Ensino de Isometrias na Educação Básica:

Uma aplicação didática em sala de aula

Débora Costa Cona

São Paulo, julho de 2017

Ensino de Isometrias na Educação Básica:

Uma aplicação didática em sala de aula

Débora Costa Cona

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Prof^a Dr^a Cláudia Cueva Candido

Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro do Programa Bolsa Metrado do
Governo do Estado de São Paulo

São Paulo, julho de 2017

Ensino de Isometrias na Educação Básica:

Uma aplicação didática em sala de aula

Esta versão da dissertação contém correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 18/05/2017. Uma copiada versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^a Dr^a Cláudia Cueva Candido – IME-USP
- Prof^a Dr^a Bárbara Corominas Valério – IME-USP
- Prof^a Dr^a Angélica da Fontoura Garcia Silva – UNIAN – SP

“O homem para ser completo tem que estudar, trabalhar e lutar”

Sócrates

Agradecimentos

Com carinho, agradeço às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Em primeiro lugar a Deus, pela força e capacidade que me deu ao longo de mais esse período, por ter me carregado em seus braços nos diversos momentos difíceis durante a caminhada deste trabalho, permitindo a conquista de um sonho de longa data.

Ao meu filho, Samuel, pelo apoio e compreensão, minha motivação para progredir e ser melhor a cada dia em tudo que faço.

Ao meu querido esposo, Marcelo Santini, que esteve ao meu lado em cada momento desta empreitada, por sua compreensão, nunca me permitindo desistir, colaborando em tudo que pôde sempre, fundamental em qualquer desafio da minha vida.

Aos meus pais, Tânia e Juan, que despertaram em mim o amor pelo conhecimento e sempre incentivaram e apoiaram a vontade de crescer e aprender mais a cada dia.

Ao meu irmão, Moisés, pelo apoio e estímulo na condução deste trabalho.

À minha orientadora, Professora Dr^a Cláudia Cueva Candido, que com sua orientação competente, empenho, amizade, apoio e incentivos constantes, iluminou e apontou este caminho em minha vida.

À Professora Dr^a Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, que esteve presente em tantos momentos que antecederam a realização deste trabalho, como também durante sua realização, com forte participação no meu ingresso no MPEM, inclusive.

À Professora Dr^a Bárbara Corominas, pelo auxílio em suas aulas e sugestões valiosas no exame de qualificação.

À Professora Dr^a Angélica da Fontoura Garcia Silva, da Universidade Anhanguera, por gentilmente aceitar o convite para participar da banca de defesa.

À toda equipe do CAEM, que proporcionou com muito carinho atenção a realização da oficina para professores.

À coordenação e aos professores do MPEM, com quem tive o privilégio de estudar ao longo desta caminhada, por suas contribuições valiosas e convivência enriquecedora – Francisco César Polcino, Antônio Carlos Brolezzi, Martha Salerno e Maria Cristina Bonomi.

Às minhas queridas amigas de estudo que conquistei durante o mestrado, Paola, Elaine e, em especial, Fabiana, com quem cursei todas as disciplinas, e que foi constantemente minha incentivadora.

À minha amiga de longa data, Roseli, auxílio e incentivo de todas as horas.

À minha amiga e diretora da E.E. Prof. Manoel da Conceição Santos, Ana Carolina, que me apoiou e motivou durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus coordenadores, Eloíza, Denise e Anderson, que sempre se dispuseram em me auxiliar no fornecimento de todo material necessário para que a pesquisa deste trabalho ocorresse.

Aos meus queridos alunos dos 9º anos de 2015 e 2016, que participaram com tanto ânimo e interesse, sem os quais este trabalho não existiria.

Ao Governo do Estado de São Paulo, pela bolsa mestrado fornecida durante parte do meu curso.

Resumo

CONA, D.C. (2017). *Ensino de Isometrias na Educação Básica – Uma aplicação didática em sala de aula*. (Dissertação de Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Nesta dissertação apresentamos uma sequência de atividades não tradicionais, com foco no ensino e na aprendizagem de Geometria, em particular no que se refere às Isometrias no Plano, elaboradas para alunos de Ensino Fundamental, e o resultado de sua aplicação a oito turmas de 9º ano, como forma de desenvolver habilidades de raciocínio desses alunos. Utilizamos para esse experimento o *Design Experiment*, experimento de ensino fundamentado no aprimoramento contínuo, e a teoria de Van Hiele baseada na tese de doutorado de Adela Jaime-Pastor (1993), com uma série de atividades elaboradas e aplicadas pela professora/pesquisadora envolvendo as translações e as reflexões, através das fases de aprendizagem e níveis de raciocínio que os alunos desenvolvem com a aplicação dessa teoria. Esse experimento foi dividido em dois momentos, aplicação com quatro turmas de 9º ano em 2015 e aplicação com outras quatro turmas de 9º ano em 2016, subdivididos em outras duas situações, atividades sobre translações e atividades sobre reflexões. Os dados desse experimento foram obtidos através das produções dos alunos, que trabalharam em duplas, em sala de aula, registrados por meio de fotos, vídeos e áudios gravados pela própria pesquisadora. Também utilizamos as bonecas de papel de Brigitte Servatius (1997), com as quais foram trabalhadas translações e reflexões. Os alunos participantes do experimento finalizaram-no com noções sólidas das características das isometrias e um visível progresso em seu nível de conhecimento. A forma como as atividades foram realizadas trouxeram reflexos na rotina desses estudantes em sala de aula, tornando evidente que a busca por situações que despertem o interesse dos alunos de forma inovadora pode gerar melhores resultados e a motivação de uma contínua aprendizagem.

Palavras-chaves: Isometrias, Translações, Reflexões, Rotações, Ensino de Geometria, Design Experiment, Bonecas de papel, Sequência didática.

ABSTRACT

CONA, D.C. (2017) *Teaching Isometrics in Basic Education - A didactic application in the classroom* (Thesis MA). Mathematics and Statistics Institute, University of São Paulo, São Paulo.

In this dissertation we present a sequence of non-traditional activities, focusing on the teaching and learning of Geometry, in particular regarding the Isometrics in the Plan, elaborated for elementary school students, and the result of its application to eight classes of 9th grade, As a way to develop students' reasoning skills. We used for this experiment the Design Experiment, a teaching experiment based on continuous improvement, and Van Hiele's theory based on Adela Jaime-Pastor's (1993) doctoral thesis, with a series of activities elaborated and applied by the teacher/researcher involving the translations and the reflections, through the phases of learning and levels of reasoning that the students develop with the application of this theory. This experiment was divided in two moments, application with four classes of 9th grade in 2015 and application with four other groups of 9th grade in 2016, subdivided into two other situations, activities on translations and activities on reflections. The data of this experiment were obtained through the productions of the students, who worked in doubles, in the classroom, recorded through photos, videos and audios recorded by the researcher herself. We also used the paper dolls of Brigitte Servatius (1997), with which we worked on translations and reflections. The students participating in the experiment finalized it with solid notions of the characteristics of the isometries and a visible progress in their level of knowledge. The way the activities were carried out brought reflexes to the routine of these students in the classroom, making it evident that the search for situations that arouse the students' interest in an innovative way can generate better results and the motivation of continuous learning.

Keywords: Isometries, Translations, Reflections, Rotations, Teaching Geometry, Design Experiment, Paper dolls, Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de composição de transformações geométricas	22
Figura 2 – Pontos P e Q no plano cartesiano.....	23
Figura 3 – Segmento de extremidades P e Q	23
Figura 4 – Triângulo Retângulo POQ	24
Figura 5 – Exemplo de isometria.....	24
Figura 6 – Translação do ponto P pelo vetor $\vec{v}$	28
Figura 7 – Deslocando-se todos os pontos do retângulo A por $T_{\vec{v}}$, chega-se ao retângulo $T_{\vec{v}}(A)$	29
Figura 8 – Deslocando-se todos os pontos do paralelogramo B por $T_{\vec{v}}$, chega-se ao paralelogramo $T_{\vec{v}}(B)$	29
Figura 9 - Deslocando-se o centro da circunferência C, bem como todos os pontos da borda da circunferência C (pontos que possuem a mesma distância do centro – o raio) por $T_{\vec{v}}$, chega-se à circunferência $T_{\vec{v}}(C)$	29
Figura 10 – Deslocando-se todos os pontos do retângulo D por um vetor nulo $\vec{v} = 0$, a figura não sofre mudança de posição, portanto $D = T_{\vec{v}}(D)$	30
Figura 11 - Orientação de ângulo positivo e negativo	30
Figura 12 – Rotação de centro O e ângulo α que leva o ponto P no ponto P'.....	31
Figura 13 – Rotação inversa e ângulo inverso	31
Figura 14 – Pontos P' e Q' colineares a O com P' entre O e Q'	32
Figura 15 - Pontos P' e Q' colineares a O com O entre Q' e P'	32
Figura 16 - Os pontos P' e Q' não são ambos colineares ao centro O.....	33
Figura 17 – $P \notin m$, t é perpendicular a m, passando por P, e $P' \in t$, $P - Q - P'$	33
Figura 18 – Vaso ou perfil de rostos?.....	34
Figura 19 – Pontos X e Y do mesmo lado da reta m.....	34
Figura 20 – Pontos X e Y em lados opostos da reta m	35
Figura 21- $A' = T_{\overrightarrow{AA'}}(A) = T_{\overrightarrow{2AB}}(A)$	36
Figura 22 – Retângulo AA'C'C	36
Figura 23 - $A' = R_{O, 2\alpha}(A)$	37
Figura 24 – $B = R_{O, 2\alpha}(B')$	38
Figura 25 – Retas paralelas r e s, ambas perpendiculares a t	39
Figura 26 – Ciclos do redesign.....	45
Figura 27 – Exemplo de reflexão apresentado no vídeo	61

Figura 28 – Exemplo de rotação semelhante ao vídeo	61
Figura 29 – Exemplo de translação apresentado no vídeo	62
Figura 30 – Exemplo de atividade proposta na oficina do CAEM.....	64
Figura 31 – Procedimento para recortar bonecas do caso “ <i>bbb</i> ”	66
Figura 32 – Exemplo de atividade proposta na oficina do CAEM.....	67
Figura 33 – Bonecas do caso “ <i>bdb</i> ”	67
Figura 34 – Bonecas do caso “ <i>bdb</i> ”	67
Figura 35 – Bonecas do caso $\frac{bbb}{ppp}$, mostrando a composição de translação com reflexão	68
Figura 36 – Bonecas do caso $\frac{bdb}{ppp}$, mostrando a composição de reflexão com reflexão	68
Figura 37 – Exemplo de resultado obtido com o auxílio do instrumento confeccionado pelos participantes da oficina	69
Figura 38 – Bonecas de papel do caso “ <i>bqb</i> ”.....	69
Figura 39 – Bonecas de papel do caso “ <i>bqb</i> ”.....	69
Figura 40 – Primeiro par de imagens apresentada aos alunos	71
Figura 41 – Contraexemplo de translação pela segunda imagem estar rotacionada	72
Figura 42 – Exemplo e contraexemplo de translação	72
Figura 43 – Contraexemplo de translação pela ampliação da segunda imagem	72
Figura 44 – Exemplos de translação na imagem de Escher	73
Figura 45 – Atividade 3, fase 1, realizada pela dupla 1A	75
Figura 46 – Parte da atividade 3, fase 1, realizada pela dupla 2A	76
Figura 47 – Parte da atividade 3, fase 1, realizada pela dupla 2D	76
Figura 48 – Parte da atividade 3, fase 1, corrigida pela dupla 2D	77
Figura 49 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 2A	77
Figura 50 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 2B	78
Figura 51 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 1B	78
Figura 52 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 2D	78
Figura 53 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2A	80
Figura 54 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2B	81
Figura 55 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2C	81
Figura 56 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 1B	81
Figura 57 – Atividade 6, fase 2, realizada pela dupla 2D	82

Figura 58 – Atividade 6, fase 2, realizada pela dupla 2B	83
Figura 59 – Primeira parte da atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2C	83
Figura 60 – Segunda parte da atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2C	83
Figura 61 – Atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 2A	85
Figura 62 – Atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 2C	85
Figura 63 – Atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 2B	85
Figura 64 – Atividade 8, fase 4, realizada pela dupla 2A	86
Figura 65 – Realização da atividade 8, fase 4, pela dupla 2A.....	87
Figura 66 – Realização da atividade 8, fase 4, pela dupla 2B.....	87
Figura 67 – Atividade realizada pela dupla 2B	87
Figura 68 – Bonecas de papel do caso “bbb”	88
Figura 69 – Aluna recortando boneca de papel transladada	88
Figura 70 – Recorte da boneca de papel transladada feito pela aluna	89
Figura 71 – Alunos recortando bonecas de papel do caso “bbb”	89
Figura 72 – Boneca de papel recortada pela aluna.....	89
Figura 73 – Aluna apresentado sua boneca de papel do caso “bbb”	90
Figura 74 – Figuras da atividade 1, fase 1, desenhadas pela dupla 6C	91
Figura 75 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 1C	92
Figura 76 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 3C	93
Figura 77 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 6C	93
Figura 78 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 2C	94
Figura 79 – Boneca da atividade 2 dobrada em efeito “sanfona”	95
Figura 80 – Aluno recortando as bonecas de papel do 1º caso “bdb”.....	95
Figura 81 – Boneca de papel do 1º caso “bdb” recortada pela aluna.....	96
Figura 82 – Aluno apresentando seu recorte da boneca de papel do 1º caso “bdb”.96	
Figura 83 – Duplas realizando a atividade 3, fase 1	97
Figura 84 – Boneca de papel do 2º caso “bdb” recortada pelo aluno.....	97
Figura 85 – Aluna identificando os eixos de reflexão das bonecas do 2º caso “bdb”	97
Figura 86 – Atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 3C	98
Figura 87 – Atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 1C	99
Figura 88 – Atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 6C	100
Figura 89 – Aluno conferindo a reflexão pelo espelho	100
Figura 90 – Atividade 5a, fase 2, realizada pela dupla 4C	101

Figura 91 – Atividade 5a, fase 2, realizada pela dupla 3C	101
Figura 92 – Atividade 5a, fase 2, realizada pela dupla 5C	102
Figura 93 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 3C.....	102
Figura 94 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 1C.....	103
Figura 95 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 3C.....	103
Figura 96 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 2C.....	103
Figura 97 – Atividade 5b, fase 2, da dupla 2C mostrando dois bonecos sem plumas	104
Figura 98 – Atividade 5b, fase 2, da dupla 4C mostrando um boneco com duas plumas.....	104
Figura 99 – Atividade 5b, fase 2, da dupla 5C mostrando um boneco sem plumas	104
Figura 100 – Aluno visualizando três circunferências	105
Figura 101 – Aluno visualizando uma circunferência	106
Figura 102 – Aluno visualizando duas circunferências.....	106
Figura 103 – Aluna visualizando quatro circunferências	106
Figura 104 – Aluno verificando o eixo com o espelho	108
Figura 105 – Aluno verificando o eixo com o espelho	108
Figura 106 – Dupla 2C marcando dois pontos para traçar o eixo	108
Figura 107 – Dupla 3C marcando o ponto médio entre os vértices dos triângulos .	109
Figura 108 – Atividade 6, fase 4, realizada pela dupla 4C	109
Figura 109 – Parte da atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 6C	110
Figura 110 – Dupla 5C realizando a atividade 7, fase 4.....	111
Figura 111 – Características da Translação escrita pelos alunos	112
Figura 112 - Características da Reflexão escrita pelos alunos.....	112
Figura 113 - Características da Rotação escrita pelos alunos	113
Figura 114 – Visitante realizando atividades de cada tipo de isometria	113
Figura 115 – Visitantes fazendo bonecas de papel.....	114
Figura 116 – Alunas orientando nos recortes das bonecas de papel.....	114

Sumário

1. Introdução.....	15
2. Transformações Geométricas e Isometrias	21
2.1. Transformações Geométricas	21
2.1.1. Distância entre dois pontos	23
2.2. Isometrias.....	24
2.2.1. Isometrias e Congruências	27
2.2.2. Translação	28
2.2.3. Rotação	30
2.2.4. Reflexão em relação a uma reta.....	33
2.2.5. Composição de Isometrias	36
2.2.6. Reflexão Transladada.....	38
3. Metodologia	40
3.1. Design Experiment.....	40
3.2. Modelo de Van Hiele segundo Adela Jaime.....	45
3.2.1. Os níveis de raciocínio	46
3.2.2. As fases de aprendizagem	49
3.2.3. Propriedades do Modelo de Van Hiele	53
4. Experimento de ensino	57
4.1. Processo de aplicação das atividades com os alunos	57
4.2. Aplicação das atividades na oficina do CAEM	63
5. Análise dos dados	70
5.1. Atividades realizadas sobre Translações	70
5.2. Atividades realizadas sobre Reflexões.....	90
5.3. Exposição sobre Isometrias	111
6. Considerações finais.....	116
Referências Bibliográficas	121
Anexo 1 – Proposta de ensino segundo o modelo de Van Hiele.....	123
Translações: Nível 1	123
Translações: Nível 1 – Fase 1	125
Translações: Nível 1 – Fase 2	128
Translações: Nível 1 – Fase 4	131
Reflexões: Nível 1	133

Reflexões: Nível 1 – Fase 1	135
Reflexões: Nível 1 – Fase 2.....	138
Reflexões: Nível 1 – Fase 4.....	140
Rotações: Nível 1	142
Rotações: Nível 1 – Fase 1.....	144
Rotações: Nível 1 – Fase 2.....	146
Rotações: Nível 1 – Fase 4.....	147
Anexo 2 – Bonecas de papel (Brigitte Servatius)	148
Anexo 3 – Questionário para professores de Ensino Fundamental e Médio.....	156
Anexo 4 – Oficina do CAEM.....	159

1. INTRODUÇÃO

A ideia inicial desta pesquisa teve origem ainda na graduação, a partir de trabalho desenvolvido para a disciplina de Projetos de Pesquisa no 7º semestre do curso de Bacharelado e Licenciatura em Matemática no Centro Universitário UNIFIEO. O tema foi sugestão da professora da disciplina e teve como objetivo a pesquisa para formação, quando tivemos o primeiro contato com o assunto. Para aquele trabalho, além da apresentação final sobre o tema, foi solicitada ainda uma oficina sobre isometrias que foi aplicada aos colegas de turma, sob a observação e avaliação da professora. Para a oficina, as atividades propostas foram as bonecas de papel de Brigitte Servatius (1997).

Após a apresentação desse trabalho, verificamos que não havia muitas produções com foco no ensino e na aprendizagem do tema escolhido. Ao ingressar no mestrado, decidimos, então, seguir essa linha de pesquisa, buscando apresentar a alunos de ensino fundamental, com os quais trabalhamos, as isometrias de forma prática e focando a visualização e compreensão dos movimentos de cada isometria.

Este trabalho foi idealizado com o objetivo de elaborar atividades que possam complementar o atual currículo escolar sobre isometrias do plano na Educação Básica, apresentando uma proposta de sequência didática sobre o assunto, que seja inovadora e apreensível por alunos do ensino fundamental.

A proposta de ensino foi aplicada na Escola Estadual Professor Manoel da Conceição Santos, em Carapicuíba, onde exercemos a função de professora de ensino fundamental II e ensino médio, com quatro turmas de 9º ano em 2015 e outras quatro turmas de 9º ano em 2016. Na condição de professora efetiva na rede pública de ensino, participamos da seleção de bolsa mestrado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, sendo contemplada através de análise de projeto para recebimento da bolsa mestrado por catorze meses.

A expectativa é que esta pesquisa ilustre que propor aos alunos atividades diferenciadas, ainda que simples, pode despertar o interesse, facilitar o entendimento e desenvolver habilidades de raciocínio, colaborando para a autonomia da resolução de problemas e do conhecimento.

O processo de ensino-aprendizagem de matemática tem sido muito discutido nos últimos anos. Em particular, o ensino da Geometria tem um papel

importante para a construção do conhecimento matemático ao longo do processo de escolarização.

Em nossa prática, na função de professora de educação básica da rede estadual de ensino, é possível verificar dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos, sobretudo no que se refere às transformações geométricas, parte importante do currículo de Matemática e assunto pouco abordado na educação básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – 1998) apontam a Geometria como “um campo fértil para trabalhar com situações-problema (...)” (p. 51), e estabelecem ainda que, no terceiro ciclo do Ensino Fundamental (antigas 5ª e 6ª séries, atuais 6º e 7º anos), o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico por meio de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

Resolver situações-problema que envolvem figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. p. 65.

O ensino de Geometria realizado por meio da utilização de objetos encontrados nos ambientes em que vivemos e de aplicações práticas, pode fazer com que o aluno tenha uma visão concreta do que é ensinado, e venha a ampliar seu olhar, de forma que conhecimentos matemáticos passem a ter significado para ele. Conforme os PCN (1998):

(...) ela (a Geometria) desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. p. 122.

No entanto, segundo Pavanello (1993), o ensino da Geometria nas escolas de Educação Básica no Brasil foi gradualmente sendo abandonado até o começo da década de 90, sobretudo nas escolas públicas, fato que tem preocupado os educadores matemáticos brasileiros. Aponta ainda que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros em trabalhar com a Geometria, deixam de incluí-la em seu planejamento; outros reservam o final do ano letivo para sua abordagem e levando-se em conta a quantidade de conteúdos que precisam ser abordados, colocam a Geometria em posição secundária em relação ao ensino da Álgebra, por

exemplo. Além disso, Pavanello (1993) salienta que, em vários países, muitas pesquisas têm discutido “o ‘que’ ensinar de geometria e ‘como’ fazê-lo” (p. 8).

Com a intenção de buscar indícios de que as afirmações de Pavanello (1993) continuam válidas atualmente, elaboramos um questionário para professores da Educação Básica de escolas públicas e particulares, conforme anexo 2. Por meio das respostas obtidas, pudemos verificar que, embora todos os 15 professores que participaram da pesquisa afirmem que o estudo da Geometria é indispensável à formação intelectual dos alunos, que ajuda no desenvolvimento do raciocínio e que é uma área tão ou mais importante que qualquer outra da Matemática, todos eles também afirmam que gostariam de ensinar mais Geometria, porém o tempo de aula é insuficiente para isso.

Entre os motivos apontados para não ensinarem muito a Geometria está o fato de deixarem para o final do ano e nem sempre terem tempo para concluir o tópico iniciado, acabando por excluir alguns conteúdos de Geometria. Há também o fato de perceberem dificuldades dos alunos na matéria, preferindo, então, não dar prosseguimento no assunto. Percebemos ainda que todos os professores que afirmaram já ter excluído algum conteúdo de Geometria são professores de escolas públicas.

Verificamos também que o foco do ensino de Geometria tem sido em fórmulas, como de áreas, volumes ou números de diagonais e que não costumam acrescentar conteúdos sobre Geometria em seu planejamento, pois acham suficientes os conteúdos previstos para o ano letivo. Porém, esses professores encontram dificuldades em ensinar Geometria e precisam estudar a respeito do conteúdo para o preparo de suas aulas ou até mesmo procurando cursos complementares de Geometria.

Podemos assim perceber que, embora tenhamos utilizado uma pequena amostra, há indícios de que boa parte das afirmações de Pavanello (1993) permanece atual, e vale a pena, então, continuar pesquisando formas de melhorar o ensino de Geometria e influenciar colegas a ensiná-la. Além disso, o resultado da análise desses questionários foi de aumentar em nós a motivação para a realização deste trabalho.

O conceito de congruência de figuras é um tópico central no ensino elementar de Geometria, e torna-se de fácil compreensão quando explicado por meio de superposição de figuras, ou seja, por meio de movimentos rígidos que não causam deformações de comprimentos ou de ângulos, as isometrias. A importância desse

assunto é apontada nos PCN (1998) do Ensino Fundamental na escolha de conteúdos, bem como nas orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos:

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. p. 51.

À primeira vista, as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia a dia, mas refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. p. 124.

Ressaltamos que, conforme os PCN (1998), é importante enfatizar que as transformações isométricas representam parte integrante da formação no Ensino Fundamental:

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. p. 124.

Para o quarto ciclo do Ensino Fundamental (7º e 8º anos), a proposta é:

Produzir e analisar transformações [...] de figuras geométricas planas identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência [...]. p.82.

Ao analisar os PCN do Ensino Médio, verificamos que esse tópico não se encontra explicitamente incluído. Percebemos, então, uma diferença entre os PCN do Ensino Fundamental e Médio, já que no Ensino Fundamental há uma orientação didática específica sobre as transformações isométricas, e no Ensino Médio não é feita indicação de forma específica.

Nesse sentido, é importante ressaltar que, em sua dissertação de mestrado, Lage (2008) aponta as dificuldades dos universitários que não estudaram Transformações Geométricas na Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio. Segundo Lage (2008), o conteúdo de Transformações Geométricas pode “atuar como

um articulador entre os diversos conteúdos e ideias matemáticas, dando significado à linguagem (...)” (p. 42), desde que “seu estudo seja feito de forma gradual, desde as séries iniciais do ensino fundamental, de maneira que o aluno vá ampliando e aprofundando seus conhecimentos sobre o tema” (p.42).

O objetivo do presente trabalho foi apresentar o ensino das isometrias no ensino básico, como forma de que os alunos desenvolvessem habilidades de percepção espacial, compreendessem e utilizassem o pensamento geométrico e também de favorecer a construção da noção de congruência entre figuras planas.

