e possíveis abordagens da mesma adequadas para a Educação Básica ou como fonte de pesquisa para estudos próprios. Com isso buscamos contribuir para uma percepção de possibilidades de articulações entre conhecimentos matemáticos escolares, por meio de abordagens desses conteúdos de forma a interconectar conceitos de diferentes unidades temáticas da disciplina e também com outras áreas do conhecimento escolar.

Capítulo 1 – Pertinência do tema desta dissertação: Justificativas e embasamento teórico

Neste capítulo procuramos destacar algumas justificativas da relevância do tema da nossa dissertação e apresentar as bases teórico-pedagógicas utilizadas como fundamentação do trabalho aqui desenvolvido. Relacionamos algumas recomendações constantes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio e o trabalho de especialistas em Educação Matemática como embasamento teórico da pertinência dessa dissertação. Buscamos assim uma fundamentação que forneça aporte sobre a importância da articulação entre conteúdos matemáticos e destes com outras áreas do conhecimento, bem como a importância da integração do conhecimento escolar. Com isso pretendemos melhor justificar e apontar abordagens de ensino dos temas matemáticos discutidos neste trabalho para que o professor decida sobre a eventual conveniência da utilização em sua prática em sala de aula de ferramentas didáticas aqui apresentadas.

Na primeira seção mostramos como o tema ‘máximos e mínimos’ é apresentado em alguns livros didáticos do PNLD 2018, apontando o que consideramos como falhas advindas do modo mecânico e artificial de sua apresentação. Na seção 2 discorremos sobre e analisamos algumas formas de articular a matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano e, principalmente, com conhecimentos da própria disciplina.

Na terceira seção – intitulada “Conhecimentos matemáticos especializados e de horizontes para o ensino” – apresentamos um estudo realizado pelos autores Ball, Thames e Phelps (2008), por sua vez inspirados nas ideias do pesquisador Lee S. Shulman (1986), que nos servirá como referencial teórico-pedagógico fundamental. Mostraremos como tais ideias se desenvolveram e de que modo podem influenciar nossa prática docente.

Por fim, em contraste com as abordagens sobre máximos e mínimos analisados nos livros didáticos da seção 1 – e tomando como suporte o embasamento teórico apresentado na seção 3 – apresentamos duas abordagens para a nossa questão introdutória e motivadora: *‘Dentre todos os retângulos de perímetro P , como encontrar o de área máxima utilizando procedimentos elementares, sem o emprego de derivadas?’*. Além disso, discorremos sobre a

relação existente entre a curva parábola e uma função quadrática utilizando os mesmos vieses da abordagem teórico-pedagógica discutida anteriormente e sugerindo uma introdução significativa para ambos conceitos.

1.1 Abordagens de máximos e mínimos em livros didáticos de Ensino Médio

Nesta seção fazemos uma breve análise de como é abordado o tema do nosso trabalho em alguns livros didáticos aprovados no PNLD 2018.

Quando buscamos o modo como os máximos e mínimos são trabalhados nos livros didáticos, percebemos uma total dependência da função quadrática. A problemática principal que levantamos é que, na maior parte das vezes, considera-se o conceito e as propriedades de uma parábola como algo já conhecido pelos alunos ou até mesmo algo simples de ser enunciado rapidamente, mesmo que o tema ainda não tenha sido explorado em aulas anteriores. Conforme (PAIVA, 2013):

Essa curva é denominada **parábola**. Toda parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada de **eixo de simetria** (e). O ponto comum à parábola e ao eixo de simetria é o ponto V, chamado de **vértice** da parábola.

Demonstra-se que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$, é uma parábola. (PAIVA, 2013, p.172).

Como vemos na citação anterior, em geral os autores afirmam simplesmente que o gráfico de tal função é uma parábola, sem qualquer discussão sobre a definição geométrica desta curva. Uma possível associação entre função quadrática e parábola através dos coeficientes dessa função com as coordenadas do vértice e reta diretriz dessa parábola pode ser o caminho inicial para uma discussão que decorra um maior significado sobre o conceito desta curva. Por completude, de modo que este conhecimento seja acessível aos alunos do Ensino Médio, apresentamos tal demonstração posteriormente na discussão da quarta seção deste

capítulo.

Mas ainda, nos livros didáticos, além do assunto dos máximos e mínimos estar totalmente condicionado ao estudo anterior dessa função, ele é tratado apenas como uma ferramenta auxiliar para determinação do ponto de vértice. Seguem as definições encontradas nos três livros que analisamos:

[...] em uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ de domínio $\mathbb{R}$ e coeficientes reais, ocorre o seguinte:

a) Se $a > 0$, então

➤ A **parábola** tem **concavidade para cima**;

➤ o **valor mínimo** é dado por $y = -\frac{\Delta}{4a}$ e **V** é denominado

ponto de mínimo da parábola;

➤ $\text{Im}(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$ ou

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$$

b) Se $a < 0$, então

➤ A **parábola** tem **concavidade para baixo**;

➤ o **valor máximo** é dado por $y = -\frac{\Delta}{4a}$, e **V** é denominado

ponto de máximo da **parábola**;

➤ $\text{Im}(f) = \left] -\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right]$ ou

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\} \text{ (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 128).}$$

Se **V** é o vértice da **parábola** que representa graficamente a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, então **V** é chamado de **ponto máximo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor máximo** de f .

Se **V** é o vértice da **parábola** que representa graficamente a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, então **V** é chamado de **ponto mínimo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor mínimo** de f . (PAIVA, 2013, p.178).

De modo geral, dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se $V(x_v, y_v)$ é o vértice da **parábola** correspondente, temos então:

$$a > 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor mínimo de } f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$$

$$a < 0 \Leftrightarrow y_v \text{ é o valor máximo de } f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\} \text{ (DANTE, 2016, p.127).}$$

Ao discorrerem sobre funções quadráticas nos livros didáticos, alguns autores

costumam enfatizar o estudo do vértice de uma parábola através de fórmulas que servem para determinação de um valor máximo ou mínimo em problemas fornecidos. Como é o caso de encontrarem as coordenadas do vértice com o uso de ‘ferramentas práticas’ do tipo $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Após inúmeras repetições de um procedimento mecânico sugerido – ‘troca a , b e c pelos correspondentes coeficientes numéricos da função, efetua os cálculos, determina o ponto $V(x_v, y_v)$ e pula para o próximo exercício’ – o aluno muitas vezes sequer compreende o porque do y_v ser o valor de mínimo ou de máximo procurado.

Explicam-se de modo sintético as propriedades relacionadas ao eixo de simetria de uma parábola e, dado que o aluno tenha o conhecimento prévio sobre a fórmula de Bháskara, é comum determinarem as coordenadas $V(x_v, y_v)$ do vértice com o seguinte tipo de explicação:

Se x_1 e x_2 são as raízes de f e com isso, simétricas em relação ao eixo de simetria (algo julgado visualmente como óbvio, sem justificativas conceituais), tem-se:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

E para encontrarmos a imagem de x_v sobre f ,

$$\begin{aligned} f(x_v) &= ax_v^2 + bx_v + c \Rightarrow \\ y_v &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \\ \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} &= -\frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V(x_v, y_v) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Seria no mínimo razoável questionar se V é realmente o ponto que

corresponde ao vértice da parábola. Em outras palavras, refletir se V é o único ponto do plano cartesiano ao qual não corresponde um outro ponto simétrico em relação ao eixo de simetria da parábola (momento talvez oportuno para rever ou apresentar a noção de função injetora e comprovar que a função quadrática não é injetora). Ou até mesmo indagar se x_v pertence ao eixo de simetria da parábola para se poder afirmar que $y_v = f(x_v)$. Observa-se para evitar possíveis confusões, que x_v é chamado ponto de mínimo ou máximo, pertencente ao domínio da função e y_v é o valor mínimo ou máximo da função, enquanto V é um ponto do plano (de coordenadas cartesianas (x_v, y_v)). Pode-se ainda observar que a imagem da função quadrática é sempre uma semirreta do eixo das ordenadas cuja a origem é o ponto de coordenadas $(0, y_v)$.

Questões como essas poderiam ser melhor discutidas em uma aula sobre cônicas ao analisar-se criticamente as propriedades das parábolas (assim como a prova de que tal gráfico é de fato uma parábola). Acreditamos que apresentar a parábola de modo rápido aos alunos somente no momento em que se inicia o estudo das funções quadráticas possa induzir a uma concepção restritiva do conceito dessa curva tão importante por suas aplicações práticas. Assim também cremos ser muito pouco proveitoso limitar o tratamento do tema dos máximos e mínimos ao estudo da função quadrática.

Por outro lado, essa maneira mecânica de introduzir os pontos de máximo e mínimo como um determinado ponto de abscissa entre as raízes de uma função quadrática, traz consigo algumas lacunas – eventualmente apenas superadas por alunos que optarem por um curso superior na área de exatas.³ Uma dessas graves lacunas é tornar os alunos dependentes do vértice do gráfico sendo esse por sua vez obtido pela média aritmética entre as raízes reais. Tal procedimento pode induzir à conclusão errônea de que nem todas as funções quadráticas possuem ponto de máximo ou mínimo, ou seja, apenas terão as que apresentarem raízes reais. Neste viés, mesmo utilizando um modo similar ao que consideramos ser mecânico, (SMOLE; DINIZ, 2013) preenche esta lacuna partindo de uma prova que não utiliza as raízes e que generaliza o procedimento:

³ Muito provavelmente na Universidade esse aluno aprenderá a maximizar (ou minimizar) funções de modo a obter o melhor aproveitamento (menor desperdício) em situações e problemas contextualizados, e, por conseguinte, verá uma utilidade importante para o assunto.

Para determinar o vértice $V(x_v, y)$, vamos partir do ponto $P(0, c)$ onde o gráfico de f intercepta o eixo Oy .

Para $y = c$ em $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$$c = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

Temos dois casos a considerar:

$$b \neq 0 \text{ ou } b = 0.$$

1. Para $b \neq 0$, existe um outro ponto da parábola com ordenada c : o ponto $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$. Como sabemos que a parábola possui um eixo de simetria, este será distinto em Oy .

Como $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ e $(0, c)$ devem ser equidistantes do eixo de simetria, então todos os pontos desse eixo têm abscissas igual à metade de $-\frac{b}{a}$, ou seja, $-\frac{b}{2a}$.

Em particular, o vértice V tem

abscissa $x_v = -\frac{b}{2a}$ e sua

ordenada y_v é a imagem de x_v pela função:

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\text{Portanto } V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

2. Se $b = 0$, então $x = -\frac{0}{a} \Rightarrow x = 0$

Assim sendo, o vértice $V(0, c)$ do gráfico é o próprio ponto $P(0, c)$, que se encontra no eixo de simetria da parábola.

(SMOLE; DINIZ, 2013, p. 122 e 123).

Já (DANTE, 2016), em suas considerações e abordagens sobre esse tema, oferece um modo alternativo apontando a forma canônica da função quadrática ao completar quadrados para encontrar as coordenadas de $V(x_v, y_v)$. Entretanto, é nítido que esta abordagem foi colocada como estudo complementar, pois além de estar na seção do livro “*um pouco mais*” é possível notar que em grande parte dos exercícios resolvidos utilizou-se apenas as fórmulas $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ como estratégia de solução. Além disso, pode-se observar que ao propor dois modos de resolução para $f(x) = 2x^2 - 8x$ e um para $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$ o autor reforça um maior enfoque pelo método mecânico em seu texto. Vejamos:

a) $f(x) = 2x^2 - 8x$

1º modo

Obtendo as raízes, teremos $x' = 0$ e $x'' = 4$. Dada a simetria das parábolas, o eixo de simetria terá abscissas $x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$.

Substituindo $x = 2$ na função, obtemos a ordenada do vértice $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8$.

Então o vértice é o ponto $(2, -8)$.

2º modo

Escrevemos na forma canônica, ou seja, determinando

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v,$$

temos:

$$f(x) = 2(x^2 - 4x) =$$

$$2(x^2 - 4x + 4 - 4) =$$

$$2(x - 2)^2 - 8 \text{ 'sic'}$$

Assim,

$$x_v = 2 \text{ e } y_v = -8.$$

A função assume valor mínimo -8 quando $x = 2$.

Observação: Se o valor mínimo é $y = -8$, então

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}. \text{ Valor mínimo da função: } -8.$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$$

Essa função não tem valor máximo. É ilimitada superiormente.

b) $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

Na forma canônica é possível determinar que $x_v = -\frac{b}{2a}$ e

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \quad (\text{veja mais detalhes na pág 139}); \text{ então,}$$

o vértice de uma parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b \neq 0$ também pode ser calculado assim: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Nesse caso, temos:

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16+80)}{-16} = \frac{-96}{-16} = 6$$

$$\text{Então, } V\left(\frac{1}{2}, 6\right).$$

A função assume valor máximo 6

quando $x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Logo, } \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$$

Essa função não tem valor mínimo.

É ilimitada inferiormente.

(DANTE, 2016, p.126 e 127).

De tudo isso decorre nossa reflexão:

1 – Pode ser cômodo ou mais fácil treinar o aluno no modo mecânico (pelo uso do algoritmo repetitivo que apontamos), sem destacar os significados matemáticos subjacentes (por bastar decorar e aplicar a fórmula) e com lacunas (por fazer ‘vistas grossas’ a um conhecimento anterior da definição geométrica de parábola).

2 – No entanto nos parece que pode melhor resultar em um aprendizado significativo e mais rico para os alunos uma aula na qual se explicita o conceito geométrico de parábola, se utilize o completamento de quadrados explicitamente (como esboçou o Dante, pp. 140-142) para determinar a forma canônica e se provoque os alunos a analisarem os valores da imagem da função a partir desses conceitos e procedimentos.

Acreditamos que tais procedimentos conceituais (não mecânicos) podem propiciar um maior significado ao tema por dois vieses: o primeiro no sentido de privilegiar o entendimento e as razões do uso de uma fórmula ao invés de meramente treinar uma utilização decorada e repetitiva de regras sem significado; e o segundo por relacionar máximos e mínimos com produtos notáveis. A seguir, na seção 1.4,

indicamos algumas possibilidades de abordagens que consideramos mais atraentes ou significativas, com justificativas acessíveis ao nível de Ensino Médio.

1.2 Sobre articulações matemáticas em documentos oficiais do MEC

Em contraposição às abordagens mecânicas presentes nos livros didáticos e discutidas anteriormente, verificamos que documentos oficiais do MEC recomendam outros tipos de abordagens que envolvam articulações matemáticas significativas de forma mais explícita, o que não se constatou no desenvolvimento do tema nas obras analisadas.

O uso pelo aluno de situações matemáticas aplicadas à sua realidade pode ser fundamental para o aprimoramento de senso-crítico, além de tornar seu aprendizado mais agradável. Entretanto discussões atuais levantam a seguinte questão: ‘Existe realmente (ou nós criamos) a necessidade de contextualizar a Matemática com outras disciplinas e com a realidade do estudante?’ Talvez não possamos garantir que apenas isso seja suficiente para inserir tal conhecimento na vida dos estudantes de modo a trazer “significados” e “atraí-los”. Mas seguramente tais abordagens são favorecedoras de aprendizado significativo, inclusive recomendações oficiais do MEC afirmam: “[...] *no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos*” (BNCC, 2018, p. 55).

Ao discutir fatores dessa relevância, Machado (2014) sinaliza a importância da Matemática relacionada com práticas do dia a dia e, principalmente, defende a busca pela elegância interna na própria disciplina apresentando semelhanças entre ela e a poesia.

É certo que ferramentas matemáticas nos ajudam a lidar com a realidade concreta. Seu uso reiterado no dia a dia sua importância como linguagem das ciências, em todas as áreas, são indiscutíveis. Mas há algo na matemática que escapa de qualquer sentido prático/utilitário, que expressa relações – às vezes surpreendentes – e nos ajuda a construir o significado do mundo da experiência, no mesmo sentido em que um poema o faz. Um poema nunca se deixa traduzir em termos de utilidade prática: ele nos faz sentir, compreender, instaura novos sentidos, dá vida e contextos ficcionais. Não vivemos de ficções, mas a abertura propiciada pelo fictício é essencial. A matemática partilha com a poesia esse potencial de criar novos mundos, inspirados na realidade mas cheios de encantamento. Para enfrentar as dificuldades com o ensino de matemática, mais do que

despertar o interesse por suas aplicações práticas, é fundamental desvelar sua beleza intrínseca [...] Em outras palavras, é preciso reencantar a matemática. (MACHADO; D'AMBRÓSIO, 2014, p.43 e 44).

Desde os PCN+ do Ensino Médio já se apontava a necessidade de articulação dos conteúdos, dando-lhes uma profundidade maior do que simples agrupamentos de tópicos sem relação uns com os outros;

i) Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento. ii) Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada (BRASIL, 2002, p. 117).

Ressaltamos ainda que agora essas ideias aparecem reforçadas na BNCC do Ensino Médio, recentemente aprovada pelo CNE:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade, fluidez e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, 2018, p. 57).

Além de tais articulações e competências, muito mais se discute sobre estratégias para o ensino dos conteúdos. Em alguns casos utiliza-se uma metodologia conhecida como Modelagem Matemática, na qual busca-se relacionar os tópicos que serão abordados com problemas que façam parte da realidade do aluno. Segundo Bassanezi (2011), após a coleta de dados e informações para um

problema, por meio de uma linguagem Matemática formula-se um modelo que represente a situação e, utilizando ferramentas ou técnicas matemáticas, os alunos podem obter (ou não) os resultados esperados. Fato é que, independentemente dos resultados obtidos, todo o processo percorrido é muito significativo, pois oportuniza aos estudantes: a descoberta de uma série de conhecimentos; sanar dúvidas; transpor obstáculos; e as mais diversas informações referentes ao assunto trabalhado. Um próximo passo de extrema importância desta metodologia é o momento de converter novamente tais resultados para a linguagem usual e a partir de interpretações, inferir previsões, tomar decisões e participar de influências que impliquem em fatores contextualizados ao mundo real.

Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BNCC, 2018, p. 55).

1.3 Conhecimentos matemáticos especializados e de horizontes para o ensino

Em decorrência das justificativas que discutimos nas seções anteriores apresentamos, nesta seção, o embasamento teórico-pedagógico que usamos de modo pertinente à busca da superação dos problemas apontados nas abordagens usuais do ensino de máximos e mínimos na Educação Básica. Em geral, veremos que dentre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para sua prática em sala de aula, além do conhecimento básico do conteúdo, se faz necessário o domínio de outros também relevantes, como o especializado e o de horizontes, que explicaremos com maiores detalhes nesta seção e abordaremos de modo prático na próxima.

Neste trabalho, enquanto oferecemos a possibilidade do professor relacionar os conteúdos trabalhados com a realidade dos alunos ou mesmo de outras disciplinas, também apresentamos com maior enfoque relações intrínsecas entre conceitos da própria Matemática, como veremos nos próximos capítulos. Ao pensar nas variadas formas de trabalhar as ideias de máximos e de mínimos sem o uso de derivadas percebemos a possibilidade de que os vieses citados caminhem em

paralelo e não mais de modo estanque, como é comum encontrarmos.

Tais conteúdos devem, antes de fazer sentido ao aluno – ator principal do processo de ensino-aprendizagem – fazer sentido ao professor, que irá conhecer não apenas as relações intrínsecas ao conteúdo, como também possíveis conexões com outros tópicos da matemática e de outras áreas do conhecimento. Para o docente, o entendimento das relações pedagógicas deve estar em um contínuo aperfeiçoamento. Uma vez iniciado na graduação, nunca há de ter fim, perpassando inclusive o aprendizado com a própria prática ou cursos de formação continuada.

Nesse ponto uma questão de total relevância nos surge: Quais são os tipos e as características dos conhecimentos necessários para levar a cabo o trabalho do professor de matemática, isto é, o ensino que visa a aprendizagem dos estudantes?

Diante dessa questão, sentimos a necessidade de embasar nosso trabalho em pesquisas que nos possibilitassem encontrar respostas à questão colocada no parágrafo anterior. Parece-nos relevante que, além de dominar o conteúdo proposto, o professor tenha ainda vasto conhecimento de abordagens didáticas e uma visão crítica que lhe possibilite transformar situações cotidianas em atividades escolares. Além disso, ter um conhecimento sobre o currículo praticado e as mais diversas formas de avaliação possibilitará desenvolver um olhar mais apurado, antecipar possíveis dúvidas e contornar situações atípicas que dificultem o bom andamento das aulas. Ainda mais, é de extrema importância ter ciência sobre o contexto sócio-político-cultural de seus alunos bem como da comunidade em que se inserem.

Shulman (1986), após analisar alguns processos de seleção e, principalmente, de avaliações externas de professores do final do século XIX, de diferentes áreas do conhecimento escolar, verificou que os docentes se preocupavam em maior ênfase com o conteúdo a ser trabalhado e muito pouco com formas de analogias relacionadas aos temas, como possíveis metáforas, com diferentes representações para um mesmo tópico ou com ligações possíveis entre o que é ensinado tanto em outras disciplinas como fora da escola no dia-a-dia do aluno. No entanto este caráter mais pedagógico do ensino mereceu maior destaque nos anos próximos e contemporâneos à sua pesquisa. A essa ausência de elo entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do professor o autor deu o nome de *paradigma perdido* (SHULMAN, 1986), classificando-o como um problema para o ensino. Ao apontar essa lacuna, sua intenção foi a de levantar uma gama de conhecimentos que permitisse ao docente perceber quais são os saberes

necessários para realizar sua tarefa didática maximizando as possibilidades de real aprendizagem dos estudantes.

O foco de sua pesquisa em ensino baseou-se no conceito de *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (CPC). De um modo geral, Shulman procurou estabelecer quais conhecimentos o professor deve dominar para desenvolver sua prática docente de modo a facilitar o aprendizado dos alunos.

Assim, ao analisar sua pesquisa de campo, desenvolvida pela intervenção de estudantes universitários junto a alunos de uma rede de educação básica, o autor categorizou sete tipos de conhecimentos os quais chamou de *principais categorias de conhecimento dos professores*, a seguir listados:

- Conhecimento pedagógico geral, com especial referência aos princípios e estratégias gerais de gestão e organização da sala de aula.
- Conhecimento das características dos aprendizes.
- Conhecimento dos contextos educacionais, desde o funcionamento do grupo ou sala de aula, passando pela governança e financiamento das diretorias de ensino até o conhecimento das características das comunidades e culturas locais.
- Conhecimento das finalidades educacionais, seus propósitos e valores, além de suas bases filosóficas e históricas.
- Conhecimento do conteúdo.
- Conhecimento do currículo, com especial compreensão dos materiais e programas que podem servir como “moeda de troca” ao professor.
- Conhecimento pedagógico do conteúdo, ou seja, aquela amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é exclusivo do domínio do professor, a sua própria forma especial de conhecimento profissional.(SHULMAN, 1986 *apud* BALL *et al.*, 2008, p.391, tradução nossa).

As quatro primeiras categorias referem-se a uma abordagem mais ampla em relação ao conhecimento docente. Embora não fosse o foco do autor, essas categorias possuem fortes pontos de relevância para o ensino. Quanto às três últimas categorias, as quais foram analisadas e discutidas tanto por Shulman (1986) quanto por Ball *et al.* (2008), podemos destacar que:

- Conhecimento do conteúdo constitui o conhecimento do assunto e também de suas estruturas organizadoras. O professor não pode se limitar a entender que determinado assunto se apresente de tal modo, mas sim compreender bem as razões fundamentais para que seja de tal forma e não de outra.
- Conhecimento do currículo é representado pelas diversas possibilidades de ensino para um determinado tópico. Pode ser dividido em duas partes: *Conhecimento horizontal do currículo* e *Conhecimento vertical do*

currículo. No primeiro, relaciona-se o conhecimento estudado com outras disciplinas (áreas do saber). Já no segundo a relação é feita entre o conhecimento estudado com assuntos da própria área que já foram vistos ou ainda o serão.

- Conhecimento pedagógico do conteúdo compreende as formas úteis para representar-se uma ideia, as boas ilustrações, o conhecimento de exemplos variados, explicações e demonstrações. Em resumo, o conhecimento pedagógico do conteúdo é necessário ao professor para que seja capaz de formular ou apresentar um assunto, tornando-o mais compreensível aos alunos.

Em nosso trabalho discutimos um conteúdo utilizando esses três tipos de conhecimentos. Desse modo esperamos que possa servir como material de consulta ao professor no que diz respeito aos conhecimentos aqui abordados, e também que sirva de aporte teórico para justificativas de seu uso.

No ano de 1990, Ball levanta a importância de diferenciar o “conhecimento sobre a matemática” da ideia de “conhecimento de matemática” (BALL et al., 2008, p.393). Com esse comentário, esperava suscitar questões como: “Quais conhecimentos pedagógicos teóricos estão sendo incorporados às práticas docentes?” e “O que ainda pode ser feito para melhorar tais práticas?”. Algo que nos parece óbvio é a necessidade do professor dominar o conteúdo a ser ensinado. Mas não nos parece tácito que apenas isso seja suficiente para torná-lo um profissional competente em sua prática de sala de aula: é indispensável que conheça as mais diversas metodologias e articulações entre os distintos conteúdos e como aquelas interferem na construção de conhecimento dos educandos.

