Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Al-jabr. atividades para vivenciar a introdução à
Álgebra

YOUSSEF AHMED ABBAS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO COMO REQUISITO
PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM CIÊNCIAS NO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROFESSOR DOUTOR ANTÔNIO CARLOS BROLEZZI

São Paulo

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Al-jabr: atividades para vivenciar a introdução à álgebra

Youssef Ahmed Abbas

Versão final (corrigida)

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/05/2020. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Orientador: Profº. Drº. Antônio Carlos Brolezzi

Comissão Julgadora:

Profº. Drº. Antônio Carlos Brolezzi – IME - USP

Profº Drº. Saddo Ag Almouloud – PUC - SP

Profª. Drª. Wanessa Aparecida Trevizan de Lima IFSP - POÁ

*A meus pais ,
aos meus irmãos e a
todos os que
acreditam no poder
transformador da
educação.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por me proporcionar condições de realizar esta pesquisa e chegar até aqui. À minha família, meus pais Yhsen e Ahmed que desde cedo, lutaram para que eu tivesse acesso a um ensino de qualidade e me incentivaram a encontrar na educação um caminho a ser seguido. Agradeço também aos meus irmãos Mohamed, Omar e Ali, pessoas que sempre estiveram ao meu lado.

Agradeço a todos os colegas e amigos que fiz no IME durante o curso de licenciatura em matemática e durante o mestrado profissional em ensino de matemática, com os quais sempre dividimos nosso conhecimento, experiências e angústias que nos permitiram com paciência e esperança, chegar até aqui.

Agradeço a todos os meus professores do curso de licenciatura em matemática e também aos professores do mestrado profissional em ensino de matemática, os quais não mediram esforços para nos proporcionar conhecimentos que são importantes para mim como professor e que devo citar nominalmente: Ana Paula Jahn, Bárbara Corominas Valério, David Pires Dias, Vera Helena Giusti de Souza, Marcos Nascimento Magalhães e Ricardo Bianconi.

Para finalizar, agradeço ao Professor Doutor Antônio Carlos Brolezzi, que além de me orientar durante o mestrado, também me orientou durante o trabalho de conclusão de curso, também foi meu professor em disciplinas da graduação e esteve comigo durante toda essa trajetória. Agradeço por toda a paciência, por acreditar em mim e me proporcionar conhecimento para realizar este trabalho. Agradeço por se mostrar sempre disponível e disposto em esclarecer as dúvidas que surgiram ao longo do caminho. Por tudo, serei eternamente grato.

Resumo

Abbas, Y.A. **Al-jabr: atividades para vivenciar a introdução à álgebra**. 2020. 147 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2020.

O objetivo deste trabalho é estudar e desenvolver atividades de introdução à álgebra que promovam aos alunos vivenciar essa área da matemática de modo a construir um significado. Verificamos de que forma esse tema aparece nos documentos oficiais, bem como teorias que nos ajudaram a desenvolver novas práticas de vivência e ensino. Buscamos conhecer um pouco da história do ensino de matemática no Brasil e da própria álgebra. Isso através do movimento pendular entre álgebra e geometria e da álgebra de Al-Khwarizmi, respectivamente. Através da busca da compreensão do que é a semiótica, observamos que a álgebra é uma das áreas em que os objetos não são diretamente acessíveis ao ser humano e portanto é necessário representa-los para que possamos nos aproximar deles. Em especial, a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, nos forneceu elementos importantes para compreender o que devemos fazer para que o aluno apreenda um conteúdo matemático. E por fim, a compreensão da ideia de matemática como a ciência dos padrões, e a possibilidade de além de identificar uma sequência de padrões, também representá-la de diferentes formas, nos deu elementos para elaborar uma atividade para o 7º Ano onde registramos e vimos que em contato com diferentes objetos e representações, os alunos estiveram mais dispostos, participativos e puderam registrar o seu entendimento do conteúdo de introdução à álgebra.

Palavras-chave: Ensino de matemática, álgebra, representações, padrões.

Abstract

Abbas, Y.A. **Al-jabr: activities to experience the introduction to algebra**. 2020. 147 f. Dissertation (Master) - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, 2020.

The objective of this work is to study and develop introduction activities to algebra that promote students to experience this area of mathematics in order to build meaning. We verified how this theme appears in the official documents, as well as theories that helped us develop new living and teaching practices. We seek to know about the history of mathematics teaching in Brazil and algebra itself. This is through the pendulum movement between algebra and geometry and Al-Khwarizmi algebra, respectively. Through the search for understanding what semiotics is, we observe that algebra is one of the areas in which objects are not directly accessible to human beings and therefore, it is necessary to represent them so that we can approach them. In particular, Raymond Duval's theory of semiotic representation records provided us with important elements to understand what we must do so that the student grasps a mathematical content. And finally, the understanding of the idea of mathematics as the science of patterns and the possibility of not only identifying a sequence of patterns, but also representing it in different ways, gave us elements to elaborate an activity for the 7th year where we registered and saw that in contact with different objects and representations, students were more willing, participative and were able to register their understanding of the introduction to algebra content.

Keywords: Mathematics teaching, algebra, representations, patterns.

Sumário

Introdução	11
Capítulo 1 – Referencial teórico	14
1.1. O movimento pendular entre ensino de álgebra e geometria: alguns apontamentos	18
1.2. Álgebra: perspectiva histórica.....	25
1.3. Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval para o tema	36
1.3.1. A Semiótica	36
1.3.2. Representação	44
1.3.3. Visualização	47
1.4. Tetraedro epistemológico	48
1.4.1. O tetraedro epistemológico para o ensino de geometria	49
1.5. Matemática: a ciência dos padrões	54
Capítulo 2 – Metodologia.....	64
2.1. Pesquisa qualitativa	67
2.2. Contextualização no ensino de Matemática	70
Capítulo 3 – Produto.....	72
3.1. A sequência didática	72
3.2. Relato da atividade aplicada.....	97
3.2.1. Análise dos dados	99
Conclusões	125
Referências	129
Anexos	132
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	132
A semana da álgebra.....	133

Introdução

O objetivo desse trabalho é estudar a proposição de atividades de introdução à álgebra de modo a possibilitar aos alunos vivências com essa parte da matéria, de modo a promover uma melhor aproximação com a álgebra.

Propomos atividades em forma de uma sequência didática em que os alunos são levados, por meio de resolução de problemas em situações eventualmente próximas de seu cotidiano, a identificar regularidades e padrões em sequências numéricas. O pensamento algébrico é assim trabalhado quando eles estabelecem leis matemáticas que os ajudem a criar e interpretar as situações apresentadas. Desse modo, os alunos podem transitar entre formas de representação matemática, como a numérica, geométrica e algébrica.

Essas atividades estão de acordo com a unidade temática álgebra da BNCC para o 7º ano do Ensino Fundamental, cujas habilidades e competências previstas são:

Linguagem algébrica: variável e incógnita:

- (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
- (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Para desenvolver as atividades, nos baseamos na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (DUVAL, 1993).

Nessa teoria, um aluno apreende (apreender no sentido de compreender profundamente) um conteúdo matemático quando consegue representá-lo em ao menos duas formas de representação e também transitar entre essas formas de registro.

Assim, no desenvolvimento da sequência didática, além das sequências de padrões, buscamos inseri-las em um contexto em que os alunos se sintam confortáveis e instigados em fazer o que está sendo proposto.

Por meio das atividades propostas, nossa hipótese era que os alunos pudessem construir significados para variáveis e incógnitas presentes em expressões algébricas e equações, entendendo o que são essas “letras” que tanto usamos na matemática e que parecem estar ali só para dar mais trabalhos e dificultar a manipulação de expressões. Além disso, que utilizem as diferentes formas de representação e materiais que possam manipular para obter uma maior compreensão desse conteúdo.

A questão de pesquisa do nosso trabalho é: Propondo atividades de vivência de introdução à álgebra, é possível tornar o conteúdo mais compreensível e agradável aos alunos, evitando medos e estigmas que muitas vezes pairam sobre essa parte da Matemática?

Para abordar a questão, consideramos que as diferentes formas de representação (algébrica, figural, língua materna, entre outras) contribuem no ensino-aprendizagem de álgebra.

Entre as questões que a investigação permitiria elaborar considerações estão a de que o trabalho da forma como foi proposto poderia proporcionar elementos para ajudar os alunos com uma adesão mais natural, dando significados para as letras presentes em expressões e equações. O trabalho irá permitir indicar formas manifestadas de como os alunos se comportariam em contato com problemas que envolvem algum tipo de contexto, entre eles a História da Matemática e situações cotidianas.

Dividimos o trabalho em três capítulos: o primeiro capítulo é destinado a discutir teorias que vão ao encontro do que estamos propondo e entender o seu significado. É abordada um pouco da história do ensino de álgebra no Brasil, dando ênfase ao que foi chamado de “movimento pendular entre álgebra e geometria”. Em seguida busca-se trazer elementos da história da álgebra. É apresentado um estudo sobre a teoria dos Registros de Representação

Semiótica de Duval (DUVAL, 1993) para entender como as diferentes formas de representação e seus elementos podem contribuir para a aprendizagem da matemática. Também aborda-se a imagem do Tetraedro Epistemológico para discutir os processos que permeiam a aprendizagem da Matemática.

No segundo capítulo, apresenta-se a metodologia utilizada na pesquisa e como foi seu desenvolvimento. A sequência didática é apresentada, incluindo elementos que poderiam contribuir para aproveitar a aplicação da atividade para pesquisar o tema do trabalho.

No terceiro capítulo, são apresentados os resultados das atividades aplicadas no Colégio Medina, escola particular serve a comunidade de origem árabe muçulmana e que fica na cidade de São Bernardo do Campo, no estado de São Paulo. Sou professor de matemática dessa escola desde 2017, lecionando a parte de Álgebra. A pesquisa de campo foi feita com a turma do 7º ano do Ensino Fundamental em novembro de 2019. Utilizando ferramentas de registro dos momentos da aplicação, iremos descrever, discutir, analisar e validar os resultados obtidos.

Capítulo 1 – Referencial teórico

Os resultados da prova do Pisa de 2018 apontam que 68% dos estudantes brasileiros não saberiam o básico de matemática. Além disso, muitos dos estudantes sequer teriam acesso às questões para tentar respondê-las (MORENO, 2019). Os resultados dessa e de outras avaliações de larga escala são semelhantes, e podem indicar que os alunos, como cidadãos, não estariam aptos a utilizar as ferramentas matemáticas em seu dia a dia.

Quando se depara com essa situação, é comum se discutir sobre a aula no chamado modelo tradicional, com o professor explicando o conteúdo em lousa, como fonte do fracasso. Refere-se então à métodos diferentes de ensino com o uso de tecnologias e novas tendências no ensino de Matemática. Entretanto não podemos ser ingênuos em achar que “aulas diferentes” seriam a solução para tudo. Ou seja, o que queremos dizer é que não gostaríamos apenas de propor uma atividade que seja diferente das habituais só para fugir do modelo tradicional, queremos algo que de fato seja eficiente.