Para isso foi feita a elaboração e a aplicação de uma sequência didática para alunos do 9º Ensino Fundamental, baseada no modelo de Van Hiele segundo Adela Jaime (1993), e de uma oficina que foi aplicada para professores no CAEM, como sugestão de trabalho para a formalização do conceito de isometrias, com a utilização das bonecas de papel desenvolvido por Brigitte Servatius (1997), feito por meio de dobraduras, onde todos os tipos de isometrias são melhor visualizados e manipuláveis, com foco no deslocamento das figuras.

No capítulo 2, apresentamos um estudo detalhado de transformações geométricas, em particular de isometrias, sendo que no anexo 1, encontra-se a proposta de atividades para o ensino de translações, rotações e reflexões na Educação Básica.

No capítulo 3, descrevemos a metodologia adotada para o desenvolvimento deste trabalho, o *Design Experiment Research*, bem como o porquê de sua escolha para a condução da pesquisa. Apontamos ainda neste capítulo os níveis de raciocínio e fases de aprendizagem do Modelo de Van Hiele e sua adequação à metodologia adotada.

No capítulo 4 encontram-se as atividades elaboradas segundo o modelo de Van Hiele e inspiradas no trabalho desenvolvido por Adela Jaime (1993) que foram aplicadas em turmas de 9ºs anos, no qual descrevemos o desenvolvimento dessas atividades, bem como a aplicação da oficina no CAEM para professores da Educação Básica e alunos de Licenciatura. Os dados dessas atividades foram coletados por meio de vídeos, fotos e áudio feitos pela professora/pesquisadora exercendo essa dupla função, durante as aulas desse experimento, além das produções dos alunos realizadas em sala de aula. Porém, dos dados coletados em 2015 restam atualmente somente as produções dos alunos, pois os vídeos, áudios e fotos foram perdidos em roubo dos aparelhos eletrônicos onde estes estavam registrados.

O capítulo 5 traz uma análise do desempenho dos alunos, resultados obtidos e formas de pensamento apresentadas na aplicação das atividades segundo o modelo de Van Hiele. Mostra também a apresentação dos alunos destas atividades numa feira de ciências promovida pela escola.

O capítulo 6 apresenta as considerações finais com reflexões sobre os resultados da pesquisa. Os anexos trazem o questionário distribuído a professores da educação básica sobre o ensino de Geometria, as atividades propostas e desenvolvidas pelos alunos bem como as atividades propostas na oficina do CAEM.

2. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E ISOMETRIAS

Neste capítulo é feita uma introdução ao estudo das transformações geométricas e, em particular, das isometrias no plano, tema da geometria que pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, ao contribuir como ferramenta no estudo de propriedades das figuras geométricas planas, desenvolvendo o conceito de congruência, além do desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno no âmbito visual e intuitivo.

Embora a forma como as isometrias estão apresentadas neste capítulo aproxime-se da abordagem feita em um curso de graduação, e não da forma como são ensinadas na Educação Básica (já que os elementos e conceitos matemáticos aqui apresentados não são ensinados para alunos de ensino fundamental ou médio), consideramos apropriado apresentá-los a título de revisão e até para possibilitar a comparação com a proposta de ensino realizada neste experimento.

Segundo Alves e Galvão (1996), referência principal neste capítulo,

A descoberta de propriedades que são preservadas pelas isometrias e por outras transformações é uma das partes mais importantes do estudo da Geometria. O matemático alemão Felix Klein (1849-1925), em 1872, foi o primeiro a considerar a Geometria como o estudo daquelas propriedades que são preservadas por certos tipos de transformações. Este ponto de vista justifica o interesse atual por este tratamento da Geometria” (p. 23 – 24).

Acreditamos que o ensino das transformações geométricas na Educação Básica é importante, desde que realizado com atividades não rotineiras e linguagem adequada ao ano em que os alunos se encontram, pois tais conceitos podem servir como articuladores entre diversos conteúdos matemáticos. Transformações geométricas são citadas nos PCN (1998), entre outros propósitos, como recurso para a descoberta das condições para que duas figuras sejam congruentes, conforme veremos mais adiante, neste mesmo capítulo.

2.1. Transformações Geométricas

Seja π um plano euclidiano e F uma aplicação do conjunto dos pontos do plano π em si mesmo, ou seja, a cada ponto P de π está associado um único ponto desse plano, indicado por $F(P)$. Definem-se:

- F é *sobrejetora* se para todo ponto Q do plano existir um ponto P tal que $F(P) = Q$.
- F é *injetora* se para quaisquer pontos P e Q do plano, $P \neq Q$, então $F(P) \neq F(Q)$.
- F é *bijetora* se é simultaneamente injetora e sobrejetora, isto é, para todo ponto Q do plano existe um único P tal que $F(P) = Q$.

Definição: Uma *transformação no plano* é uma correspondência *bijetora* do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo - ou seja, associa a todo ponto Q do plano um único ponto P do mesmo plano, tal que $F(P) = Q$. Também pode ser chamada de *transformação geométrica*.

Como exemplo trivial, tem-se a *transformação identidade* definida por $Id(P) = P$ para todo ponto P do plano (ou seja, a imagem do ponto é o próprio ponto).

Como toda transformação geométrica em π é uma função bijetora, segue a existência de F^{-1} , chamada *transformação inversa* de F . De fato, para todo $Q \in \pi$, definimos $F^{-1}(Q) = P$, onde P é o único ponto de π tal que $F(P) = Q$.

A composta de duas (ou mais) transformações geométricas é também uma transformação no plano. Indicando a aplicação *composta* de duas transformações F e G por $G \circ F$, definida por $(G \circ F)(P) = G(F(P))$ para todo ponto P , $G \circ F$ é uma transformação no plano, bem como $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$, para quaisquer F , G e H transformações do plano.

Figura 1 – Exemplo de composição de transformações geométricas

A composição de transformações será tratada de forma mais específica mais adiante.

Uma transformação pode, ou não, manter a forma e o tamanho da figura a ser transformada. As principais transformações no plano euclidiano são as *isometrias* e *homotetias*. O foco desse trabalho será o estudo de transformações que conservam a forma e o tamanho das figuras, ou seja, as isometrias.

2.1.1. Distância entre dois pontos

Seja π um plano euclidiano munido de um sistema de eixos, chamado plano cartesiano, e P e Q dois pontos dados no plano cartesiano, de coordenadas indicadas por $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, conforme a figura 2 a seguir:

Figura 2 – Pontos P e Q no plano cartesiano

A distância entre P e Q é um número real, denotada por $d(P, Q)$ ou por PQ , que é a medida do segmento de reta que vai de P até Q , conforme figura 3.

Figura 3 – Segmento de extremidades P e Q

Portanto, os segmentos pontilhados, na figura 4 a seguir, são paralelos aos eixos x e y , e quando se interceptam no ponto O , formam um ângulo de 90° .

Figura 4 – Triângulo Retângulo POQ

No triângulo POQ retângulo em O , tem-se $d(P, O) = (x_2 - x_1)$ e $d(Q, O) = (y_2 - y_1)$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, segue-se que:

$$(d(P, Q))^2 = (d(PO))^2 + (d(QO))^2$$

$$(d(P, Q))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = PQ$$

2.2. Isometrias

Definição: Uma *isometria do plano* é uma transformação geométrica no plano que preserva distância entre pontos, ou seja, F é uma isometria se $d(A', B') = d(A, B)$ para todo par de pontos A e B do plano, onde $A' = F(A)$ e $B' = F(B)$.

Figura 5 – Exemplo de isometria

A primeira consequência imediata da definição é que a transformação F^{-1} , inversa de uma isometria F , é também uma isometria.

Além de, por definição, preservarem distância entre dois pontos, isometrias preservam diversas propriedades geométricas, entre elas colinearidade e ângulos. Os resultados apresentados a seguir são válidos na Geometria Euclidiana e, portanto, serão assumidos os axiomas de incidência, ordem, congruência, continuidade e suas consequências. Mais detalhes podem ser encontrados em Alves e Galvão (1996).

O lema a seguir caracteriza a relação de “estar entre” em termos de comprimento de segmentos. Sua demonstração apoia-se nos axiomas de ordem e congruência e de suas consequências.

Lema: $P - Q - R \Leftrightarrow PQ + QR = PR$.

Dem.: ($\rightarrow$) Sejam os pontos P, Q, R tais que $P - Q - R$, isto é “ Q está entre P e R ”. Segue, dos axiomas e suas consequências, que P, Q e R são colineares e que vale $PQ + QR = PR$.

($\leftarrow$) Sejam três pontos P, Q e R tais que $PQ + QR = PR$. Se P, Q e R fossem não colineares valeria $PR < PQ + QR$, pela desigualdade triangular. Logo, P, Q e R são colineares e há três possibilidades: $P - Q - R, Q - P - R$ ou $P - R - Q$, mas a igualdade $PQ + QR = PR$ exclui as duas últimas e segue que $P - Q - R$. $\square$

Sejam F uma isometria do plano, P, Q, R pontos distintos do plano e $P' = F(P)$, $Q' = F(Q)$ e $R' = F(R)$. Como, por definição, F preserva distâncias entre pontos do plano, sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} PQ = P'Q' \\ QR = Q'R' \\ PR = P'R' \end{array} \right\} (*)$$

Além disso, F preserva:

- A relação de “estar entre”.

De fato, sejam P, Q e R colineares tais que $P - Q - R$. Pelo lema, segue que $PQ + QR = PR$ e, por (*), $P'Q' + Q'R' = P'R'$. Desta última igualdade, segue pelo lema que $P' - Q' - R'$. Assim, se Q está entre P e R , sua imagem pela isometria F está entre as imagens por F , de P e R , ou seja, F preserva a ordem dos pontos;

- A colinearidade dos pontos do plano.

Pois, se P, Q e R são colineares, há três possibilidades: $P - Q - R$, $Q - P - R$ ou $P - R - Q$ e, conforme demonstrado acima, o mesmo acontece com P', Q' e R' , que são, portanto, colineares;

- *Retas.*

Sejam P e Q pontos do plano e $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$. Considerando a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, temos que $F(\overleftrightarrow{PQ}) \subset \overleftrightarrow{P'Q'}$, pois F preserva a colinearidade. Analogamente, sendo F^{-1} uma isometria do plano, então $F^{-1}(\overleftrightarrow{P'Q'}) \subset \overleftrightarrow{PQ}$. Sendo $\overleftrightarrow{P'Q'} = F(F^{-1}(\overleftrightarrow{P'Q'}))$ e $F(F^{-1}(\overleftrightarrow{P'Q'})) \subset F(\overleftrightarrow{PQ})$, então $F(\overleftrightarrow{PQ}) = \overleftrightarrow{P'Q'}$;

- *Pontos médios.*

Pois observamos que $P - Q - R$ com $PQ = QR$ (ou seja, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PR}$) implica em $P' - Q' - R'$ com $P'Q' = Q'R'$. Ou seja, se Q é o ponto médio de $\overline{PR}$, então sua imagem Q' é o ponto médio do segmento $\overline{P'R'}$;

- *Segmentos.*

Pois sendo $\overline{PR}$ a união de P, R e todos os pontos entre P e R , então $F(\overline{PR})$ é a união de P', R' e todos os pontos entre P' e R' , ou seja, $F(\overline{PR}) = \overline{P'R'}$;

- *Semirretas.*

Pois, analogamente à preservação de segmentos, sendo a semirreta $\overrightarrow{PQ}$ a união de $\overline{PQ}$ com todos os pontos R tais que $P - Q - R$, então $F(\overrightarrow{PQ})$ é a união de $\overline{P'Q'}$ e todos os pontos R' tais que $P' - Q' - R'$. Logo, $F(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{P'Q'}$;

- *Triângulos.*

De fato, sejam P, Q e R pontos não colineares. Então P', Q' e R' também são não colineares, pois caso contrário, teríamos que F^{-1} levaria pontos colineares (P', Q' e R') em pontos não colineares (P, Q e R), o que é absurdo, já que a isometria preserva a colinearidade dos pontos. O triângulo $\triangle PQR$ é formado pela união dos segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{RP}$, os quais, aplicando a isometria F temos $F(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$, $F(\overline{QR}) = \overline{Q'R'}$ e $F(\overline{RP}) = \overline{R'P'}$. Logo, $F(\triangle PQR) = \triangle P'Q'R'$. Além disso, de (*) e pela proposição

LLL de congruência de triângulos, o $\triangle P'Q'R'$ é congruente ao $\triangle PQR$ (notação: $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$);

- *Ângulos e suas medidas.*

Temos $F(\angle PQR) = \angle P'Q'R'$, já que F preserva semirretas. Além disso, como F preserva as medidas angulares da congruência entre os triângulos $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$. Segue que $m(\angle PQR) = m(\angle P'Q'R')$;

- *Perpendicularismo.*

Pois sendo $\overrightarrow{PQ}$ perpendicular a $\overrightarrow{PR}$, então $\overrightarrow{P'Q'}$ é perpendicular a $\overrightarrow{P'R'}$, já que $m(\angle QPR) = 90^\circ$, implica $m(\angle Q'P'R') = 90^\circ$;

- *Paralelismo.*

De fato, sejam r e s retas paralelas do plano e t uma reta perpendicular a r e s . Sendo $r' = F(r)$, $s' = F(s)$ e $t' = F(t)$, e como F preserva o perpendicularismo, temos que $t' \perp r'$ e $t' \perp s'$, logo, $r' \parallel s'$.

2.2.1. Isometrias e Congruências

Pelo que foi visto seção 2.2, isometrias são transformações que, em particular, levam segmentos em segmentos, ângulos em ângulos, além de preservarem suas medidas; como consequência, preservam forma e tamanho de figuras. Uma figura e sua imagem por uma isometria são chamadas de figuras congruentes por terem a mesma forma e o mesmo tamanho. A ação de uma isometria sobre um objeto altera, eventualmente, sua posição e origina figuras congruentes.

Atualmente, na Geometria Euclidiana a congruência de triângulos é postulada, mas originalmente a congruência era relacionada à sobreposição de figuras apesar de não haver na época dos gregos de Euclides conceitos matemáticos que representassem essa ideia. Ora, levar uma figura de sua posição original no plano e sobrepô-la a outra é exatamente a ação realizada por uma isometria.

São isometrias as seguintes transformações geométricas: *translação*, *rotação em relação a um ponto*, *reflexão em relação a uma reta* (ou simetria axial) e *reflexão transladada em relação a uma reta*. Estas podem ser combinadas entre si e

também resultarão em isometrias, enquadrando-se sempre em um dos quatro casos citados, conforme será visto e demonstrado nas próximas seções.

2.2.2. Translação

Antes de definirmos a translação, vale lembrar o conceito de *vetor* como uma classe de equipolência de segmentos orientados. Temos ainda a “soma de ponto com vetor” definida por $P + \vec{v} = P'$ se e somente se o segmento orientado $\overrightarrow{PP'}$ representa o vetor $\vec{v}$ com origem em P .

Definição: *Translação na direção do vetor $\vec{v}$ ou simplesmente translação no plano*, denotada por T ou $T_{\vec{v}}$ é uma transformação do plano em si mesmo que, fixado um vetor $\vec{v}$, associa a cada ponto P do plano o ponto $T(P) = P' = P + \vec{v}$. O vetor $\vec{v}$ é o vetor de translação.

O exemplo da figura 6, a seguir, representa a translação de um ponto pelo vetor $\vec{v}$ no plano cartesiano.

Figura 6 – Translação do ponto P pelo vetor $\vec{v}$

A translação não possui pontos fixos, exceto se o vetor de translação for nulo, o que resulta na transformação identidade, conforme veremos a seguir. Podemos ainda observar as seguintes propriedades:

a) Toda translação é uma isometria do plano, pois, se $P' = T_{\vec{v}}(P)$ e $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$, com P e Q pontos distintos do plano, então:

$$P'Q' = |Q' - P'| = |(Q + \vec{v}) - (P + \vec{v})| = |Q - P| = PQ.$$

b) A composta de duas translações de vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é a translação de vetor $\vec{v} + \vec{w}$, ou seja, $(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}})(P) = T_{\vec{v} + \vec{w}}(P)$.

De fato, $(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}})(P) = T_{\vec{v}}(T_{\vec{w}}(P)) = T_{\vec{v}}(P + \vec{w}) = (P + \vec{w}) + \vec{v} = P + (\vec{w} + \vec{v}) = T_{\vec{v} + \vec{w}}(P), \forall P$.

c) Se $\vec{v} = \vec{0}$, temos que $T_{\vec{0}}(P) = P + \vec{0} = P = Id(P), \forall P$ (ou seja, $T_{\vec{0}}$ é a transformação identidade do plano).

Nas figuras 7 a 10, a seguir, encontram-se mais alguns exemplos, onde excepcionalmente cada figura geométrica está representada por uma letra:

Figura 7 – Deslocando-se todos os pontos do retângulo A por $T_{\vec{v}}$, chega-se ao retângulo $T_{\vec{v}}(A)$

Figura 8 – Deslocando-se todos os pontos do paralelogramo B por $T_{\vec{v}}$, chega-se ao paralelogramo $T_{\vec{v}}(B)$

Figura 9 - Deslocando-se o centro da circunferência C, bem como todos os pontos da borda da circunferência C (pontos que possuem a mesma distância do centro – o raio) por $T_{\vec{v}}$, chega-se à circunferência $T_{\vec{v}}(C)$

Figura 10 – Deslocando-se todos os pontos do retângulo D por um vetor nulo $\vec{v} = 0$, a figura não sofre mudança de posição, portanto $D = T_{\vec{v}}(D)$

2.2.3. Rotação

Para estudar as rotações é preciso considerar uma orientação para os ângulos do plano. Essa orientação será feita de forma que, os ângulos com medida positiva (ou simplesmente positivos) serão orientados no sentido anti-horário, e os negativos, orientados no sentido horário, como mostra a figura 11 a seguir.

Figura 11 - Orientação de ângulo positivo e negativo

Definição: Uma *rotação de centro O e ângulo α* , é uma transformação do plano que, dados um ponto O do plano e um número real α , $-\pi < \alpha \leq \pi$ fixa o ponto O e, a cada ponto P do plano, P distinto de O , associa um ponto P' pertencente à circunferência de centro O e raio OP e tal que a medida do ângulo orientado $\angle POP'$ é igual a α . Denota-se a rotação de centro O e ângulo α por Ro, α .

A definição de rotação pode ser estendida para ângulos orientados de medida arbitrária, estabelecendo-se que:

$$Ro, \alpha + 2k\pi = Ro, \alpha, \alpha \in]-\pi, \pi], k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, para estudar as propriedades das rotações é suficiente analisá-las para valores do ângulo α que estejam no intervalo $]-\pi, \pi]$.

Seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto do plano cartesiano, onde a rotação de centro em O e ângulo α transforma o ponto P no ponto $P' = (x_2, y_2)$, como figura 12 a seguir:

Figura 12 – Rotação de centro O e ângulo α que leva o ponto P no ponto P'

Podem-se observar as seguintes propriedades da rotação no plano:

- Se $\alpha = 0$, então $R_{O,\alpha} = Id$, ou seja, $R_{O,\alpha}$ fixa todos os pontos do plano, o que decorre da definição. Se $0 < |\alpha| \leq \pi$, então o único ponto fixo da rotação $R_{O,\alpha}$ é seu centro O , pois se $0 < |\alpha| \leq \pi$, temos P e $P' = R_{O,\alpha}(P)$ pontos distintos do plano, para qualquer P distinto de O , logo, não existem outros pontos fixos para $R_{O,\alpha}$ além do centro O .
- Ainda como consequência da definição, vê-se que $R_{O,\alpha}(P) = P'$ se e somente se $R_{O,-\alpha}(P') = P$, ou seja, rotações são transformações tais que $(R_{O,\alpha})^{-1} = R_{O,-\alpha}$, como mostra a figura 13 a seguir:

Figura 13 – Rotação inversa e ângulo inverso

- Toda rotação é uma isometria.

Queremos mostrar que $PQ = P'Q'$. Dados dois pontos distintos P e Q e sejam suas imagens $P' = R_{O,\alpha}(P)$ e $Q' = R_{O,\alpha}(Q)$. Tem-se dois casos distintos a considerar, que correspondem ao fato de P , Q e O serem ou não colineares.

1º caso: P , Q e O são colineares e a distância entre esses pontos coincide com a soma ou com a diferença entre os raios das circunferências descritas pela rotação, dependendo de o centro de rotação estar ou não entre os pontos P e Q (sem perda de generalidade).

a) $O - P - Q$

Figura 14 – Pontos P' e Q' colineares a O com P' entre O e Q'

Então:

$OP' = OP$ (pois P' pertence à circunferência de centro O e raio OP).

$OQ' = OQ$ (pois Q' pertence à circunferência de centro O e raio OQ).

Logo, $PQ = OQ - OP = OQ' - OP' = P'Q'$.

b) $Q - O - P$ (sem perda de generalidade)

Figura 15 - Pontos P' e Q' colineares a O com O entre Q' e P'

Então:

$OP' = OP$ (pois P' pertence à circunferência de centro O e raio OP).

$OQ' = OQ$ (pois Q' pertence a circunferência de centro O e raio OQ).

Logo, $PQ = PO + OQ = PO' + OQ' = P'Q'$.

2º caso: P' , Q' e O não são colineares.

Figura 16 - Os pontos P' e Q' não são ambos colineares ao centro O .

Então:

$$\left. \begin{array}{l} OP = OP' \\ OQ = OQ' \\ m(\angle POQ) = m(\angle P'OQ') \end{array} \right\} \text{Pelo postulado de congruência (LAL), tem-se que}$$

$$\triangle POQ \cong \triangle P'OQ'.$$

$$\text{Logo, } PQ = P'Q'.$$

2.2.4. Reflexão em relação a uma reta

Seja m uma reta do plano e P um ponto qualquer do plano. Considerem-se a reta t perpendicular a m , passando pelo ponto P e $m \cap t = \{Q\}$. Supondo que P não pertença à reta m , considere $P' \in t$, tal que $P - Q - P'$ e $PQ = QP'$, ou seja, tal que Q é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$.

Figura 17 – $P \notin m$, t é perpendicular a m , passando por P , e $P' \in t$, $P - Q - P'$

Segue que a reta m é perpendicular ao segmento $\overline{PP'}$, passando pelo seu ponto médio, ou seja, m é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.

Definição: Uma *reflexão em relação à reta m* é uma transformação do plano que, dada a reta m do plano, fixa todos os pontos de m e associa a cada ponto

P do plano, P não pertencente a m , o ponto P' , de modo que a reta m é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.

Denota-se a reflexão em relação à reta m por R_m . A definição expressa que $R_m(P) = P$ para todo $P \in m$ e $R_m(P) = P'$, quando $P \notin m$, se e somente se m é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Neste caso diz-se que P e P' são *simétricos em relação à reta m* , sendo m chamada de *eixo de reflexão* ou ainda *eixo de simetria*, já que a *simetria* é o resultado da reflexão.

Segue ainda da definição que $R_m^2(P) = R_m \circ R_m = Id$, ou ainda que $R_m^{-1} = R_m$.

A figura 18, a seguir, mostra um efeito da reflexão em relação a uma reta.

Figura 18 – Vaso ou perfil de rostos?

Toda reflexão é uma isometria. Para provar isso, considerem-se dois casos.

Sejam X e Y pontos distintos do plano e suas $X' = R_m(X)$ e $Y' = R_m(Y)$.

1º caso: Suponha-se que X e Y estejam de um mesmo lado da reta m do plano, mas X e Y não são perpendiculares a m e X e Y não pertence a m .

Sejam também P e Q pontos médios dos segmentos $\overline{XX'}$ e $\overline{YY'}$, respectivamente.

Figura 19 – Pontos X e Y do mesmo lado da reta m

Nos triângulos ΔXPQ e $\Delta X'PQ$, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{XP} \equiv \overline{X'P} \\ m(\angle XPQ) = m(\angle X'PQ) \\ \overline{PQ} \text{ é lado comum} \end{array} \right\} \text{Pelo postulado de congruência (LAL), tem-se que}$$

$\Delta XPQ \equiv \Delta X'PQ$. Logo, $m(\angle PQX) = m(\angle PQX') \Rightarrow m(\angle XPQ) = m(\angle X'PQ)$, já que são ângulos complementares.

Nos triângulos ΔXQY e $\Delta X'QY'$, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{XQ} \equiv \overline{X'Q} \\ m(\angle XQY) = m(\angle X'QY') \\ \overline{YQ} \equiv \overline{Y'Q} \end{array} \right\} \text{Pelo postulado de congruência (LAL), tem-se que}$$

$\Delta XQY \equiv \Delta X'QY'$. Então, $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$.

2º caso: Suponhamos X e Y em lados opostos da reta m , mas não em uma mesma reta perpendicular a m .

Figura 20 – Pontos X e Y em lados opostos da reta m

Sejam A , B e C pontos de interseção de XY , XX' e YY' , respectivamente, com a reta m . Nos triângulos ΔABX e $\Delta ABX'$, tem-se:

$$\begin{array}{l} \overline{XB} \equiv \overline{X'B} \\ \angle XBA \equiv \angle X'BA, \text{ retos, pois } m \text{ é mediatriz de } \overline{XX'} \\ \overline{AB} \text{ é lado comum} \end{array}$$

Pelo postulado de congruência (LAL), $\Delta ABX \equiv \Delta ABX'$. Logo, $\overline{AX} \equiv \overline{AX'}$. Analogamente, nos triângulos ΔACY e $\Delta ACY'$, tem-se $\overline{AY} \equiv \overline{AY'}$. Assim, os triângulos $\Delta AXX'$ e $\Delta AYY'$ são isósceles, portanto suas medianas são bissetrizes: $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.