Diferentemente de Shulman, que apresentou conclusões embasadas em indicadores quantitativos de avaliações externas sobre o conhecimento docente para o ensino durante um longo período de tempo, Ball e seus colaboradores investigaram de modo empírico a prática docente de professores de matemática da Educação Básica levando em conta a observação de duas questões: a forma como ensinavam a matemática e o tipo de matemática que utilizavam neste processo. A partir dessas observações e algumas modificações, reagruparam os conhecimentos analisados anteriormente por Shulman em dois subdomínios: o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento dos assuntos*. Neste último incluíram

dois conhecimentos que identificaram em sua pesquisa como importantes na prática profissional docente: o *conhecimento especializado de conteúdos matemáticos* e o *conhecimento de horizontes dos conteúdos*. Nos exemplos discutidos no próximo item, destacamos o uso de tais conhecimentos nas abordagens sugeridas, voltadas ao Ensino Médio.

Partindo do conhecimento pedagógico do conteúdo defendido por Shulman, Ball et al., definem o que chamaram de *conhecimento matemático para ensinar*. Na visão dos próprios autores, tal conhecimento pode ser compreendido como [...] o *conhecimento matemático necessário para levar a cabo o trabalho de ensinar matemática* (BALL et al., 2008, p. 395). A diferença entre este conhecimento e o domínio dos conteúdos matemáticos reside no fato de ser o primeiro específico para o professor realizar suas tarefas de ensino, e o último ser necessário em qualquer profissão que exija alguma base matemática ou, mais particularmente, para o matemático profissional.

Após analisarem a obra de Shulman e a prática docente de alguns professores, os pesquisadores sentiram ser necessário um aprofundamento e a reorganização do material disponível, de sorte que, a partir das categorias já erigidas por Shulman, sintetizaram sua proposta no seguinte diagrama:

Figura 1: Domínios do conhecimento matemático para o ensino (Ball et al. 2008, p. 403, tradução nossa⁴).

Nele, os sete tópicos anteriores foram dispostos em dois grandes blocos que por sua vez formam os *Domínios do conhecimento matemático para o ensino*. O primeiro desses blocos, nomeado de “conhecimento dos assuntos”, subdivide o conhecimento do conteúdo (quinta categoria de Shulman) em duas, o “conhecimento básico dos conteúdos” e o “conhecimento de horizontes dos conteúdos”. Compõe também esse bloco o novo “conhecimento especializado dos conteúdos”. Já o segundo bloco, chamado “conhecimento pedagógico do conteúdo”, nos traz o “conhecimento do conteúdo e estudantes” e o “conhecimento do conteúdo e ensino”, que, além de solidificar as características tratadas no “conhecimento pedagógico do conteúdo” de Shulman, ainda reforçam toda a importância das suas quatro primeiras categorias. Para finalizar, é mantido o “conhecimento do currículo” que agora passa a se chamar “conhecimento do conteúdo e currículos”.

A seguir daremos uma explanação mais detalhada sobre cada um dos seis componentes pertencentes aos “Domínios do conhecimento matemático para o ensino” como definidos por Ball et al (2008):

Conhecimento Básico dos Conteúdos (CCK): São habilidades e conhecimentos de um modo geral, isto é, conceitos e procedimentos matemáticos *per se*, não necessariamente possuem ligação com a docência. Por exemplo, o conhecimento do algoritmo para a soma de uma progressão geométrica infinita. Com esse conhecimento, é possível detectar um erro numa conta, reconhecer uma definição imprecisa, entre outros aspectos, bastando, portanto, saber executá-lo.

Conhecimento de Horizontes dos Conteúdos (HCK): Envolve um amálgama entre diferentes tópicos. Saber portanto, que os distintos tópicos que estão sendo vistos, possuem relação entre si, com os que já foram vistos, e ainda com os que serão ensinados. Ele é extrapolado quando o professor se dá conta que tal interconexão de assuntos, se dá não apenas entre a disciplina de atuação, mas ao longo de toda a grade curricular, perpassando com as mais diversas disciplinas vistas ao longo de sua vida escolar.

Conhecimento Especializado dos Conteúdos (SCK): São as habilidades e conhecimentos utilizados exclusivamente para o Ensino de Matemática básica. Ter um amplo repertório de abordagens corretas do ponto de vista matemático, eventualmente não tão formais, mas que favoreçam a atribuição de significados pelos estudantes de conceitos ou procedimentos cabíveis na resolução de um

mesmo problema, podendo antecipar distintas resoluções que surgirão em uma sala de aula. O professor precisa ser capaz de reconhecê-las e de buscar padrões nos erros cometidos e distintos caminhos tomados pelos alunos. Deve ter articulação para compreender abordagens que fugirão do “esperado”, mas que apesar disso, estarão corretas; poder justificar a validade de certo algoritmo. Por fim, desenvolver uma visão descompactada da matemática, isto é, que entenda e possa abordar com seus alunos a razão da existência de distintos tópicos de estudo e não apenas de algoritmos voltados meramente a determinar um resultado final.

Conhecimento do Conteúdo e Estudantes (KCS): É a junção entre o conhecimento matemático e o conhecimento sobre os estudantes. Assim é defendido que o docente deva desenvolver familiaridade com os alunos, desse modo, o professor fica apto a identificar antecipadamente as principais dificuldades dos alunos, a fim de apresentar exemplos que facilitem a aprendizagem e evite possíveis induções ao erro. Por exemplo, ao analisar um equívoco cometido por um aluno, é útil já ter alguma ideia prévia, baseada em experiências anteriores, sobre o que possa ter levado o aluno a cometer tal equívoco e como contorná-lo de modo significativo para ele.

Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT): Esse nada mais é do que a junção do conhecimento sobre o ensino e conhecimento sobre a matemática. Quanto a isso defende-se que o professor deva conhecer e usar variadas representações de um mesmo objeto de estudo no momento de ensinar. Também são apontadas questões do tipo: ‘como iniciar um tópico?’, ‘o que pode ser deixado para o futuro?’ e, principalmente, ‘o que pode ser suprimido a fim de obter um melhor resultado?’, mesmo que se trate de conteúdo pré-estabelecido.

Conhecimento do Conteúdo e Currículos (KCC): Como dito anteriormente essa categoria apenas teve seu nome alterado.

Ressaltamos a importância que o *conhecimento especializado dos conteúdos* assume na formação do professor, podendo inclusive, figurar entre as maiores contribuições de Ball et al., uma vez que fornece subsídios para que o professor conheça novas abordagens de uma mesma teoria e repense sua prática.

É absolutamente comum que o aluno cometa erros ao resolver exercícios de determinada teoria. O erro se torna ainda mais delicado quando foge totalmente do

que é esperado e o aluno nem sequer percebe. Por exemplo, se em uma questão envolvendo o cálculo do peso de uma pessoa a resposta encontrada for 38.400 kg, isso pode resultar da falta de atribuição de um significado pelo aluno para o que está fazendo. Perceber que existe um erro na resposta não é uma tarefa das mais difíceis, uma vez que basta saber resolver o problema e comparar os resultados. Entretanto, perceber qual erro foi cometido já não é tão trivial. Podemos ainda ir além, seria mister que o professor conseguisse dimensionar uma possível origem desse erro e como contorná-lo. Além disso, é necessário que o professor reconheça estratégias corretas que fujam ao padrão, fomentando questões como: “É legítimo tal procedimento?”; “Por que?”; “Funciona sempre?”; “Existem situações mais indicadas para seu uso?”.

Certamente a maioria dos alunos que acompanhou uma certa aula sobre um determinado tema conseguirá apresentar o resultado correto de um exercício. Alguns até o responderão sem necessitar fazer uso do algoritmo, utilizando uma simples associação lógica. Obviamente é indiscutível que o professor deva ser capaz de efetuar tal algoritmo para poder ensiná-lo. Mas isso não é suficiente, uma vez que o simples fato de conseguir resolver não o habilita a interpretar os diversos erros que os alunos podem cometer ou as diferentes estratégias para resolvê-lo. Obviamente é simples perceber quando um algoritmo difere do ensinado, na pior das hipóteses, bastaria resolver o problema (de modo correto) e comparar os passos tomados. Diante de alguma divergência é possível afirmar que o procedimento não foi realizado corretamente. Mas isso de modo algum permite que se possa afirmar a existência de algum erro, ainda mais estando as respostas semelhantes. Sendo assim, como saber se o acerto foi acidental ou se realmente o caminho tomado segue uma lógica correta? Interpretar o procedimento simplesmente como errado pode provocar um bloqueio de criatividade para esse aluno e uma falta de confiança na própria capacidade de pensar com autonomia. Cabe ao professor atuar como mediador do conhecimento e dos erros, sendo que procedimentos diferenciados são ótimas oportunidades para extrapolar o entendimento da classe, criando assim um ambiente rico em discussões e questionamentos e não apenas um “depósito de conhecimento”.

Vamos entender melhor qual é o significado do conhecimento especializado do conteúdo matemático e como se estabelecem as ideias apresentadas

anteriormente examinando o seguinte exemplo baseado na soma dos infinitos termos das Progressões Geométricas convergentes $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots$ e

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \dots$$

Um aluno, após se deparar com um problema pedindo para calcular a soma dos infinitos termos a seguir, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots$ (PG infinita de primeiro termo e razão iguais a $\frac{1}{2}$) em vez de aplicar a fórmula $S = \frac{a_1}{1-q}$ demonstrada em aula, apresentou o seguinte raciocínio:

Ao tomar um quadrado com medida de seus lados equivalente a 1 unidade, e portanto de área 1 (unidade)² é possível fazer-se sucessivas repartições ao meio como indicado na figura à seguir:

Figura 2: Soma dos infinitos termos da $PG\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$.

As áreas de cada um dos retângulos e quadrados obtidos nas sucessivas repartições correspondem justamente às medidas dos sucessivos valores da P.G. do exercício. Vê-se claramente que a união dessas "infinitas figuras" resulta no quadrado inteiro. Pela propriedade de áreas que determina que a área de uma figura é decomposta na união de outras sem sobreposição sabemos que a soma das áreas do retângulos e quadrados obtidos será a área do quadrado original. Assim, em termos da PG obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1.$$

Se por outro lado o mesmo quadrado fosse repartido agora sucessivamente em quatro quadrados congruentes como na figura a seguir:

Figura 3: Soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{4^n}, \dots\right)$.

os valores das áreas das figuras pretas, lilás ou brancas decrescem segundo a seguinte sequência: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{4^n}, \dots\right)$.

Portanto, pela mesma propriedade citada no exemplo anterior, como: para cada quadrado preto da subdivisão existe exatamente dois outros quadrados congruentes, um branco e outro lilás; e a união de todos cobre o quadrado original; então a união dos quadrados pretos (ou brancos, ou lilases) preenche a terça parte da área do quadrado inicial. Portanto,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Além disso, é possível notarmos visualmente que em qualquer sequência de quadrados de uma só cor a razão $\frac{1}{4^n}$ sempre representa a área de um desses quadrados cada vez menor, a medida que o valor natural correspondente de n aumenta. Esse tipo de *conhecimento especializado do conteúdo* pelo professor pode facilitar uma explicação aos seus alunos sobre uma possível dedução para a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG ser $S = \frac{a_1}{1-q}$ com $0 < q < 1$, tomando como base ou pré-requisito o conhecimento já deduzido da soma dos n termos de uma PG finita ser $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Em outras palavras, para um valor de n muito grande a área do quadrado representada por $\frac{1}{4^n} = q^n$ é praticamente nula, deduzindo-se facilmente que de

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ com } n \rightarrow \infty \text{ decorre } S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ pois } q^n \rightarrow 0.$$

Outro ponto interessante de se notar é que os conhecimentos matemáticos para o ensino de matemática não podem ser classificados de modo puramente isolados. Uma vez que no exemplo anterior, além do *conhecimento especializado dos conteúdos*, o docente também pode usar os seus *conhecimentos de horizontes dos conteúdos* para no momento que ensinar frações introduzir ideias como as apresentadas anteriormente e também quando discutir Progressões Geométricas revisitar o mesmo conceito fracionário. Esse tipo de conhecimento horizontal também poder ser utilizado numa ponte entre o ensino médio e o superior, ao lidar com diferentes representações sobre o conceito de limites articulado com o conceito de sequências (neste caso, a PG). Talvez seja essa uma forma mais “amigável” de introduzir o conceito de limites em contrapartida ao uso de epsilons e deltas na introdução por definição formal, como de costume é feito pelo professor.

Tais exemplos deixam claro que o docente não deve apenas intervir nos erros dos alunos. É importante que possua também um *conhecimento especializado de conteúdo matemático* de modo que reconheça possíveis raciocínios que, ainda que não sejam padronizados, respeitem os conceitos envolvidos e utilizem procedimentos corretos, mesmo que não excessivamente formais. É útil que o professor se prepare para compreender o modo como o aluno pensou ou se a abordagem funcionará sempre, sem ficar restrito à possibilidade do “acerto usual”. Apesar da importância que subjaz o erro e a busca de procedimentos diferenciados, uma vez que a *Análise de erros é uma prática comum entre matemáticos no transcorrer de seu próprio trabalho; a tarefa no ensino difere apenas na medida em que essa análise incide sobre os erros cometidos pelos alunos (BALL et al, p. 397, tradução nossa)*⁵, deve se ter um olhar clínico pois isso pode esconder uma não compreensão real do algoritmo e fazer com que o aluno busque um procedimento *sui generis* para cada problema proposto.

De modo a sistematizar a teoria apresentada, temos o quadro a seguir:

⁵ Error analysis is a common practice among mathematicians in the course of their own work; the task in teaching differs only in that it focuses on the errors produced by learners.

O professor é capaz de:	Categoria
Reconhecer uma resposta errada	(CCK)
Dimensionar a natureza do erro, especialmente os incomuns	(SCK)
Buscar referência em sua familiaridade com erros cometidos pelos alunos	(KCS)
Selecionar a abordagem que será mais eficiente nesse específico contexto	(KCT)
Avaliar defasagens de aprendizado dos alunos relativas ao ano escolar	(KCC)
Criar situações didáticas que articulem os conteúdos de modo significativo	(HCK)

Deve ficar claro que esse quadro apenas serve como ilustração didática de modo a reforçar melhor as ideias defendidas no texto, pois na prática, não existe uma separação que seja estrita. Cada tarefa desempenhada pelo professor mobiliza mais do que uma categoria ao mesmo tempo, conforme mostramos anteriormente.

Partindo do ponto de vista de que existe um tipo de conhecimento específico para o ensino, no artigo de Ball, Thames e Phelps buscamos subsídios para embasar a relevância de trabalhos como esse por nós apresentado. Neste trabalho contemplamos além dos *conhecimentos especializados de conteúdo matemático*, o *conhecimento de horizontes dos conteúdos* e *conhecimento do conteúdo e currículos* dado que estabelecemos uma conexão entre máximos e mínimos, geometria e diferentes tipos de médias. Esperamos com isso, oferecer ao professor ferramentas que possibilitem um ensino dos tópicos apresentados e que conheça também elementos pertinentes à teoria proposta por Ball et al..

Não esperamos porém que o professor opte por uma ou outra abordagem, mas ao contrário, queremos fornecer a possibilidade de que ele se sinta apto a criar sua própria via rumo ao conhecimento utilizando aspectos de cada uma das diferentes abordagens existentes.

1.4 Abordagens significativas possíveis para as questões da área máxima de um retângulo com perímetro fixo e da relação entre função quadrática com a curva parábola

Aproveitando o embasamento teórico da seção anterior apresentamos dois

tópicos com abordagens que levam em consideração os problemas que foram apresentados anteriormente, nas justificativas desta trabalho. Mais especificamente e de certo modo mais sistematizado, seguimos o embasamento teórico discutido na seção 1.3 e algumas recomendações de documentos oficiais que mostramos na seção 1.2 para apresentarmos duas soluções à questão motivadora e norteadora apontada da introdução do trabalho. Além disso, também sugerimos uma abordagem que contorna a problemática discorrida na seção 1.1, a saber, a falta de justificativa, nos livros didáticos, da associação entre função quadrática e o gráfico de uma parábola.

Em contraste com as abordagens apresentadas na seção 1.1, vamos responder de duas outras maneiras (logo a seguir) e de outro modo mais adiante (Cap 3, seção 3.3, Aplicação 0) nossa questão motivadora:

Dentre todos os retângulos de perímetro P , como encontrar o de área máxima utilizando procedimentos elementares, sem o emprego de derivadas?

A seguir mostramos uma solução usando trinômio do 2º grau e uma outra proposta por Euclides no VI livro dos Elementos, ~300 a.C.

Solução com uso de produto notável

De $P = 2x + 2y$, temos que $y = \frac{P - 2x}{2}$. Como a área do retângulo é o produto xy , obtemos para ela a expressão:

$$A(x) = x \left(\frac{P - 2x}{2} \right) \Rightarrow A(x) = -x^2 + \frac{P}{2}x$$

Ao invés de admitir como conhecido o esboço do gráfico⁶ dessa função, vejamos como se determina diretamente seu valor máximo e o ponto correspondente, completando quadrados:

$$A(x) = -x^2 + \frac{P}{2}x$$

$$A(x) = -\left(x^2 - \frac{P}{2}x\right)$$

$$A(x) = -\left(x^2 - \frac{P}{2}x + \left(\frac{P}{4}\right)^2 - \left(\frac{P}{4}\right)^2\right)$$

$$A(x) = -\left(\left(x - \frac{P}{4}\right)^2 - \left(\frac{P}{4}\right)^2\right)$$

Daí obtemos a seguinte desigualdade:

$$A(x) = \left(\frac{P}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{P}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2$$

Observando que se $x = \frac{P}{4}$, temos $A\left(\frac{P}{4}\right) = \left(\frac{P}{4}\right)^2 - 0$, segue que a área máxima é

$A = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$. Assim, dentre todos os retângulos de perímetro fixo P , o quadrado

de lado $\frac{P}{4}$ é o que possui área máxima.

Nota-se nesta resolução que o domínio de *conhecimento de horizontes de conteúdo* pelo professor, ao se fazer presente, pode favorecer uma aprendizagem mais significativa aos seus alunos. Vejamos por qual motivo:

Ao abordar o conceito de produtos notáveis com técnicas de completamento de quadrados nos anos finais do Ensino Fundamental, posteriormente no Ensino Médio, o professor pode revisitar tal conceito para solucionar problemas de máximos e mínimos associados a funções quadráticas e, além disso, apresentar significado as próprias técnicas de completamento.

Nesta solução e também na próxima podemos afirmar que o *conhecimento especializado do conteúdo matemático* é essencial ao docente, pois dominando algumas técnicas matemáticas e as utilizando em momentos oportunos visando uma aprendizagem significativa aos alunos se obtém diferentes possibilidades para representar soluções em um único problema. A seguir vemos uma abordagem geométrica e dedutiva para a mesma solução, oferecendo ao professor uma outra

forma de propiciar aprendizagem mais significativa aos alunos.

Solução de Euclides

Seja $ABCD$ um retângulo de lados a e b com $a \leq b$ e perímetro fixo P .

Figura 4: Área máxima para um retângulo de comprimento fixo.

Na figura, temos o retângulo $ABCD$ com $a < b$ e o quadrado $BEFG$, ambos de perímetro P . Nesse caso, $a < \frac{P}{4}$ e $b > \frac{P}{4}$, sendo $\frac{P}{4}$ o lado do quadrado $BEFG$.

Além disso, X , Y e Z representam as áreas das regiões correspondentes, sendo $X + Z = \text{Área}_{BEFG}$ e $Y + Z = \text{Área}_{ABCD}$.

Como, as somas $AB + BC$ e $GB + BE$, correspondem à metade do perímetro do retângulo e do quadrado, respectivamente, que têm o mesmo perímetro P ,

$$\begin{cases} AB + BC = \frac{P}{2} \\ GB + BE = \frac{P}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB + BC = GB + BE$$

$$\Rightarrow AG + GB + BC = GB + BC + CE$$

$$\Rightarrow AG = CE.$$

Esta conclusão nos permite afirmar que a altura do retângulo $CEFH$ possui a mesma medida que a base do retângulo $AGHD$. Mas por outro lado, a área de $CEFH$ é maior que a do retângulo $AGHD$, uma vez que $EF > GH$, pois $EF = \frac{P}{4}$ é

lado do quadrado, enquanto $GH = a < \frac{P}{4}$ é parte deste lado. Logo $X > Y$ e assim, somando-se a área Z em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$X > Y \Rightarrow X + Z > Y + Z \Rightarrow \text{Área}_{BEFG} > \text{Área}_{ABCD} \text{ (I)}$$

No caso particular em que $a = b = \frac{P}{4}$, o retângulo $ABCD$ é o quadrado $BEFG$ e

$$\text{Área}_{ABCD} = \text{Área}_{BEFG} \text{ (II)}.$$

Portanto, de (I) e (II) temos que a área máxima que o retângulo $ABCD$, de perímetro P e lados a e b com $a \leq b$, pode atingir, corresponde à área do

quadrado $BEFG$ de lado $\frac{P}{4}$, deste modo $\text{Área}_{BEFG} \leq \text{Área}_{ABCD}$. Ou seja, dado um

perímetro fixo P , dentre todos os retângulos com este perímetro, o que possui área máxima é o quadrado de lado $\frac{P}{4}$ que tem área $\frac{P^2}{16}$.

Retomando a discussão que anunciamos na seção 1.1, podemos ver como pode ser abordada a relação entre parábola e função quadrática após a seguinte:

Definição: Fixados um ponto e uma reta não contendo esse ponto em um plano, chamamos de **parábola** ao lugar geométrico dos pontos desse plano que são equidistantes do ponto e da reta. O ponto fixado é chamado de **foco** e a reta fixada é chamada de **diretriz** da parábola.

Observamos, da definição, que se, em coordenadas cartesianas, $F = (x_0, y_0)$ é o foco e a reta $y = k$ é a diretriz então $y_0 \neq k$ e a reta de equação $x = x_0$ que é perpendicular à diretriz passando pelo foco é o eixo de simetria da parábola.

Na ilustração da Figura 5 vemos uma parábola de foco $F = (4, 6)$, diretriz de equação $y = 2$, eixo de simetria a equação $x = 4$ e vértice $V = (4, 4)$.

Figura 5: Parábola de foco $F=(4,6)$ e diretriz $y=2$.

Em seguida mostramos que a toda função quadrática corresponde exatamente uma específica parábola em coordenadas cartesianas, ou seja, provamos que

“Uma curva plotada no plano cartesiano é uma parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas, se e somente se ela é o gráfico de uma função quadrática”.

Prova: Pela definição geométrica de parábola (dada acima), um ponto $P=(x, y)$ pertence à parábola de foco $F=(x_0, y_0)$ e diretriz de equação $y=k$, com $k \in \mathbb{R}$, $k \neq y_0$, se e somente se, a distância entre $F=(x_0, y_0)$ e $P=(x, y)$ é igual à distância de $P=(x, y)$ à reta diretriz $y=k$. Ou seja, se e só se

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |y-k| \Leftrightarrow$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (y-k)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = y^2 - 2yk + k^2 \Leftrightarrow$$

$$2(y_0 - k)y = x^2 - (2x_0)x + (x_0^2 + y_0^2 - k^2) \Leftrightarrow$$

$$y = ax^2 + bx + c \text{ com}$$

$$a = \frac{1}{2(y_0 - k)}, \quad b = -\left(\frac{x_0}{y_0 - k}\right) \text{ e } c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - k^2}{2(y_0 - k)} \quad (*)$$

Cabe salientar que com as equivalências anteriores, de fato, são válidas as condições necessárias e suficientes ('se e somente se') enunciadas nesta prova.

Assim, usando as igualdades acima para a parábola da ilustração anterior ($F = (4,6)$ e diretriz $y = 2$) calculamos os coeficientes a , b e c de sua correspondente função quadrática:

$$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 6$$

Por último, dada uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, podemos determinar o foco (x_0, y_0) e a diretriz $y = k$ da parábola correspondente ao seu gráfico a partir das relações (*) dadas acima. De fato, observando que necessariamente temos $a \neq 0$, faremos isso separando em 2 casos:

1º Caso: $b \neq 0$

De

$$y_0 - k = \frac{1}{2a} = -\frac{x_0}{b}$$

e

$$2(y_0 - k)c = x_0^2 + (y_0 - k)(y_0 + k) = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{2a}(y_0 + k),$$

temos

$$\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{2a}(y_0 + k),$$

$$y_0 + k = 2a \frac{4ac - b^2}{4a^2} = -\frac{\Delta}{2a} \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Assim obtemos

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_0 + k = -\frac{\Delta}{2a}.$$

De $y_0 - k = \frac{1}{2a}$ e $y_0 + k = -\frac{\Delta}{2a}$

segue que

$$y_0 = \frac{1-\Delta}{2a} \text{ e } k = -\frac{\Delta+1}{4a}.$$

Figura 6: Foco e diretriz da parábola como gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$.

2º Caso: $b = 0$

Das relações (*) obtidas na prova da proposição anterior temos

$$y_0 - k = \frac{1}{2a}, \quad x_0 = 0 \text{ e } y_0 + k = 2c.$$

Logo

$$2y_0 = \frac{1}{2a} + 2c \Rightarrow y_0 = \frac{4ac+1}{4a}$$

e

$$2k = 2c - \frac{1}{2a} \Rightarrow k = \frac{4ac-1}{4a}.$$

Neste caso o foco está no eixo O_y que é o eixo de simetria da parábola.

