UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RENAN SANCHEZ VIESTEL

Atividades lúdicas e atividades algébricas: uma introdução ao uso de
letras nas aulas de matemática

Programa: Mestrado Profissional no Ensino de Matemática

Orientadora: Prof^a. Dra. Martha Salerno Monteiro

São Paulo

2016

RENAN SANCHEZ VIESTEL

Atividades lúdicas e atividades algébricas: uma introdução ao uso de
letras nas aulas de matemática

Esta é a versão original da dissertação elaborada
pelo candidato Renan Sanchez Viestel, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

São Paulo

2016

AGRADECIMENTOS

Todos aqueles que passam por nossas vidas contribuem um pouco para aquilo que nos tronamos. Se formos responsáveis por aquilo que cativamos, também somos produto de tudo aquilo que nos cativou.

De forma geral gostaria de agradecer amigos, colegas de trabalho e familiares por toda compreensão e apoio. Começo com um discurso generalista, pois, sei que será impossível citar todos que merecem ser citados. Mas o que é a vida se não uma constante busca pelo impossível?

Gostaria de agradecer ao colégio Dom Bosco Limão que me abriu as portas não somente para esta pesquisa, mas me deu a primeira oportunidade como educador, sendo fundamental no gosto que desenvolvi pela minha profissão. Agradeço também ao time de professores (Renan de Oliveira Souza, Fabiana Souza, Faberson Luis e Natali Costa), com os quais muito aprendi, e minha coordenadora e amiga Vanessa Pereira (Van) que sempre apoiou o projeto e foi fundamental para a consolidação do mesmo.

Os colégios Antonietta e Leon Feffer (ALEF) e Pentágono também tiveram papel importante para a realização desse trabalho, contribuindo com ideias e principalmente com a compreensão pelo momento delicado que passamos ao escrever uma dissertação. Fica meu “muito obrigado” aos coordenadores e amigos: Daniella Molina, Adriana Costa, Américo Santos, Rogério Giorgion, Daniela Rehfeld, Krishna Tavares, Simone Fridman Assayag e Aline Leite.

Aos atuais colegas de trabalho gostaria de agradecer as discussões, formais e informais, que contribuíram de forma significativa para o trabalho, pois saúde mental também é importante. Obrigado Diego Mantoanelli, Décio Queiroz Jr., Leandro Catrocchio, Bruno Alvarez, Lucas Riello, Nicolas Winck, Mariana Kaufmann e Denis Miguel Rocha.

Também gostaria de agradecer a minha orientadora e amiga Martha Salerno Monteiro que, além de responsável por melhorar o trabalho a cada dia, se mostrou uma pessoa preocupada comigo, entendendo minhas dificuldades e não medindo esforços para que esta dissertação se tornasse possível.

Não posso deixar de fora meus amigos do cotidiano, que lidaram com os “nãos” impostos pelas responsabilidades e souberam criar momentos alternativos para estarmos juntos. O apoio de vocês foi fundamental, obrigado Rodolfo Tozi, Lucas Coquenão, Augusto Rodrigues, Júlio Cesar, Aline Grifante, Jéssica Quinalha, Sara Ramos, Bruno Neves, José Gabriel Dellamano, Juliana Marin, Aline Corona, Mayara Motta, Andreia Golbato e Marcello Silvestroni.

Aos meus amigos de faculdade só tenho a agradecer pelo companheirismo e incentivo. Sempre presentes nos momentos difíceis, foram vocês que fizeram da graduação e pós, momentos de alegria. Obrigado Rafael Serafim, Bruno Mendes, Thiago Picos e Artur Gaban.

Ao grupo Interpretar & Aprender agradeço por lutar por uma educação que enxerga o aluno como prioridade, desenvolvendo o prazer de aprender e criando espaços para pensar. Obrigado Paulo Gallina, Daniel Aida e Thiago Azevedo.

Neste parágrafo faço questão de agradecer duas pessoas que foram de crucial importância desde meu primeiro ano na faculdade até os dias de hoje. Thiago Peleias e Renan Marcel, muito obrigado por tudo, desde as caronas até a presença em momentos difíceis. Não exagero quando digo que as coisas teriam sido muito diferentes sem vocês.

Para minha família fica um pedido de desculpas, pois merecem uma dissertação como agradecimento. Muito obrigado pela compreensão, apoio e por estarem dispostos a tudo para me ajudar. Vocês são o motivo de minhas alegrias. Muito obrigado Pai (Rodemir Marim Viestel), Mãe (Elaine Celeste Urbanos Sanchez Viestel), Ana Paula Sanchez Viestel, Carlos José Sanchez, Jair Francisco Urbano Sanchez, Douglas Natis, Anitta Aiko Fukuda, Paulo Horikiri, Roberto Marin Viestel, Robson Marin Viestel, Alessandro Sanchez, Millena Sanchez.

Aos meus avós que sempre desejaram o meu melhor e se alegraram diante de minhas conquistas fica meu agradecimento e a vontade de fazê-los sorrir sempre. Obrigado José Roberto Viestel, Luzia Marin Viestel, Paco Urbano Sanchez e Dulce Brighi Sanchez.

Por fim quero agradecer àquela que me completa faz dez anos. Que entendeu desde o início a importância deste trabalho para mim e que suportou momentos de estresse, sempre me ajudando a dar o próximo passo. Seria impossível viver as coisas boas que vivo hoje sem você em minha vida. Muito obrigado por tudo Michelle Tiemi Horikiri.

RESUMO

VIESTEL, Renan Sanchez. Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. 2016. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Esta dissertação tem a intenção de apresentar uma sequência didática que foi aplicada para um grupo de alunos do Ensino Fundamental II com o objetivo de potencializar sua compreensão sobre a praticidade e conveniência da linguagem algébrica. A sequência didática é composta por atividades lúdicas e atividades algébricas que buscaram estimular que os alunos produzam notações e símbolos de forma autônoma, que fizesse sentido para eles, bem como instigar sua curiosidade, em um ambiente um ambiente que estimule a pensar e resolver problemas, onde a relação professor - aluno tenha como base a confiança e o respeito mútuo.

O desenvolvimento da pesquisa foi feito por meio de um estudo de caso. As atividades foram aplicadas para uma turma de 6º ano com a intenção de produzir significado para o conceito de incógnita. A análise da efetividade da sequência didática levou em consideração os aspectos particulares dos alunos e da escola, o campo semântico no qual os alunos trabalharam e os tipos de equação do primeiro grau com uma incógnita que os alunos conseguiram resolver.

A pesquisa nos permitiu concluir que o trabalho inicial de motivação e entendimento da linguagem algébrica facilita a aceitação, pelos alunos, do uso da letra no lugar de um número desconhecido, tornando-se um facilitador para o aprendizado de equações do primeiro grau.

Palavras-chave: Linguagem algébrica; equações; sequência didática; incógnita.

ABSTRACT

VIESTEL, Renan Sanchez. Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. 2016. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

This dissertation intends to present a didactic sequence that was applied to a group of students from Ensino Fundamental II (6th to 9th grades) in order to enhance their understanding of practicality and convenience of the algebraic language. The didactic sequence consists of recreational activities and algebraic activities, which seeks to stimulate the students to produce notations and symbols autonomously, in a way that makes sense for them, instigating their curiosity, in an environment that encourages to think and solve problems, where the teacher-student relation is based after trustfulness and mutual respect.

The development of this research was made through a case study. The activities were applied to a 6th grade class, in order to produce meaning to the concept of the unknown variable. The analysis of the effectiveness of the didactic sequence took into account the particular aspects of the students and the school, the semantic field in which they have worked and kinds of equations with one unknown variable they managed to solve.

The research allowed us to conclude that the initial work of motivating and understanding of the algebraic language facilitates the acceptance of the use of a letter instead of an unknown number, becoming a facilitator for learning first degree equations.

Keywords: Algebraic language, equations, didactic sequence, unknown variable.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Considerações preliminares	10
1.2	Objetivos	11
1.3	Contribuições	11
1.4	Organização do trabalho	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	Metodologia	13
2.2	Linguagem Algébrica	19
2.3	A importância da linguagem para o entendimento dos objetos matemáticos	24
2.4	Produção de significados e o Modelo Teórico dos Campos Semânticos	28
2.5	Atividades lúdicas no ensino de matemática	33
2.6	Interações sociais no ambiente escolar	37
3	ATIVIDADES LÚDICAS	40
3.1	Atividade 1 –Instruções de direção	40
3.1.1	Descrição	41
3.1.2	Análise	42
3.1.3	Conclusão	52
3.2	Atividade 2 - Cubo Mágico	55
3.2.1	Descrição	55
3.2.2	Resolução do cubo	57
3.2.2.1	Primeira Camada: característica das peças	58
3.2.2.2	Segunda camada: Introdução do algoritmo e notação	60
3.2.2.3	Terceira camada: Utilizando do algoritmo	62
3.2.3	Análise	65
3.2.4	Conclusão	70
4	ATIVIDADES ALGÉBRICAS	73
4.1	Descrição das atividades	73
4.1.1	Atividade 1 -Compactar a informação	74
4.1.2	Atividade 2 - Reescrever com símbolos um problema apresentado na língua materna	75
4.1.3	Atividade 3 - Contextualizar equações	75
4.1.4	Atividade 4 - Equações sem técnicas	76
4.2	Análise	76
4.3	Contribuições da atividade para o sétimo ano	90
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
5.1	Quadro geral da sequência didática	93
5.2	Concepções da Álgebra dentro das atividades trabalhadas	95
5.3	Sugestões para Pesquisas Futuras	97

Apêndice 1	A resolução completa do cubo mágico	98
Apêndice 2	As atividades lúdicas e algébricas	110
Anexo 1	Entrevista	116
Anexo 2	Documentos	119
	Referências bibliográficas	129

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1	Divisão em camadas	18
Ilustração 2	Mapa: Maria Clara	43
Ilustração 3	Mapa: Lucas Nojiri	49
Ilustração 4	Mapa João Vítor	50
Ilustração 5	Peças do Cubo	58
Ilustração 6	Divisão em camadas	59
Ilustração 7	Cruz pronta	59
Ilustração 8	Formando a cruz	59
Ilustração 9	Segunda camada	60
Ilustração 10	Apresentando as notações	61
Ilustração 11	Movimentos no cubo	61
Ilustração 12	Possíveis rotações para a face direita	62
Ilustração 13	Cruz da terceira camada	63
Ilustração 14	Topo da terceira camada sem laterais	63
Ilustração 15	Cantos da terceira camada	64
Ilustração 16	Meios da terceira camada	64
Ilustração 17	Explicação no encontro 1	66
Ilustração 18	Peças do cubo (resolução completa)	98
Ilustração 19	Cruz da primeira camada (resolução completa)	98
Ilustração 20	Formando a cruz (resolução completa)	99
Ilustração 21	Segunda camada (resolução completa)	99
Ilustração 22	Apresentando as notações (resolução completa)	100
Ilustração 23	Movimentos no cubo (resolução completa)	100
Ilustração 24	Possíveis rotações para a face direita (resolução completa)	101
Ilustração 25	Objetivo do algoritmo da segunda camada (resolução completa)	101
Ilustração 26	Aplicando o algoritmo da segunda camada (resolução completa)	102
Ilustração 27	Resultado do algoritmo da segunda camada (resolução completa)	102
Ilustração 28	Cruz da terceira camada (resolução completa)	103
Ilustração 29	Possíveis configurações antes da cruz (resolução completa)	103
Ilustração 30	Configurações impossíveis antes da cruz (resolução completa)	104
Ilustração 31	Orientação do cubo antes de fazer a cruz (resolução completa)	104
Ilustração 32	Aplicando o algoritmo para montar a cruz (resolução completa)	104
Ilustração 33	Topo da terceira camada sem laterais (resolução completa)	105
Ilustração 34	Possíveis configurações para o topo (resolução completa)	105
Ilustração 35	Possíveis configurações para o topo somente com a cruz (resolução completa)	105
Ilustração 36	Posicionamento do cubo para aplicar o algoritmo (resolução completa)	106
Ilustração 37	Aplicando o algoritmo (resolução completa)	106
Ilustração 38	Cantos montados (resolução completa)	107

Ilustração 39	Possíveis configurações antes de montar os cantos (resolução completa)	107
Ilustração 40	Aplicação do algoritmo para montar os cantos (resolução completa)	108
Ilustração 41	Variações do ultimo algoritmo (resolução completa)	109
Ilustração 42	Aplicando o ultimo algoritmo (resolução completa)	109

CAPÍTULO 1 - Introdução

Nosso interesse pelo tema sobre a introdução de símbolos na matemática escolar surgiu motivado por uma situação que aconteceu comigo em uma turma de alunos interessados em resolver o cubo mágico. Como se trata de uma resolução elaborada, o uso de notações específicas (e difíceis) para ajudar a lembrar os movimentos foi inevitável. Mas os alunos, do sexto ano, não se incomodaram com a situação.

Trabalharemos a concepção de pesquisa sobre ensino como a pesquisa sobre o modo de aprender, que tem em seu núcleo o objetivo de tornar o professor um profissional capaz de fazer escolhas para propor situações que possibilitem a construção do conhecimento.

A educação, como processo de formação, tem como características a constante quebra de paradigmas e mudanças de suas diretrizes. Atualmente um dos grandes objetivos vigentes é formar um aluno crítico capaz de atuar na sociedade. Para isso é preciso quebrar a tradição do “ensino bancário”, definido por FREIRE (2002), que se caracteriza por colocar o aluno como receptor do conhecimento, sendo um processo que não favorece o desenvolvimento de aspectos essenciais para a constituição do sujeito, como criatividade, iniciativa e segurança para produzir conhecimento.

Ao optar por se contrapor ao ensino bancário (caracterizado pela reprodução de ideias) e às consequências do mesmo, os profissionais da educação dão um passo no sentido do “pensar certo”, expressão também definida por Paulo Freire, atitude que leva em conta o bom senso e a boa vontade do professor na busca por se aprimorar e progredir como educador. Praticar o “pensamento certo” não é como seguir uma lista de itens, mas sim estar conectado com os alunos em sala de aula e buscar desempenhar o papel de educar da melhor forma possível, não resistindo às mudanças e dando prioridade ao aprendizado coletivo.

1.1 Considerações Preliminares

O presente trabalho propõe uma sequência de atividades que trabalhe a compreensão dos alunos para a necessidade da linguagem de símbolos no estudo da matemática, ao final focando na importância da incógnita para o estudo de equações.

As atividades pensadas para compor a sequência didática que apresentaremos estão divididas em duas categorias: atividades lúdicas e atividades algébricas.

Chamamos de atividade lúdica àquelas em que apresentamos ao aluno um objetivo diferente de aprender um conteúdo ligado a disciplina matemática, dirigindo o foco da turma para cumprir tarefas relacionadas a um jogo ou desafio.

Os títulos das atividades lúdicas são: instruções de direção; cubo mágico

As atividades algébricas por sua vez explicitam o conteúdo a ser trabalhado e para nós cumprirá o a função de produzir registros para a análise da sequência.

Os títulos das atividades algébricas são: compactar a informação; reescrever com símbolos um problema apresentado na linguagem materna: contextualizar equações: equações sem técnicas.

A elaboração dessas atividades teve como inspiração minhas experiências em sala de aula com turmas de 6º e 7º ano no ano de 2014. As dificuldades expressadas pelos alunos do 7º ano em trabalhar com uma sequência didática focada em técnicas e pouco contextualizada me moveu a pensar em uma sequência que valorize a construção histórica da álgebra.

A Matemática ensinada, principalmente a partir do sétimo ano, é impregnada de símbolos, que foram construídos ao longo dos séculos. As etapas dessa construção são por vezes ignoradas nas salas de aula e livros didáticos (TINOCO, 2003 p. 33)

A aplicação dessa sequência acontece em uma turma de 6º ano e buscamos com isso caracterizar uma experiência que possa contribuir para os cursos de outros professores.

1.2 Objetivos

A hipótese que se busca testar é que, ao passar pelo processo de sentir a necessidade, para depois definir uma sequência de símbolos, o aluno estará mais preparado para compreender o papel da incógnita dentro de uma equação, e a partir dessa compreensão, eliminar grande parte da mecanização que vem a se tornar um problema quando distante do significado.

1.3 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

Apresentar uma sequência didática, que mescla abordagens lúdicas com abordagens tradicionais, com o objetivo de chamar a atenção dos alunos para o papel da incógnita.

Discutir o conceito de produção de significados e campos semânticos e seus papéis no aprendizado do aluno, assim tratando um importante indicador da forma com que os alunos aprendem.

Apresentar conclusões sobre a aplicação da sequência didática em uma turma levando em consideração suas especificidades.

Com base nessa experiência, sugerir possíveis mudanças que possam potencializar uma futura aplicação das atividades.

1.4 Organização do Trabalho

O capítulo 2 apresenta a metodologia do estudo de caso, utilizada neste trabalho. Ainda nesse capítulo apresentamos o Modelo Teórico dos Campos Semânticos como ferramenta para entender os processos utilizados pelos alunos para resolver equações e discutimos a presença de atividades lúdicas no ensino de matemática. Também estabelecemos o que entendemos por linguagem algébrica e destacamos sua importância para estudar objetos matemáticos.

No capítulo 3 descrevemos as atividades lúdicas, suas aplicações e fazemos uma análise destacando objetivos atingidos e fatos inesperados. É importante dizer que dedicamos uma parte do capítulo a apresentar um resumo da resolução do cubo mágico, destacando a importância de algumas passagens e o motivo de escolhermos tal abordagem.

No capítulo 4 descrevemos e analisamos as atividades algébricas realizadas com os alunos. Analisamos também o impacto causado por essas atividades nas aulas posteriores da turma, com base no relato de seu professor.

CAPÍTULO 2 - Fundamentação Teórica

O currículo de Matemática do Estado de São Paulo é organizado em três grandes blocos temáticos: NÚMEROS, GEOMETRIA e RELAÇÕES. Este trabalho se desenvolve dentro do bloco dos Números, que possui como eixos centrais as noções de contagem, medida e representação simbólica, incluindo a representação algébrica das operações fundamentais.

Também incluímos no tema Números o estudo de suas representações algébricas, bem como das operações correspondentes, ou seja, a iniciação à Álgebra que se dá no Ensino Fundamental –Ciclo II, incluindo o estudo das equações. (SEE/SP, 2008, p. 40)

A iniciação à Álgebra tem se mostrado uma etapa delicada e alvo de muita discussão em reuniões de Ensino Fundamental II nas escolas em que lecionei. Por esse motivo, iniciei este estudo com o objetivo de pesquisar uma forma de introduzir a linguagem algébrica por meio de uma sequência didática que propicie a oportunidade de se perceber sua necessidade e importância, evitando processos mecânicos sem a devida compreensão de significados.

Na sequência veremos o conceito de Linguagem e a concepção de Álgebra. Também descreverei sobre algumas convicções que adquiri sobre elementos do cotidiano escolar, como a importância da relação professor-aluno e sobre a importância do uso de jogos no cotidiano infantil, na faixa etária dos alunos de sexto e sétimo anos, visando um aprendizado significativo.

2.1 Metodologia

Realizar uma pesquisa qualitativa no campo educacional pode ser uma tarefa difícil, pois existe uma série de perfis de alunos, inseridos em realidades diferentes e expostos a dinâmicas escolares variantes. Em muitas pesquisas de áreas voltadas para a educação, a metodologia do estudo de caso é utilizada para colher dados, inferir resultados e levantar novos questionamentos.

O estudo de caso se originou no campo da medicina, onde se acreditava poder apontar características de uma determinada doença observando uma quantidade pequena de pacientes. Quando estamos trabalhando com hipóteses que

buscam dados sobre a forma de aprender dos alunos de uma determinada série, não podemos dizer que o caso particular representa todos os casos possíveis, mas podemos levantar aspectos comuns e tirar conclusões sobre um contexto específico, considerando pontos válidos das hipóteses levantadas que podem ser aplicados em outros contextos, desde que suas particularidades sejam levadas em consideração.

Segundo PONTE (2006),

Na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projectos de inovação curricular, novos currículos, etc. (PONTE, 2006, p.3)

As três fases que caracterizam o desenvolvimento do estudo de caso são:

Exploratória: Nessa fase o pesquisador busca, por meio de entrevistas e observações, levantar objetos de estudo e conhecer particularidades do contexto em que sua pesquisa está inserida.

Sistemática: Esse momento consiste na coleta de dados, normalmente por mais de um meio, podendo contar com a observação como método.

Análise e interpretação: A última etapa visa analisar os dados colhidos, levando em consideração a realidade do caso em questão, mas sem deixar de observar aspectos e características que possam ser úteis em outros casos.

Uma das grandes críticas ao estudo de caso é sobre a dificuldade de fazer generalizações. É importante notar que não buscamos inferir sobre casos gerais, e sim pontuar as características sobre o caso estudado para que, em futuras pesquisas, o pesquisador decida sobre a relevância desse caso em seu estudo. João Pedro da Ponte defende que certas situações devem ser encaradas como particulares pela importância das relações humanas dentro da pesquisa, fazendo com que o estudo de caso seja mais apropriado do que uma abordagem que visa comprovar leis gerais.

...O problema é que a grande complexidade das situações educativas e o facto delas serem vividas por actores humanos com uma grande variedade de intenções e significados tem-se mostrado um terreno pouco propício a essa abordagem. Daí a pertinência da realização de investigação com outros objectivos, que não se propõe num ápice encontrar soluções para todos os problemas educativos nem formular e comprovar leis gerais que descrevam o funcionamento dos fenómenos, mas que vai a pouco e pouco acrescentando novos elementos que enriquecem o nosso conhecimento colectivo acerca desses problemas e fenómenos. (PONTE, 2006, p.15)

Quando estruturamos um estudo de caso, é importante definir o contexto em que a pesquisa será efetuada, bem como a história por trás do levantamento de hipóteses e constituição do planejamento.

O artigo de João Pedro da Ponte ainda descreve os três tipos de estudo de caso.

Os estudos de caso podem ter diversos propósitos. Como trabalhos de investigação, podem ser essencialmente *exploratórios*, servindo para obter informação preliminar acerca do respectivo objecto de interesse. Podem ser fundamentalmente *descritivos*, tendo como propósito essencial descrever, isto é, dizer simplesmente “como é” o caso em apreço. E, finalmente, podem ser *analíticos*, procurando problematizar o seu objecto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente. (PONTE, 2006, p.6)

Este trabalho tem a finalidade de estudar a forma com que uma sequência didática desenvolvida para alunos do 6º ano contribui para sua percepção do sistema de símbolos utilizados na matemática. As atividades têm o objetivo de proporcionar experiências em que o aluno vivencie a necessidade de um sistema de símbolos, compreendendo também a importância das etapas de aprendizado para dominar uma técnica de manipulação algébrica para resolver equações.

Ao fim do estudo, esperamos perceber como a compreensão da necessidade e significado da simbologia contribui para o desempenho dos alunos ao resolver uma equação. O fato de não trabalharmos as técnicas de resolução de uma equação nos dará ideia do momento em que a técnica passa a ser necessária. Outra questão que investigaremos é se a compreensão do sistema de símbolos auxilia na compreensão da necessidade de um contexto para dar significado à situação representada pela equação.

De acordo com minha experiência pessoal, intuo que a vivência de um processo histórico para a construção de um sistema simbólico e a apropriação da Linguagem algébrica tragam significativa contribuição para o aprendizado dos alunos. A intenção deste estudo de caso analítico é buscar compreender se tais processos podem influenciar na habilidade de resolver equações.

Para tanto definiremos níveis de complexidade para as equações de primeiro grau, variando desde o mais básico, com incógnita em apenas um termo e somente uma operação, como $x + 2 = 5$, até o mais complexo deste trabalho, com incógnita nos dois termos e três operações em cada termo, como em . A última atividade

proposta tem a intenção de pontuar em qual nível de complexidade cada aluno deste estudo de caso consegue trabalhar.

A fase exploratória deste estudo aconteceu no ano de 2014, por meio de observações de duas turmas, uma de 6º ano e outra de 7º ano da escola Dom Bosco Limão, no bairro Limão, na zona Norte de São Paulo.

Durante o trabalho com expressões algébricas, no 7º ano, percebi que muitos alunos não reconhecem x como uma incógnita a ser descoberta. Ao perguntar para a turma o motivo de somarem o número que multiplica a incógnita com o número após o sinal de mais, (como em $3x+4=7x$), a resposta foi instantânea, “primeiro multiplicamos para depois somarmos”.