Como α e β' são opostos pelo vértice, então $\alpha = \beta'$. Logo, $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Como $\beta + \beta'$ é suplementar ao ângulo $\angle XAY'$, então $\alpha + \alpha'$ também é suplementar a esse ângulo e, portanto, X', A e Y' são colineares.

Portanto, $X'Y' = X'A + AY' = XA + AY = XY$.

Numa reflexão R_m os únicos pontos fixos são os pontos pertencentes ao eixo m , o que é consequência direta da definição.

2.2.5. Composição de Isometrias

- 1) Sejam m_1 e m_2 retas paralelas distintas do plano e $\overleftrightarrow{AB}$ uma perpendicular comum com $A \in m_1$ e $B \in m_2$. Então $Rm_2 \circ Rm_1 = T_{2\overleftrightarrow{AB}}$.

De fato, sendo $A' = Rm_2(A)$, temos, por definição, que $\overleftrightarrow{AA'} = 2\overleftrightarrow{AB}$. Portanto, $A' = T_{\overleftrightarrow{AA'}}(A) = T_{2\overleftrightarrow{AB}}(A)$.

Figura 21- $A' = T_{\overleftrightarrow{AA'}}(A) = T_{2\overleftrightarrow{AB}}(A)$

Tomando-se C um ponto qualquer de m_1 , com C distinto de A , e sendo $C' = Rm_2(C)$, tem-se que o quadrilátero $AA'C'C$ é um retângulo, onde $\overleftrightarrow{CC'} = \overleftrightarrow{AA'} = 2\overleftrightarrow{AB}$. Logo, $C' = T_{\overleftrightarrow{CC'}}(C) = T_{2\overleftrightarrow{AB}}(C)$.

Figura 22 – Retângulo $AA'C'C$

Sendo $B' = Rm_1(B)$, tem-se $B = Rm_1(B')$ e $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{AB}$, em que $B = T_{\overrightarrow{BB'}}(B') = T_{2\overrightarrow{AB}}(B')$. Então:

- $(Rm_2 \circ Rm_1)(A) = Rm_2(A) = A' = T_{2\overrightarrow{AB}}(A)$;
- $(Rm_2 \circ Rm_1)(C) = Rm_2(C) = C' = T_{2\overrightarrow{AB}}(C)$;
- $(Rm_2 \circ Rm_1)(B') = Rm_2(B) = B = T_{2\overrightarrow{AB}}(B')$.

Como A, C e B' não são colineares, então $Rm_2 \circ Rm_1 = T_{2\overrightarrow{AB}}$, pelo teorema da igualdade das isometrias¹.

Como consequência do item 1, tem-se que toda *translação*, diferente da identidade, é a composta de duas *reflexões* em relação a retas paralelas distintas.

- 2) Sejam m_1 e m_2 retas concorrentes distintas do plano que se interceptam num ponto O , e seja α a medida de um dos ângulos orientados da reta m_1 para a reta m_2 . Então $Rm_2 \circ Rm_1 = R_{O, 2\alpha}$.

De fato, sejam A um ponto qualquer de m_1 , com $A \neq O$, e B um ponto de m_2 , tal que $B = R_{O, 2\alpha}(A)$. Se $A' = Rm_2(A)$, então m_2 é mediatriz do segmento $\overline{AA'}$, e como $O \in m_2$, então $m(\overline{OA}) = m(\overline{OA'})$.

Como m_2 contém a bissetriz do ângulo orientado $\angle AOA'$, então $m(\angle AOA') = 2\alpha$, logo, $A' = R_{O, 2\alpha}(A)$.

Figura 23 - $A' = R_{O, 2\alpha}(A)$

Analogamente, se $B' = Rm_1(B)$, então m_1 é mediatriz do segmento $\overline{BB'}$, e como $O \in m_1$, então $m(\overline{OB}) = m(\overline{OB'})$, além disso m_1 contém a bissetriz do ângulo orientado $\angle B'OB$, então $m(\angle B'OB) = 2\alpha$, logo, $B = R_{O, 2\alpha}(B')$.

¹Teorema da igualdade das isometrias: Se F e G são isometrias do plano tais que $F(A) = G(A)$, $F(B) = G(B)$, $F(C) = G(C)$ para três pontos não colineares A, B e C do plano, então $F = G$.

Figura 24 – $B = R_{O, 2\alpha}(B')$

Então:

- $(Rm_2 \circ Rm_1)(O) = Rm_2(O) = O = R_{O, 2\alpha}(O)$;
- $(Rm_2 \circ Rm_1)(A) = Rm_2(A) = A' = R_{O, 2\alpha}(A)$;
- $(Rm_2 \circ Rm_1)(B') = Rm_2(B) = B = R_{O, 2\alpha}(B')$.

Como O, A e B' não são colineares, então pelo teorema da igualdade das isometrias², $Rm_2 \circ Rm_1 = R_{O, 2\alpha}$.

Como consequência do item 2, toda *rotação*, diferente da identidade, é a composta de duas *reflexões* em relação a retas concorrentes distintas.

Observação: A partir dos dois itens anteriores, conclui-se que a composta de duas *reflexões* em relação a retas é uma *translação* ou uma *rotação*.

Proposição 2.2.4: Sejam m_1 e m_2 retas perpendiculares que se interceptam num ponto O . Então $Rm_2 \circ Rm_1 = Rm_1 \circ Rm_2$.

2.2.6. Reflexão Transladada

Definição: Uma *reflexão transladada de eixo t* , ou ainda uma *translação refletida de eixo t* , é uma isometria $R_t \circ R_s \circ R_r$, em que r e s são retas distintas do plano, ambas perpendiculares a uma reta t .

² Ver referência na página anterior.

Figura 25 – Retas paralelas r e s , ambas perpendiculares a t

Pelo item 1, se r e s são paralelas distintas, então $R_s \circ R_t = T_{\vec{v}}$ com t paralela à direção de $\vec{v}$, e $\vec{v}$ não nulo.

Pela proposição 2.2.4, $R_t \circ R_s = R_s \circ R_t$ e $R_t \circ R_r = R_r \circ R_t$. Dessa forma, $R_t \circ (R_s \circ R_r) = (R_t \circ R_s) \circ R_r = (R_s \circ R_t) \circ R_r = R_s \circ (R_t \circ R_r) = R_s \circ (R_r \circ R_t) = (R_s \circ R_r) \circ R_t = T_{\vec{v}} \circ R_t$.

Ou seja, toda reflexão transladada de eixo t pode ser escrita como a composta de uma translação $T_{\vec{v}}$ e de uma reflexão R_t , com t paralela à direção do vetor $\vec{v} \neq 0$, podendo-se efetuar a composição em qualquer ordem, o que explica as expressões *reflexão transladada* e *translação refletida*.

Numa reflexão transladada, a única reta do plano que é invariante é seu eixo de reflexão, não havendo, então, pontos fixos.

3. METODOLOGIA

A metodologia escolhida para apoiar o desenvolvimento do projeto é o *Design Experiment*, experimento de ensino fundamentado no aprimoramento contínuo de uma proposta de ensino, aliado à teoria de Van Hiele, com base na qual foi produzida uma sequência com atividades inovadoras para ser aplicada a turmas de 9º ano do Ensino Fundamental.

3.1. Design Experiment

O termo “design experiment” foi introduzido por Ann Brown e Allan Collins em 1992. Foi desenvolvido como uma forma de realizar pesquisas formativas que testem e melhorem projetos educacionais, com base em resultados de pesquisas anteriores. Recentemente, o termo “design research” também tem sido aplicado a esse tipo de trabalho.

Para Karrer (2006), em sua tese de doutorado, esta metodologia “representa um tipo de experimento de ensino para pesquisas em Educação Matemática” (p. 198), tendo surgido, entre outros motivos, por haver uma lacuna entre a prática da pesquisa e a prática do ensino.

Cobb, Confrey, diSessa, Leher e Schauble (2003) ao tratarem de procedimentos metodológicos do *Design Experiment*, apresentam uma variedade de configurações do ambiente, que podem possibilitar um melhor aproveitamento do projeto realizado. Entre elas, destaca-se:

- *Um-a-um*, em que o professor pesquisador realiza uma série de situações de ensino com um pequeno número de alunos sobre determinado assunto para que, posteriormente, possa ser estudado em profundidade;
- Experimentos em sala de aula, em que uma equipe de pesquisa colabore com o professor para assumir a responsabilidade pela instrução;
- Um grupo de pesquisadores colaboram com professores titulares para o desenvolvimento de uma comunidade profissional;
- Experiências de reestruturação da escola e diretoria de ensino, colaborando com professores e administradores para apoiar as mudanças organizacionais.

O presente trabalho enquadra-se parcialmente na configuração de ambiente “Experimentos em sala de aula”, em que a professora, também pesquisadora, elaborou e aplicou uma série de atividades a oito turmas e selecionou algumas das atividades realizadas pelos alunos para analisá-las detalhadamente.

Para Bilac (2008), em sua dissertação de mestrado:

(...)o Design Experiment pode ser entendido como o contínuo aprimoramento da investigação, que consiste em aplicar uma versão inicial de um projeto, possibilitando a verificação e análise em seu procedimento para que posteriormente permita reflexão e revisão constante, baseando-se nas experiências coletadas e avaliadas, na intenção de suprimir ou minimizar os obstáculos e dificuldades encontradas” (p. 46).

Em seu trabalho, Brown e Collins (1992) visaram transmitir para a comunidade de pesquisa educacional as bases para este método de pesquisa, em que procuraram atingir uma dupla meta – a teoria e a prática – respondendo a questões importantes para o estudo da aprendizagem, como:

- Necessidade de discussões teóricas sobre a natureza da aprendizagem em um contexto.
- Necessidade de estudar os fenômenos de aprendizagem em situações do mundo real ao invés de resultados de laboratório.
- Necessidade de ir além das estreitas medidas de aprendizagem.
- Necessidade de produzir resultados da pesquisa de avaliação formativa.

Para Collins et al (2004), apesar da pesquisa em design ser uma ferramenta eficaz para atingir tais necessidades, este tipo de trabalho pode trazer alguns desafios, tais como:

- Dificuldades provenientes da complexidade de situações do mundo real em contrapartida ao controle de experimentos.
- Grande quantidade de dados que combinam informações etnográficas (que buscam a caracterização de relações e acontecimentos que ocorrem em diferentes cenários educacionais) e análises quantitativas.
- Comparação entre designs (projetos).

Ainda segundo Karrer (2006):

Design Experiment é considerado como método científico de investigação quando a ênfase está na análise do pesquisador a respeito do pensamento matemático dos estudantes e das modificações desses pensamentos. Neste sentido, os pesquisadores devem criar situações e modos de interação entre estudantes, encorajando-os a modificar seus pensamentos usuais” (p. 197).

No *Design Experiment*, o projeto é constantemente revisado com base na experiência de uma primeira versão deste projeto para que alguns dos elementos que não estejam funcionando sejam consertados no curso do experimento. Assim, analisa-se o porquê do não funcionamento para resolverem-se problemas que possam ser as razões das falhas. Essas informações também são importantes para o projeto, que além de objetivar o refinamento da prática, também deve focar na eficácia de questões e problemas teóricos.

Há muitos aspectos que podem fazer um projeto ser eficaz e necessitam de grande envolvimento por parte do pesquisador para implementar as intervenções educativas. Encontramos em Collins et al (2004) alguns desses aspectos:

- Nível cognitivo: o que os estudantes entendem antes de entrar em um ambiente de aprendizado particular, e como este entendimento muda ao longo do tempo, sendo necessário, para isto, observações do raciocínio dos alunos através de representações e explicações.
- Nível interpessoal: este nível destina-se a verificar como professores e alunos interagem pessoalmente, se há compartilhamento de conhecimentos, além do relacionamento dos alunos entre si.
- Nível de sala de aula: destina-se a abordar questões de participantes da estrutura, da identidade do grupo, da autoridade nos relacionamentos, verificando a participação de cada membro.
- Nível dos recursos: trata dos recursos disponíveis para os estudantes e se eles são de fácil entendimento e utilização.
- Nível escolar ou institucional: aborda questões de comunicação com a parte externa e apoio da instituição, se os pais estão satisfeitos com o projeto e qual o apoio da administração.

Porém, o *Design Experiment* apresenta algumas limitações, tais como o fato de haver variáveis, chamadas de variáveis dependentes, que podem afetar o sucesso do projeto, e outras que não podem ser controladas, como as variáveis independentes, conforme veremos mais adiante.

O sucesso ou fracasso de um projeto não pode ser avaliado apenas pelo fato de quantos estudantes aprendem. Para avaliar diferentes variáveis é necessário usar uma variedade de técnicas de avaliação, como pré-testes e pós-testes, técnicas de análise e intervenção, e pontuação sistemática da observação da sala de aula. Avaliações quantitativas e qualitativas são partes essenciais da metodologia do *Design Experiment*.

Três tipos de variáveis dependentes, importantes para avaliação, são apontadas por Collins et al (2004):

1) Variáveis de clima: compromisso, cooperação entre os alunos e envolvimento dos alunos na aprendizagem de um novo conteúdo. Esta avaliação requer técnicas de observação, utilizando-se de anotações enquanto se observa a intervenção na prática ou vídeos gravados da intervenção, registrando-se posteriormente.

2) Variáveis de aprendizagem: conhecimento de conteúdo, habilidades, estratégias metacognitivas e de aprendizagem. Essas variáveis são melhor avaliadas através dos pré e pós-testes, como entrevistas orais, questões de múltipla escolha ou respostas curtas.

3) Variáveis sistêmicas: sustentabilidade, propagação, facilidade de adoção e custos. Tais variáveis são melhor avaliadas através de entrevistas estruturadas e análises com professores e alunos sobre, por exemplo, vantagens e dificuldades que os professores encontram ao adotar o projeto em sala de aula.

Além disso, na avaliação de um projeto há uma grande quantidade de variáveis independentes que podem influenciar no sucesso do projeto na prática. Trata-se de determinar quais os aspectos da situação de implementação podem comprometer o sucesso do projeto. Collins et al (2004) indicam as seguintes variáveis independentes:

1) Ambiente de aprendizagem: o ambiente pode variar de acordo com a escola: públicas ou privadas; no centro da cidade, no subúrbio ou rurais; escolas de elite ou de comunidades.

2) Origem dos alunos: inclui dados como a idade, nível socioeconômico, frequência.

3) Recursos necessários e suporte para implementação: como materiais, suporte técnico, administrativo e familiar, tempo de preparo do professor.

4) Desenvolvimento profissional: pode incluir oficinas, reuniões, cursos, prática orientada por profissionais especializados, vídeos de exemplos da prática do projeto, encontros de reflexão com os colegas.

5) Exigências financeiras: como custos de equipamentos, de serviços, suporte profissional, desenvolvimento e suporte financeiro.

6) Forma de implementação: como a inovação será introduzida, tempo dado para isso, duração de sua utilidade.

Há entre as variáveis dependentes e independentes uma rede de inter-relação. Mudanças em alguma das variáveis podem trazer efeitos sobre outra variável.

Esta metodologia foi aplicada no desenvolvimento do presente trabalho com quatro turmas de 9º ano em 2015, com as quais esta pesquisadora lecionava na ocasião. Por conhecê-los há alguns meses, já era sabido que a geometria, e mais especificamente as isometrias, nunca haviam sido abordadas de forma específica com tais alunos, embora estivesse previsto na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008) para o 7º ano do Ensino Fundamental.

Após análise dos resultados obtidos com estas turmas, a aplicação foi replanejada, de forma que as dificuldades encontradas na 1ª aplicação deste fossem minimizadas, bem como os pontos positivos fossem reaproveitados, ou até mesmo, se possível, melhorados.

Além da análise dos dados da aplicação com as turmas de 2015, foram levadas em conta também observações feitas durante a aplicação da oficina no CAEM com professores da Educação Básica. Com a análise dos dados e a revisão das atividades aplicadas, este trabalho foi novamente realizado em outras quatro turmas de 9º ano em 2016.

A escolha dessa metodologia deveu-se ao fato de haver neste trabalho o objetivo de analisar e melhorar o processo de desenvolvimento da aprendizagem das isometrias, investigando novas formas de aprendizagem e procurando minimizar as dificuldades encontradas. Além disso, baseado na análise das atividades aplicadas aos alunos e da interação entre eles, busca também, em um processo constante, o aperfeiçoamento para alterar e melhorar as atividades.

Para Signorelli (2007), “A estrutura de uma pesquisa baseada nesta metodologia é composta basicamente de uma sucessão de episódios de ensino (...)” (p. 50). Poder editar várias versões destes episódios foi de fundamental importância para o desenvolvimento desta pesquisa. Ainda segundo Signorelli (2007), este

desenvolvimento deve ocorrer “através de ciclos contínuos de design, de iteração, de análise e de redesign (...)” (p. 50), conforme a figura 26 a seguir:

Figura 26 – Ciclos do redesign

Apenas um redesign do ambiente foi realizado neste trabalho por haver prazo para conclusão. Isso ocorreu ao aplicar o experimento com as turmas de 2015, replanejá-lo e aplicá-lo novamente com as turmas de 2016. Porém seria interessante o prosseguimento da pesquisa de forma que houvesse novas análises e redesign. Apesar disso, houve alguns momentos de redesign. Nos enunciados das atividades, no direcionamento das discussões, no tempo para a realização das atividades houve a oportunidade de analisar e repensar as atividades apresentadas, podendo, assim, propor mudanças nas aulas seguintes, inclusive de uma turma para outra.

3.2. Modelo de Van Hiele segundo Adela Jaime

Estão descritos a seguir os elementos e principais características do Modelo de Van Hiele. Esta teoria tem origem nos trabalhos dos professores holandeses de Matemática do Ensino Secundário Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof que em suas teses de doutorado, apresentaram, respectivamente, um modelo de ensino e aprendizagem da Geometria (Van Hiele, 1957) e um exemplo concreto de aplicação de tal modelo em alguns cursos de Geometria (Van Hiele-Geldof, 1957).

O resumo do Modelo de Van Hiele apresentado nesta seção foi redigido a partir de uma tradução livre de trechos da tese de doutorado de Adela Jaime Pastor (1993), da Universidade de Valência, que elaborou e aplicou, dentro dos preceitos do modelo de Van Hiele, uma série de atividades para ensinar isometrias a estudantes de diversas faixas etárias.

Na concepção do modelo de Van Hiele identificam-se dois aspectos: descritivo e instrutivo. Descritivo, pois há na teoria a classificação de diferentes formas

de raciocínio geométrico dos indivíduos – os chamados níveis de Van Hiele – e a maneira de avaliar o progresso do raciocínio. Instrutivo por haver na teoria orientações para que o professor elabore o planejamento didático a fim de favorecer o avanço de seus alunos em cada nível de raciocínio geométrico.

O ponto principal do Modelo de Van Hiele reside na ideia de que o raciocínio dos alunos passa por uma série de níveis de raciocínio ao longo do processo de aprendizagem da Geometria, que são sequenciais, ordenados e não se pode omitir nenhum. Cada nível envolve a compreensão e utilização dos conceitos geométricos de formas diferentes, que se refletem em maneiras diferentes de interpretá-los, defini-los, classificá-los e fazer demonstrações.

O componente instrutivo do modelo é composto por fases de aprendizagem. Estas constituem diretrizes para favorecer o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático dos alunos e sua passagem de um nível de raciocínio ao seguinte por meio de algumas atividades e de problemas particulares para cada fase.

3.2.1. Os níveis de raciocínio

A descrição dos níveis de Van Hiele feita por Adela Jaime e aceita atualmente postula a existência de cinco níveis de raciocínio. É interessante observar que a quantidade de níveis de raciocínio contemplados pelo próprio Van Hiele em suas descrições do modelo foi modificada em várias ocasiões, como consequência do processo de evolução de suas ideias, do contraste com as ideias de outros estudiosos e de uma maior quantidade de resultados de investigações.

A seguir apresentam-se os níveis de Van Hiele seguidos das características observáveis em um indivíduo em cada nível de raciocínio.

Nível 1 (Reconhecimento)

- Percepção global das figuras: Normalmente incluem-se atributos irrelevantes nas descrições, especialmente no que se refere à posição no plano.

- Percepção individual das figuras: Cada figura é considerada como um objeto, independente de outras figuras da mesma classe. Não se generalizam as características de uma figura para outras de mesma classe.
- Descrição das figuras baseada principalmente em seu aspecto físico e posição no espaço. Os reconhecimentos, distinções ou classificações se baseiam em semelhanças físicas gerais.
- Frequentemente há descrições por semelhança com outros objetos, não necessariamente matemáticos: “Parece-se com...”, “tem a forma de...”.
- Uso de propriedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, com frequentes referências a protótipos visuais.
- Aprendizagem de um vocabulário básico para falar das figuras, escrevê-las, etc.
- Não há reconhecimento das partes de que se compõem as figuras ou de suas propriedades matemáticas. Quando se diz reconhecimento, estes elementos ou suas propriedades matemáticas não têm um papel central e, frequentemente, refletem contradições.

Nível 2 (Análise)

- Reconhecimento de que as figuras geométricas estão formadas por partes ou elementos e possuem propriedades matemáticas. Descrevem-se as partes que compõem uma figura e enunciam-se suas propriedades. Capacidade de analisar as propriedades matemáticas das figuras.
- Dedução de propriedades através de experimentos. Capacidade de generalização de certas propriedades de todas as figuras da mesma família.
- A definição de um conceito consiste em uma lista de propriedades, de forma mais exaustiva possível, porém podem haver omissões de características necessárias. Mesmo assim, o estudante rejeita as definições dadas pelo professor ou pelo livro didático quando essas definições entram em conflito com suas próprias.
- Não se relacionam diferentes propriedades de uma figura entre si ou com as de outras figuras. Não se estabelecem classificações a partir das relações entre as propriedades. Não se realizam classificações inclusivas (classificação consciente

realizada pelo próprio indivíduo, baseada na relação lógica entre o conceito mais geral e sua subclasse).

- A demonstração de uma propriedade realiza-se através de sua comprovação em casos particulares.

Nível 3 (Classificação)

- Podem-se relacionar propriedades de uma figura entre si ou com as de outras figuras: compreende-se a existência de relações e descobre-se, de maneira experimental, novas relações.

- Compreensão do que é uma definição matemática e seus requisitos. Define-se corretamente conceitos e tipos de figuras. Além disso, são feitas referências explícitas às definições quando há raciocínios ou demonstrações.

- Podem-se realizar classificações inclusivas.
- A demonstração de uma propriedade já não se baseia na comprovação de sua validade através de alguns casos, pois há necessidade de justificar, de maneira geral, a veracidade de certa propriedade, para o que se usam raciocínios dedutivos informais.

- Compreensão e realização de implicações simples em um raciocínio formal. Compreensão de uma demonstração realizada pelo professor. Capacidade para repetir tal demonstração e adaptá-la a outra situação análoga.

- Incapacidade para executar uma demonstração formal completa, em que se tenha que encadear várias implicações, pois não se alcança uma visão das demonstrações e não se compreende sua estrutura.

Nível 4 (Dedução formal)

- Podem-se reformular enunciados de problemas ou teoremas, transformando-os em uma linguagem mais precisa.

- Realização das demonstrações (de vários passos) mediante raciocínios dedutivos formais.

- Capacidade para compreender e desenvolver demonstrações formais. Capacidade para adquirir visão global das demonstrações e para compreender a função de cada implicação simples no conjunto.
- Capacidade para compreender a estrutura axiomática matemática: Sentido de axiomas, definições, teoremas, termos não definidos.
- Aceitação da possibilidade de alcançar o mesmo resultado a partir de lugares diferentes ou por diferentes formas de demonstração.

Nível 5 (Rigor)

- Possibilidade de trabalhar em sistemas axiomáticos diferentes do usual (da geometria euclidiana).
- Capacidade para realizar deduções abstratas baseando-se em um sistema de axiomas determinado.
- Capacidade para estabelecer a consistência de um sistema de axiomas. Capacidade para comparar sistemas axiomáticos diferentes e decidir sobre sua equivalência.
- Compreensão da importância da precisão ao tratar os fundamentos e as relações entre estruturas matemáticas.

3.2.2. As fases de aprendizagem

As cinco fases de aprendizagem têm como objetivo apresentar uma organização das atividades que permita passar de um nível de raciocínio ao próximo. As fases não estão associadas a um nível determinado, mas em cada nível a instrução começa com atividades da primeira fase e continua com atividades das fases seguintes. Ao final da quinta fase, os alunos devem ter alcançado o nível de raciocínio seguinte. As principais características das fases de aprendizagem estão detalhadas a seguir.

Fase 1 (Informação)

Nesta fase deve-se ter contato com o novo tema objeto de estudo. O professor deve identificar os conhecimentos prévios que possam ter seus alunos sobre este novo campo de trabalho e seu nível de raciocínio no mesmo.

Os alunos devem receber informações para conhecer o campo de estudo que vão iniciar, os tipos de problemas que vão resolver, os métodos e materiais que utilizarão, etc.