Cabe reforçar, conforme a discussão iniciada na seção anterior, que o ponto

$V = (x_0, y_v)$, intersecção da curva com o eixo de simetria $x = x_0$ é chamado de **vértice da parábola**. Com isso, observamos que em qualquer um dos dois casos anteriores, as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola dada por $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, são

$$x_v = x_0 = -\frac{b}{2a}$$

e

$$y_v = a(x_v)^2 + bx_v + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{\Delta}{4a}$$

ou seja,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Toda abordagem colocada anteriormente pode ser uma sugestão de como associar uma parábola de diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco dados com sua correspondente função quadrática de modo que não seja introduzido este conhecimento sem a definição de parábola, e apenas nomeando o gráfico da função como sendo tal curva. Fica aqui então explicitado como se pode discutir a validade desta associação apenas utilizando técnicas usualmente trabalhadas em Geometria Analítica no Ensino Médio.

Nessa abordagem, novamente se destaca a oportunidade do professor utilizar o *conhecimento de horizontes do conteúdo* para tornar uma aprendizagem de valores máximos e mínimos mais significativa aos alunos. A apresentação da parábola como gráfico da função quadrática, do modo como abordamos anteriormente, possibilita uma ponte com o conceito de cônicas, geralmente apresentado nos anos finais do Ensino Médio. O que também viabiliza, quando se ensina cônicas, um melhor aproveitamento sobre o conceito de parábola ao retomar o conceito de função quadrática num olhar mais “familiar” e apurado dos alunos.

Com as duas abordagens do problema de determinar o retângulo de área máxima dado um perímetro fixo e o da prova de ser o gráfico de uma função

quadrática uma particular parábola pretendemos apresentar maneiras distintas para que o professor as utilize sem descartar o que anteriormente fazia. Assim, queremos oferecer subsídios técnicos e teóricos para que possa depositar um olhar crítico e apurado, de modo a desenvolver suas próprias abordagens, buscando um amálgama do que cada uma pode oferecer em determinadas situações como no caso acima ao contornar as lacunas presentes nos livros didáticos.

Ressaltamos ainda que o intuito deste trabalho é o aprimoramento do docente não apenas em exercício, mas também daqueles que, ainda em fase de formação, sintam necessidade de extrapolar o que foi visto em aulas. Nas palavras de LIMA (2002): *Mesmo que alguns não achem vantagens em nossos pontos de vista, pelo menos ampliarão seus conhecimentos, dentro do princípio de que se deve sempre saber um pouco mais do que se ensina.* Ainda, nas palavras do mesmo autor, a respeito do ensino no caso referido por ele, o de equações do segundo grau:

Por mais antigo e repisado que seja o assunto que estamos ensinando, convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-los, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraente nossas aulas mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história. (Lima, 2002, p.73).

Capítulo 2 – Médias

Nos diversos domínios da matemática, educadores, pesquisadores e estudantes questionam a ordem apresentada dos elementos de um determinado conceito em comparação ao provável surgimento das ideias no decorrer da história. Um exemplo disso é o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. De um modo geral, em grande parte dos livros didáticos ou aulas referentes ao tema, a sequência limites-derivadas-integrais é escrita ou apresentada nessa ordem (da esquerda para a direita) mas não necessariamente assim surgiram esses conceitos ao longo da história.

Além disso, acredita-se que muitos conceitos matemáticos foram somente estruturados pela necessidade de solucionar um problema através de inúmeras tentativas, seja esse problema inserido no cotidiano, na própria matemática ou em outras ciências. Discorreremos sobre médias por meio de definições-exemplos-aplicações, mas não necessariamente nessa ordem como é o modo comumente apresentado.

Assim, neste capítulo apresentamos médias como decorrentes da resolução de alguns problemas, sempre que no processo se perceba a necessidade de definir um número de tendência central. Este tipo de número é útil sempre que se tem a necessidade de resumir, significativamente, um conjunto de dados quantitativos (notas de alunos, temperaturas diária numa certa região, salários de funcionários, etc) de modo que a maioria dos dados desse conjunto apresente uma tendência de concentração em torno desse número. Podemos então, na dependência do problema, necessitar das medidas média, mediana ou moda. Concentramos nosso trabalho na medida de tendência central mais utilizada popularmente: **média**. Em específico abordaremos separadamente ou em conjunto as médias: aritmética, geométrica, harmônica ou quadrática, como veremos.

Por fim, apontamos que em algumas das situações-problemas apresentadas cabe a utilização de uma dessas médias e não de outra. Pretendemos com tal distinção minimizar um erro comum que estudantes cometem ao usarem demasiadamente a média aritmética para solucionar a maioria dos problemas onde não é indicado qual tipo de média utilizar, negligenciando as demais médias e mecanizando o conceito de modo equivocado.

2.1 Média Aritmética

Define-se a medida de tendência central denominada de média aritmética (M_A) com o objetivo de representar um conjunto de dados por meio de uma determinada propriedade. Tal medida será de maior representatividade, conforme apontamos abaixo na Aplicação 1, quando os dados do conjunto distam “pouco” do valor da média, ou de menor representatividade, quando acontece o oposto como é o caso das demais aplicações discutidas a seguir. A propriedade que caracteriza a média aritmética é a de preservar a soma dos dados, como veremos.

Aplicação 1. Determinar uma altura que represente as alturas dos jogadores de um time de basquete cujas alturas são 1,90; 1,92; 1,90; 1,92 e 1,96 metros.

Utilizando a soma de todas as alturas e dividindo o resultado pelo número de alturas obtemos:

$$\frac{1,90+1,92+1,90+1,92+1,96}{5} = \frac{9,6}{5} = 1,92.$$

Podemos dizer que 1,92 metros é uma altura média que representa as alturas dos jogadores e que, neste caso, coincide com a altura do maior número deles. Além disso, ao substituírmos todas as alturas por 1,92 m, temos:

$$1,92+1,92+1,92+1,92+1,92 = 9,6.$$

Vê-se assim que a soma dos dados se mantém preservada, que é a propriedade característica da Média aritmética, como antes já anunciado.

Aplicação 2. Determinação de uma altura representante das alturas das jogadoras de um time de vôlei cujas alturas em metros são 1,50; 1,62; 1,70; 1,72; 1,84 e 1,90.

Usando a soma das alturas, como na aplicação anterior, obtemos:

$$\frac{1,50+1,62+1,70+1,72+1,84+1,90}{6} = \frac{10,5}{6} = 1,75.$$

Nesse caso, podemos dizer que 1,75 metros é uma altura média das alturas das jogadoras que não é igual a nenhuma delas, 4 das jogadoras têm altura abaixo dessa média e 2 delas são mais altas do que a média. Assim percebe-se que sua representatividade é menor do que no caso anterior. Isso acontece pela maior dispersão dos dados em torno da média. Enquanto no primeiro caso os dados são de certo modo mais homogêneos, com as alturas mais concentradas em torno da

altura média obtida, no segundo caso tal não acontece.

Mas novamente pode-se observar que substituindo as alturas pela média, a soma também se mantém preservada:

$$1,75 + 1,75 + 1,75 + 1,75 + 1,75 + 1,75 = 10,5.$$

Aplicação 3. Determinação de uma idade média que represente as idades das jogadoras do time de vôlei da aplicação anterior, cujas idades são 18; 20, 23, 25, 28 e 30 anos.

Da forma de calcular as médias que estamos usando segue:

$$\frac{18 + 20 + 23 + 25 + 28 + 30}{6} = \frac{144}{6} = 24.$$

Podemos afirmar que 24 anos é a idade média das idades dessas jogadoras e, neste caso, metade das jogadoras têm idade menor e a outra metade maior do que a média, ou seja, a média está no meio das alturas, quando ordenadas de modo crescente ou decrescente. E também vemos que vale:

$$24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 144.$$

Portanto a propriedade característica de uma média aritmética segue valendo nesse exemplo: a soma dos dados se mantém preservada ao substituí-los pela idade média representante.

Aplicação 4. Determinação de uma idade média representante para os jogadores do time de basquete da Aplicação 1, cujas idades são 18; 19, 18, 19 e 36 anos.

Novamente, somando os dados e dividindo pela sua quantidade obtemos:

$$\frac{18 + 19 + 18 + 19 + 36}{5} = \frac{110}{5} = 22.$$

Nessa aplicação, encontramos 22 anos como uma idade média representante para a idade dos jogadores, porém é possível notar que grande parte dos jogadores (80% ou 4 dos 5 atletas) tem idade entre 18 e 19 anos, isto é, estão bastantes abaixo da média. Isso nos permite indagar o porquê da idade representante não estar abaixo de 20 anos. A explicação decorre do fato que a única idade discrepante, a do jogador de 36 anos, faz com que a idade representante seja “puxada” mais para cima na “disputa” com as demais idades. Mas não é capaz de puxar a média para

tão próximo de si, mesmo com a sua discrepância alta, pois ela compete com as outras quatro idades aproximadas entre si. Caso fossemos representar somente as idades de 18, 19 e 36 anos, teríamos $24,\overline{33}$ como a idade média representante, logo a idade discrepante conseguiria puxar a média com mais “força” ao disputar com apenas duas idades, em vez de quatro.

Por outro lado, ao comparar a representatividade da idade de 22 anos com a encontrada na aplicação anterior, não seria razoavelmente fácil decidir com absoluta certeza qual delas melhor representa as outras idades em cada caso, pois se desconsiderarmos a única idade discrepante desta aplicação (36 anos), a soma dos desvios absolutos (diferença entre a média com cada idade, em módulo) é menor nesta aplicação do que na anterior. Mas se considerarmos essa idade em tal comparação, o oposto acontece. Com isso, devemos ou não considerar essa “única” idade discrepante para tal análise? Neste caso diríamos que sim, pois essa idade representa 20% ou uma das cinco idades das jogadoras, e se representasse 1% ou uma das 100 idades (sendo as outras 99 compreendidas entre 18 e 19 anos). Qual seria o grau de importância dessa idade diante do todo? Questões como essas nos remetem a necessidade de uma medida quantificadora que nos faça decidir quão dispersos estão os dados em torno da média, em outras palavras, medir a variabilidade de um conjunto de dados analisado. Logo, para tornar menos intuitiva essa comparação, retornaremos a essas aplicações na seção 2.4, ao contextualizar as medidas de dispersão com o conceito de média quadrática.

Para este caso específico em que a minoria dos dados possui valores discrepantes, uma propriedade que gera uma medida de tendência central com maior representatividade para o conjunto dos dados seria colocá-los em ordem crescente e escolher o elemento central. Nesse caso, para os dados 18, 18, 19, 19, 36 (nessa ordem) teríamos 19 como essa medida. Mesmo não sendo o foco do nosso capítulo ressaltamos que a medida com tal propriedade recebe o nome de mediana.

Nessas aplicações, de um modo geral e preliminar, é possível notar que a propriedade utilizada nem sempre é a mais adequada para gerar uma medida que represente de modo satisfatório um conjunto de dados, como vimos nesta última aplicação. Embora a propriedade tenha sido a mesma em todos os casos, as medidas encontradas podem melhor ou pior representar um conjunto de dados, de

acordo com cada situação apresentada.

Além disso, é fácil notar que todas as médias encontradas estão compreendidas entre o menor e o maior número de cada conjunto de dados, de modo que cada um desses dados contribui trazendo a média para próximo de si, após o uso da propriedade definida.

Sendo assim, podemos anunciar que média é uma medida de tendência central que quando calculada com a propriedade utilizada nas quatro aplicações (somar os dados de um conjunto e dividir o resultado pela quantidade desses dados), recebe, especificamente, o nome de média aritmética dos dados desse conjunto.

Analisamos abaixo um exemplo sobre esse conceito para logo a seguir apresentar duas definições de média aritmética, a primeira para o caso particular $n=2$ e a segunda para o caso geral de n elementos.

Exemplo. Dois chefes pediram a um funcionário que comprasse com o seu dinheiro duas bolas de futebol iguais para cada um de seus filhos. Na loja A o funcionário encontrou apenas uma bola e a comprou por 30 reais. Já na loja B ele encontrou a mesma bola, porém pagou o dobro do valor. Ao retornar à empresa, o funcionário que não conhecia o conceito sobre média aritmética, raciocinou do seguinte modo para cobrar de cada chefe a quantia que deveria receber:

“Como pagou 30 reais em uma bola, 60 reais na outra e como deveria receber de cada chefe a mesma quantia (pelo fato das bolas serem iguais), pensou em cobrar de cada chefe um mesmo valor que fosse maior do que 30 e menor do que 60 reais, de modo que ao somar esses valores, resultasse no dinheiro total que gastou.”

Logo, sem grandes esforços, o funcionário pediu para cada chefe a quantia de 45 reais. Recebendo de volta os 90 reais que havia gastado.

O funcionário também percebeu que além do valor 45 estar compreendido entre 30 e 60, esse número supera o 30 em 15 unidades e precisa de 15 unidades para alcançar o 60. Portanto, de modo indireto o funcionário procurou por um número n tal que

$$n - 30 = 60 - n \Rightarrow$$

$$2n = 90 \Rightarrow$$

$$n = 45 .$$

Além disso,

$$45 + 45 = 90$$

É possível generalizar esta situação com a seguinte:

Definição 1. (conceito de excesso e falta) Dados dois números x e y . Dizemos que o número M_A ($x \leq M_A \leq y$) é a média aritmética de dois outros quando o excesso do primeiro para o segundo é igual a falta do segundo para terceiro.

Sejam x , M_A e y o primeiro, segundo e terceiro número, respectivamente. Logo,

$$x - M_A = M_A - y \Rightarrow$$

$$2M_A = x + y \Rightarrow$$

$$M_A = \frac{x + y}{2}.$$

Além disso,

$$x + y = \frac{x + y}{2} + \frac{x + y}{2}.$$

Logo, M_A é média aritmética de x e y . E também temos que a soma $x + y$ é preservada quando substituimos x e y por M_A .

Com isso, em seu raciocínio, o funcionário aplicou esse mesmo conceito apresentado. Vejamos que deste conceito, podemos deduzir e generalizar média aritmética para o caso de n elementos, conforme a definição e o comentário abaixo.

Definição 1.1. Dados n números $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dizemos que M_A ($a_1 \leq M_A \leq a_n$) é

a média aritmética dos n reais positivos, onde M_A é o número $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Podemos afirmar que essa definição decorre da propriedade discutida em todas as situações-problemas anteriores, pois

$$\underbrace{M_A + M_A + \dots + M_A}_{n \text{ vezes}} = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$n.M_A = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Portanto, no caso geral, a soma dos dados é preservada quando substituídos pela própria média aritmética.

Ressaltamos que nesta seção não nos preocupamos com o teor de complexidade das abordagens feitas nas aplicações, pois o objetivo principal foi apresentar e apontar diferenças e semelhanças sobre as médias aritméticas encontradas em cada situação analisada. Porém, cabe ao professor, se julgar necessário, aumentar o nível reflexivo dessas abordagens, como por exemplo, contextualizar média com os salários dos funcionários de empresas. Vejamos abaixo algumas reflexões que podem ser abordadas:

- Numa empresa em que poucos funcionários ganham muito e muitos ganham pouco, seria “boa” a representatividade da média salarial desses funcionários?
- Uma pessoa interessada somente na satisfação financeira em vez da profissional quer decidir se investe seus esforços para ingressar numa empresa A ou B. Sabendo que essas empresas pagam em média a mesma faixa salarial, porém há diferenças entre os tetos salariais, os menores salários e número de funcionários de cada uma delas, quais análises essa pessoa poderia fazer para sua decisão?

Neste último caso, como especializações na área são fatores relevantes e comuns para a progressão salarial em muitas empresas, se a pessoa for “pouco” especializada na área deve escolher a empresa que possua a menor amplitude salarial, diferença entre o teto salarial e o menor salário, pois os salários se comportam de certo modo mais homogêneos. Por outro lado, se a pessoa for “bastante” especializada na área, escolher a empresa de maior amplitude salarial pode aumentar suas chances de progressão e vantagens financeiras.

2.2 Média Geométrica

A média geométrica (M_G), assim como a média aritmética, também é uma medida de tendência central usada para representar um conjunto de dados. Porém sua definição difere quanto à propriedade a ser preservada pela média. Vejamos a solução e análise das próximas aplicações.

Aplicação 5. Sabendo que a e b ($a \neq b$) são as medidas do comprimento e largura de um retângulo então a medida dos lados de um quadrado que possui a mesma área que o retângulo é dada pela raiz quadrada do produto de a multiplicado por b . Como a área do retângulo é ab , procuramos pelo lado L de um quadrado tal que

$$LL = ab.$$

Logo $L^2 = ab$ e, portanto, $L = \sqrt{ab}$.

É evidente que L está entre a e b , $a, b > 0$, pois tomando $a < b$, por exemplo, se $L < a$ teremos $LL < ab$ (área do quadrado menor que a do retângulo) e se $L > b$ teremos $LL > ab$ (área do quadrado maior que a do retângulo). Como para $a > b$ o raciocínio é análogo, temos $a < L < b$. Ou seja, podemos dizer que L é também uma medida de tendência central.

Aplicação 6. Se a , b e c ($a \neq b \neq c$) são as medidas das dimensões de um paralelepípedo então a medida dos lados de um cubo que possui o mesmo volume que este paralelepípedo é dada pela raiz cúbica de abc .

Como o volume do paralelepípedo é abc , procuramos pelo lado L de um cubo tal que

$$LLL = abc.$$

Logo $L^3 = abc$ e, portanto, $L = \sqrt[3]{abc}$.

Nessa aplicação podemos afirmar que $L = \sqrt[3]{abc}$ é a medida do lado de um cubo que preserva o volume abc de um paralelepípedo, assim como na aplicação anterior $L = \sqrt{ab}$ é a medida do lado de um quadrado que preserva a área ab de um retângulo. Adiantamos que L é denominada média geométrica entre os valores a , b e c .

Aplicação 7. Verificação de que um quadrado inscrito em um triângulo retângulo com um dos lados sobre a hipotenusa tem a medida do lado igual a média geométrica das medidas dos segmentos da hipotenusa adjacentes ao lado desse quadrado.

Vamos mostrar que $FE = DE = DG = GF = \sqrt{AD \cdot EB}$. Seja $DEFG$ o quadrado inscrito no triângulo ABC , conforme a figura a seguir:

Figura 7: *Quadrado inscrito num triângulo retângulo e a média geométrica.*(Moise, E.; Downs, L., 1966, p. 316).

Da semelhança entre os triângulos ADG e FEB , temos:

$$\frac{AD}{FE} = \frac{DG}{EB}.$$

Como $FE = DG$ por serem medidas de segmentos dos lados do quadrado então:

$$FE^2 = AD \cdot EB \Rightarrow FE = \sqrt{AD \cdot EB}.$$

A seguir, definimos média geométrica entre dois elementos para observarmos a relação existente entre as aplicações geométricas anteriores com este conceito. Aproveitamos para ressaltar o quanto pode ampliar e enriquecer o conhecimento matemático especializado do professor sobre o conceito de média geométrica esse tipo de abordagem por meio de problemas da própria geometria, ou até mesmo por um viés aritmético como veremos nas próximas aplicações.

Definição 2. (conceito de proporção) Lembremos que uma proporção é a afirmação de uma igualdade entre duas razões p/q e r/s (com $p, q, r, s > 0$), e neste caso diz-se “ p está para q assim como r está para s ”. Um número é dito ser a média geométrica M_G ($x \leq M_G \leq y$) de dois números x e y reais positivos se valer que x está para M_G assim como M_G está para y , ou seja, se a razão do primeiro para o segundo é igual à razão do segundo para o terceiro.

Sejam x , M_G e y o primeiro, segundo e terceiro número, respectivamente. Assim,

$$\frac{x}{M_G} = \frac{M_G}{y} \Rightarrow M_G^2 = xy \Rightarrow M_G = \sqrt{xy}.$$

Como vale claramente que,

$$xy = \sqrt{xy} \sqrt{xy} = M_G \cdot M_G.$$

Percebe-se que M_G preserva o produto xy ao substituí-se x e y por M_G .

Aplicação 8. Determinação do crescimento médio anual da população de uma região que cresceu 10% num determinado ano e 50% no ano seguinte.

Supondo uma população inicial de 100 pessoas, teríamos:

Após 1 ano _____ $100 + 10\%$ de $100 = 100.1,1 = 110$ pessoas.

Após 2 anos _____ $110 + 50\%$ de $110 = 110.1,5 = 165$ pessoas.

Para calcularmos o crescimento médio anual, uma tendência inicial seria utilizarmos a média aritmética entre as taxas de crescimento de 10% e 50%. Nesse caso, com $M_A = 30\%$, teríamos após os 2 anos:

$$100.1,3.1,3 = 169 \text{ pessoas.}$$

O resultado diferente do esperado nos sugere que a média aritmética não seja adequada para esta situação. Por outro lado, procuramos por um número K tal que,

$$100.K.K = 100.1,1.1,5 \Rightarrow K^2 = 1,1.1,5.$$

Logo $K = \sqrt{1,1.1,5} = 1,2845232\dots$ é o fator de aumento médio anual. Portanto, a taxa de crescimento médio anual da população é de aproximadamente 28,45%.

Aplicação 9. Determinação do rendimento médio de um investimento que rende no primeiro mês 5%, no segundo mês 7% e no terceiro, 9%.

O rendimento de uma quantia de valor V após três meses será $V.1,05.1,07.1,09$.

Assim, para encontrarmos o rendimento médio, procuramos por um número K tal que

$$V.K..K..K = V.1,05.1,07.1,09.$$

Isso implica $K^3 = 1,05.1,07.1,09$ e então $K = \sqrt[3]{1,05.1,07.1,09} = 1,069875\dots$ é o fator de aumento médio mensal. Assim, o rendimento médio do investimento é de 6,9875...% ou de aproximadamente 6,99%.

A partir das aplicações acima é possível deduzir intuitivamente que para n fatores de aumentos sucessivos sobre um determinado valor ou quantia, o fator de aumento médio é calculado pela raiz enésima do produto desses n fatores. A medida de tendência central que respeita essa propriedade recebe o nome de média

geométrica. Podemos defini-la assim:

Definição 2.1. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos. Chamamos de média geométrica (M_G) de $a_1, a_2, \dots, a_n$ o número $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

E ainda,

$$M_G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \Leftrightarrow$$

$$M_G^n = a_1 a_2 \dots a_n \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{M_G \cdot M_G \dots M_G}_{n \text{ vezes}} = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Ou seja, nesses casos, o valor intermediário (a medida de tendência central) mais adequado é aquele número que preserva o produto dos dados quando substituídos por ele, ou seja a média geométrica entre eles.

2.3 Média Harmônica

A média harmônica (M_H), assim como as demais médias, é uma medida que satisfaz uma propriedade específica. Nesse caso, sua necessidade aparece em situações onde se lida com grandezas inversamente proporcionais como veremos nas aplicações abaixo ao relacionarmos este conceito com problemas da Física e do dia-a-dia.

Aplicação 10. João vai com sua bicicleta para o trabalho com uma velocidade média de 30 km/h. Já na volta, devido ao trânsito, faz o mesmo caminho com velocidade média de 20 km/h. Determinar sua velocidade média em km/h, considerando a ida e a volta do percurso.

Um erro comum que grande parte dos estudantes comete nesse tipo de problema é aplicar a média aritmética entre as velocidades de ida e volta. Nesse caso, consideram 25 km/h a velocidade média do percurso total. Veremos a seguir o motivo desse equívoco.

Supondo x a medida da distância de ida ou volta do percurso e conhecendo o conceito de velocidade média (razão entre a distância total percorrida e o tempo

utilizado, $V_m = \frac{d}{t}$), temos que

$$\text{durante a ida (i): } t_i = \frac{d_i}{v_i} = \frac{x}{20} \text{ e}$$

$$\text{durante a volta (v): } t_v = \frac{d_v}{v_i} = \frac{x}{30}.$$

Considerando o tempo e o percurso de ida e volta, a velocidade média é dada por

$$V_m = \frac{d_i + d_v}{t_i + t_v} = \frac{2x}{\frac{x}{20} + \frac{x}{30}} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = \frac{2}{\frac{5}{60}} = \frac{120}{5} = 24 \text{ km/h}.$$

Caso a distância da casa de José ao trabalho fosse de 60 km. Como na ida sua velocidade foi de 30km/h e na volta 20km/h teríamos o tempo utilizado de 2 horas pra ir e de 3 horas para voltar. Portanto José percorreria a distância total de 120 km no tempo total de 5 horas. Logo,

$$V_m = \frac{d}{t} = \frac{120}{5} = 24 \text{ km/h}.$$

Adiantamos que o número $\frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}}$ é denominado média harmônica (M_H) entre os

números 20 e 30. E que ainda,

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}}$$

Com isso, percebe-se que M_H preserva a soma dos inversos de dois valores x e y ao substitui-se x e y por M_H .

Aplicação 11. Sejam P1 e P2 dois postes perpendiculares ao solo de medidas a e b , respectivamente. Ao traçar as duas linhas do topo de um poste a base do outro temos que a distância entre o ponto de cruzamento delas ao solo é metade da média harmônica das alturas desses postes.