Diante de tal situação, expliquei novamente o papel da incógnita e busquei desequilibrar as ideias adquiridas pela turma a partir da verificação do resultado obtido. Embora tal estratégia tenha funcionado para alguns alunos, constatei que o mesmo erro ainda permanecia, aparecendo também no estudo de equações. Depois de muito chamar a atenção na lousa acredito que os alunos que vinham errando passaram a automatizar a regra, sem de fato entender o que representa o x .

Para dar sentido ao conceito de incógnita, ao final dos exercícios comecei a substituir o valor encontrado para x no início da equação, para mostrar que de fato aquele valor satisfaz a equação, sempre frisando que esse passo a mais era somente uma verificação. Acredito que tal atitude tenha funcionado para alguns alunos em particular, mas percebi, ao recolher exercícios, que três alunos começaram a seguir os passos realizados na lousa, mesmo com resultados errados e, mesmo chegando a igualdades falsas nas verificações, achavam que tinham feito “igual ao que estava na lousa”. Questionei individualmente esses alunos sobre o motivo de fazer esse passo e todos responderam que isso era o certo porque estava assim nas correções, entretanto, fica claro que esses alunos estavam repetindo o procedimento sem a devida compreensão.

No meu entendimento, esse episódio mostra que existem alunos para os quais a explicação vinda de um professor que os coloca em um papel passivo, torna difícil a comunicação de ideias. Devemos levar em consideração também que os alunos estão no início do ciclo dois do ensino fundamental, onde colocamos independência sobre suas produções como uma de nossas prioridades, e é normal

que se apeguem aos registros da lousa como modelo a ser seguido. Acredito que tais esclarecimentos, como foram feitos por mim, sobre o papel da incógnita em uma equação, sejam importantes, servindo como uma forma de completar os conceitos formados pelos alunos que atingiram algum nível de compreensão. Porém, para aqueles alunos que não compreenderam, os recursos didáticos utilizados anteriormente não foram efetivos.

O entendimento dos alunos sobre os motivos pelos quais estudamos um determinado tópico pode fazer com que as resistências a aprendizagens sejam pouco a pouco quebradas, e dificilmente conseguiremos, apenas por meio de nossa fala, despertar essa compreensão.

É importante que os alunos vivenciem as necessidades e cheguem por si mesmos à conclusão de que é importante o estudo do objeto proposto. Coloco em foco a compreensão sobre as motivações de um estudo e o entusiasmo dos alunos, pois ao trabalhar exercícios que buscavam a conversão de uma expressão descrita em língua materna para a linguagem algébrica percebi indignação por parte dos alunos que afirmavam já saber a resposta sem precisar das “contas”. Nesse episódio fica clara a visão da álgebra como um obstáculo por parte dos alunos, como se até os problemas simples fossem complicados pelo excesso de regras e formalismo.

Enquanto observava essas dificuldades no 7º ano, o trabalho no 6º ano fluía muito bem e na última semana de aula do bimestre teríamos cinco aulas de 50 minutos sem a apostila, nas quais decidi trabalhar a resolução do cubo mágico.

A turma contava com 8 alunos, dos quais um já dominava o algoritmo que viria a ensinar, de modo que o coloquei como monitor para tirar dúvidas enquanto os outros praticavam. Para o algoritmo, utilizei o método por camadas presente na atividade 2. Em algum momento seria necessário definir símbolos para designar os movimentos de rotação a serem feitos, além de desenhos que representavam o cubo e suas cores.

Ilustração 1 -

Na primeira aula trabalhamos somente com a lógica das peças e os objetivos que devíamos atingir nas duas primeiras camadas, o que foi absorvido pelos alunos em tempo muito mais curto do que o esperado e antes do fim da aula já estavam praticando. Para a segunda aula já contava com o domínio da maioria dos alunos para as duas primeiras camadas, de modo que o aluno monitor ficou responsável por ir auxiliando duas meninas que tinham algumas dificuldades.

No fim da semana a maioria dos alunos conseguiu dominar o algoritmo, e aqueles que não dominaram conseguiam resolver, com certa dificuldade, quando tinham ao lado as anotações para apoio, fato que me chamou a atenção para o potencial de uma notação bem empregada.

Diante das dificuldades apresentadas pelo 7º ano e do trabalho com o cubo mágico no sexto ano, proponho uma abordagem lúdica seguida de atividades com o objetivo de destacar a praticidade de uma linguagem simbólica e o papel da incógnita dentro de uma equação. A elaboração e aplicação dessas atividades caracterizam a fase sistemática do estudo de caso.

As atividades elaboradas foram aplicadas em 2015, para uma turma de 6º ano que tem características semelhantes às da turma de 6º ano anterior, tais como mesma escola, mesmo perfil sócio-econômico e aproximadamente o mesmo número de alunos por turma. Para garantir algumas premissas importantes para a futura análise da pesquisa, trabalhei com o professor de matemática desses alunos, que se mostrou solícito e adaptou o planejamento de suas aulas de modo a acolher algumas restrições quanto à ordem em que os assuntos poderiam ser trabalhados. Por exemplo, ele não trabalhou operações inversas com os alunos antes de aplicar as atividades da pesquisa.

A coleta de dados foi feita em vídeo e também por registro de atividades entregues em papel.

Na fase de análise, o primeiro passo foi verificar se os alunos atingiram os objetivos das atividades propostas, olhando os registros em papel e complementando com observações obtidas a partir do vídeo.

2.2 Linguagem algébrica

Embora bem familiar, é difícil definir o conceito de comunicação por ele estar fortemente atrelado a diversos campos de estudos, entre eles o campo da linguística. Para que tenhamos um ponto de partida, podemos caracterizar a comunicação como o intercâmbio de informações entre dois indivíduos. Essa caracterização nos permite dividir o ato de comunicar em duas partes: a mensagem enviada e a mensagem recebida. Avaliamos a eficácia da tentativa de comunicação a partir da proximidade das mensagens presentes nas duas partes. Em vista disso, é razoável supor que o código utilizado nessa interação seja no mínimo familiar a ambos os indivíduos.

Por sua vez, a linguagem é um instrumento com fins comunicativos, definida como sendo um sistema de signos inseridos em um contexto. Tal definição diferencia linguagem das noções de língua e código, já que estes são independentes da contextualização. Ela é importante para o presente trabalho, pois trabalharemos dentro do contexto escolar, com crianças que vêm utilizando um sistema de signos, em constante expansão, para a comunicação dentro das aulas de matemática.

O acréscimo de símbolos ao sistema de signos ocorrerá conforme os objetos matemáticos estudados ganharem complexidade. Por exemplo, os alunos do Ensino Fundamental I usam sinais para indicar adição, subtração, multiplicação, divisão, igualdade, ordem de operações e outros, enquanto que no Ensino Fundamental II, já são utilizadas letras para, por exemplo, simbolizar números desconhecidos ou grandezas que variam.

A partir dos conceitos trabalhados, podemos entender as aulas de matemática como momentos dedicados a discussões sobre objetos matemáticos, nos quais os professores e alunos constroem e utilizam uma linguagem que

favorece tais discussões. O uso de um sistema linguístico, desenvolvido ano a ano na escola para comunicar ideias, conceitos e para explicitar formas de pensar, nos permite caracterizar a aula de Matemática como um discurso, no sentido apresentado por Luís Menezes.

...Neste sentido, discurso é bastante diferente de comunicação, embora, por vezes, se confundam inexplicavelmente. Assumindo, assim, o discurso como o uso de um sistema linguístico em contextos próprios, do ponto de vista da Pragmática, refere o modo como os significados são atribuídos e trocados pelos interlocutores em situações concretas e devidamente contextualizadas... (MENEZES, 2000, p. 4)

Quando nos deparamos com os termos “aula de matemática” e “discurso” na mesma sentença, logo associamos a uma aula expositiva. Mas esta é somente uma estratégia de aula, que juntamente com as aulas dialogadas, estudos dirigidos, resolução de exercícios e aulas investigativas, se apresentam como discurso, uma vez que têm a intenção de comunicar e construir (ou dar continuidade à construção de) um sistema de signos.

O entendimento da definição de linguagem nos auxilia a compreender o que buscamos dizer com a expressão “linguagem algébrica”. Naturalmente concluímos que os códigos e símbolos matemáticos utilizados em generalizações e fórmula constituem uma linguagem dentro do contexto da Álgebra. Mas o que é Álgebra?

Começaremos por observar a passagem do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II, um momento de bastante expectativa nas escolas de um modo geral. Os alunos que ingressam no sexto ano encontram uma rotina diferente e mais complexa daquela que conheciam dentro da escola. Há mais professores, mais disciplinas e um ritmo de estudos mais intenso. A Matemática nessa série começa a se fragmentar e nomes como “Álgebra” e “Geometria” podem aparecer, anunciando particularidades dentro de cada área de estudo dentro da Matemática.

Segundo USISKIN (1995), o aluno começa a estudar Álgebra a partir do seu primeiro contato com as letras, aprendendo como manipular e operar, percebendo a álgebra como uma aritmética generalizada. Porém as letras aparecem no cotidiano escolar em contextos diferentes, desempenhando funções pertinentes a esses contextos.

Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de problemas, mas também é mais, ela é mais que isso. Ela

fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e compreensão das estruturas matemáticas. Dados esses trunfos e a matematização crescente da sociedade, não é de surpreender que a álgebra seja hoje a área-chave de estudo da matemática da escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo. (USISKIN, 1995, p. 21).

De acordo com TINOCO (2011), que teve como base os trabalhos de Usiskin e Fioentini, a álgebra pode ser caracterizada em quatro contextos: álgebra como generalizadora da aritmética, álgebra funcional, álgebra das equações e álgebra estrutural.

Introduzimos a letra no contexto da Álgebra como generalizadora da aritmética, por exemplo, para explicitar a validade da propriedade comutativa da adição para todos os números, " $a + b = b + a$ ", ou para representar um número par qualquer por $2k$, para k natural. De acordo com TINOCO (2011, p. 7) "Neste sentido a equação é generalizadora, pois pode modelar muitos problemas distintos, desde que tenham a mesma estrutura matemática".

É comum utilizarmos exemplos para que os alunos entendam a generalização a partir de alguns casos. Nesse momento, muitos alunos não entendem o motivo do uso de letras, pois já conhecem a propriedade de uma maneira informal, entendendo a informação sem a necessidade da utilização de símbolos para representar números ou ideias.

Também é nesse contexto que podemos aprimorar o desenvolvimento da percepção de padrões. Uma preocupação que surge é sobre a escolha de uma forma para introduzir essa notação, usando letras no lugar de números para fazer generalizações, para os alunos.

Na concepção da Álgebra funcional, a letra tem o papel de variável, que pode assumir valores dentro de um conjunto predeterminado. Embora o conceito de função seja explicitado apenas no 8º ano, a dependência entre duas variáveis começa a surgir antes, quando trabalhamos algumas fórmulas de perímetros e áreas, de triângulos e quadriláteros. Por exemplo, para o cálculo da área de um paralelogramo, $A = b \cdot h$, o valor da área é modificado se os valores da base e da altura forem modificados.

Usiskin classifica esse contexto da Álgebra como "relação entre grandezas". As relações entre grandezas são um tipo de função, enquanto as funções nem sempre são relações entre grandezas.

O exemplo a seguir mostra algumas diferenças entre a Álgebra como generalizadora da aritmética e a Álgebra funcional.

Problema 1. Seis pessoas da família Silva foram ao cinema. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes, e que estudante paga metade do preço de um ingresso.

Qual a expressão que fornece a quantia total gasta com os ingressos, em função do preço de cada ingresso, nesse cinema?

Quanto o grupo todo pagaria se o ingresso do cinema custasse R\$16,00?

O total a pagar pelo grupo é mais ou menos do que pagariam 5 pessoas não estudantes?

Comentários. A resposta do item (a) exige a tradução de uma situação para a linguagem Algébrica para chegar na igualdade $T = 3b + \frac{3b}{2}$, em que T representa o valor total a ser pago pela família, em função do valor b do ingresso. Note que neste momento, estamos indicando quais contas devem ser feitas para o cálculo do valor total a ser pago, caso soubéssemos o valor do ingresso. Por isso, trata-se do contexto da Álgebra generalizando a aritmética.

Para responder aos itens (b) e (c) precisamos explorar a relação de dependência entre b e T , fazendo uso da Álgebra funcional.

Na Álgebra das equações, a letra tem o papel de incógnita de uma equação. A apresentação das equações e do tratamento algébrico é feita, em geral, no 7º ano do Ensino Fundamental II, e nesse momento um dos desafios do professor é desenvolver sequências didáticas que proponham um caminho no qual as técnicas para resolver equações sejam trabalhadas de forma gradual.

“Nessa concepção, destacam – se os processos de resolução de equações. Há um ou mais valores que as variáveis (incógnitas) devem assumir e queremos determina – los para tornar a equação verdadeira (uma identidade). Essa é a dimensão que mais se trabalha, em geral, do sétimo ao nono ano” (TINOCO, 2011, página 9)

Vejamos uma nova versão do problema 1, exemplificando o contexto da álgebra das equações.

Problema 2. A família Silva gostaria de ir ao cinema, mas eles só podem gastar 54 reais. Eles vão olhar na internet e pesquisar os preços de ingresso. Qual o valor máximo de ingresso que eles podem pagar?

Comentário. Neste caso, o aluno precisará resolver a equação $3b + \frac{3b}{2} = 54$, utilizando a letra b como incógnita, em vez de montar a equação ou substituir um valor numérico.

A concepção da Álgebra estrutural traz as letras como símbolos abstratos a serem manipulados de acordo com regras estabelecidas em axiomas.

Tomando como exemplo um exercício cujo objetivo é fatorar a expressão $x^2 + 2bx + b^2$, podemos comparar o papel da letra na Álgebra estrutural com o papel da letra nas outras concepções.

As letras nesse caso são somente símbolos que satisfazem determinados axiomas. Não temos uma relação ou função, pois as letras não estão presas a um contexto. Também não se trata de uma incógnita, pois não temos uma equação. Por fim, não buscamos generalizar um modelo e nem traduzir um problema.

Durante todo o Ensino Básico, essa é a concepção mais utilizada em sala de aula, sendo mesmo supervalorizada. Essa postura é grande parte das vezes prejudicial aos alunos que, geralmente, não consegue ver sentido no arsenal de técnicas ensinadas, nem sabem como utilizá-las para abordar situações novas ou mesmo já vivenciadas por ele.” (TINOCO, 2011, página 11”)

A álgebra estrutural é muito importante para a Matemática e também para o Ensino Básico. É preciso dar atenção aos diferentes papéis das letras nas diferentes concepções de Álgebra. Isso pode evitar a mecanização de procedimentos que ocorre quando o aluno não entende o objetivo de um objeto de estudos.

A aula de matemática, como todo discurso, pressupõe clareza na linguagem adotada. Para que exista essa clareza, o professor precisa ter consciência do papel da letra dentro da concepção de Álgebra trabalhada para que suas aulas ajudem a dar significado à Linguagem Algébrica.

Este trabalho se debruça sobre os contextos da Álgebra como generalizadora da aritmética e álgebra das equações, e dentre outros objetivos busca fazer com que o aluno sinta a necessidade de técnicas para resolver equações.

2.3 A importância da linguagem para o entendimento dos objetos matemáticos

O discurso pode se transformar em uma barreira ao aprendizado, prejudicando o entendimento dos conceitos trabalhados em matemática. A fim de entender quais problemas podem surgir por causa de falhas na comunicação, vamos primeiro caracterizar as ideias matemáticas e o papel dos símbolos na apresentação e desenvolvimento das mesmas.

Raymond Duval [4] traz o exemplo da cadeira para contrapor a natureza dos objetos matemáticos. A cadeira pode ser representada por meio da escrita da palavra “cadeira” ou por meio de um desenho ou foto, mas de fato só conheceremos todas as propriedades da cadeira, como textura e massa, ao trabalharmos com a própria cadeira. Os objetos matemáticos por sua vez estão em um campo abstrato, onde podemos falar do objeto em estudo e observar características por meio de representações, mas não podemos manipular o objeto de forma concreta.

As ideias matemáticas não são da mesma natureza dos objetos concretos, como a cadeira no exemplo anterior, onde temos apreensão por meio dos sentidos. Entretanto, podemos explorar propriedades. Tomemos, por exemplo, o número 15. Sabemos representá-lo de várias maneiras, como por exemplo, pela palavra QUINZE, pela notação decimal 15 ou romana, XV. A criança aprende a contar até 15, reconhecer 15 objetos, 15 reais. Ampliamos seu conhecimento se observarmos que se trata de um número ímpar, múltiplo de 3 e de 5, divisor de 30, fazemos sua representação na reta. Com isso, o objeto "número 15" fica mais familiar.

Ao assumirmos a existência da Linguagem Algébrica, devemos nos manter atentos ao fato de que, como em qualquer linguagem, trabalhamos com os mais variados níveis de elaboração, desde a linguagem em sala de aula, com mais elementos da língua natural, até a linguagem utilizada por matemáticos profissionais, cercada de formalismo e rigor. Portanto, ao pensarmos a aula de matemática como

um discurso, a aliança dos signos, figuras e expressões com a língua materna estabelecem o meio pelo qual pretendemos comunicar as ideias acerca dos objetos matemáticos e, por consequência, determinam a linguagem usada por aquele grupo.

Tendo como ponto de partida o estudo de um objeto matemático como a exploração de suas diferentes propriedades, podemos entender a necessidade de uma linguagem que seja prática e intuitiva. Seria possível trabalhar equações, funções e operações matemáticas utilizando somente a linguagem materna, mas exigiria um esforço muito grande do estudante para compreender o problema e um esforço ainda maior para registrar cada etapa de resolução. Por exemplo, é mais trabalhoso entender a sentença “a raiz quadrada de 256 é igual a 16” do que $\sqrt{256} = 16$.

Historicamente, a linguagem algébrica se desenvolveu a partir da necessidade de simplificar o entendimento das propriedades dos objetos matemáticos, afim de permitir uma concentração maior para o pesquisador lidar com o objeto.-Por outro lado, na escola, a simples imposição dos símbolos não legitima o estudo da linguagem algébrica, podendo deixar o aluno com a sensação de que a matemática é um jogo de regras.

Segundo PANOSSIAN (2008), a linguagem algébrica não se desenvolve de forma natural e espontânea, sendo consequência de provocações de diversas origens.

...O desenvolvimento da linguagem algébrica não é algo tão natural quanto se queira supor. Ele ocorre também a partir de pressões sociais e necessidades humanas de cada época. Considerando o uso de palavras, letras, signos e símbolos, é possível traçar um caminho da linguagem algébrica... (PANOSSIAN, 2008, p. 8)

TINOCO (2011) faz um breve resumo da evolução histórica da linguagem algébrica e afirmam que há 3 estágios: retórico, sincopado e simbólico.

No estágio retórico, que compreende as antigas civilizações dos egípcios, babilônios e gregos, foi um período em que não se fazia uso de símbolos nem de abreviações e as expressões eram escritas exclusivamente com palavras.

No estágio sincopado, compreendido entre os séculos II e XVI, as palavras foram sendo substituídas por abreviações e alguns símbolos.

Já no estágio simbólico, durante os séculos XVI e XVII, o intercâmbio de ideias facilitado pelas grandes viagens proporcionou muitos avanços tecnológicos, culturais e científicos. Nessa época, o sistema de numeração indo-arábico foi aceito pelos europeus (que antes usavam o sistema romano). Além disso, a invenção da imprensa facilitou a padronização do simbolismo. (TINOCO, 2011, p. 34)

PANOSSIAN (2008) ainda caracteriza a Álgebra como um campo de estudo que tem suas origens em necessidades da humanidade ao longo da história e destaca a importância de situações problemas com o objetivo de trazer essa vivência aos alunos.

Considerando que o campo da álgebra, como o de outros conhecimentos matemáticos, foi elaborado historicamente pelos indivíduos para entender as necessidades postas pela experiência prática e no seio da própria ciência, e que ensinar álgebra implica mediar a relação entre o sujeito e o conhecimento algébrico, podemos dizer que a apropriação desse conhecimento orientará e mediará a relação do sujeito com o mundo.

Assim, propostas de situações problemas que gerem no aluno a necessidade do pensamento e da linguagem algébrica encaminhando para o desenvolvimento de conceitos científicos do movimento do pensamento teórico, devem ser preocupação do professor. (PANOSSIAN, 2008, p. 9)

O professor deve procurar dar significado à linguagem algébrica para que os alunos compreendam a Matemática de modo abrangente, rico em ideias, com sentido histórico, evitando regras e procedimentos sem sentido e facilitando um aprendizado livre de regras e manipulações.

Considerando o desenvolvimento da linguagem algébrica em nossas salas de aula, verifica-se que os alunos não têm oportunidade de vivenciar a fase retórica (verbal) e tão pouco a fase sincopada.

De fato, quando se inicia o estudo da Álgebra no Ensino Fundamental, há, em geral, uma imposição rápida e precoce do uso de símbolos. É como se o uso da linguagem corrente tivesse que ser quase totalmente desprezado. Esse fato contradiz a evolução histórica da própria Matemática, construindo, talvez, uma das principais causas das dificuldades dos alunos para a compreensão da simbologia algébrica nesse nível de ensino. (TINOCO 2011, página 36)

GOMES (2013) enumera três fatores principais para os erros frequentemente cometidos por alunos que estão em processo de transição da aritmética para álgebra:

1. A natureza e o significado dos símbolos e das letras,
2. O objetivo da atividade e a natureza das respostas em álgebra,
3. A compreensão da aritmética por parte dos estudantes.

Para este estudo, focaremos no primeiro aspecto e começaremos por citar dois exemplos de erros muito comuns constatados pelo grupo de álgebra do projeto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SESM) em uma pesquisa feita no Reino Unido, no período de 1980 a 1983, com o objetivo de compreender a natureza dos erros mais comuns cometidos por alunos de 13 a 16 anos no estudo de álgebra.

GOMES (2013) traz um exemplo de erro na resolução de uma equação que caracteriza a falta de entendimento dos significados dos símbolos.

Ao resolver a equação $\frac{3}{2+x} + \frac{7x}{x-1} = 3$, o aluno segue escrevendo $3 \cdot (x - 1) + 7x \cdot (2 + x) = 3$. Segundo GOMES (2013), o aluno não entende que “As equações, diferentemente das expressões aritméticas anteriores, não são afirmações verdadeiras universalmente, isto é, o sinal “=” não conecta identidades, mas obriga a incógnita a tomar um valor específico”.

O distanciamento dos significados dos símbolos resultou em uma abordagem mecânica, onde existem regras pré-definidas e truques para manipular seus elementos. No exemplo o aluno manipula o lado esquerdo e não leva em consideração o direito, perdendo significado de equivalência do sinal de igual.

Outro erro trazido no trabalho de Gomes (2003) é o que o aluno traz $7x$ como resultado da operação $3x + 4$, fazendo prevalecer o tratamento aritmético em que o sinal de mais se refere a junção, sem considerar a incógnita.

Assim como na álgebra, nos outros campos da matemática, a confusão feita entre linguagem algébrica e os significados que ela expressa contribui para desvirtuar o que de fato é o estudo dos objetos matemáticos. Por esse motivo, é necessário que, em algum momento, nós professores nos dediquemos a introduzir os símbolos e a linguagem matemática, como destacado por PANOSSIAN (2008).

Compreender como o sujeito se apropriará dessa linguagem, em tal estágio de desenvolvimento e com alto grau de abstração envolvida, é fundamental. Recorrer ainda uma vez para a unidade entre o lógico e o histórico possibilita compreender o movimento do pensamento na apreensão de tal linguagem. Considerando que a linguagem algébrica reflete o movimento do pensamento algébrico, existe a preocupação em que na falta dessa linguagem tal pensamento encontre dificuldades para ser refletido. (PANOSSIAN, 2008, p. 10)

2.4 Produção de significados e o Modelo Teórico dos Campos Semânticos

Uma parte importante da fundamentação teórica deste trabalho para o estudo sobre a produção de significados foi o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS)

LINS (2012, p. 17) define Campo Semântico como sendo “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade”, ou seja, é um processo que cria condições para sua própria transformação, na produção de um significado. Por ser um processo, está acontecendo, se transformando a cada afirmação.