A primeira fase pode ser evitada em alguns casos pois, sendo sua finalidade que o professor obtenha informação sobre os conhecimentos e o nível de raciocínio dos alunos, quando o professor já possui esta informação, não é necessário realizar o trabalho específico desta fase.

Na sequência de ensino das isometrias do plano, Jaime (1993) inclui um conjunto completo de atividades da fase de informação apenas no primeiro nível de raciocínio de cada movimento, limitando os blocos de atividades dos seguintes níveis a dar algumas orientações ou atividades isoladas. No caso de a instrução não começar no primeiro nível, conforme citado no parágrafo anterior, pode-se selecionar tarefas de níveis diferentes para saber até que ponto os alunos estão familiarizados com as estruturas próprias do nível correspondente.

Fase 2 (Orientação Dirigida)

Guiam-se os alunos por meio de atividades e problemas (dados pelo professor ou levantados pelos próprios estudantes) para que estes descubram e aprendam as diversas relações ou componentes básicos da rede de conhecimentos que devem formar.

Os problemas propostos vão levá-los a resultados e propriedades que os estudantes devem entender e aprender. O professor tem que selecionar cuidadosamente estes problemas e atividades e deve orientar seus alunos para a solução quando precisem.

Esta fase é fundamental, já que nela se constroem os elementos básicos da rede de relações deste nível. Van Hiele diz que “as atividades (da segunda fase), relacionam-se cuidadosamente, constroem a base adequada do pensamento de nível superior”. O trabalho tem de apresentar-se aos alunos de forma que os conceitos e as estruturas a se alcançar apareçam de maneira progressiva. O papel do professor é o de selecionar os problemas para que se levanten situações em cuja resolução

apareçam alguns dos elementos (conceitos, propriedades, definições, relações entre propriedades, etc.) que os alunos tenham que aprender e em que devem basear sua nova forma de raciocínio.

Fase 3 (Explicação)

Os alunos devem tentar expressar em palavras ou por escrito resultados que tenham obtido, trocar suas experiências e discutir sobre elas com o professor e os demais estudantes, com o propósito de que cheguem a ser plenamente conscientes das características e relações descobertas e melhorem a linguagem técnica que corresponde ao tema de estudo.

Os estudantes têm que utilizar o vocabulário adequado para descrever a estrutura sobre o que estão trabalhando. Deve-se aprender e desenvolver o vocabulário próprio do nível. Nesta fase não se produz uma aprendizagem de novos conhecimentos, enquanto estruturas ou conteúdos, mas uma revisão do trabalho realizado anteriormente, comprovação de conclusões, práticas e aperfeiçoamento da forma de expressar-se, o qual origina um desenvolvimento da nova rede de conhecimentos que se está formando.

O tipo de trabalho que se deve realizar nesta fase é de discussão e comentários sobre a forma de resolver os exercícios anteriores, elementos, propriedades ou relações que tenha observado ou utilizado.

Atualmente não se interpreta a terceira fase estaticamente colocada depois da segunda fase e antes da quarta, mas sim como uma atitude permanente de diálogo e discussão em todas as atividades que permitam as diferentes fases de aprendizagem. Portanto, na sequência de ensino das isometrias proposta não há atividades projetadas expressamente para esta fase, entendendo que se deve exigir a justificativa e discussão a todo momento entre os alunos e entre professor e alunos.

Fase 4 (Orientação Livre)

Nesta fase deve-se produzir a consolidação de aprendizagem realizada nas fases anteriores. Os estudantes deverão utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver atividades e problemas diferentes dos anteriores e, provavelmente, mais complexos.

O professor deve propor a seus alunos problemas que não sejam uma simples aplicação direta de um dado ou algoritmo conhecido, mas que levantem novas relações ou propriedades, que sejam mais abertos, preferivelmente com várias formas de resolução, com várias soluções ou com nenhuma solução. Por outro lado, o professor deve limitar ao máximo sua ajuda aos estudantes na resolução dos problemas.

Nas palavras de Van Hiele, os estudantes aprendem a encontrar seu caminho na rede de relações por si mesmos, por meio de atividades gerais.

Os alunos deverão aplicar os conhecimentos e linguagem que acabam de adquirir em outras novas situações. Os problemas levantados nesta fase devem fazer com que os estudantes combinem seus conhecimentos e apliquem a situações diferentes das propostas anteriormente. A intervenção do professor na resolução das tarefas deve ser mínima, pois são os alunos quem devem encontrar o caminho adequado a partir do que foi aprendido na segunda fase.

Fase 5 (Integração)

Os estudantes estabelecem uma visão global de tudo o que foi aprendido sobre o tema e da rede de relações que estão terminando de formar, integrando esses novos conhecimentos, métodos de trabalho e formas de raciocínio com os que tenham anteriormente.

O professor deve dirigir resumos da informação que ajudem os estudantes a alcançar esta integração. As atividades que forem propostas não devem implicar a aparição de novos conhecimentos, mas apenas a organização dos já adquiridos.

Trata-se de adquirir uma visão geral dos conteúdos do tema de estudo, integrada por novos conhecimentos adquiridos neste nível e os que já tinham anteriormente. Não há uma aprendizagem de elementos novos, mas uma fusão dos novos conhecimentos, algoritmos e formas de pensar com os anteriores. As atividades dessa fase devem favorecer a integração e permitir ao professor comprovar se já o conseguiu. Parte do trabalho que deve realizar o professor nesta fase é a confecção e apresentação aos alunos de resumos dos conteúdos estudados. Quanto aos alunos, é importante memorizar os resultados mais importantes de resolução de problemas ou métodos de trabalho.

No que diz respeito às experiências das isometrias, Jaime (1993) não tem projetadas atividades específicas para esta fase, mas a ela correspondem o resumo pelo professor das relações da isometria estudada e a memorização dos alunos dos novos resultados, definições, relações, etc., assim como a compreensão e interiorização das novas relações.

Contudo, é necessário saber que a quinta fase é importante, pois, embora periodicamente faça-se com os estudantes resumos do estudado até o momento, isso tem acontecido pouco e posteriormente tem-se notado a falta que faz os estudantes não recordarem algum resultado que haviam estudado algumas semanas antes e deviam utilizar.

3.2.3. Propriedades do Modelo de Van Hiele

Além das características particulares de cada nível de raciocínio ou fase de aprendizagem, é necessário mencionar algumas propriedades gerais do Modelo de Van Hiele cuja consideração e análise é imprescindível para uma compreensão e utilização adequadas do modelo. Algumas das propriedades estão intimamente relacionadas com as investigações descritas neste trabalho e serão tratadas a seguir.

1) Hierarquização e sequencialidade dos níveis de raciocínio

Para alcançar um nível de raciocínio, é necessário ter adquirido previamente os níveis anteriores. Van Hiele afirma que “o pensamento do segundo nível não é possível sem o pensamento do nível básico; o pensamento do terceiro nível não é possível sem o pensamento do segundo nível.”

A aceitação desta propriedade pode ser importante quando chega o momento da prática da determinação do nível de raciocínio dos estudantes. Tanto o método para avaliar as respostas aos testes como o procedimento de determinação dos graus de aquisição dos níveis de Van Hiele se baseiam na ideia de que se um problema pode ser resolvido segundo os níveis N-1 e N, a resolução correta do problema por métodos do nível N supõe ter adquirido o nível N-1.

2) Relação entre a Linguagem e os níveis de raciocínio

Cada nível tem uma linguagem própria, entendendo por isso não só as palavras ou construções gramaticais empregadas, mas também o significado que estas têm. Por exemplo, para um estudante do segundo nível de raciocínio, “demonstrar” uma propriedade consiste em comprovar sua veracidade em um ou poucos casos, para um estudante do terceiro nível consiste em buscar algum tipo de justificativa lógica intuitiva da propriedade, enquanto que para um estudante do quarto nível consiste em aplicar o raciocínio lógico formal para obter uma demonstração matemática correta e aceitável.

Esta característica explica a incompreensão entre duas pessoas que empreguem linguagens de níveis diferentes.

3) Localidade dos níveis de raciocínio

Por localidade dos níveis entende-se que um indivíduo pode raciocinar em diferentes níveis ao trabalhar em campos distintos da Geometria. Por outro lado, a ideia de globalidade dos níveis indica que o nível de raciocínio de um indivíduo é o mesmo em qualquer campo da Geometria.

Ao elaborar a unidade de ensino das isometrias Jaime (1993) levou em conta esta característica: Em primeiro lugar, projetou unidades de ensino para os níveis 1 e 2 independentes para cada isometria (translações, rotações, simetrias). Posteriormente, ao chegar ao nível 3 surgiram as propriedades que relacionam umas isometrias com outras, com o que se produz a integração necessária de conhecimentos das diferentes isometrias. Isto supõe, em termos práticos, que, por exemplo, para poder trabalhar corretamente no terceiro nível das simetrias, é necessário ter adquirido nas translações e rotações, no mínimo, o nível 2.

4) Continuidade dos níveis de raciocínio

Esta propriedade faz referência à maneira como se produz a passagem de um nível para outro. A formulação inicial do modelo feita pelo próprio Van Hiele

estabelecia que a passagem de um nível ao seguinte acontece de maneira brusca, como um salto.

Porém algumas investigações mostraram que a interpretação descontínua dos níveis não pode explicar certas situações, muito frequentes, de alunos que raciocinam simultânea ou alternativamente em dois níveis consecutivos. Em algumas dessas investigações, embora os autores tenham iniciado a pesquisa baseando-se na concepção discreta dos níveis de Van Hiele, os resultados obtidos os obrigaram a considerar a existência de contradições entre seus resultados e essa ideia de discrepância, quando não se reconhece que a passagem de um nível ao seguinte se produz de maneira contínua.

5) O contexto da unidade de ensino de Adela Jaime

Um dos objetivos de Adela Jaime ao elaborar o material de ensino para sua pesquisa de campo foi preparar atividades nas quais a compreensão dos conceitos básicos estudados se baseia na realização física dos movimentos correspondentes, mais do que o desenho das imagens.

Outro objetivo foi conseguir a viabilidade de sua implementação em qualquer escola, com um custo mínimo. Isto descarta o uso de materiais caros ou atividades que requeressem uma infraestrutura especial, particularmente um ambiente informatizado.

O resultado foi um ambiente de aprendizagem em que o material básico para manipular é composto de pequenas figuras de papel (ver anexo 1). É muito fácil e barato dispor da quantidade necessária de figuras, pois só se precisa da quantidade suficiente de fotocópias e recortar as figuras. Os enunciados das atividades estão escritos em folhas de papel de forma que os alunos utilizem estas peças sobre elas na realização dos movimentos correspondentes.

Uma vez encontrada a solução (geralmente a imagem de uma figura por determinado movimento), os alunos colarão uma peça ao invés de desenhá-la. Jaime (1993) salienta que essa redução da necessidade de desenhar é interessante por vários motivos: evita erros produzidos por uma destreza insuficiente de desenho, garantindo a congruência real (não só formal) das figuras e suas imagens. Para alunos de qualquer ano verifica-se uma economia de tempo importante.

Também no trabalho aqui apresentado, apesar de ter-se optado, devido à falta de tempo, por abordar somente o nível 1, ficaram evidentes as vantagens da utilização do modelo de Van Hiele na condução e na elaboração das atividades.

Além disso, a viabilidade de implementação desse experimento tornou-se possível, em parte, devido aos baixos custos com materiais e também pelo fato de não requerer infraestrutura especial, já que foi completamente realizado em sala de aula, com materiais simples como régua, cola, tesoura e espelhos, foram mais algumas das vantagens encontradas para este trabalho inspirado na proposta de Adela Jaime.

4. EXPERIMENTO DE ENSINO

4.1. Processo de aplicação das atividades com os alunos

O experimento de ensino consistiu na aplicação de um conjunto de atividades, apresentadas no anexo 1, elaboradas e aplicadas por esta pesquisadora com o objetivo de favorecer a aprendizagem de conceitos relacionados a isometrias no plano. Algumas atividades foram inspiradas na proposta de Adela Jaime (1993), apoiada no modelo de Van Hiele, e outras no trabalho com bonecas de papel de Brigitte Servatius (1997). Este experimento foi aplicado em dois anos consecutivos, 2015 e 2016.

Durante os meses de outubro e novembro de 2015, as atividades foram aplicadas em 18 aulas, divididas em 8 aulas em outubro e 10 em novembro, a quatro turmas de 9º ano de uma escola da Rede Pública do Estado de São Paulo, na cidade de Carapicuíba, onde a pesquisadora leciona.

Em 2016, as atividades foram novamente aplicadas a outras 4 turmas de 9º ano da mesma escola em 12 aulas, com início mais cedo, divididas em 2 aulas no mês de maio, 4 aulas em junho, 3 em agosto e 3 em setembro, seguindo a ideia de realizar as atividades em uma aula por semana. Porém, algumas das datas marcadas foram alteradas devido às avaliações internas e externas da escola.

A Escola Estadual Prof. Manoel da Conceição Santos, onde o experimento foi desenvolvido, localiza-se em um bairro afastado do centro da cidade, e os alunos que a frequentam são de famílias de baixo poder aquisitivo, porém com fácil acesso às diversas tecnologias existentes. Em ambos os anos, os alunos encontravam-se na faixa de 13 a 15 anos de idade.

Inicialmente, em ambas as edições de aplicação do experimento, o projeto foi explicado pela professora pesquisadora aos responsáveis pelos alunos em reunião de pais, os quais se mostraram favoráveis à aplicação de atividades diferenciadas e interessados por se tratar de um projeto de mestrado. Nessa oportunidade, os responsáveis assinaram um termo de consentimento para permitir a utilização das imagens (fotos e vídeos) que fossem produzidas durante o experimento apenas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa.

A coordenação da escola dispôs-se a fornecer o material necessário tais como folhas quadriculadas, tubos de cola, régua e tesouras.

Em 2015, as atividades foram realizadas durante as aulas de Matemática, por duplas fixas escolhidas entre os próprios alunos, com o objetivo de facilitar as discussões dos processos das atividades, as melhores conclusões e também, como salienta Karrer (2006), o desenvolvimento do “pensamento matemático dos estudantes e das modificações desses pensamentos” (p. 197), o que possibilita aos alunos imagens mais próximas do conceito que se deseja construir. O modelo de Van Hiele contribui muito nesse aspecto por meio da evolução das fases de aprendizagem e dos níveis de raciocínio.

Para evitar interrupções, procurar obter um maior rendimento e que todas as atividades planejadas fossem realizadas antes do fim do ano, nas turmas de 2015 foram escolhidos para a aplicação do experimento dias da semana em que cada turma tivesse duas aulas seguidas da disciplina. Excepcionalmente, a aplicação se estendia por 3 aulas por semana devido ao extremo interesse despertado nos alunos. Isso ocorreu em 4 das 8 semanas do projeto, para que o conteúdo do ano não fosse prejudicado.

Também em 2016, o experimento ocorreu durante as aulas de Matemática, mantendo-se o trabalho em duplas fixas escolhidas pelos próprios alunos, tendo em vista que se verificou um bom rendimento no trabalho realizado dessa forma no ano anterior. Como na segunda edição o trabalho foi iniciado mais cedo, no mês de maio, optou-se por realizar uma aula por semana com o experimento, escolhendo-se, a princípio, as sextas-feiras para sua realização. Porém, percebeu-se não ser uma boa escolha, já que nas primeiras aulas muitas duplas ficaram incompletas em todas as turmas, pois muitos alunos se ausentavam neste dia da semana, apesar de estarem cientes das atividades previstas.

A pedido desses alunos, o dia de aplicação foi alterado para as segundas-feiras, pois os mesmos alegaram que faltavam menos nas segundas, dando preferência por faltar nas sextas (fato que ocorreu durante todo o ano) e não queriam perder as atividades, ou seja, queriam faltar nas sextas-feiras, mas não queriam perder as atividades do experimento. Essa mudança fez com que as presenças fossem próximas de 100% nas aulas seguintes nas quatro turmas.

Para facilitar a identificação, denominaremos, a partir de agora, as turmas da seguinte forma:

- Alunos de 2015: grupo 1
- Alunos de 2016: grupo 2

Alunos do grupo 1 frequentemente perguntavam quando seria a próxima aula de aplicação do projeto e surgiram frases como: “Professora, marca a próxima aula do projeto pra ninguém faltar nesse dia”, visto que a frequência dos alunos era quase que total nos dias marcados para realização das atividades do experimento, sendo cobrados uns pelos outros para que seus pares estivessem presentes no dia marcado. Durante todas as aulas deste experimento, houve, no máximo, 3 ausências por aula em cada turma, e em algumas aulas não houve ausências. O envolvimento dos alunos e sua assiduidade constituem uma avaliação positiva do ponto de vista das variáveis de clima apontadas por Collin et al (2004) na aplicação dessas atividades.

Coincidentemente, em ambas as edições, mais de 90% dos alunos chegaram ao 9º ano com grande defasagem de conteúdo, sobretudo do ano anterior, devido à falta de professor que substituísse a professora titular, que passou a maior parte dos anos de 2014 e 2015 afastada por motivo de saúde. Devido a isso, boa parte do conteúdo do 8º ano, principalmente de Geometria, não foi ensinado a esses alunos ao longo do período letivo ideal. Isso fez com que as aulas de Matemática do 9º ano, sobretudo de Geometria, despertassem neles grande interesse, pois para muitos foi o primeiro contato não apenas com conceitos e conteúdos geométricos, mas também com a utilização de instrumentos como compasso, régua e transferidor, o que ocorreu no 2º bimestre do ano com atividades de construção geométrica de números racionais e irracionais na reta real.

Foi nessa oportunidade que muitos alunos aprenderam o que são retas paralelas e perpendiculares, a medir ângulos utilizando o transferidor e como manusear o compasso. Esse tipo de aula prática atraiu a atenção das turmas e o rendimento durante as aulas de Geometria foi maior do que em qualquer outro conteúdo trabalhado anteriormente. Assim, o experimento desenvolvido com Geometria foi bem aceito pelos grupos 1 e 2. A predisposição positiva dos alunos para estudar Geometria constitui mais uma avaliação positiva do ponto de vista das variáveis de clima apontadas por Collin et al (2004) nesse experimento.

Para dar início às atividades do projeto, os alunos assistiram, na sala de vídeo da escola, ao trecho inicial, com aproximadamente 4 minutos, do vídeo “Arte e Matemática – Simetrias”, direção de Sérgio Zeigler. Foram exibidos apenas os 4

minutos iniciais, pois nesse trecho são apresentados exemplos que dão a ideia de cada uma das isometrias (reflexão, rotação e translação), suficientes para desenvolver uma discussão entre os alunos a respeito do tema, e verificar, assim, seus conhecimentos prévios sobre o assunto, conforme é recomendado na fase 1 do Modelo de Van Hiele.

O vídeo apresentado pelo professor Luiz Barco (USP) inicia-se com a sugestão do professor para que os alunos se coloquem em frente a um espelho, verificando que a imagem vista é simétrica a si mesmo. Também é apresentada no vídeo a seguinte sequência:

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &1 \times 1 = 1 \\
 &11 \times 11 = 121 \\
 &111 \times 111 = 12321 \\
 &1111 \times 1111 = 1234321 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

A sequência mostra que utilizando apenas o algarismo 1 é possível obter todos os demais:

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &121 \\
 &12321 \\
 &1234321 \\
 &123454321 \\
 &12345654321 \\
 &1234567654321 \\
 &123456787654321 \\
 &12345678987654321
 \end{aligned}$$

Além disso, tal sequência é simétrica, pois pode ser lida igualmente da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. O mesmo ocorre na frase em latim:

S A T O R
A R E P O
T E N E T
O P E R A
R O T A S

Esta frase pode ser lida igualmente da esquerda para a direita, da direita para a esquerda, de cima para baixo e de baixo para cima.

Ainda no vídeo, são apresentados exemplos simples para facilitar o entendimento dos conceitos de reflexão, rotação e translação.

A reflexão foi apresentada como “o que ocorre quando olhamos nossas duas mãos ou nos olhamos no espelho” e com a seguinte imagem da figura 27 para ilustrá-la.

Figura 27 – Exemplo de reflexão apresentado no vídeo

O vídeo apresenta a rotação dizendo que “girando um objeto de algumas formas, ele mantém a mesma disposição sempre”, conforme a ilustração seguinte da figura 28:

Figura 28 – Exemplo de rotação semelhante ao vídeo

E a translação é apresentada como “a figura se repete em intervalos regulares”, utilizando a imagem da figura 29 a seguir:

Figura 29 – Exemplo de translação apresentado no vídeo

Antes de iniciar a discussão, tanto com o grupo 1 quanto com o grupo 2, a professora perguntou aos alunos qual era o assunto do vídeo, ao que os alunos prontamente responderam tratar-se de translações, rotações e reflexões. A professora informou que também são conhecidas como “isometrias”, pelo fato de a palavra “isometria” indicar conservação de medidas, e que possivelmente este seria o termo mais utilizado durante o experimento.

No grupo 1, durante a discussão, foi possível verificar que alguns dos termos utilizados no vídeo já eram familiares aos alunos, mesmo que, por vezes, não soubessem o exato significado. Por exemplo, os termos “translação” e “rotação” foram facilmente associados aos movimentos da Terra, enquanto que “reflexão” foi associado ao espelho.

No grupo 2 houve discussão equivalente. Porém, em uma dessas turmas, mesmo após assistirem o vídeo, a princípio, não foi possível desenvolver a discussão inicial. Esta turma vinha apresentando alguns problemas disciplinares (especificamente, excesso de conversa nas aulas) desde o começo do 2º bimestre do ano nas aulas de todas as disciplinas. Devido a isso, os alunos precisaram assistir ao vídeo pela segunda vez, para que pudessem realmente prestar atenção e gerar então uma discussão inicial.

O desenvolvimento das atividades com essa turma iniciou-se de forma um tanto quanto conturbada. A turma sempre mostrou interesse no trabalho, mas a comunicação que havia entre os alunos durante as aulas não era apenas a respeito das isometrias e das atividades que deveriam ser desenvolvidas. As atividades sempre tinham que ser explicadas mais de uma vez. Dessa forma, a turma estava sempre atrasada em relação às demais turmas. Tanto que, ao término das atividades sobre translações, foi informado aos alunos que não seria possível seguir com as

atividades de reflexão, e que o trabalho seria, portanto, encerrado com eles, sem prosseguir com as reflexões.

Na aula seguinte, os alunos dessa turma pediram uma segunda oportunidade, comprometendo-se a diminuir a conversa e focar nas atividades que deveriam ser desenvolvidas. Uma nova oportunidade foi dada à turma, que cumpriu com o combinado, sendo que os próprios alunos cobravam entre si o bom comportamento. Daí em diante, esse acordo refletiu melhoras no comportamento não apenas nos momentos de aplicação do experimento de Isometrias, mas também nas outras aulas de Matemática e das demais disciplinas.

O trabalho desenvolvido em duplas foi muito proveitoso, conforme veremos no capítulo seguinte, fazendo com que os alunos, durante o ano de 2016, criassem o hábito de realizar as demais atividades das aulas de matemática em duplas. O rendimento dessas duplas aumentou visivelmente, já que se habituaram a discutir qualquer tema em duplas, além de promover a ajuda mútua (alunos com mais facilidade ajudando alunos com dificuldades).

Ao final das atividades de translação e de reflexão, vários alunos das turmas de 2016 questionaram se não haveria mais nenhuma atividade a respeito. Esses questionamentos persistiram ao longo do mês seguinte ao término das atividades planejadas. Para suprir essa falta de atividades diferenciadas e o interesse dos alunos sobre o assunto, foi proposta e apresentada uma última aula onde houve uma discussão final sobre Reflexão e simetrias.

Em algumas salas, surgiu na discussão entre os alunos a questão de haver ou não simetria no corpo humano. Foi então apresentado aos alunos um vídeo que mostra a foto do rosto da modelo Florence Colgate. Essa foto foi dividida ao meio por meio de recurso digital e cada metade do rosto foi refletida, formando duas novas fotos totalmente simétricas, muito diferentes da foto original. Ao comparar a foto original e as 2 fotos montadas, os alunos se convenceram da falta de simetria no rosto humano.

4.2. Aplicação das atividades na oficina do CAEM

Entre os meses de maio e junho de 2016, foi ministrada durante três encontros de três horas cada, no CAEM – IME, a oficina “ Translações, Rotações e

Reflexões no Ensino Fundamental”, pela pesquisadora desse trabalho com orientação da professora Cláudia Cueva Candido.

Inicialmente, havia 10 participantes no primeiro encontro, entre os quais, dois professores da rede pública de ensino de São Paulo, 2 estudantes de licenciatura do IME e os demais eram professores da rede particular. Todos os professores presentes lecionavam no Ensino Fundamental.

Com a intenção de conhecer um pouco do público presente promoveu-se uma conversa com os participantes e alguns comentários foram registrados:

- Os professores que trabalhavam com 7º ano já haviam desenvolvido com seus alunos o conteúdo de Isometrias.
- A maior parte dos professores participantes afirmaram gostar de ensinar Geometria, mas todos concordaram que nem sempre o aprendizado acontece facilmente.

Foi então apresentado aos participantes, de forma resumida, o que a pesquisadora havia desenvolvido neste trabalho até aquele momento.

No primeiro encontro, foram propostas atividades sobre translações para que os professores e graduandos presentes as realizassem, como forma de sugestão para trabalhar o conteúdo com seus alunos numa futura oportunidade.