Ao lermos textos de documentos oficiais, como professor de matemática a primeira impressão que temos é de que aquilo que se recomenda não é o que está sendo aplicado em sala de aula. A descrição do que é para ser feito está exposta, por exemplo, nos textos da BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Nesses textos se recomenda o desenvolvimento do chamado letramento matemático, definido como “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente” (Brasil, 2008, p.266), utilizando as ferramentas matemáticas em diferentes contextos.

Trabalhando as competências e habilidades que configuram o letramento, seria assegurado aos alunos aqueles conhecimentos matemáticos considerados fundamentais para compreender e atuar no mundo. Com isso, seria percebido o caráter de jogo intelectual da matemática, como “aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)” (BRASIL, 1998, p. 266).

Ponderamos se um dos problemas que afetariam os resultados do Brasil nas avaliações seria o de que os alunos não saberiam as fórmulas, ou não

saberiam resolver equações, manipular expressões algébricas, propriedades da geometria, ou ainda se não estamos conseguindo desenvolver nos alunos as competências e habilidades previstas e que realmente são importantes, que são objeto de avaliações e que serão úteis em suas vidas. Aqui não estamos tratando do problema do resultado nas avaliações em si, mas esse provavelmente seria um reflexo do que temos no ensino brasileiro.

Foi construída a fama da matemática como a disciplina mais difícil que envolve fórmulas e equações que devem ser decoradas com seus métodos e que não possuem significado nenhum, mas temos que resgatar a matemática que irá desenvolver as habilidades e competências que vão fazer a diferença na vida dos alunos como cidadãos.

Segundo Idoeta (2019), a avaliação não seria de quanto os alunos brasileiros estariam familiarizados com fórmulas matemáticas, mas sua capacidade de fazer uso consciente de matemática em seu cotidiano:

(...) desde controlar seus gastos no mercado até medir quantidades para uma receita, compreender estatísticas ou avaliar custos de um projeto. O objetivo, diz a OCDE, é que as escolas formem alunos capazes de "refletir e entender o papel da matemática no mundo" (IDOETA, 2019)

Essa ênfase na capacidade de percepção da matemática como ferramenta para olhar o mundo nos leva a uma reflexão a respeito do que estamos fazendo em sala de aula, se estamos desenvolvendo essas capacidades em nossos alunos e o que podemos fazer para melhorar nesse sentido.

Neste trabalho iremos tratar mais especificamente da Álgebra, tema que possui grande significado no sentido do que estamos aqui desenvolvendo. É muito mais do que “encontrar o valor de x na questão”. Pode ser útil no cotidiano dos alunos desenvolvendo seu raciocínio lógico, fornecendo repertório para que ele possa criticar, duvidar, com maior capacidade abstração, estimulando a investigação e a generalização. Enfim, a álgebra ajudaria a desenvolver sua capacidade de “formular, usar e interpretar a matemática”.

Essa visão sobre o papel da álgebra esbarra na percepção comum de muitos professores, que acreditam na importância do ensino de álgebra mas

estão de acordo em que o aluno apresentaria várias dificuldades para entender e aplicar álgebra “de modo significativo” (SOUZA, 2008).

É bastante comum ouvirmos de nossos alunos que eles não sabem qual a utilidade da álgebra, sendo que a partir de certo momento eles param de questionar para que serve toda aquela linguagem sofisticada e aceitam docilmente que precisam passar pelos testes sobre este conteúdo. (SOUZA, 2008)

De certa forma parece haver certo conforto em agir dessa maneira, tomando a álgebra como exercício de uma parte da matemática trabalhosa mas facilitada pela mecanização, que no fundo é simples. Em se tratando de resultados de curto prazo, numa avaliação onde o sucesso do ensino-aprendizagem seria medido por meio de uma nota sobre essa capacidade de mecanização “fácil” em termos de raciocínio crítico, seria também mais fácil o aluno aceitar, ser avaliado, aprovado e em seguida docilmente esquecer todo aquele emaranhado de letras e números sem significado. Agora, pensando no longo prazo, quando todas as habilidades que a álgebra desenvolve se tornariam necessárias, é a falta desse significado mais profundo que fará falta. Ou seja, a “facilidade do difícil” trará a “dificuldade do fácil”.

Analogamente, encarando o desconforto da dificuldade do questionamento, do “para que serve”, seria necessário o movimento de mão dupla, o professor indo até o aluno e o aluno indo até o professor em busca das melhorias: sentar e quebrar a cabeça em desafios ao invés de aceitar docilmente a mecanização. Por exemplo, interpretar o sucesso como a percepção do desenvolvimento de habilidades e não só como a obtenção de uma nota, faria, com o tempo, mais visível o quanto de fato entender aquele emaranhado de letras e números teria sido importante, trazendo novas formas de pensar ao longo do caminho da vida. Ou seja, da dificuldade da reflexão viria a facilidade da compreensão.

A própria BNCC afirma que

a álgebra tem como fim o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, normalmente chamado de “pensamento algébrico”. É essa forma de pensar algebricamente que seria essencial para utilizar modelos matemáticos para compreender, representar e analisar as relações quantitativas de grandezas e

estruturas matemáticas. Aí entrariam o que é típico da álgebra: o uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2018, p. 270).

Ou seja, já faz parte dos documentos oficiais essa perspectiva de tratamento da álgebra para interpretar situações, como as que iremos apresentar neste trabalho: a identificação de regularidades e padrões em sequências numéricas e não numéricas, com o estabelecimento de

(...) leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2018, p. 270)

Observe-se aqui que a ênfase nos textos oficiais está sobre a compreensão dos procedimentos. Essa compreensão viria do enfrentamento de problemas em contextos diversos,

(...) incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (2018, p. 267)

Foi sobre essa vertente que indica que é preciso trabalhar aplicações, tanto em situações do cotidiano incluindo aí as “imaginadas”, que iremos nos debruçar neste trabalho.

Mas vemos, tanto nos resultados de avaliações quanto em debates, aulas, palestras e cursos, que existem falhas na formação dos alunos que não atendem as expectativas previstas de desenvolvimento de habilidades e formação dos alunos como cidadãos dessa forma.

Para entender melhor como o ensino de matemática no Brasil ocorreu ao longo da história, buscaremos alguns momentos da história da educação brasileira para compreender melhor o que temos hoje. Estudar um pouco da

história da álgebra e seu desenvolvimento pode ajudar a entender e criar repertório para refletir sobre sua essência e seus significados. Compreender o significado dos procedimentos pode nos dar bases para construir um ensino reflexivo, permitindo que possamos ser mais capazes de construir e conjecturar sobre outras possibilidades de ensino de álgebra.

Na próxima seção trazemos uma breve comparação entre o ensino de Álgebra e de Geometria e como essas duas áreas foram (e são ainda...) tratadas separadamente. Em alguns momentos, o foco recaía sobre uma delas em detrimento da outra.

Na seção seguinte, tratamos um pouco da história da álgebra, o papel de Al-Khwarizmi e a influência do Oriente no desenvolvimento tanto da álgebra como nas formas de representação.

Em seguida, a terceira seção traz um estudo sobre a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, no qual abordamos o significado de alguns conceitos como semiose, representação, visualização e como estes conceitos podem contribuir no ensino de álgebra no ensino fundamental.

Na quarta seção, trazemos uma reflexão sobre o ensino de geometria baseada no Tetraedro Epistemológico e buscamos trazer elementos dessa teoria para o ensino de álgebra. Por fim, um dos pontos importantes desse trabalho e que irá embasar a atividade aplicada, que é a matemática como a ciência dos padrões, buscando entender de que forma os padrões estão presentes na matemática e como podem nos ajudar no processo de ensino-aprendizagem.

1.1. O movimento pendular entre ensino de álgebra e geometria: alguns apontamentos

O que é mais importante ensinar e que irá contribuir mais na formação de nossos alunos, álgebra ou geometria? Hoje pode parecer um tanto estranho esse tipo de questionamento, mas ao longo da história aconteceu de uma dessas áreas da matemática ser considerada mais importante do que a outra. E desta forma, em certos momentos o ensino de uma dessas áreas foi privilegiado em detrimento da outra.

O estudo da álgebra surgiu inicialmente no ensino secundário brasileiro a partir do início do século XIX, juntamente com aritmética, trigonometria e geometria. Somente em 1931, com a Reforma Francisco de Campos é que essas áreas receberiam o nome de Matemática. Não podemos dizer que durante todo esse período de quase um século e meio tivemos sempre álgebra e geometria totalmente separadas e com importâncias diferentes, mas isso ocorreu por alguns momentos e nisso caracteriza-se esse movimento pendular. Atualmente algumas escolas possuem a disciplina de matemática como uma só, outras a apresentam dividida em álgebra, geometria ou desenho geométrico. Com base em Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), iremos entender melhor como essa divisão ocorreu ao longo dos anos e como pode ter influenciado no ensino de álgebra. Nesse artigo, algo que nos ajuda a entender melhor como ocorreu esse movimento pendular, encontramos o que estava presentes em alguns livros escolares do período e alguns dados curiosos.

Inicialmente, no deparamos com alguns dados interessantes:

(...) dentre as mais de 150 teses e dissertações de mestrado ou doutorado no Brasil entre 1972 e 1990, tendo como objeto de pesquisa a educação matemática, 9 têm como preocupação básica o ensino da aritmética, 8 o ensino da geometria e nenhuma o ensino da álgebra elementar. (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 39)

Observando esses dados vemos um certo abandono, nesse período, das pesquisas sobre o ensino de álgebra. Esse abandono das pesquisas em ensino pode sinalizar que pesquisadores em Educação Matemática, que foram alunos e em geral são professores, possam manter certa visão passiva e simplista sobre o que essa área realmente é e quais as competências importantes e úteis para o cidadão.

É muito comum a visão de que a álgebra é uma área em que se prioriza o aspecto mecânico. Parece que a única forma de tratar a álgebra é dessa maneira automatizada, “dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões” (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 40). Essa visão pode estar implícita na necessidade de maior atenção dos pesquisadores.

Voltando um pouco mais no tempo, na Carta Régia de 19 de Agosto de 1799 aparece a obrigação legal de introduzir a álgebra no ensino juntamente

com disciplinas como aritmética, geometria e trigonometria. Álgebra sucedia o estudo da aritmética e antecedia a geometria. Nesse momento parecia haver um equilíbrio entre as áreas da Matemática se não em nível de prática de ensino mas em nível de legislação.

Essa separação perdurou até 1931, com a Reforma Francisco Campos, que unificou as áreas em uma disciplina só – matemática.