Nesse modelo, significado é aquilo que o sujeito pode dizer e efetivamente diz sobre um objeto. Por exemplo, um aluno que responde à pergunta “o que é uma fração?” como “É a parte de um todo”, significa a fração a partir de um desenho dividido em partes, enquanto o aluno que responde “É uma divisão de dois números inteiros”, significa a fração a partir da álgebra e da definição de números racionais.

A relação do sujeito com aquele que ouve e interfere (interlocutor) forja os significados a partir das trocas de informação e da capacidade de sintetizar e expor aquilo que se enraíza no pensamento. É dentro dessa ação de produzir significados que o aluno constitui os objetos matemáticos.

Segundo SILVA (2003), a produção de significado conta com a articulação de três categorias: o novo, a justificação e o dado. A fala de um sujeito que tenta resolver um problema se articula para expor o novo, aquilo que quer descobrir, deixando traços daquilo que toma como dado, aquilo que aceita como pressuposto. Diante da justificação, a pessoa envolvida em explicar a resolução de um problema faz ligações entre o dado e o novo.

Antes de nos debruçarmos sobre a importância do MTCS para a análise da aplicação da sequência didática presente neste trabalho, temos que deixar claro dois conceitos que se relacionam na atividade de produzir significados: o conceito de núcleo e de estipulações locais.

O MTCS define estipulações locais como sendo afirmações tomadas como localmente válidas dentro de um contexto, sem a necessidade de justificar. Por

exemplo, quando trabalhamos dentro do contexto dos números naturais, assumimos que em uma subtração o subtraendo é menor que minuendo, pois esperamos um resultado natural.

Nas séries iniciais do Ensino Fundamental II é muito comum trabalharmos em contextos restritos, pois construímos o conjunto dos números naturais, para depois ampliar para os inteiros, racionais e reais. Assim sendo, é esperado que as aulas sejam carregadas de estipulações locais que aparecem na fala do professor e dos alunos. Ao conjunto de estipulações locais, chamaremos de núcleo.

Diante dessas definições, caracterizamos o campo semântico como a atividade de produzir significados a partir de um núcleo.

Como exemplo, tomaremos um contexto de aula no sexto ano. Quando os alunos aprendem expressões numéricas com as quatro operações no conjunto dos números naturais, trabalham a partir de um núcleo constituído de estipulações locais como:

- não temos resultado não inteiro na divisão.
- não temos um subtraendo maior que o minuendo na subtração.
- não temos um número primo dentro da raiz quadrada.

Esses alunos trabalham em um núcleo construído na aula a partir de estipulações locais restritas aos números naturais. O professor não precisa explicitar essas afirmações, pois os exercícios e toda a discussão não contemplam números decimais, negativos ou irracionais. A experiência do aluno naquele momento o conduz a pensar que cometeu um erro caso uma das estipulações locais não seja respeitada.

O núcleo está na categoria dos dados, naquilo que o aluno toma como ponto de partida para estruturar seu raciocínio e articular, a fim de chegar a conclusões sobre um problema ou desafio. Apesar de ser caracterizado como um conjunto de estipulações locais, o núcleo está relacionado à atividade na qual o aluno está sendo submetido, sendo desfeito ao fim dessa atividade.

O caráter mutável da ideia de núcleo pode ser exemplificado quando começamos a estudar números inteiros no sétimo ano do Ensino Fundamental II. ~~No~~ Até o sexto ano, os alunos trabalham apenas com números positivos, de forma que

não há necessidade de uma justificativa para considerar errado um raciocínio que conduza a uma subtração com minuendo maior que subtraendo, por exemplo. A partir do aprendizado sobre o conjunto dos inteiros, com exemplos de situações-problema de débito e crédito, o resultado negativo passa a ser reconhecido pelos alunos, e os pensamentos podem ser estruturados a partir de outro núcleo. Isso não quer dizer que os alunos sempre aceitarão resultados negativos. Se forem desafiados com problemas sobre quantidade de pessoas, por exemplo, rejeitarão resultados negativos novamente.

Tem uma coisa interessante: toda produção de significados envolve perda de significados. Num sentido muito preciso: para produzir significados é sempre em relação a um núcleo. Mas toda vez que você estabelece um núcleo, você deixa coisas de fora. No sentido de que tem coisas para as quais você não pode produzir significados. A produção de significados estabelece um recorte, uma categorização e, portanto, ela deixa coisas de fora. (LINS, 1996, p. 76)

SILVA (2010) utiliza como exemplo quatro possíveis campos semânticos de operação para alunos que estão aprendendo equações. Esses exemplos serão tomados como base para este estudo com a finalidade de verificar se as atividades são suficientes para levar os alunos operar em algum campo semântico sobre o objeto matemático equação.

Para entendermos os exemplos de campos semânticos, analisaremos uma situação fictícia, encontrada no trabalho de Amarildo, em que quatro alunos explicam seus raciocínios sobre a forma de resolver a equação $3x + 10 = 100$.

Aluno 1: “Ora professora, de um lado tem $3x + 10$ e do outro tem 100 e eles são iguais, se eu tirar dez de cada lado continua equilibrado. Daí fica $3x = 90$ e, dividindo dos dois lados por 3, a resposta é $x = 30$.”

Aluno 2: “Um todo de valor 100 é igual a três partes iguais de um valor que eu não conheço e de uma parte de valor 10. Seu eu tirar 10 o que sobra de um lado é $3x$ e do outro 90.”

Aluno 3: “Eu sei que x é um número secreto. Multiplico por 3 e somo 10 ao resultado da multiplicação. O resultado final é 100. Então eu tenho $3x = 100 - 10$ e...”

Aluno 4: “Eu tenho três vezes x , mais 10 é igual a 100. Eu sei que x é um número. Somando -10 aos dois lados da igualdade, continua igual, porque esta é uma propriedade da igualdade numérica. Então fica ...”

No caso do Aluno 1, a resposta está fundamentada na afirmação de que podemos realizar a mesma operação com o mesmo número nos dois lados da igualdade, a fim de manter o equilíbrio. Nesse caso, o Aluno 1 opera na perspectiva da equação como uma balança, a qual chamaremos de Campo Semântico da Balança.

O Aluno 2, por sua vez, opera em um núcleo construído a partir das relações parte e todo, no qual perguntas como “o todo é sempre maior que a parte?” e “a soma das partes constitui o todo?” não precisam ser justificadas, pois faz parte do que ele toma como verdade. Chamaremos de Campo Semântico do Todo e Parte, a produção de significado a partir desse núcleo.

Na justificação do Aluno 3 notamos a ideia de desfazer o feito, como se a incógnita fosse um número que ele ainda não conhece, que passou por uma sequência de operações até chegar em 10. Esse raciocínio leva o aluno a tentar desfazer as operações para voltar no número inicial. Chamaremos esse caso de Campo Semântico da Máquina estado-operador.

Por fim, o Aluno 4 trabalha a partir das definições puramente algébricas, citando propriedades da igualdade. Chamaremos a produção de significado sobre esse núcleo de Campo Semântico do Pensamento Algébrico.

A intenção de entender o núcleo no qual os alunos operam e por consequência o campo semântico de determinada atividade é conhecer a natureza dos possíveis erros e intervir de forma efetiva. Para isso destacaremos algumas concepções e conceitos assumidos no presente trabalho.

Por trás da ideia de campo semântico temos uma concepção de pensamento diferente da concepção construtivista Piagetiana, que trabalha com o pensamento estruturado por conceitos. Para tratar dos campos semânticos trabalhamos com a concepção de que o pensamento é constituído de objetos e os objetos são constituídos pela produção de significados. Assim podemos observar os erros cometidos pelos alunos e entendê-los a partir dos núcleos constituídos em vez de simplesmente atribuímos a conceitos errados.

Um aluno de sexto ano que responde que não existe a raiz quadrada de 2 não apresenta falha na formação de conceitos. Ele pode entender o que significa a raiz quadrada e mesmo assim, por operar em um núcleo gerado dentro de um

contexto de números naturais, não consegue imaginar um caminho para resolver o problema.

Para entendermos diferença das concepções da estrutura de pensamento vamos analisar duas citações de Lins que aparecem em SILVA (2003).

[...] o significado de um objeto não é o conjunto de todas as coisas que possivelmente poderíamos dizer sobre ele (uma noção que beira perigosamente o idealismo), e sim o conjunto das coisas que efetivamente dizemos sobre ele. “Massa” pode ser vista como um objeto, por exemplo, no interior de uma atividade na qual enunciamos que a “massa de um corpo varia com a velocidade desse corpo”. Se em outra atividade enunciamos (newtonianamente) que, “a massa de um corpo é constante”, certamente o objeto é outro. (LINS, 1996, p.140)

Dessa forma, a noção de conceito e de significado de objeto se diferencia em um ponto muito importante para os objetivos das atividades que seguirão neste trabalho, pois o pensamento estruturado pelos significados dos objetos nos permite agir sobre o núcleo em que o sujeito opera e não sobre o conceito previamente definido.

[...] a noção de conceito pensa em caracterizações estáveis de objetos (e de preferência uma caracterização justa, minimal, como no caso de nossos conceitos científicos), os objetos enquanto noção básica são constituídos de forma redundante, muitas vezes, e são instáveis, na medida em que dentro de uma atividade é possível –e comum –que novas demandas ou condições se apresentem, que vínculos antes distantes se tornem próximos. (LINS, 1996, p.140)

Diante das definições de significado de objeto e de campo semântico, podemos definir dois tipos de erros. O obstáculo epistemológico e o limite epistemológico.

O obstáculo epistemológico é “o processo no qual um aluno, operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação mas não produz”. Enquanto o limite epistemológico é “a impossibilidade do aluno em produzir significado para uma afirmação.”

Tomando a equação $3x + 100 = 10$ como exemplo, temos que alunos que operam no Campo Semântico da Balança e no Campo Semântico do Todo e Parte, se encontram diante de um limite epistemológico. No primeiro caso, o primeiro termo da igualdade já conta com 100, qualquer valor colocado no x só aumentaria o valor desse termo, não chegando no 10, enquanto no segundo teríamos uma parte superando o todo.

Para esses alunos, a solução só será possível com uma mudança de campo semântico, que pode ser induzida pelo professor ou ocorrer pela própria ação do aluno.

Para alunos que operam no Campo Semântico da Máquina estado-operador ou no Campo Semântico do Pensamento Algébrico, as dificuldades podem ser consideradas obstáculos epistemológicos, pois o campo semântico não é um limitante.

É importante termos clareza de que o limite epistemológico não faz parte da percepção do aluno pois, para ele, o núcleo representa seus conhecimentos e, portanto, tudo aquilo que ele pode assumir. O limite é observável somente de fora, e cabe ao professor intervir diante dessa situação.

Ao observarmos os campos semânticos descritos neste trabalho podemos ter a sensação de que o Campo Semântico do Pensamento Algébrico seja o ideal, pois ele não apresenta limites epistemológicos, mas os outros campos podem ser mais intuitivos e desenvolver a maturidade do aluno para lidar com núcleos mais elaborados.

O campo semântico adequado para o desenvolvimento de um determinado é chamado campo semântico preferencial. Esse é o campo que o professor espera para seu aluno. Entretanto, nem sempre é o campo em que seu aluno consegue desenvolver sua justificação. Em uma sala de aula, alguns alunos podem estar acostumados a operar em um determinado núcleo e a mudança de um núcleo para outro mais abrangente pode ser mais ou menos problemática para diferentes alunos. Cabe ao professor lidar com essa heterogeneidade.

2.5 Atividades lúdicas no ensino de matemática

PIAGET (1978) entende que a elaboração de jogos seja um processo natural na formação do indivíduo, servindo para lidar com frustrações e se adaptar à realidade em que está inserido. Segundo PIAGET (1978), os jogos infantis podem ser divididos em três categorias: jogo de exercício, jogo simbólico e jogo de regras.

É por meio de jogos de exercício que o ser humano explora suas habilidades motoras e desenvolve seus sentidos. Embora esteja muito presente na vida das

crianças entre zero e dois anos de idade, quando agitam seus braços e pernas e tendem a apertar e morder tudo ao seu alcance, o jogo de exercício acompanha o ser humano por toda a vida, manifestando-se toda vez que se entra em contato com uma habilidade nova ou mesmo um equipamento novo.

Ao contrário do primeiro tipo de jogo, o jogo simbólico tem um papel forte do desenvolvimento infantil apenas em uma fase da vida, surgindo dos dois aos seis anos, quando a criança passa a imitar o mundo a sua volta e fantasiar, invertendo papéis e corrigindo a realidade à sua maneira, por exemplo, quando reproduzem ambientes escolares ou familiares.

O jogo de regras normalmente se faz presente principalmente dos seis aos doze anos de idade, e tem como característica principal a competição dentro de regras previamente combinadas, tendendo a supervalorizar os contratos pré-estabelecidos.

O fato do ser humano criar jogos de maneira natural durante sua vida nos mostra que o jogo tem um potencial didático muito grande, se direcionado para um fim educativo. Além de abordar conhecimentos desejados pelo professor, o jogo proporciona situações em que a elaboração de estratégias e a iniciativa dos alunos são fortemente estimuladas.

Nesse sentido, as propostas que envolvem materiais lúdicos para criar situações de aprendizagem se dirigem ao encontro da concepção de ensino - aprendizagem de Piaget, onde o professor não é mais o detentor do conhecimento e o aluno apenas o receptor, mas ambos são agentes que ensinam e aprendem através da troca de experiências. Se por um lado o professor pode, a partir de seus conhecimentos, construir uma situação de aprendizagem para os alunos, por outro, observando a interação e o desenvolvimento dos alunos a partir de tal situação, o professor aprende sobre os processos de aprendizagem de cada um. Segundo FREIRE (2002), quando o professor consegue estabelecer essa relação de troca com o aluno, ele de fato ensina, se colocando como um professor pesquisador, que indaga e constata.

Embora a utilização de jogos seja um bom meio para a aprendizagem, alguns cuidados devem ser tomados.

Uma das grandes dificuldades em realizar uma atividade que depende muito do engajamento dos alunos e de suas hipóteses e estratégias é saber o momento de intervir, sem antecipar conclusões às quais a criança eventualmente chegaria se não houvesse intervenção. De acordo com PIAGET (1978), "tudo o que se ensina a uma criança, a criança não pode mais, ela mesma, descobrir ou inventar". Entretanto, deve-se tomar cuidado para não deixar tudo a cargo do aluno pois, dessa forma, teremos alunos em níveis muito diferentes dentro da sala de aula e, embora o professor não deva limitar os alunos mais avançados, é muito importante que os objetivos inicialmente traçados ao elaborar uma atividade envolvendo jogos sejam cumpridos.

A quantidade de situações diferentes a que o aluno é exposto quando participa de uma atividade envolvendo um jogo permite que ele desenvolva alguns tipos de habilidades, tais como oratória e capacidade de concentração?, coloca o conteúdo a ser aprendido em prática e vivencia uma aplicação dos seus estudos, deixando de se preocupar com avaliações, entregando-se ao objetivo principal de ganhar ou participar do jogo.

O jogo também permite que o aluno ganhe repertório. Para explicar melhor o que queremos dizer com repertório assumido aqui, faremos um paralelo com o ato de jogar futebol na rua, onde não se estudam tática e técnicas de chute e passe, mas a criança é exposta a conflitos e situações que mexem com seu emocional, além de empiricamente testar hipóteses sobre tudo que faz parte do esporte. Caso essa criança venha treinar em uma escola de futebol, ela irá associar aquele treinamento técnico à sua vivência e prática, ainda que em um nível diferente. Transportando a situação para o ensino de matemática, podemos colocar as explicações e exercícios como parte do treinamento, enquanto as atividades lúdicas cumprem o papel de primeiro acesso ao conteúdo.

BERENELLI (2003) cita o conceito de “espaço para pensar”, no qual o pensamento da criança é desafiado e o desenvolvimento de sua inteligência ocorre de forma espontânea.

O interesse que a criança tem pelos jogos faz com que prazerosamente ela aplique sua inteligência e seu raciocínio no sentido de obter o êxito. Assim sendo, ao jogar, o sujeito realiza uma tarefa, produz resultados, aprende a pensar num contexto em que enfrentar os desafios e tentar resolver –los são imposições que ele faz a si próprio.” (BERENELLI, 2003 p. 173)

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram realizadas algumas atividades lúdicas com os alunos participantes do projeto, buscaram desenvolver a percepção da criança sobre a importância de uma linguagem própria para a comunicação sobre objetos matemáticos.

Esperamos que, diante dos desafios que a criança impõe a si mesma, e do interesse despertado, ela perceba as dificuldades enfrentadas e reflita sobre a melhor forma de executar a tarefa.

Ao colocar como opção uma atividade que faça uso de materiais lúdicos, temos que levar em consideração a agonia e a insegurança do professor em mergulhar em atividades diferentes que, de alguma forma, fogem do cotidiano de sala de aula e, por isso, podem ser vistas como uma situação fora de controle. É natural que tais angústias aflijam aqueles que buscam inovações, pois tais ideias tiram o professor da zona de conforto em que suas aulas normalmente são pautadas e, na maioria das vezes, vão de encontro à sua formação escolar, que tende a ser reproduzida em alguns aspectos. Assim sendo, o lúdico se torna um desafio importante para a quebra de paradigmas dos professores. Ele pode e deve ser controlado no que diz respeito a objetivos e avaliações, cedendo espaço para a criatividade dos alunos, sem restringir suas produções, e permitindo a falta de controle somente no que diz respeito às hipóteses levantadas e perguntas que naturalmente se formarão no processo de aprendizagem e acomodação do aprendizado dos alunos.

Por fim, é importante destacar que o jogo não é o substituto dos materiais didáticos em sala de aula e sim mais uma ferramenta didática. As atividades lúdicas têm como ponto positivo trabalhar com o universo de fantasia das crianças, despertando o interesse. Essas atividades tiram a pressão da necessidade de aprender que inevitavelmente se forma no ambiente escolar e que estão muito distantes dos modelos de avaliação aos quais os alunos serão expostos ao longo da vida, além de muitas vezes se distanciarem do próprio registro que os alunos devem aprender a fazer de suas ideias. Assim sendo, o professor que pode contar com diferentes formas de abordar conteúdos, utilizando softwares, giz e lousa, jogos e outros, com objetivos claros e planejamento, está mais preparado para fazer seu papel e melhorar as condições de aprendizagem de seus alunos, estimulando seu desenvolvimento em diferentes competências.

2.6 Interações sociais no ambiente escolar

O ambiente escolar e a forma como o aluno o percebe têm influência direta sobre o aprendizado, sendo a aula de matemática apenas um recorte dessa realidade. É esse aspecto que nos interessa explorar neste momento. Seguindo a concepção de que o conhecimento se constrói por meio das interações de ensino-aprendizagem entre professor e aluno e que, para isso, utilizamos de um discurso que pretende comunicar ideias por meio de um sistema de linguagem discutido e definido previamente, temos que nos atentar para um aspecto muito importante que se faz presente dentro da sala de aula: a relação entre professor e aluno.

Cada aluno, enquanto agente indispensável para a construção do seu próprio conhecimento, enxerga o professor de forma especial, atribuindo-lhe, ainda que de forma inconsciente, funções diferentes para o seu aprendizado. Por exemplo, existem alunos que não se sentem confortáveis enquanto o professor não faz um exercício para servir de modelo na lousa, enquanto outros apreciam professores questionadores que verificam suas produções individuais e apresentam desafios. Existe uma série de outras funções que não se excluem, mas que dependem do modo de aprender da pessoa em questão, tendo em comum o fato de que, em qualquer caso, é importante que o construtor de seu conhecimento se sinta livre para questionar o intermediador, abrindo diálogos que possam ser aproveitados por outros e que devem ser encarados como um meio para completar os métodos de ensino-aprendizagem.

A construção da relação de confiança entre professor e aluno, que tem como principal característica o bem estar do aluno e como objetivo seu aprendizado, leva em conta o afeto de ambos. Como em qualquer relação humana, o tempo pode colaborar para o desenvolvimento dos laços necessários e a aproximação desejada, mas é fundamental que o professor conheça as preferências de seus alunos e trabalhe a fim de aliar suas propostas a tais preferências objetivando melhores condições para o aprendizado.

Assim sendo, a sintonia entre professor e aluno é essencial para que o ritmo da aula seja adequado ao aprendizado da turma, respeitando suas particularidades. Quanto mais o aluno se sentir inserido na aula e contemplado pelo professor, maior o prazer tirado do aprendizado e o estímulo para a construção do conhecimento,

fazendo com que a compreensão dos conteúdos passe a ser algo desejado e não somente imposto.

De acordo com FREIRE (2002),

O bom professor é o que consegue, enquanto fala, trazer o aluno até a intimidade do movimento de pensamento. Sua aula é assim um desafio e não uma “cantiga de ninar”. Seus alunos cansam, não dormem. Cansam porque acompanham as idas e vindas de seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezas. (FREIRE, 2002, p. 33)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais encontramos uma seção dedicada a discutir, descrever, sugerir conteúdos atitudinais que são desejados na formação dos estudantes. Um desses pontos é o “respeito pelo pensamento do outro, valorização do trabalho cooperativo e do intercâmbio de ideias como fonte de aprendizagem”. A mesma preocupação com o aspecto social da formação do aluno aparece na Lei de Diretrizes e Bases (2014) que destaca “o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores” e “o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social”. Diante desses dois documentos que norteiam a educação básica no Brasil podemos entender a importância das relações que constituem o ambiente serem forjadas na confiança entre os presentes, pois somente dessa maneira é possível que o aluno se sinta à vontade para realizar tal intercâmbio e valorizá-lo.

Ainda de acordo com FREIRE (2003), o exercício educativo não é aquilo que se dá somente no campo do treinamento técnico, mas aquilo que tem um caráter formador, permeando escolhas e ações. Ao adotar tal postura, é natural que o professor tenha uma preocupação com os valores já formados na criança ou adolescente. Mais ainda, tal preocupação atinge valores do próprio professor, uma vez que o mesmo deve ser exemplo do respeito às diferentes ideias e criador de situações de diálogo que busquem o constante exercício de desequilíbrio e equilíbrio de tais ideias por meio de argumentações.

O professor, enquanto figura central da sala de aula, não no sentido de único polo de conhecimento, mas de administrador das situações e relações dentro do ambiente, é visto também por seus alunos como um modelo. Assim sendo, é importante a seleção das mensagens que se busca transmitir e cuidar para que, a

partir de uma boa relação, bons valores sejam construídos, sempre levando em consideração a dimensão do educador na vida dos alunos, pois o menor ato em sala de aula pode significar muito em sua formação.

Para ilustrar a influência do professor na formação do aluno citamos novamente FREIRE (2002), em que o autor se descreve como um adolescente inseguro que se sentia menos capaz do que os outros:

O professor trouxera de casa os nossos trabalhos escolares e, chamando-nos, um a um, devolvia-os com o seu ajuizamento. Em certo momento me chama e, olhando ou reolhando o meu texto, sem dizer palavras, balança a cabeça numa demonstração de respeito e consideração. O gesto do professor valeu mais do que a própria nota dez que atribuiu à minha redação. O gesto do professor me trazia uma confiança ainda obviamente desconfiada de que era possível trabalhar e produzir. (FREIRE, 2003, p. 19)

De acordo com VEIGA (1993) “Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia de nossa palavra”. Essa reflexão ganha um peso maior se conectarmos o papel do professor para o aprendizado dos alunos e a visão dos alunos sobre o professor como modelo com a importância da sala de aula para a formação de um cidadão. A escola se faz presente em grande parte do cotidiano de uma criança, de modo que o comportamento praticado nesse ambiente tende a se integrar ao seu comportamento padrão, portanto os hábitos e valores aprendidos com os professores tornam-se reproduções futuras em outros ambientes. Partindo dessa convicção, além de atentar para tomar atitudes acolhedoras que privilegiam cordialidade, tolerância e respeito, é dever do professor fazer escolhas que visam construir esses laços.

O uso de materiais lúdicos nas aulas de matemática tem como uma de suas vantagens, a aproximação do professor com seus alunos. Como vimos na seção anterior, essa não é a única função de tal recurso, mas que seu alcance percorre desde a contribuição para o desenvolvimento da cumplicidade entre professor e aluno até o potencial de ensino.