Todos os participantes realizaram as atividades, porém houve dificuldade na manipulação das figuras, entregues aos participantes já recortadas, mas em tamanho muito pequeno, conforme o exemplo na figura 30 a seguir:

Transladar as figuras (em papel quadriculado) através de segmentos com os seguintes comprimentos: $2u$, $5u$, $10u$.

Figura 30 – Exemplo de atividade proposta na oficina do CAEM

As figuras à direita da malha quadriculada foram entregues recortadas aos presentes para que fossem posicionadas na malha de forma a transladar as figuras já dadas na malha. Porém o tamanho dos quadrados da própria malha e das figuras impressas e recortadas dificultou um pouco a manipulação (colagem) das mesmas, conforme comentários de alguns dos participantes da oficina.

Tal fato já havia sido observado na aplicação do experimento com o grupo 1 e foi levado em consideração para melhoria na aplicação com o grupo 2, de forma que não houvesse mais esta dificuldade nem nas próximas atividades dos demais encontros, nem nas atividades do experimento com os alunos.

Para as atividades a seguir, da bonecas de papel de Brigitte Servatius (1997), utilizaremos as seguintes notações:

bbb – generaliza translações.

...b b b b b b b b ...

bdb – generaliza duas reflexões paralelas perpendiculares a reta central.

...b d b d b d b d...

bqb – generaliza duas rotações de 180° com extremidades na reta central.

...b q b q b q b q...

bdp – generaliza uma reflexão perpendicular à reta central, e uma rotação com extremidades na reta central.

...b d p b d p b d p...

bpd – generaliza uma reflexão com deslizamento.

...b p d b p d b...

$\frac{bbb}{ppp}$ – generaliza uma translação e a reflexão pela reta central.

...b b b b b b b...

p p p p p p p

$\frac{bdb}{ppp}$ – generaliza a reflexão pela reta central e duas reflexões por retas perpendiculares a reta central.

...b d b d b d b d b...
p q p q p q p q p

A próxima atividade apresentada e aplicada ao grupo foi o recorte das bonecas de papel do caso “bbb” (translação). O tamanho da impressão da boneca inicial foi uma dificuldade encontrada por eles, já que a boneca deveria ser enrolada em forma de cilindro e recortada em seu contorno interno e externo, como mostra a figura 31 a seguir:

Figura 31 – Procedimento para recortar bonecas do caso “bbb”

Neste caso, quanto maior for a distância da ponta de um braço à ponta do outro da primeira boneca, além de quanto maior for sua altura, mais fácil seria o recorte. Este fato também foi levado em consideração para a impressão das bonecas dos demais casos, tanto para a oficina quanto para o experimento com os alunos do grupo 2.

Apesar das dificuldades encontradas na manipulação das figuras, ao final desse primeiro encontro, o comentário que surgiu foi que a manipulação das figuras facilita aos alunos a visualização do movimento ocorrido da isometria.

No segundo encontro foram propostas atividades sobre reflexão. As figuras recortadas foram impressas em tamanho maior para melhor realização e visualização das atividades, já que esta foi uma das dificuldades encontradas no encontro anterior.

Para algumas destas atividades, foi entregue a cada participante um espelho de medidas aproximadas 10cm x 10 cm e folha quadriculada para facilitar o desenho das figuras a serem refletidas, conforme figura 32 a seguir:

Utilizando espelhos, coloque-os em lugares diferentes de uma mesma figura (que podem ser recortes de revistas ou jornais), colocada sobre uma folha

quadriculada. Observe as imagens refletidas e copie na folha quadriculada o que vê através do reflexo.

Figura 32 – Exemplo de atividade proposta na oficina do CAEM

Nesta atividade, foram obtidos diversos resultados, já que cada um do grupo posicionou o espelho de forma diferente em cada figura, obtendo, mesmo assim, reflexos diferentes para cada figura.

Após as atividades com o uso do espelho, foram apresentados os casos de bonecas de papel, que deveriam ser dobradas em “efeito sanfona” para a obtenção de bonecas refletidas, conforme as imagens da figura 33 e 34 a seguir:

Figura 33 – Bonecas do caso “*b db*”

Figura 34 – Bonecas do caso “*b db*”

Além das bonecas do caso “*b db*” propostas acima, foram também apresentadas bonecas de papel que mostrassem a composição de isometrias, conforme a figura 35:

Figura 35 – Bonecas do caso $\frac{bbb}{ppp}$, mostrando a composição de translação com reflexão

Figura 36 – Bonecas do caso $\frac{bdb}{pqp}$, mostrando a composição de reflexão com reflexão

Essas atividades foram bem aceitas, provocando inclusive momentos de descontração, sobretudo durante os recortes das bonecas de papel, concordando que as atividades seriam bem recebidas pelos alunos, facilitando a identificação das isometrias presentes em cada caso das bonecas

O terceiro e último encontro foi dedicado para atividades de rotação. Para estas atividades foram utilizados compasso e transferidor, além de um artefato para fixar o centro de rotação de uma figura, produzido pelos próprios participantes, como sugestão da pesquisadora, utilizando dois canudinhos de plástico unidos em uma das pontas por uma tachinha, que servia como centro de rotação, enquanto os canudos podiam girar e formar o ângulo necessário para cada atividade. Tal artefato foi utilizado em atividades como a seguir:

Fixar uma figura, sucessivamente, por um vértice, outro ponto do contorno e um ponto interior e dar voltas em cada um desses casos, parando-as em diversas posições ao longo do percurso e colando peças iguais nos lugares correspondentes. Use os canudinhos e tachinhas como instrumentos de apoio.

Obtendo como resposta, por exemplo, a figura 37 a seguir:

Figura 37 – Exemplo de resultado obtido com o auxílio do instrumento confeccionado pelos participantes da oficina

Foram também apresentadas aos participantes mais um caso de bonecas de papel, com uma maior dificuldade para dobrar e recortar, como as das figuras 38 e 39:

Figura 38 – Bonecas de papel do caso “bqb”

Figura 39 – Bonecas de papel do caso “bqb”

Todos realizaram as atividades propostas, e em cada encontro comentaram sobre a facilidade de manipulação e visualização das isometrias, o que poderia facilitar a aprendizagem dos alunos do conteúdo apresentado, já que nem sempre encontravam atividades práticas a respeito.

5. ANÁLISE DOS DADOS

Os dados apresentados a seguir foram colhidos pela professora/pesquisadora durante as aulas deste experimento através de vídeos, fotos, áudios e das produções dos alunos que participaram desta pesquisa. Dos dados colhidos do grupo 1 restam atualmente apenas as produções dos alunos, pois os vídeos, fotos e áudios coletados foram perdidos em assalto, no qual foram levados os equipamentos eletrônicos que os armazenavam. Para registrar aqui os procedimentos do grupo 1, novas fotos foram feitas das produções dos alunos deste grupo.

5.1. Atividades realizadas sobre Translações

Ao assistirem o vídeo inicial na primeira aula do experimento, citado na seção 4.1., iniciou-se a fase 1 do nível 1 de Van Hiele, quando ocorreu uma breve discussão sobre o tema, durante a qual foi possível perceber que boa parte dos alunos já possuía alguma noção sobre cada tipo de isometria. Por escolha da professora-pesquisadora, optou-se por iniciar com as atividades de translações e, rapidamente, os alunos associaram ao movimento de translação da Terra, estudado em Ciências. Foi esclarecido em todas as turmas que esse movimento da Terra ocorre tridimensionalmente, porém o estudo a ser desenvolvido seria feito apenas com figuras de duas dimensões, ou seja, exclusivamente no plano.

A partir do que foi apresentado no vídeo, uma informação ficou bem clara aos alunos de forma que tomaram como base para saber, na atividade a seguir, se as figuras representavam ou não translações. A frase citada no vídeo e utilizada pelos alunos foi: *“A figura tem que se repetir em intervalos regulares”*.

Em seguida, as imagens das figuras 40 a 43 foram apresentadas em slides para que os alunos identificassem quais eram e quais não eram exemplos de translações a partir do que foi assistido no vídeo e de seus poucos conhecimentos até então. Esta atividade está proposta no nível 1 de Van Hiele, ou seja, atividades de reconhecimento das translações, conforme anexo 1.

- 1) Apresentar exemplos e contraexemplos de figuras transladadas. Primeiramente, mostram-se pares de figuras. Depois se mostram grupos de mais figuras. Pedir que os alunos expressem o que ocorre em cada caso. Levar os alunos a diferenciar o conjunto de pares em que há translação daqueles em que não há.

Figura 40 – Primeiro par de imagens apresentada aos alunos

Com relação a esse primeiro par de imagens apresentado na figura 40, houve discussão quanto a ser ou não exemplo de translação. Essa dúvida surgiu em algumas turmas devido ao fato de haver apenas um intervalo entre as figuras e apenas uma repetição da figura, já que o vídeo dizia que deveriam ser intervalos regulares.

Um exemplo de discussão sobre o assunto que ocorreu numa dupla do 9º C de 2016 é apresentado abaixo.

Gabriela: *A figura só se repete uma vez.*

Júlia: *Mas ela está se repetindo com o mesmo tipo de intervalo. No vídeo aparecia a mesma figura várias vezes com o mesmo intervalo, com a mesma separação entre as duas figuras.*

Gabriela: *Mas aí é uma figura e um espaço.*

Júlia: *Sim, mas de qualquer forma a imagem se repetiu, a figura acabou se repetindo de novo. Não importa quantos espaços tenha entre eles, houve repetição, então é translação.*

Apesar de se confundir um pouco na primeira explicação, dizendo haver “o mesmo tipo de intervalo”, quando realmente só havia um intervalo, a aluna Júlia entendeu que a quantidade de repetições não era algo importante para caracterizar uma translação, mas que houvesse ao menos uma repetição da figura, e com esse argumento convenceu sua colega.

Após discussões semelhantes em todas as salas, os alunos perceberam facilmente que a figura 41 a seguir não era um exemplo de translação. Um exemplo dos argumentos usados pelos alunos para dizer que a figura 41 não era exemplo de translação ocorreu no 9º A de 2016, conforme transcrição a seguir da conversa de dois alunos com a professora:

Figura 41 – Contraexemplo de translação pela segunda imagem estar rotacionada

Kleber: *Essa (figura) deu uma girada.*

Letícia: *Ela se repete, mas mudou a posição.*

Professora: *E se mudar de posição pode ser translação?*

Letícia: *Não, ela mudou de posição girando, então é como uma rotação.*

Perceberam também que o único exemplo de translação era a sequência de joaninhas que seguem para o mesmo lado.

Figura 42 – Exemplo e contraexemplo de translação

Ainda no 9º A seguiu-se a seguinte discussão a respeito das figuras 41 e 42 da professora com a turma, com destaque para os argumentos de uma dupla dessa turma:

Professora: O que aconteceu com essas joaninhas é uma translação?

9ºA: *Não.*

Professora: *Por que não?*

Melissa: *Porque a (figura) do meio tá diferente. Tá indo uma pra cada lado.*

Kleber: *Então o primeiro trio de joaninhas é translação, o segundo não.*

A imagem da figura 43 a seguir também foi apresentada aos alunos, que argumentaram não ser um exemplo de translação devido à mudança de tamanho.

Figura 43 – Contraexemplo de translação pela ampliação da segunda imagem

Na figura 44, chamou a atenção dos alunos o fato de haver bichos de cores diferentes e em direções diferentes. Segue a transcrição da conversa de um trio de alunos do 9º C:

Leonardo: *Os bichinhos amarelos estão seguindo a mesma direção e são iguais.*

Gabriel: *Os pretos são a mesma coisa, só mudou a direção, têm a mesma forma e estão indo para o mesmo lado.*

Quézia: *Então é translação de novo.*

Leonardo: *Se a gente pensar em um amarelo e um preto, um amarelo e um preto....não seria translação então. Um é amarelo e outro preto. Se mudou a cor não é mais translação.*

Quézia: *Então se tiver com cor diferente não é mais translação?*

Leonardo: *Não.*

Figura 44 – Exemplos de translação na imagem de Escher

De modo geral, em todas as turmas, o mesmo tipo de discussão sobre a figura 44 levou os alunos a perceberem que, apesar das diferenças de direção, o conjunto de bichos pretos é um exemplo de translação, bem como o conjunto de bichos amarelos. E ao comparar um preto com um amarelo, concluíram também não ser exemplo de translação.

Assim, ao fim dessas atividades de reconhecimento de translações dos slides apresentados, o 9º C de 2015 espontaneamente sugeriu que, como forma de revisão, eles mesmos fizessem uma lista de características para facilitar a identificação de translações. Ao verificar que essa atitude facilitou a compreensão da turma para identificar translações, a professora utilizou a mesma ideia nas demais turmas, sendo que algumas delas tiveram a mesma ideia antes mesmo de ser

proposta pela professora, como o 9º C e o 9º D de 2016. Os tópicos citados foram muito semelhantes em todas as salas, sendo basicamente como citado a seguir:

“Para que um conjunto de figuras seja um exemplo de translação, essas figuras devem:

- se repetir;
- ter a mesma forma;
- ter o mesmo tamanho;
- estar viradas na mesma direção;
- ter a mesma cor.”

É possível verificar que, com essas características citadas e, posteriormente, também escritas (como será visto mais adiante) pelos alunos, o conceito de translação começa a ser compreendido por eles.

A segunda atividade proposta teve o seguinte enunciado:

2) Dar e pedir exemplos de translações dentro e fora da escola.

Para esta atividade, outros exemplos de conjuntos em que se verifica a presença de translações foram citados pelos alunos, tanto dentro da sala de aula como fora dela, tais como, as listras das faixas de pedestre, as luminárias da sala de aula, os vidros das janelas, o piso das salas, uma pilha de pratos, poltronas do cinema e até mesmo em algumas de suas roupas, conforme a atividade 2 (fase 1 do nível 1 das translações) do anexo 1.

Na segunda aula do experimento, os alunos já estavam separados em duplas. A partir daqui a análise será feita com atividades de algumas duplas selecionadas pela pesquisadora, já que a quantidade de atividades realizadas foi muito grande (aproximadamente 18 duplas em cada uma das 4 turmas de cada ano). As atividades que serão apresentadas a seguir foram escolhidas como exemplos de diferentes graus de desempenho, a fim de apresentar um panorama da diversidade dos alunos das turmas participantes do experimento.

Para cada atividade proposta, serão apresentados seu enunciado e alguns exemplos da resolução dos alunos. Foram selecionadas as atividades de 6 duplas, sendo 2 duplas das turmas de 2015, as quais serão identificadas como duplas 1A e 1B, e 4 duplas das turmas de 2016, identificadas como 2A, 2B, 2C e 2D.

- 3) Utilizar uma régua para deslizar uma figura por sua borda (utilizando figuras com algum de seus lados totalmente apoiado sobre a régua). Pedir que os alunos expressem como é o deslizamento.

Para esta atividade, foram distribuídos pares de figuras para que os alunos colassem em folhas quadriculadas (para facilitar a visualização dos deslizamentos e do espaço) de forma que cada par de figuras representasse uma translação. Além disso, também foi solicitado que as duplas representassem como ocorreu o deslizamento das figuras.

Ao começarem a manipular as figuras, surgiu uma diversidade de resultados quanto à posição em que as figuras poderiam estar e, por estarem em duplas, mesmo havendo discórdia quanto à posição em que as figuras deveriam estar para que se caracterizasse uma translação, alguns alunos conseguiram convencer seu colega quanto à posição estar correta ou não, reconhecendo eles mesmos seus erros, em muitos casos.

Figura 45 – Atividade 3, fase 1, realizada pela dupla 1A

O primeiro par de figuras (Mickeyes) foi posicionado pela dupla 1A de forma a representar uma translação, conforme figura 45. Porém, o segundo par de figuras (joaninhas), embora tenha sido posicionado de forma a representar uma translação, a representação do deslizamento apresentou um erro no segmento que divide os triângulos ao meio, já que, se o segmento partiu de um vértice, deveria chegar no mesmo vértice da figura acima.

Figura 46 – Parte da atividade 3, fase 1, realizada pela dupla 2A

A dupla 2A, conforme figura 46, posicionou o par de figuras de forma a representar uma translação, porém a imagem deixa claro que houve uma pequena confusão semelhante à da dupla 1A, mas perceberam a tempo e corrigiram, apagando a parte do segmento que não deveria representar o deslizamento da figura.

Figura 47 – Parte da atividade 3, fase 1, realizada pela dupla 2D

A dupla 2D representou inicialmente o deslizamento da figura de forma errada. Conforme pode-se observar na figura 47, o segmento foi apagado quando perceberam o erro, pois ligaram o vértice superior direito do primeiro quadrado ao vértice superior esquerdo da segunda figura. Ao serem questionadas pela professora se estaria correto o deslizamento feito, uma das alunas dessa dupla disse que não tinha concordado com o “caminho” feito pela colega. Pedi que essa aluna explicasse para a colega o porquê de não concordar para tentar convencê-la. Essa aluna responde da seguinte forma:

Jéssica: Eu acho que se o risco está começando na orelha direita do Mickey, não pode acabar no lado de baixo da cabeça dele. Tem que chegar no mesmo lugar de onde começou.

E, com esse argumento com suas próprias palavras, convenceu sua colega que apagou o segmento feito inicialmente e o corrigiu, como mostra a figura 48 a seguir:

Figura 48 – Parte da atividade 3, fase 1, corrigida pela dupla 2D

A atividade seguinte deu início a fase 2 do nível 1 de Van Hiele, com o seguinte enunciado:

- 4) Transladar cada figura sobre a linha marcada utilizando um suporte (régua) e folha quadriculada para o deslizamento. Desenhar outras linhas válidas para o deslizamento.

O deslizamento com figuras inseridas em quadriláteros não despertou tantas dúvidas quanto as figuras inseridas em triângulos. Muitos alunos achavam que só havia uma resposta possível. Ao perceberem que duplas próximas tinham colado os pares de forma diferente, perguntaram para a professora qual resposta estaria correta. A professora escolheu algumas das possíveis resoluções, desenhou na lousa e questionou os alunos a respeito de cada posição em que o triângulo deveria estar, para verificar se os alunos perceberiam que, em qualquer das formas propostas, seriam exemplos de translação.

Todas as turmas concluíram que existem várias formas de representar uma translação com o par de figuras, conforme figuras 49, 50 e 51 a seguir.

Figura 49 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 2A

Figura 50 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 2B

Figura 51 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 1B

As duplas 2A e 2B utilizaram-se das linhas da folha quadriculada para facilitar a representação do deslizamento. Já a dupla 1B deixa visível a dificuldade em posicionar a figura, pois tiveram que removê-la após coladas, deixando, ainda assim, alguma diferença entre as posições figuras.

A dupla 2D representou da forma como mostra a figura 52 a seguir:

Figura 52 – Parte da atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 2D

Ao verificar a forma como esta dupla realizou essa atividade, a professora questionou as alunas se elas lembravam da “listinha” que a turma tinha feito, após assistirem o vídeo, para que pudessem se certificar das características da

translação. Após citarem algumas dessas características, as alunas perceberam que o segmento dado em um dos triângulos era para mostrar o intervalo que deveria haver entre os triângulos.

A partir dessa conversa, a professora-pesquisadora resolveu, antes de iniciar as atividades de cada aula do experimento, fazer com que os alunos citassem as características da “lista” que eles mesmos haviam feito após assistirem o vídeo para facilitar a identificação de translações. Verificou-se que a repetição dessas características facilitou a realização das demais atividades.

Em momentos de dúvida, a discussão entre as duplas sempre os levava a chegar a conclusões corretas. Em uma discussão de certa dupla, o argumento de um aluno para convencer o colega foi: “Depois da translação, a figura não pode mudar de direção. Se ela está olhando para direita, tem que continuar olhando para a direita”. Em outra dupla, a conversa foi: “O caminho da figura na translação é sempre do mesmo tamanho, independente do ponto de partida. Se a reta começa na direita da figura, ela tem que chegar na direita da figura que repete”.

Para o exercício seguinte, foi necessário fazer uma pequena mudança no enunciado de 2015 para 2016.

Enunciado de 2015:

1) - Nas figuras a seguir, identifique as figuras que se correspondem por meio de uma translação.

- Nas figuras transladadas, marque um ponto ou um dos lados sobre a figura original.

- Marque o correspondente na figura transladada.

- Una-os por uma linha que represente o caminho percorrido.

Enunciado de 2016:

5) - Nas figuras a seguir, identifique as que se correspondem por meio de uma translação.

- Nas figuras transladadas, marque um ponto sobre a figura original.
- Marque o ponto correspondente na figura transladada.
- Una-os por uma linha que represente o caminho percorrido.

No segundo item dessa atividade, foi retirado o trecho “ou um dos lados”, pois no experimento de 2015 essa expressão deixou alguns alunos confusos, pois alguns alunos não perceberam que a translação poderia ocorrer deslocando-se um dos lados da figura. Optou-se então por retirar este trecho no experimento de 2016.

Esta atividade foi realizada de formas diferentes pelas duplas. Alguns exemplos são apresentados a seguir na figura 53:

Figura 53 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2A

A dupla 2A optou por representar os pares de figuras correspondentes utilizando as mesmas cores. É interessante observar que todos os pares de figuras foram ligadas corretamente para representar translações. A dupla escolheu um ponto de cada figura e ligou corretamente ao ponto correspondente dos seus pares.

O mesmo ocorreu com a dupla 2B e 2C, conforme figuras 54 e 55 a seguir:

Figura 54 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2B

Figura 55 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2C

A dupla 1B optou por identificar os pares de figuras que se correspondem por translações utilizando os mesmos números para representa-las, conforme figura 56 a seguir:

Figura 56 – Atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 1B

Esta dupla também representou corretamente o segmento que mostra o caminho percorrido em cada par de figuras. Nas atividades apresentadas nas figuras 53, 54, 55 e 56 cada dupla escolheu pontos (ou vértices) diferentes para iniciar os segmentos em cada figura, finalizando-os nos pontos (ou vértices) correspondentes corretos de seus respectivos pares.

Ainda na fase 2 do nível 1 de Van Hiele, seguiu-se a seguinte atividade:

- 6) Transladar as figuras (em papel quadriculado) através de segmentos com os seguintes comprimentos: $2u$, $5u$, $10u$.

Para o grupo 1, foram propostos apenas 2 pares de figuras utilizando os comprimentos $2u$ e $5u$. Para o grupo 2, como forma de redesign, foi proposto conforme o enunciado acima, com 3 pares de figuras. Nesta atividade, uma variedade de resoluções era possível, já que não foi especificado qual distância deveria ser usada para qual figura. Alguns exemplos dessas resoluções estão abaixo nas figuras 57 a 60.

Figura 57 – Atividade 6, fase 2, realizada pela dupla 2D

A dupla 2D denominou “figura 8” o par de figuras com 5u de distância, mostrando essa distância algumas linhas abaixo com um risco feito a lápis. E chamou de “figura 10” o par de figura com 10u de distância, mostrando essa distância da mesma forma que a chamada “figura 8”. Porém, é possível perceber que na chamada “figura 9” não foi dada a distância de 2u solicitada no enunciado.

Figura 58 – Atividade 6, fase 2, realizada pela dupla 2B

A dupla 2B conseguiu utilizar as três distâncias solicitadas corretamente, em posições diferentes das utilizadas pela dupla anterior e usando essas distâncias em figuras diferentes das que foram utilizadas pela dupla 2D.

Figura 59 – Primeira parte da atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2C

Figura 60 – Segunda parte da atividade 5, fase 2, realizada pela dupla 2C

Essa mesma atividade foi realizada corretamente também pela dupla 2C, mas de forma diferente das duplas 2B e 2D, alterando a ordem das figuras, as distâncias e o posicionamento entre elas.

Após estas primeiras atividades, já na fase 3, os alunos escreveram o que tinham aprendido até o momento a respeito das translações e comentaram sobre as atividades que foram realizadas. Estão transcritas a seguir algumas das expressões encontradas nas descrições dos alunos:

- “... (translação) não muda sua forma, só se move. ”
- “... (translações) mudam de lugar, mas não de forma nem de tamanho.”
- “Para ser uma translação suas imagens planas não podem sofrer nenhuma alteração, elas têm que ser do mesmo tamanho e não podem sofrer alteração na direção. ”
- “Translação é quando uma imagem se repete em ordem sem se modificar e para fazer uma translação é preciso que:
 - As figuras sigam na mesma direção e distância;
 - Não altere as medidas da imagem;
 - Um ponto encontre com outro correspondente sem alterações na imagem. ”
- “Representamos as translações com uma reta ligando as figuras. ”

Essas expressões mostram não apenas a compreensão que os alunos tiveram sobre as translações, como também a evolução da linguagem sobre o assunto, conforme Van Hiele sugere que aconteça.

Em 2016, foram acrescentadas 2 atividades que não foram propostas em 2015, já da fase 4 de Van Hiele, por achar que estas atividades poderiam melhorar a compreensão da ideia de translação de figuras planas. A primeira dessas atividades foi proposta conforme o seguinte enunciado:

- 7) Transladar cada figura de modo que um dos lados da figura coincida com um dos segmentos dados.

Nesta atividade, os alunos não apresentaram muitas dificuldades, já que também só havia uma forma de posicionar as figuras corretamente na malha quadriculada, conforme as figuras 61, 62 e 63 a seguir:

Figura 61 – Atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 2A

Figura 62 – Atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 2C

Figura 63 – Atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 2B

A outra atividade proposta em 2016 da fase 4 de Van Hiele tem o enunciado descrito abaixo:

- 8) Transladar as figuras (em papel quadriculado) de modo que o ponto marcado esteja sobre um ponto dado.