Conforme o enunciado da aplicação, podemos construir a seguinte figura:

Figura 8: Relação da média harmônica (M_H) com as medidas dos segmentos AC, FE e BD (Pereira, 2014, p.11).

Como $M_H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ e $EF = x$ mostraremos que $x = \frac{M_H(a,b)}{2} = \frac{ab}{a+b}$.

Da semelhança entre os triângulos DEB e AEC com as respectivas alturas BF e FA , temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{BF}{FA} \quad (I).$$

E da semelhança dos triângulos BDA e FEA vale a proporção

$$\frac{b}{x} = \frac{BA}{FA} \Leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{BF + FA}{FA} = \frac{BF}{FA} + 1 \quad (II).$$

De (I) em (II),

$$\frac{b}{x} = \frac{b}{a} + 1 \Leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+b}.$$

Apresentamos uma definição de média harmônica para dois elementos, segundo o conceito de excesso e proporção.

Definição 3. (conceito de excesso, falta e proporção) A média harmônica M_H ($x \leq M_H \leq y$) de dois números x e y é o número entre eles que estabelece uma proporção entre as razões de excesso do primeiro para o segundo com o primeiro e da falta do terceiro para o segundo com o terceiro.

Sejam x , M_H e y o primeiro, segundo e terceiro número, respectivamente. Logo,

$$\frac{x - M_H}{x} = \frac{M_H - y}{y} \Leftrightarrow$$

$$(x - M_H)y = x(M_H - y) \Leftrightarrow$$

$$xy - M_H y = xM_H - xy \Leftrightarrow$$

$$M_H(x + y) = 2xy \Leftrightarrow$$

$$M_H = \frac{2xy}{x + y} = \frac{2}{\frac{x + y}{xy}} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Portanto, M_H é a média harmônica de x e y . E também temos que a soma dos inversos $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ é preservada quando substituímos x e y por M_H , pois

$$M_H = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \frac{1}{M_H}.$$

Aplicação 12. Determinação da velocidade média de um automóvel que percorreu a distância de um semáforo A ao semáforo B. Sendo que no primeiro quarto do caminho esteve com a velocidade média de 20 km/h, no segundo quarto à 40km/h e o restante do percurso, percorreu a 60km/h.

Considerando x distância do primeiro e do segundo quarto do percurso, temos que $2x$ é a distância da metade restante. Logo, os tempos utilizados para cada trecho do percurso conforme cada velocidade mencionada são

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{x}{20}, \quad t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{x}{40} \quad \text{e} \quad t_3 = \frac{d_3}{v_3} = \frac{2x}{60}.$$

E a velocidade média para o trajeto total é dada por

$$V_m = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{4x}{\frac{x}{20} + \frac{x}{40} + \frac{2x}{60}} = \frac{4x}{\frac{x}{20} + \frac{x}{40} + \frac{x}{60} + \frac{x}{60}} =$$

$$\frac{4}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}} = \frac{4}{\frac{13}{120}} = \frac{480}{13} \approx 36,92 \text{ km/h}.$$

E ainda,

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}}_{4 \text{ vezes}}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}}$$

Disso temos que M_H preserva a soma dos inversos de quatro valores quando substituídos pela própria M_H .

No decorrer das soluções nas aplicações 10 e 12 é possível notar algo comum. Consideramos as velocidades médias parciais que a bicicleta e o automóvel percorreram em trechos de tamanhos iguais que nomeamos de x para determinar o tempo utilizado em cada trecho. E durante o cálculo da velocidade média total de cada caso utilizamos o inverso da média aritmética dos inversos das velocidades médias parciais. Observa-se essa passagem na Aplicação 10 em $\frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}}$ e na

Aplicação 12 em $\frac{4}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}}$. Veremos nas aplicações a seguir e na definição

3.1 que a característica *inverso da média aritmética dos inversos* está sempre presente no conceito de média harmônica.

Aplicação 13. Três torneiras, T_1 , T_2 e T_3 , separadamente, enchem um barril em 30, 40 e 60 minutos, respectivamente. Abrindo-as, simultaneamente, em quanto tempo enchem o mesmo barril?

Sejam v_1 , v_2 e v_3 as vazões das torneiras T_1 , T_2 e T_3 , respectivamente. Definindo vazão como a razão do volume pelo tempo e considerando V o volume do barril, temos:

$$v_1 = \frac{V}{30}, \quad v_2 = \frac{V}{40} \quad \text{e} \quad v_3 = \frac{V}{60}.$$

Para a vazão total (v_t) ou vazão simultânea das três torneiras temos as equações

$$v_t = v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{e} \quad v_t = \frac{V}{t}. \quad \text{Logo,}$$

$$\begin{aligned}\frac{V}{t} &= v_1 + v_2 + v_3 \Rightarrow \frac{V}{t} = \frac{V}{30} + \frac{V}{40} + \frac{V}{60} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{t} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{t} &= \frac{9}{120} \Leftrightarrow t = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

Como $t = \frac{40}{3} = \frac{39}{3} + \frac{1}{3}$ então o tempo para as três torneiras encherem juntas o barril é de 13 minutos e 20 segundos.

Para aplicar médias nesse tipo de problema, observamos que a partir da igualdade

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60}, \text{ temos:}$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{3}{\frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{M_H(30,40,60)}{3} = \frac{40}{3}.$$

Portanto basta calcular a média harmônica dos tempos que as torneiras levam para encher o barril, separadamente, e logo após dividir o resultado pelo número de torneiras.

Caso aumentarmos o número de torneiras dessa aplicação ou o número de paradas pelo automóvel na aplicação 12, podemos generalizar o conceito de média harmônica conforme a definição abaixo.

Definição 3.1 Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos. Chamamos de média

harmônica (M_H) o número $\left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$. Logo M_H é o inverso da

média aritmética dos inversos dos números $a_1, a_2, \dots, a_n$.

E ainda,

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{M_H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{M_H} + \frac{1}{M_H} + \dots + \frac{1}{M_H}}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Logo, a soma dos inversos dos dados é preservada quando substituídos pela própria média harmônica.

2.4 Média Quadrática

A média quadrática (M_Q) é uma medida de tendência central que além de representar um conjunto de dados, também pode auxiliar no ramo da estatística para o cálculo de algumas medidas de dispersão, como veremos em uma aplicação envolvendo variância e o desvio padrão ao retomarmos as quatro aplicações da seção 2.1.

Na aplicação 1 (A1), vimos que 1,92m representou as alturas dos jogadores de um time de basquete (1,90; 1,92; 1,90; 1,92 e 1,96 metros) e na segunda aplicação (A2), 1,75m representou a altura das jogadoras do time de vôlei (1,50; 1,62; 1,70; 1,72; 1,84 e 1,90 metros). Já na aplicação 3 (A3), calculamos 24 anos como a idade representante das jogadoras de A2 (18; 20, 23, 25, 28 e 30 anos) e na quarta aplicação (A4), 22 anos foi a idade que representou as idades dos jogadores de A1 (18, 19, 18, 19 e 36 anos).

Em todos os casos usamos a média aritmética como estratégia para determinar esses números representativos, porém questionamos a representatividade das médias em cada caso. Deduzimos intuitivamente que a média encontrada em A1 tem maior representatividade que a média encontrada em A2. Mas quando procuramos por qual média melhor representa os seus dados nas aplicações 3 e 4, vimos de imediato que não é algo fácil de ser deduzido. Vejamos uma sugestão de como lidar com esse tipo de questão.

Consideremos, primeiramente, os desvios (d_i) dos dados em torno da média em cada caso:

$$\mathbf{A1:} \quad d_1 = 1,90 - 1,92 = -0,02, \quad d_2 = 1,92 - 1,92 = 0, \quad d_3 = 1,90 - 1,92 = -0,02$$

$$d_4 = 1,92 - 1,92 = 0; \quad d_5 = 1,96 - 1,92 = 0,04.$$

$$\mathbf{A2:} \quad d_1 = 1,50 - 1,75 = -0,25; \quad d_2 = 1,62 - 1,75 = -0,13; \quad d_3 = 1,70 - 1,75 = -0,05$$

$$d_4 = 1,72 - 1,75 = -0,03; \quad d_5 = 1,84 - 1,75 = 0,09; \quad d_6 = 1,90 - 1,75 = 0,15.$$

$$\mathbf{A3:} \quad d_1 = 18 - 24 = -6; \quad d_2 = 20 - 24 = -4; \quad d_3 = 23 - 24 = -1$$

$$d_4 = 25 - 24 = 1; \quad d_5 = 28 - 24 = 4; \quad d_6 = 30 - 24 = 6.$$

$$\mathbf{A4:} \quad d_1 = 18 - 22 = -4; \quad d_2 = 19 - 22 = -3; \quad d_3 = 18 - 22 = -4;$$

$$d_4 = 19 - 22 = -3; \quad d_5 = 36 - 22 = 14.$$

Como queremos saber em quais dos casos os dados desviam menos em torno da média, uma sugestão seria calcular o desvio médio para cada caso. Porém, ao calcular a média aritmética dos desvios em A1, por exemplo, temos:

$$M_A = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = \frac{-0,02 + 0 + (-0,02) + 0 + 0,04}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

O resultado nulo não condiz com a realidade dos desvios, pois ao somá-los com sinais opostos não obtemos o desvio médio esperado. Para resolver esse problema, uma estratégia conveniente seria considerar o quadrado dos desvios para gerar valores não negativos. Assim,

$$\mathbf{A1:} \quad \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2}{5} = \frac{(0,02)^2 + 0^2 + (-0,02)^2 + 0^2 + 0,04^2}{5} = \frac{0,0024}{5} = 0,00048.$$

$$\mathbf{A2:} \quad \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2}{6} = \frac{(-0,25)^2 + (-0,13)^2 + (-0,05)^2 + (-0,03)^2 + 0,09^2 + 0,15^2}{6} = \frac{0,1134}{6} = 0,0189.$$

$$\mathbf{A3:} \quad \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2}{6} = \frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2}{6} = \frac{106}{6} = 17,6.$$

$$\mathbf{A4:} \quad \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2}{5} = \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + 14^2}{5} = \frac{246}{5} = 49,2.$$

Os valores acima são gerados a partir da média aritmética dos quadrados dos desvios, essa propriedade define a medida de dispersão conhecida pelo nome de variância (V). Porém, para retornar à unidade inicial, utiliza-se a raiz quadrada da

variância, a qual chamamos de desvio padrão (σ). Assim, o desvio padrão é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos desvios.

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n}} \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n}.$$

Com isso, usando o desvio padrão para quantificar o quão disperso estão os dados em torno da média nas aplicações, obtemos:

$$\sigma(A1) = \sqrt{0,00048} \approx 0,02; \quad \sigma(A2) = \sqrt{0,0189} \approx 0,14;$$

$$\sigma(A3) = \sqrt{17,6} \approx 4,2 \text{ e } \sigma(A4) = \sqrt{49,2} \approx 7,01.$$

Logo, $\sigma(A1) < \sigma(A2)$ e $\sigma(A3) < \sigma(A4)$, ou seja, é possível afirmar que na Aplicação 1 a média representa melhor os seus dados em relação a Aplicação 2 e o mesmo acontece na Aplicação 3 em relação a Aplicação 4.

A importância do desvio padrão não só está associada às propriedades de uma medida de dispersão como também por servir de parâmetro para a definição de média quadrática, estabelecendo um conceito que pode ser aplicado em outras situações, como veremos a seguir.

Definição 3 Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos. Chamamos de média

quadrática (M_Q) o número $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$. Logo M_Q é a raiz quadrada da

média aritmética dos quadrados de $a_1, a_2, \dots, a_n$.

E ainda,

$$\begin{aligned} M_Q &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \Leftrightarrow \\ nM_Q^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \Leftrightarrow \\ \underbrace{M_Q^2 + M_Q^2 + \dots + M_Q^2}_{n \text{ vezes}} &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos quadrados dos dados é preservada quando substituídos pelo quadrado da média quadrática.

Exemplo. Média quadrática dos números 2, 5, 7 e 10.

$$M_{Q(2,5,7,10)} = \sqrt{\frac{2^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2}{4}} = \sqrt{44,5} \approx 6,67.$$

Além disso, temos preservada a soma dos quadrados conforme abaixo:

$$(\sqrt{44,5})^2 + (\sqrt{44,5})^2 + (\sqrt{44,5})^2 + (\sqrt{44,5})^2 = 2^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2.$$

Na relação entre o desvio padrão e a média quadrática, vimos que

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n}}, \text{ logo o desvio padrão é a média quadrática dos desvios.}$$

Vejamos agora como também é possível relacionar a Variância com a M_Q .

De $V = \sigma^2$, temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n} = \frac{(a_1 - M_A)^2 + (a_2 - M_A)^2 + \dots + (a_n - M_A)^2}{n} = \\ &= \frac{a_1^2 - 2a_1M_A - M_A^2 + a_2^2 - 2a_2M_A - M_A^2 + \dots + a_n^2 - 2a_nM_A - M_A^2}{n} = \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + nM_A^2 - 2M_A(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n} = \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} + \frac{nM_A^2}{n} - 2M_A \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n} = \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} + M_A^2 - 2M_A M_A = M_Q^2 - M_A^2. \end{aligned}$$

Utilizando essa nova relação na Aplicação 4, por exemplo, temos:

$$M_Q^2 = \frac{18^2 + 19^2 + 18^2 + 19^2 + 36^2}{5} = \frac{2666}{5} = 533,2 \text{ e } M_A^2 = 22^2 = 484.$$

Assim,

$$V = M_Q^2 - M_A^2 = 533,2 - 484 = 49,2.$$

É possível notar que utilizando essa relação não é preciso calcular os desvios dos dados em torno da média.

Até o momento, vimos nesse capítulo que em todas as aplicações abordadas, para quaisquer que sejam os elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ de um conjunto de dados com

$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ temos que qualquer uma das médias M_n se localiza entre o menor e o maior número desse conjunto de dados, isto é, $a_1 \leq M_n \leq a_n$.

Esse fato reforça a ideia de que as médias são medidas de tendência central. Porém a localização desse centro difere para cada uma delas, como veremos na seção a seguir ao estudarmos as desigualdades entre as médias através de representações geométricas.

2.5 Médias em quadrados, trapézios e semicírculos

Nesta seção relacionamos as quatro médias com algumas unidades temáticas da geometria plana. A partir de segmentos no interior de um trapézio e por construções geométricas no interior de semicírculos e quadrados apresentamos possibilidades que mostram de forma ilustrativa a desigualdade existente entre as médias para o caso de dois números reais positivos.

Observamos que nessas construções as desigualdades $M_H(a,b) \leq M_G(a,b) \leq M_A(a,b) \leq M_Q(a,b)$ aparecem naturalmente. Adiantamos que no próximo capítulo apresentaremos as provas algébricas para essas desigualdades e as utilizaremos em aplicações de caráter algébrico ou geométrico.

Desigualdade $M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$ em um quadrado

Vejamos uma ilustração geométrica do caso $M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$, considerando um quadrado de lado $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, conforme a figura abaixo:

Figura 9: A desigualdade $M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$ por meio de quadrados (Carvalho, 2012, p.17).

Observamos que:

$$2(\sqrt{a})^2 + 2(\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ocorrendo a igualdade no caso em que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Por fim, podemos representar de outro modo a mesma situação:

Figura 10: A desigualdade $M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$ por meio de quadrado e triângulo (Carvalho, 2012, p.17).

Nessa figura, temos um quadrado com lado de medida $\sqrt{a+b}$ que pode ser decomposto por quatro triângulos de mesmas áreas e um quadrado central.

Como os triângulos possuem as medidas $\sqrt{a}$ para base e $\sqrt{b}$ para altura, é possível visualizar a seguinte relação entre as áreas:

$$(\sqrt{a+b})^2 \geq 4 \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ocorrendo a igualdade no caso em que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, ou seja, quando ocorrer a área nula do quadrado central.

Desigualdades entre médias em um trapézio (WISDOM, 2006)

Seja $ABCD$ um trapézio com medidas das bases $AB = a$ e $CD = b$ com o ponto O sendo a intersecção entre as diagonais de segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, conforme a seguinte figura:

Figura 11: As médias no trapézio.

Assim, podemos afirmar que:

- A **média aritmética** de a e b , $M_A(a,b) = \frac{a+b}{2}$, é representada pelo segmento

$\overline{GH}$ paralelo as bases e localizado na metade da distância entre as mesmas.

Para provar isso, observamos que se $\overline{GH} \cap \overline{BD} = \{P\}$ temos a semelhança entre os triângulos ABD e GPD e entre os triângulos CDB e HPB .

Considerando que as medidas das alturas dos triângulos GPD e HPB valem h então as medidas das alturas de ABD e CDB valem $2h$. Disso, seguem as proporções:

$$\frac{AB}{GP} = \frac{2h}{h} \Leftrightarrow \frac{a}{GP} = \frac{2h}{h} \Leftrightarrow GP = \frac{a}{2} \text{ e}$$

$$\frac{DC}{PH} = \frac{2h}{h} \Leftrightarrow \frac{b}{PH} = \frac{2h}{h} \Leftrightarrow PH = \frac{b}{2}.$$

Portanto,

$$GH = GP + PH = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

- A **média geométrica** de a e b , $M_G(a,b) = \sqrt{ab}$, é representada pelo segmento $\overline{KL}$ da Figura 11 paralelo às bases e situado de modo que os trapézios $ABLK$ e $KLCD$ sejam semelhantes.

É possível mostrar a construção de tal segmento de medida KL :

Figura 12: Construção da média geométrica no trapézio.

Nela, partimos do trapézio $ABCD$ cujas medidas das bases são $AB = a$ e $DC = b$ para prolongar o segmento $\overline{DC}$ e obter o segmento $\overline{DQ}$ de medida $a + b$.

Em seguida, construímos a circunferência λ cujo centro G é o ponto médio do segmento $\overline{DQ}$ e traçamos o segmento $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{DQ}$ com $P \in \lambda$.

Sendo W o ponto de $\overline{DC}$ tal que $DW = PC$ construímos o segmento $\overline{WL}$, paralelo à $\overline{AD}$, interceptando o lado $\overline{BC}$ do trapézio no ponto L , assim como traçamos o segmento $\overline{LK}$, paralelo à $\overline{DC}$, interceptando o lado $\overline{AD}$ no ponto K . Disso, temos o paralelogramo $KLWD$. Usando a semelhança de triângulos e propriedades das proporções, mostra-se que os trapézios $ABLK$ e $KLCD$ são semelhantes.

Como no triângulo retângulo DQP , tem-se $PC = \sqrt{ab}$ e como $DW = PC$ temos que $KL = \sqrt{ab}$ e, portanto, o segmento $\overline{KL}$ tem como medida a média geométrica de a e b .

- A **média harmônica** de a e b é representada pelo segmento $\overline{EF}$ da figura 11 paralelo às bases e passando por O .

Queremos mostrar que a medida $EF = M_H$ em que

$$M_H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Da semelhança entre os triângulos AEO e ADC , temos:

$$\frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD - ED}{AD} = 1 - \frac{ED}{AD} \quad (I).$$

Mas os triângulos EOD e ABD também são semelhantes. Então vale,

$$\frac{ED}{AD} = \frac{EO}{AB} \quad (II).$$

De II em I :

$$\frac{EO}{DC} = 1 - \frac{EO}{AB} \Leftrightarrow EO \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1.$$

Logo,

$$EO = \frac{1}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}} = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{ab}{a + b}.$$

De modo análogo encontramos $OF = \frac{ab}{a + b}$. Portanto,

$$EF = 2EO = \frac{2ab}{a + b}.$$

• A **média quadrática** de a e b é representada pela medida do segmento $\overline{MN}$ da figura 11, paralelo às bases que divide o trapézio $ABCD$ em dois trapézios de áreas iguais.

Sejam $MN = c$, A_{h1} a área do trapézio $AMNB$ de altura h_1 , A_{h2} a área do trapézio $MNCD$ de altura h_2 e A_h a área do trapézio $ABCD$ de altura h . Disso temos:

$$A_h = \frac{(a+b)h}{2}, \quad A_{h1} = \frac{(a+c)h_1}{2} \text{ e } A_{h2} = \frac{(b+c)h_2}{2}.$$

Além disso,

$$A_h = A_{h1} + A_{h2} \text{ e } h = h_1 + h_2.$$

Como $A_{h1} = A_{h2}$ então $A_h = 2A_{h1}$ e $A_h = 2A_{h2}$. Ou seja,

$$\frac{(a+b)h}{2} = (a+c)h_1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2(a+c)} = \frac{h_1}{h} \text{ e}$$

$$\frac{(a+b)h}{2} = (b+c)h_2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2(b+c)} = \frac{h_2}{h}.$$

E ainda, $\frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} = \frac{h_1 + h_2}{h} = 1$. E portanto,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2(a+c)} + \frac{a+b}{2(b+c)} &= 1 \Leftrightarrow \\ (a+b)(b+c) + (a+b)(a+c) &= 2(a+c)(b+c) \Leftrightarrow \\ ab + ac + b^2 + bc + a^2 + ac + ab + bc &= 2ab + 2ac + 2bc + 2c^2 \Leftrightarrow \\ a^2 + b^2 &= 2c^2 \Leftrightarrow \\ c &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \end{aligned}$$

É possível mostrar a construção de tal segmento $\overline{MN}$:

Figura 13: Construção da média quadrática no trapézio.

Nessa construção, partimos do trapézio $ABCD$ com medidas das bases $AB = a$ e $DC = b$ com $b \geq a$. Sendo P o ponto de $\overline{DC}$ tal que $PC = a$ construímos a circunferência λ de centro C , passando por P .

Em seguida, traçamos o raio CQ de λ perpendicular a $\overline{DC}$, $Q \in \lambda$ e, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DCQ , determinamos o segmento de medida $DQ = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Com centro no ponto Q construímos a circunferência ω passando pelo ponto D e traçamos o segmento $\overline{QR}$ perpendicular a $\overline{DQ}$ com $R \in \omega$. (como mostra a figura).

Como o triângulo DQR é isósceles e retângulo em Q deduzimos que

$DQ = QR = \sqrt{a^2 + b^2}$ e aplicando novamente o teorema de Pitágoras, obtemos $DR = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Sendo S o ponto médio de $\overline{DR}$ e sendo T o ponto de $\overline{DC}$ tal que $DT = DS$ construímos o segmento $\overline{TN}$, paralelo à $\overline{AD}$, interceptando o lado $\overline{BC}$ do trapézio no ponto N , assim como traçamos o segmento $\overline{MN}$, paralelo à $\overline{DC}$, interceptando o lado $\overline{AD}$ no ponto M . Disso, temos o paralelogramo $MNTD$ que por suas

propriedades, tem-se $MN = DT = \frac{DR}{2}$. Portanto $MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

A partir deste último resultado e seguindo as equivalências mostradas antes desta construção geométrica, prova-se que as áreas dos trapézios $AMNB$ e $MNCD$ são iguais.

Desigualdades entre médias em um semicírculo

Sejam dois segmentos de medidas a e b distintas que suporemos, sem perda de generalidade, $a > b$. A seguir fazemos uma construção geométrica em um semicírculo de diâmetro $a + b$ de segmentos cujas medidas representam as quatro médias entre a e b .

Consideremos uma circunferência λ cujo diâmetro seja $BC = a + b$, conforme a próxima figura. Como $BC = 2r$, com r raio de λ , temos que $r = \frac{a+b}{2} = M_A(a, b)$.

Assim, o raio r é a média aritmética dos números a e b .

Pelo ponto D do diâmetro com $CD = a$ e $BD = b$ traçamos a perpendicular, $FD = h$ a BC com $F \in \lambda$ e obtemos o triângulo FBC . Podemos afirmar que este triângulo é retângulo em F , pois o ângulo $\widehat{BFC}$ é inscrito em λ , com ângulo central $\widehat{BOC} = 180^\circ$, em que O é o centro de λ .

Figura 14: Construção da $M_G(a, b) = h$.

Da semelhança entre os triângulos FDB e CDF , temos que $h^2 = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab} = M_G(a, b)$.

Assim, a altura $h = FD$ é a média geométrica entre a e b .

Considere DG a medida da altura do triângulo ODF e $GF = x$, conforme a próxima figura.

Figura 15: Construção da $M_H(a, b) = GF = x$.

Temos pelo caso ângulo-ângulo, a semelhança entre os triângulos ODF e DGF valendo a seguinte proporção:

$$\frac{FG}{FD} = \frac{FD}{FO} \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow x = \frac{h^2}{r}$$

Como $h = \sqrt{ab}$, segue que

$$x = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = M_H(a, b)$$

Logo $x = FG$ corresponde à média harmônica dos números a e b .

Por fim, para obter a média quadrática, traça-se $OH \perp BC$, com $H \in \lambda$. Veremos, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ODH , que $HD = q$ é a média

quadrática de a e b .

Figura 16: Construção da $M_Q(a, b) = HD = q$

$$\begin{aligned}
 DH^2 &= OH^2 + OD^2 \Rightarrow q^2 = r^2 + OD^2 \Rightarrow q^2 = r^2 + OF^2 - DF^2 \Rightarrow \\
 q^2 &= r^2 + r^2 - h^2 \Rightarrow q^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \Rightarrow q^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - ab \Rightarrow \\
 q &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = M_Q(a, b).
 \end{aligned}$$

Assim, DH é a média quadrática entre a e b .