Capítulo 3 – Atividades Lúdicas

A partir da definição de comunicação e linguagem, pensamos a aula de matemática como um discurso constituído por diversas particularidades. Como todo discurso, se não houver entendimento do sistema de códigos utilizados, as ideias que pretendemos comunicar podem ser comprometidas.

Neste trabalho estaremos também atentos ao problema da incompreensão da linguagem algébrica, em particular a perda do significado da incógnita, causando a mecanização de métodos de resolução de equações e, conseqüentemente, erros pela aplicação de uma regra em um momento inadequado.

Na sequência serão apresentadas duas atividades lúdicas. A primeira busca apresentar a necessidade de um sistema de símbolos que seja comum a um grupo de pessoas, além de prático e eficiente para a comunicação. A segunda tem como objetivo evidenciar a importância de significar uma sequência de símbolos.

3.1. Atividade 1 –Instruções de direção

A intenção da atividade é mostrar para os alunos a necessidade da utilização de símbolos para simplificar algumas formas de comunicação e tornar mais prática a manipulação das informações. Os alunos também deverão perceber a importância da clareza e da precisão das instruções.

Para isso o aluno será exposto a uma situação em que deve optar por uma ou mais linguagens, a fim de comunicar um percurso.

Essa atividade também busca resgatar um pouco do caráter histórico da matemática, cujo desenvolvimento se deu a partir de problemas e da percepção da necessidade de criar de definições, conceitos e símbolos adequados, além das ideias. Por fim queremos que os alunos desenvolvam a "Habilidade de selecionar e construir representações simbólicas para problemas e coragem de procurar expressões melhores para construí-las", como enfatiza GOMES (2011).

3.1.1 - Descrição

A atividade propõe aos alunos que escrevam instruções de direção para ir de um ponto a outro dentro da escola, para que outro aluno as interprete.

Cada aluno deverá escolher um local dentro da escola como destino de um caminho a ser percorrido por um colega e escrever instruções em uma folha do caderno. Tanto o destino quanto o percurso não devem ser revelados a nenhum aluno da turma. O professor deve deixar claro que os nomes dos locais, como “banheiro” ou “quadra”, não podem ser usados. Além disso, o professor também não deve dar exemplos ou modelos, assim os alunos ficam livres para se utilizarem de quaisquer meios para comunicar o caminho sem revelar seu destino final.

Ao termino da etapa de escrever as instruções, os alunos entregam as folhas ao professor, que redistribui as folhas de forma aleatória, apenas evitando que um aluno receba uma folha com as instruções que produziu. De posse das instruções, cada aluno deve tentar chegar ao destino.

Após a dinâmica de percorrer os caminhos, os alunos, junto com o professor, irão discutir as formas de comunicação utilizadas no processo, destacando as vantagens e desvantagens de cada uma.

Ao retornarem para a sala de aula, a atividade prossegue a partir do seguinte roteiro:

1. Um dos alunos entrega a folha com as instruções que seguiu.
2. O instrutor se apresenta e escreve na folha qual era o destino.
3. O receptor revela o destino ao qual chegou.
4. O instrutor explica suas instruções.
5. O receptor aponta os elementos que interpretou de outra forma.
6. A sala de aula faz comentários.

Ao aplicar a atividade é normal que o professor tenha algumas expectativas em relação à produção dos alunos para poder nortear as discussões que aparecerão. Para essa etapa espera-se que, dentre as opções de linguagem tomadas pelos alunos, apareçam mapas, setas e linguagem materna como meio de comunicação.

O professor, no papel de mediador da discussão, pode apontar problemas que surgiram e ajudar os alunos na ação de refletir sobre o que não deu certo para melhorar as instruções inicialmente propostas.

3.1.2 – Análise

Para a análise dessa atividade descreveremos a experiência de cada dupla de instrutor e receptor. Começaremos descrevendo o percurso e o caminho seguido pelo receptor, para depois destacar elementos das discussões realizadas em sala de aula.

A sala de aula se localiza no primeiro andar da escola. Saindo da sala tem um longo corredor com outras 7 salas de aula, banheiro, bebedouro e uma escada que liga o primeiro andar ao piso térreo. O piso térreo possui 4 salas de aula da educação infantil, a sala de coordenação, secretaria, recepção e portaria, distribuídos em um corredor semelhante ao do primeiro andar, com uma escada de acesso para o subsolo, onde temos, sala de informática, quadra, pátio e cantina.

Dupla 1 –Maria Clara (instrutor) e Matheus (receptor)

Local pretendido: Cantina

Local de chegada: Cantina

Instruções fornecidas por um desenho complementado por um texto.

“Saia pela sala, desça as escadas, desça de novo a próxima escada. Siga em frente e pronto”.

Ilustração 2 -

Comentários:

A sala de aula fica no primeiro andar do prédio, e a cantina fica no subsolo, o que faz com que o percurso envolva dois lances de escada. A aluna dividiu suas instruções em duas partes. Na primeira, fez o desenho do primeiro andar e indicou com setas o caminho da escada, que foi representada por um desenho. Na segunda parte Maria desenhou somente a escada que liga o térreo com o primeiro andar e indicou que o aluno deveria virar a esquerda e descer o outro lance de escadas a partir de setas.

Após o segundo lance de escadas não tem mais indicações no esquema desenhado, mas o pequeno texto escrito no verso esclarece as possíveis dúvidas deixadas no mapa:

O aluno Matheus, quando questionado sobre o entendimento das instruções, pontuou que se orientou apenas pelo mapa, e entendeu que a última seta dizia para seguir em frente, chegando à cantina. O aluno ainda revela que não viu o verso da folha, mas que estava muito claro que o percurso levava à cantina.

A experiência foi muito positiva pelo fato de poder mostrar aos alunos que o uso de símbolos conhecidos, dentro do contexto da atividade, foi suficiente para

comunicar uma ideia de forma eficiente. No momento em que explicava as ideias, a aluna Maria Clara contou que achou que a pessoa para a qual escreveu, entenderia as setas, mas colocou o texto no final porque achou que as representações das escadas não estavam claras na parte dois.

A estratégia utilizada por Maria Clara é muito interessante, pois visa cercar a informação por duas formas de comunicação que se completam. Além disso, o fato de revelar que utilizou o texto como apoio aos desenhos, mostra a intenção de utilizar o desenho como forma primária de comunicação. O que reforça a ideia do símbolo servir como forma prática de comunicação. Esse fato será discutido no final da exposição das experiências.

Dupla 2 –Matheus (instrutor) e Laura (receptor)

Local pretendido: Refeitório

Local de chegada: Sala de informática

Instruções fornecidas por um texto curto.

“Vire a esquerda, ande dez passos, vire a esquerda, desça as escadas, vire a esquerda e ande 20 passos”.

Comentários

Matheus escreveu um texto pequeno contendo as instruções que julgou suficientes para que a pessoa pudesse chegar ao destino proposto, que fica no subsolo, mas Laura chegou à sala de informática, que se localiza no térreo. Como veremos no texto do aluno, faltou a instrução para descer o segundo lance de escadas.

A aluna Laura revelou que teve dúvidas se deveria chegar à sala de informática ou à sala da coordenação, pois uma se localiza ao lado da outra e a quantidade de passos necessários poderia variar dependendo da pessoa. Matheus contou que achava ter escrito a instrução para o segundo lance de escadas, e para decidir a quantidade de passos Matheus raciocinou da seguinte maneira: ele pensou que a distância da sala de aula até as escadas seria aproximadamente 10 passos e,

como o refeitório é mais longe, achou que 20 passos seriam suficientes, pois quando a pessoa virasse a esquerda e andasse naquela direção, veria o refeitório de frente e concluiria que era ali que deveria chegar, mesmo que ao contar 20 passos ainda não tivesse chegado.

O ponto positivo dessa atividade foi a percepção da baixa precisão na tentativa de comunicação, causada pelo fato da adoção de um sistema de medidas que varia de pessoa para pessoa.

No momento de levantar os pontos que poderiam melhorar as instruções dadas, o aluno Matheus afirmou que provavelmente não teria esquecido de colocar uma instrução se tivesse feito um desenho, pois teria visualizado o percurso. Sobre a indicação dos 20 passos ao sair da escada, Matheus disse que não via um problema aí, pois qualquer pessoa chegaria ao que terminaria no refeitório com aquela quantidade de passos. Com esse argumento concluiu que o aluno entende a falta de precisão no sistema de medida adotado, mas não vê esse fato como um empecilho para concluir a atividade.

O aluno Nicolas chamou a atenção para dois problemas que poderiam ter ocorrido:

1 - A ausência de uma última instrução, que indicaria por onde seguir, poderia dar a entender que destino era o próprio corredor.

2 - Os 20 passos poderiam não ser suficientes para chegar no corredor, pois a medida do passo é diferente para cada pessoa, podendo parecer que o lugar escolhido era o pátio.

Embora essa experiência não tenha contribuído para a questão do uso de símbolos nas tentativas de comunicação, ela deixou clara para os alunos a necessidade de se adotar algumas convenções que estejam em comum acordo, por exemplo, de trabalhar dentro de um sistema padronizado de medidas conhecido e utilizado por todos.

Dupla 3 –Laura (instrutor) e Nicolas (receptor)

Local pretendido: Quadra

Local de chegada: Sala de coordenação

Instruções fornecidas por um texto enumerado em 7 comandos.

1 - Saia da sala

2 - Vire a esquerda

3 - Vire a esquerda de novo

4 - Desça a escada

5 - Vire a direita

6 - Ande bastante

7 - Chegou ao seu destino

Comentários

Os comandos 1 até 5 são muito claros e objetivos, enquanto os comandos 6 e 7 não são precisos. O aluno Nicolas disse que ao virar à direita andou o máximo que pode, chegando ao fim de um corredor no qual havia a sala de coordenação à esquerda, e a escada que dava direto na quadra, à direita. O aluno acreditou que o lugar de chegada era a sala de coordenação por causa da última instrução, já que não havia uma nova instrução de descer as escadas novamente.

Laura por sua vez afirmou ter esquecido de colocar uma instrução a mais, que deveria ser a instrução 7, para descer outro lance de escadas e chegar diretamente na quadra, finalizando com a instrução 8 "Chegou no seu destino". Ela optou por descrever o percurso em tópicos pois seria mais fácil de enxergar as instruções. Quando questionada sobre a possibilidade de desenhar um esquema, a aluna disse que não era capaz de fazer bons desenhos, e pensava que se o fizesse deixaria a descrição mais confusa.

A aluna é muito exigente consigo mesma, de modo que a opção por descrever o percurso por tópico era a mais segura pelo fato dela dominar melhor a escrita.

Chamei a atenção para o fato de que quando desenhamos um esquema, podemos visualizar aquele espaço esquematizado de uma forma diferente, podendo pensar em um ambiente por vez e lembrar dos detalhes observando cada parte do desenho individualmente. Destaquei que a organização por tópicos foi muito interessante, e que o erro de percurso aconteceu porque a aluna se confundiu em uma etapa, mas que os tópicos foram claros e eficientes em comunicar as instruções.

Dupla 4 - Nicolas (instrutor) e Maria Clara (receptor)

Local pretendido: Secretaria

Local de chegada: Portaria

Instruções fornecidas por um texto estruturado em tópicos.

Virar à esquerda.

Depois, a primeira à esquerda.

Desça as escadas.

Vire à esquerda.

Siga reto.

Você chegou ao seu destino.

Comentários

A aluna Maria Clara revelou que, seguindo os itens, chegou ao banheiro ao ler o segundo passo (que pedia para virar a primeira esquerda), mas percebeu que deveria descer as escadas, então não poderia contar o banheiro como "primeira à esquerda". Na sequência ela desceu as escadas e seguiu reto chegando ao hall de entrada que leva à portaria.

Sobre a entrada ao banheiro, a aluna Maria Clara entende que não foi falha do comunicador, pois a porta do banheiro não fica exatamente à esquerda, e sim em uma "esquina" após virar à esquerda, sendo necessário virar duas vezes a esquerda para de fato entrar no banheiro.

Sobre o fato de ter chegado na portaria e não na recepção, Maria Clara entendeu que a instrução não era clara. O aluno Nicolas revelou que ao seguir o corredor que dá acesso ao hall de entrada, primeiro vemos a recepção e depois a portaria, mas Maria Clara entendeu que deveria seguir reto ao máximo, até encontrar a portaria.

O aluno Matheus levantou a questão de que, na descrição, não estava claro quando parar depois do item "siga reto", podendo ter uma indicação por quantidade de passos ou um desenho. A crítica do aluno faz referência à experiência anterior, na qual Matheus não deixou claro, em suas instruções, qual era o ponto de chegada.

Com a experiência 4, os alunos puderam observar mais um exemplo de instruções feitas apenas com texto, sem esquemas ou desenhos, em que o receptor não chegou ao local planejado pelo instrutor. Notou-se que alguns detalhes importantes não foram observados - seja pelo instrutor, seja pelo receptor. Uma questão que pode ser colocada é "Será que se houvesse um desenho, a visualização dos detalhes ficaria mais clara para o instrutor ou para o receptor?"

Dupla 5 - Lucas Pereira (instrutor) e João Vitor (receptor)

Local pretendido: Quadra

Local de chegada: Sala de coordenação

Instruções fornecidas por uma combinação entre texto e desenho

"Saia da sala e dê 25 passos para a esquerda, depois vire à esquerda novamente e depois vire à esquerda e ande uns 10 passos e vire a direita, aí, chegou."

entendiam as setas, mas Lucas Pereira elaborou um esquema que não preservava a proporção das medidas dos corredores, o que causou confusão ao João, que traduziu uma direção apontada por uma seta de forma errada.

Dupla 6 - João Vitor (instrutor) e Diogo (receptor)

Local pretendido: Quadra

Local de chegada: Quadra

Instruções fornecidas por uma combinação entre texto e desenho

“Ao sair da sala, ande em direção ao corredor, mas dê dez passos normais e se você ver o bebedor e ao lado a escada ande em direção a ela, desça toda, vire à direita ande cinco passos depois vire à direita e desça toda a escada depois, dê três passos para frente, vire à direita e ande até o fim do corredor e ande em direção na porta de saída e dê mais ou menos 10 passos.”

Ilustração 4 -

O aluno Diogo, que percorreu o percurso, disse ter chegado na quadra com facilidade. Quando perguntei como utilizou as instruções, o aluno afirmou que não teve paciência de ler o texto, seguindo diretamente a imagem. Ele revelou que não pensou nos 10 passos que estavam desenhados, apenas saiu da sala e virou para a esquerda chegando até a escada e percebeu que deveria descer porque entre um quadrado e outro tinha um desenho de escada, depois virou a direita e viu em seguida outro desenho de escada, no qual havia uma seta para a esquerda no fim.

Antes de seguir para as explicações do autor das instruções, perguntei para Diogo como ele soube que deveria andar para a esquerda, no que o aluno prontamente respondeu que foi por causa da seta.

O aluno João Vitor explicou que fez o texto primeiro e depois viu que o aluno Lucas Pereira estava desenhando, então resolveu indicar as instruções por um desenho também. Ele pontuou dois fatos importantes dentro de sua lógica. O primeiro é que utilizou uma letra B para simbolizar o bebedouro próximo à escada, e o segundo é que não desenhou os dez passos finais para a esquerda porque não cabia na folha, mas como só havia a quadra naquela direção, achou que não haveria problema.

Diante das explicações de João Vitor perguntei ao aluno Diogo se havia notado o bebedouro. Diogo contou que pensou que se tratava de um B de banheiro, o que não faria diferença, uma vez que o bebedouro fica em frente à porta do banheiro.

Essa experiência teve dois pontos positivos que pude destacar para os alunos.

O primeiro foi sobre o papel das setas na comunicação do destino. O aluno João Vitor não teve dúvidas sobre a escolha da seta para indicar o caminho, enquanto Diogo não teve dúvidas da direção que deveria seguir. Chamei a atenção para o fato de que a seta é um símbolo conhecido por todos e, portanto, era um bom código para ser usado. Por outro lado, o desenho da escada poderia ter sido interpretado de outras formas, visto que não era um símbolo usado no cotidiano, mas que dentro do contexto foi muito útil.

O segundo ponto foi sobre a letra B, escolhida por João para simbolizar o bebedouro. Nesse caso, tínhamos duas possibilidades de significado para a letra B, o que não prejudicaria as instruções, mas chamei a atenção para o fato de que era importante perceber que se tratava de um símbolo cujo significado não estava previamente combinado.

Dupla 7 –Diogo (instrutor) e Lucas Pereira (receptor)

Local pretendido: Cantina

Local de chegada: Sala dos professores

Instruções fornecidas por um texto

“Saia da sala e vire à esquerda, ande 20 passos médios e vire à esquerda, desça um lance de escada e vire à direita, dê 50 passos médios e vire à direita, desça outro lance de escadas e vire à esquerda, ande 3 passos largos, vire à direita de um passo e meio largo, vire à esquerda, dê 7 passos médios e entre à direita”.

O aluno Lucas Pereira disse que se sentiu muito confuso com as instruções sobre passos largos, médios e metade de um passo. O aluno revelou que os primeiros 20 passos não chegavam na escada, mas que sabia que tinha que descer uma escada, então desceu a primeira à esquerda. Ao chegar no andar de baixo e virar à direita percebeu que precisaria de menos de 50 passos para chegar até a parede, e só haveria uma escada para descer, então foi para o pátio que fica no subsolo. Lá tentou fazer o que estava descrito, dando o maior passo possível quando aparecia a descrição de passo largo, mas chegou até a sala dos professores.

O aluno Diogo disse que teve dificuldades em saber quantos passos daria para chegar em cada ponto de mudança de direção, mas que tentou imaginar. Perguntei se o aluno tinha exagerado de propósito ao colocar 50 passos, com o objetivo de fazer o outro aluno chegar na parede, e ele revelou que não, que na verdade queria escrever 5 passos largos e se distraiu escrevendo 50 médios.

3.1.3 Conclusão

A atividade se mostrou muito positiva de forma geral. Nosso objetivo principal que era do aluno entender a importância de contar com uma linguagem prática conhecida por todos foi atingido, já que alguns fatos ocorridos durante as experiências que apontam nessa direção.

A dupla 1 na qual o Matheus, o receptor, conta que não leu o texto e se orientou apenas pelo mapa que contava com setas para indicar o caminho, mostra que um sistema de símbolos (as setas) bem definido e conhecido pelo receptor e instrutor pode ser suficiente para transmitir uma ideia. O fato do aluno ter chegado

ao destino correto, reforça a ideia de que o meio pelo qual nos comunicamos é muito importante na eficiência da nossa comunicação, tornando os símbolos de conhecimento geral uma opção prática e segura.

A outra dupla que resultou em sucesso também tem como característica um desenho que comunica o percurso de forma muito eficiente. Nela o aluno João Vítor combinou texto e desenho para dar as instruções, mas o aluno Diogo utilizou apenas o desenho. Havia uma consideração de quantidade de passos que o instrutor pensou na hora de montar o esquema, mas o receptor não se atentou a esse fato, apenas utilizando as setas, escadas e alguma dedução para se organizar.

No caso da dupla 6 o fato de a quadra estar logo a esquerda da escada eliminou possíveis confusões, e o sucesso da comunicação deixou a sensação de que um mapa simples poderia ser a melhor opção.

A dupla 4 não terminou com o receptor chegando ao destino correto. O aluno Nicolas optou por descrever o percurso a partir de tópicos, estratégia muito eficiente até chegar na última instrução. A aluna Maria Clara (receptora) ficou confusa quanto ao destino, pois se deparou com um corredor com três portas e ao fim um salão que conta com uma bancada grande de recepção e a porta que dá acesso ao portão de entrada, tendo como últimas instruções “Siga reto” e “Você chegou ao seu destino”.

O ponto levantado pelo aluno Matheus, que não participava diretamente da experiência como instrutor ou receptor, é que a última instrução não deixa claro onde parar, ficando por conta do receptor decidir. Essa falta de clareza explicita que a linguagem materna está carregada de fatos subentendidos que podem ser assumidos por quem escreve ou fala, causando ambiguidade e tornando a comunicação imprecisa.

A dupla 3 não funcionou, apesar da aluna Laura ter colocado as instruções em forma de tópico, pois a mesma esqueceu de colocar uma instrução. A estratégia utilizada foi bem executada e os comandos são claros e fáceis de seguir. Durante a discussão os alunos disseram que um desenho poderia ajudar o receptor a se localizar em caso de dúvida. Essa ideia pode ter surgido em vista da dupla 1 ter utilizado um desenho e o receptor ter chegado no local, enquanto na dupla 2 o receptor não chegou no local e havia apenas texto. Acredito que nesse caso um

esquema poderia ajudar a aluna a organizar suas ideias e resultaria no não esquecimento da última instrução.

A atividade ainda contou com consequências que não foram previamente planejadas, mas que são muito interessantes e benéficas para os alunos.

Nas duplas 2 e 7 uma questão que se mostrou um obstáculo para que o receptor chegasse ao destino correto foi a utilização de passos como meio de medir distâncias. Em ambos os casos, as instruções levaram os alunos para um lugar próximo do destino correto, mas a falta de precisão impossibilitou que os receptores chegassem ao local planejado. Na dupla 7 o aluno Diogo ainda tentou diferenciar passos largos de passo médios, deixando as instruções foram imprecisas.

A dupla 5 contou com outro problema relacionado a distância. O desenho do aluno ficou próximo do texto e a solução encontrada por Lucas Pereira para a falta de espaço foi reduzir as dimensões dos locais e as distâncias entre as setas que indicavam o caminho. Além disso, o desenho não deixava claro qual era o ambiente em que as setas indicavam o caminho e houve confusão na hora de montar o texto.

As experiências das duplas 2, 5 e 7 foram importantes para que os alunos percebessem que não basta um sistema de símbolos comum ao instrutor e ao receptor, mas um sistema de medida em que ambos possam se orientar, sem deixar margem para dúvidas.

Outra discussão interessante que veio à tona na etapa final da atividade foi a forma com que os alunos se orientaram com o mapa, e duas ideias foram citadas.

1 - Virar a folha como os GPS que aparecem em vídeo games.

2 - Se imaginar na folha.

O desenvolvimento da imaginação da criança sempre deve ser valorizado dentro de uma atividade. Nesse caso, a imaginação tenta dar conta de reconhecer o ambiente representado em um desenho elaborado por outra pessoa. É muito importante que aluno faça esse exercício mental de tentar reconhecer um espaço tridimensional representado em um plano, pois essa será uma habilidade muito requisitada futuramente.

Embora os objetivos tenham sido atingidos de forma satisfatória é importante destacar alguns aspectos que podem ser melhorados na atividade. Alguns erros no

momento de dar as instruções ocorreram porque os alunos não puderam percorrer o caminho com antecedência, confundindo - se ao tentarem descrever o percurso de memória.

Muitos alunos que buscaram se comunicar por meio de textos apresentaram ambiguidade nas instruções.

A atividade poderia ser melhor aproveitada caso a maioria dos alunos tivesse buscado se comunicar por meio de símbolos, pois poderíamos discutir melhor escolhas favoráveis e desfavoráveis.

Com o objetivo de criar mais oportunidades para discutir a adoção de símbolos deixamos a sugestão de ambientar a atividade como se cada aluno viesse de um país distante, não entendendo o nosso idioma. Com isso esperamos que a solução seja se comunicar exclusivamente por esquemas.

3.2. Atividade 2 - Cubo mágico

A atividade propõe ao aluno o desafio de resolver um puzzle tridimensional considerado muito difícil pela maioria das pessoas. A intenção é colocar os alunos em situações de codificação e decodificação, a partir de símbolos previamente combinados, para perceberem que as notações podem potencializar a eficácia de uma troca de informações.

Esperamos que o aluno ganhe confiança no seu conhecimento, aprenda a importância de compartilhar e vivencie uma situação problema em que perceba as etapas de resolução caracterizadas por Polya: compreender o problema, construir uma estratégia de resolução, executar a estratégia e revisar a solução.

3.2.1 Descrição

A escolha da resolução do cubo mágico como atividade de codificação e decodificação foi feita baseada no interesse que esse *puzzle* desperta em muitas pessoas. O cubo é um objeto de fácil manipulação e o fato de a maioria das pessoas conseguir montar um dos lados utilizando apenas a lógica serve de estímulo para as tentativas. No entanto, normalmente segue-se a frustração, pois é muito difícil

conseguir, sem estudar os movimentos, deixar cada uma das seis faces com apenas uma cor, uma vez que existem mais de quarenta e três quintilhões de combinações de posições das peças.