Apesar dessa unificação no papel, as áreas da matemática continuaram a ser tratadas de forma separada. É importante observar que nesse período (década de 30) diferentemente do Brasil, outras nações pareciam estar dando uma importância maior à álgebra:

Na Inglaterra, na França, na Alemanha e principalmente nos Estados Unidos, a Álgebra é considerada como um dos ramos mais úteis e interessantes da instrução. Tal é a importância que ali se dá a esta matéria, que já foi incluída como parte do ensino obrigatório nas escolas primárias, onde os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema a uma equação algébrica. (Trajano, 1935, Prefácio, citado por MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 41)

E também que em comparação com o Brasil haviam muito mais trabalhos nessa área:

Calcula-se que mais de quatrocentos mil compêndios de Álgebra que se consomem anualmente nos Estados Unidos, isto é suficiente para nos dar a ideia do modo por que se aprecia e desenvolve este ramo de estudo naquela grande e adiantada nação americana. (Trajano, 1935, Prefácio, citado por MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 41)

Em seguida esse mesmo prefácio cita que haviam sinais de recuperação desse abandono, com o estado de São Paulo tornando obrigatório o ensino de álgebra nas escolas. E o que a história nos mostra portanto é uma visão dualista entre álgebra e Geometria, com um ensino de álgebra totalmente pragmático, ausente de significado e aceito sem justificativa. Enquanto que a geometria era muito mais racional, as figuras mostravam que tudo fazia sentido e possuindo um maior significado. Abaixo observamos exemplos de como eram apresentadas essas duas áreas:

QUADRO 1

Ensino da Álgebra: multiplicação de expressões algébricas.

1.º caso. *Para multiplicar um monómio por outro, multiplicam-se os coeficientes e, em continuação, escrevem-se as letras, affectando cada uma de um expoente igual á somma dos expoentes que a mesma letra tem nos monómios, e ao producto obtido dá-se o signal que lhe corresponde, segundo a regra dos signaes.*

EXEMPLOS :

$$\begin{aligned}(3a^2b)(4ab^2c) &= 12a^3b^3c; (-7xy)(5x^2z) = -35x^3yz; \\ (5m^2n^4p^6)(-5mn^3p^5r^4s) &= -25m^3n^7p^{11}r^4s; \\ (-3a^2b^4c)(-2a^4b^2c^2d) &= 6a^6b^6c^3d.\end{aligned}$$

34. 2.º caso. Regra. — *Para multiplicar um polynómio por um monómio, multiplica-se, pela regra do primeiro caso, cada um dos termos do polynómio pelo monómio, e sommam-se os productos parciaes.*

E' a mesma regra da multiplicação de uma somma e de uma differença indicada por um numero, já demonstrada em arithmetica.

EXEMPLOS :

$$\begin{aligned}(3a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3)2a^2b &= 6a^5b - 8a^4b^2 - 12a^3b^3 + 4a^2b^4. \\ (5x^2y - 2x^2y^2 + 9xy^3 - 4y^4)(-3xy^2) &= -15x^3y^3 + 6x^3y^4 - \\ &- 27x^2y^5 + 12xy^6.\end{aligned}$$

(Pérez y Marín, 1928: p. 35.)

Figura 1 - Álgebra no início do século XX – Fonte: (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992)

Na imagem acima vemos alguns termos que nos levam a entender como a álgebra era focada em regras mecânicas e manipulação de expressões. A palavra “regra” aparece diversas vezes: a “regra dos sinais”, a “regra do primeiro caso” e a “regra da multiplicação”. Não há uma outra forma de representação não há explicação ou justificativa, apenas um conjunto de regras a serem seguidas.

Aqui, uma equação era definida segundo Pérez y Marin como “toda igualdade que exprime uma relação entre as quantidades conhecidas e desconhecidas de um problema sendo as quantidades conhecidas, os dados do problema ou da equação e as quantidades desconhecidas as incógnitas.”(1928, p.35) Vemos aqui uma definição totalmente superficial, sem significado nenhum e que apenas descreve o que se tem e o que deve ser feito.

QUADRO 2

Ensino da Geometria: linha reta e ângulos.

20. COROLLARIO. — *Todos os ângulos rectos são eguaes (fig. 21).*

Com effeito, colloquemos um ângulo sobre outro, de modo que os vertices coincidam e tambem os lados BC e EF ; como por um ponto B de uma recta BC não se pôde levantar mais de uma perpendicular a essa recta, os lados AB e DE coincidirão necessariamente, e, portanto, os ângulos são eguaes.

Fig. 21

THEOREMA

21. Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores estão em linha recta, são supplementares (fig. 22).

HYP.: Sejam os ângulos adjacentes ABC e CBD .

THESE: Os ângulos ABC e CBD são supplementares.

DEMONSTRAÇÃO: Levantemos no vertice B a perpendicular BE sobre AD ; teremos evidentemente:

Fig. 22

$$ABE + EBD = 2 \text{ rectos (17)}$$

$$ABC = ABE + EBC$$

$$CBD = EBD - EBC.$$

Sommando as duas ultimas egualdades, vem:

$$ABC + CBD = ABE + EBD = 2 \text{ rectos.}$$

(Paula e Pérez y Marín, 1912: p. 14.)

Figura 2 - geometria no início do século XX - Fonte: (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992)

Na figura acima, que mostra um exemplo de como o ensino de geometria aparecia, a palavra “regra” sequer aparece. Tudo é justificado formalmente com figuras dando significado ao que se está ensinando e dividido organizadamente em hipóteses, teses e demonstrações.

O pensamento do dualismo platônico exerce bastante influência na forma de pensar da época, colocando em um nível de maior importância os conhecimentos mais relacionados a atividades práticas enquanto que conhecimento mais teóricos eram colocados em segundo plano. A Geometria possuía um caráter mais nobre e desenvolvia as capacidades intelectuais, enquanto que a antiga logística e que hoje chamamos de aritmética possuía um

caráter inferior relacionada à atividades de comerciantes e artesãos. Então esse dualismo supervalorizando uma área em detrimento da outra não era uma característica presente apenas na matemática, também era reforçado pelo cristianismo no dualismo corpo-alma, espírito-matéria, bem-mal que mostrou-se bem comum naquele momento.

Com o Movimento da Matemática Moderna, tentou-se um pouco diferente do que vimos até agora. Na década de 60 com o surgimento desse movimento, um dos propósitos era unificar as áreas da matemática com base principalmente na teoria dos conjuntos e também nas estruturas algébricas e relações, fazendo portanto com que a álgebra mudasse de patamar atingindo uma posição de maior destaque. E diferente do que vimos anteriormente, agora aparecem menos regras e mais propriedades:

QUADRO 3

3) De maneira análoga ao que você fez no exercício 2, demonstre que:
 $(a \cdot b) \div a = b$

Transformações	Propriedades
$(a \cdot b) \div a =$ $(b \cdot a) \div a =$ $= (b \cdot a) \cdot \frac{1}{a} =$ $= b \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) =$ $= b \cdot 1 =$ $= b$	<i>Comutativa</i> <i>definição do divisor em $\mathbb{R}^*$</i> <i>associativa</i> <i>produto de elementos inversos</i> <i>elemento neutro</i>

4) Trabalhando em $\mathbb{R}_+$.
 Observe as transformações e justifique-as.

$4a^2 (3a^2 - 5ab) =$ $= (4a^2) 3a^2 - (4a^2) 5ab =$ $= 12a^2 a^2 - 20a^2 ab =$ $= 12a^4 - 20a^3 b$	<i>distributiva</i> <i>associativa e</i> <i>comutativa</i> <i>propriedades potências</i>
--	---

(Gruema, 1977: pp. 87-88.)

Figura 3 - Álgebra MMM – Fonte: (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992)

Agora a definição de equação que aparece é diferente da que vimos anteriormente, sendo segundo (Zambuzzi, 1928) “toda sentença aberta, que

encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê valores que pertençam a um determinado conjunto universo.” E essa definição possui muito mais significado que a primeira.

Passados esses dois momentos, o anterior e o durante o Movimento da Matemática Moderna, vemos que existiu uma álgebra totalmente mecanizada e abandonada, dotada de regras e sem significado nenhum. Em seguida uma álgebra um pouco mais teórica, preocupada em dar sentido e justificativas para o que se fazia. Mas em ambos os momentos, até onde foi possível observar, uma álgebra que não buscava diferentes formas de representação, predominando os símbolos algébricos e sem alternativas didáticas para dar significado para aquilo que estava sendo ensinado. E portanto esse movimento pendular que ocorreu, ora favorecendo o ensino de álgebra e ora favorecendo o ensino de geometria, mesmo quando o pêndulo estava no lado da álgebra acabou sendo prejudicial pois o excesso de formalismo presente não contribuiu para o entendimento e na construção de significado.

Vemos que hoje existem diversas propostas para o ensino de álgebra. Um exemplo disso são as olimpíadas de matemática, que em seu conteúdo nota-se cada vez menos regras e mais o uso do raciocínio lógico e da criatividade. O ENEM (Exame nacional do ensino médio) também mostra-se diferente, apesar de não ser em sua totalidade mas a cada ano mostra-se preocupado em propor questões contextualizadas, que façam maior sentido e exijam não só um conjunto de regras mas também um vasto conhecimento de mundo. A álgebra possui suas regras? Sim, ela possui, mas não são regras formadas magicamente em um universo totalmente diferente do nosso, pelo contrário é possível mostrar que tudo faz possui um significado e possa fazer sentido em tudo que cerca essa área do conhecimento.

1.2. Álgebra: perspectiva histórica

O que iremos tratar aqui sobre a história da álgebra será sob uma breve perspectiva de como ela surgiu, para que foi útil em alguns momentos da história e também entender como era representada (símbolos e figuras utilizadas), não só a álgebra mas o pensamento de uma forma geral. Sabemos que há milhares de anos não se usavam os símbolos matemáticos e nem mesmo os números que usamos hoje.

“os diagramas são, sem dúvida, tão antigos como a própria matemática...a geometria sempre se apoiou nas figuras e, durante algum tempo, outros ramos da matemática o fizeram”
(RIVAL p. 43)

É bem comum vermos nos filmes e nos livros aqueles famosos desenhos encontrados em cavernas, feitos na própria parede que mostram como a comunicação escrita se dava e também, como as figuras, diagramas e esquemas eram importantes para os povos mais antigos. Isso também na geometria. E isso também acontecia na geometria e outras áreas da matemática. Mas, e mais especificamente em relação à álgebra? Será que havia alguma forma de representação diferente? Utilizavam figuras? Como era a representação algébrica na época da criação e início do desenvolvimento da álgebra? Essas formas de representação favoreciam o entendimento de seu significado? São questões que nos motivaram a buscar as origens da álgebra e que iremos discutir a seguir.

Basicamente a álgebra ganhou impulso e, de certo modo, sua identidade enquanto área da matemática graças aos trabalhos dos povos do Oriente, em especial dos árabes. Em 1946, a Liga Árabe definiu chamar de árabe aquela “pessoa cuja língua é o árabe, que vive em um país de língua árabe e que tem simpatia com as aspirações dos povos de língua árabe” (Nabatea, 2002). Falar que são os “árabes” seria restringir a uma região delimitada e língua, então vamos preferir nos referir aos matemáticos a seguir como árabes, quando for o caso, ou como matemáticos do Oriente, isso por que existem os que não são árabes mas são de outras regiões do oriente, como os persas.