No triângulo ODF , temos que $h < r$, uma vez que h é um dos catetos e r a sua hipotenusa. Já no triângulo DGF , tem-se $x < h$, sendo x a medida do cateto $\overline{FG}$ e h a medida da sua hipotenusa. E, finalmente, no triângulo ODH , r é a medida de um dos catetos e q é medida da hipotenusa. Dessas desigualdades, conclui-se que $x < h < r < q$, ou seja:

$$M_H(a, b) < M_G(a, b) < M_A(a, b) < M_Q(a, b) \quad (I).$$

Isso acontece sempre que a e b são reais positivos distintos. No caso em que $a = b$ é fácil ver que $D = O$, $F = H$ e $x = h = r = q$, conforme a seguinte figura. Ou seja,

$$a = b > 0 \Rightarrow M_H(a, b) = M_G(a, b) = M_A(a, b) = M_Q(a, b) \quad (II)$$

Capítulo 3 – Extremos de funções de 1 ou 2 variáveis e produtos notáveis

Neste capítulo, apresentamos resultados matemáticos com aplicações pertinentes aos currículos da Educação Básica que podem ser relacionados com situações de valores extremos (pontos de máximo ou mínimo).

Esses resultados e aplicações são comuns a vários textos citados na bibliografia. O nosso estudo foi baseado nesses textos, em particular e principalmente no texto de Ivan Niven (NIVEN, 1981, capítulos, 2 e 3).

Na primeira seção mostramos, por meio de exemplos, que é possível aplicar diretamente o conhecimento dos produtos notáveis e dos trinômios de grau dois na determinação de extremos de funções de uma ou duas variáveis.

Na segunda seção, tratamos de problemas geométricos como aplicações dos produtos notáveis e trinômios. Alguns problemas aparecem discutidos no capítulo 3 do texto citado acima bem como em vários outros textos citados na bibliografia.

Por fim, na terceira seção, abordamos a prova das desigualdades entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática para dois números reais positivos a partir dos produtos notáveis. Além disso, aplicamos essas desigualdades para solucionar problemas que se referem a máximos ou mínimos.

3.1 Aplicações algébricas de produtos notáveis

Um tema bastante explorado na Educação Básica, por volta do 9º ano do Ensino Fundamental é o conceito de produtos notáveis, dentre eles, o trinômio do segundo grau é um caso muito conhecido e trabalhado pelos alunos. No entanto, seu tratamento costuma ficar limitado a processos algébricos de fatoração e desenvolvimento.

Veremos nessa seção que o conhecimento dos produtos notáveis e do fato que o quadrado de todo número é positivo ou nulo – “ $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \geq 0$ ” – pode funcionar como requisito principal para situações que envolvam problemas de extremos, ou seja, de máximos ou mínimos.

Exemplo 1. Determinação do extremo de uma função quadrática (e do vértice da parábola que corresponde ao seu gráfico)

- a)** $f(x) = 20x - x^2$ para todo x real.

Como $f(10) = 100$ e

$$20x - x^2 = -(x^2 - 20x) = -(x - 10)^2 + 100 \leq 100$$

então, o valor máximo de $20x - x^2$ é 100, obtido quando $x = 10$. Logo $(10, 100)$ são as coordenadas do vértice da parábola dessa função.

- b)** $f(x) = 50 + 20x - x^2$ para todo x real.

Usando a), como 50 é uma constante seu máximo é 150 quando $x = 10$. Com isso, $(10, 150)$ são as coordenadas do vértice.

- c)** $f(x) = cx - x^2$ para todo x real e c constante. Como

$$cx - x^2 = -(x^2 - cx) = -\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4} \leq \frac{c^2}{4}$$

e $f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{4}$ então, o maior valor de $cx - x^2$ é $\frac{c^2}{4}$ obtido quando $x = \frac{c}{2}$.

Portanto $\left(\frac{c}{2}, \frac{c^2}{4}\right)$ são as coordenadas do vértice de f .

- d)** $f(x) = x^2 - cx$ para todo x real e c constante.

Como $cx - x^2$ é o oposto de $x^2 - cx$, então, usando c), o valor mínimo de

$f(x)$ é $-\frac{c^2}{4}$, obtido quando $x = \frac{c}{2}$. Logo $\left(\frac{c}{2}, -\frac{c^2}{4}\right)$ são as coordenadas

do vértice de f .

- e)** $f(x) = cx + x^2$ para todo x real e c constante. Como

$$cx + x^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} \geq -\frac{c^2}{4}$$

e $f\left(-\frac{c}{2}\right) = -\frac{c^2}{4}$ então, o menor valor de $x^2 + cx$ é $-\frac{c^2}{4}$ obtido quando $x = -\frac{c}{2}$.

f) Caso geral $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Como

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

e a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ assume sempre números não negativos,

analisemos os valores máximos ou mínimos para f conforme os sinais de a e de Δ :

- $a > 0$ e $\Delta > 0 \Rightarrow f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, ocorrendo o mínimo $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.
- $a > 0$ e $\Delta = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$, ocorrendo o mínimo $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- $a > 0$ e $\Delta < 0 \Rightarrow f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, ocorrendo o mínimo $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.
- $a < 0$ e $\Delta > 0 \Rightarrow f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, ocorrendo o máximo $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.
- $a < 0$ e $\Delta = 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$, ocorrendo o máximo $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- $a < 0$ e $\Delta < 0 \Rightarrow f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, ocorrendo o máximo $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Exemplo 2. Determinação do valor mínimo de $x^2 + y^2 + ax + by + c$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ para a, b e c constantes reais.

Conforme o exemplo anterior, temos que o mínimo de $x^2 + ax$ é $-\frac{a^2}{4}$ que ocorre quando $x = -\frac{a}{2}$ e o mínimo de $y^2 + by$ é $-\frac{b^2}{4}$ ocorrendo quando $y = -\frac{b}{2}$.

Portanto, o mínimo de $x^2 + y^2 + ax + by + c$ é $c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$, que ocorre quando $(x, y) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ pois c é uma constante.

Exemplo 3.a) Se a soma de dois números reais x e y é uma constante c então seu produto xy é máximo quando $x = y = \frac{c}{2}$.

De fato, $x + y = c \Rightarrow y = c - x$, têm-se

$$xy = x(c - x) = cx - x^2 = -\left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}\right] = \frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 \leq \frac{c^2}{4}.$$

O valor máximo $\frac{c^2}{4}$ ocorre quando $x = y = \frac{c}{2}$.

Em outras palavras, a função $f(x, y) = xy$ restrita à reta $x + y = c$ atinge o maior valor $\frac{c^2}{4}$ quando $x = y = \frac{c}{2}$. Vejamos as possibilidades dos valores de c .

1° caso: $c > 0$

Figura 19: Máximo de $f(x, y) = xy$ restrita à reta $x + y = c > 0$.

2° caso: $c = 0$

Figura 20: Máximo de $f(x, y) = xy$ restrita à reta $x + y = c = 0$.

3° caso: $c < 0$

Figura 21: Máximo de $f(x, y) = xy$ restrita à reta $x + y = c < 0$.

Exemplo 3.b) Se o produto de dois números reais positivos quaisquer x e y é uma constante $c > 0$, então, sua soma $x + y$ é mínima quando $x = y = \sqrt{c}$.

De fato, como $xy = c \Rightarrow y = \frac{c}{x}$ então

$$x + y = x + \frac{c}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{c}{x}} \right)^2 + 2\sqrt{c} \geq 2\sqrt{c}$$

e seu valor mínimo $2\sqrt{c}$ ocorre para $\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{c}{x}} \right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = y = \sqrt{c}$.

Assim, mostramos que a função $f(x, y) = x + y$ restrita ao ramo da hipérbole $xy = c > 0$ com $x, y > 0$ atinge o menor valor quando $x = y = \sqrt{c}$.

Tomando $c = 9$, por exemplo, podemos obter a seguinte representação geométrica:

Figura 22: Mínimo de $f(x, y) = x + y$ restrita à hipérbole $xy = c > 0$.

Exemplo 4.a) Determinação do maior valor de $f(x, y) = xy$ restrita à reta $20x + y = 180$.

De acordo com o exemplo 3.a) anterior, se $20x + y = 180$ então o maior valor para o produto $20xy$ ocorre quando $20x = y = 90$, isto é, quando $x = \frac{9}{2}$ e $y = 90$.

Portanto, $f\left(\frac{9}{2}, 90\right) = 405$ é o maior valor assumido por $f(x, y) = xy$ quando restrita à reta $20x + y = 180$.

Exemplo 4.b) Determinação do menor valor da função $f(x, y) = ax + by$, a e b constantes positivas, restrita ao ramo da hipérbole $xy = c > 0$ com x e y positivos.

Basta aplicar o Exemplo 3.b) para $u = ax$ e $v = by$ cujo produto uv é a constante abc para concluir que o mínimo de $u + v$ é obtido quando $u = v = \sqrt{abc}$ e o menor valor da soma é $2\sqrt{abc}$.

Exemplo 5.a) Determinação do mínimo da função $f(x) = x + \frac{1}{x}$ em $]0, \infty[$.

Como $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ e $x^2 + 1 \geq 2x$ pois $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ então

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geq \frac{2x}{x} = 2.$$

Assim, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ e $f(1) = 2$ logo para $x = 1$ temos que 2 é o valor mínimo de f em $]0, \infty[$. Além disso, nesse intervalo f não atinge valor máximo.

Observação: No intervalo $]-\infty, 0[$ a função f atinge máximo apesar de não atingir mínimo. De fato, de $x^2 + 1 \geq -2x$ pois $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$, tem-se:

$$\frac{x^2 + 1}{x} \leq \frac{-2x}{x} = -2 \text{ para } x < 0.$$

E como $f(-1) = -2$ tem-se o valor máximo -2 para f em $]-\infty, 0[$. Segue o gráfico para ambas as possibilidades.

Figura 23: Extremos de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Exemplo 5.b) A função $f(x) = x + \frac{k}{x}$, para todo $x > 0$ e $k > 0$ (constante) assume o valor mínimo que é $2\sqrt{k}$ quando $x = \sqrt{k}$.

Como $f(x) = \frac{x^2 + k}{x}$ e $x^2 + k \geq 2x\sqrt{k}$ pois $x^2 - 2x\sqrt{k} + k = (x - \sqrt{k})^2 \geq 0$

então $\frac{x^2 + k}{x} \geq \frac{2x\sqrt{k}}{x} = 2\sqrt{k}$. Logo para $x > 0$ temos $x + \frac{k}{x} \geq 2\sqrt{k}$ e seu mínimo $2\sqrt{k}$ ocorre em $x = \sqrt{k}$. Graficamente representado:

Figura 24: Gráfico de $f(x) = x + \frac{k}{x}$ em $]0, \infty[$ para $k > 0$.

Para $x < 0$ e $k > 0$, não existe mínimo para f conforme a figura:

Figura 25: Gráfico de $f(x) = x + \frac{k}{x}$ para $x \in]-\infty, 0[$.

Já para $k < 0$, independente dos valores assumidos por x , f não assume nem mínimo nem máximo.

Figura 26: Gráfico de $f(x) = x - \frac{k}{x}$, $k > 0$.

Exemplo 5.c) Determinação do valor máximo de $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $x^4 + 1 \geq 2x^2$ pois $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$ então $\frac{x^4 + 1}{x^2} \geq \frac{2x^2}{x^2} = 2$.

Portanto, $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$, sendo $\frac{1}{2}$ o valor máximo de f assumido em $x = -1$ e em $x = 1$.

Exemplo 6. Determinação da menor distância de um ponto $(c, 0)$ à parábola dada por $y^2 = 4x$. Discussão de todas as possibilidades dependendo dos valores de c .

A distância de $(c, 0)$ a um ponto (x, y) qualquer da curva $y^2 = 4x$ é dada por

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + 4x}.$$

Procuramos pelo valor de x , $x \geq 0$, que minimize o quadrado dessa distância, uma vez que este mesmo valor minimiza a própria distância. Assim, como

$$f(x) = (x-c)^2 + 4x = [x - (c-2)]^2 + 4c - 4 \geq 4c - 4$$

e para $x = c - 2$ vale a igualdade, então $f(c-2) = 4c - 4$ é o mínimo de f .

Quando $c = 2$,

$f(x) = (x - c)^2 + 4x = x^2 + 4$ e o mínimo de $f(x)$ para $x \geq 0$ é $f(0) = 4$.

Assim, a distância mínima de $(2,0)$ à curva $y^2 = 4x$ é 2 que é a distância de $(2,0)$ ao ponto $(0,0)$ da parábola.

Figura 27: Distância mínima de $(c,0)$ à curva $y^2 = 4x$ (caso $c = 2$).

Quando $c > 2$,

$f(x) = [x - (c - 2)]^2 + 4c - 4$ e o mínimo de $f(x)$ para $x \geq 0$ é $f(c - 2) = 4c - 4$.

Nesse caso a distância mínima d de $(c,0)$ à parábola é $2\sqrt{c-1} > 2$, que é a distância de $(c,0)$ a cada um dos pontos $(c-2, \pm 2\sqrt{c-2})$ da parábola.

Figura 28: Distância mínima de $(c,0)$ à curva $y^2 = 4x$ (caso $c > 2$).

Quando $c < 2$,

O mínimo de $f(x)$ para x real é $f(c-2)=4c-4$, mas como $c < 2$ e devemos procurar o mínimo de $f(x)$ para $x \geq 0$, então $f(0) = c^2$ é o mínimo de f para $x \geq 0$. Nesse caso a distância mínima de $(c,0)$ à parábola é $d = |c|$.

Figura 29: Distância mínima de $(c,0)$ à curva $y^2 = 4x$ (caso $c < 2$).

3.2 Aplicações geométricas de produtos notáveis e trinômios de grau 2

Nesta seção trazemos algumas aplicações geométricas que utilizam em suas soluções, resultados algébricos para o encontro de valores extremos, como vistos na seção anterior. Deste modo, estabelecemos uma relação entre álgebra, produtos notáveis e geometria com a procura de pontos de máximos ou mínimos.

Exemplo 0. Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio retilíneo. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Determinação das dimensões do campo retangular de maior área que ele pode cercar.

Figura 30: Problema do cercado sobre a margem do rio.

Solução 1. Sejam x e y as medidas do retângulo então o perímetro do cercado pode ser escrito como $P = 2x + y = 1200$ e sua área $A = xy$. Aplicando à área em função de x a técnica de completamento de quadrado usada na seção anterior, tem-se:

$$A(x) = x(1200 - 2x) = -2(x^2 - 600x) = 2[300^2 - (x - 300)^2] \leq 2(300)^2.$$

Dessa desigualdade, como $A(300) = 2(300)^2$, podemos deduzir que $x = 300$ gera a maior área de $2.(300)^2 = 180.000 \text{ m}^2$ para o cercado que tem dimensões $x = 300 \text{ m}$ e $y = 600 \text{ m}$.

Exemplo 1. Determinação do retângulo de maior área inscrito numa circunferência de raio $R > 0$.

Sejam x e h as medidas dos lados de um retângulo genérico $ABCD$, inscrito na circunferência λ , conforme a figura:

Figura 31: Retângulo ABCD inscrito em uma circunferência λ .

Do teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos:

$$(2R)^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{4R^2 - x^2} \quad (I).$$

Logo a área do retângulo $ABCD$ é dada por $A = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Como $2ab \leq a^2 + b^2$ pois $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$ e vale $2ab = a^2 + b^2$ se e somente se $a = b$ então para $a = x$ e $b = \sqrt{4R^2 - x^2}$ temos:

$$2x\sqrt{4R^2 - x^2} \leq x^2 + 4R^2 - x^2 \Rightarrow A \leq 2R^2$$

ocorrendo a área máxima $A = 2R^2$ quando $x = \sqrt{4R^2 - x^2}$, ou seja, $x = R\sqrt{2}$.

De $x = R\sqrt{2}$ em (I), tem-se $h = R\sqrt{2}$. Portanto o retângulo de maior área procurado é o quadrado de lado $R\sqrt{2}$.

Exemplo 2. Determinação da medida do menor segmento que divide um triângulo dado em duas partes de igual

a) área.

Seja ABC um triângulo de área $2S$ e com medida do ângulo $B\hat{A}C = \alpha$. Procuremos pela menor medida m do segmento oposto a α que corta AB em D e AC em E , de modo que, considerando $AD = x$ e $AE = y$, a área do triângulo ADE seja

$$S = \frac{xy \sin \alpha}{2} \quad (I).$$

Figura 32: Triângulo ABC com segmento $DE=m$.

Da lei dos cossenos temos $m^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$ e da desigualdade $x^2 + y^2 \geq 2xy$ segue que $m^2 \geq 2xy(1 - \cos \alpha)$. Daí utilizando (I), temos

$$m^2 \geq 4S \frac{(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = 4S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \text{ Portanto } m = 2\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \text{ é a solução do problema.}$$

b) perímetro.

Seja s o semiperímetro do triângulo ABC , com as notações anteriores se $DE = m$ resolve o problema então temos que ter $x + y = s$. Utilizando novamente $m^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$ e $x^2 + y^2 \geq 2xy$, tem-se:

$$m^2 = (x+y)^2 - 2xy(1+\cos \alpha) \geq (x+y)^2 - \frac{(x+y)^2}{2}(1+\cos \alpha) = \frac{(x+y)^2(1-\cos \alpha)}{2} =$$

$$\left((x+y) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \left(s \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

Assim, temos que ter $m^2 \geq \left(s \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)^2$ e, portanto, $m = s \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ é o menor comprimento procurado.

Exemplo 3.a) Determinação de uma barra HK passando por um ponto P no interior de um ângulo $\angle QOR$ de modo que a área do ΔHOK seja mínima.

Figura 33: Ângulo QOR com segmento HK passando por P .

Seja um segmento HK com $P \in HK$, $H \in OQ$ e $K \in OR$. A fim de que a área do triângulo HOK seja mínima, procuraremos as propriedades dos pontos H e K .

Traçando os segmentos MP e NP , paralelos a OR e OQ , respectivamente, obtemos os segmentos com medidas $ON = a$, $OM = b$, $NK = u$ e $MH = v$. E, portanto, $MP = a$ e $NP = b$, conforme a próxima figura:

Figura 34: Paralelogramo $MPNO$ inscrito no triângulo HOK .

Sabemos que a área do triângulo HOK é dada por $\frac{1}{2}(a+u)(b+v)\operatorname{sen}\theta$, em que

$\theta = \angle QOR$. Como a , b , $\sin \theta$ e $\frac{1}{2}$ são medidas dadas, devemos procurar pelas medidas u e v que minimizam o produto $(a+u)(b+v)$.

Da semelhança entre os triângulos HMP e PNK vale a proporção $\frac{v}{b} = \frac{a}{u}$ e, portanto, $v = \frac{ab}{u}$. Logo,

$$(a+u)(b+v) = (a+u)\left(b + \frac{ab}{u}\right) = 2ab + b\left(u + \frac{a^2}{u}\right).$$

Então, $2a$ é o menor valor para $u + \frac{a^2}{u}$, conforme visto no exemplo 5.b) da seção 3.1, obtido quando $u = a$. E de $u = a$ em $v = \frac{ab}{u}$, temos $v = b$.

Assim, basta escolher H na semirreta OQ e K na semirreta OR tais que $OH = 2b$ e $OK = 2a$ para resolver o problema.

Consideramos interessante o exemplo seguinte apesar de utilizar apenas argumentos de geometria elementar.

Exemplo 3.b) Determinação de uma barra HK passando por um ponto P no interior de um ângulo $\angle QOR$ de modo que o produto $PH \cdot PK$ seja mínimo.

Sejam $\vec{OB} = t$ a reta bissetriz do ângulo $\angle QOR$ e r sua reta perpendicular que passa por P . Além disso, consideramos H , W e K os pontos de intersecção de r com as semirretas $\vec{OQ}$, $\vec{OB}$ e $\vec{OR}$, respectivamente, conforme a figura:

Figura 35: Circunferência λ tangente ao $\angle QOR$.

Como no exemplo 3.a) anterior, traçamos PM e PN paralelos a OR e OQ respectivamente e para qualquer barra HK passando por P , temos a semelhança entre os triângulos PM e PN e entre os triângulos OKH e NKP . Disso,

$$\frac{OK}{MP} = \frac{HK}{HP} \Rightarrow OK = \frac{HK}{HP} \cdot MP \text{ e } \frac{OH}{NP} = \frac{HK}{PK} \Rightarrow OH = \frac{HK}{PK} \cdot NP$$

logo,

$$OH \cdot OK = \left(\frac{HK}{PK} \cdot NP \right) \left(\frac{HK}{HP} \cdot MP \right) = \frac{NP \cdot MP}{\left(\frac{PK}{HK} \right) \left(\frac{HP}{HK} \right)}.$$

Sendo que o mínimo de $OH \cdot OK$ é obtido para o máximo de $\left(\frac{PK}{HK} \right) \left(\frac{HP}{HK} \right)$.

Se $\frac{PK}{HK} = x$ e $\frac{HP}{HK} = y$ então $x + y = \frac{HP + PK}{HK} = \frac{HK}{HK} = 1$, logo

$(x + y)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. E, como $2xy \leq x^2 + y^2$ pois

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$, ocorrendo a igualdade se e somente se $x = y$, temos:

$$2xy \leq x^2 + y^2 = 1 - 2xy \Rightarrow 4xy \leq 1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}.$$

Com isso xy tem valor máximo igual a $\frac{1}{4}$ na ocorrência de $x = y$, ou seja, quando

$\frac{PK}{HK} = \frac{HP}{HK}$, isto é, para H e K tais que $HP = PK$. Assim, a posição de HK

para o mínimo de $OH \cdot OK$ é obtida quando P é ponto médio de HK .

Em seguida trataremos do **problema de Regiomontanus** como descrito na edição especial da Revista do Professor de Matemática elaborada para utilização no estágio 2ª edição da OBMEP (SBM, 2017, pp.45-47). Ele consiste na determinação da posição de um observador na qual um homem enxerga uma estátua segundo o maior ângulo.

Johannes Muller Von Koningsberg (1436 – 1476) foi um importante

matemático alemão do século XV e ficou mais conhecido pelo nome de Regiomontanus, uma forma latinizada do nome Koningsberg (Montanha do Rei), seu sobrenome é uma antiga cidade da Prússia que atualmente é representada pela região de Kaliningrado, na Rússia.

Regiomontanus contribuiu com diversos estudos na área da astronomia e geometria sendo que sua obra mais importante, *De Triangulus Omnimodes*, atualizou o estudo da trigonometria através de tabelas e diversas funções trigonométricas. A obra foi escrita por volta de 1464 e publicada em 1533. Dividida em cinco livros apresentou temas como trigonometria na esfera além de contribuição com definições, conceituações, notações para a trigonometria e consequentemente para a astronomia.

Em Roma, sua boa repercussão na área astronômica fez com que recebesse um convite do Papa Sisto IV para desenvolver um calendário mais aperfeiçoado em relação ao que a igreja utilizava na época. Após o êxito no trabalho foi convidado para ser o principal conselheiro. Sua morte foi causada e diagnosticada por um flagelo de uma peste, porém se especula um possível envenenamento por um inimigo descontente pela sua alta fama.

Dentre os diversos problemas matemáticos realizados por Regiomontanus, um dos mais importantes e considerado pioneiro para o tema de extremos (máximos e mínimos) é o problema do maior ou “melhor” ângulo de visão.

A seguir, apresentaremos esse problema e duas soluções: a primeira usando apenas a seção 3.1 e a segunda, usando apenas geometria plana do Ensino Fundamental, do próprio Regiomontanus.

Exemplo 4 (O problema de Regiomontanus)

Considere uma estátua BC de altura h sobre um pedestal de altura p . Suponha que um homem de altura m enxerga a mesma sob um ângulo $\alpha = \widehat{BAC}$, que varia de acordo com a distância $x = DE$ entre o homem e a base do pedestal. Vamos determinar x para que o ângulo de visão α seja o maior possível.

Figura. 37: Problema do observador e a estátua.

1º caso: $m < p$

Independentemente da distância x , temos $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. Com isso, quanto maior for a tangente desse ângulo maior será o ângulo de visão.

Na figura AF é paralelo a DE e β é a medida do ângulo $\angle CAF$.

Figura 38: Altura do observador menor que a do pedestal ($m < p$).

E assim, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}((\alpha + \beta) - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{p-m+h}{x} - \frac{p-m}{x}}{1 + \frac{p-m+h}{x} \cdot \frac{p-m}{x}} = \frac{h}{x + \frac{(p-m+h)(p-m)}{x}}.$$

Como queremos determinar x de modo a maximizar a $\operatorname{tg} \alpha$, devemos minimizar o

denominador $x + \frac{(p-m+h)(p-m)}{x}$.

Utilizando o resultado do exemplo 5a) da seção 2.1, temos que

$2\sqrt{(p-m+h)(p-m)}$ é o valor mínimo dessa função para $x > 0$ que ocorre

se $x = \sqrt{(p-m+h)(p-m)}$.

E, portanto, $\sqrt{(p-m+h)(p-m)}$ é a distância entre o observador e o pedestal que gera o maior ângulo de visão.

2º caso: $m = p$

Figura 39: Altura do observador igual a do pedestal ($m = p$).