Além de acreditar no fascínio do cubo mágico, que tem como suporte o número de vendas do objeto pelo mundo todo, me convenço de que este é um objeto de interesse dos alunos pela minha experiência em sala de aula com o cubo, bem como pelo depoimento do professor de ciências *Brian Rhorig*, publicado na área destinada para a educação do site *Rubik's cube*¹.

Rhorig teve contato com o cubo por meio de seu filho de 13 anos e ficou impressionado com a empolgação do mesmo em resolver o *puzzle*. Investiu tempo para aprender uma resolução e decidiu investigar o potencial dessa ferramenta em sala de aula para auxiliar alunos a lidarem com problemas. O professor decidiu propor aos seus alunos do nono ano, na faixa dos 15 anos de idade, que resolvessem o cubo em 7 semanas. Para isso, reservava um momento de cada semana para dar dicas sobre a resolução, fazendo um sistema de pontuação com caráter de competição, segundo o qual o aluno deveria estar preparado para atingir um novo objetivo nas etapas de resolução em um determinado período de tempo.

Segundo RHORIG (2010), essa experiência foi positiva para a atitude em sala de aula:

Todo ano, eu procuro introduzir o cubo Rubik em minhas aulas. Tem algo especial nesse quebra-cabeças 3D colorido que cativa a imaginação até dos estudantes mais letárgicos. Essa atividade me mostrou que todo estudante tem um grande potencial adormecido, esperando para ser destravado. O cubo Rubik tem sido uma ferramenta valiosa para esse destravamento. (RHORIG, 2010)

Embora as estratégias presentes nessa atividade sejam múltiplas e busquem comunicar as ideias por mais de uma forma de discurso, existem alunos que possuem alguma resistência ao estudo de matemática. Para lidar com essa questão

¹ site oficial do criador do cubo mágico, Erno Rubik: <http://www.rubiks.com/>

Each year, I look forward to introducing the Rubik's cube in my classes. There is something special about this colorful, 3-D puzzle that seems to captivate the imagination of even the most lethargic student. This activity has shown me that every student has a tremendous amount of untapped potential, waiting to be unlocked. The Rubik's cube has been a valuable key in unlocking it.

busquei ideias CINOTO (2014) que, dentre muitas contribuições técnicas para a atividade em questão, se mostrou um guia também no que diz respeito a meta de auxiliar os alunos a ganhar confiança e tomar iniciativa para resolver problemas.

Além da matemática, o Cubo Mágico traz outros benefícios para o desenvolvimento da criança, tais como auto - confiança e cooperação. É interessante ver como aqueles que aprendem a resolver o cubo acabam querendo ensinar outras pessoas e sempre compartilham seu conhecimento sobre o Cubo Mágico. É possível aprender a resolver o cubo sozinho na internet, mas com a ajuda de um amigo é muito mais simples, e as crianças acabam se ajudando e interagindo naturalmente. (CINOTO, 2014, p. 5)

O cubo mágico se mostra uma ferramenta capaz de exercitar o raciocínio lógico do aluno, que segundo BORIN (2004), é um conjunto de habilidades: tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar.

... queremos salientar que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. (Borin, 2004, p. 8)

A solução do cubo que será apresentada articula dois tipos de raciocínio. A primeira camada trabalha com o raciocínio dedutivo, uma vez que não possui algoritmos ou sequências de passos, trazendo apenas dicas para lidar com determinadas situações. Esperamos que o aluno reconheça padrões, teste hipóteses e antecipe problemas afim de fazer boas escolhas para a resolução.

As etapas seguintes apresentam algoritmos e a movimentação de determinadas peças a partir de uma sequência de fórmulas. Portanto, busca trabalhar o raciocínio indutivo, no qual o aluno percebe a consequência de uma determinada premissa, aplicação o algoritmo e utiliza-se dessa relação para resolver o problema.

3.2.2 - Resolução do cubo

A resolução escolhida para ser praticada com alunos foi o método de camadas, dividida em três etapas. A primeira etapa trabalhará as características de cada peça do cubo e a lógica por trás da resolução da primeira camada. A segunda introduz uma linguagem de símbolos utilizada na comunicação dos próximos passos, seguido de uma pequena sequência de movimentos para completar a

segunda camada. Por fim, a última camada trata de quatro sequências de passos para reorganizar e finalizar.

3.2.2.1 Primeira camada: Característica das peças

A intenção de caracterizar as peças é fazer com que os alunos percebam que cada tipo de peça tem seu lugar e sua dificuldade de movimentação.

Os tipos de peça são: centro, meio e canto.

Ilustração 5

Uma peça de centro não ocupa lugar de uma peça de meio, por exemplo. Além disso, as peças de centro não variam de posição e são presas nos eixos, nos obrigando a moldar as outras peças em torno das centrais. As peças de centro têm apenas uma cor visível, as peças de meio têm duas cores e as peças de canto têm três cores.

Seguindo com a mobilidade das peças, chamaremos a atenção para o fato de que as peças de meio são mais difíceis de movimentar do que as peças de canto, pois as peças de meio estão conectadas em quatro outras peças, duas de centro e duas de canto, enquanto que as de canto se conectam a apenas três (três de meio).

Para facilitar a descrição das próximas etapas de aprendizagem da resolução escolhida, pensaremos em uma divisão do cubo em camadas, como mostra a figura 1.

Ilustração 6

Com explicações sobre os movimentos possíveis de cada peça, o professor dá orientações e dicas para que os alunos consigam finalizar a primeira camada, ou seja, deixar uma face inteira com mesma cor.

Para tanto os alunos são orientados a trabalhar primeiro as peças de meio da primeira camada para formar uma cruz, como na figura 3.

Ilustração 7

Deixamos como sugestão para os alunos a técnica de deslocar a peça que gostaríamos de mover, da 1ª para a 3ª camada, para assim poder realizar os deslocamentos sem mover a camada de cima.

No exemplo abaixo, a peça do meio é azul e branca, sendo que a parte branca é virada para baixo. Para levar a parte branca para cima, um algoritmo possível é o seguinte. Fazemos uma rotação de 90° da parte de baixo no sentido anti-horário para encaixar a parte azul com o centro azul e, posteriormente, uma rotação do eixo da direita em 180° para encaixar a parte branca com o centro branco.

Ilustração 8

Após terminarmos a cruz, completamos os cantos. Isso não deve ser um grande desafio visto que as peças dos cantos são mais fáceis de mover. Para aqueles alunos que encontrarem dificuldade, o professor e o monitor devem auxiliar individualmente.

3.2.2.2 Segunda camada: Introdução do algoritmo e notação

Consideraremos a primeira camada feita e a face branca como topo para dar sequência à atividade (Figura 5). O objetivo da próxima etapa será completar a segunda camada e deixar o cubo como mostra a Figura 6, ou seja, com a primeira e segunda camada completas e alinhadas.

Ilustração 9

Nesta etapa, buscamos introduzir os símbolos que iremos utilizar na terceira camada e praticar a decodificação dos mesmos com um algoritmo simples. Para tanto, nos dedicaremos uma sessão à apresentação dos movimentos do cubo mágico e da linguagem simbólica adotada.

Para facilitar a apresentação da linguagem, utilizaremos a sequência de imagens fornecida pelo professor Rafael Cinoto. As faces são representadas pelas letras R, L, U, D, F e B. A escolha dessas letras vem das palavras em inglês, right (R), left (L), up (U), down (D), front (F) e back (B).

Ilustração 10

Ilustração 11

A opção de manter essa notação, em vez de utilizar uma que seja inspirada em palavras da língua portuguesa, ocorre porque vídeos de tutoriais e dicas encontrados na internet, com o objetivo de aprimorar técnicas de resolução, utilizam essa notação. Assim, o aluno interessado pode utilizar de tais materiais para aprofundar sua técnica.

Dando sequência à apresentação da linguagem, definiremos símbolos para o sentido de rotação e para rotação dupla:

Uma letra sozinha indica uma rotação de 90° no sentido horário da face correspondente.

Uma letra acompanhada do símbolo ' indica uma rotação de 90° no sentido anti-horário da face correspondente.

Uma letra acompanhada do número 2 indica uma rotação de 180° em qualquer sentido, pois a posição final é a mesma para os dois sentidos possíveis.

Para ilustrar, segue uma imagem exemplificando o resultado de rotações da face da direita (R). Inicialmente, a cor branca está para baixo, a cor verde está atrás e a cor laranja está na face superior.

Ilustração 12

Nesta etapa introduziremos a primeira sequência de símbolos utilizada para comunicar o algoritmo de resolução da segunda camada. Para dar início ao algoritmo precisaremos posicionar o cubo de um jeito especial, detalhado no apêndice 1, e seguir a seguinte combinação de movimentos.

$F' - D - F - D - L - D' - L'$

3.2.2.3 Terceira camada: Utilizando do algoritmo

Esta etapa é bastante difícil porque precisamos mexer na posição das últimas peças, mas sem desmanchar as que já temos na posição correta. Por esse motivo dividimos a solução em quatro passos.

Para efeito de orientação, posicionamos o cubo com a face branca como topo. Portanto, temos a face amarela no fundo.

Fazemos agora uma inversão na posição do cubo e trabalhamos com a parte amarela como topo, assim obtendo controle sobre o posicionamento das peças.

1º passo

Objetivo: formar a cruz amarela no topo.

Ilustração 13

Algoritmo utilizado: F - U - R - U' - R' - F'.

2º passo

Objetivo: completar a face amarela acertando os cantos, sem se preocupar com a parte lateral das peças, o que será feito no passo a seguir.

Ilustração 14

Algoritmo utilizado: R - U - R' - U - R - U² - R'

3º passo

Objetivo: arrumar as laterais dos cantos da última camada, para que o cubo possa ficar na seguinte configuração.

Ilustração 15

Algoritmo: R' - F - R' - B2 - R - F' - R' - B2 - R2

4º passo

A configuração de começo dessa última etapa pode se dar de duas formas diferentes. Em uma delas aparecem quatro peças de meios trocados. Na outra, aparece uma peça de meio correto e três trocada. Nesse caso, posicionamos o cubo de modo que a peça de meio correta fique na parte de trás. No primeiro caso aplicaremos o algoritmo uma vez para cair no segundo caso. Estando no segundo caso, aplicamos o algoritmo uma vez e resolvemos por completo o problema.

Antes de começar o algoritmo temos que observar em que sentido devemos fazer as trocas. Para exemplificar seguem duas figuras para melhor ilustrar.

Sentido horário

Sentido anti - horário

Ilustração 16

A importância dessa identificação se dá pelo fato de que a parte de cima (U) será girada no sentido para o qual precisamos encaixar as peças, sendo a sequência

F2 - U - M' - U2 - M - U' - F2

no primeiro caso, começando com U e terminado com U' e, no segundo caso,

$$F2 - U' - M' - U2 - M - U - F2$$

começando com U 'e terminando com U.

3.2.3 Análise

O início da aplicação desta atividade ocorreu três semanas depois da aplicação da atividade “instruções de direção”.

A atividade se deu em quatro encontros de 1 hora e 40 minutos, nos quais retomávamos o trabalho da aula anterior, para depois avançar no aprendizado de novas técnicas.

Os encontros contaram com a participação de três alunos do 7º ano que já dominavam as técnicas para montar o cubo mágico, esses alunos estavam na turma de sexto ano de 2014 e se destacaram por investir tempo em estudar novas soluções do cubo mágico. Dessa forma, eles agiram como monitores e sua presença foi muito importante para passar segurança aos alunos, uma vez que ao errar em uma determinada etapa, os alunos podiam contar com o monitor para reorganizar o cubo de forma rápida e voltar na situação anterior ao erro.

Encontro 1

O primeiro encontro foi marcante pela empolgação dos alunos. Eu havia separado um cubo de plástico para cada aluno e levado o óleo para deixá-los destravados, mas quatro alunos já tinham seus próprios cubos mágicos. Os monitores emprestaram seus outros cubos aos outros três alunos, dessa forma todos os alunos trabalharam em cubos com bons giros.

Inicialmente os monitores montaram os cubos utilizando o algoritmo que apresentaríamos aos alunos, para em seguida começarmos a entender as peças dos cubos. Todos os alunos fizeram questão de anotar os tipos de peças, o que foi muito útil para entender o raciocínio presente na resolução da primeira camada.

Como ponto de partida pedi que os alunos contassem no cubo quantas peças de cada tipo existiam. Prontamente os alunos perceberam que cada cubo possuía 6 centros e 8 cantos, mas tiveram dificuldades em contar os meios. O aluno Lucas

Pereira foi o primeiro a contar 12 peças de meio, explicando que conseguiu contar porque colocou o cubo em cima da mesa e, sem mexer, contou 4 peças na frente, 4 no meio e 4 atrás.

A partir da fala do Lucas Pereira chamei a atenção para as duas ideias fundamentais para a organização do nosso pensamento.

Ideia 1: A importância de manter o cubo em uma determinada posição.

Ideia 2: O raciocínio por camadas, porém organizado de forma horizontal, como apresentado na figura 2 da descrição da atividade.

Após apresentar a mobilidade das peças e a organização do raciocínio pelo método de camadas, continuei explicando que o nosso objetivo era montar o topo do cubo. Combinamos de nos orientarmos pelo topo do cubo e escolhemos a face branca como topo. Em seguida perguntei aos alunos quais peças deveríamos orientar primeiro, mas nenhum entendeu a pergunta, deixando claro que para eles, bastava organizar a face branca, sem se importar com as laterais. Montei a face branca de forma que as partes laterais das peças ficassem desorganizadas e comparei com um cubo no qual a face branca estava montada corretamente, como na figura abaixo.

Ilustração 17

Ao perceberem que, para considerar o topo montado, precisaríamos ordenar também as cores na lateral das peças, os alunos ficaram curiosos e agitados perguntando por instruções. Pedi que pensassem na dificuldade de mobilidade das peças. A partir dos apontamentos da Laura expliquei que a ideia era ordenar a cruz e em seguida os cantos.

A presença dos monitores foi de extrema importância para mostrar cuidadosamente as ideias presentes na organização da cruz do topo. Os cantos foram mais fáceis, e ao fim do primeiro encontro, já havia 5 alunos capazes de montar a primeira camada sem grandes dificuldades. Os alunos João Vitor e Maria Clara não conseguiram montar a primeira camada sem a ajuda dos monitores.

Encontro 2

O segundo encontro ocorreu dois dias depois do primeiro. Ao chegar na escola fui informado por outros professores que os alunos estavam bastante empolgados com a resolução do cubo.

O primeiro momento do encontro foi destinado a conversar com a classe sobre o treino durante os dias. Comecei perguntando aos alunos que apresentaram maiores dificuldades no encontro passado. A aluna Maria Clara relatou que não treinou mais depois daquele encontro. O aluno João Vítor relatou que treinou com um monitor durante o intervalo, além de uma hora na saída da aula do dia anterior treinando com um dos monitores. Desse modo, ele entendeu a lógica utilizada na cruz e conseguiu superar sua principal dificuldade na resolução da primeira camada.

O aluno Matheus também buscou contato com os monitores e relatou que já estava treinando o movimento da segunda camada. Questionei se ele havia feito anotações sobre as explicações do monitor, mas ele apenas havia decorado os movimentos.

No segundo momento desse encontro separei um monitor para ajudar junto com a Maria Clara e os outros dois monitores ficaram responsáveis por auxiliar os outros alunos, cada um com um grupo de três. Pedi para que cada aluno montasse a primeira camada com o topo branco, mas a aluna Maria Clara estava bastante relutante e desanimada. Pedi que o monitor montasse para ela, assim a aluna poderia acompanhar a segunda etapa.

Utilizei uma apresentação de slides para ensinar os movimentos do cubo, apresentando as notações que indicariam cada face, as notações para orientar os sentidos de giro (horário e anti - horário) e o posicionamento do cubo para montar a

segunda camada. Ao fim da apresentação ,deixei um slide congelado, resumindo a notação e apresentando a fórmula para a segunda camada.

No início os alunos tiveram bastante dificuldade em posicionar o cubo e decidir se as rotações eram horário ou anti - horário. Os monitores corrigiram muitas vezes o posicionamento, mas cumpriram bem o seu papel, deixando os alunos cometerem os erros necessários, mostrando qual foi o erro e retomando.

O aluno Matheus estava ansioso por aprender a próxima camada, de modo que sentei com ele individualmente e escrevi em uma folha a primeira das quatro fórmulas, mostrando os posicionamentos corretos. Esse momento foi muito importante, pois o aluno se dedicou a aprender as notações.

A aluna Maria Clara conseguiu completar a segunda camada com a ajuda do monitor. Sua principal dificuldade era posicionar o cubo e começar, mas teve um bom desempenho em entender a notação e girar no sentido correto. Notei que a aluna ganhou ânimo e propus que ela tentasse novamente a primeira camada, mas houve bastante resistência, de modo que não insisti e observei que a aluna trabalhou o restante da aula apenas na segunda camada, sempre pedindo para o monitor montar a primeira.

É interessante observar que, justamente a organização da primeira camada é a que necessita de raciocínio lógico, quando as demais, utilizam um algoritmo pronto.

Os demais alunos tiveram um bom desempenho e conseguiram concluir a segunda camada. O aluno Lucas Pereira fez um pequeno esquema para não se confundir sobre o sentido horário e anti-horário, indicando os giros por setas. Ao fim da aula mostrei aos alunos o esquema elaborado por Lucas. Tanto Laura quanto João Vítor, que estavam em outro grupo, se movimentaram para copiar.

O esquema feito por Lucas tinha o objetivo de facilitar a leitura da notação, que para o aluno não estava boa. A discussão desse esquema levou os alunos João Vítor e Laura a questionarem a escolha de representar o sentido anti - horário a partir do símbolo (') seguido da letra, pois para eles a seta comunicava o sentido da rotação de forma mais prática

No último momento da aula conversamos sobre as diferenças das duas etapas. A aluna Maria Clara foi a primeira a falar, dizendo que a segunda etapa era mais simples porque tínhamos uma “colinha”. Na sequência os demais alunos concordaram com a Maria Clara, destacando que a grande dificuldade era com o sentido do giro, pois para cada face tinham imaginar um relógio diferente.

Como consideração final, destaquei para os alunos o fato de que o roteiro só é fácil de ser lido por conta das notações, e que a dificuldade presente na notação do sentido de giro só se dá, porque ela não informa diretamente o movimento. Analisamos juntos a tentativa do aluno Lucas Pereira de tornar mais fácil a notação que indicava o sentido da rotação, de modo que os alunos chegaram à conclusão que sempre vão tentar fazer essa adaptação na fórmula.

Encontro 3

O encontro 3 ocorreu uma semana depois do encontro dois e teve início com uma conversa sobre o treino dos alunos em casa. Novamente Maria Clara disse que não treinou em casa, mas guardou as anotações que tinha feito para poder fazer a segunda camada.

Matheus dominou o primeiro passo da última camada (que eu havia ensinado a ele no encontro anterior), e os outros já resolviam sem dificuldades as duas primeiras camadas.

Nesse encontro, apresentei os posicionamentos corretos do cubo para cada passo de resolução da última camada e respectivas fórmulas. A estratégia foi mostrar cada passo em slides enquanto os monitores, dentro de seus grupos, realizavam os movimentos devagar. Em seguida entreguei uma folha com os quatro passos resumidos. Começando da segunda camada e com o auxílio dos monitores, todos os alunos montaram o cubo uma vez.

No restante do encontro, os alunos tentaram começar do zero e aplicar todos os passos de resolução. Todos os alunos erraram muitas vezes, mas não estavam desestimulados, exceto pela aluna Maria Clara que insistiu para que o monitor deixasse a primeira camada pronta para aplicar os algoritmos. Ao fim do encontro apenas o aluno Matheus conseguiu finalizar a resolução. Combinamos então que os alunos continuariam tentando ao longo da semana e teríamos mais um encontro para tirar dúvidas e consolidar a resolução do cubo.

Encontro 4

O último encontro teve a intenção de tirar as últimas dúvidas e teve um caráter de confraternização durando apenas 1 hora. Os alunos haviam dominado o algoritmo. Laura e João Vítor sempre andavam com as fotos dos algoritmos. Maria Clara não tentou dominar a primeira camada, mas, mesmo com bastante dificuldade, era capaz de montar o cubo a partir da primeira camada pronta.

No fim do encontro fizemos uma conversa de fechamento e mostrei sites dedicados a aprimorar as técnicas de resolução do cubo mágico. Os alunos se mostraram muito empolgados e anotaram uma das fórmulas que pode servir para pular etapas e aumentar a velocidade.

3.2.4 Conclusão

A atividade tinha como objetivo mostrar aos alunos que é possível acompanhar um processo de resolução do cubo mágico por meio de uma linguagem de símbolos. O resultado dessa atividade foi muito bom, pois todos os alunos obtiveram resultados positivos sobre o entendimento das estratégias para montar o cubo, bem como da importância da comunicação por meio de símbolos e notações específicas

Dos 7 alunos que frequentaram os quatro encontros, 6 foram capazes de dominar os algoritmos. A aluna Maria Clara não se motivou a aprender a montar a primeira camada, mas, a partir do roteiro com as fórmulas, foi capaz de concluir os outros passos.

No último encontro separado para o fechamento, organizei uma conversa com os alunos para ouvi-los sobre essa experiência. Durante a fala dos alunos notei alguns pontos importantes que me fazem concluir que a atividade atingiu seu objetivo: auto-estima elevada; valorização do uso de símbolos e empolgação em continuar o aprendizado sobre resoluções de puzzles em três dimensões.

Essa atividade mobilizou os alunos a realizar uma tarefa considerada muito difícil por eles, deixando a sensação de triunfo na turma. O aluno Diogo contou que não esperava conseguir montar o cubo mágico, pois nunca foi bom em matemática, mas que entendendo tudo desde o começo, não foi tão difícil assim. Conversando

com o professor de matemática da turma, ele me revelou que o aluno consegue entender os conceitos apresentados no sexto ano, mas esbarra em problemas anteriores como realizar multiplicações e divisões.

O comentário do aluno Diogo mostra mais do que sua auto - estima elevada frente ao triunfo sobre um problema difícil, denunciando que a recorrência de conteúdos não entendidos no passado, contribuem para uma impressão negativa de si mesmo frente a matemática escolar.

Segundo BORIN (2004), o jogo dentro da aula de Matemática também pode agir como desbloqueador para alunos com dificuldades.

Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que esses alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. (BORIN, 2004, p. 9)

Os alunos João Vitor, Maria Clara e Lucas Pereira observaram que a primeira etapa da resolução do cubo mágico foi a mais difícil, pois não tinham um roteiro a seguir.

Maria Clara e João Vítor questionaram o motivo de eu não apresentar um roteiro para a primeira camada, expliquei que a intenção era justamente que eles entendessem a dificuldade de estabelecer uma boa comunicação sem uma notação para facilitar o registro e a leitura. Quando perguntei se alguém concordava sobre as fórmulas terem facilitado, a turma inteira consentiu, mas Matheus disse que achava mais fácil memorizar alguns padrões que aparecem no cubo para decidir os movimentos, e que agora não precisava mais das fórmulas.

Lucas Pereira falou sobre a facilidade de ter um roteiro em mãos para resolver o cubo mágico, mas que só conseguiu trabalhar com agilidade após fazer um esqueminha que facilitava as rotações no sentido horário e anti-horário.

Esses comentários explicitam a valorização das fórmulas para entender e praticar os movimentos solicitados na resolução trabalhada. Para finalizar a atividade, mostrei alguns vídeos no canal do cubista Rafael Cinoto com o objetivo de que os alunos tomassem conhecimento da existência de outras técnicas. Durante a

exibição chamei a atenção para o fato de que as notações utilizadas por ele eram as mesmas que utilizamos durante os quatro encontros.

Por fim, acredito que a estratégia de trabalhar a solução do cubo mágico em três etapas foi efetiva. O fato de começarmos sem a notação, contando apenas com o cubo como material de estudo, para depois introduzir a notação e os algoritmos nas duas etapas seguintes, foi determinante para que os alunos entendessem a importância e a necessidade de uma boa notação para esta atividade.