Grande parte do conhecimento que temos hoje foi preservado pelos árabes e outros povos do oriente através da tradução de obras gregas, hindus, persas, entre outras e recuperação delas após o incêndio e destruição da biblioteca de Alexandria por volta de 48 a.C.. Os árabes contribuíram bastante, uma vez que eram ótimos de memória e transcrição do conhecimento. Um exemplo de que essa cultura de preservação do conhecimento não é por acaso, é o Alcorão (Livro sagrado da religião islâmica). O livro foi revelado ao profeta Mohamad (Maomé) e seu texto seria conhecido por muitos de seus companheiros antes de ser registrado como um livro. Essa ótima memória é o que permite que o Alcorão que existe hoje possua exatamente o mesmo conteúdo de quando foi revelado a Mohamad há mais de mil e quatrocentos anos atrás. O fato de hoje existirem muitas pessoas que decoram e recitam o Alcorão por completo é uma segurança para que não haja alterações em seu texto. Da mesma forma, a memorização e a oralidade foi marca importante para a matemática da época. A ausência de símbolos era compensada pela oratória ou pelo registro em língua natural. Podemos observar o desenvolvimento do alcorão ao longo dos anos:

Figura 4 - Al Fatiha sem acentuação – Fonte: desconhecido

Figura 5 - Al Fatiha com acentuação – fonte: desconhecido

Para nos situarmos na história, o Alcorão foi revelado ao profeta Maomé que viveu entre os anos 571 e 632. Al Khwarizmi, o matemático conhecido como o pai da álgebra viveu entre os anos 780 e 850, portanto um período posterior mas bem próximo ao em que viveu Maomé.

Nas duas imagens acima, temos exatamente a mesma “surata” ou capítulo do Alcorão (primeira surata, “A abertura” ou “Al Fatiha”). Na primeira imagem vemos as palavras sem acentuação, pontuação ou divisão dos versículos, isso por que aqueles que já haviam decorado o Alcorão sabiam exatamente a forma que deveria ser recitado, a mesma que foi revelada ao profeta Mohamad. Na segunda imagem vemos a mesma surata, só que agora com a devida acentuação, pontuação e separação dos versículos para que seja recitada corretamente. Nossa experiência permite que eu consiga ler a primeira imagem perfeitamente devido ao fato de que já tenha decorado esses versos pela necessidade de ser recitada essa surata em cada oração. Caso me sejam apresentados versículos que não tenha decorado, seria necessária a leitura da versão com a pontuação. Essa necessidade e virtude dos árabes na oralidade e memorização contribuiu não só para a preservação do alcorão e da religião como um todo mas também para o conhecimento científico.

Agora tratando mais especificamente da matemática, era muito relacionada às atividades práticas e comerciais do dia a dia. Para entender melhor, vamos

complementar no que se refere aos árabes definindo o termo “cultura subcientífica”:

Jens Hoyrup cunhou o termo “cultura subcientífica” para valorizar a existência de um substrato anônimo que incluía procedimentos, técnicas e práticas utilizadas no dia a dia e que se estendia por toda a região na fase imediatamente anterior ao advento do islã. Apesar de existirem raras evidências textuais, alguns problemas e técnicas comuns na época mantinham parentesco com a matemática dos babilônios e dos egípcios, como as frações unitárias. Além disso, alguns problemas recreativos, propondo desafios, parecem ter atravessado séculos. (ROQUE, 2012, p. 192)

Assim, podemos citar uma matemática prática que se espalhava pelo oriente e pelos territórios romanos. Nessa “cultura subcientífica” incluem-se técnicas de cálculo utilizadas no comércio e geometria utilizada por arquitetos e artesãos. Esta cultura, em conjunto com a cultura científica grega conviveram durante o período pré-islâmico. E é definido como “síntese islâmica” essa consciência à cerca da importância da matemática prática e da matemática mais teórica quando aplicados a problemas do dia a dia.

Uma primeira explicação para essa síntese é cultural – reside no fato de conviverem, sob o domínio do islã, povos distintos, oriundos de diferentes tradições e de diferentes extratos sociais. Essa convivência, bem como a circulação de saberes e sábios pelo território, pode ter quebrado o isolamento em que viviam essas culturas no estágio precedente e criado um ambiente propício ao aprendizado, logo, ao pensamento (ROQUE, 2012, p. 193)

Essa fase com uma convivência um pouco mais tolerante entre seguidores do islamismo, judaísmo e cristianismo, além do ponto de vista religioso também era sentida do ponto de vista das “ciências estrangeiras, recebidas dos gregos.” Que eram consideradas como “ramos do conhecimento tidos como auxiliares que podiam servir à ciência tradicional, incluindo matemática e astrologia”. (ROQUE, 2012, p. 193)

Aqui, vemos que a tolerância e a boa convivência entre os povos só trouxe benefícios para o desenvolvimento científico na época. Entre os problemas práticos que envolviam a matemática temos o caso da divisão de heranças no islã. Até hoje para os muçulmanos a divisão é feita da mesma forma pois segue o que foi revelado no Alcorão Sagrado.

Na questão da herança o Alcorão diz:

“Allah vos ordena o seguinte no que diz respeito a vossos filhos: que a porção do varão equivalha à de duas mulheres. Se estas são mais de duas, corresponder-lhes-ão dois terços da herança. Se é filha única, metade. A cada um dos pais corresponderá um sexto da herança, se deixa filhos; mas se não tem filhos e lhe herdarem só os pais, um sexto é para a mãe. Etc., etc...” (Alcorão, Surata 4, versículo 11)

Isso é apenas um exemplo, mas o islã em geral através do alcorão e dos ditos do profeta Maomé são um guia prático de como um muçulmano deve viver cada aspecto de sua vida, possui regras e procedimentos que podem ser aplicados em todos os momentos da vida de um muçulmano e sua convivência em sociedade. E essa cultura de utilizar o conhecimento nas práticas do dia a dia levou que os povos utilizassem o conhecimento também das ciências e em particular da matemática em muitos momentos de suas vidas.

O Islã tem preceitos para tudo o que diz respeito ao homem e à sociedade. Esses preceitos procedem do Todo-poderoso e são transmitidos pelo seu Profeta e Mensageiro de Deus.(...) Não existe assunto sobre o qual o Islã não haja emitido seu juízo. (LAUAND, 1996, p. 15)

E a álgebra então, surge como uma ciência voltada à solução de problemas, muitos deles que surgiam no dia-a-dia, como esse da herança citado no Alcorão.

Algo que podemos observar aqui também é o grande uso da retórica, ou melhor, problemas em que são propostos e resolvidos exclusivamente pela fala, sem a utilização de símbolos, figuras, imagens ou qualquer outra forma de representação. E nesse sentido analisando um pouco do trabalho de Al-Khwarizmi nos traz uma visão um pouco melhor de como a álgebra se desenvolveu.

Pouco se sabe sobre a vida de Muhammad Ibn Musã Al-Khwarizmi (em árabe محمد ابن موسى الخوارزمي) mas alguns detalhes estão presentes em trabalhos bibliográficos de historiadores e geógrafos islâmicos. O nome “Al-khwarizmi” normalmente indica que provém da região de Khwârizm (Khorezm ao que atualmente é denominado como Khiva, cidade no Uzbequistão, e distritos ao seu redor) ao sul do Mar Aral, entre o Cazaquistão e o Uzbequistão, na ásia central.

Mas o historiador Al-Tabari também indicou o epíteto “Al-Qutrubulli” que indicaria sua origem de Qutrubull, um distrito entre os rios Tigres e Eufrates, próximo de Bagdá e que seus ancestrais é que teriam origem na localidade de Khwārizm.

Durante o califado de Al-Ma'mun (812-833) Al-Khwarizmi se tornou membro da “Casa do Saber”, em árabe transliterado Dar al-Hikma, uma espécie de academia de cientistas e intelectuais localizada em Bagdá. Foi para Al-Ma'mun que Al-Khwarizmi propôs um tratado de astronomia e sua álgebra também é dedicada da mesma forma.

A palavra álgebra possui origem no livro escrito por Al-Khwarizmi, “Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala”, onde al-jabr se referia à “restauração” e al-muqabala se referia à “balanceamento”, ou seja, “Tratado sobre o cálculo de restauração e balanceamento”. Que, de fato, se refere às duas etapas desenvolvidas no processo de resolução de equações. Segundo o biógrafo Haji Khalfa, Al Khwarizmi foi o primeiro autor islâmico a escrever sobre a “solução de problemas de al-jabr e al-muqabala”.

Ou seja, al-jabr atualmente significaria adicionar termos iguais em ambos os lados da equação para eliminar os termos negativos. Ou também multiplicar ambos os lados da equação pelo mesmo termo para eliminar as frações existentes na equação. E al-muqabala, a eliminação de termos pela adição de termos com sinal oposto em ambos os lados da equação.

É bastante interessante destacar que Al-Khwarizmi não empregava nenhum tipo de simbolismo, mas sim um vocabulário padrão para designar os elementos presentes em equações do cálculo algébrico da época: a raiz, o quadrado e o número simples. O quadrado da quantidade desconhecida era expresso pela palavra “mal” que significa “possessão” ou “tesouro”, sendo usado sem nenhuma relação com o quadrado geométrico (“murabba’a) e sim com o quadrado no sentido de potência de 2 mesmo.

A raiz de qualquer coisa que será multiplicada por ela mesma. O quadrado é o que obtemos quando multiplicamos a raiz por ela mesma. O número simples é um número que expressamos sem que esteja relacionado nem a uma raiz,

nem a um quadrado. Na tabela abaixo, alguns termos, seus significados e como seria na notação atual.

TABELA 1

Palavra	Significado na língua corrente	Sentido nos problemas	Notação moderna
<i>Adad</i>	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida (número dado)	c
<i>Jidhr</i>	Raiz	Quantidade desconhecida	x
<i>Mal</i>	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Figura 6 - palavras usadas por Al-Khwarizmi – Fonte: (ROQUE, 2012)

Aqui vemos que mesmo não possuindo um simbolismo definido, há a adoção de palavras padrão para designar objetos matemáticos, entre eles a quantidade desconhecida “Jidhr” que acima vimos também chamada de “xay” (coisa), com um significado de indeterminação para enfatizar a incógnita que atualmente representamos somente pela letra x usualmente ou qualquer outra. Ou seja, não há o uso de simbolismo mas há o uso de uma forma de representação (vocabulário padrão) a ser usada, que foi evoluindo até a notação moderna que temos hoje.

Uma vez que o cálculo de Al-Khwarizmi era formal e a incógnita designava objetos de uma natureza qualquer, a escolha da palavra “coisa” pode revelar uma preocupação em elaborar um cálculo que pudesse ser aplicado tanto aos números quanto às grandezas geométricas. Esse relaxamento da distância entre grandeza e número foi fundamental para a criação de um novo domínio (a álgebra), que não estava contido nem na geometria nem na aritmética. Justamente por isso podemos dizer que, em certo sentido, a álgebra é uma invenção árabe. (ROQUE, 2012, p. 251)

A citação acima dispensa maiores explicações, mas vale ainda acrescentar o porquê de atualmente utilizarmos a palavra “raiz” para a solução de uma equação. Como já dito vem da palavra árabe “jidhr”, mas o que antes os gregos empregavam como “raiz” era utilizada para designar a raiz de um número como por exemplo 2 ser raiz de 4 pois $4 = 2 \times 2$.