Neste caso, é possível observar na figura que quanto menor é a distância entre o observador e o pedestal, maior e mais próximo de 90° é o seu ângulo de visão.

Analisando algebricamente temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x} \text{ e, quando } x \rightarrow 0^+, \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x} \rightarrow +\infty \text{ o que implica em } \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+.$$

3º caso: $m > p$: Temos três possibilidades:

Quando $p < m < p + h$

Figura 40: Altura do observador maior que a do pedestal ($m > p$).

Podemos observar que quanto mais próximo do pedestal o observador está, maior é o ângulo de visão e seu valor se aproxima de 180° .

De fato, de $p < m < p + h$ temos $p - m < 0 < p - m + h$.

E daí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{h-m+p}{x} + \frac{m-p}{x}}{1 - \left(\frac{h-m+p}{x}\right)\left(\frac{m-p}{x}\right)} = \\ &= \frac{\frac{h}{x}}{1 - \frac{(h-m+p)(m-p)}{x^2}} = \frac{h}{x - \frac{(h-m+p)(m-p)}{x}} = \frac{h}{x - \frac{c}{x}} \quad (c > 0) \end{aligned}$$

Assim, se $x \rightarrow 0^+$, $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow 0^-$ e então $\alpha \rightarrow \pi^-$.

Quando $m = p + h$

Figura 41: Altura do observador igual à do pedestal com a estátua ($m = p + h$).

Temos $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x} = \frac{m-p}{x}$ e, quando $x \rightarrow 0^+$, $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow +\infty$ e $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Quando $m > p + h$

Figura 42: Altura do observador maior que a do pedestal com a estátua ($m > p + h$).

Nesta última possibilidade,

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}((\alpha + \theta) - \theta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \theta) - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \theta) \operatorname{tg} \theta} = \frac{\frac{m-p}{x} - \frac{m-p-h}{x}}{1 + \frac{m-p}{x} \cdot \frac{m-p-h}{x}} = \frac{h}{x + \frac{(m-p)(m-p-h)}{x}}$$

Como queremos maximizar a $\operatorname{tg} \alpha$ é preciso minimizar o denominador

$x + \frac{(m-p)(m-p-h)}{x}$ e, pelo Exemplo 5.b) da seção 2.1, temos que o mínimo é $2\sqrt{(m-p)(m-p-h)}$ que ocorre quando $x = \sqrt{(m-p)(m-p-h)}$.

A solução de Regiomontanus

Apresentaremos agora a solução proposta pelo próprio Regiomontanus, no caso $m < p$, com o uso de um círculo auxiliar.

Na figura, a estátua é representada por BC , o pedestal por CD e o observador por AE .

Cabe ressaltar, que este interessante problema de Reigiomontanus além de oferecer possibilidades para o professor utilizar os seus *conhecimentos especializados do conteúdo* por meio de diferentes abordagens de solução, explicação informal sobre o conceito de limites, articulação interdisciplinar entre a matemática e a física entre outras habilidades, fica evidente que o professor também pode usar seu *conhecimento de horizontes dos conteúdos* revisitando os conceitos de produtos notáveis com as técnicas de completamento de quadrados para deduzir o mínimo de

$x + \frac{(p-m+h)(p-m)}{x}$, as relações trigonométricas no triângulo retângulo, as identidades trigonométricas, além dos conceitos de semelhança de triângulos e das propriedades de ângulo na circunferência.

3.3 Desigualdades entre as médias para 2 números reais positivos

Nesta seção mostramos como as desigualdades entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, para quaisquer dois números positivos, aparecem a partir de produtos notáveis.

Fazemos também algumas aplicações para ver como essas desigualdades podem auxiliar na resolução de problemas que envolvem máximos ou mínimos.

Sejam dois números reais positivos a e b , observamos médias e suas relações de desigualdade a partir de produtos notáveis conforme segue:

$$\bullet \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Como $M_A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ e $M_G(a,b) = \sqrt{ab}$ (definidas no Cap 2) então,

$M_A(a,b) \geq M_G(a,b)$ é a relação de desigualdade entre ambas.

Observamos que ocorre a igualdade se e somente se $a = b$. De fato:

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$$

$$\bullet \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq \frac{2ab}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Como $M_H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ é a média harmônica entre os números a e b

então, $M_G(a,b) \geq M_H(a,b)$ é a relação de desigualdade entre a média harmônica com a média geométrica.

Observamos que ocorre a igualdade se e somente se $a = b$. De fato:

$$a = b \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b = 0 \Leftrightarrow a + b = \frac{2ab}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\bullet \quad \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \stackrel{(I)}{\leq} \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Logo. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$

A passagem (I) segue de $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Como $M_Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ é a média quadrática entre a e b , então,

$M_Q(a,b) \geq M_A(a,b)$ é a relação de desigualdade entre a média quadrática e a média aritmética.

Observamos que vale a igualdade se e só se $a = b$. De fato:

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \stackrel{(I)}{=} \frac{2a^2 + 2b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Assim, provamos o seguinte

Teorema. Se a e b são números reais positivos então $M_H(a,b) \leq M_G(a,b) \leq M_A(a,b) \leq M_Q(a,b)$. Sendo que as igualdades ocorrem se, e somente se, $a = b$.

Vejamos alguns problemas e aplicações que podem ser associados a essas desigualdades.

Aplicação 0. Dentre todos os retângulos com perímetro fixo o quadrado é o que tem a maior área. (Vimos duas diferentes soluções para esta aplicação na seção 1.4).

Se x e y são as medidas do retângulo então o seu perímetro pode ser escrito como $P = 2x + 2y$ e sua área como $A = xy$. Aplicando $M_A \geq M_G$ para x e y temos:

$$\frac{P}{4} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow A \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2.$$

Conforme o Teorema escrito acima, como ocorre a igualdade se e só se $x = y$

então a área máxima é $\frac{P^2}{4}$ e obtida se e só se $x = y = \frac{P}{4}$. Com isso, dentre todos

os retângulos de perímetro fixo P , o quadrado de lado $\frac{P}{4}$ é o que tem a área máxima.

Aplicação 1. Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio retilíneo. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Determinação das dimensões do campo retangular de maior área que ele pode cercar.

Figura 45: Problema do cercado sobre a margem do rio.

Solução 1. Sejam x e y as medidas do retângulo então o perímetro do cercado pode ser escrito como $P = 2x + y = 1200$ (*) e sua área $A = xy$. Utilizando a desigualdade $M_A \geq M_G$ para os termos $2x$ e y decorre que:

$$600 = \frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy} \Rightarrow A \leq 180000.$$

Dessa desigualdade final podemos deduzir que $180000 m^2$ é um limitante superior para área do terreno. E conforme o Teorema desta seção ocorre a igualdade em

$$\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy} \text{ se e só se } 2x = y. \text{ Logo, } 600 = \frac{2x + y}{2} \stackrel{2x=y}{\Rightarrow} x = 300 \text{ e } y = 600.$$

Sendo essas as dimensões do campo retangular de maior área que é $A = 180000 m^2$.

Solução 2. Usaremos a reflexão do cercado em relação à margem do rio, conforme a figura

Figura 46: Solução por reflexão sobre a margem do rio.

Disso obtemos o retângulo $AA'B'B$ com perímetro $2400 m$ (dobro do perímetro do cercado). Conforme a Aplicação 0 desta seção, entre todos os retângulos com perímetro fixo o quadrado é o que tem a maior área.

Portanto o quadrado de lado $600 m$ é o retângulo $AA'B'B$ de maior área. E com

isso o cercado terá comprimentos $AB = 600 m$ e $BC = AD = \frac{BB'}{2} = 300 m$.

Claramente, observamos nesta solução mais um exemplo de *conhecimento especializado do conteúdo* do professor, para que possa enriquecer suas aulas e enriquecer a aprendizagem dos seus alunos sobre esse tipo de problema.

Aplicação 2. Utilizando-se que $M_G(a,b) = \sqrt{M_H(a,b)M_A(a,b)}$ e as desigualdades entre as médias harmônica, geométrica e aritmética é possível obter avaliações para $\sqrt{7}$.

De fato,

$$\sqrt{M_H(a,b)M_A(a,b)} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}} = \sqrt{ab} = M_G(a,b).$$

Como $\sqrt{7}$ é a média geométrica entre 7 e 1, usando o resultado acima temos:

$$M_H(7,1) = \frac{14}{8}, \quad M_A(7,1) = 4 \quad \text{e} \quad M_G(7,1) = \sqrt{7} = \sqrt{M_H(7,1)M_A(7,1)}$$

Aplicando $M_H \leq M_G \leq M_A$ para os diferentes números 7 e 1 temos a seguinte avaliação para $\sqrt{7}$:

$$1,75 = \frac{14}{8} < \sqrt{7} < 4$$

Por outro lado temos

$$M_H\left(\frac{14}{8}, 4\right) = \frac{56}{23}, \quad M_A\left(\frac{14}{8}, 4\right) = \frac{23}{8} \quad \text{e} \quad M_G\left(\frac{14}{8}, 4\right) = \sqrt{7} = \sqrt{M_H\left(\frac{14}{8}, 4\right)M_A\left(\frac{14}{8}, 4\right)}$$

logo

$$\frac{56}{23} < \sqrt{7} < \frac{23}{8}$$

e daí a seguinte avaliação para $\sqrt{7}$:

$$2,434 < \frac{56}{23} < \sqrt{7} < \frac{23}{8} = 2,875.$$

Como

$$M_H\left(\frac{56}{23}, \frac{23}{8}\right) = \frac{2576}{977}, \quad M_A\left(\frac{56}{23}, \frac{23}{8}\right) = \frac{977}{368} \text{ e } M_G\left(\frac{56}{23}, \frac{23}{8}\right) = \sqrt{\frac{2576}{977} \cdot \frac{977}{368}} = \sqrt{7}$$

então

$$\frac{2576}{977} < \sqrt{7} < \frac{977}{368}$$

Daí outra avaliação para $\sqrt{7}$:

$$2,6366 < \sqrt{7} < 2,6549$$

A partir dessas três iterações apenas, obtemos uma aproximação razoável para $\sqrt{7}$. Pois da última desigualdade, utilizando a média geométrica dos valores 2,6366 e 2,6549 conforme a relação entre M_G , M_H e M_A enunciada e mostrada anteriormente podemos estimar $\sqrt{7} \approx 2,64573$. Uma ótima aproximação para cinco casas decimais, uma vez que $\sqrt{7} = 2,64575131\dots$

Aplicação 3. De todos os pontos $P(x, y)$ no primeiro quadrante na circunferência centrada na origem do plano cartesiano com raio de 8 unidades é possível determinar o maior valor possível para a soma $x + y$.

Figura 47: Circunferência com centro na origem e raio de 8 uc (unidades de comprimento).

Sabe-se que $x^2 + y^2 = 64$ é a equação da circunferência dada.

De acordo com a desigualdade $M_A \leq M_Q$ para os valores x e y , temos:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{64}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Logo, $8\sqrt{2}$ uc é um limitante superior para a soma $x+y$. De acordo com o Teorema desta seção,

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow x=y, \text{ assim,}$$

$$\frac{x+y}{2} = 4\sqrt{2} \stackrel{x=y}{\Leftrightarrow} x=y=4\sqrt{2}.$$

Portanto, $(x, y) = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ é o ponto cuja soma das coordenadas é máxima e igual a $8\sqrt{2}$ uc.

Aplicação 4. Encontro do valor mínimo de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sujeita à restrição $2x+2y=15$ para x e y positivos.

Da desigualdade $M_A \geq M_H$ para os números x e y , temos:

$$\frac{15}{4} = \frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Logo, $\frac{8}{15}$ é um limitante inferior para a soma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Do Teorema desta seção

$$\frac{x+y}{2} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \Leftrightarrow x=y, \text{ então}$$

$$\frac{15}{4} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \stackrel{x=y}{\Leftrightarrow} x=y = \frac{15}{4}.$$

Portanto, $x=y=\frac{15}{4}$ são os valores que fazem a soma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ atingir o valor mínimo $\frac{8}{15}$.

Aplicação 5. Determinação do maior valor de $x\sqrt{1-x^2}$, $\forall x, 0 \leq x \leq 1$.

O valor de x que maximiza $x\sqrt{1-x^2}$ também gera o maior valor para o quadrado desse produto. Logo, de $\left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x^2(1-x^2)$ e da desigualdade $M_A \geq M_G$ para x^2 e $1-x^2$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2 + (1-x^2)}{2} \geq \sqrt{x^2(1-x^2)} \Rightarrow x^2(1-x^2) \leq \frac{1}{4}.$$

Vale a igualdade $x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$, se e somente se ocorrer $x^2 = 1-x^2$.

Disso, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o valor que maximiza $x^2(1-x^2)$, pois $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0,1]$. Portanto,

$$x\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \text{ é o valor máximo procurado.}$$

Observação: Para a determinação do mínimo de $f(x) = 6x + \frac{24}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ caberia

a aplicação de $M_A \geq M_G$. Porém, a desigualdade $\frac{6x + \frac{24}{x^2}}{2} \geq \sqrt{6x \frac{24}{x^2}} = \sqrt{\frac{144}{x}}$ não admite um valor mínimo para $6x + \frac{24}{x^2}$, pois a expressão $2\sqrt{\frac{144}{x}}$ cresce indefinidamente quando $x > 0$ se aproxima de 0.

No entanto, na Aplicação 6 do próximo capítulo, resolveremos o problema aplicando a desigualdade entre as médias para 3 elementos, escrevendo

$$6x + \frac{24}{x^2} = 3x + 3x + \frac{24}{x^2}$$

pois o produto das parcelas neste caso é uma constante.

Outras observações:

Nas aplicações anteriores é possível perceber que existe um único número para o

qual a função atinge o máximo ou mínimo. Entretanto, existem funções que assumem o valor extremo em mais de um valor ou em nenhum. Por isso se faz necessário estudar o domínio de cada expressão (como função) para analisar essas restrições. Vejamos alguns exemplos em que é preciso essa análise.

- No exemplo 5.a) da seção 3.1, pediu-se para encontrar o mínimo da função $x + \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$. Na solução, encontrou-se o mínimo 2 que ocorre no único valor $x = 1$. No entanto, caso restringíssemos o intervalo de definição da função em questão para $]1, \infty[$, não haveria mínimo para $x + \frac{1}{x}$, pois obviamente $x = 1 \notin]1, \infty[$.
- O produto $(2 + \operatorname{sen} x)(2 - \operatorname{sen} x)$ em $\mathbb{R}$ assume máximo 4 para a infinidade de valores de x . Sendo $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A expressão $2 + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}$ em $\mathbb{R}$ assume mínimo 2 para a infinidade de valores de x . Sendo $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4 Desigualdades entre médias para 3 e 4 números positivos

Neste capítulo, apresentamos com demonstrações embasadas em Niven (1981) e Nahin (2004), os teoremas que abordam as desigualdades entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática, limitando-nos aos casos $n=3$ e $n=4$ números positivos.

O caso geral para n números positivos será considerado no capítulo seguinte. Optamos por deixar um capítulo exclusivo para generalização, aprofundamento e aplicação das referidas desigualdades.

Apresentamos também aplicações desses teoremas

- na obtenção dos extremos condicionados de algumas funções que em geral são trabalhadas apenas em cursos de cálculo diferencial.
- em geometria elementar e
- na obtenção de várias desigualdades numéricas.

Como no capítulo anterior, essas aplicações foram escolhidas em (NIVEN, 1981) e em diversos outros textos citados na bibliografia sendo que alguns deles preparam os alunos para Olimpíadas de Matemática.

O conteúdo que apresentamos aqui pode servir ao professor como material de consulta e de auxílio para lidar em algum ano do ensino médio, de acordo com o conhecimento anteriormente ensinado aos discentes.

Vimos no Capítulo 2, seções 2.1 e 2.2, que as médias aritmética (M_A) e geométrica (M_G) de n números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ são os números $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ e $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, respectivamente. Com essa notação enunciamos o seguinte:

Teorema 1 Se a_1, a_2, a_3 e a_4 são números positivos então $M_A(a_1, a_2, a_3) \geq M_G(a_1, a_2, a_3)$ e $M_A(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq M_G(a_1, a_2, a_3, a_4)$, ocorrendo as igualdades se e somente se os números a_i são iguais.

Demonstração (NIVEN, 1981): O caso $n=4$ de $M_A \geq M_G$ segue dessa mesma desigualdade para $n=2$ aplicada duas vezes. Assim, para quaisquer números positivos a_1, a_2, a_3 e a_4 , temos:

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} \text{ e } a_3 + a_4 \geq 2\sqrt{a_3 a_4}.$$

Logo

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} \geq 2\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Já o caso $n = 3$, decorre da aplicação de $M_A \geq M_G$ para $n = 4$, substituindo a_4 por

$(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}$. Vejamos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \geq 4 \left[(a_1 a_2 a_3)^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 4(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} - (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

Provemos que para $n = 4$, $M_A = M_G \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, sendo que para $n = 3$ a prova é análoga.

($\Leftarrow$) Supondo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{4a_1}{4} = a_1 \text{ e } \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \sqrt[4]{a_1^4} = a_1.$$

($\Rightarrow$) Supondo $M_A = M_G$ vamos mostrar que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. Por contradição, supondo que a_1, a_2, a_3 e a_4 não sejam todos iguais mostraremos que $M_A > M_G$ através do seguinte:

Algoritmo:

Sejam $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ não todos iguais cuja média aritmética é

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Trocando a_1 por A e a_4 por $a_1 + a_4 - A$ temos 4 novos números

$$A, a_2, a_3, a_1 + a_4 - A$$

tais que

- são positivos pois $A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} < a_4$ logo $a_1 + a_4 - A > 0$.
- sua média aritmética é igual a A .
- $a_1 a_2 a_3 a_4 < A a_2 a_3 (a_1 + a_4 - A) < A^4$ pois

$$a_1 a_4 < A(a_1 + a_4 - A) \Leftrightarrow A^2 - A(a_1 + a_4) + a_1 a_4 = (A - a_1)(A - a_4) < 0 \text{ e}$$

$$a_1 < A < a_4.$$

Se esses novos números forem todos iguais teremos $a_1 a_2 a_3 a_4 < A^4$.

Se não forem todos iguais, o menor dos números não é A pois sua média aritmética que é A é maior que o menor dos números. E também, o maior dos novos números $A, a_2, a_3, a_1 + a_4 - A$ não é A .

Assim repetimos o algoritmo. Se todos foram iguais temos $a_1 a_2 a_3 a_4 < A^4$ se não repetimos o algoritmo trocando o menor por A . Consequentemente o maior será substituído por A e portanto

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < A^4 \Leftrightarrow (a_1 a_2 a_3 a_4)^{\frac{1}{4}} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \quad (M_A > M_G). \blacksquare$$

Ilustrações do algoritmo:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2.4.6.8 < 4.5.5.6 & \text{b) } 3.6.7.8 < 5.6.6.7 \\ < 5.5.5.5. & < 6.6.6.6. \end{array}$$

Aplicação 1.a) Entre todos os triângulos com o mesmo perímetro $2p$, o equilátero é o que tem a maior área.

Sejam x, y e z os lados de um triângulo qualquer com perímetro $2p$.

Sabe-se da fórmula de Heron que a área do triângulo pode ser expressa por

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}. \quad \text{Como } \frac{A^2}{p} = (p-x)(p-y)(p-z) \quad \text{basta}$$

procurarmos por x, y e z que maximizem o produto $(p-x)(p-y)(p-z)$.

Aplicando $M_A \geq M_G$ para $p-x$, $p-y$ e $p-z$, para x , y e z lados de um triângulo de perímetro $2p$, temos:

$$\frac{p}{3} = \frac{p-x+p-y+p-z}{3} \geq \sqrt[3]{(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Como $(p-x)(p-y)(p-z) = \frac{p^3}{27}$ se e somente se $p-x = p-y = p-z$, ou

seja, $x = y = z = \frac{2p}{3}$, portanto o triângulo equilátero é o de maior área.

Cabe destacar que foi possível aplicar a desigualdade acima para $p-x$, $p-y$ e $p-z$ porque são números positivos para quaisquer x , y e z lados de um triângulo de perímetro $2p$. De fato,

$$\circ p-x = \frac{x+y+z}{2} - x = \frac{(y+z)-x}{2} > 0$$

$$\circ p-y = \frac{x+y+z}{2} - y = \frac{(x+z)-y}{2} > 0$$

$$\circ p-z = \frac{x+y+z}{2} - z = \frac{(x+y)-z}{2} > 0$$

pois num triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é sempre maior que o comprimento do terceiro lado.

Aplicação 1.b) Entre todos os triângulos de área dada o triângulo equilátero é o de menor perímetro.

Se x , y e z são lados de um triângulo qualquer de área A fixada, com as considerações da aplicação anterior, de $M_A \geq M_G$ para $p-x$, $p-y$ e $p-z$, temos:

$$\frac{p}{3} = \frac{3p-(x+y+z)}{3} = \frac{p-x+p-y+p-z}{3} \geq \sqrt[3]{(p-x)(p-y)(p-z)} \Rightarrow$$

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{A^2}{p}} \Rightarrow \frac{p^3}{27} \geq \frac{A^2}{p} \Rightarrow p \geq \sqrt[4]{27A^2} \Rightarrow 2p \geq 2\sqrt[4]{27A^2}.$$

Como a igualdade ocorre quando $p-x = p-y = p-z$ então o mínimo para o

perímetro $2p$ é $2\sqrt[4]{27A^2}$, obtido quando $x = y = z = \frac{2\sqrt[4]{27A^2}}{3}$, ou seja, quando o triângulo é equilátero de lado $\frac{2\sqrt[4]{27A^2}}{3}$.

Aplicação 1.c) Entre todos os triângulos com uma base dada e o perímetro dado o que tem a maior área é o triângulo isósceles com essa base.

Sejam x, y os lados e b a base de um triângulo qualquer tal que $x + y + b = 2p$ e $A^2 = p(p-x)(p-y)(p-b)$, onde p é o semi-perímetro e A a área desse triângulo. De $M_A \geq M_G$ para $p-x$ e $p-y$, temos:

$$\frac{b}{2} = \frac{2p-(x+y)}{2} = \frac{p-x+p-y}{2} \geq \sqrt{(p-x)(p-y)} = \sqrt{\frac{A^2}{p(p-b)}} \Rightarrow A \leq \frac{b\sqrt{p(p-b)}}{2}.$$

Como a igualdade ocorre quando $p-x = p-y$ então o máximo para a área A é $\frac{b\sqrt{p(p-b)}}{2}$, obtido quando $x = y$, ou seja, quando o triângulo é isósceles de lados $\frac{2p-b}{2}$ e base b .

Em seguida apresentamos uma solução geométrica desse problema usando o conceito de elipse.

Solução geométrica

Sejam dois pontos distintos Q e R , pertencentes ao plano, com $QR = b$ sendo b a base fixa dada. Consideramos uma elipse λ de focos Q e R com eixo maior de comprimento c ($c > b$).

Seja C o centro e P um ponto da elipse λ localizado no eixo menor.

Figura 48: Dedução do triângulo de maior área por meio de uma Elipse.

Para qualquer ponto $P_i \in \lambda$, P_i não pertencente ao eixo menor OP , temos que as alturas h_i dos triângulos QRP_i são menores que a altura h do triângulo QRP . Logo os triângulos QRP_i com $P_i \notin OP$ têm área menor que a do triângulo QRP . Por outro lado,

$$QP + PR = QP_1 + P_1R = QP_2 + P_2R = \dots = QP_i + P_iR = c$$

então os triângulos QRP_i e QRP têm perímetros iguais a $b + c$.

Além disso, é fácil ver que o triângulo QRP é isósceles.

A aplicação seguinte corresponde ao problema: *Encontrar o comprimento da maior escada que pode ser transportada do corredor de largura a ao corredor de largura b conforme a próxima figura, que aparece nos textos didáticos resolvidos com derivadas. A solução, sem derivadas, que apresentamos é uma aplicação de desigualdades trabalhadas neste capítulo.*

Aplicação 2. Dado um ponto P no interior de um ângulo reto QOR , entre todos os pontos H no lado OQ e K no lado OR de modo que H, P e K são colineares existe um par H, K tal que HK é o menor possível.

Figura 49: Ponto P no interior do ângulo reto QOR .

Traçamos um segmento HK com $P \in HK$, $H \in OQ$, $K \in OR$ e os segmentos MP e NP , paralelos a OR e OQ , respectivamente. Consideremos $NK = u$ e $MH = v$, conforme a figura imediatamente anterior.