Os pares de figuras que tinham os pontos P' e Q' posicionados num cruzamento da malha foram de simples resolução. Já a figura dentro do losango com o ponto R' posicionado dentro do próprio losango fez os alunos apresentarem algumas dificuldades. Alguns exemplos das resoluções estão apresentados abaixo nas figuras 64 a 67:

Figura 64 – Atividade 8, fase 4, realizada pela dupla 2A

Figura 65 – Realização da atividade 8, fase 4, pela dupla 2A

A dupla 2A utilizou uma régua para auxiliar no posicionamento da figura transladada, procurando fazer segmentos paralelos a figura original, encontrando assim o lugar onde a figura transladada deveria ser posicionada.

Figura 66 – Realização da atividade 8, fase 4, pela dupla 2B

Figura 67 – Atividade realizada pela dupla 2B

A dupla 2B tentou fazer de forma semelhante a dupla 2A, mas encontraram alguma dificuldade para fazer as retas paralelas por um leve risco feito a

lápiz que foi apagado (mas ficou marcado), que mostra que a figura não foi posicionada exatamente como foi riscada.

Ainda na fase 4, a última atividade proposta foi o recorte das bonecas de papel do caso *bbb*, conforme figura 68 a seguir, apresentada no anexo 2.

9) Recortar bonecas de papel do caso “*bbb*”.

Figura 68 – Bonecas de papel do caso “*bbb*”

Verificou-se com o grupo 1 que a boneca desenhada na tira de papel foi impressa muito pequena, o que causou dificuldades para recortar, já que o cilindro feito antes do recorte se tornou muito grosso (foram feitas muitas voltas de papel) devido ao tamanho do desenho da tira, que indicava o diâmetro que o cilindro deveria ter (visualizando externamente, as mãos da boneca deveriam estar unidas). Para o grupo 2, conforme relatado na seção 4.2., esse desenho foi ampliado de forma a facilitar os recortes, ampliando a distância entre os extremos dos braços das bonecas, como forma de redesign.

Nesta atividade alguns alunos encontraram ainda algumas dificuldades no recorte, pois cortavam a base do vestido da boneca ou até mesmo seus braços, o que fez com que as bonecas não ficassem unidas. Porém a maioria das duplas conseguiu perceber onde os recortes deveriam acontecer de forma que o resultado final fossem bonecas de papel transladadas. As figuras 69 a 73 mostram isso.

Figura 69 – Aluna recortando boneca de papel transladada

Figura 70 – Recorte da boneca de papel transladada feito pela aluna

Figura 71 – Alunos recortando bonecas de papel do caso “bbb”

Figura 72 – Boneca de papel recortada pela aluna

Figura 73 – Aluna apresentando sua boneca de papel do caso “bbb”

Os alunos se surpreenderam ao perceberem que as bonecas produziram translações sendo recortadas em forma de cilindro. Para que o cilindro não desenrolasse durante o recorte, alguns alunos prenderam a cabeça e a saia da boneca utilizando clips.

5.2. Atividades realizadas sobre Reflexões

Seguindo com o experimento de ensino, foram propostas aos alunos atividades sobre reflexões. Como uma forma de redesign, as atividades do experimento com o grupo 2 foram iniciadas bem mais cedo para que fosse possível realizar mais atividades sobre reflexão do que com o grupo 1, que só chegou a fazer as bonecas de papel no caso “bdb” quando chegaram às reflexões. Assim, com o grupo 2 foram realizadas atividades da fase 1 a fase 4 do nível 1 de Van Hiele.

As atividades propostas para as turmas do grupo 2 foram novamente realizadas em duplas escolhidas pelos próprios alunos e foi dada a oportunidade de trocarem as duplas, caso achassem necessário. Em cada turma, no máximo 3 duplas foram trocadas. No geral, as duplas foram mantidas pela afinidade criada na época da realização das atividades sobre translações.

Serão apresentados o enunciado de cada atividade proposta e alguns exemplos da resolução dos alunos. Foram selecionadas as atividades de 6 duplas de turmas de 9º ano de 2016 como exemplo de diferentes níveis de desempenho, a fim de apresentar um panorama da diversidade dos alunos das turmas participantes do experimento. Tais duplas serão identificadas como 1C, 2C, 3C, 4C, 5C e 6C.

A primeira atividade inicia a fase 1 do nível 1 de Van Hiele para familiarizá-los com a utilização do espelho, obtendo figuras simétricas. Foram distribuídos às duplas espelhos com medidas aproximadas de 10cm x 10cm para a realização das próximas atividades e folhas quadriculadas para facilitar nas visualizações e para desenhar.

- 1) Colocar o espelho em lugares diferentes de uma mesma figura, desenhada numa folha quadriculada. Observe as imagens refletidas e copie na folha quadriculada o que visualizar através do reflexo.

Nesta atividade, foram distribuídos aos alunos papéis com as quatro figuras impressas para que fossem reproduzidas no papel quadriculado. As duplas desenharam as figuras distribuídas na folha quadriculada com as medidas que acharam adequadas, como é possível visualizar na figura 74, e a maioria das duplas aproveitou as linhas e colunas da folha quadriculada tanto para desenhar, quanto para posicionar o espelho.

Figura 74 – Figuras da atividade 1, fase 1, desenhadas pela dupla 6C

Dessa forma, uma variedade de resoluções foi possível. Alguns exemplos dessas resoluções estão representados nas figuras 75 a 78 abaixo.

Figura 75 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 1C

Quase todas as duplas resolveram esta atividade, ou pelo menos parte dela, de modo que o reflexo precisasse ser desenhado por cima de parte da figura desenhada inicialmente. Nas quatro turmas, a professora esperou que algumas duplas questionassem se haveria problema na sobreposição ou se estaria errado desenhando uma figura por cima de outra para poder explicar para todos os alunos qual seria o procedimento.

A orientação dada às duplas foi para que traçassem um segmento na posição do espelho para indicar que a “confusão” de figuras sobrepostas era resultado de uma reflexão de parte daquela figura, e não da figura inteira, e que o segmento traçado seria um eixo que indica a reflexão. A expressão “eixo de reflexão” ainda não era conhecida pelos alunos, mas dessa forma foi se tornando comum para eles.

Pela figura 75, observando a posição em que o espelho foi colocado (parte do raio foi deixada do outro lado do espelho), é possível perceber que o reflexo visto pela dupla 1C no espelho foi desenhado corretamente por traz do mesmo.

Figura 76 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 3C

A dupla 3C marcou na primeira e na terceira figura um segmento representando o local em que o espelho foi posicionado, desenhando corretamente após esse segmento o reflexo observado por eles no espelho. É possível observar também que, na figura do raio, a dupla 3C posicionou o espelho virado para o lado diferente da dupla 1C (que desenhou o reflexo do lado direito da imagem), fazendo com que apenas a parte inferior do raio fosse vista no espelho e desenhada após o segmento que o representa (o reflexo foi desenhado do lado esquerdo da imagem).

Figura 77 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 6C

A dupla 6C optou por posicionar o espelho de forma que pudesse enxergar a figura completa, tendo como reflexo do paralelogramo, o mesmo paralelogramo, porém invertido.

Figura 78 – Realização da atividade 1, fase 1, pela dupla 2C

Na figura 78 é possível perceber que a dupla 2C, no paralelogramo, posicionou o espelho fora e afastado da figura, pelo espaço deixado entre o paralelogramo e seu reflexo. Na seta, que foi desenhada na vertical, o espelho foi posicionado na diagonal, fazendo com que seu reflexo aparecesse na horizontal.

A segunda e terceira atividade, ambas ainda da fase 1 de Van Hiele, foram os recortes das bonecas de papel no caso “bdb”, já que as duplas já conheciam o tipo de atividade, pela experiência das translações, e por já terem noção de onde localizar o eixo de reflexão, solicitado em ambos os exercícios. O caso “bdb” tem esse nome devido a impressão de reflexão entre essas letras, como se “d” fosse reflexo de “b”, e vice-versa.

2) Recortar bonecas de papel do 1º caso “bdb”.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Esse primeiro caso “bdb” é feito com meia boneca, para que, após a reflexão, a boneca fique completa, juntando a metade com seu reflexo.

3) Recortar bonecas de papel do 2º caso “bdb”.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

No segundo caso “*bdb*”, a boneca inicial é inteira, tendo após sua reflexão, bonecas viradas para lados diferentes.

A primeira boneca estava desenhada pela metade, para que fosse dobrada exatamente ao meio e, com o reflexo encontrado, fosse possível ver a boneca completa. Para que as bonecas fossem recortadas de forma refletida, os alunos deveriam dobrar o papel na forma de uma sanfona, e não mais enrolar como um cilindro, como foi feito nas translações, como mostram as figuras 79 a 82.

Figura 79 – Boneca da atividade 2 dobrada em efeito “sanfona”

Figura 80 – Aluno recortando as bonecas de papel do 1º caso “*bdb*”

Figura 81 – Boneca de papel do 1º caso “bdb” recortada pela aluna

Figura 82 – Aluno apresentando seu recorte da boneca de papel do 1º caso “bdb”

Nesta atividade foi pedido também aos alunos que, após o recorte, identificassem com lápis e régua os eixos de reflexão encontrados nas bonecas. Todas as duplas identificaram que os eixos de reflexão estavam no meio das bonecas, e a maioria identificou o eixo também na união de suas mãos.

Após o recorte, alguns alunos ainda observaram que, se fossem levar em consideração a boneca inteira, poderiam dizer que as bonecas estavam transladadas, mas como o desenho era de apenas meia boneca e o eixo de reflexão estava no meio de cada boneca, então as bonecas estavam refletidas.

A segunda boneca de papel do caso “bdb” foi desenhada completa, fazendo com que, em seus reflexos, cada boneca ficasse virada para lados diferentes.

Figura 83 – Duplas realizando a atividade 3, fase 1

Figura 84 – Boneca de papel do 2º caso “*bdb*” recortada pelo aluno

Neste tipo de boneca de papel, os alunos também deveriam identificar os eixos de reflexão, que estavam sempre no encontro das mãos das bonecas, como mostra a figura 85 a seguir:

Figura 85 – Aluna identificando os eixos de reflexão das bonecas do 2º caso “*bdb*”

Como as duplas já haviam recortado a primeira boneca de papel para a atividade de translações, os recortes das bonecas de papel das reflexões ocorreram com poucas dificuldades, pois os alunos já sabiam onde não poderiam recortar. Por exemplo, após dobrada, os braços da boneca não poderiam ser cortados nas

extremidades, ou as extremidades da saia, já que isso faria com que as bonecas se soltassem (os braços e a saia mantêm as bonecas ligadas entre si) e não seria possível observar as reflexões das bonecas.

Conforme relatado na seção 4.2., mais uma situação de redesign ocorreu nesta atividade, já que o grupo 1 teve dificuldades para recortar os cantos das bonecas. Para o grupo 2, essas bonecas foram também ampliadas.

A próxima atividade inicia a fase 2 do nível 1 de Van Hiele, isto é, de orientação dirigida. A partir desta atividade voltaram a ser utilizados o espelho e a régua.

- 4) Reconhecer as figuras que se correspondem através de uma reflexão, em um conjunto de figuras, em que os casos afirmativos não apresentam diferenças quanto a posições de eixo e de figuras e os negativos correspondem a mudanças da figura, ou seja, em forma ou em tamanho.

Nesta atividade, cada dupla utilizou uma forma diferente para identificar os pares de figuras refletidas. Pode-se verificar que ficou claro para os alunos que, em qualquer tipo de isometria, a forma e o tamanho das figuras não podem ser alterados. Alguns exemplos da forma como as duplas realizaram esta atividade estão a seguir nas figuras 86, 87 e 88.

Figura 86 – Atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 3C

A dupla 3C não marcou como reflexão apenas o último par de figuras, onde os desenhos estão dentro de triângulos de tipos diferentes, porém marcaram erradamente o primeiro par de figuras, as joaninhas dentro de losangos de tamanhos diferentes. Neste momento, foram questionados pela professora quanto as características que as figuras deveriam ter para estarem refletidas. Segue a transcrição dessa conversa:

Professora: *Quando vocês se olham no espelho a altura do reflexo de vocês aumenta ou diminui?*

Júlia: *Não, minha altura é a mesma no espelho.*

Professora: *E por que vocês marcaram um par de figuras de tamanhos diferentes como sendo reflexão?*

Rafaela: *Então mesmo que seja a mesma figura, mas com tamanho diferente não será reflexão?*

Júlia: *Não, é igual minha imagem no espelho que também não muda de tamanho.*

Com essa resposta, a própria colega convenceu sua parceira de que haviam marcado um par de figuras que não era exemplo de reflexão.

Figura 87 – Atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 1C

A dupla 1C marcou com um “x” os pares de figuras que não são exemplos de reflexão e com um ✓ os pares de figuras refletidas.

Figura 88 – Atividade 4, fase 2, realizada pela dupla 6C

A mesma atividade foi feita corretamente também pela dupla 6C destacando com as mesmas cores os pares de figuras refletidas. Algumas duplas chegaram a conferir com o uso do espelho se os reflexos estavam como as imagens propostas, como mostra a figura 89 a seguir:

Figura 89 – Aluno conferindo a reflexão pelo espelho

Na sequência, a atividade 5 da fase 2, foi dividida em três partes. Todas deveriam ser feitas com a utilização do espelho.

- 5) a) Colocando-se o espelho sobre cada figura da folha, conseguir que a figura seja vista por completo.

Nesta atividade todas as figuras estavam incompletas (como se estivessem rasgadas), e as duplas deveriam posicionar o espelho de forma que conseguissem enxergar cada figura de forma completa. Para isso, o espelho poderia ser colocado em várias posições diferentes, obtendo, assim, figuras completas diferentes. Alguns exemplos do que foi feito pelas duplas estão nas figuras 90 e 91 a seguir.

Figura 90 – Atividade 5a, fase 2, realizada pela dupla 4C

Figura 91 – Atividade 5a, fase 2, realizada pela dupla 3C

À medida em que conseguiam enxergar a figura completa, as duplas iam marcando com lápis onde encontravam o eixo de reflexão, como mostra a figura 92.

Figura 92 – Atividade 5a, fase 2, realizada pela dupla 5C

Pela posição em que a dupla 5C marcou os eixos de reflexão, é possível perceber que na figura do lado superior direito, o eixo marcado não torna a figura completa. Mas nas demais figuras, os eixos de reflexão tornam as figuras completas.

A parte “b” dessa atividade também exigiu a utilização do espelho.

- b) Colocando-se o espelho sobre a folha, conseguir que se vejam dois carros/bonecos. No caso do boneco, conseguir também algumas imagens não usuais, por exemplo, um boneco sem pluma ou dois bonecos sem plumas.

A professora ainda solicitou às duplas que marcassem os eixos de reflexão do carro, do boneco, dos bonecos sem a pluma e de qualquer outra imagem escolhida pelas duplas. Alguns exemplos do que foi feito encontram-se nas figuras 93 e 94.

Figura 93 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 3C

Figura 94 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 1C

A dupla 3C visualizou dois bonecos e dois carros com o espelho na horizontal, enquanto a dupla 1C obteve o mesmo resultado com o espelho na vertical. Mas várias duplas obtiveram as figuras refletidas de forma individual, conforme figuras 95 e 96.

Figura 95 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 3C

Figura 96 – Realização da atividade 5b, fase 2, pela dupla 2C

Algumas duplas comentaram com a professora que perceberam que a distância entre a figura original e sua imagem aumentava à medida que afastavam o espelho da imagem e diminuía conforme a distância entre elas diminuía também.

Para continuar esta atividade, as duplas deveriam encontrar apenas um boneco sem pluma, dois bonecos sem plumas ou alguma outra ideia que as duplas tivessem, como é possível ver nas figuras 97, 98 e 99 a seguir:

Figura 97 – Atividade 5b, fase 2, da dupla 2C mostrando dois bonecos sem plumas

Figura 98 – Atividade 5b, fase 2, da dupla 4C mostrando um boneco com duas plumas

Figura 99 – Atividade 5b, fase 2, da dupla 5C mostrando um boneco sem plumas

As duplas encontraram variedades de resoluções para esta atividade, sendo que as duplas 1C e 6C fizeram a atividade da mesma forma que a dupla 2C, e a dupla 3C fez da mesma forma que a dupla 5C.

Ainda utilizando o espelho, as duplas realizaram a terceira parte desta atividade. Da mesma forma que nos itens anteriores, as duplas também fizeram os eixos de reflexão para cada reflexão pedida pelo enunciado.

- c) Colocando-se o espelho sobre a folha, conseguir que se vejam 1, 2, 3,... circunferências em cada conjunto. Verificar qual é o número máximo de circunferências que se pode obter em cada caso.

Algumas duplas questionaram a professora sobre sua atividade estar correta ou não. A professora informou que não haveria apenas uma resposta correta, mas sim que suas respostas dependeriam de onde escolheriam posicionar seus espelhos. Assim, várias soluções foram possíveis também nesta atividade, e, após essa explicação da professora, as duplas não encontraram dificuldades para encontrar 1, 2, 3 ou mais circunferências utilizando o espelho, conforme os exemplos das figuras 100 a 103 a seguir.

Figura 100 – Aluno visualizando três circunferências

Figura 101 – Aluno visualizando uma circunferência

Figura 102 – Aluno visualizando duas circunferências

Figura 103 – Aluna visualizando quatro circunferências

As próximas atividades finalizam a parte de reflexões do experimento, da fase 4 de nível 1 de Van Hiele.

- 6) Obter, com ajuda do espelho, o eixo de simetria de cada par de figuras (todos os casos devem ter solução e nenhum eixo de simetria deve cortar as figuras).

Ao receberem esta atividade, algumas duplas questionaram como fariam para encontrar o eixo de reflexão. Algumas tentaram encontrar aleatoriamente movimentando o espelho, outras preferiram perguntar à professora. Um exemplo de uma conversa com a professora ocorreu no 1ºA e está transcrito abaixo:

Melissa: *Professora, como vou achar o eixo sem ter que ficar “chutando” com o espelho?*

Professora: *Pelo que você já fez nas atividades anteriores, onde e como foram traçados os eixos dessas outras figuras?*

Melissa: *Fiz com o espelho, olhando quando aparecia a outra metade da figura.*

Professora: *E para aparecer essa outra metade da figura, em que parte dela o espelho, que representa o eixo de reflexão, deve ser posicionado?*

Melissa: *No meio da figura.*

Professora: *Então para achar o eixo das figuras dessa atividade onde você deveria posicionar o espelho, se fosse fazer com ele?*

Melissa: *No meio das duas figuras.*

Professora: *E como você pode encontrar o meio das duas figuras com os instrumentos que você possui para trabalhar?*

Melissa: *Posso usar a régua.*

Professora: *Só não esqueça que para traçar uma reta você precisa de pelo menos...?*

Melissa: *Dois pontos.*

Após essa conversa, a aluna conseguiu achar os eixos de reflexão de cada par de figuras dado no enunciado. Alguns exemplos das resoluções dessa atividade encontram-se nas figuras 104 a 108 a seguir:

Figura 104 – Aluno verificando o eixo com o espelho

Figura 105 – Aluno verificando o eixo com o espelho

Na figura 105 é possível perceber que o aluno já havia feito um segmento a lápis, mas quando posicionou o espelho, percebeu que, para refletir a imagem dada, o eixo traçado inicialmente estava no lugar errado.

Figura 106 – Dupla 2C marcando dois pontos para traçar o eixo

As duplas 2C e 3C aproveitaram os vértices dos polígonos para marcar os pontos médios entre eles, encontrando assim dois pontos para traçar o segmento que representa o eixo de reflexão entre as duas figuras.

Figura 107 – Dupla 3C marcando o ponto médio entre os vértices dos triângulos

Figura 108 – Atividade 6, fase 4, realizada pela dupla 4C

A figura 108 mostra que a dupla 4C traçou segmentos ligando os vértices correspondentes, localizando em seguida os pontos médios desses segmentos. Assim, puderam encontrar dois pontos para traçar o eixo de reflexão de cada figura.

A última atividade proposta na fase 4 de Van Hiele é apresentada no enunciado a seguir:

7) Completar, desenhando, uma figura simétrica da qual é dada a metade.

As duplas preferiram desenhar cada metade das figuras na própria folha quadriculada e depois completar cada figura com seu reflexo. Exemplos das atividades realizadas estão nas figuras 109 e 110 a seguir:

Figura 109 – Parte da atividade 7, fase 4, realizada pela dupla 6C

Figura 110 – Dupla 5C realizando a atividade 7, fase 4

Para esta atividade, nenhuma dupla apresentou dificuldade em desenhar o reflexo de cada figura. Todas as duplas, inclusive as que não foram selecionadas para esta análise, realizaram corretamente, sem apresentar dúvidas.

5.3. Exposição sobre Isometrias

Ao final de 2015, a escola onde o experimento foi aplicado promoveu uma feira de ciências que seria aberta não apenas aos alunos, mas também à comunidade. A professora pesquisadora propôs às turmas que apresentassem o que aprenderam com o experimento de ensino. Como alguns alunos se envolveram com apresentações de outras disciplinas, a professora pediu que, voluntariamente, os alunos que tivessem interesse em apresentar um trabalho sobre as isometrias formassem um grupo para planejar o que apresentar.

Levando em consideração que em 2015 as turmas realizaram apenas atividades de translação e as bonecas de papel de reflexões (caso “bdb”), foi sugerido que esses alunos apresentassem um trabalho apenas sobre translações. No entanto, um grupo de alunos voluntários do 9º ano D procurou a professora para dizer que gostaria de falar não apenas de translações, mas também sobre reflexões e que pesquisaria para poder falar também sobre rotações. Isso foi proposto pela professora aos outros grupos que se formaram em cada turma, que prontamente aceitaram também pesquisar sobre reflexão e rotação e, assim, apresentar um trabalho mais completo.

Uma equipe formada por um grupo de cada turma decidiu que a disposição da sala teria um percurso de visita sequencial pré-definido. Os visitantes, ao entrar na sala, foram encaminhados pelo primeiro aluno que explicou e apresentou figuras em um painel com exemplo de Translação. Ao término dessa explicação, o visitante passou para um segundo aluno que fez o mesmo sobre Reflexão, e um terceiro aluno ainda explicou e apresentou exemplos de rotações. Esse painel foi todo confeccionado pelos grupos envolvidos, que procuram e imprimiram figuras como exemplos de cada isometria.

Para este primeiro momento com os visitantes, a equipe preparou um pequeno texto com lembretes para sua apresentação. Esses textos encontram-se nas figuras 111, 112 e 113.

Figura 111 – Características da Translação escrita pelos alunos

Figura 112 - Características da Reflexão escrita pelos alunos

Figura 113 - Características da Rotação escrita pelos alunos

Depois que os visitantes souberam as características de cada isometria, foram encaminhados para outro grupo de alunos, que preparou atividades para o visitante realizar semelhantes às atividades que eles realizaram no experimento. Mas ao invés de colarem as figuras em folhas quadriculadas, os visitantes fixariam as figuras com alfinetes em placas de isopor.

Figura 114 – Visitante realizando atividades de cada tipo de isometria

Seguindo o percurso pela sala, o visitante encontrava um espaço onde poderia se sentar e recortar alguns modelos de bonecas de papel. Para isso, os alunos fizeram várias bonecas diferentes em tiras de papel de seda para facilitar o recorte, já

que é um papel bem fino. Nesse espaço, outro grupo de alunos orientava a forma de dobrar e de recortar as bonecas.

Figura 115 – Visitantes fazendo bonecas de papel

Figura 116 – Alunas orientando nos recortes das bonecas de papel

Finalizando este percurso, o visitante recebia uma lembrança pela sua participação, um pacotinho com doces, confeccionado pela equipe de alunos participante da apresentação. Não há mais fotos da apresentação, pois fotos mais detalhadas estavam num notebook que foi roubado no começo do ano de 2016. As

imagens aqui utilizadas foram fornecidas pela escola, que fotografou o evento para registrá-lo.

Foram momentos de muita dedicação e até mesmo de descontração para os alunos, confeccionando suas atividades e testando entre si, preocupados com as lembrancinhas que distribuíram, com a explicação que dariam, a decoração da sala e até mesmo na propaganda externa que fizeram para atrair mais visitantes. Essa equipe chegou a confeccionar cartazes para espalhar pela escola, convidando o público a visitar a sala com a seguinte propaganda: “Você sabe o que são Isometrias? Não? Então venha descobrir na sala nº....”

O público que visitou a sala saiu visivelmente surpreso, vendo alunos explicando conceitos matemáticos com tanta segurança. E a atividade de recorte das bonecas de papel atraiu boa parte desse público, que, ao sair da sala, fazia propaganda para outras pessoas presentes no evento, recomendando que passassem para visitar a “sala da Matemática”.

Professores de outras disciplinas, além dos coordenadores e da direção da escola também estiveram presentes e participaram de todo o percurso proposto pela equipe, igualmente surpresos com o empenho e desempenho desses alunos.