Al-Khwarizmi apresentou seis possíveis enunciados envolvendo os termos usados como padrão, abaixo em parênteses também como seria na notação algébrica atual:

- Quadrado iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
- Quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
- Raízes iguais a um número ($bx = c$)
- Quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
- Quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
- Raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Para cada caso um algoritmo de resolução, e vamos apresentar o exemplo da equação $x^2 + 10x = 39$, ou seja, quadrados e raízes iguais a um número:

Tome a metade da quantidade de *jidhr* (no caso, metade da quantidade 10, que resulta em 5). Multiplique essa quantidade por si mesma (obtendo 25). Some no resultado os *Adad* (*adad* é o termo independente e portanto $39 + 25 = 64$). Extraia a raiz quadrada do resultado (que seria 8). E subtraia do resultado a metade dos *Jidhr* ($8 - 5 = 3$). Encontrando 3 como solução. Abaixo, uma tabela que relaciona a resolução pela língua materna realizada por Al-Khwarizmi e sua correspondente com a notação atual.

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo $ou x^2 + bx - c = 0$
Tome a metade da quantidade de <i>Jidhr</i>	$10/2 = 5$	$b/2$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$(b/2)^2$
Some no resultado os <i>Adad</i>	$25 + 39 = 64$	$(b/2)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{(b/2)^2 + c}$
Subtraia desse resultado a metade dos <i>Jidhr</i> , encontrando a solução	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2$

Figura 7 - método de resolução – Fonte: (ROQUE, 2012)

Observamos que a sequência de operações realizadas é equivalente ao método utilizado atualmente. Além disso, confirmamos aqui, que Al-Khwarizmi não só utilizava simbologia nenhuma na ilustração do problema, como também em sua resolução. E o curioso é que se imagina que então se limita a isso, entretanto em seguida Al-Khwarizmi acrescenta:

A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos (ROQUE, p. 253)

Com mais detalhes, explica:

Deve-se construir um quadrado de diagonal AB que represente “mal”, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais, G e D, cujos lados são a raiz e 5, metade de 10. A figura obtida é um “gmomon” de área 39. Completando essa figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área 64 ($= 39 + 25$). O lado desse quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é 3 ($= 8 - 5$). (Roque, 2012 p. 253)

Até o momento, por tudo que foi visto da história deste grande matemático oriental, era de que não havia nada que remetesse ao aspecto visual e tudo se limitando à linguagem falada ou escrita natural. Entretanto essa descrição acima nos mostra que há muito mais do que se imaginava, há também uma representação geométrica do problema e que remete ao atual método de completar quadrados, que nada mais é do que a origem do que conhecemos hoje como Fórmula de Bháskara. Segue abaixo a figura:

Figura 8- Completando quadrados – Fonte: (ROQUE, 2012)

Logo em seguida, ROQUE complementa:

Essa justificativa geométrica não servia apenas para garantir a verdade do algoritmo e sim explicar sua causa: a necessidade de completar o quadrado. Esse papel para uma argumentação geométrica era totalmente novo na matemática. (Roque, 2012 p. 253)

Atualmente, existem livros didáticos que para introduzir o tema de resolução de equações de segundo grau, inicialmente relembram a fatoração de expressões algébricas, produtos notáveis para chegar ao método de completar quadrados, que nada mais é do que o realizado na figura acima. E é através desse método que se chega à hoje chamada fórmula de Bháskara. Seria interessante se os livros contextualizassem historicamente, dando mais sentido ao que acontece e um consequente aumento da aceitabilidade do tema.

Além da álgebra, encontramos trabalhos importantes de Al-Khwarizmi em Geometria. Para encontrar o perímetro de uma circunferência são três os métodos que podemos descrever:

$$(1) p = 3\frac{1}{7}d$$

$$(2) 3p = \sqrt{10d^2}$$

$$(3) p = \frac{62832}{20000}d$$

A primeira é o método de Arquimedes, que provou que a circunferência é menor que $3\frac{1}{7}$ do diâmetro d e maior que $3\frac{10}{71}$ do diâmetro d . E a mesma expressão também é dada a Heron de Alexandria em sua “Métrica”. A segunda foi encontrada no capítulo XII de livro Brahmasphutasiddhanta de Brahmagupta. A terceira expressão é uma estimativa para $\pi = 3,141516$. Al-Khwarizmi credits “aos astrônomos” e a mesma regra é encontrada em *Aryabhatiya* do astrônomo hindu Aryabhata. No verso II 28 de *Aryabhatiya* lê-se:

Adicione 4 em 100, multiplique por 8, e adicione 62000. O resultado é aproximadamente a circunferência do círculo cujo diâmetro é 20000.

Al-Khwarizmi provou também que em todo triângulo retângulo os dois catetos cada um multiplicados por ele mesmo e esses produtos somados (a soma dos quadrados dos catetos) é igual a produto do lado maior multiplicado por ele

mesmo (quadrado da hipotenusa). Então se a , b e c são os lados desse triângulo teríamos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A prova dada só é válida no caso em que $a = b$. Desse fato, nós podemos afirmar que as pesquisas de Al-Khwarizmi não são como as Clássicas gregas, mas se aproxima mais dos Elementos de Euclides.

Termo	Sentido aritmético	Sentido geométrico
Número dado	Número	Quantidade geométrica
Raiz, quantidade desconhecida	Número	Segmento
Quadrado	Segunda potência da raiz	Quadrado geométrico que tem a raiz como lado
Cubo	Terceira potência da raiz	Cubo que tem a raiz como aresta

Figura 9 - Termos e sentidos – Fonte: (ROQUE, 2012)

Aqui, encontramos alguns aspectos que serão importantes em nossa fase experimental. Novamente vemos que álgebra e geometria andam lado a lado e que para um conteúdo algébrico também é possível dar um sentido geométrico. E, então buscar encontrar essas duas formas de representação em nossos problemas.

1.3. Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval para o tema

Raymond Duval é um filósofo, psicólogo e professor francês com seu trabalho ligado à aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem em matemática.

Ao encontro com o que pensamos como ensino de matemática e com os conceitos apresentados, consideramos uma identificação com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Também por meio dos elementos desta teoria pretende-se melhorar o nosso conhecimento sobre ela e desenvolver as atividades para que promovam uma apreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos. Duval usa muito esse termo “apreender” ao invés de “aprender”, com “apreensão” se refere à completa assimilação dos conceitos através da manipulação das diferentes formas de representar um objeto matemático. Veremos a seguir como funciona melhor essa teoria e suas características que a fazem tão úteis e que podem contribuir no ensino e na aprendizagem de matemática.

1.3.1. A Semiótica

Para entender melhor esse conceito nos baseamos na obra “Primeiros elementos de semiótica sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem de matemática” e aqui abordaremos resumidamente aquilo que muito essa obra nos trouxe de conhecimento.

Apesar de a matemática e a semiótica nascerem e crescerem juntas, foi a partir da década de 1990, com os problemas que haviam no ensino-aprendizagem de matemática, que a semiótica começou a ganhar força na didática da matemática e hoje é evidenciada a sua força por diversos estudiosos.

A respeito da origem do termo semiótica, segundo D'AMORE, PINILLA e IORI (2015):

O termo “semiótica” tem origens muito antigas. Já na Grécia antiga existia um termo semeion, normalmente traduzido por “signo”, que constitui a raiz etimológica, embora não conceitual, da palavra “semiótica” (Deely, 2003). Um semeion era, para os gregos, um fenômeno de natureza física, um “sinal natural” diríamos hoje: como a fumaça para o fogo, um sintoma para uma doença ou as nuvens para a chuva. Assim, traduzir semeion como “signo” seria um erro, ou não seria completamente correto. (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015, p. 28)

Portanto para os gregos esse termo original era usado para fenômenos físicos atrelados à natureza ou ao ser humano. Seria a relação entre dois fenômenos na forma causa-efeito: “um dado fenômeno natural A, acessível pelos sentidos, que devia lembrar outro fenômeno natural B (diferente de A), não imediata ou diretamente acessível como A, mas a ele ligado por meio de uma relação causa-efeito (se A então B, se há fumaça há fogo) de maneira a poder explicar ou caracterizar A de alguma forma.” E o significado de semiótica está mais próximo do termo latim signum que “reflete plenamente o sentido genérico com o qual hoje utilizamos o termo “signo”; com efeito, falamos não apenas de signos de eventos naturais, mas também de signos que permeiam ou que constituem o nosso próprio mundo cultural, como os signos linguísticos, matemáticos, artísticos...”

Para Platão a matemática é um campo onde os objetos não dependem do ser humano e não são diretamente acessíveis a nós, não podemos ver, tocar ou cheirar e o máximo que podemos fazer para nos aproximar deles é fazer uma representação. Por exemplo, quando escrevemos o número 2. O símbolo “2” não é o número dois mas sim uma representação desse número que é a ideia de duas unidades. Esse mesmo número podemos representar em romano, II ou em árabe, ٢ ou com os dedos. Esses são apenas símbolos representando o objeto em questão. Quando tratamos de objetos mais concretos talvez essa distinção seja um pouco mais óbvia: um desenho do sol não é o próprio sol e sim uma representação dele. Mas quando estamos falando de objetos abstratos é bem possível confundir a representação com o próprio objeto como o próprio número 2 e é importante representá-los para compreender a sua ideia.

Para falar de tais objetos, os matemáticos utilizam termos (“nomes”) que se referem aparentemente a outros objetos, concretos, temporais e mutáveis (diagramas, sólidos concretos, “construções com régua e compasso” etc.). A relação entre “nome” e “ideia” pode ser representada da seguinte maneira: (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015, p. 30)

A maneira como está sendo descrita é representada pelo esquema abaixo:

Figura 10 - sombra, nome e ideia – Fonte: (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015)

A linha pontilhada significa a relação indireta que existe entre o nome (signo linguístico) e a ideia (referente conceitual, não mental). Fazendo um paralelo, o que Al-Khwarizmi fazia era dar signos linguísticos para as ideias e utilizava de representações geométricas como sombra.

Para os Estoicos ¹ os signos estão ligados à sua concepção de razão como princípio que rege tanto o universo quanto o pensamento humano, onde cada coisa que acontece é efeito de causas anteriores e essas causas a também efeitos de causas anteriores a elas. Eles focalizam sobre duas questões: as expressões linguísticas e, no “signo como proposição” como uma análise lógica. São três os componentes que os Estoicos consideravam nas expressões linguísticas:

- Significante: o aspecto fonético, a expressão pronunciada;

¹ O estoicismo é uma corrente filosófica e espiritual fundada por Zenão de Cítio (333 – 263), a qual toma seu nome do Stoá Poikíle (“pórtico pintado”) onde Zenão ministrava suas aulas.