Queremos minimizar $HK = KP + PH$, ou seja, $\sqrt{b^2 + u^2} + \sqrt{a^2 + v^2}$. Da semelhança entre os triângulos MPH e NKP temos a relação $v = \frac{ab}{u}$. Logo,

$$\sqrt{b^2 + u^2} + \sqrt{a^2 + v^2} = (b^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} + \left(a^2 + \frac{a^2 b^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (b^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a}{u}\right).$$

Como os valores de u que minimizam $(b^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a}{u}\right)$, minimizam também o quadrado desse produto, basta procurar o mínimo de

$$\begin{aligned} (b^2 + u^2) \left(1 + \frac{2a}{u} + \frac{a^2}{u^2}\right) &= a^2 + b^2 + \left(\frac{2ab^2}{u} + u^2\right) + \left(2au + \frac{a^2 b^2}{u^2}\right) = \\ &= a^2 + b^2 + \underbrace{\left(\frac{ab^2}{u} + \frac{ab^2}{u} + u^2\right)}_{f(u)} + \underbrace{\left(au + au + \frac{a^2 b^2}{u^2}\right)}_{g(u)}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1,

- $\frac{\frac{ab^2}{u} + \frac{ab^2}{u} + u^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{ab^2}{u} \cdot \frac{ab^2}{u} \cdot u^2} = \sqrt[3]{a^2 b^4}$. Como a igualdade ocorre quando

$$\frac{ab^2}{u} = u^2 \text{ então o mínimo para } f(u) \text{ é } 3\sqrt[3]{a^2 b^4} \text{ obtido quando } u = \sqrt[3]{ab^2}.$$

- $\frac{au + au + \frac{a^2 b^2}{u^2}}{3} \geq \sqrt[3]{au \cdot au \cdot \frac{a^2 b^2}{u^2}} = \sqrt[3]{a^4 b^2}$. Como a igualdade ocorre quando

$$au = \frac{a^2 b^2}{u^2} \text{ então o mínimo para } g(u) \text{ é } 3\sqrt[3]{a^4 b^2} \text{ obtido quando } u = \sqrt[3]{ab^2}.$$

De $u = \sqrt[3]{ab^2}$ e $v = \frac{ab}{u}$ temos $v = \sqrt[3]{a^2 b}$ e, portanto, para esses valores temos o

mínimo de HK que é igual a $a^2 + b^2 + 3\left(\sqrt[3]{a^2 b^4} + \sqrt[3]{a^4 b^2}\right)$.

Aplicação 3.a) Entre todas as caixas de mesmo volume V a que tem a menor área total A_T é a cúbica.

Sejam x, y e z as dimensões das caixas de volume V . Temos $xyz = V > 0$ e $A_T = 2xy + 2xz + 2yz$.

Da desigualdade $M_A \geq M_G$ para xy, xz e yz , temos

$$\frac{xy + xz + yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz} = \sqrt[3]{V^2} \Rightarrow A_T = 2(xy + xz + yz) \geq 6\sqrt[3]{V^2}$$

valendo a igualdade se e somente se $xy = xz = yz \Leftrightarrow x = y = z$.

Das implicações anteriores e de $xyz = V$ decorre que o valor mínimo da área total é $6\sqrt[3]{V^2}$ quando $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Portanto, a caixa de menor área total procurada é o cubo de aresta $\sqrt[3]{V}$.

Aplicação 3.b) Se uma caixa retangular sem tampa tem volume fixo $K > 0$ então é possível determinar as dimensões da caixa que minimizam sua área.

Resolvemos esse problema utilizando a aplicação anterior e o princípio da reflexão.

Consideremos a reflexão da caixa $ABCDEFGH$ em relação ao plano da base sem tampa $ABCD$ que gera o paralelepípedo retângulo $EFGHH'G'F'E'$ de volume $2K$ conforme a seguinte figura:

Figura 50: Solução por reflexão sobre a base sem tampa do paralelepípedo.

De acordo com o problema anterior, $EFGHH'G'F'E'$ possui área total mínima quando é um cubo de aresta $\sqrt[3]{2K}$. Logo as dimensões da caixa sem tampa

procurada são $FG = GH = \sqrt[3]{2K}$ e $GB = \frac{\sqrt[3]{2K}}{2} = \frac{GG'}{2}$.

Aplicação 4.a) De todos os cilindros retos de mesmo volume V o que tem menor área total é aquele cujo diâmetro é igual à altura.

Se h e r são as medidas da altura e do raio de um cilindro, de volume $V = \pi r^2 h$ então sua área total é $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \pi r h + \pi r h$.

De $M_A \geq M_G$ para $2\pi r^2$, $\pi r h$ e $\pi r h$ temos:

$$\frac{2\pi r^2 + \pi r h + \pi r h}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \pi r h \cdot \pi r h} = \sqrt[3]{2\pi V^2},$$

valendo a igualdade se e somente se $2\pi r^2 = \pi r h \Leftrightarrow h = 2r$. Logo o valor mínimo para A_T é $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ quando a altura do cilindro é igual ao diâmetro da base.

Aplicação 4.b) Considere os cilindros de volume V sem tampa. É possível determinar a relação entre a altura h e o raio r para que a área da superfície seja mínima.

Consideremos a reflexão do cilindro C_1 em questão, em relação à base sem tampa b gerando o cilindro C_1' , conforme a figura abaixo:

Figura 51: Solução por reflexão sobre a base sem tampa do cilindro.

Sabemos que C_1 tem volume V logo pela reflexão o volume do cilindro (com tampas) $C_1 \cup C_1'$ é $2V$. Do problema anterior, temos que a área mínima de $C_1 \cup C_1'$ ocorre quando $h = 2r$ e como a altura de C_1 é metade da altura de $C_1 \cup C_1'$, temos que em C_1 , $h = r$.

Aplicação 5. Determinação do ângulo de θ radianos de um setor circular com raio unitário de modo que o cone circular reto formado por este setor tenha volume máximo.

Sejam r e h as medidas do raio e da altura do cone, respectivamente, conforme a figura abaixo:

Figura 52: Transformação do setor circular em cone.

Como

$$\theta = 2\pi r \text{ e } r^2 + h^2 = 1$$

então

$$h = \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}.$$

Logo temos para o volume V do cone:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}.$$

Se $t = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2$, aplicaremos $M_A \geq M_G$ para $\frac{t}{2}$, $\frac{t}{2}$ e $1-t$ para $0 < t < 1$.

Observamos que nos casos $t = 0$ e $t = 1$ temos $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, respectivamente, e nesses casos $V = 0$.

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{t}{2} + \frac{t}{2} + (1-t)}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot (1-t)} \Rightarrow$$

$$\frac{t^2}{4}(1-t) \leq \frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$t\sqrt{1-t} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Como ocorre a igualdade para $\frac{t}{2} = 1-t$ e, nesse caso $t = \frac{2}{3}$, então o maior volume do cone é obtido quando $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\theta \approx 294^\circ$.

Aplicação 6. Determinação do mínimo da função $f(x) = 6x + \frac{24}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Como $f(x) = 6x + \frac{24}{x^2} = 3x + 3x + \frac{24}{x^2}$, aplicando $M_A \geq M_G$ para $3x$, $3x$ e $\frac{24}{x^2}$ temos:

$$\frac{f(x)}{3} = \frac{3x + 3x + \frac{24}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{3x \cdot 3x \cdot \frac{24}{x^2}} = 6.$$

Como vale a igualdade quando $3x = \frac{24}{x^2} \Leftrightarrow x = 2$ então o mínimo de f em $\mathbb{R}_+^*$ é 18, obtido quando $x = 2$.

Aplicação 7. Determinação do menor valor para a soma $S = x^2 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$, para $x > 0$.

Da desigualdade $M_A \geq M_G$ para os termos x^2 , $4x$, $\frac{4}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$, temos

$$\frac{x^2 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{4} \geq \sqrt[4]{x^2 \cdot 4x \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x^2}} = 2.$$

Nesse caso, valeria a igualdade se ocorresse $x^2 = 4x = \frac{4}{x} = \frac{1}{x^2}$. Mas não existe

$x > 0$ que satisfaça a essas equações. Porém,

$$\bullet \quad \frac{S_1}{2} = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} \geq \sqrt[2]{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 1. \text{ Como vale a igualdade quando } x=1$$

então o valor máximo de S_1 é 2 e obtido para $x=1$.

$$\bullet \quad \frac{S_2}{2} = \frac{4x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt[2]{4x \cdot \frac{4}{x}} = 4. \text{ Como vale a igualdade para } x=1 \text{ então o}$$

valor máximo para S_2 é 8 e obtido quando $x=1$.

Assim concluímos que o valor máximo para $S = S_1 + S_2$ é 10, obtido quando $x=1$.

Aplicação 8. Determinação do máximo da função $f(x, y) = x^2 y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sujeita à restrição $6x + 5y = 45$.

Escrevendo $6x + 5y = 45$ como $3x + 3x + 5y = 45$ e aplicando $M_A \geq M_G$ para $3x$, $3x$ e $5y$ temos:

$$15 = \frac{3x + 3x + 5y}{3} \geq \sqrt[3]{3x \cdot 3x \cdot 5y} = \sqrt[3]{45x^2 y},$$

como ocorre a igualdade quando $3x = 5$ e $3x + 3x + 5y = 45$ então $x = 5$ e $y = 3$.

Daí o máximo de $f(x, y) = x^2 y$ é 75.

Aplicação 9. Determinação do menor valor de $f(x, y) = x + \frac{8}{y(x-y)}$, para todos $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $x > y$.

Se $z = x - y > 0$, consideramos o problema de minimizar a função

$$g(y, z) = y + z + \frac{8}{yz} \text{ para } y, z > 0.$$

Da desigualdade $M_A \geq M_G$ para y , z e $\frac{8}{yz}$, temos:

$$\frac{y + z + \frac{8}{yz}}{3} \geq \sqrt[3]{y \cdot z \cdot \frac{8}{yz}} = 2.$$

Como ocorre a igualdade quando $y = z = \frac{8}{yz} \Leftrightarrow y = z = 2$ e, nesse caso $x = 4$ então 6 é o mínimo de $f(x, y)$ para $x > y > 0$.

Aplicação 10. Determinação do máximo da da função $f(x) = 2x(12 - x^2)$ em $\mathbb{R}$.

Verificando os valores reais de x que tornam positivos os números $f(x)$ temos $x < -\sqrt{12}$ ou $0 < x < \sqrt{12}$, conforme o gráfico de f na figura que segue:

Figura 53: Gráfico de $f(x) = 2x(12 - x^2)$ em $\mathbb{R}$

Como em $]-\infty, -\sqrt{12}]$, $f \geq 0$ não assumindo máximo e $f \leq 0$ em $]-12, 0[\cup [\sqrt{12}, \infty[$ procuremos o máximo de f em $[0, \sqrt{12}]$. Como $f(0) = f(\sqrt{12}) = 0$ basta procurar o máximo de f em $]0, \sqrt{12}[$.

Para isso procuraremos, nesse intervalo, pelo máximo de

$$f(x)^2 = [2x(12 - x^2)]^2 = 2(2x^2)(12 - x^2)(12 - x^2).$$

Como $2x^2$, $12 - x^2$ e $12 - x^2$ são positivos em $]0, \sqrt{12}[$, temos:

$$8 = \frac{2x^2 + 12 - x^2 + 12 - x^2}{3} \geq \sqrt[3]{(2x^2)(12 - x^2)(12 - x^2)}.$$

Como ocorre a igualdade quando $2x^2 = 12 - x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x = 2$ então o máximo de $f(x)^2$ é 1024, obtido em $x = 2$ que também gera o máximo para $f(x)$, em $]0, \sqrt{12}[$, que é $f(2) = 32$.

Aplicação 11. Determinação do máximo valor da função $f(x, y) = \frac{12(xy - 4x - 3y)}{x^2 y^3}$

para $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} < 1$.

$$\text{Como } f(x, y) = \left(\frac{12}{xy^2} \right) \left(\frac{xy - 4x - 3y}{xy} \right) = \left(\frac{2}{y} \right) \left(\frac{2}{y} \right) \left(\frac{3}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{y} - \frac{2}{y} - \frac{3}{x} \right),$$

da desigualdade $M_A \geq M_G$ para os termos $\frac{2}{y}$, $\frac{2}{y}$, $\frac{3}{x}$ e $1 - \frac{2}{y} - \frac{2}{y} - \frac{3}{x}$, temos:

$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{2}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{x} + \left(1 - \frac{2}{y} - \frac{2}{y} - \frac{3}{x} \right)}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{2}{y} \cdot \frac{2}{y} \cdot \frac{3}{x} \cdot \left(1 - \frac{2}{y} - \frac{2}{y} - \frac{3}{x} \right)}.$$

Como a igualdade ocorre quando $\frac{2}{y} = \frac{2}{y} = \frac{3}{x} = \left(1 - \frac{2}{y} - \frac{2}{y} - \frac{3}{x} \right) \Leftrightarrow x = 12$ e $y = 8$

então o máximo para $f(x, y)$ é $\frac{1}{256}$ e obtido quando $x = 12$ e $y = 8$.

Vimos no Capítulo 2, seções 2.2 e 2.3, que média geométrica (M_G) e média harmônica (M_H) de números $a_1, a_2, \dots, a_n$ positivos são os números $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ e $\left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$, respectivamente. Como aplicação imediata do Teorema 1 anterior, temos o seguinte:

Teorema 2. Se a_1, a_2, a_3 e a_4 são números positivos então $M_G(a_1, a_2, a_3) \geq M_H(a_1, a_2, a_3)$ e $M_G(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq M_H(a_1, a_2, a_3, a_4)$, ocorrendo as igualdades se e somente se os números a_i são iguais.

Demonstração: Basta aplicar o teorema anterior para os números $a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}$:

$$\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}}{3} \geq (a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{3}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}} \leq \frac{1}{(a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1})^{\frac{1}{3}}} = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $a_1^{-1} = a_2^{-1} = a_3^{-1}$ o que equivale à

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Para $(a_1 a_2 a_3 a_4)^{\frac{1}{4}} \geq \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + a_4^{-1}}{4} \right)^{-1}$ a prova é análoga. ■

Aplicação 12. Sabendo-se que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = k$, sendo $k > 0$ constante, então $\frac{9}{k}$ é o menor valor de $a + b + c$ para quaisquer a, b, c positivos.

Das desigualdades provadas $M_A \geq M_G$ e $M_G \geq M_H$ obtém-se $M_A \geq M_H$. Dessa desigualdade para os termos a, b e c temos:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{3}{k}.$$

Como $\frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{k}$ se e somente se $a = b = c$ então o valor mínimo de $a + b + c$

é $\frac{9}{k}$ quando $a = b = c = \frac{3}{k}$.

Aplicação 13. Desigualdade de Nesbitt

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

para todo a, b e c positivos, ocorrendo a igualdade se e somente se $a = b = c$.

Conforme SIMONOVIKJ, 2017, p. 9, reescrevemos $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ somando e subtraindo três unidades do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} - 3 = \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = \\ &= \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (a+c)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3. \end{aligned}$$

Como a desigualdade $M_A \geq M_H$ para três números positivos x, y e z corresponde a

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9,$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $x = y = z$ (consequência direta dos Teoremas 1 e 2) temos,

$$\frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (a+c)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \geq \frac{1}{2}9 - 3 = \frac{3}{2}.$$

Portanto $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, ocorrendo a igualdade com valor mínimo $\frac{3}{2}$ para

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \text{ quando } a+b = b+c = a+c \Leftrightarrow a = b = c.$$

Aplicação 14. Se a , b e c são as medidas dos lados de um triângulo então

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Da desigualdade de Nesbitt provada na aplicação anterior, já sabemos que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

ocorrendo a igualdade quando $a = b = c$.

Basta agora provarmos que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Como num triângulo a soma dos comprimentos de dois lados sempre é maior que o comprimento do terceiro lado, temos:

$$a < b+c, \quad b < a+c \text{ e } c < a+b.$$

Daí,

$$a < b+c \Rightarrow a + (b+c) < b+c + (b+c) \Rightarrow$$

$$a+b+c < 2(b+c) \Rightarrow \frac{1}{b+c} < \frac{2}{a+b+c} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

De modo análogo concluímos que

$$\frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c}$$

e

$$\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Somando as três desigualdades, têm-se:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Portanto $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$

Vimos no Capítulo 2, seção 2.4, que média quadrática (M_Q) de $a_1, a_2, \dots, a_n$

é o número $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$. Com aplicação da desigualdade $a^2 + b^2 \geq 2ab$

provaremos o seguinte:

Teorema 3 Se a_1, a_2, a_3 e a_4 são números positivos então $M_A(a_1, a_2, a_3) \leq M_Q(a_1, a_2, a_3)$ e $M_A(a_1, a_2, a_3, a_4) \leq M_Q(a_1, a_2, a_3, a_4)$, ocorrendo as igualdades se e somente se os números a_i são iguais.

Demonstração:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3}{9} \stackrel{(I)}{\leq}$$

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + (a_2^2 + a_3^2)}{9} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}.$$

Daí,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}}.$$

A desigualdade (I) segue de $(a_i - a_j)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_i a_j$.

Temos $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$ já que

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3)^2 = 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \Leftrightarrow$$

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 + a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3.$$

De maneira análoga segue que $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}}$ e

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4. \blacksquare$$

Aplicação 15. Entre todos os paralelepípedos retângulos cuja soma de todas as arestas é $36cm$ o cubo é o que possui a menor diagonal.

Levando em conta que $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ é a diagonal de um paralelepípedo retângulo com dimensões a , b e c e aplicando a desigualdade $M_Q \geq M_A$ obtida anteriormente para a , b e c positivos temos:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 3\sqrt{3}.$$

Como ocorre a igualdade $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{3}$ quando $a = b = c$, segue que o cubo de aresta $3cm$ é o paralelepípedo retângulo de menor diagonal entre todos os paralelepípedos retângulos cujas arestas somam $36cm$.

5 Desigualdades entre médias para n números positivos

Neste capítulo apresentamos alguns teoremas, com suas demonstrações, que abordam o caso geral das desigualdades entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática. E várias desigualdades numéricas são trabalhadas como aplicações desses teoremas.

Além disso, apresentamos a desigualdade de Cauchy e provamos de 2 maneiras: a primeira delas usualmente apresentada nos livros didáticos válida para números reais em geral e a segunda, utilizando adequadamente $M_A \geq M_G$, válida para números não negativos. Dessa desigualdade também veremos como concluir que $M_Q \geq M_A$ para números não negativos. Os exemplos considerados ilustram algumas de suas utilidades.

Como no capítulo anterior, os teoremas e aplicações aqui desenvolvidos, foram selecionados em Nahin (2004), Niven (1981) e Andreescu et al. (2006) entre outros textos e sites citados na bibliografia. Alguns deles preparatórios para Olimpíadas de Matemática.

Esperamos que este conteúdo matemático apresentado, que normalmente não faz parte do Ensino Básico, desafie o aluno, leve-o a interessar-se mais pela disciplina e motive os professores a aprimorar seus conhecimentos.

O conteúdo tratado nesta parte pode servir como material preliminar de apoio ao professor que pretenda avançar seus conhecimentos sobre desigualdades entre as médias, potencializar esse conhecimento a um grupo de alunos que queira participar de eventos como olimpíadas de matemática por se tratar de um material amplamente útil nessas competições ou até mesmo, caso considerar necessário, ensiná-los aos seus discentes para o enriquecimento dos conhecimentos matemáticos.

Iniciamos pelas provas das desigualdades para n números reais positivos de

$M_A \geq M_G$, logo após $M_G \geq M_H$ e por fim, $M_Q \geq M_A$.

Teorema 1. Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais positivos, então

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq M_G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}, \text{ ocorrendo a igualdade se e}$$

somente se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Demonstração (NIVEN, 1981): Utilizaremos a prova por indução de Cauchy para mostrar que é válida a desigualdade $M_A \geq M_G$ para n elementos. Trata-se de uma prova por indução dividida em duas partes com ideia análoga aos casos $n=3$ e $n=4$ provados no capítulo anterior. Em seguida provaremos o caso da igualdade.

Seja P_n a proposição “Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números positivos, então

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Já vimos que P_2 é verdadeira. Iremos provar:

$$(I) \text{ Para } n \geq 3, P_n \Rightarrow P_{n-1}.$$

$$(II) \text{ Para } n \geq 2, P_n \Rightarrow P_{2n}.$$

Podemos observar que de (II), como P_2 é verdadeira, então são verdadeiras $P_4, P_8, P_{16}, P_{32}, P_{64}, P_{128}, \dots$. E de (I), caso queiramos provar que P_{61} é verdadeira, por exemplo, primeiro verificamos que P_{64} é verdadeira e depois utilizamos (I): $P_{64} \Rightarrow P_{63}, P_{63} \Rightarrow P_{62}, P_{62} \Rightarrow P_{61}$. Com isso conseguimos a prova para qualquer n natural maior do que 1.

Prova de (I): $P_n \Rightarrow P_{n-1}$ (análoga à prova para $n=3$).

Dados $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ reais positivos seja $g = (a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$. Assim, pela hipótese, temos

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + g \geq n(a_1 a_2 \dots a_{n-1} g)^{\frac{1}{n}} = n(g^{n-1} g)^{\frac{1}{n}} = n(g^n)^{\frac{1}{n}} = ng.$$

Logo,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq g(n-1) \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq (n-1)(a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}.$$

Prova de (II): $P_n \Rightarrow P_{2n}$ (análoga à prova para $n=4$).

Como é válida a proposição para $n=2$, podemos escrever as seguintes desigualdades:

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}, a_3 + a_4 \geq 2\sqrt{a_3 a_4}, \dots, a_{2n-1} + a_{2n} \geq 2\sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}$$

Adicionando-as, e aplicando a hipótese que vale P_n temos

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \geq 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \dots + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}})$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \geq 2n \left(\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} = 2n (a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n})^{\frac{1}{2n}}.$$

Portanto,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \geq 2n (a_1 a_2 \dots a_{2n})^{\frac{1}{2n}}.$$

Provaremos agora: $M_A = M_G \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

($\Leftarrow$) Supondo que os a_i 's sejam iguais, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{na_n}{n} = a_n \text{ e } \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{a_n^n} = a_n.$$

($\Rightarrow$) Supondo $M_A = M_G$ vamos mostrar que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Por contradição, supondo que $a_1, a_2, \dots, a_n$ não sejam todos iguais mostraremos que $M_A > M_G$ através do seguinte:

Algoritmo:

Sejam $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$ não todos iguais. Sua média aritmética A é tal que $a_n > A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n} > \frac{na_1}{n} = a_1 > 0$ pois os a_i 's não são todos iguais.

Trocando a_1 por A e a_n por $a_1 + a_n - A$ temos n novos números

$$A, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1 + a_n - A$$

tais que

- são positivos pois $0 < A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n} < a_n$ logo como $a_1 > 0$ temos $0 < A < A + a_1 < a_n + a_1$ e então $a_1 + a_n - A > 0$.
- sua média aritmética é igual a A .
- $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n < A a_2 \dots a_{n-1} (a_1 + a_n - A)$

De fato,

$$a_1 < A < a_n \Rightarrow A^2 - A(a_1 + a_n) + a_1 a_n = (A - a_1)(A - a_n) < 0 \Rightarrow a_1 a_n < A(a_1 + a_n - A).$$

Se esses novos números forem todos iguais, teremos

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n < A a_2 \dots a_{n-1} (a_1 + a_n - A) = A^n, \text{ isto é, } M_G < M_A.$$

Por outro lado se não forem todos iguais, o menor dos novos números não é A pois sua média aritmética que é A é maior que o menor dos números. E também, o maior desses novos números não é A . Daí, aplicamos o algoritmo para $A, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1 + a_n - A$.

Assim repetimos o algoritmo até obter todos os novos números iguais a A e então $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n < A^n$. Daí segue $M_A > M_G$.

Assim como estamos supondo $M_A = M_G$ os números $a_1, a_2, \dots, a_n$ têm que ser iguais. ■

Como aplicação imediata do teorema anterior temos o:

Teorema 2. Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números positivos, então $M_G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq$

$$M_H = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} \text{ ocorrendo a igualdade se e somente se}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Demonstração: Aplicando a desigualdade $M_A \geq M_G$ para os números

$a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, temos:

$$\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \geq (a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Daí,

$$\frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} \leq \frac{1}{(a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1})^{\frac{1}{n}}} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $a_1^{-1} = a_2^{-1} = \dots = a_n^{-1}$ o que equivale à

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n. \blacksquare$$

Baseados apenas na desigualdade $a^2 + b^2 \geq 2ab$ provaremos o

Teorema 3. Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais positivos, então

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq M_Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad \text{ocorrendo a igualdade se e}$$

somente se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Demonstração: Temos

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\begin{array}{l} a_1^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n + \\ \quad + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n + \\ \quad + 2a_3a_4 + \dots + 2a_3a_n + \\ \quad \vdots \\ \quad + 2a_{n-1}a_n \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n + \\ \quad + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n + \\ \quad + 2a_3a_4 + \dots + 2a_3a_n + \\ \quad \vdots \\ \quad + 2a_{n-1}a_n \end{array} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_3^2 + a_1^2 + a_4^2 + \dots + a_1^2 + a_n^2 + \\ \quad + a_2^2 + a_3^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_2^2 + a_5^2 + \dots + a_2^2 + a_n^2 + \\ \quad + a_3^2 + a_4^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_3^2 + a_n^2 + \\ \quad \vdots \\ \quad + a_{n-1}^2 + a_n^2 \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + (n-1)a_1^2 + (n-1)a_2^2 + (n-1)a_3^2 + \dots + (n-1)a_n^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2).$$

Portanto,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Assim provamos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}.$$

Mostraremos agora que $\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n.$

Como $\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2,$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n + \\ + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n + \\ + 2a_3a_4 + \dots + 2a_3a_n + \\ \vdots \end{aligned}$$

$$+ 2a_{n-1}a_n = na_1^2 + na_2^2 + \dots + na_n^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} (n-1)a_1^2 + (n-1)a_2^2 + \dots + (n-1)a_n^2 = 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_1a_4 + \dots + 2a_1a_n \\ + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n \\ + 2a_3a_4 + \dots + 2a_3a_n \\ \dots \\ + 2a_{n-1}a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + (a_1^2 - 2a_1a_3 + a_3^2) + (a_1^2 - 2a_1a_4 + a_4^2) + \dots + (a_1^2 - 2a_1a_n + a_n^2) \\
&\quad + (a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2) + (a_2^2 - 2a_2a_4 + a_4^2) + \dots + (a_2^2 - 2a_2a_n + a_n^2) \\
&\quad + (a_3^2 - 2a_3a_4 + a_4^2) + \dots + (a_3^2 - 2a_3a_n + a_n^2) \\
&\quad \dots \\
&\quad + (a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}a_n + a_n^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_1 - a_4)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 + \\
&\quad + (a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \dots + (a_2 - a_n)^2 + \\
&\quad + (a_3 - a_4)^2 + \dots + (a_4 - a_n)^2 + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (a_{n-1} - a_n)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n. \blacksquare
\end{aligned}$$

Iniciamos as aplicações com a seguinte generalização do Exemplo 3.c, Seção 3.2 do Capítulo 3.