Capítulo 4 – Atividades Algébricas

As quatro atividades a seguir desempenham um papel diferente daquele das atividades lúdicas. Enquanto os jogos tiveram a função de chamar a atenção para a importância dos símbolos e proporcionar a vivência da construção de uma notação matemática pelo aluno, as atividades algébricas têm a finalidade de evidenciar a praticidade da linguagem matemática, além do aprendizado usual dos tópicos estudados. Quando destacamos a característica prática dos símbolos, estamos colocando em foco não somente a compactação de ideias por meio de notações, mas a praticidade na etapa de tratamento dos registros, onde as transformações e reduções de um problema podem ser entendidos por meio da simbologia adotada.

Usualmente, as sequências didáticas são elaboradas partindo de casos mais simples e aprofundando de acordo com a evolução dos alunos. Nesta sequência de quatro atividades temos três objetivos principais:

1 - Mostrar que uma linguagem de símbolos tem o poder de compactar informações, comunicar situações tanto puramente algébricas como do nosso cotidiano.

2 - Mostrar que uma mesma equação pode ter vários contextos.

3 - Entender em qual campo semântico os alunos estão trabalhando e os tipos de equações que conseguem resolver.

4.1 Descrição das atividades

As atividades foram aplicadas uma semana depois da aplicação da atividade do cubo mágico. Os alunos foram organizados em dois grupos para que pudessem trocar ideias sobre cada atividade da sequência, um quarteto e um trio, mas cada aluno produziu o seu próprio registro. Todas as atividades foram entregues juntas e os alunos trabalharam nelas pelo período de uma hora. O professor de matemática da turma acompanhou os alunos e registrou a aplicação das atividades algébricas em vídeo para futura análise.

O vídeo gravado para essa análise tem 56 minutos e contém a aplicação das 4 atividades descritas. A importância de analisar esse material é ter acesso a elementos impossíveis de reconhecer a partir dos registros produzidos pelos alunos. Além do vídeo o professor da turma concordou em dar uma entrevista esclarecendo dúvidas sobre a aplicação e os impactos para o futuro de seu curso

Seguiremos descrevendo as atividades que podem ser encontradas no apêndice 2 e seus objetivos.

4.1.1 Atividade 1 - Compactar a informação

Descrição: Esta atividade consiste em trazer uma equação descrita em português que deve ser reescrita com limite de caracteres, para que o aluno seja forçado a utilizar símbolos a fim de comunicar a mesma ideia em um formato mais sucinto. Para tanto, a sala foi dividida em dois grupos. Cada grupo recebeu equações diferentes para fazer o processo de codificação e passar ao outro grupo no final da atividade. Havia uma preocupação com uma escolha boa de símbolos, já que o outro grupo precisava interpretar os códigos.

Objetivo: A intenção da atividade é fazer com que os alunos sintam a necessidade de utilizar símbolos para representar uma equação. A estratégia utilizada para isso cabe ao aluno, porém com a redução de caracteres imposta nessa atividade, esperamos uma linguagem que busque substituir o número procurado por algum símbolo e comunicar as operações por meio dos símbolos já conhecidos.

Antes de trocarem as folhas em que está escrita apenas a nova forma de representar as equações, os alunos devem, na folha com as equações em língua materna, registrar uma explicação dos símbolos utilizados, juntamente com a justificativa do motivo das escolhas feitas para essa nova representação.

A etapa em que o aluno deve explicar sua linguagem simbólica tem como objetivo direcionar o seu pensamento de forma a perceber os pontos positivos dessa linguagem, bem como, a necessidade de uma explicação prévia para que o leitor entenda a simbologia proposta.

4.1.2 Atividade 2 - Reescrever com símbolos um problema apresentado na língua materna

Objetivo: A atividade tem a função de chamar a atenção do aluno para o fato de que algumas situações podem ser descritas utilizando uma linguagem de símbolos. Com essa etapa da sequência didática buscamos perceber se as atividades anteriores (atividades lúdicas), que trabalham o entendimento da necessidade da linguagem simbólica e a codificação e decodificação, auxiliam o aluno a transpor as ideias presentes em uma situação descrita na língua materna para um registro em linguagem simbólica.

Descrição: A atividade consiste na apresentação de quatro problemas aos alunos. Em cada problema existe um ou mais valores desconhecidos.

Expectativa: Esperamos que os alunos representem cada problema utilizando a linguagem de símbolos que façam sentido a partir do contexto dos problemas.

4.1.3 Atividade 3 - Contextualizar equações

Descrição: A atividade consiste na apresentação de uma equação aos alunos, que devem criar um contexto para ela.

No final da atividade, será discutida a questão da adequação da contextualização apresentada, bem como chamaremos a atenção para o fato de que uma mesma equação pode ser a representação de muitas situações-problema.

Objetivo: O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos percebam que uma equação desprovida de um contexto é somente uma pergunta, que deve ser respondida dentro do universo da álgebra. Com isso queremos evidenciar que o problema não precisa ser vinculado a uma equação, podendo ser resolvido sem a etapa de transpor para a linguagem de símbolos. A algebrização deve ocorrer com a intenção de facilitar o entendimento e a resolução dos problemas e não por ser uma exigência da disciplina de Matemática.

Expectativa: Esperamos que ao fim da atividade cada aluno crie um contexto diferente para ficar evidente que uma equação pode representar diversas situações.

4.1.4 Atividade 4 - Equações sem técnicas

Objetivo: O objetivo dessa atividade é testar os níveis de equações que os alunos podem resolver sem a dependência de técnicas e mecanizações. Para isso contamos com o efeito das discussões feitas nas atividades anteriores sobre a linguagem simbólica e o entendimento de sua necessidade.

Descrição: Os alunos receberão uma folha contendo equações e devem descobrir o valor da incógnita. As primeiras equações presentes na folha possuem apenas uma operação no primeiro membro, em seguida equações com duas e três operações no primeiro membro e ao fim seguirão equações com operações nos dois membros.

Expectativa: Nessa etapa não esperamos que o aluno consiga encontrar o valor da incógnita em todas as equações, mas sim que o aluno utilize a ideia de operação inversa, como faria para resolver um problema em língua materna. Também não esperamos o domínio de técnicas, de forma que é esperado que o aluno esboce o seu raciocínio ou pelo menos indique a conta a ser feita.

4.2 Análise

Atividade 1

A primeira atividade algébrica consistia em compactar quatro equações descritas em língua materna. A proposta inicial era de que os alunos de cada grupo compactassem as equações, utilizando um número pequeno de caracteres, para depois trocarem e resolverem a equação. No entanto, durante a aplicação da atividade, o professor responsável não propôs a troca aos alunos, pois se deu conta de que alguns alunos já haviam utilizado o espaço destinado para a solução e assim resolvido.

O professor deixou que os alunos se organizassem para formar um trio e um quarteto. O quarteto recebeu as folhas do grupo A e foi formado pelos alunos Nicolas, Lucas Pereira, Diogo, Matheus. O trio formado por Laura, João Vítor e Maria Clara ficou com as folhas nomeadas como grupo B.

De forma geral todos os alunos utilizaram símbolos para representar o número desconhecido, porém no grupo A cada aluno utilizou um símbolo diferente, enquanto no grupo B os alunos utilizaram os mesmos símbolos. No momento de descobrir o número escondido, foi possível constatar, por meio das contas registradas, que todos os alunos utilizaram o raciocínio de operação inversa, mas no grupo A os alunos agiram de forma independente, pois apresentaram erros diferentes, enquanto que no grupo B os três alunos apresentaram o mesmo erro.

Essa atividade exigiu uma participação grande do professor, pois os alunos buscaram resolver as equações descritas em português em vez de reescrever utilizando símbolos. O professor procurou deixar claro que o objetivo não era resolver, mas os alunos estavam inseguros com o fato de não finalizar os exercícios com uma resposta numérica.

A insegurança dos alunos nos faz acreditar que esse tipo de atividade era novo, ou pouco usual. Falas do tipo “E esse símbolo, é a gente que vai fazer?” foram constantes. O grupo B ainda não havia começado até João confirmar com o professor se estava entendendo a proposta: “Tipo, casinha vezes quatro é igual a 24?”.

A atividade seguiu com a busca de confirmações pelos alunos e o momento de maior dificuldade do grupo B foi a confusão com alguma terminologia. João confundiu “quinta parte” com “quíntuplo” e Laura não entendia o significado de “terça parte”. O professor pediu para que se lembrassem do trabalho com frações, o que ajudou muito no caso de Laura, mas para João prosseguir foi preciso retomar o que era quádruplo e trazer um exemplo concreto de uma situação envolvendo a “quinta parte” de um número.

Após superar a dificuldade com os termos utilizados, o grupo B se animou em criar símbolos para realizar a atividade. Durante a atividade, João e Maria Clara voltam a tentar encontrar o número desconhecido, mas divergiram sobre um dos resultados e João buscou esclarecimentos sobre a equação que montou perguntando ao professor, que prontamente confirmou sua resposta.

O grupo A terminou um pouco mais rápido e começou a resolver as equações no verso da folha, então o professor optou por não trocar as folhas dos grupos, como a atividade sugeria, para incentivar a resolução das equações. Em entrevista o

professor explicou que a troca de atividades entre os alunos não seria boa para alguns alunos da sala. "... o João por exemplo não gosta de mostrar aos amigos o que escreve no papel. Em uma das atividades que propus esse ano, os alunos deveriam corrigir os exercícios feitos pelos outros, mas o João pediu pra que a mãe enviasse um bilhete dizendo que ele estava muito desconfortável com a situação".

A atividade seguiu com os grupos buscando encontrar os números desconhecidos. Durante a resolução das equações surgiu a ideia de operação inversa e começaram a aparecer sinais com as mãos, nos quais os alunos giram o pulso, indicando a ideia de desfazer o feito. Nesse momento podemos perceber que esses alunos entendiam que precisavam desfazer as operações para encontrar o número que faltava no enunciado, operando no Campo Semântico da Máquina estado-operador.

O núcleo construído pelos alunos está cercado pelo conceito de número natural. Um exemplo dessa referência ao conjunto dos naturais é o questionamento de Nicolas ao professor sobre um dos resultados obtidos:

"Mas vai dar número com vírgula de qualquer jeito. Professor, pode dar número com vírgula?"

O professor explica que pode ser qualquer número, que não existe uma restrição a um determinado conjunto, mesmo sabendo que o resultado era um número natural. Sua intenção era começar a provocar os alunos para construírem outras afirmações locais.

Na fala do professor, "Eles associam resposta de questão a um número natural ou fração, sem perceber que a fração é apenas uma forma de representar números racionais. Apenas em contextos específicos, como problemas com dinheiro ou altura, não estranham números decimais", notamos a preocupação em propor outra afirmação local, na qual os alunos percebam que um exercício pode ter como resposta qualquer número, exceto se apresentar alguma restrição ou contexto específico.

Os erros ocorridos nessa atividade foram por falta de atenção, pois todos conseguiram escrever as equações utilizando um símbolo para representar o número a se descobrir, bem como o raciocínio de utilizar a operação inversa foi armado de forma correta.

No grupo A, o aluno Lucas Pereira apresentou um erro de cálculo para resolver a equação $x \cdot 4 = 312$, tendo obtido 76 em vez do resultado correto que era 78. O aluno Nicolas resolveu corretamente a equação $x - 115 = 19$, mas deu como resposta o número 19. Acredito que o aluno confundiu sua resposta com o número que aparece no segundo membro da equação.

As folhas do João Vítor apresentam as soluções das equações $x \div 5 = 27$ e $x \cdot 3 = 819$, porém somente a segunda traz o raciocínio correto, visto que na primeira ele tenta dividir 27 por 5. Mesmo assim, o grupo chegou no resultado correto para a primeira equação, apesar de não ter apresentado os cálculos.

As folhas da aluna Laura apresentam os cálculos para as equações $x + 57 = 101$ e $x - 83 = 39$. A partir do vídeo, constatamos que aluna realizou os cálculos em uma calculadora e registrou as respostas na etapa de escrever a equação utilizando símbolos. As únicas contas apresentadas na atividade de Laura são a prova real das contas realizadas para resolver as equações.

Laura acertou o resultado da equação $x + 57 = 101$, que era 44, porém errou o resultado da equação $x - 83 = 39$, colocando como resposta 127. No momento de realizar a prova real Laura armou a conta como $127 - 83$ e obteve o número 44, o que gerou confusão com o resultado da outra equação. No fim da atividade o grupo acertou todas as respostas, exceto o da equação $x - 83 = 39$ que foi respondido como 44.

Ao observar a folha de João e constatar que ele não havia escrito a equação, o professor diz, “É o que você falou para mim há dois minutos atrás, pode colocar”. Observando essa insistência dos alunos em finalizar a atividade dando como resposta um valor numérico, me convenço sobre a importância de propor atividades que trabalhem mais do que o tratamento de um objeto matemático, expondo os alunos a situações nas quais é importante refletir sobre os objetivos.

A forma como o professor conduziu a atividade não focou no objetivo de utilizar a linguagem algébrica como forma eficiente de transmitir uma mensagem. Entretanto a proposta de os alunos escreverem a equação em uma forma reduzida para depois resolver, traz um movimento muito comum no estudo de Matemática, onde utilizamos a linguagem algébrica para organizar as informações e tornar mais

fácil a construção do raciocínio para resolver um problema. Essa diferença no percurso não foi um problema para o decorrer das etapas seguintes.

A etapa de codificar a informação dada na língua materna e resolver a equação tiveram um resultado muito positivo. A atividade foi muito importante, pois, além de trabalhar a linguagem algébrica e destacar seu caráter prático, trouxe aos alunos uma proposta que os tirou da zona de conforto, onde bastava encontrar um determinado valor numérico.

Atividade 2

A atividade 2 trazia problemas do cotidiano para que os alunos montassem equações. Novamente, os alunos estranharam o objetivo da atividade e começaram a ter dúvida sobre a finalização.

O primeiro problema tinha o seguinte enunciado "Maria foi comprar um cubo mágico que custava 37 reais. Pagou com uma nota de 100 reais. Maria deu o troco para sua mãe".

Matheus pergunta ao professor o que deve fazer com a expressão que chegou e como poderia representar o troco. O professor tenta mostrar que ele já havia terminado a atividade para o primeiro problema

Professor - O que seria o quadradinho? - apontando para a equação escrita por Matheus.

Matheus - O troco.

Professor - Então acabou.

A dificuldade dos alunos em entender a proposta da atividade não era esperada, mas a participação cada vez menor do professor, ao longo da atividade, mostra que a exposição aos novos comandos gerou um movimento de reflexão por parte dos alunos.

O aluno Diogo teve facilidade em encontrar os números desconhecidos por meio das operações inversas, mas não atingiu os objetivos da atividade inicialmente, pois buscou um símbolo para o valor encontrado, em vez de procurar representar a situação descrita. O aluno demorou a entender a proposta, questionando o que fazer

após encontrar o valor - “Esse resultado”, apontando para a conta que realizou ao trabalhar o problema, “é isso daqui”, apontando para o quadrado na folha, “e aí o que eu faço?”. O professor pediu para que Lucas montasse a situação como se ele não soubesse o número em questão, o que foi feito na sequência a partir da comparação com a tarefa dos alunos do grupo de Diogo.

Todos os alunos conseguiram representar essa situação sem dificuldades. O aluno Lucas Pereira escolheu um símbolo e igualou diretamente a 63, que é o resultado da conta $100 - 37$, enquanto a aluna Laura armou a subtração "em pé" e, no lugar do resultado, colocou uma estrela. Os demais seguiram a ideia de escolher um símbolo e igualar a $100 - 37$.

O segundo problema contava com uma informação a mais e tinha o seguinte enunciado "Marcos foi ao mercado e comprou um pacote de biscoitos que custava R\$ 3,70, um suco de caixinha que custava R\$ 4,10 e um repelente de mosquitos. A compra de Marcos custou R\$11,00 no total."

Nesse problema ficou evidente a dificuldade com a falta de uma pergunta norteadora, como era esperado em algum momento da atividade. Matheus foi o primeiro a expor essa dificuldade, “Não entendi a dois, não tem pergunta”, o professor pediu que lesse novamente. Então o aluno elaborou uma estratégia: “Eu vou fazer esse mais esse, vai dar 7,80, aí faço 11 menos 7,80”. O professor fez provocações perguntando o que significava cada valor do problema, para que Matheus entendesse que esse resultado é o preço do repelente, que era o valor desconhecido do problema.

Além de Matheus, Diogo também resolve o problema e tem dificuldade em entender que a ideia da atividade é descrever a situação problema por meio de uma linguagem de símbolos. Enquanto isso, o outro aluno do grupo, Lucas Pereira, utilizava dois símbolos para descrever a situação, um para o valor desconhecido e um para representara a soma dos dois valores conhecidos.

Matheus atribuiu símbolos para o preço do biscoito e do suco de caixinha, igualando a adição dos dois símbolos com 7,80, e fazendo $11 - 7,80$ na sequência para determinar o preço do repelente, ao qual também foi designado um símbolo. Maria Clara realizou as contas de forma direta e, no fim, atribuiu um símbolo para o preço do repelente e igualou ao resultado das contas.

No grupo B, agora com a presença de Nicolas, que mudou de grupo pois Laura precisou sair da aula, a confusão aconteceu pois Nicolas não levava em consideração o repelente, acreditando haver um erro no enunciado, pois a soma dos preços dos outros dois produtos resultava em 7,80 e não em 11 reais. O professor chamou a atenção para o repelente e Maria Clara comemorou por ter acertado ao montar a equação.

Diogo, João Vítor e Nicolas representaram a situação de formas diferentes, mas atribuindo um símbolo para o valor final das operações realizadas. Diogo representou o enunciado com a soma do símbolo que representava o preço do repelente com 3,70 e 4,10, igualando a 11. Nicolas utilizou o raciocínio de operação inversa e igualou o símbolo escolhido a $11 - 7,80$. João Vítor armou a conta "em pé" e no lugar do resultado colocou uma interrogação, porém se confundiu e armou $7,80 - 11$.

O terceiro enunciado apresentava dois números desconhecidos, mas explicitava duas relações entre eles. "Érica comprou uma bola de futebol e uma bola de vôlei para se divertir com os amigos do condomínio. A bola de vôlei custou R\$ 6,00 a mais do que a bola de futebol e Erica gastou R\$ 54,00 no total".

Os alunos João Vitor, Maria Clara e Nicolas escolheram um símbolo para a bola de futebol e igualaram com a expressão $(54 - 6) \div 2$, evidenciando o raciocínio de operação inversa para resolver o problema.

O aluno Diogo escolheu um símbolo para a bola de futebol, um para a bola de vôlei e somou ambos resultando em R\$ 54,00, não utilizando a informação que relacionava o preço dos dois tipos de bola.

Os alunos Matheus e Lucas Pereira apresentaram algumas adições experimentando números de modo que um fosse 6 unidades maior que o outro, para tentar chegar ao preço de R\$54,00. Ambos chegaram no valor da bola de vôlei e designaram um símbolo para representa - la.

Para os alunos Matheus e Lucas Pereira, o símbolo aparece apenas como uma formalidade a ser cumprida em vista do enunciado da atividade pedir que utilizassem símbolos. Os outros alunos realizaram a atividade de forma a identificar a informação que faltava no enunciado e substituir por um símbolo, montando uma equação que descrevesse a situação.

O quarto enunciado também trazia dois valores desconhecidos e duas relações entre eles, mas dessa vez de forma mais direta. "Henrique possuía o dobro de figurinhas de Marcela. Os dois juntos possuíam 84 figurinhas"

Os alunos apresentaram maior dificuldade com esse problema. Os dois grupos buscaram dividir a quantidade de figurinhas em partes iguais, enquanto o professor tentava desequilibrar o raciocínio por meio de perguntas, até que decidiu chamar a atenção para a proposta da atividade.

"Foi pedido para vocês resolverem? Só foi pedido para representar com símbolos. Vocês sabem as quantidades de figurinha? É igual ao problema da bola de vôlei".

A partir disso, os alunos conseguiram finalizar a atividade, sempre confirmando com o professor se bastava escrever a expressão. Diogo determinou símbolos para as quantidades de figurinhas, colocando - os lado a lado, seguidos do sinal de igual e do número 84, sem colocar o sinal da adição. O professor perguntou o que ele queria dizer com aquela expressão. Beni explica que os dois juntos possuem 84 figurinhas, e o professor insistiu em perguntar que símbolo matemático está relacionado com a junção das figurinhas. O aluno terminou colocando o sinal de mais.

Todos os alunos atribuíram símbolos ou letras para a quantidade de figurinhas de Marcela e Henrique, somaram os dois símbolos e igualaram a 84, não utilizando a informação sobre as duas quantidades.

É interessante observar que metade dos alunos conseguiu resolver os problema 3 mas não o problema 4.

Como havia aparecido anteriormente dúvidas sobre expressões como "quinta parte", "terça parte" e como a maioria dos alunos estava raciocinando no campo semântico da Máquina estado - operador, podemos conjecturar que a dificuldade com o problema 4 foi trabalhar com a expressão "dobro das figurinhas" ou associá-la com "a metade" como operação inversa.

O desempenho dos alunos foi muito bom nessa atividade. Todos os alunos conseguiram trabalhar nos dois enunciados iniciais, que eram os mais próximos do tipo de problema que trabalharam ao longo da vida escolar e trouxeram ideias

interessantes para os enunciados mais complexos, tais como trabalhar por tentativa e erro para encontrar resultados e utilizar dois símbolos diferentes para montar uma equação.

Ao final da atividade havia uma pergunta sobre o que motivou os alunos a escolherem os símbolos utilizados. Diogo respondeu que escolheu os símbolos para combinar com os problemas e Lucas Pereira respondeu que havia escolhido porque gostava de formas geométricas.

Atividade 3

A terceira atividade trazia duas equações utilizando a letra x para representar a incógnita e pedia para os alunos escreverem uma situação que poderia ser representada por cada equação. Em seguida, os alunos responderam a 6 perguntas que tinham como objetivo destacar que cada equação pode ser representada por problemas diferentes.

O professor iniciou a atividade explicando sobre a proposta, frisando que a intenção não é resolver a equação e sim criar situações que possam ser descritas pela equação. Matheus buscou descrever de forma puramente matemática, como na primeira atividade, “o triplo de um número somado a...”. O professor explicou que quer situações do cotidiano.

A estratégia de Lucas Pereira foi encontrar os valores desconhecidos e depois montar uma situação omitindo o valor encontrado. Nicolas, que trabalhava da mesma forma, estranhou o número com vírgula novamente, e disse ao professor que deveria trabalhar em um contexto envolvendo dinheiro, pois assim era possível trabalhar com decimais.

O fato de um aluno levar em consideração o resultado da equação para elaborar um enunciado condizente não era esperado, mas atingiu o objetivo da atividade de explicitar que a equação sozinha não é suficiente para descrever um contexto. A relação feita por Nicolas extrapolou os objetivos traçados e trouxe uma reflexão para o fato de que algumas equações não podem caracterizar determinados tipos de situações.

Os três alunos do grupo A conseguiram elaborar enunciados condizentes com a primeira equação. Diogo descreveu o primeiro termo da equação $x + 3 = 7$, mas não mencionou o segundo termo no enunciado "Tenho 3 figurinhas e comprei mais algumas para minha coleção".

A equação $3x + 1 = 19$ foi um problema para o grupo A, pois os alunos não conseguiram elaborar enunciados, deixando em branco. Matheus indicou que x valia 6, mas não mostrou como chegou a essa conclusão.

A segunda equação se diferencia da primeira pois a incógnita está sendo multiplicada por 3. Apesar dos alunos entenderem que o x escondia um número, não conseguiram encontrar uma situação cotidiana que seria representada pela multiplicação da incógnita.

Os integrantes do grupo B novamente produziram registros muito semelhantes. Os alunos conseguiram encontrar um enunciado que poderia ser descrito pela equação $x + 3 = 7$. O aluno João Vítor colocou um enunciado diferente dos de alunos Nicolas e de Maria Clara, variando os objetos relacionados.

O grupo B também teve um bom desempenho para criar um enunciado para a equação $3x + 1 = 19$, utilizando a ideia de uma entrada de 1 real e três parcelas de x reais que totalizam 19 reais. A resposta de João Vítor denuncia que essa discussão não foi completamente entendida por ele, pois seu enunciado foi "Thiago deu 1 na hora e parcelou em 3".