- Significado: o conteúdo associado à expressão pronunciada;
- Referente: a realidade concreta à qual a expressão se refere (objeto ou evento).

Figura 11 - significado, significante e referente – Fonte: (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015)

Diferentemente do significante e do referente, o significado representa um ente não corpóreo. Os Estoicos, com efeito, fazem distinção entre: (1) o objeto real (referente), que é corpóreo; (2) o conjunto dos sons articulados (significante), que são também corpóreos e mediante os quais o objeto é significado; e (3) aquilo que é veiculado por tais sons (significado). (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015, p. 38)

Essa dualidade entre o objeto matemático e a sua representação é o que causa o que foi chamado de “paradoxo cognitivo do pensamento matemático”:

de um lado, a construção cognitiva dos objetos matemáticos só pode ser conceitual e, por outro, é somente por meio das representações semióticas que uma atividade sobre objetos matemáticos é possível. Esse paradoxo pode construir um verdadeiro círculo vicioso para aprendizagem. Como sujeitos em fase de aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações se, eles só podem se relacionar com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, para além de qualquer representação semiótica, torna a confusão quase inevitável. E, ao contrário, como podem eles adquirir o domínio dos tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se não possuem ainda uma aprendizagem conceitual dos objetos representados? Este paradoxo é ainda mais forte quando se identifica a atividade matemática com a atividade conceitual e ao considerar as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38)

Por esse motivo cremos que especialmente em matemática é necessário buscar alternativas cada vez mais eficientes para se o objeto matemático é inacessível, então aproximar o aluno dele. Parece até injusto cobrar do aluno por algo que nem nós mesmos conseguimos que é acessar esse objeto e sabendo disso é papel de nós professores ter isso convicto em nossas mentes para não confundir mais ainda a cabeça de nossos alunos.

Além da Semiótica Duval ainda trata da noética (ou noesis). Se em matemática a aquisição conceitual dos objetos passa necessariamente pela semiótica essa aprendizagem conceitual é o que chamamos de noesis e é o que devemos esperar que nossos estudantes alcancem. Para Duval, não há noesis sem semiose. Ou seja, não existe aprendizagem conceitual, estratégica, dos algoritmos sem a aprendizagem semiótica.

Quando falamos em representação, não nos referimos apenas à um único tipo. Existem diversas formas, cada uma ressaltando de sua maneira características presentes nos objetos matemáticos que muitas vezes não são observadas pelos nossos sentidos. São algumas das principais formas de representação:

- Registro de língua natural: utilização de línguas maternas;
- Registro geométrico ou figural: utilização de figuras geométricas planas ou figuras espaciais.
- Registro dos sistemas de escrita e cálculo: numéricos, algébricos, simbólicos;
- Registro gráfico: utilização de sistemas de coordenadas

E cada uma dessas formas de representação possui suas regras próprias. O registro em língua natural possui as regras gramaticais, assim como o registro dos sistemas de cálculo possui as regras algébricas, o sistema de coordenadas possui suas regras de funcionamento e assim por diante.

Duval, em sua teoria defende que a real compreensão de objetos matemáticos se dá na capacidade de transitar entre diferentes registros. Onde cada tipo de registro irá evidenciar características particulares e diferentes de um mesmo objeto. Por exemplo, quando escrevemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

É muito comum os alunos cometerem o erro até mesmo de forma intuitiva e escreverem como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Agora, quando representada na forma de uma figura, uma segunda forma de registro permite uma maior apreensão deste objeto, deixando mais claro que a segunda maneira de fato está errada.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 12 - quadrado da soma – Fonte: <https://doutormatematico.blogspot.com/2012/05/produtos-notaveis-exercicios-e.html>

Nessa representação geométrica do trinômio do 2º grau, fica evidente que não faria sentido escrever $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, uma vez que visualizando a figura vemos que a área do quadrado total envolve a área de quatro quadriláteros (a^2, ab, ab, b^2) e não apenas dois (a^2, b^2). Quando se atém apenas à representação simbólica, também se poderia desenvolver a expressão utilizando a propriedade distributiva $(a + b) \cdot (a + b)$ chegando à expressão correta. E portanto, transitar por diferentes formas de representação é uma saída que nos confere certeza ao que se faz e evitam-se erros. E essa solução, nada mais é do que aquela apresentada por Al-Khwarizmi.

São duas as características semióticas essenciais na atividade matemática:

- a escolha do registro de representação e da representação dentro desse registro;
- transformações das representações

É importante também deixar claro que cada forma de representar um objeto matemático irá evidenciar diferentes características dele e além disso

cada representação pode ser mais útil dependendo da situação e do que se deseja fazer. Dessa forma uma característica primordial é a escolha do registro e em seguida a escolha da representação dentro desse registro. Por exemplo a fração um meio, nós podemos escolher utilizar o registro na forma numérica ou podemos também fazer isso na forma de figura. Escolhendo o registro na forma numérica, podemos representar na forma de fração $\frac{1}{2}$ ou também podemos escolher representar em sua forma decimal 0,5. Cada forma de representação possui uma visão diferente a respeito do mesmo objeto matemático.

Escolhida a representação em um sistema de registro, agora temos dois tipos de transformação: o tratamento e a conversão. O tratamento ocorre quando se passa de uma representação semiótica para outra dentro do mesmo sistema de registro. Por exemplo escrever inicialmente $2x + 1 = 3$ em seguida realizando tratamento reescrever como $2x = 3 - 1$ a representação mudou mas o sistema de registro continua sendo o algébrico. A conversão ocorre quando se passa de uma representação em um sistema de registro para outra representação em outro sistema de registro. E essa é uma regra expressa por Duval: mudando o sistema semiótico, muda também a representação semiótica. Por exemplo a representação de um meio como a fração $\frac{1}{2}$ está no sistema de registro fracionário, quando podemos realizar a conversão para a representação no sistema de registro geométrico:

Figura 13 - um meio – Fonte: <https://blog.professorferretto.com.br/tipos-de-fracoes-simplificacao-e-reducao-de-fracoes-a-um-mesmo-denominador/>

Na conversão temos portanto dois sistemas de registro, um registro de partida e um registro de chegada:

Esquema 1 - registros de partida e de chegada – - 2019. Fonte: Autor

Vimos a álgebra de Al-Khwarizmi por exemplo, sendo um tipo de conversão. A matemática utilizada era representada pela linguagem natural e apresentamos também a conversão para a notação simbólica atual :

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx - c = 0$
Tome a metade da quantidade de <i>Jidhr</i>	$10/2 = 5$	$b/2$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$(b/2)^2$
Some no resultado os <i>Adad</i>	$25 + 39 = 64$	$(b/2)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{(b/2)^2 + c}$
Subtraia desse resultado a metade dos <i>Jidhr</i> , encontrando a solução	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2$

Figura 14 - conversão para simbologia atual – Fonte: (ROQUE, 2012)

Encontramos alguns textos em que é dito que para Duval as conversões possuem papel mais importante na compreensão de objetos matemáticos. Entretanto, em outros textos esse papel foi dado ao tratamento. De qualquer forma, realizar tratamentos e conversões tende a evitar a grande preocupação para que não se confunda o objeto matemático com a sua representação, pois se essa é questão central então utilizar diferentes representações semióticas em diferentes sistemas semióticos de registro minimiza a possibilidade dessa confusão.

No contexto da semiótica observamos a importância da representação e do aspecto visual dessas representação então achamos importante estudar o significado de “representação” e de “visualização” e suas implicações no ensino de matemática.

Bem como na matemática, essa discussão a respeito da semiótica também pode ser ampliada para outros campos e inclusive no nosso dia a dia e isso pode nos dar maior noção do que acontece no mundo atual. Atualmente as pessoas pouco conversam pessoalmente, isso acontece pelas redes sociais. Nós estamos sendo representados pelos nossos perfis nas redes sociais. Assim como hoje também não andamos com muito dinheiro no bolso, compramos quase tudo com cartão de crédito ou débito. O dinheiro está sendo representado por números no sistema do banco e o dinheiro em si não é visto. Isso mostra que não só na matemática os objetos não são diretamente acessados, as tecnologias estão criando facilidades para que possamos acessar de longe aquilo que queremos, acessar nosso dinheiro, acessar as pessoas, acessar o mundo. Vemos alunos cada vez menores já em contato com essa tecnologia que afasta o ser humano do “objeto” e portanto cada vez mais é possível ocorrer a confusão entre o objeto e sua representação.

1.3.2. Representação

A todo momento, além da semiótica estamos falando também de representação, termo que aparece várias vezes em diversos textos e no presente trabalho. Mas afinal o que é uma representar? O que é uma representação?

Além de Duval, podemos ver que o conceito de representação também possui papel importante na apreensão do conhecimento pela perspectiva de outros autores.

Segundo o dicionário Michaelis online, representação significa “exposição oral ou escrita de razões, queixas, reivindicações, etc. a quem possa interessar ou a quem tem direito” ou “imagem ou ideia que traduz nossa concepção de alguma coisa ou do mundo” ou também “ato pelo qual se faz vir a ideia ou o conceito correspondente a um objeto que se encontra no inconsciente”.

Para Duval é um ponto chave saber a diferença entre o objeto matemática e a sua representação. As representações acabam sendo não só importante mas também necessárias, uma vez que os objetos matemáticos não estão totalmente acessíveis à nossa percepção e intuição imediata como acontece com objetos

físicos. De um lado a representação se mostra necessária e por outro tomar cuidado para não achar que a representação é o objeto.

Em matemática, trabalhamos com objetos abstratos e que nem sempre é tão simples de apreendê-los pelo nosso inconsciente. Representá-los de forma a traduzir a concepção de cada objeto matemático é um grande e valioso desafio.

Para definir matematicamente a palavra “representação” iremos nos basear no trabalho de BARBOSA “A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico”. São citados dois tipos de representação: a representação interna e a externa.