Aplicação 1. (ANDREESCU, 2006, p.22) Determinação da posição de uma barra HK passando por um ponto P no interior de um ângulo QOR tal que $OH^p OK^q$ seja mínimo com p e q inteiros positivos.

Esta é uma generalização do Exemplo 3.c, Seção 3.2 do Capítulo 3.

Figura 54: Paralelogramo $MPNO$ inscrito no triângulo HOK .

Considerando a figura anterior e supondo $MP \parallel OR$ e $NP \parallel OH$, tem-se a semelhança entre os triângulos MPH , OKH e NKP . Disso,

$$\frac{OK}{MP} = \frac{HK}{HP} \Rightarrow OK = \frac{HK}{HP} \cdot MP$$

e
$$\frac{OH}{NP} = \frac{HK}{PK} \Rightarrow OH = \frac{HK}{PK} \cdot NP.$$

Logo

$$OH^p OK^q = \left(\frac{HK}{PK} \cdot NP \right)^p \left(\frac{HK}{HP} \cdot MP \right)^q = \frac{NP^p MP^q}{\left(\frac{PK}{HK} \right)^p \left(\frac{HP}{HK} \right)^q}$$

Assim basta achar as posições H e K tais que maximizam $\left(\frac{PK}{HK} \right)^p \left(\frac{HP}{HK} \right)^q$.

Supondo $\frac{PK}{HK} = x$ e $\frac{HP}{HK} = y$ temos $x + y = 1$.

Aplicando $M_A \geq M_G$ para os $p+q$ números $x_1 = x_2 = \dots = x_p = \frac{x}{p}$ e

$x_{p+1} = \dots = x_{p+q} = \frac{y}{q}$, temos:

$$\frac{1}{p+q} = \frac{p \frac{x}{p} + q \frac{y}{q}}{p+q} \geq \sqrt[p+q]{\left(\frac{x}{p} \right)^p \left(\frac{y}{q} \right)^q} \Rightarrow$$

$$x^p y^q \leq \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Sendo que o máximo valor de $x^p y^q$ é obtido quando $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$, isto é, quando as

posições H e K da barra que minimizam $OH^p OK^q$ são aquelas tais que

$$\frac{y}{x} = \frac{HP}{PK} = \frac{q}{p}.$$

Observamos que para $p = q = 1$ o mínimo de $OH \cdot OK$ ocorre quando $HP = PK$, ou seja, quando P é ponto médio de HK .

Aplicação 2. Para todo x , y e z positivos, tem-se:

$$\frac{1}{10x+11y+11z} + \frac{1}{11x+10y+11z} + \frac{1}{11x+11y+10z} \leq \frac{1}{32x} + \frac{1}{32y} + \frac{1}{32z}.$$

Aplicando $M_H \leq M_A$ para os 32 números: $\underbrace{x+\dots+x}_{10}$, $\underbrace{y+\dots+y}_{11}$ e $\underbrace{z+\dots+z}_{11}$,

temos

$$\frac{10x+11y+11z}{32} \geq \frac{32}{\underbrace{\frac{1}{x}+\dots+\frac{1}{x}}_{10} + \underbrace{\frac{1}{y}+\dots+\frac{1}{y}}_{11} + \underbrace{\frac{1}{z}+\dots+\frac{1}{z}}_{11}}$$

logo,

$$\frac{32}{10x+11y+11z} \leq \frac{\frac{10}{x} + \frac{11}{y} + \frac{11}{z}}{32}.$$

Analogamente,

$$\frac{32}{11x+10y+11z} \leq \frac{\frac{11}{x} + \frac{10}{y} + \frac{11}{z}}{32}$$

$$\text{e } \frac{32}{11x+11y+10z} \leq \frac{\frac{11}{x} + \frac{11}{y} + \frac{10}{z}}{32}.$$

Somando as desigualdades concluímos que:

$$\frac{32}{10x+11y+11z} + \frac{32}{11x+10y+11z} + \frac{32}{11x+11y+10z} \leq \frac{\frac{32}{x} + \frac{32}{y} + \frac{32}{z}}{32} \Rightarrow$$

$$32 \left(\frac{1}{10x+11y+11z} + \frac{1}{11x+10y+11z} + \frac{1}{11x+11y+10z} \right) \leq \frac{32 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)}{32} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{10x+11y+11z} + \frac{1}{11x+10y+11z} + \frac{1}{11x+11y+10z} \leq \frac{1}{32x+32y+32z}.$$

Ocorrendo a igualdade se e só se $10x=11y=11z$, $11x=10y=11z$ e $11x=11y=10z$, ou seja, quando $x=y=z$ (pois somando as igualdades temos $32x=32y=32z \Leftrightarrow x=y=z$).

Aplicação 3. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos. Se $b_1, b_2, \dots, b_n$ é uma permutação de $a_1, a_2, \dots, a_n$ então,

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Como $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ são números positivos, aplicando $M_A \geq M_G$ a esses números, temos:

$$\frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Além disso, como a igualdade ocorre quando $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ então o mínimo de

$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$ é n , obtido quando $a_i b_j = a_j b_i$ com $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Aplicação 4. Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais positivos com soma igual a n então,

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq 2^n.$$

Aplicando $M_A \geq M_G$ para os números $1+a_1, 1+a_2, \dots, 1+a_n$, temos:

$$\frac{(1+a_1) + (1+a_2) + \dots + (1+a_n)}{n} \geq \sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \Rightarrow$$

$$2 = \frac{\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ vezes}} + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \Rightarrow$$

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq 2^n$$

pois $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

Como a igualdade ocorre quando $1+a_1 = 1+a_2 = \dots = 1+a_n$ então o maior valor de

$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ é 2^n , obtido em $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Aplicação 5. Para todo inteiro $n > 1$,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n^n}{n+1}.$$

De fato, aplicando $M_A \geq M_G$ aos números $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}$ quando $n \geq 1$, temos

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n}{n+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}\right)^n \geq \frac{n^n}{n+1}.$$

A igualdade ocorre somente quando $n = 1$, pois se $n > 1$, os números $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}$ são distintos entre si.

Aplicação 6. A desigualdade $n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ é verdadeira para todo inteiro $n > 1$.

Aplicando $M_A \geq M_G$ aos números $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$, temos:

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n} \geq \sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \dots n^3}.$$

Logo como $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4n} \geq \sqrt[n]{(n!)^3} \Rightarrow$$

$$n^n \left(\frac{(n+1)^2}{4} \right)^n \geq (n!)^3 \Rightarrow$$

$$n^n \left(\frac{n+1}{2} \right)^{2n} \geq (n!)^3.$$

A igualdade ocorre se e só se $n = 1$, pois se $n > 1$, os números $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$ são distintos entre si.

Para completar provaremos, por indução, que é válida a proposição

$$P_n: \text{ 'Se } n \geq 1 \text{ então } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ '}$$

É claro que vale P_1 , pois $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Logo basta provarmos que $P_{(k+1)}$ é verdade supondo P_k verdadeira:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &\stackrel{\text{hipótese de indução}}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aplicação 7. Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais positivos então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Aplicando $M_A \geq M_G$ para $a_1, a_2, \dots, a_n$ e também para $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ temos:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

e

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}}.$$

Multiplicando as duas desigualdades concluímos que

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}{n^2} \geq \sqrt[n]{(a_1 a_2 \dots a_n) \left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n} \right)} = 1 \Rightarrow$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Aplicação 8. Para todo $n > 1$ inteiro é verdadeira a desigualdade

$$n! < \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Aplicando $M_A \geq M_G$ aos números $1, 2, \dots, n$, temos:

$$\frac{1+2+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \Rightarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq \sqrt[n]{n!} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{2} \right)^n \geq n!$$

De modo análogo às Aplicações 5 e 6, nota-se que só ocorre a igualdade quando $n = 1$ pois quando $n > 1$, os números $1, 2, \dots, n$ são distintos entre si.

Teorema 4. (Desigualdade de Cauchy). Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais então

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

A igualdade ocorre se e somente se $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são proporcionais.

Demonstração 1: (RIASAT, 2008, p.9) Consideramos $f(x)$ a função quadrática

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$$

que pode ser reescrita no seguinte modo:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + \dots + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$ então certamente

$$\Delta = [-2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)]^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0.$$

$$\text{Logo } (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Provaremos agora:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \Leftrightarrow \exists k \text{ tal que } b_i = ka_i, \forall i.$$

Ocorre a igualdade

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

se e só se $\Delta = 0$.

Quando $\Delta = 0$, f tem uma única raiz real k .

Logo

$$f(k) = (a_1k - b_1)^2 + (a_2k - b_2)^2 + \dots + (a_nk - b_n)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1k - b_1 = a_2k - b_2 = \dots = a_nk - b_n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall i, b_i = ka_i.$$

Observamos que se $a_i \neq 0 \forall i$, então $\frac{b_i}{a_i} = k$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. ■

A prova seguinte é uma aplicação de $M_A \geq M_G$ e só vale para o caso em que os

a_i 's e os b_j 's são **todos não negativos** com algum $a_i > 0$ e algum $b_j > 0$.

Demonstração 2: (RIASAT, 2008, p.10) Aplicando a desigualdade $M_A \geq M_G$ para

cada par $\frac{a_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \frac{b_j^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos:

$$\frac{a_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_j^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2|a_j||b_j|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \quad j = 1, \dots, n.$$

Somando em j essas n desigualdades temos:

$$2 \geq \frac{\sum_{j=1}^n 2|a_j||b_j|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}}$$

logo,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n |a_i||b_i|\right)^2$$

Daí para a_i e b_i não negativos segue a desigualdade de Cauchy. ■

Por decorrência da desigualdade de Cauchy temos os seguintes:

Corolário 1. Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais positivos então $M_Q \geq M_A$.

Demonstração: Aplicando a desigualdade de Cauchy para $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ temos:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad \blacksquare$$

Corolário 2. (Lema de Titu): Se $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ então

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Demonstração: (SECCO, 2017) Como $\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) (b_1 + b_2 + \dots + b_n) =$

$$= \left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \right)^2 \right] \left[(\sqrt{b_1})^2 + (\sqrt{b_2})^2 + \dots + (\sqrt{b_n})^2 \right] \geq$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

por aplicação da Desigualdade de Cauchy. Daí,

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}. \blacksquare$$

Como consequência do Lema de Titu temos outra prova da Desigualdade de Nesbitt (Aplicação 13 do cap 4)

Aplicação 9. Para $a, b, c > 0$, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Como

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} =$$

$$\frac{a}{b+c} \cdot \frac{a}{a} + \frac{b}{a+c} \cdot \frac{b}{b} + \frac{c}{a+b} \cdot \frac{c}{c} =$$

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{ac+bc}.$$

Aplicando o lema de Titu temos

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}$$

Somando as desigualdades:

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$

$$c^2 - 2ac + a^2 \geq 0$$

obtemos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Logo

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \geq 3(ab+ac+bc).$$

Portanto,

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)} \geq \frac{3}{2}.$$

Aplicação 10. A função $f(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$ calculada apenas nos pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ assume os extremos -7 e 7. De fato:

Aplicando a desigualdade de Cauchy para $(2, 3, 6)$ e (x, y, z) temos:

$$49 = (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (2x + 3y + 6z)^2,$$

ou seja,

$$-7 \leq 2x + 3y + 6z \leq 7.$$

A igualdade ocorre para (x, y, z) tais que,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} \end{cases}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$$

Resolvendo esse sistema encontramos as possibilidades $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ e $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right)$.

Como $f(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$ temos $f\left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right) = -7$ e $f\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) = 7$ que são

os valores extremos de f quando calculada nos pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aplicação 11. Se $x, y, z, k, w \in \mathbb{R}_+^*$ resolvem o sistema

$$\begin{cases} x + y + z + k + w = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 + k^2 + w^2 = 16 \end{cases}$$

então o maior valor que w assume é $\frac{16}{5}$.

Aplicando a desigualdade de Cauchy para (x, y, z, k) e $(1, 1, 1, 1)$ temos:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2 + k^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) &\geq (x + y + z + k)^2 \Rightarrow \\ 4(16 - w^2) &\geq (8 - w)^2 \Rightarrow \\ 5w^2 - 16w &\leq 0 \Rightarrow \\ 0 &\leq w \leq \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Para o valor $w = \frac{16}{5}$ temos

$$(x^2 + y^2 + z^2 + k^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = (x + y + z + k)^2$$

que ocorre quando

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \frac{k}{1}, \text{ ou seja, } x = y = z = k.$$

De $x = y = z = k$ em

$$\begin{cases} x + y + z + k + w = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 + k^2 + w^2 = 16 \end{cases}$$

obtemos $x = y = z = k = \frac{6}{5}$ e o valor máximo de $w = \frac{16}{5}$.

Considerações finais

É tácito entre educadores e pesquisadores da área que o conhecimento necessário para o professor dar cabo de sua função docente vai muito além do adquirido em sua formação inicial. É consenso também que a abordagem matemática utilizada para ensinar difere sobremaneira da que se utiliza em outras profissões que dela fazem o seu uso prático e aplicado. Um exemplo disso são as áreas das engenharias que costumam usar métodos matemáticos de modo isolado ao aplicarem frequentemente técnicas de derivação do cálculo diferencial para resolver problemas de otimização (encontro de um valor máximo ou mínimo que otimize algo). Entretanto o que ainda não é consenso diz respeito a qual seria o ‘conhecimento a mais’ que o professor necessita saber ensinar para tornar o conhecimento matemático não limitado e assim facilitar o processo de aprendizagem dos alunos.

Relembramos nosso objetivo principal, qual seja, o de elaborar um material de apoio a professores em formação inicial ou continuada onde se discute diferentes possibilidades e representações elementares para o tratamento do tema dos Máximos e Mínimos na Educação Básica. Para enfrentar tal problemática, acreditamos ter deixado em nossa dissertação possibilidades que potencializam o conhecimento docente sobre o tema estudado. Buscamos no artigo de Ball et al. (2008), em particular nos conceitos de *Conhecimento Especializado* e de *Horizontes do Conteúdo Matemático*, a importância e a necessidade de um constante aperfeiçoamento que, aliado à prática diária em sala de aula do professor, possa disponibilizar um maior arcabouço de situações e exemplos a fim de enriquecer suas aulas.

No decorrer desse trabalho buscamos elaborar um material para professores de matemática do Ensino Médio ou graduandos de licenciatura em matemática capaz de contribuir na sua prática docente seja para consultas, como fonte de estudos ou até mesmo na busca por diferentes métodos e abordagens que possam ampliar o seu repertório de conhecimentos sobre abordagens de problemas de valores extremos em sala de aula. Sendo que as possibilidades que discorremos para tal contribuição tiveram como base apenas conceitos de matemática elementar, tornando o material de maior acessibilidade.

Algumas dessas ferramentas elementares que pudemos agregar ao nosso tema são as desigualdades entre as médias, assunto não muito discutido nos livros didáticos de Ensino Médio mas de cunho bastante útil na resolução de problemas de valores máximos e mínimos, conforme abordaram Niven (1981) e Nahin (2004) em suas admiráveis obras. Para deixar este trabalho livre de pré-requisitos, decidimos incluir um estudo abrangente das quatro médias - aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, juntamente com provas geométricas das desigualdades entre elas. Acreditamos ter conseguido fornecer subsídios bastante completos, autosuficientes e acessíveis a níveis elementares de ensino sobre esta temática.

Propusemos também uma base elementar através de diversos conceitos matemáticos como produtos notáveis, trinômios de grau 2, função quadrática, conceito de médias (quanto ao seu próprio uso e quanto as suas relações de desigualdades) utilizados para a determinação de valores extremos. Além disso, apresentamos problemas e demonstrações mais aprofundados para o caso geral das desigualdades das médias com n valores positivos ($n > 4$) que podem servir para ampliar o conhecimento docente ou como preparação dos alunos para olimpíadas matemáticas nacionais e internacionais.

Ao utilizarmos alguns conceitos elementares como os que apontamos acima e, principalmente, a aplicação não usual da relação de desigualdades entre as médias na busca pelos pontos de máximo ou mínimo, percebemos a necessidade de discorrermos primeiramente sobre o conceito de 'médias' para servir como base e completude dos estudos posteriores. Este foi particularmente um aprendizado engrandecedor pois quando nos referimos às médias geométrica, harmônica ou quadrática sabemos que este assunto é pouco explorado na Educação Básica em comparação à média aritmética que em muitas vezes é aplicada pelo aluno erroneamente em problemas onde se busca encontrar medidas de tendência central, seja por força do hábito ou ausência de conhecimento sobre a aplicação das outras médias. Com isso, oferecemos: um estudo sobre a possibilidade de utilização de cada média atrelada a sua situação problema correspondente; uma abordagem não usual para as definições dessas médias e a relação de desigualdade existente entre elas de forma algébrica e geométrica para posteriormente resolver os tais problemas com valores extremos.

Consideramos que ao unirmos esses conceitos com aplicações cotidianas ou interdisciplinares resolvidas de modo algébrico e/ou geométrico (e também por

métodos de reflexão sobre um lado ou uma base de uma figura geométrica) conseguimos proporcionar um material que possibilite ao professor trilhar diferentes caminhos elementares para a determinação de soluções e tratamento diferenciado do tema. Esperamos que outras pessoas possam usufruir do conhecimento, estudo e prazer que desfrutamos com este trabalho e que também sejam agentes multiplicadores para possíveis melhorias nas comunidades escolares, acadêmicas e, principalmente, entre os professores que fizerem o uso desses saberes, ampliando seus conhecimentos ou aprimorando-os para sua prática profissional.

Tecemos ainda algumas críticas sobre a abordagem mecânica e o modo esporádico em que máximos e mínimos aparecem em alguns livros didáticos ao se apresentarem somente no estudo de função quadrática. Para contornar essa problemática argumentamos e sugerimos maneiras de tratar esse assunto de forma significativa, estabelecendo uma relação entre parábola e função quadrática ou aplicando técnicas de completamento de quadrados para o encontro desses valores extremos.

Deixamos para estudar futuramente problemas com enunciado elementar, como o de passar uma escada nos corredores não perpendiculares que acreditamos não ter uma solução elementar sem derivadas (o que ainda não confirmamos). No entanto, podemos observar que mesmo sendo o Cálculo Diferencial uma “poderosa” ferramenta, por seu uso viabilizar que sejam encontrados os possíveis pontos de máximos ou de mínimos em toda função contínua, os métodos particulares apresentados neste trabalho possibilitam determinar tais pontos de modos diferentes, ampliando as possibilidades de soluções (as quais geralmente são mais simples do que derivar, igualar a zero e depois analisar os pontos críticos de uma função). Podemos também usar essas técnicas elementares num momento oportuno e precedente ao ensino do Cálculo Diferencial, o que nos permite classificar isto como uma possibilidade ao professor de trabalhar seu *conhecimento de horizontes de conteúdos* entre conceitos do Ensino Médio e do Ensino Superior na sua prática em sala de aula. Além deste ponto, outra sugestão para complementação do trabalho seria o estudo de problemas isoperimétricos elementares, tomando como base, por exemplo, o antigo Problema de Dido que consiste basicamente na *busca de uma curva plana fechada de comprimento fixo englobando a maior área possível*, conforme aponta Préve (2015).

Por fim, esperamos que as abordagens apresentadas sobre o tema sirvam de aporte teórico e pedagógico para o docente que possa ver teoria e prática não mais como conceitos dicotômicos, uma vez que *A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, ação criadora e modificadora da realidade* (FREIRE, 1989, p. 67), estando então certo de possuir uma atuação

[...] voltada para a prática, ou seja, para o trabalho de ensino que exercerá, e não somente ficar no plano teórico. É imprescindível que, para além de conhecer a teoria e a própria Matemática, o professor consiga trabalhar com experimentações, trazendo sua formação à realidade prática do seu trabalho como educador. Certamente ter um conhecimento específico apurado ajuda muito o professor a desenvolver suas aulas, porém o conhecimento pedagógico é essencial no desenrolar da mesma (GUIDO, 2017, p.10).

Esperamos que este trabalho possa incentivar professores que a ele tenham acesso a buscar tornar mais significativas para os estudantes e inovar suas práticas de ensino – aprendizagem em aulas sobre valores extremos ou sobre médias no Ensino Médio. Concordamos com D'Ambrósio (2003) quando afirma que *O grande obstáculo à inovação é uma mesmice resistente.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Boston: Birkhauser, 2006.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: What makes it special?** Universidade de Michigan: Journal of Teacher Education, vol. 59, 2008.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.

BECKENBACH, E.; BELLMAN, E. **A Introduction to inequalities**. New York: Random House, 1975.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais+**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2002.

BRITO, D. S. **Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças: uma experiência de ensino com atividades de modelagem matemática**. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2013.

CARVALHO, L. M. A. C. **Problemas com desigualdade para o ensino secundário**. Dissertação – Mestrado em Matemática para Professores, Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática? uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CHAVAN, N.; ILHAM, F.; NIRJHOR. **Applying the Arithmetic Mean Geometric Mean Inequality**. Disponível em <https://brilliant.org/wiki/applying-the-arithmetic-mean-geometric-mean/>. Acesso em: 22 de jan. 2019.

D' AMBRÓSIO, U.; MACHADO, N. J. **Ensino de matemática: pontos e contrapontos**. Summus: São Paulo, 2014.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Tecnologias da Informação e Comunicação: reflexos na matemática e no seu ensino**. Disponível em: <<http://mestremarcomota.blogspot.com.br/2011/>> Acesso em: 22 de mar 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, vol.1, 3ª ed., 2016.

FONTE, A. C. **Médias, desigualdades e problemas de otimização**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2013.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática de liberdade**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1989.

GUIDO, F. P. **Estudo de uma conceituação geométrica para os logaritmos**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2017.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções**. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 3ª ed., 2002.

LEE, Hojo. **Inequalities Through Problems**. Disponível em <http://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/olympiades/Problemes/inegalites/i2006.pdf> . Acesso em: 22 de jan. 2019.

MOISE, E.; DOWNS, L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Edgard Blucher, 1971.

NAHIN, Paul J. **When least is best**. New Jersey: Princeton University Press, 2004.

NIVEN, Ivan. **Maxima and Minima Without Calculus**. Washington: MAA. Doiciani Mathematical Expositions, 1981.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, vol.1, 2ª ed., 2013.

PEREIRA, J. C. **Médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, 2014.

PRÉVE, D. T. **Problemas variacionais isoperimétricos com soluções de revolução descontínuas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, 2015.

Sociedade Brasileira de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**: 2ª ed. especial - OBMEP 2017. Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/rpm_pic2007.pdf. Acesso em: 17 de jan. 2019.

RESONANCE, P. **The Arithmetic Mean – Geometric Mean – Harmonic Mean Inequalities and a Spectrum of Applications**. Disponível em <https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/021/12/1119-1133> . Acesso em: 22 de jan. 2019.

RIASAT, Samin. **Basics of Olympiad Inequalities**. Disponível em https://www.researchgate.net/publication/264892067_Basics_of_Olympiad_Inequalities. Acesso em: 22 de jan. 2019.

ROCHA, A. M. **Problemas de otimização envolvendo a matemática do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.

SECCO, Matheus. **Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo – A Desigualdade de Cauchy**. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=fJw2ttCslw>. Acesso em: 06 de mar. 2019.

SHULMAN, Lee. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching**. American Educational Researcher Association, vol. 15, n.2. Disponível em http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf. Acesso em: 18 de jul. 2019.

SMOLE, K.; DINIZ, M. **Matemática: ensino médio**. São Paulo: Saraiva, vol. 1, 8ª ed., 2013.

STEWART, J. **Cálculo**, v.1, ed. 6, Cengage Learning: São Paulo, 2011.

SIMONOVIKJ, Sanja. **Introduction to Olympiad Inequalities – Massachusetts Institute of Technology**. Massachusetts: Spring, 2017.

WISDOM, Nathan. **An Exploration of The Pythagoreans Means**. Disponível em http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa08/Wisdom/EMAT6690/Investigate%20Means/Means_njw.html . Acesso em: 22 de jan. 2019.