Essa apresentação corresponde a um tipo de pós-teste conforme sugerido por Van Hiele. E a descrição feita com as próprias palavras pelos alunos, apresentadas nas figuras 111, 112 e 113 anteriormente, pode ser vista como um indício de que esses alunos já se encontravam na fase 5, apresentando características no nível 2 de raciocínio de Van Hiele, também chamado de nível da análise.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa de campo necessária para o desenvolvimento deste trabalho de mestrado foi realizada paralelamente ao trabalho profissional desta pesquisadora, cumprindo o duplo papel também de professora, que já tinha ciência da falta de conhecimento de alguns conceitos e conteúdos matemáticos, principalmente geométricos, necessários na educação básica, de alunos que cursavam, na época, o 9º ano do ensino fundamental. A intenção foi, não somente sanar a falta desses conceitos e conteúdos, como fazê-lo de uma forma prática e com o maior aproveitamento possível.

O trabalho foi realizado em dois anos consecutivos, ambos com turmas de 9º ano, desenvolvendo atividades sobre translações e reflexões. Durante quase todo o seu processo, os alunos trabalharam em duplas escolhidas por eles mesmos e utilizaram material de fácil manipulação e baixo custo: folhas quadriculadas, lápis, régua, cola, espelhos e imagens previamente impressas e recortadas.

O vídeo citado na seção 4.1. teve a função de ponto de partida para a aplicação das atividades. Durante toda a aplicação dessas atividades, a professora/pesquisadora conduziu a aplicação com base em discussões das dúvidas que surgiam e incentivando a discussão entre as duplas, evitando sempre dar respostas prontas para que os alunos chegassem às conclusões, construindo, assim, de forma mais sólida seu conhecimento.

Para esse experimento foi escolhida e utilizada a metodologia do *Design Experiment Research*, metodologia essa caracterizada pelo aprimoramento de proposta de ensino e que se aproxima muito da rotina de um professor, que verifica constantemente acontecimentos ou fatores que colaboram positivamente na aprendizagem de determinada turma para reutilizá-los em outras turmas. Assim também como verifica os fatores que dificultam o desenvolvimento de uma aula em certa turma e tenta reformulá-lo para adequar-se às necessidades de outra turma. Essa metodologia foi ainda aliada à teoria de Van Hiele, com uma proposta de atividades não tradicionais, elaboradas e conduzidas pela professora/pesquisadora, a fim de favorecer o progresso no nível de raciocínio dos alunos participantes do experimento.

As atividades que foram propostas na fase 1 (da informação) são equivalentes aos pré-testes do *Design Experiment*. Já as atividades de fase 4 (de orientação livre) equivalem aos pós-testes. Além disso, a realização das atividades em duplas facilitou a ocorrência da fase 3, a fase da explicação, durante todo o processo, propiciando a evolução do vocabulário dos alunos nas discussões e comentários sobre a forma de resolver os exercícios e a troca de experiências entre cada dupla e entre os alunos e a professora.

A mudança de enunciado de exercícios (perguntas pertinentes ou não), mudança de ordem de exercícios, ou até mesmo uma mudança de estratégia de ensino, foram algumas das alterações que se tornaram necessárias de uma turma para outra. Como se pode ver ao final de 2015, conforme apresentado na seção 5.1., houve uma mudança no enunciado do exercício 5 de translações para garantir um melhor aproveitamento na aplicação de 2016. Na atividade das bonecas de papel (principalmente das translações), citada na mesma seção, também foi necessária uma mudança no tamanho das bonecas impressas na tira de papel para facilitar os recortes. Para que isso ocorresse, a pesquisadora esteve sempre ciente de que, devido a inúmeros fatores internos ou externos, o que é adequado a um grupo, pode não ser a outro. Essas mudanças que ocorreram de um ano para o outro, moldaram, assim, a prática da professora, já que quanto mais adequada for a situação à realidade e às dificuldades do aluno, maior será o alcance e o desenvolvimento de seu raciocínio.

Nem sempre os resultados obtidos pelos alunos estavam corretos, mas sempre que isso foi detectado pela pesquisadora, foram sugeridos outros caminhos e soluções possíveis para que as duplas chegassem a conclusões mais claras e mais próximas do correto, como foi apresentado, por exemplo, na seção 5.1., na atividade 3 da fase 1 de translações realizada pela dupla 2D.

Apesar de estar ciente de que a forma como as isometrias são apresentadas no capítulo 2 aproximam-se da forma como o assunto é abordado no ensino superior, este trabalho procurou preparar um grupo de alunos de forma que os conceitos geométricos aqui apresentados, fossem compreendidos de forma intuitiva ou até mesmo mais formalmente. Isso pode ser verificado, por exemplo, por meio da lista de características descrita na seção 5.1, em que os alunos, espontaneamente,

resolveram listar as características das translações para ajudá-los a identificar quando um par de figuras fosse ou não exemplo de translação. Ou ainda na seção 5.3., figuras 111, 112 e 113, quando a equipe de alunos participantes da exposição na feira de ciências relaciona as propriedades/características de cada isometria para auxiliá-los na apresentação ao público.

Outro exemplo de apreensão das propriedades de preservação das isometrias encontra-se na seção 5.1., na atividade 4 da fase 2 de translações, figura 49 da dupla 2A e figura 50 da dupla 2B, em que esses alunos percebem que todos os pontos de uma figura são transladados por uma mesma distância, na mesma direção e mesmo no sentido, isto é, mesma classe de equipolência, conforme apresentado na seção 2.2.2.

Verificou-se com esse experimento que essas pequenas mudanças podem ser responsáveis pela evolução do nível de conhecimento do aluno, o que faz essa metodologia adotada ser bem complementada pelo Modelo de Van Hiele, baseado na evolução dos níveis de raciocínio e fases de aprendizagem. Esse modelo não pode ser visto como um modelo “engessado”, pronto ou único, já que ocasionalmente as fases podem ocorrer em ordens diferentes das propostas por Van Hiele. Isso pode ser percebido, neste trabalho, quando os alunos de determinada turma que participaram do experimento resolveram, de forma espontânea, fazer uma lista com as características das translações para facilitar a identificação desse caso de isometria.

O interesse dos alunos participantes do grupo 2, nesse experimento, foi tanto que a quantidade de aulas do experimento com esse grupo foi menor que com o grupo 1 e mesmo assim o rendimento e desenvolvimento foram maiores, o que também foi influenciado pela atuação da pesquisadora, aprimorada pelo redesign, na forma de propor e no tempo destinado a cada uma das atividades.

Ao chegar ao fim do ano de 2016, o grupo 2 quis saber se as atividades de rotação ocorreriam no ano seguinte, já que teriam a mesma professora no 1º ano no Ensino Médio, e não havia mais tempo para a realização dessas atividades em 2016, pois as reflexões foram concluídas ao final do período letivo. Ao iniciarem o ano de 2017, o grupo 2 ainda questionou na primeira semana de aula se o experimento

teria sequência, o que fez a professora/pesquisadora comprometer-se a preparar essas atividades como um projeto-extra para realizá-lo no ano de 2017.

A realização das atividades feita em duplas foi produtiva de tal forma, tanto do ponto de vista da pesquisadora quanto dos alunos, que se tornou um hábito incorporado à rotina das turmas. Durante as aulas diárias de matemática, realizando atividades do conteúdo previsto para o 9º ano, em todas as turmas participantes a professora sempre era questionada sobre a possibilidade de realizarem as tarefas em duplas. Ao que, automaticamente, após a permissão da professora, era possível verificar que a maioria das duplas formadas eram as mesmas do experimento.

Em alguns casos também era visível que um dos integrantes da dupla tinha mais facilidade na realização das tarefas e ajudava seu parceiro, explicando com uma linguagem mais simples, mas que levava ambos a uma melhor compreensão do conteúdo, hábito que levaram também para o Ensino Médio.

Foi verificado também pela professora/pesquisadora o quanto a aprendizagem dos conceitos de isometrias facilitou aos alunos a aprendizagem de conteúdo posterior, que remeteram ao experimento ao trabalharem com semelhança de figuras e congruência de ângulos. Frequentemente lembravam que, o fato de não poder mudar os ângulos era como ocorria no experimento, mas a diferença era que para duas figuras serem semelhantes, teriam que ser ampliadas ou reduzidas, o que não pode acontecer com as isometrias estudadas.

Ainda no começo de 2017, a pesquisadora pode conversar com o professor que lecionaria aulas de Física para esse grupo, garantindo, pelos resultados obtidos com esse experimento, que os alunos participantes estão prontos para iniciar o estudo sobre vetores, já que tiveram uma boa noção sobre o assunto após a realização deste trabalho.

Os resultados aqui apresentados levam a concluir que os dois grupos participantes deste trabalho finalizaram as atividades reconhecendo as características de translações e reflexões e realizando ambas com figuras de diferentes formas, familiarizados e utilizando com frequência termos como “isometrias”, “figuras transladadas”, “figuras refletidas”, “reflexo” “distância”, “imagem”, “eixo de reflexão” e até mesmo “simetrias”. Essas características mostram que esses alunos se

encontravam na fase 5 do nível 1 de Van Hiele. Destaca-se aqui o grupo 1, que realizou uma apresentação muito clara sobre o tema em feira de ciências, como mais uma característica de que se encontrava na fase 5 do nível 1, prontos para iniciar o nível 2, seguindo suas fases de aprendizagem e aprofundando seus conhecimentos, o que infelizmente não foi possível, já que o conteúdo de 9º ano precisava ser integralmente cumprido e as atividades propostas foram finalizadas muito próximas do fim do ano.

Sendo assim, ressalta-se aqui a importância da realização desse trabalho para esta pesquisadora, bem como o progresso e desenvolvimento que este promoveu na vida profissional da mesma, através de profunda reflexão sobre a sua prática docente e atuação profissional, buscando, a partir de então, elaborar situações que despertem o interesse e, por consequência, gerem a aprendizagem, para que o aluno não seja mais um mero espectador e que apenas realiza atividades, mas que crie-se nele o desejo de continuar aprendendo.

Conclui-se, então, que jamais será inútil pensar em estratégias que convençam o aluno da importância de qualquer que seja o conteúdo, valorizando cada aluno como capaz de aprender, vendo na sala de aula uma oportunidade para um pouco que seja da mudança que tanto se espera que ocorra na educação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, S., GALVÃO, M.E.E.L. – Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares. – São Paulo: IME-USP, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, Matemática. Brasília: MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BROWN, A. L. – Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. – Journal of the Learning Sciences. 1992, 2(2), p. 141 – 178.

COBB, P., CONFREY, J., DISSESSA, A., LEHRER, R., SCHAUBLE, L. – Design Experiments in Educational Research. – Educational Researcher, 2003, v. 32, n. 1, p. 9 – 13.

COLLINS, A. et al. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. Journal of the Learning Sciences. 2004, 13 (1), p. 15-42.

JAIME, A. Aportaciones a la Interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele. Valencia: 1993. Tese de doutorado. Universidade de Valencia.

LAGE, N. A. Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano. Minas Gerais, 2008. Dissertação de mestrado no ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

LIMA, E.L. Coordenadas no plano. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1992.

LIMA, E.L. Isometrias. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zetetiké. Campinas: 1993, a. 1, n. 1, p.7-16,.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática / Coord. Maria Inês Fini – São Paulo: SEE, 2008.

SERVATIUS. B, *The Geometry of Folding Paper Dolls*. Leicester, Inglaterra: The Mathematical Gazette, 1997 – vol.81, n. 490.

SIGNORELLI, S. F. Um ambiente virtual para o ensino semipresencial de funções de uma variável real: Design e análise. São Paulo, 2007. Dissertação de mestrado em educação matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

TV ESCOLA – **Arte e Matemática: Simetrias**, 2000. [Internet] Disponível em: <<http://tvescola.mec.gov.br/tve/video/simetrias>>. Acesso em: 20/07/2015

WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

YOUTUBE – **Florence Colgate a mulher mais bonita: Teste de simetria**, 2012. [Internet] Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=GM4XUNNMHXA>>. Acesso em: 28/10/2016

ANEXO 1 – PROPOSTA DE ENSINO SEGUNDO O MODELO DE VAN HIELE

TRANSLAÇÕES: NÍVEL 1

Objetivos:

As atividades que planejamos para este nível pretendem alcançar os objetivos gerais a seguir, que mais adiante vamos especificar nas diferentes fases de aprendizagem.

- 1) Reconhecimento da característica de isometria da translação (o tamanho e a forma das figuras se conservarem).
- 2) Reconhecimento e realização de translações de maneira direta, utilizando materiais auxiliares (por exemplo, uma régua). Identificação do tipo de deslocamento (em linha reta).
- 3) Descobrimto e utilização de características visuais das translações: preservação da inclinação da figura, ausência de inversão.
- 4) Reconhecimento e realização de translações em diferentes direções sem ajuda de material auxiliar.
- 5) Utilização de vocabulário apropriado relacionado com as translações: translação, direção, figura transladada, imagem, distância.

No primeiro nível de raciocínio, entra-se em contato com o objeto de estudo, neste caso, as translações, e o nível de raciocínio baseia-se na consideração global das figuras e seus movimentos, sendo este fundamentalmente visual. Por outro lado, todas as propriedades que se destacam devem estar baseadas em atributos manipulativos ou visuais.

Algumas das propriedades das translações que têm a ver com a forma de movimento (em linha reta) podem ser percebidas pelos alunos como semelhantes às de outras transformações, como as simetrias, por isso, parte do trabalho inicial de introdução das translações no nível 1 deve centrar-se em diferenciar as translações das simetrias.

A necessidade de um raciocínio do tipo visual faz com que a realização física de movimentos pelos estudantes torne-se a melhor forma de compreensão das translações, o qual envolve a consideração dos seguintes aspectos: dinâmico (realização do movimento) e estático (observação das figuras inicial e final). Portanto,

a realização física do movimento e as características visuais da colocação das figuras constituem a base de julgamento neste nível, e em seguida os objetivos 2 e 3.

Durante algum tempo, muitos alunos requerem a ajuda de algum material ou meio mecânico que lhes permita realizar de maneira automática as translações. Esta forma de trabalho é necessária para que possam observar as características das translações e consistem em transladar figuras ao longo de uma régua em cuja borda estavam apoiadas.

O quarto objetivo apresenta a necessidade de explorar a componente fortemente visual de igualdade de inclinação entre figuras transladadas, conseguindo um progresso na aquisição do nível 2 de raciocínio, para o qual é necessário que os alunos comecem a ser capazes de realizar movimentos de translação sem a ajuda de nenhum material auxiliar, o qual poderão começar a fazer uma vez que tenham compreendido suficientemente o significado das propriedades físicas das translações.

O objetivo 5 refere-se à característica do modelo de Van Hiele na qual cada nível de raciocínio possui uma linguagem específica. Isso inclui neste caso a aprendizagem de novos termos e a unificação dos significados atribuídos pelo professor e os alunos sobre as translações. O que quer dizer que o professor deverá adaptar seu vocabulário (quer dizer, o vocabulário matemático usual) às capacidades e possibilidades de seus alunos, pois as vezes pode ser mais conveniente usar palavras distintas, com o mesmo significado, mais familiares para os alunos. Mesmo assim, os alunos modificarão ou ampliarão alguns dos significados atribuídos a uma palavra ou expressão.

TRANSLAÇÕES: NÍVEL 1 – FASE 1

Objetivos:

- 1) Ter contato com o conceito de translação.
- 2) Verificar os conhecimentos prévios elementares que os alunos possam ter sobre as translações.
- 3) Ter contato com materiais de ajuda (régua) e métodos informais empregados para realizar as translações (deslizamento sobre a régua).
- 4) Verificar o vocabulário que os estudantes possuam ao falar sobre translações, unificação de termos e significados entre professor e alunos, além de introdução de vocabulário novo e específico (direção, linha reta,...)

Atividades:

- 1) Apresentar exemplos e contraexemplos de figuras transladadas. Primeiramente, mostram-se pares de figuras. Depois se mostram grupos de mais figuras. Pedir que os alunos expressem o que ocorre em cada caso. Levar os alunos a diferenciar o conjunto de pares em que há translação daqueles em que não há.

f.

g.

h.

i.

- 2) Dar e pedir exemplos de translações dentro e fora da escola.
- 3) Utilizar uma régua para deslizar uma figura por sua borda (utilizando figuras com algum de seus lados totalmente apoiado sobre a régua). Pedir que os alunos expressem como é o deslizamento.

TRANSLAÇÕES: NÍVEL 1 – FASE 2

Objetivos:

- 1) Reconhecer as características que fazem translações serem isometrias (não muda o tamanho nem a forma) e de conservar a orientação.
- 2) Introduzir e utilizar corretamente vocabulário básico: figura transladada, translação, linha reta.
- 3) Empregar corretamente um suporte para deslizar uma figura por uma translação ou para identificar figuras transladadas e obtenção de linhas alternativas de deslizamento.
- 4) Identificar visualmente grupos de figuras transladadas ou não transladadas. Utilizar justificativas visuais e manipulativas.
- 5) Identificação de elementos homólogos de duas figuras transladadas (vértices, lados, outros pontos com características visuais concretas).

Atividades:

- 4) Transladar cada figura sobre a linha marcada utilizando um suporte (régua) e folha quadriculada para o deslizamento. Desenhar outras linhas válidas para o deslizamento.

- 5) Dado um conjunto de figuras, reconhecer as figuras que se correspondem por uma translação, servindo-se e/ou não de deslizamento da figura.

Nas figuras transladadas, marcar um ponto ou lado sobre a figura original. Marcar o correspondente na figura transladada. Uni-los por uma linha que represente o caminho dessa figura.

- 6) Transladar as figuras (em papel quadriculado) através de segmentos com os seguintes comprimentos: $2u$, $5u$, $10u$.

TRANSLAÇÕES: NÍVEL 1 – FASE 4

Objetivo:

Utilizar as características visuais e os procedimentos para que translações ocorram, apresentados na fase 2, em outras situações nas quais os alunos devam usar, embora implicitamente, algumas propriedades matemáticas que estejam explícitas no nível 2, tais como paralelismo de segmentos das figuras transladadas ou a associação de um vetor ao deslocamento da translação.

Atividade:

- 7) Transladar cada figura de modo que um dos lados da figura coincida com um dos segmentos dados.

- 8) Transladar as figuras (em papel quadriculado) de modo que o ponto marcado esteja sobre um ponto dado.

9) Recortar bonecas de papel do caso “bbb”.

Serão distribuídas tiras de papel com uma boneca inteira desenhada.

1º passo: Enrolar a tira de papel em formato de cilindro (tubinho), sendo que cada volta deve ter a medida da ponta de um braço ao outro da boneca e o desenho inicial deve ficar na parte de fora do cilindro.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a base (que é o que manterá as bonecas unidas), neste caso, a saia.

Antes de cortar as bonecas no cilindro, o papel pode ficar seguro utilizando clips.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

REFLEXÕES: NÍVEL 1

Objetivos:

As atividades que planejamos para este nível pretendem alcançar os seguintes objetivos gerais, que mais adiante dividiremos nas diferentes fases de aprendizagem:

- 1) Reconhecimento da característica que as reflexões possuem de ser isometrias (o tamanho e a forma das figuras se conservam).
- 2) Reconhecimento e realização de reflexões de forma direta, servindo-se de materiais auxiliares (régua, tesoura, espelho).
- 3) Descobrimento e utilização de características visuais das reflexões: mudança de semipleno, inversão da figura, equidistância ao eixo.
- 4) Reconhecimento e realização de reflexões com diferentes posições de eixos e das figuras, com e sem ajuda de material auxiliar.
- 5) Utilização de vocabulário adequado relacionado com as reflexões: nome dos instrumentos utilizados, simetria, eixo, figura simétrica, imagem, distância.

Dado que o raciocínio do primeiro nível de baseia na consideração visual e abrangente dos objetos matemáticos, as propriedades indicadas nos objetivos terão um forte componente gráfico ou manipulativo, e para utilizá-las não será necessária a decomposição ou a análise das figuras, de forma que os alunos que estejam raciocinando no nível 1 possam identificar e usar estas propriedades.

Por exemplo, no primeiro nível, o reconhecimento de que as figuras não ficam maiores, nem menores, nem modificam sua forma (primeiro objetivo) pode ser realizada através da observação de reflexos em espelhos.

Nas atividades da sequência proposta para o nível 1 utilizam-se as técnicas de reflexo (através do espelho), seguido de desenho ou recorte para colocar peças em determinadas posições, desenhar figuras simétricas e obter figuras com silhuetas simétricas.

O segundo objetivo especificado é essencial no primeiro nível de raciocínio, pois os alunos começam a descobrir as reflexões e para isso é necessário utilizar meios que as produzam automaticamente. Ao mesmo tempo, esses meios

podem ser utilizados como corretores, embora não apenas neste nível, de modo que os alunos devem compreender bem suas características e possibilidades, e adquirir destreza em manejá-los.

A mudança de semiplano é uma característica de avaliação global, e portanto, do nível 1. As atividades visarão destacar a função do eixo de simetria como separador de uma figura e sua imagem.

Neste nível os alunos podem apreciar alguns aspectos da inversão da figura, mas no geral não se chega a produzir uma compreensão completa desta propriedade. Os alunos possuem certa ideia gráfica de que a figura se coloca “ao contrário”, mas não diferenciam sempre as reflexões de certas rotações (principalmente de 180°) da figura que também se colocam ao contrário. Será no segundo nível de raciocínio que compreenderão por completo a propriedade da inversão, ao serem capazes de focar nas características matemáticas dos movimentos.

Algo parecido acontece com a equidistância: ao incluí-la como objetivo no nível 1, não se pretende que os alunos a utilizem como objeto de estudo em si, mas sim que, em sua reflexão global sobre a figura dada e sua imagem através de uma reflexão, os alunos sejam capazes de saber se a imagem deve ou não tocar o eixo, segundo a posição da figura original, e possam também prestar atenção à separação correta do eixo quando se trate de figuras simples (triângulos equiláteros, círculos, quadrados, etc.) as quais estão situadas em posições familiares aos alunos.

O objetivo 4 se refere a situações que usualmente correspondem à visão primária de reflexões que, pela experiência cotidiana ou por sua simplicidade, podem ser resolvidas através de um conceito global de reflexão.

O quinto objetivo corresponde à introdução de vocabulário específico das reflexões, adequado aos alunos. A concretização deste objetivo em uma lista específica de termos deve depender da idade e dos conhecimentos geométricos prévios dos alunos, pois em alguns casos deverá se substituir certos termos matemáticos usuais por outros mais significativos para eles e, portanto, mais fáceis para eles de serem utilizados.

REFLEXÕES: NÍVEL 1 – FASE 1

Objetivos:

- 1) Ter contato com os conceitos de reflexão e simetria.
- 2) Verificar os conhecimentos prévios elementares que os alunos tenham sobre as reflexões/simetrias.
- 3) Ter contato com materiais de ajuda (espelho, por exemplo) e métodos informais para a realização de reflexões ou obtenção de figuras simétricas.
- 4) Verificar o vocabulário que os alunos possuem ao falar de reflexões e simetrias unificar termos e significados entre professor e alunos e introduzir novo vocabulário específico (reflexo, espelho, eixo,...).

Atividades:

- 1) Os alunos utilizam espelhos, colocando-os em lugares diferentes de uma mesma figura, desenhada sobre uma folha quadriculada. Observam as imagens refletidas e copiam na folha quadriculada o que veem através do reflexo.

- 2) Recortar bonecas de papel do 1º caso “bdb”.

Serão distribuídas tiras de papel com metade de uma boneca desenhada (essa metade deve ser um dos lados da boneca – direito ou esquerdo).

1º passo: O papel deve ser dobrado, a princípio, exatamente na linha que divide a boneca ao meio. As dobras devem seguir com a mesma medida alternando os lados para onde o papel deve virar, sendo que a largura deve ser da ponta do braço até a linha que a divide, ou seja, efeito “sanfona”.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha de dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: *bdb*

3) Recortar bonecas de papel do 2º caso “*bdb*”.

Serão distribuídas tiras de papel com uma boneca inteira desenhada

1º passo: Dobrar o papel com uma largura que se estenda de um braço ao outro da boneca, também em efeito sanfona.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha de dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.

- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: bdb

REFLEXÕES: NÍVEL 1 – FASE 2

Objetivos:

- 1) Reconhecer as características das reflexões/simetrias de serem isometrias (não muda o tamanho nem a forma das figuras).
- 2) Introduzir e utilizar o vocabulário básico: Figura simétrica, simetria, eixo, reflexão, imagem,...
- 3) Empregar corretamente, em qualquer posição de eixo e figura, materiais e técnicas de realização da reflexão: espelho, dobraduras e recortes.
- 4) Consolidar e utilizar a inversão das figuras simétricas.
- 5) Descobrir, reconhecer e utilizar a equidistância de maneira visual primária: figuras que tocam o eixo ou separadas pelo eixo.
- 6) Reconhecer pares de figuras simétricas ou não simétricas. Os pares não simétricos devem corresponder a ausência de equidistância ou de inversão.
- 7) Obter de forma aproximada o eixo de simetria entre duas figuras.
- 8) Realizar simetrias de forma aproximada, com ajuda de materiais auxiliares.

Atividades:

- 4) Reconhecer as figuras que se correspondem através de uma simetria, em um conjunto de figuras, em que os casos afirmativos não apresentam diferenças quanto a posições de eixo e de figuras e os negativos correspondem a mudanças da figura, ou seja, em forma ou em tamanho.

- 5) a) Colocando-se o espelho sobre cada figura da folha, conseguir que a figura seja vista por completo.

- b) Colocando-se o espelho sobre a folha, conseguir que se vejam dois carros/bonecos. Fazer com que os dois (carros e boneco) aproximem-se e afastem-se. No caso do boneco, conseguir também algumas imagens não usuais, por exemplo, um boneco sem pluma ou com duas plumas.