Distinguem-se as representações internas (formas que integram as estruturas cognitivas de um indivíduo) e as representações externas (utilizadas para comunicar ideias). Dufour-Janvier, Bednarz, e Belanger (1987) referem que as representações internas são imagens mentais que correspondem a formulações internas que se constroem acerca da realidade. A descrição proposta por Romberg, Fennema e Carpenter (1993) contempla as representações internas como estruturas cognitivas complexas interiorizadas pelo aluno e que simbolizam ideias matemáticas. Von Glaserfeld (1987) designa-as de concepções ou modelos cognitivos que são assimilados e estruturados ao longo da experiência. Estas perspectivas realçam um aspecto relevante do processo de representação, a interiorização de ideias matemáticas e a sua compreensão. Por seu turno, as representações externas correspondem a todas as organizações simbólicas externas (Dufour-Janvier, Bednarz, e Belanger, 1987) que são utilizadas para ilustrar ideias ou conceitos. As formas mais comuns de representações externas incluem palavras, figuras, tabelas, gráficos, diagramas e cadeias de símbolos que surgem quando se pretende comunicar as ideias matemáticas que vão sendo construídas. (BARBOSA, 2009, p.28)

Por mais simples que pareça, uma palavra aparece sob a definição de diversos autores, cada um com um significado que enriquece a compreensão da ideia de representação. Entendemos que a representação interna está relacionada ao aspecto cognitivo do ser humano, sendo imagens criadas na mente que reproduzem ou traduzem a realidade, no caso as ideias matemáticas, levando à sua compreensão. Enquanto isso, as representações externas são os símbolos externos ao ser humano, ilustrando ideias e conceitos aparecendo na forma de figuras, gráficos, tabelas, diagramas e cadeias de símbolos, ou seja, aquilo que o ser humano está vendo externamente. Assim, vemos que existe

uma relação entre as representações interna e externa. A representação interna é influenciada pela externa, quanto mais clara é a externa mais fácil fica de realizar a interna e conseqüentemente apreender os conceitos e ideias matemáticas envolvidas. Da mesma forma vimos o que Duval chama de noesis e de semioses, sendo respectivamente as representações interna e externa e estando uma fortemente ligada à outra. Essa conclusão é reforçada por Goldin e Shteingold (2001) e definida como natureza bidirecional da representação:

É por vezes útil pensar que a componente externa traduz a interna, como por exemplo quando um aluno desenha um diagrama ou escreve uma fórmula para descrever o que está a pensar. Simultaneamente podemos pensar que a componente interna traduz a externa, como quando um aluno formula uma imagem mental das operações descritas numa fórmula aritmética. Esta perspectiva de transferência é característica da natureza bidireccional da representação (Goldin & Shteingold, 2001, p. 6).

Sabemos que são diversos os tipos de representação, e no presente trabalho daremos foco às representações de aspecto visual na forma de figuras pois acreditamos que ela faz exatamente isso que foi descrito, relaciona as representações externa e interna para a apreensão das ideias e conceitos matemáticos. Essa importância das imagens também é reforçada por Bruner (1966), autor que Barbosa também discute. Segundo ele, para conceitos abstratos como na matemática, pode-se identificar três sistemas de representação sequenciais nessa ordem: ativo, icônico e simbólico. E como isso ocorre? Segundo ele, e citado por Barbosa “as experiências concretas contribuem para uma noção intuitiva do conceito (modo ativo). Mas torna-se necessário utilizar imagens para interiorizar o significado desse conceito. Sejam imagens mentais ou imagens externas, como figuras e diagramas, que descrevam ou representem esses conceitos (modo icônico). Finalmente as imagens são substituídas por símbolos que representam os objetos (modo simbólico)”.

1.3.3. Visualização

Quando falamos em representação, nos referimos a algo que foi representado por alguém para em seguida serem visualizados alguns aspectos de determinado objeto.

De forma análoga ao conceito de “Representação”, abordaremos agora o conceito de visualização que é discutido também por BARBOSA.

Segundo o dicionário Michaelis online, o termo “visualizar” significa “imagem formada na mente ou que resulta deste processo” ou “ato de transformar em imagem mental conceitos abstratos”. Essa definição se encaixa perfeitamente naquilo que queríamos, afinal a matemática é uma ciência que exige capacidade de abstração para o entendimento de seus conceitos, e transformar em imagem mental seria uma forma de representar esses conceitos e apreendê-los de forma eficiente. Para o termo visualização, pelo fato de não se ter uma única definição, BARBOSA (2009) analisa como diversos autores definem o conceito:

Para Piaget e Inhelder (1971) quando se recorre a um arranjo de tipo espacial significa que existe uma imagem mental a orientar essa criação. Nesta perspectiva, a visualização inclui os processos de construção e transformação de imagens mentais e representações de natureza espacial que podem estar implicadas na actividade matemática (Presmeg, 1986). A caracterização proposta por este conjunto de autores é bastante abrangente, contemplando simultaneamente dois aspectos do pensamento visual: a interpretação de informação retirada das figuras e o processamento visual. Ben-Chaim, Lappan e Houang (1989), defendem que a visualização envolve a capacidade de interpretar e compreender informação representada sob a forma de figuras e a capacidade para conceitualizar e traduzir relações abstractas e informação que não é apresentada visualmente.(BARBOSA, 2009)

Observa-se que entre as definições existem em comum o tratamento do conceito de visualização como um processo bidirecional entre o meio interno (a compreensão pelo indivíduo) e o meio externo. Somente Presmeg (1986) e Eisenberg e Dreyfus (1989), onde o primeiro vê como um processo unidirecional partindo das representações internas e direção para a compreensão dos conceitos pelo indivíduo. Ou seja, a visualização possui papel central na compreensão dos conceitos. Enquanto que os

segundos veem a representação externa como resultado daquilo que foi compreendido. Nesse caso então, por exemplo se cada pessoa compreende um aspecto diferente então irá obter visualizações internas diferentes.

Aqui, nosso objetivo não é simplesmente definir o termo visualização com um significado só, mas sim discutir pela visão dos diversos autores como cada um discute o conceito de visualização, encontrando aspectos comuns e outros divergentes. Não cremos que um esteja certo ou que outro esteja errado, mas sim que devido à complexidade da matemática e a grande possibilidade de situações que ocorrem dentro de fora da sala de aula, é importante que se tenha consciência de que a visualização, não importa em qual direção ou se bidirecional, ela estará presente de alguma forma e contribuindo no processo de compreensão dos conceitos matemáticos. Cremos que a visualização é um processo bidimensional, onde os conhecimentos prévios irão contribuir para dar significado às figuras e também a figura irá despertar a compreensão de novos conceitos.

1.4. Tetraedro epistemológico

Normalmente quando propomos alguma atividade aos nossos alunos, há aquela nossa apreensão como professor de ver o resultado do aluno ter aprendido aquilo que estava sendo proposto e muitas vezes por falha de nós professores ou por pressa dos alunos acabamos querendo acelerar esse processo. Isso pode fazer com que exista um vão entre a atividade e os conceitos que estavam envolvidos, mas existem alguns processos nesse meio do caminho que são importantes.

Levando isso em conta, temos a teoria do Tetraedro Epistemológico, desenvolvida pelo Professor Nilson José Machado e explicitada em seu livro *Matemática e Língua Materna*. Trata-se essencialmente de uma teoria voltada para o ensino de geometria e estabelece o ensino de geometria por meio de 4 processos: a percepção, a construção, a representação e a concepção.

Com base nisso, pensamos: quais seriam os processos de ensino de álgebra? Organizar o pensamento algébrico segundo alguns processos de forma paralela aos que organizam a apreensão dos conceitos de geometria. A geometria possui um apelo visual maior e mais direto para os alunos enquanto que a álgebra é mais abstrata, e portanto talvez os processos de aprendizagem de

cada um sejam diferentes. Ou talvez existam processos comuns de ambas as áreas. É o que pretendemos discutir e relacionar neste capítulo. Entretanto, vamos antes entender melhor o que é e como funciona o Tetraedro Epistemológico, para então traçar um paralelo para o ensino de álgebra na segunda fase do ensino fundamental.

1.4.1. O tetraedro epistemológico para o ensino de geometria

Em seu texto, Machado afirma que em geral o ensino de geometria é organizado de forma polarizada. Da forma tradicional, aos alunos são propostas atividades empíricas e em seguida de forma abrupta é sistematizado formalmente aquilo que foi trabalhado nessas atividades. E esse modelo parece claramente insatisfatório, sendo necessário um caminho mais conveniente que permita um trânsito mais natural entre a percepção (manipulação de objetos físicos) e a concepção (compreensão e sistematização dos conceitos). É insuficiente trabalhar nas séries iniciais apenas com atividades perceptivas sem relação alguma com os conceitos, assim como em séries mais avançadas trabalhar apenas com a formalização dos conceitos sem estabelecer relações com objetos materiais. Sendo necessário haver maior articulação entre a percepção e a construção:

Figura 15 - Atividades e Sistematização – Fonte: (QUINA, 2015)

Em seguida, são mencionados mais dois processos bastante importantes tanto para a geometria quanto para o desenho geométrico, geometria projetiva e geometria: a construção e a representação. Estes quase que totalmente ausentes nos livros didáticos, ou que poderiam estar presentes na disciplina de desenho geométrico, em maioria ausente nas escolas, permitindo a polarização que falávamos entre a percepção e a concepção.

Essa ausência do desenho geométrico e da manipulação da régua e do compasso exclui atividades que seriam intermediárias no processo de aprendizagem em geometria:

Ocorre no entanto que, essas atividades intermediárias, sobretudo as correspondentes à representação, não costumam ser suficientemente valorizadas como elementos fundamentais dos processos cognitivos, sendo, muitas vezes, concebidas tendo em vista primordialmente alcançar-se, o mais rapidamente possível, a organização conceitual. (MACHADO, 2002, p. 54)

E completa:

Mesmo as concepções mais inovadoras têm como referência percepções já sentidas ou construções anteriormente realizadas, ainda que se contrapondo pressupostos ou transcendam seus limites. (MACHADO, 2002, p.55)

Agora, paralelamente, tratando do ensino de álgebra, por que não pensar da mesma forma? Será que não estamos tentando alcançar tão rapidamente a organização conceitual ou menos que isso, que estamos indo diretamente para os métodos mecânicos de resolução? Ou não estamos fazendo essa transição entre atividades perceptivas e sistematização formal? Talvez assim como no ensino de geometria, a construção ou representação poderiam melhorar o trânsito entre os dois polos. Ou também dar um passo atrás na concepção dos conceitos e objetos algébricos com percepções já sentidas pelos alunos ou construção já realizadas. Mesmo falando em álgebra podemos falar em construções e representações, visto que a álgebra de Al-Khwarizmi entre outros utilizava-se de construções geométricas para elucidar o que estavam fazendo algebricamente.

Voltando para o ensino de Geometria ao qual Machado destaca, é necessário portanto, outros dois processos para estabelecer a aprendizagem em geometria: a construção e a representação. E de fato:

Muitas vezes realizamos com nossos alunos atividades que são encaradas como simples divertimento tais como quebra-cabeças, jogos de montar, pinturas, colagens etc, aparentemente mais indicadas às aulas de artes do que às de matemática. Porém, tais atividades não só são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, mas têm relação com a formação do pensamento geométrico dedutivo. (KALEFF, 1994, p. 21)

Assim, para o processo de aprendizagem em geometria, seria importante não apenas trafegar de forma polarizada da percepção para a concepção e vice-versa. Mas transitar no meio deles passando pela construção e pela representação. Constituindo as faces de um tetraedro com elementos comuns e articulando-se mutuamente. Não é um processo com início meio e fim, é um processo que transita entre as quatro faces sem uma ordem definida ou até simultaneamente.

Figura 16 - os quatro processos do ensino de geometria – Fonte: (LAURO, 2007)

Cada um desses processos podem ser descritos como: a percepção que seria a manipulação de objetos materiais. Normalmente ocorre por meio de atividades empíricas, acontecendo desde as séries iniciais. A construção reforça a percepção e seria a produção de materiais e manipulação de objetos físicos por meio dos diversos tipos de materiais, papéis, massas de modelar, madeira e etc. A representação, seria representar por meio das diferentes formas que apresentamos. E a concepção seria a organização dos conceitos geométricos, predominando definições formais, teoremas, proposições, com suas demonstrações formais ou mais simples.