O grupo A trabalhou a equação $x + 3 = 7$ com enunciados nos quais os alunos possuíam 3 objetos, que variavam para cada aluno, e juntavam uma outra quantidade para juntar 7. O grupo B trabalhou a mesma equação a partir de enunciados que relacionavam objetos a preços, totalizando um gasto de 7 reais. Aparentemente o fato de o grupo B ter relacionado as equações a partir de contextos envolvendo dinheiro pode ter facilitado a elaboração do enunciado para a equação $3x + 1 = 19$.

Ambos os grupos buscaram enunciados que descreviam situações cotidianas em vez de enunciados dentro de um contexto puramente matemático como "um número que somado a três resulta em sete".

A segunda parte desta atividade foi importante para registrar as impressões dos alunos sobre importância e o papel da incógnita para a resolução de uma equação.

A primeira pergunta "qual é a diferença entre uma sentença com símbolos e uma situação descrita em língua portuguesa?" foi respondida por quatro alunos e em três das respostas apresentaram a ideia de que a linguagem simbólica traz um desafio. Essa impressão deixada nos alunos é fruto da forma como a atividade foi encaminhada, pois sempre que uma situação era trazida em linguagem materna, os alunos deviam converter para a linguagem simbólica e sempre que uma sentença com símbolos era apresentada, os alunos deviam encontrar o valor da incógnita.

A segunda pergunta "A linguagem de símbolos é importante? Por que?" foi respondida por todos os alunos e tem um papel importante para entendermos como os alunos enxergam o uso de símbolos para resolver problemas.

Lucas Pereira, Maria Clara e Matheus disseram que a linguagem de símbolos não é importante, pois ela é apenas outra forma de escrever uma situação escrita em língua materna. Para esses alunos as equações estão diretamente ligadas a situações contextualizadas.

Lucas Pereira prefere a linguagem de símbolos e responde que a mesma surgiu para "esconder números em operações", revelando que, para ele, os símbolos são apenas uma aplicação. Quando perguntado sobre a possibilidade de resolver problemas sem a linguagem de símbolos, o aluno responde que não é possível.

Maria Clara por sua vez revela que tem dificuldades em trabalhar com os símbolos ao responder que a linguagem simbólica surgiu para dificultar e que é possível resolver problemas sem os símbolos. Matheus também responde as perguntas de forma semelhante acrescentando que não só é possível resolver problemas sem utilizar símbolos, como é muito mais fácil.

Embora os alunos não encarem a linguagem simbólica como essencial, os três afirmam que os símbolos ajudaram a resolver o cubo mágico. A leitura que faço desses três casos é de que para eles a conversão para os símbolos é uma etapa a mais para resolver um problema e que, independente de gostarem ou não de trabalhar com símbolos, poderia ser pulada, pois é possível trabalhar sem converter.

Já João Vítor, Nicolas e Diogo responderam que a linguagem simbólica é importante, mas trazem justificativas diferentes para suas respostas. Diogo acredita que os símbolos tornam a resolução de problemas mais rápida, enquanto João Vítor e Laura acreditam que os desafios devem ser propostos por meio de símbolos. Ao responder porque a linguagem de símbolos é importante, Laura diz que sem os símbolos, os problemas viriam com resposta, fazendo referência ao papel de incógnita que os símbolos ocuparam durante as atividades.

Quando estimulados a refletir sobre o surgimento dos símbolos, os três alunos dizem que os símbolos podem ter surgido porque os matemáticos gostam de desafios.

Ao observar as respostas dos alunos podemos perceber que todos associaram os símbolos com a ação de buscar respostas. Metade da sala entendeu que os símbolos podem ser de grande ajuda para resolver problemas e classificaram a linguagem com símbolos como importante, enquanto a outra metade reconheceu que a possibilidade de resolver problemas sem símbolos tornava a linguagem opcional.

É importante observarmos que classificar a linguagem de símbolos como importante ou não importante foi uma ação independente dos grupos formados em sala de aula, visto que alunos de um mesmo grupo possuem opiniões diferentes. Esse fato é essencial para garantir que o questionário foi respondido de forma pessoal e retratou as impressões de cada um a partir da proposta.

Atividade 4

O professor dá início a atividade explicando que os alunos poderão utilizar a calculadora em vista do tempo curto e do objetivo da atividade. Os alunos se mostram empolgados para resolver a equação e decidem que em cada equação um integrante manipulará a calculadora.

O professor começa a investigar os métodos dos alunos.

Professor: - O que você está fazendo?

Nicolas - A conta ao contrário. Precisa anotar a conta?

Professor - Não, eu estou filmando.

João - Agora é o de mais, porque antes era menos - apontando a conta seguinte para Nicolas.

A conversa com Nicolas e João mostrou que os dois alunos foram levados ao campo semântico da Máquina estado operador, sempre buscando desfazer o feito com um determinado número.

Diogo conseguiu descobrir alguns números apenas testando valores numéricos para as incógnitas. Quando questionado pelo professor também revelou que operava no campo semântico da Máquina estado operador:

Professor: E quando número é muito grande? Como você faz?

Diogo: Se é mais eu faço menos.

Professor: E se for de vezes

Lucas Pereira: Aí divide.

Analisando a sequência didática proposta é razoável dizer que a primeira atividade pode ter induzido os alunos a trabalhar nesse campo semântico. Na primeira atividade o aluno escolhe um símbolo para representar um número desconhecido, envolvido em uma série de operações, e a expressão que chega se assemelha com as expressões da última atividade, apenas com a diferença de o símbolo agora é o x . Conjecturamos que o aluno se lembre do processo utilizado na primeira atividade, de utilizar a operação inversa, e o utiliza para resolver as equações propostas na última.

De acordo com o currículo escolar do 6º ano seria possível que os alunos trabalhassem sobre o conceito de parte de um todo, pois conhecem as ideias relacionadas às frações, mas de fato não era esperado que os alunos operassem no campo semântico da Balança ou no campo semântico do Pensamento Algébrico.

Um fato que chamou muito a atenção é que os alunos não estranharam o ponto como sinal de multiplicação, interpretando corretamente como multiplicação. A atividade 3, que buscava descrever a equação, ajudou os alunos a entenderem essa notação, como explicou o professor na entrevista

“Apesar de não aparecer no vídeo, na atividade de montar um enunciado para o problema, eles ficaram bastante na dúvida. O Matheus perguntou se o 3 ponto x significava que tinha três chocolates.” (Matheus elaborou um enunciado no qual não conhecia o preço dos chocolates).

O grupo A errou apenas a equação 8, enquanto o grupo B errou as equações 3 e 13. Observando vídeo e a sequência de equações, acredito que foi apenas um erro em cálculo, pois outras equações que cobram a mesma inversão de operações estão corretas.

O vídeo possibilita que observemos o trabalho até a equação 12, pois a câmera ficou sem bateria e o professor finalizou o trabalho sem gravar. O que podemos observar no vídeo, é o constante movimento de inverter as operações e realizar as contas na calculadora.

O professor explicou que para as equações 12 a 14 os alunos continuaram trabalhando igualmente. Nos exercícios 15 e 16 os alunos começaram a se atrapalhar com a quantidade de operações que precisariam inverter (3 operações), e passaram a atribuir um número no lugar do x . Perguntei ao professor se ele deu essa dica aos alunos.

“Eles me perguntaram como fazer da 15 em diante, porque havia dito para pular o que não soubessem. Eu disse que não falaria nada sobre esse último exercício, para fazerem o que achassem. O Nicolas perguntou se podia ficar tentando números. Respondi para fazer como conseguisse e nisso o Lucas Pereira falou pro grupo dele começar a fazer como o outro.”

A última equação trazia a incógnita nos dois membros da equação, e isso impossibilitou os alunos de continuarem. O grupo A deixou a equação em branco, enquanto o grupo B passou um traço na equação, indicando que não fariam.

Segundo o professor, “A equação 17 congelou os alunos. Não conseguiram começar a chutar números e perguntaram se o x tinha que ser o mesmo”. Essa impossibilidade, diante de uma equação com incógnita nos dois membros, pode ter ocorrido por causa do campo semântico no qual os alunos estavam trabalhando, sendo um limitante.

O campo semântico da Máquina estado - operador tem como premissa as operações feitas em um determinado número para resultar em um valor numérico. Com a incógnita em ambos os lados, não existe mais sequência de operações feitas em um número inicial.

A atividade de propor equações aos alunos, sem que os mesmos tivessem sido previamente expostos a técnicas de resolução, foi muito importante para percebermos que é possível trabalhar as equações com incógnita no primeiro membro sem dar procedimentos, deixando que os alunos percebam sozinhos formas de resolução.

O fato de fecharmos a sequência com alunos do sexto ano sendo capazes de resolver alguns casos de equações de primeiro grau me convence de que o significado das letras e símbolos é tão importante quanto as técnicas de resolução, e deve ser visto como ponto de partida importante nas aulas de matemática no início do ciclo Fundamental II.

4.3. Contribuições da atividade para o sétimo ano.

A sequência didática aplicada para a turma do 6º ano de 2015 teve influência direta no aprendizado de equações para os alunos participantes. Esses alunos fazem parte da turma do 7º ano de 2016, que conta com dois alunos novos.

O professor de matemática que aplicou as atividades seguiu a turma para o 7º ano e trouxe alguns relatos interessantes sobre a influência da abordagem que se seguiu neste trabalho.

Em entrevista o professor revelou que iniciou o trabalho com equações no sétimo ano a partir de uma lista de equações, com incógnita apenas no primeiro membro, a fim de retomar o que havia sido feito e diagnosticar se os dois alunos novos conseguiriam seguir.

“... comecei com uma lista de equações, do mesmo tipo que encerrou a sua atividade, assim podia partir com os 9 alunos do mesmo ponto. Organizei os alunos em duplas e tomei o cuidado de colocar os alunos novos junto com alunos que apresentam bom desempenho em matemática. O resultado foi ótimo, porque os alunos que participaram do projeto no ano passado conseguiram trabalhar a partir

da operação inversa e ensinar os alunos novos, que não tiveram dificuldades em aprender...”

O primeiro ponto positivo desse relato é o fato de que os alunos se mantiveram no campo semântico da máquina estado - operador, evitando erros comuns recorrentes quando os alunos não dão significado a incógnita.

Seguindo com a investigação, questionei o professor sobre as equações com mais de uma parte literal, mas ainda com incógnitas no primeiro membro. O professor contou que antes de trabalhar equações a sequência da apostila abordava expressões algébricas.

A estratégia utilizada pelo professor foi trabalhar as letras como sacos com pesos desconhecidos, juntando apenas sacos de mesmo peso. Por exemplo, para simplificar a expressão algébrica $x + 2y + 3y + 2x$, os alunos pensavam que tinha 3 sacos de peso x e 5 sacos de peso y .

Segundo o professor essa abordagem facilitou muito no momento de propor equações com mais de uma parte literal no primeiro membro, pois “os alunos viam $2x + 3x$ na equação e já transformavam em $5x$, para depois aplicar os conceitos de operação inversa”.

Perguntei se a escolha de utilizar a ideia de “peso” tinha relação com o campo semântico da Balança. O professor revelou que não havia percebido isso, e que não sabe dizer se ajudou ou não, pois o início dessa ideia foi bastante complicado.

“... a sala se incomodou muito ao ver a incógnita nos dois membros. A princípio usei esse incômodo ao meu favor, dizendo que agora necessitaríamos de algumas técnicas mais elaboradas, mas notei que os alunos utilizavam o princípio da balança somente para deixar a incógnita de um lado só, e depois resolviam por operação inversa.”

Apesar de o campo semântico da Máquina estado - operador ser eficaz para a resolução de uma boa parte das equações, fica evidente seu limite, as equações com incógnitas em ambos os membros. Pela fala do professor podemos perceber também a resistência dos alunos em modificar as afirmações locais que compõem seu núcleo.

Perguntei ao professor como ele lidou com essa postura dos alunos, de utilizar a técnica apresentada para reduzir o problema e trabalhar a partir de conhecimentos prévios. O professor explicou que durante a primeira semana de trabalho ele resolvia as equações das duas formas na lousa, enfatizando a importância de organizar uma linha abaixo da outra e no fim comparando o que havia escrito, para chamar a atenção de que a ideia da Balança nada mais era do que aplicar a operação inversa.

O professor explicou que os alunos Lucas Pereira, Diogo, Matheus e Henrique (um dos alunos novos) tiveram facilidade e começaram a pular as passagens, deixando a resolução mais prática. Os outros alunos continuaram enxergando a equação em duas etapas:

1 - Deixar todas as incógnitas em um lado da equação.

2 - “Juntar” as incógnitas e aplicar as operações inversas.

Perguntei se era possível notar isso apenas observando exercícios feitos pelos alunos.

“Eu só sei que eles fazem assim porque os vejo trabalhando em aula. A diferença dos alunos que resolvem pela ideia da balança é que eles pulam passagem, parecendo que “passaram” as incógnitas para um lado e os números para o outro, enquanto os alunos que trabalham em duas etapas deixam evidente que subtraíram a incógnita dos dois lados e depois continuam resolvendo.”.

Capítulo 5 - Considerações finais

Segundo PONTE (2006), a pesquisa dentro de um contexto educacional tem a intenção de investigar aspectos da aprendizagem dos alunos, que foi o objetivo deste trabalho, e das práticas profissionais dos professores. No decorrer deste trabalho, nos preocupamos em mostrar o que motivou a elaboração e a análise da aplicação de cada uma das atividades em uma turma de 6º ano.

Seguimos agora com um resumo das aplicações das atividades e levantamento dos objetivos atingidos, e acrescentamos sugestões de melhorias que podem ser feitas em futuras aplicações e pesquisas.

5.1 Quadro geral da sequência didática

A sequência didática proposta previa duas atividades lúdicas e quatro atividades algébricas. Pela complexidade das atividades lúdicas e exigência de preparo do professor aplicador, optei por estar presente na aplicação das mesmas. Nas atividades algébricas pude tomar certa distância, necessária para analisar a efetividade das atividades, como sugere PONTE (2006). O fato de o professor da turma aplicar as atividades garantiu que eu não me envolvesse ou influenciasse os alunos de alguma maneira para obter resultados esperados.

As atividades lúdicas atingiram seus objetivos gerais de chamar a atenção para a praticidade do uso de símbolos e a importância de uma linguagem simbólica bem definida. O fato de os alunos reconhecerem as notações do cubo mágico como facilitadoras e buscarem símbolos para compactar informações nos indica o sucesso das atividades.

Segundo BERENELLI (2003), a criação de um espaço para pensar em sala de aula é importante por estimular a criança a tomar para si os desafios propostos e desenvolver sua inteligência e raciocínio de forma prazerosa.

Na atividade “instruções de direção”, a maioria dos alunos apresentou textos como instruções em vez de desenhos utilizando símbolos, o que não era esperado. Mas o que pudemos reparar foi que nos dois únicos casos em que o

receptor da informação chegou ao local previsto, os instrutores utilizaram desenhos e símbolos do conhecimento de todos.

A atividade do cubo mágico foi muito bem aceita pela turma. As etapas foram cumpridas dentro dos prazos esperados e todos os alunos foram capazes de resolver o cubo mágico a partir das instruções. Apesar da resistência de uma aluna para aprender a primeira camada, os alunos reconheceram que as etapas que dependiam de fórmulas eram mais fáceis, pois as letras associadas aos lados do cubo facilitavam a leitura do roteiro e posterior memorização.

Um fato interessante na atividade do cubo foi a crítica de um dos alunos à notação utilizada, seguida de uma proposta de outra notação, que comunicava melhor aquela ideia e trazia agilidade ao processo de leitura das anotações para resolver o cubo. Isso mostra que, além do domínio daquela notação, que é difícil, esse aluno ainda conseguiu refletir sobre ela e elaborar uma nova notação, contribuindo assim para um aprimoramento dessa questão.

As atividades algébricas foram aplicadas pelo professor da turma e, conforme relatado em 4.2 houve uma pequena alteração: A atividade de compactação da informação contava com uma etapa em que os grupos trocariam as folhas para que os colegas do outro grupo tentassem entender a mensagem compactada. A escolha do professor de não trocar as folhas e ter seguido a atividade com a resolução da equação montada pelos alunos não teve um grande impacto no fim da sequência, pois havia outra atividade que tinha como objetivo entender o que significa resolver uma equação. A mudança ocorreu porque a turma foi exposta a descobrir o resultado de uma equação antes de passar por todas as etapas. Essa antecipação acabou levando os alunos a trabalharem no campo semântico da máquina estado - operador para poderem resolver uma equação a partir de um enunciado que descrevia operações feitas em um número desconhecido.

As atividades seguintes, “reescrever com símbolos um problema dado na língua materna” e “contextualizar a equação” tinham a intenção apenas de chamar a atenção para o fato de que podemos utilizar uma equação para representar uma situação problema, mas que a equação sozinha não dá conta de descrever uma situação específica.

O objetivo principal foi cumprido, pois cada aluno pensou em uma situação e teve acesso a produção do amigo. O que chamou a atenção nessa atividade foi o fato de um dos alunos se preocupar com o resultado da equação para conseguir criar sua situação problema. Ainda que o aluno tenha chegado em um resultado errado, pois afirmava ter encontrado “um número com vírgula”, sendo que o valor da incógnita era um número natural, a preocupação em observar esse resultado e concluir que problemas envolvendo dinheiro era mais adequado, extrapolou as expectativas da atividade. Se por um lado, o aluno errou a resolução da equação, por outro, ele foi bastante perspicaz ao pensar num contexto adequado para que a solução pudesse ser um número não inteiro.

5.2 - Concepções da Álgebra dentro das atividades trabalhadas

Neste trabalho vimos algumas concepções de álgebra, que se diferem pelo contexto e tratamento que damos as letras, para situar nosso tema: álgebra como generalizadora da aritmética, álgebra funcional, álgebra das equações e álgebra estrutural.

O tema abordado neste trabalho, por ser trabalhado no primeiro ano do Ensino Fundamental II levou em consideração a transição de um tratamento aritmético para um tratamento algébrico.

A primeira atividade algébrica, de compactação da informação, teve papel essencial para evitar que o tratamento aritmético visto no Ensino Fundamental I fosse aplicado na resolução de equações. Ao escolher um símbolo para representar um número desconhecido e montar uma expressão que caracterizasse as operações feitas com esse número para chegar em um resultado, os alunos foram levados a pensar nas operações inversas como estratégia de resolução.

Segundo SILVA (2010), o significado “... é produzido através da relação do sujeito com o mundo ao qual ele pertence e que lhe coloca a disposição vários modos de produção de significados que são históricos, sociais e culturais”. No caso da primeira atividade algébrica, as questões formuladas pelos alunos e as ideias

trocadas em grupo nos levam a crer que as interações produziram significados que os levaram a trabalhar no campo semântico da Máquina estado - operador.

Situar os alunos nesse campo semântico, apenas estimulando a produção de significados, trouxe duas vantagens:

1 - Diminuição de um erro recorrente, também citado no trabalho de GOMES (2003), em que, por exemplo, o aluno acredita que $3x + 4 = 7x$. Trabalhando no campo semântico da Máquina estado - operador, o aluno pensa primeiro em buscar operações inversas, em vez de tentar “juntar” os termos.

2 - Os alunos são capazes de resolver equações de primeiro grau com uma incógnita no primeiro membro sem depender de uma regra. Isso dá aos alunos tempo para consolidar o significado da incógnita até que, no ano seguinte, o professor possa conduzir a turma para um campo semântico mais avançado, em que ele possa resolver equações mais elaboradas.

Segundo GOMES (2003), “Para trabalhar com valores simbólicos, o estudante precisa ampliar o conceito de notação usado para as operações aritméticas”. Observando os resultados apresentados na última atividade e a influência da sequência no decorrer do ano seguinte, é razoável concluir que houve ampliação do conceito de notação usado para as operações aritméticas.

A escolha de antecipar a apresentação do conceito de incógnita para o sexto ano teve como motivação uma experiência negativa com uma turma de sétimo ano onde o trabalho com equações teve como desfecho a mecanização de técnicas e perda de significado da letra.

Segundo TINOCO (2011), um dos objetivos da Matemática no Ensino Fundamental II é desenvolver a habilidade de manipular algebricamente por meio de processos práticos. A autora ainda chama a atenção para as dificuldades que o aluno encontra diante da grande quantidade de técnicas presentes nessa fase.

A álgebra estrutural tangencia todas as concepções de Álgebra, de modo que produzir significados nos outros contextos potencializa o aprendizado do aluno, pois, como ressalta TINOCO (2011) “mesmo que tendo caráter abstrato, as manipulações devem adquirir significado, transmitir ideias e permitir conclusões”.

5.3 Sugestões para Pesquisas Futuras

Observando as dificuldades encontradas pelos alunos na primeira vez que estudam equações, os resultados colhidos a partir dessa sequência didática e a influência positiva na continuação do estudo de Álgebra dos alunos participantes, me convenci da importância de uma abordagem diferente das sugeridas nos livros didáticos.

É grande a dificuldade dos alunos para compreenderem os diferentes papéis das letras nas diferentes concepções e, em geral a experiência deles é muito limitada para isso. Acreditamos na importância de os alunos terem oportunidades de vivenciar situações em que eles possam perceber esses diferentes papéis. Assim eles certamente terão mais consciência da importância e da riqueza da Álgebra estudada no Ensino Básico, diminuindo suas dificuldades. Isto sem precisar que deles seja exigido o domínio das nomenclaturas aqui expostas. (TINOCO, 2011, p. 13)

Refletindo sobre a sequência didática, deixo algumas sugestões ao professor que se interessar por tomar um caminho próximo deste.

- Incluir uma atividade que explore a adequação de uma equação a um problema, levando em conta o resultado da equação.
- Concluir a atividade algébrica 4 com mais exemplos de equações com incógnitas nos dois membros, deixando a sensação de que a operação inversa não resolverá todos os tipos de equação.
- Modificar o enunciado da atividade lúdica 1 sugerindo que os alunos façam parte de países distantes, para motivar os alunos a desenharem e utilizarem símbolos.
- Propor algumas equações em que os resultados não sejam números naturais.

Apêndice 1 - A resolução completa do cubo mágico.

Características das peças

Temos três tipos de peça: centro, meio e canto.

Ilustração 18

Etapa 1: Resolução da 1ª Camada

O primeiro passo é montar uma cruz em uma das faces do cubo.

Ilustração 19

No exemplo abaixo, temos a peça do meio que é azul e branca, tendo a parte branca para baixo. Para levar a parte branca para cima, um algoritmo possível é o seguinte. Fazemos uma rotação de 90° da parte de baixo no sentido anti - horário para encaixar a parte azul com o centro azul e posteriormente uma rotação do eixo da direita em 180° para encaixar a parte branca com o centro branco.

Ilustração 20

Após terminarem a cruz, completaremos os cantos. Para a nossa resolução é importante que essa etapa seja feita puramente pela lógica do indivíduo.

Consideraremos a primeira camada feita e assumiremos a face branca como topo para dar sequência na atividade (Figura 5).

Ilustração 21

Etapa 2: Apresentação da notação e 2ª camada

Para facilitar a apresentação da linguagem, utilizaremos a sequência de imagens fornecida pelo professor Rafael Cinoto. As faces são representadas pelas letras R, L, U, D, F e B.

Ilustração 22

Ilustração 23

Dando sequência à apresentação da linguagem, definiremos símbolos para o sentido de rotação e para rotação dupla:

Uma letra sozinha indica uma rotação de 90° no sentido horário da face correspondente.

Uma letra acompanhada do símbolo ' indica uma rotação de 90° no sentido anti - horário da face correspondente.

Uma letra acompanhada do número 2 indica uma rotação de 180° em qualquer sentido, pois a posição final é a mesma para os dois sentidos possíveis.

Para ilustrar, segue uma imagem exemplificando o resultado de rotações da face da direita (R). Inicialmente, a cor branca está para baixo, a cor verde está atrás e a cor laranja está na face superior.

Ilustração 24

A nossa situação começa com a cor vermelha no centro da face de frente, tendo a peça laranja e azul no meio, estando a parte azul escondida (na face de baixo), como mostra o segundo cubo da figura 10.