- c) Colocando-se o espelho sobre a folha, conseguir que se vejam 1, 2, 3,... circunferências em cada conjunto. Verificar qual é o número máximo de circunferências que se pode obter em cada caso.

REFLEXÕES: NÍVEL 1 – FASE 4**Objetivos:**

1) Utilizar as características e técnicas apresentadas na fase 2 em situações distintas ou em situações que aumentam a complexidade. As diferenças entre as atividades das fases 2 e 4 são originadas por:

- A posição dos eixos: Atividades que na fase 2 se restringiam a eixos em posições padrões, agora apresentam-se também com eixos de outras inclinações ou com posições relativas figura-eixo mais complexas.

- A abordagem geral da tarefa: Atividades que na fase 2 se concentraram em um único elemento visual, na fase 4 geralmente surge, devendo-se levar em conta simultaneamente as diferentes propriedades das simetrias estudadas na fase 2.

Atividades:

6) Obter, com ajuda do espelho, o eixo de simetria de cada par de figuras (todos os casos devem ter solução e nenhum eixo de simetria deve cortar as figuras).

7) Completar, desenhando, uma figura simétrica da qual é dada a metade.

ROTAÇÕES: NÍVEL 1

Objetivos:

As atividades planejadas para este nível pretendem alcançar os objetivos gerais a seguir, que mais adiante separaremos nas diferentes fases de aprendizagem.

- 1) Reconhecimento da característica que possuem os giros de serem isometrias (tamanho e forma das figuras se conservam).
- 2) Reconhecimento e realização de rotações de uma forma direta, utilizando materiais auxiliares (como discos, palitos, rodas). Identificação do tipo de deslizamento (circular).
- 3) Descobrimto e utilização de características visuais das rotações: deslizamento circular, mudança de posição, equidistância ao centro, não inversão da figura.
- 4) Utilização de vocabulário apropriado relacionado às rotações: giro, centro, distância, movimento circular, inclinação, imagem.

O enfoque geral, no qual se baseia o raciocínio do primeiro nível, é, no caso das rotações, na consideração de um deslocamento ao redor de um ponto ou objeto fixo. Neste nível de raciocínio, deve-se também incentivar a consideração da mudança de inclinação que acontece com uma figura ao longo de seu percurso.

A manipulação com materiais adequados deve facilitar aos alunos a visão indicada anteriormente, tanto quando o centro de rotação é interior à figura objeto de movimento como quando é exterior.

Diferente do que ocorre com as simetrias, não há material padronizado que produza rotações de forma automática, sem necessidade de manipulação. Por este motivo, como parte dessa investigação, experimentamos vários materiais. Em particular, utilizamos discos e palitos.

Os discos transparentes são círculos de folhas de acetato com centro marcado. Para girar uma figura, coloca-se o disco com seu centro sobre o centro de rotação, traça-se ou coloca-se a figura que deve girar, fura-se o centro do disco com algum objeto pontiagudo e faz-se com que gire. Para obter uma cópia sobre o papel, furam-se os vértices ou pontos externos da peça ou desenho, retira-se o disco e ajusta-se a imagem às marcas.

Os palitos podem ser tiras de cartolina. Neste caso, deve haver peças recortadas iguais a que é objeto de giro. Para girar uma figura, posiciona-se o palito de forma que passe pelo centro de rotação e pela figura. Cola-se sobre o palito uma peça igual à que vai girar, no mesmo lugar e com a mesma inclinação; fixa-se o palito no centro de rotação e gira-se. Para obter uma cópia sobre o papel, marcam-se os vértices ou pontos externos da peça, remove-se o palito e ajusta-se a imagem às marcas.

No caso de os alunos saberem manejar o compasso, este pode ser útil em algumas atividades para desenhar circunferências, ao invés de traça-las a mão.

A visão primária de rotação como algo que dá voltas inclui as características mencionadas nos objetivos 1 e 3: conservação do tamanho e forma das figuras e deslizamento circular. O último objetivo refere-se ao aprendizado necessário do vocabulário associado às rotações. Alcançar esse objetivo depende da idade dos alunos e de seus conhecimentos geométricos. O professor deverá proporcionar oportunidades para que os alunos reconheçam a necessidade de usar um vocabulário mais exato e pratiquem-no.

ROTAÇÕES: NÍVEL 1 – FASE 1

Objetivos:

- 1) Ter contato com o conceito de rotação.
- 2) Verificar os conhecimentos prévios elementares que os alunos possuem sobre as rotações.
- 3) Apresentar ferramentas de ajuda e métodos informais utilizados para a realização das rotações (discos, compasso)
- 4) Verificar o vocabulário que os alunos possuam ao falar sobre rotações e introdução de novo vocabulário específico (centro, movimento circular)

Atividades:

- 1) Dar e pedir exemplos de rotações dentro e fora da escola. Pedir que os alunos expressem o que entendem por giro ou por girar um objeto.

- 2) Fixar, sucessivamente, por um vértice, outro ponto do contorno e um ponto interior de uma figura com algum desenho e dar voltas em cada um desses casos, parando-a em diversas posições ao longo do percurso e colando peças iguais no lugar correspondente.
- 3) Sobre um disco transparente, em que está marcado o centro, colar uma figura. Colocar o disco sobre uma folha de papel em branco e dar voltas, fixando-o por seu centro. Situar várias peças ao longo do percurso. Pedir que os alunos descrevam o deslizamento.

ROTAÇÕES: NÍVEL 1 – FASE 2

Objetivos:

- 1) Reconhecer a característica das rotações que as classificam como isometrias (não muda o tamanho nem a forma).
- 2) Introduzir e utilizar o vocabulário básico: rotação, girar, centro de rotação, imagem.
- 3) Utilizar corretamente métodos e materiais adequados para realizar ou identificar a rotação (usar um disco ou um palito, quando o centro de rotação for externo a figura).
- 4) Identificar visualmente grupos de figuras rotacionadas ou não, em situações visualmente distinguíveis.

Atividades:

- 4) Dadas as curvas a seguir, reconhecer quais delas podem ser rotacionadas com um ângulo de 90° e voltar a sua posição original.

- 5) Dados um ponto e um conjunto de figuras, identificar as que correspondem a uma rotação com centro no ponto dado.

ROTAÇÕES: NÍVEL 1 – FASE 4

Objetivo:

Utilizar as características visuais das rotações (deslizamento circular e variação da inclinação) e técnicas de realização das rotações para reconhecer figuras rotacionadas e efetuar rotações em situações mais complexas.

Atividades:

- 6) Dados uma figura e um centro de rotação. Marcar o caminho seguido por vários pontos ao girar a figura. Fazê-lo primeiro sem mover a figura, depois comprovar a solução apontada através do deslizamento da figura, utilizando alguma ferramenta auxiliar (compasso, por exemplo).

- 7) Dados grupos de figuras que se correspondem através de uma rotação e que formam parte da circunferência correspondente a essa rotação, indicar aproximadamente onde se encontram os centros de rotação. Determinar sem utilizar materiais auxiliares, mas utilizá-los em seguida para comprovar.

ANEXO 2 – BONECAS DE PAPEL (BRIGITTE SERVATIUS)

A Simetria é um componente essencial em muitos trabalhos artesanais, tais como bordados, renda, tecelagem, tranças de cabelo. A dobradura e o recorte de bonecas de papel não possuem grande valor entre essas atividades, mas podem ser utilizadas como ferramenta para ilustrar algumas transformações geométricas.

As isometrias que veremos nas sequências a seguir, são:

- Translação (sequência paralela do tipo $b \rightarrow b$)
- Rotação (de 180° com polos nas linhas centrais do tipo $(b \rightarrow q)$)
- Reflexão por uma reta (do tipo $\frac{b}{p}$) ou por uma linha perpendicular à reta central
($b \mid d$)
- Reflexão deslizante ($b \rightarrow p$)

A escolha da letra b para mostrar a ação da transformação se deve ao fato desta letra não possuir simetria em si mesma, mas suas imagens isométricas podem ser representadas por outras letras.

Utilizaremos as seguintes notações para as sequências:

bbb – generaliza translações.

...b b b b b b b b b ...

bdb – generaliza duas reflexões paralelas perpendiculares a reta central.

...b d b d b d b d b...

bqb – generaliza duas rotações de 180° com extremidades na reta central.

...b q b q b q b q b...

bdp – generaliza uma reflexão perpendicular à reta central, e uma rotação com extremidades na reta central.

...b d p b d p b d p...

bpd – generaliza uma reflexão com deslizamento.

...b p d b p d b...

$\frac{bbb}{ppp}$ – generaliza uma translação e a reflexão pela reta central.

...b b b b b b b...
p p p p p p p p

$\frac{bdb}{ppp}$ – generaliza a reflexão pela reta central e duas reflexões por retas perpendiculares a reta central.

...b d b d b d b...
p q p q p q p q p

Atividade 1: Recortar bonecas de papel do caso “bbb”.

1º passo: Desenhar uma boneca inteira.

2º passo: Enrolar a tira de papel em formato de “tubinho” (cilindro), sendo que cada volta deve ter a medida da ponta de um braço ao outro da boneca e o desenho inicial deve ficar na parte de fora do tubinho.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a base (que é o que manterá as bonecas unidas), neste caso, a saia.

Obs: Antes de cortar as bonecas no cilindro, o papel pode ficar seguro utilizando clips.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Figura 3 – Caso 3: bbb

Atividade 2: Recortar bonecas de papel do 1º caso “*bdb*”.

1º passo: Desenhar metade de uma boneca (essa metade deve ser um dos lados da boneca – direito ou esquerdo).

2º passo: O papel deve ser dobrado, a princípio, exatamente na linha que divide a boneca ao meio. As dobras devem seguir com a mesma medida alternando os lados para onde o papel deve virar, sendo que a largura deve ser da ponta do braço até a linha que a divide, ou seja, efeito “sanfona”.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha de dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 1: *bdb*

Atividade 3: Recortar bonecas de papel do 2º caso “*bdb*”.

1º passo: Desenhar uma boneca inteira.

2º passo: Dobrar o papel com uma largura que se estenda de um braço ao outro da boneca, também em efeito sanfona.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha de dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 2: *bdb*

Atividade 4: Recortar bonecas de papel do caso “ $\frac{bdb}{pqp}$ ”.

1º passo: Desenhar uma boneca inteira.

2º passo: A tira de papel deve ser dobrada ao meio sendo que a linha da dobra deve ser a base da saia da boneca (ou seja, a tira ficará dupla). A seguir, deve-se repetir o efeito sanfona utilizado nas atividades anteriores.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha da dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 4: $\frac{bdb}{pqp}$

Atividade 5: Recortar bonecas de papel do caso $\frac{bbb}{ppp}$.

1º passo: Desenhar uma boneca inteira.

2º passo: A tira de papel deve ser dobrada ao meio sendo que a linha da dobra deve ser a base da saia da boneca (ou seja, a tira ficará dupla). Enrolar a tira dupla de papel em formato de “tubinho” (cilindro), sendo que cada volta deve ter a medida da ponta de um braço ao outro da boneca e o desenho inicial deve ficar na parte de fora do tubinho.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a base (que é o que manterá as bonecas unidas), neste caso, a saia.

Obs: Antes de cortar as bonecas no cilindro, o papel pode ficar seguro utilizando clips.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 5: $\frac{bbb}{ppp}$

Atividade 6: Recortar bonecas de papel do caso “*bqb*”.

1º passo: Dobrar a tira de papel conforme o esquema abaixo.

2º passo: Desenhar a boneca no hexágono, conforme esquema.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 6: *bqb*

Atividade 7: Recortar bonecas de papel do caso “*bqb*”.

1º passo: Dobrar a tira de papel conforme o esquema abaixo.

2º passo: Desenhar a boneca conforme esquema.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 7: *bqb*

**ANEXO 3 – QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DE ENSINO FUNDAMENTAL E
MÉDIO**

- 1) A escola onde você leciona é:
() particular () pública
- 2) Você leciona para qual ciclo da Educação Básica?
() Fundamental II () Médio () Ambos
- 3) Há quanto tempo você é professor da Educação Básica?
() de 0 a 5 anos.
() de 5 a 10 anos.
() de 10 a 20 anos.
() mais de 20 anos.
- 4) Você fez ou faz algum tipo de curso de pós-graduação?
() Sim () Não
- 5) Quanto aos tópicos de Geometria previstos para este ano em suas turmas:
() Já abordei em todas as salas/séries.
() Já abordei em algumas salas/séries.
() Ainda vou abordar este ano.
() Não vai dar tempo.
- 6) Quando você dá aula de Geometria, você:
() Dá maior enfoque às fórmulas, como áreas, volumes, números de diagonais, por exemplo.
() Prefere mostrar os caminhos para construções geométricas e deduções das tais fórmulas.
- 7) Você costuma acrescentar algum conteúdo geométrico ao seu planejamento?
() Sim () Não
- 8) Como você se sente ao ensinar Geometria para seus alunos?

- () Muito inseguro para qualquer conteúdo relacionado à Geometria, de forma que preciso pesquisá-los muito antes de ensiná-los.
- () Um pouco inseguro, mas uma breve pesquisa sobre o assunto costuma ser suficiente para preparar as aulas.
- () Para mim não faz diferença a área da matemática que vou ensinar, tenho o hábito de pesquisar antes de preparar as aulas.
- () Totalmente à vontade, pois a Geometria é a área que acredito ter maior facilidade para ensinar.

9) Você já excluiu ou costuma excluir conteúdos geométricos no seu planejamento de aulas?

- () Sim () Não

Caso sua resposta para a questão anterior tenha sido sim, responda a questão 10. Caso tenha sido não, siga para a questão 11.

10) Qual foi o principal motivo que o(a) levou a essa atitude?

- () Não dominava muito o assunto proposto.
- () Os alunos apresentaram dificuldades e preferi não complicar mais.
- () Sempre deixo para o final, e nem sempre há tempo para aplicá-lo.
- () Outros motivos. Qual(is)?

11) Você já realizou algum curso complementar ou assistiu palestras sobre Geometria?

- () Sim () Não

12) Qual é o nível de importância que você dá para o ensino de Geometria na Educação Básica?

- () Mais importante que outras áreas da Matemática.
- () Tão importante quanto qualquer outra área da Matemática.
- () As outras áreas devem ter prioridade no ensino.
- () Não considero importante ensinar Geometria.

13) Assinale a alternativa que mais se enquadra ao seu ponto de vista.

- () O estudo da Geometria é indispensável à formação intelectual dos alunos e ajuda no desenvolvimento do raciocínio.
- () Privar os alunos do ensino da Geometria não acarreta prejuízos à formação dos alunos, já que no dia a dia a mesma é pouco utilizada.
- () A Geometria deve ceder espaço a outros ramos da Matemática.

14) Assinale a alternativa que mais se enquadra à sua situação.

- () Gostaria de ensinar mais Geometria, mas preciso de mais preparo nesta área.
- () Gostaria de ensinar mais Geometria, mas normalmente o tempo é insuficiente.
- () prefiro não ensinar Geometria, mas tenho que fazê-lo ocasionalmente, pois a escola onde leciono exige que seja feito.
- () Prefiro não ensinar Geometria e isso é indiferente para a escola onde leciono.

ANEXO 4 – OFICINA DO CAEM

**Centro de Aperfeiçoamento do
Ensino de Matemática
IME-USP**

Translações, Rotações e Reflexões no Ensino Fundamental

Débora Costa Cona (mestranda do IME-USP e professora da rede estadual de ensino)

Orientação: *Profa. Cláudia Cueva Candido* (IME-USP)

1º semestre de 2016

Resumo

Nesta oficina será apresentada uma sequência didática para o ensino de isometrias, transformações geométricas que preservam forma e tamanho de figuras planas. A abordagem na Educação Básica é recomendada nos PCN's, não somente por permitir o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, mas, principalmente, como recurso para favorecer a compreensão do conceito de congruência entre figuras planas. Os participantes da oficina serão convidados a discutir sobre os objetivos de aprendizagem da sequência didática e sobre a adequação das atividades propostas aos estudantes do Ensino fundamental, no sentido de atingir os objetivos apontados.

Introdução

O conceito de congruência de figuras é um tópico central no ensino elementar de Geometria e torna-se de fácil compreensão quando explicado por meio de superposição de figuras, ou seja, por meio de movimentos rígidos que não causam deformações de comprimentos ou de ângulos – as isometrias. A importância do ensino das Isometrias na Educação Básica é apontada nos PCN (1998) do ensino fundamental:

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. p. 51.

Ainda conforme os PCN (1998), é importante enfatizar que as transformações isométricas representam parte integrante da formação no Ensino Fundamental:

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. p. 124.

O currículo do Estado de São Paulo de Matemática aponta que o estudo das simetrias é um caminho para introduzir as primeiras ideias associadas ao plano cartesiano no 6º ou 7º anos. Podemos encontrar entre as habilidades propostas para 7º ano:

Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia. p. 59.

Translação

As atividades aqui propostas constituem uma parcela da sequência didática realizada por alunos de 9º ano. Foram inspiradas nas atividades propostas na tese de doutorado “Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento” de Adela Jaime Pastor da Universidade de Valência.

- 1) Dado um conjunto de figuras, reconhecer as figuras que se correspondem mediante uma translação, servindo-se e/ou não de deslizamento da figura (incluem-se figuras de diferentes tamanhos, formas e orientação de seus ângulos).

Nas figuras transladadas, deslizar uma até a outra (com ou sem ajuda de uma régua). Marcar um ponto ou lado sobre a figura original. Marcar o correspondente na figura transladada. Uni-los por uma linha que represente o caminho desse elemento.

- 2) Transladar as figuras (em papel quadriculado) através de segmentos com os seguintes comprimentos: $2u$, $5u$, $10u$.

- 3) Transladar cada figura de modo que um dos lados da figura coincida com um dos segmentos dados.

- 4) Transladar as figuras (em papel quadriculado) de modo que o ponto marcado esteja sobre um ponto dado.

A atividade 5 está proposta no artigo “The Geometry of Folding Paper Dolls” de Brigitte Servatius.

- 5) Recortar bonecas de papel do caso “*bbb*”.

1º passo: Enrolar a tira de papel em formato de cilindro, sendo que cada volta deve ter a medida da ponta de um braço ao outro da boneca e o desenho inicial deve ficar na parte de fora do cilindro.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a base (que é o que manterá as bonecas unidas), neste caso, a saia. Antes de cortar as bonecas no cilindro, o papel pode ficar seguro utilizando clips.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Reflexão

Nas atividades deste bloco trabalharemos com conceitos de reflexões em relação a uma reta e de simetria. São usados espelhos e métodos informais para a realização de reflexões ou obtenção de figuras simétricas. Os alunos devem ser levados a reconhecer as características das reflexões/simetrias de serem isometrias (não mudam o tamanho nem a forma das figuras) e a ampliar seu vocabulário (reflexão, imagem, figura refletida, simetria, eixo de simetria ou reflexão).

- 1) Utilizando espelhos, coloque-os em lugares diferentes de uma mesma figura (que podem ser recortes de revistas ou jornais), colocada sobre uma folha quadriculada. Observe as imagens refletidas e copie na folha quadriculada o que vê através do reflexo.

- 2) Reconhecer as figuras que se correspondem através de uma simetria, em um conjunto de figuras, em que os casos afirmativos não apresentam mudanças quanto a posições de eixo e de figuras e os negativos correspondem a mudanças da figura, ou seja, em forma ou em tamanho.

A partir da notação indicada no artigo “The Geometry of Folding Paper Dolls” de Brigitte Servatius, as atividades envolvendo as bonecas de papel utilizam as seguintes generalizações:

bbb – Generaliza translações.

...b b b b b b b b ...

bdb – Generaliza duas reflexões paralelas perpendiculares a reta central.

...b d b d b d b d...

$\frac{bbb}{ppp}$ – Generaliza uma translação e a reflexão pela reta central.

...b b b b b b b...

p p p p p p p

$\frac{bdb}{ppp}$ – Generaliza a reflexão pela reta central e duas reflexões por retas perpendiculares à reta central.

...b d b d b d b d...

p q p q p q p q p

3) Recortar bonecas de papel do 1º caso “*bdb*”.

Serão distribuídas tiras de papel com metade de uma boneca desenhada (essa metade deve ser um dos lados da boneca – direito ou esquerdo).

1º passo: O papel deve ser dobrado, a princípio, exatamente na linha que divide a boneca ao meio. As dobras devem seguir com a mesma medida alternando os lados para onde o papel deve virar, sendo que a largura deve ser da ponta do braço até a linha que a divide, ou seja, efeito “sanfona”.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha de dobra.

Encontre os eixos de simetria da tira e verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: *bdb*

4) Recortar bonecas de papel do 2º caso “*bdb*”.

Serão distribuídas tiras de papel com uma boneca inteira desenhada

1º passo: Dobrar o papel com uma largura que se estenda de um braço ao outro da boneca, também em efeito sanfona.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha de dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: *bdb*

5) Recortar bonecas de papel do caso “ $\frac{bbb}{ppp}$ ”.

1º passo: A tira de papel deve ser dobrada ao meio sendo que a linha da dobra deve ser a base da saia da boneca (ou seja, a tira ficará dupla). Enrolar a tira dupla de papel em formato de “tubinho” (cilindro), sendo que cada volta deve ter a medida da ponta de um braço ao outro da boneca e o desenho inicial deve ficar na parte de fora do tubinho.

2º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a base (que é o que manterá as bonecas unidas), neste caso, a saia.

Obs: Antes de cortar as bonecas no cilindro, o papel pode ficar seguro utilizando clips.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: $\frac{bbb}{ppp}$

6) Recortar bonecas de papel do caso “ $\frac{bdb}{pqp}$ ”.

1º passo: Desenhar uma boneca inteira.

2º passo: A tira de papel deve ser dobrada ao meio sendo que a linha da dobra deve ser a base da saia da boneca (ou seja, a tira ficará dupla). A seguir, deve-se repetir o efeito sanfona utilizado nas atividades anteriores.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa, sem cortar a linha da dobra.

- Encontre os eixos de simetria da tira.
- Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 4: $\frac{bdb}{pqp}$

- 7) Colocando-se o espelho sobre uma figura da folha, conseguir que a figura seja vista por completo.

- 8) Obter, com ajuda do espelho, o eixo de simetria de cada par de figuras (todos os casos devem ter solução e nenhum eixo de simetria deve cortar as figuras).

Rotação

Nas atividades deste bloco trabalharemos com conceitos de rotações com centro em um dado ponto. São usados discos transparentes e canudos fixados em um centro para a realização das rotações. Os alunos devem ser levados a reconhecer as características das rotações de serem

isometrias (não mudam o tamanho nem a forma das figuras) e a ampliar seu vocabulário (rotação, centro de rotação, giro, movimento circular).

- 1) Sobre um disco transparente, em que está marcado o centro, fixar uma figura. Colocar o disco sobre uma folha de papel em branco e dar voltas, fixando-o por seu centro. Situar várias peças ao longo do percurso. Descreva o deslizamento.
- 2) Fixar uma figura, sucessivamente, por um vértice, outro ponto do contorno e um ponto interior e dar voltas em cada um desses casos, parando-as em diversas posições ao longo do percurso e colando peças iguais nos lugares correspondentes. Use os canudinhos e tachinhas como instrumentos de apoio.
- 3) Dadas as curvas a seguir, reconhecer quais delas podem ser rotacionadas com um ângulo de 90° e voltar a sua posição original.

- 4) Dados um ponto e um conjunto de figuras, identificar as que correspondem a uma rotação com centro no ponto dado. Use o compasso como instrumento de apoio.

a)

b)

- 5) Dados uma figura e um centro de rotação. Marcar o caminho seguido por vários pontos ao girar a figura. Fazê-lo primeiro sem mover a figura, depois comprovar a solução apontada através do deslizamento da figura (ou de certo ponto), utilizando alguma ferramenta auxiliar (compasso, por exemplo).

- 6) Dados grupos de figuras que se correspondem através de uma rotação e que formam parte da circunferência correspondente a essa rotação, indicar aproximadamente onde se encontram os centros de rotação. Determinar sem utilizar materiais auxiliares, mas utilizá-los em seguida para comprovar.

A partir da notação indicada no artigo “The Geometry of Folding Paper Dolls” de Brigitte Servatius, as atividades que realizaremos a seguir utilizam as seguintes generalizações:

bqb – Generaliza rotações.

... *b q b q b q b q b q b* ...

bqp – Generaliza rotação seguida de reflexão.

... *b q p b q p b q p* ...

7) Recortar bonecas de papel do caso “*bqb*”.

1º passo: Desenhar a boneca no hexágono, conforme esquema.

2º passo: Dobrar a tira de papel conforme o esquema abaixo.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: *bqb*

8) Recortar bonecas de papel do caso “*bqb*”.

1º passo: Desenhar a boneca conforme esquema.

2º passo: Dobrar a tira de papel conforme o esquema abaixo.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso: *bqb*

9) Recortar bonecas de papel do caso “*bqp*”.

1º passo: Dobrar a tira de papel conforme o esquema abaixo.

2º passo: Desenhar a boneca conforme esquema.

3º passo: O recorte deve ser feito sobre o contorno da boneca, eliminando a parte externa.

Verifique qual(is) tipo(s) de isometria(s) aparece(m) na figura resultante.

Caso 7:bqp