Vamos reposicionar e utilizar a face laranja como frente (F). Queremos que a peça laranja e azul fique na posição marcada com um círculo:

Ilustração 25

Depois de posicionar a peça e o cubo realizaremos o seguinte algoritmo:

$F' - D - F - D - L - D' - L'$

Ilustração 26

Colocando a parte azul como frente veremos:

Ilustração 27

Etapa 3 - 3ª camada

Após a conclusão das duas primeiras camadas iremos dividir a última camada em quatro passos para facilitar as explicações. Antes de começar faremos uma

inversão na posição do cubo e trabalharemos com a parte amarela como topo, assim obtendo controle sobre o posicionamento das peças.

1º passo

O primeiro passo consiste em formar a cruz amarela no topo, novamente seguindo a lógica das peças mais fáceis de orientar.

Ilustração 28

Antes de começar com o algoritmo, faremos um estudo das possíveis configurações das peças que compõe a cruz da terceira camada. Note que, pela figura 12, não temos compromisso em orientar a cruz a partir dos meios das faces laterais, o que faremos no último passo.

Temos três possibilidades para a última camada, sendo elas: a configuração de nenhum meio orientado e as configurações de dois meios orientados.

Ilustração 29

As outras configurações, de um meio orientado e três meios orientados, que podemos sentir falta ao observar as possíveis, só são obtidas se houver uma peça invertida no cubo, o que torna impossível a solução.

Ilustração 30

Antes de começar os algoritmos temos que nos atentar à posição correta do cubo. No caso de nenhum meio orientado, não há uma posição específica, portanto segue o posicionamento correto dos cubos nos outros dois casos.

Ilustração 31

O algoritmo utilizado será o seguinte:

$F - U - R - U' - R' - F'$

Ilustração 32

2º passo

O segundo passo consiste em orientar os cantos sem levar em consideração a parte lateral das peças, o que será feito no passo a seguir.

Ilustração 33

Para isso começaremos por estudar as possíveis configurações das peças amarelas, que nesse caso são sete e serão apresentadas abaixo já posicionadas da forma desejada.

Temos três possibilidades de dois cantos orientados

Ilustração 34

Temos duas possibilidades de nenhum canto orientado.

Ilustração 35

Antes de focar nas duas possibilidades de apenas um canto orientado, é importante destacar que partindo de qualquer uma das cinco configurações citadas e aplicando o algoritmo que está por vir nesse passo, o cubo apresentará uma das próximas duas configurações. Portanto o passo a passo será mostrado a partir dela.

Ilustração 36

Depois do posicionamento correto aplicaremos o seguinte algoritmo:

$R - U - R' - U - R - U^2 - R'$

Ilustração 37

3º passo

O Terceiro passo tem o objetivo de orientar os cantos da última camada, para que o cubo possa ficar na seguinte configuração.

Ilustração 38

Antes de iniciarmos o algoritmo em questão iremos pontuar as três possíveis configurações para os cantos do cubo. O mesmo pode estar a uma rotação da posição que buscamos, pode ter dois cantos opostos trocados ou dois cantos adjacentes, como indica a figura 23.

Ilustração 39

O primeiro caso é muito simples e basta realizar a rotação da parte de cima até que os cantos encontrem o lado correto, enquanto o segundo caso não depende de uma posição correta, pois sempre que utilizarmos o algoritmo que será apresentado a configuração resultante será a de apenas dois cantos adjacentes trocados. Portanto segue o posicionamento correto para o terceiro caso e na sequência o passo a passo do algoritmo.

$R' - F - R' - B2 - R - F' - R' - B2 - R2$.

Ilustração 40

É importante deixar claro que o algoritmo usado permuta três cantos e por isso dependendo da configuração deve ser utilizado duas vezes.

4º passo

A configuração de começo dessa última etapa pode se dar de duas formas diferentes, sendo a primeira com quatro meios trocados, o que não exige uma posição específica para o algoritmo a seguir, e a segunda com um meio correto e três meios trocados, que exige que a parte com o meio correto seja a parte de trás. No primeiro caso aplicaremos o algoritmo uma vez para cair no segundo caso, enquanto no último caso aplicamos apenas uma vez e resolvemos.

Antes de começar o algoritmo temos que observar em que sentido devemos fazer as trocas. Para exemplificar seguem duas figuras para melhor ilustrar.

Sentido horário

Sentido anti - horário

Ilustração 41

A importância dessa identificação se dá pelo fato de que a parte de cima (U) será girada no sentido para o qual precisamos encaixar as peças, sendo a sequência

$F2 - U - M' - U2 - M - U' - F2$

no primeiro caso, começando com U e terminado com U' e, no segundo caso,

$F2 - U' - M' - U2 - M - U - F2$

começando com U' e terminando com U.

Ilustramos abaixo o algoritmo para o sentido anti - horário.

Ilustração 42

Apêndice 2 - As atividades lúdicas e algébricas

Atividade Lúdica 3 – Compactar a informação.

Grupo A

Você precisa enviar uma mensagem ao seu amigo que está na Matemacticalândia. Essa mensagem é um código que, ao ser decifrado, irá abrir o baú do tesouro. Para isso você conta com 2 pombos que podem levar duas mensagens, cada uma com, no máximo, 12 caracteres (letras, números ou símbolos).

A mensagem a ser enviada é a codificação das 4 dicas abaixo:

- 1 – O número que somado a 91 resulta em 117.
- 2 – O número que subtraído de 115 resulta em 19
- 3 – O número cujo quádruplo é 312
- 4 – O número cuja terça parte é 31

Ficha de codificação

1 –	<input type="text"/>	3 –	<input type="text"/>
2 –	<input type="text"/>	4 –	<input type="text"/>

Grupo B

Você precisa enviar uma mensagem ao seu amigo que está na Matematerialândia. Essa mensagem é um código que, ao ser decifrado, irá abrir o baú do tesouro. Para isso você conta com 2 pombos que podem levar duas mensagens, cada uma com, no máximo, 12 caracteres (letras, números ou símbolos).

A mensagem a ser enviada é a codificação das 4 dicas abaixo:

- 1 – O número cuja quinta parte é 27
- 2 – O número cujo triplo é 819
- 3 – O número que somado a 57 resulta 101
- 4 – O número que subtraído de 83 resulta em 39

Ficha de codificação

1 -	<input type="text"/>	3 -	<input type="text"/>
2 -	<input type="text"/>	4 -	<input type="text"/>

Ficha de decodificação

Escreva as mensagens com palavras.

1 – _____

2 – _____

3 – _____

4 – _____

Encontre o número “escondido”:

1 –

2 –

3 –

4 –

Rascunho

Atividade algébrica 1 – Transpor problemas para a linguagem simbólica.

Represente as situações abaixo utilizando uma linguagem simbólica.

1 – Maria foi comprar um Cubo Mágico que custava 37 reais. Pagou com uma nota de 100 reais. Maria deu o troco para sua mãe.

2 – Marcos foi ao mercado e comprou um pacote de biscoitos que custava R\$ 3,70, um suco de caixinha que custava R\$ 4,10 e um repelente de mosquitos. A compra de Marcos custou R\$ 11,00 no total.

3 – Érica comprou uma bola de futebol e uma bola de vôlei para se divertir com os amigos do condomínio. A bola de vôlei custou R\$ 6,00 a mais do que a bola de futebol e Erica gastou R\$54,00 no total.

4 – Henrique possuía o dobro de figurinhas que Marcela. Os dois juntos possuíam 84 figurinhas.

Explique os símbolos utilizados e porque você escolheu tais símbolos.

Atividade 2 – Contextualizar a equação

Invente uma situação que pode ser representada pelas equações abaixo.

a) $x + 3 = 7$

b) $3x - 1 = 19$

Responda as perguntas abaixo:

- Qual é a diferença entre uma sentença com símbolos e uma situação descrita em língua portuguesa?
- A linguagem de símbolos é importante? Por quê?
- Na sua opinião, como se deu a inserção de símbolos no contexto da matemática?
- É possível resolver problemas sem a linguagem de símbolos?
- É possível resolver todos os problemas sem a linguagem de símbolos?
- Você acredita que os símbolos facilitaram o seu estudo para resolver o Cubo Mágico?

Atividade algébrica 3 – Equações sem técnicas

Encontre o valor de x .

$$x + 117 = 291$$

$$x + 84 = 118$$

$$x - 109 = 199$$

$$x - 91 = 750$$

$$2 \cdot x = 128$$

$$3 \cdot x = 396$$

$$2 \cdot x + 7 = 17$$

$$2 \cdot x - 9 = 27$$

$$3 \cdot x + 69 = 102$$

$$4 \cdot x - 44 = 832$$

$$x \div 4 = 71$$

$$x \div 12 = 30$$

$$x \div 3 + 12 = 16$$

$$x \div 4 - 15 = 21$$

$$(3 \cdot x) \div 9 = 6$$

$$(2 \cdot x) \div 3 + 6 = 10$$

$$3 \cdot x + 5 = 2 \cdot x + 8$$

Anexo 1 - Entrevista

A entrevista feita com o professor da turma ocorreu via e - mail por meio de um questionário dividido em 3 etapas, no qual enviei as 3 primeiras perguntas, recebi as respostas, elaborei outras 3 a partir das respostas do professor e segui a mesma ideia para as últimas 4 perguntas.

1 - Porque você optou por não trocar as folhas?

R:Eu estava muito em dúvida se trocaria ou não. Tenho alunos que não gostam que vejam suas produções, o João por exemplo não gosta de mostrar aos amigos o que escreve no papel. Em uma das atividades que propus esse ano, os alunos deveriam corrigir os exercícios feitos pelos outros, mas o João pediu pra que a mãe enviasse um bilhete dizendo que ele estava muito desconfortável com a situação.

Durante a atividade percebi que o grupo A havia terminado mais rápido e já trabalhava no verso da folha. Isso somado a minha dúvida fez com que eu não fosse adiante em trocar as folhas. Espero não ter comprometido o trabalho.

2 - Por que você optou por deixa - los pensando que as atividades poderiam resultar em “números com vírgulas”?

R: Eles associam resposta de questão a um número natural ou fração, sem perceber que a fração é apenas uma forma de representar números racionais. Apenas em contextos específicos, como problemas com dinheiro ou altura, não estranham números decimais.

Eles não poden travar em uma questão apenas porque o resultado não é natural. Devem começar a entender que todos os números são possíveis.

3 - Você já havia trabalhado com o ponto como símbolo para multiplicação? Na atividade parece que eles já conheciam.

Não havia mostrado o ponto como alternativa ao x . Apesar de não aparecer no vídeo, na atividade de montar um enunciado para o problema, eles ficaram bastante na dúvida. O Matheus perguntou se o 3 ponto x significava que tinha três chocolates.

4 - Você acha que as atividades influenciaram no seu curso do sétimo ano?

R: Acredito que sim. Os alunos ainda lembravam da sua sequência. Sempre falavam que era igual a “atividade de mestrado”, onde eles tinham que achar o valor do x e era só inverter as operações.

5 - Como você começou a trabalhar equações no sétimo ano?

R: O livro do sétimo ano começa direto pela ideia da balança e entraram dois alunos novos, então comecei com uma lista de equações, do mesmo tipo que encerrou a sua atividade, assim podia partir com os 9 alunos do mesmo ponto. Organizei os alunos em duplas e tomei o cuidado de colocar os alunos novos junto com alunos que apresentam bom desempenho em matemática. O resultado foi ótimo, porque os alunos que participaram do projeto no ano passado conseguiram trabalhar a partir da operação inversa e ensinar os alunos novos, que não tiveram dificuldades em aprender

6 - Você falou sobre a “ideia da balança”. Como os alunos encararam, uma vez que trabalha um raciocínio diferente?

R: Eles realmente estranharam e utilizam o mínimo possível. A sala se incomodou muito ao ver a incógnita nos dois membros. A princípio usei esse incomodo ao meu favor, dizendo que agora necessitaríamos de algumas técnicas mais elaboradas, mas notei que os alunos utilizavam o princípio da balança somente para deixar a incógnita de um lado só, e depois resolviam por operação inversa.

7 - Como você sabe que eles só utilizam o raciocínio da balança no começo?

R: Eu só sei que eles fazem assim porque os vejo trabalhando em aula. A diferença dos alunos que resolvem pela ideia da balança é que eles pulam passagem, parecendo que “passaram” as incógnitas para um lado e os números para o outro, enquanto os alunos que trabalham em duas etapas deixam evidente que subtraíram a incógnita dos dois lados e depois continuam resolvendo.

8 - Você chegou a insistir em mostrar o raciocínio da balança?

R: Nas primeiras semanas eu resolvia cada equação de duas maneiras, e tentava chamar a atenção para o fato de que o raciocínio da balança se baseava na da operação inversa e fazendo questão de organizar a resolução colocando uma linha embaixo da outra, não importava por qual raciocínio.

Alguns alunos como, Lucas Pereira, Diogo, Matheus e Henrique estavam indo muito bem e logo começaram a pular algumas passagens. Os outros alunos ainda trocam o termo com a incógnita de lado, pela ideia da balança e depois utilizam operação inversa.

9 - Você acha que teve algum ponto da atividade que foi prejudicial?

R: Acho que no fim da atividade poderia ficar claro que as equações com incógnitas nos dois membros precisam de técnicas, pois isso foi muito complicado de mostrar. Os alunos tinham muita confiança em resolver uma equação e demoraram a entender que não conseguiriam sem treinar técnicas.

10 - Você acha que os alunos gostaram das atividades do ano passado?

R: Com certeza gostaram. Muitos ainda falam no cubo mágico e adoram os exercícios de “inventar histórias” para as equações.

Anexo 2 - documentos

Luiz

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Andréia Dias Reis, RG 20.740.007-6, declaro anuir da participação de meu/minha filho/a Augusto Reis Ferreira na pesquisa

desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelo/a pesquisador/a "Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do primeiro grau com uma variável" orientado/a por MARTHA SALERNO MONTEIRO e RENAN SANCHEZ VIESTILL, cujas quais podem ser contatados/as pelo e-mail renan.viestel@usp.br ou telefone 011 962837519. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da linguagem algébrica para resolver equações do primeiro grau com uma variável e os instrumentos utilizados são: câmera de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os/as responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, 15 de Setembro de 2016

Nome e Assinatura do responsável

Andréia Dias Reis
Andréia Dias Reis

Rosana Maria Pereira Santos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Rosana Maria Pereira Santos, RG 24.646.861-2, declaro saber
a participação do meu/minha filho/a João Victor P. Santos na pesquisa

desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelo/a pesquisador/a "Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações de primeiro grau com uma variável", orientado/a por MARTHA SALERNO MONTEIRO e RENAN SANCHEZ VILSTEL, estas quais podem ser contatados/as pelo e-mail renan.viestal@usp.br ou telefone 011 932637319. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da linguagem algébrica para resolver equações de primeiro grau com uma variável e os instrumentos utilizados são: câmara de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos a metodologia do trabalho. Estes responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, 15 de Setembro 2016.

Nome e Assinatura do responsável.

Rosana Maria Pereira Santos

Laura Palmero

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Fui Nelito Bruto Pires RG 24.731.063-3, declaro sobre
a participação da minha filha Laura na pesquisa
desenvolvida junto ao

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo sob a pesquisadora
"Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do
primeiro grau com uma variável", orientada por MARTHA SAIFERNO MONTEIRO e RENAN
SANCHEZ VIESTEL, os/as quais podem ser contatados/as pelo e-mail renan.viestel@usp.br
ou telefone 011 9022837018. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência
didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da
Linguagem algébrica para resolver equações do primeiro grau com uma variável e os
instrumentos utilizados são: câmera de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador
de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase
da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores
esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os/as responsáveis pela
pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados
envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser
usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não
inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, 20 DE SETEMBRO.

Nome e Assinatura do responsável.

NELITO BRUTO PIRES

Modelo 2. Para pais ou responsáveis

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Vanessa A. Pereira, RG 37139797-2, declaro saber
de participação da meu/minha filha/o Lucas Pereira Caputo pesquisa

desenvolvida junto ao
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelo/a pesquisador/a
"Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do
primeiro grau com uma variável", orientado/a por MARTHA SALERNO MONTEIRO e RENAN
SANCHEZ VIELTEL, os/as quais podem ser contatados/as pelo e-mail renan.vielte@usp.br
ou telefone (11) 962857815. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência
didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da
linguagem algébrica para resolver equações do primeiro grau com uma variável e os
instrumentos utilizados são: câmera de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador
de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase
da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores
esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os/as responsáveis pela
pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados
envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser
usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não
inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, 23 de setembro de 2016

Nome e Assinatura do responsável:

Vanessa A. Pereira
Pereira

Maria Clara
Barbosa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, José Paulo Barbosa, RG 3444252, declaro saber da participação de minha filha Maria Clara na pesquisa desenvolvida junto ao

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pela pesquisadora "Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do primeiro grau com uma variável", orientada por MARTHA SALERNO MONTEIRO e RENAN SANCHEZ VESTEL, os/as quais podem ser contatados/as pelo e-mail renan.viestel@usp.br ou telefone: 011 50223/516. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da linguagem algébrica para resolver equações do primeiro grau com uma variável e os instrumentos utilizados são: câmera de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os/as responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, [Assinatura],
Nome e Assinatura do responsável

Matheus Cesar

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, EDUS CESAR, RG 13428110-9, declaro saber da participação de meu/minha filha Matheus C. Silva na pesquisa desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pela pesquisadora "Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do primeiro grau com uma variável", orientada por MARTHA SALFERNO MONTEIRO e RENAN SANCHEZ VIFSTEL, cujas quais podem ser contatadas/os pelo e-mail renan.vifstel@usp.br ou telefone 011962837619. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da linguagem algébrica para resolver equações do primeiro grau com uma variável e os instrumentos utilizados são: câmera de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os/as responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, 14/09/2016
Nome e Assinatura do responsável

EDUS CESAR
Edus Cesar

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Renan Viestel, RG 45291818-7, declaro saber da participação de meu/ma filho/a Renan Viestel na pesquisa desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pela pesquisadora "Compreensão da linguagem algébrica e suas contribuições para a resolução de equações do primeiro grau com uma variável", orientada por MARTHA SALERNO MONTEIRO e RENAN SANCHEZ VIESTEL, pelas quais podem ser contatados pelo e-mail renan.viestel@usp.br ou telefone 011962837619. O presente trabalho tem por objetivos: analisar uma sequência didática aplicada a alunos do sexto ano para determinar contribuições do entendimento da linguagem algébrica para resolver equações do primeiro grau com uma variável e os instrumentos utilizados são: câmera de vídeo, atividades documentadas em papel e gravador de áudio. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Cerei responsáveis pela pesquisa garantir o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Paulo, _____

Nome e Assinatura do responsável:

Renan Viestel

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Concordo em participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada Atividades lúdicas e algébricas: uma introdução ao uso de letras nas aulas de matemática, que tem como pesquisador/a responsável Renan Sanchez Viesti, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, orientado/a por Martha Salemi Monteiro, os quais podem ser contatados pelo e-mail renan.viesti@gmail.com ou telefone (11)862837619. O presente trabalho tem por objetivos: analisar a aplicação de atividades para desenvolver a percepção da importância dos símbolos para a Matemática. Minha participação consistirá em aplicar as atividades propostas no trabalho, gravar um vídeo para futura análise e conceder entrevista. Compreendo que esse estudo possui finalidade de pesquisa, e que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade. Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

São Paulo, 20 de setembro de 2016
Thiago Augusto Cortes Pêneas
Thiago Pêneas

*** Local, Data, Nome e Assinatura.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu compreendo os direitos dos participantes da pesquisa intitulada "Compreensão da linguagem algébrica e suas contradições para a resolução de equações do primeiro grau com uma variável" orientada por MARTHA SALERNO MONTEIRO, e que tem como pesquisador/a responsável RENAN SANCHILZ VIESTEL, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, os quais podem ser contatados/as pelo e-mail renan.viesel@usp.br ou telefone 011 9074327319. Na qualidade de responsável pela COLÉGIO GOM BOSCO, autorizo a participação dos alunos desta escola na mencionada pesquisa e compreendo como a porção esse estudo está sendo realizado. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

São Paulo, 14 de setembro 2016

Vanessa A Pereira.

COORDINADORA PEDAGÓGICA

Vanessa A. Pereira
Coord. Pedagógica
S. 37.139.797-2

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP, 2004.
- BORTOLUZZI, Sara Dagiós. **Jogo e construção do conhecimento: relações possíveis**. Rio Grande do Sul: UPF, 2006. Disponível em: <http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2004/Poster/Poster/06_01_22_jogo_e_construcao_do_conhecimento_relacoes_possiveis.pdf>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- CINOTO, Rafael Werneck. **Aprendendo análise combinatória com a resolução do Cubo Mágico**. ANO 2014. 60f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, ANO. Disponível em: <<http://cinoto.com.br>>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- D'ÁVILA, Cristina Maria (org.). **Ser professor na Contemporaneidade. Desafios, ludicidade e protagonismo**. 2ª ed. Curitiba: Editora CRV, 2013.
- DUVAL, Raymond (2003). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Mércles Thadeu Moretti. **Revemat**, v.7, n.2, Florianópolis 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufscar.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em 30 de março de 2015.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 25ª ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2002.
- GAMA, Maria Clara S. Salgado. "A teoria das inteligências múltiplas e suas implicações para educação". **Psicopedagogia Online**, São Paulo, Jan 2000. Disponível em: <<http://www.psicopedagogia.com.br/artigos/artigo.asp?entrID=18>>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- GOMES, Maria Laura Magalhães. **Álgebra e funções na educação básica**. Belo Horizonte: CAED-UFGM, 2013.
- LINS, R. C. Struggling for survival: the production of meaning. In: BSRLM, 1996, Sheffield (UK). Anais... Sheffield (UK): BSRLM, February, 1996a.
- LINS, R. C. Notas sobre o uso da noção de conceito como unidade estruturante do pensamento. In: ESCOLA LATINO – AMERICANA SOBRE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA – ELAPEF, 3., 1996b, Canela - RS. Anais do III ELAPEF Canela, 1996b. p.137-141.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- MENEZES, Luís. "Matemática, linguagem e comunicação". **Millenium**. Santa Maria: Instituto Politécnico de Viseu, n. 20, Out 2000. Disponível em: <<http://repositorio>>.

- ipv.pt/bitstream/10400.19/899/4/MATEM%C3%81TICA%2c LINGUAGEM E COMUNICA%C3%87%C3%83O.pdf>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- PANOSSIAN, Maria Lúcia. “Matemática. Pensamento e Linguagem Algébrica dos Estudantes em Fase Inicial do Ensino de Álgebra”. 2008. <Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/141-1-A-gt8_panossian_ta.pdf>. Acesso em: 02 de outubro de 2016.
- PIAGET, Jean. **A Formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação**. 3ªed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.
- PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, Set 2009.
- PONTE, João Pedro. Estudo de caso em educação matemática. **Bolema**. Rio Claro, 25, p.105-132, 2006. Disponível em: [http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte\(BOLEMA-Estudo%20de%20caso\).pdf](http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf). Acesso em: 30 de março de 2015.
- RHORIG, Brian. “Puzzling Science: using the Rubik’s Cube to teach problem solving”. **The Science Teacher**. São Paulo, v. 77, n. 9, p. 54-56, Dez 2010. Disponível em: <http://www.youcandothecube.com/downloads/NSTA_Puzzling_Science.pdf>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- TINOCO, Lúcia A. De A. **Álgebra, pensar, calcular, comunicar...2ª edição**, Editora IM/UFRJ, 2011.
- TRAVASSOS, Luiz Carlos Panisset. “Inteligências Múltiplas”. **Revista de biologia e ciências da Terra**. Campina Grande: EDUEP-UEPB, v. 1, n. 2, 2001. Disponível em: <http://eduep.uepb.edu.br/rbct/sumarios/pdf/inteligencias_multiplas.pdf>. Acesso em: 30 de março de 2015.
- USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A.P.(Org). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.
- VEIGA, Ilma Passos Alencastro. **Repensando a didática do ensino**. Campinas: Papirus, 1993.
- SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo para o ensino fundamental Ciclo II e ensino médio: documentos de apresentação**. São Paulo: SE, 2008.
- SILVA, A. M. Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 2003. 237 f. Tese (Doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2003.
- SILVA, A. M.; SILVA, J. E. F. Produção de significados na sala de aula de matemática do Ensino Fundamental. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática - Minicurso**. Salvador: X ENEM, 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/MC/T3_MC1324.pdf>. Acesso em: 30 de setembro de 2016.