Figura 17 – tetraedro epistemológico para o ensino de geometria – Fonte: (LAURO, 2007)

Assim como num tetraedro, nenhuma face é privilegiada e mantém-se equilibrada quando colocada alguma face é colocada em ênfase.

[...] não obstante o fato de a iniciação em geometria realizar-se por meio da percepção de formas e de suas propriedades características, através de atividades sensoriais, como a observação e a manipulação de materiais, desde muito cedo tais atividades relacionam-se diretamente com a construção de objetos em sentido físico, através de massas, varetas ou papéis, por exemplo, bem como com a representação de objetos, através de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas. (MACHADO, 2002, p. 54)

Realmente, em geometria por ter um apelo visual mais direto e estar diretamente ligado às formas e a manipulação de objetos materiais no dia a dia do ser humano desde a infância, a percepção se dará então por meio disso. Em álgebra, o grande obstáculo é que acostumamos nossos alunos relacioná-la com métodos e procedimentos quando deveríamos promover antes uma percepção mais intuitiva assim como na geometria. Pode não ser tão evidente mas a álgebra está presente nos problemas do nosso dia a dia assim como as formas geométricas também estão. E portanto podemos nos aproveitar desses contextos em que a álgebra se mostra presente em nossas vidas evidenciando a sua importância e deixar de lado a sua fama como apenas um amontoado de fórmulas e procedimentos mecânicos. E nessa linha, observando os erros que cometemos ao ensinar álgebra e o que acreditamos ser o certo para potencializar o desenvolvimento dos alunos, vamos tentar traçar um paralelo e tentar apresentar um “tetraedro epistemológico para o ensino de álgebra” com base no que estamos apresentando aqui.

Gostaríamos organizar processos para transitar no ensino de álgebra. O que seria a percepção em álgebra? E a construção, representação e concepção?

Não queremos voltar a promover um movimento pendular entre a álgebra e a geometria. Se trata de matemática e tanto em álgebra como em geometria não acessamos diretamente os objetos matemáticos, apenas as suas representações. Sendo assim, se a percepção no ensino de geometria é a manipulação de objetos físicos, por que não poderia ser assim também em álgebra? Desde o ensino infantil são diversos os materiais que conhecemos para ensinar os alunos como material dourado, ábaco, entre outros. Da mesma forma seria possível realizar construções e representações que remetem a objetos que

estejam relacionados ao contexto algébrico para enfim chegar à concepção do objeto matemático. E aqui também sem necessariamente uma ordem definida, articulando essas quatro faces simultaneamente.

Em álgebra, estamos propondo que a percepção se dê por meio da manipulação de padrões, sequências de padrões envolvendo figuras em algum contexto. No caso as sequências de padrões seria então objetos físicos que representam esses padrões (papéis recortados, cubinhos do material dourado, etc...). A construção seria a manipulação de objetos para esses padrões: recortes de papel, material dourado entre outros materiais dependendo da situação. A representação seria por meio de figuras ou de expressões algébricas para estabelecer conjecturas do funcionamento da sequência. E a concepção seria então a descoberta do funcionamento do padrão através de uma expressão algébrica ou de uma explicação com a demonstração de sua validade para todos os elementos da sequência. Montamos então a tabela abaixo:

O tetraedro epistemológico na geometria e na álgebra		
	Geometria (Machado)	Álgebra
Percepção	Manipulação de objetos materiais	Manipulação de objetos de sequência de padrões geométricos envolvendo diversos contextos (fictícios, históricos, da matemática, etc.)
Construção	Produção de materiais e manipulação de objetos físicos	Produção de materiais e manipulação de objetos físicos
Representação	Representação por meio de figuras e desenhos	Representação por meio de figuras e desenhos ou expressões algébricas

Concepção	Organização dos conceitos geométricos (teoremas, proposições e demonstrações)	Compreensão do significado da letra na expressão algébrica
------------------	---	--

Tabela 1 – O tetraedro epistemológico na álgebra e na geometria – - 2019. Fonte: Autor

Assim como no ensino de geometria essas quatro faces do tetraedro acontecem simultaneamente, acreditamos que a forma análoga para o ensino de álgebra também não tenha uma direção definida, visto que não é possível prever as situações que podem ocorrer e os alunos podem nos surpreender de diversas formas com a sua criatividade.

1.5. Matemática: a ciência dos padrões

Falamos um pouco sobre a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, e agora vamos prosseguir nas diferentes formas de representação, apresentando a matemática como a ciência dos padrões. Algumas tendências mais recentes da educação matemática convergem para o lado de considerar a matemática como uma ciência dos padrões. Assim como em diversos aspectos de nossa vida, os seres humanos e mais em particular nossos alunos a todo momento observam situações corriqueiras e saem em busca de regularidades para o estabelecimento de padrões, aqui iremos discutir as perspectivas de alguns autores sobre o tema e sua aplicabilidade no ensino de matemática, mais especificamente no de álgebra em nível fundamental. E assim buscar maneiras de o aluno compreender a importância de adquirir competências nessa área. Para isso vamos entender qual o papel dos padrões nesse desafio e como eles podem contribuir no ensino e aprendizagem de matemática:

A competência em álgebra é bastante útil para o estudante na sua vida de todos os dias e para prosseguimento de estudos. Deste modo, todos devem aprender álgebra (NCTM, 2000). No entanto, o seu estudo está fortemente ligada à manipulação simbólica e à resolução de equações. Mas a álgebra é mais do que isso. Os alunos precisam de entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem

ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Muitos desses conceitos algébricos podem ser construídos partindo das experiências com números; contudo a álgebra também está fortemente ligada à geometria e ao tratamento de dados (VALE, PALHARES, CABRITA, BORRALHO, 2007 – p. 1)

Vamos então, estudar o significado de padrão. O termo *padrão* geralmente está ligado a imagens que se vê em tapetes ou pinturas históricas, culturais ou religiosas onde se observam regularidades de formas geométricas, cores, números entre outros objetos.

Figura 18 - Padrões geométricos no interior da Mesquita Brasil em São Paulo – Fonte: <https://www.flickr.com/photos/architecturehistory/3556908457>

Não só nesses exemplos mas em diversos momentos de nossas vidas estamos atraídos a encontrar padrões inclusive onde existe o caos e isso se reflete também na matemática:

O próprio objetivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão. (Davis e Hersh, 1995 p. 167)

Ou também segundo Balmond:

A essência da matemática consiste em procurar padrões. O nosso espírito parece estar estruturado para procurar relações e sucessões. Procuramos a ordem escondida. (Balmond, 2000 p. 157)

Por exemplo se tomarmos a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.... Em um momento inicial para uma pessoa que nunca viu essa sequência, os números estão em ordem mas parecem estar dispostos em aleatoriamente sem obedecer algum padrão ou sem relação de uma número

para outro, mas prestando um pouco mais de atenção por algum tempo é possível verificar que há uma regra de estabelecimento dessa sequência onde cada termo é o resultado da soma dos dois termos anteriores. Do caos aparece a ordem. E essa sequência pode ser representada pela espiral abaixo, mostrando que realmente não é uma bagunça, existe uma regularidade e simetria:

Figura 19 - espiral de Fibonacci – Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/>

Segundo o dicionário Michaelis online, padrão é “aquilo que serve como regra para medidas de peso, valor, comprimento ou quantidade oficialmente estabelecida por autoridade” ou também como exemplificamos anteriormente “desenho de estamparia decorativa em tecido azulejo, papel etc.” ou “aquilo que tem forma, tamanho, dimensões mais comuns em sua categoria ou em seu gênero, modelo, tipo”. E então o padrão aparece em diversos contextos:

Padrão internacional para padronização (em medidas):

Entidade que congrega a padronização e normalização em 170 países do mundo, criada em Genebra (Suíça), em 1947, sendo responsável por normas técnicas, classificações e procedimentos relativos à produção industrial e tecnológica.

Padrão monetário:

Valor da unidade monetária do país, legalmente estabelecido.

Padrão NTSC:

Sistema de televisão e vídeo em cores adotado nos Estados Unidos da América e em outros países que opera em 60 hertz e é formado por 525 linhas de resolução, podendo conter 16 milhões de cores diferentes.

Aqui vemos alguns exemplos de significados de padrões, exemplos simples mas que podem chegar a exemplos mais complexos:

Motivo a qualquer conjunto não vazio do plano; um padrão monomotivo com motivo M é uma família não vazia $\{M_i, i \in I\}$ de conjuntos no plano, etiquetado pelo conjunto índice I , com as seguintes condições:

P1 – Os conjuntos M_i são disjuntos dois a dois;

P2 – Cada M_i é congruente com M e diz-se uma cópia de M ;

P3 – Para cada par M_i, M_j , de cópias do motivo há uma isomeria, do plano, que transforma o padrão monomotivo em si próprio e M_i em M_j .

Devlin (2002) esclarece um pouco mais os padrões na matemática:

Foi só nos últimos vinte anos, mais ou menos, que surgiu a definição de matemática que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos: a matemática é a *ciência dos padrões*. O que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. (DEVLIN, 2002, p. 9)

De todas essas definições diferentes para cada situação podemos estabelecer a ideia de padrão a algo em comum em todas elas: regularidade, regra, ordem, repetição.

Mais especificamente falando de padrões em álgebra, considerar a matemática como uma ciência dos padrões não é só por que seria mais cômodo mas por que ela funciona assim e é mais do que um método é uma forma de pensar a matemática melhorando a nossa compreensão. É consenso entre professores de matemática o baixo interesse dos alunos na área, talvez por que

vêm a matemática como um mero conjunto de procedimentos “chatos” e sem sentido:

(...) ao longo dos anos a matemática se tornou cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas mas sim a compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza (DEVLIN, 2002 – p. 206)

Portanto, levando em conta essa perspectiva para o ensino de álgebra, poderíamos dizer que é possível iniciar seu ensino já no jardim de infância. Pode parecer um absurdo, mas é completamente viável propor atividades de reconhecimento de padrões para as crianças quem dirá então também para alunos mais velhos de 6º, 7º 8 e 9º anos. E criando essa situação de padrões estamos criando um contexto para o ensino de álgebra de modo intuitivo e motivador.

Vamos observar abaixo alguns exemplos de sequências e discutir alguns aspectos:

Figura 20 - Sequências - 2019. Fonte: Autor

Geralmente as atividades envolvendo sequências pedem ao aluno para descobrir algumas das próximas posições e depois generalizar para uma posição qualquer ou também dada uma figura em qual posição ela se encontra.

Questões do tipo:

1. Escreva os dois próximos números (ou figuras) da sequência.
2. Escreva o número (ou figura) na posição 50.

3. Escreva o número (ou figura) para uma posição p qualquer (sendo p um número natural).
4. A figura com 360 quadradinhos está em qual posição?
5. Quantos quadradinhos existem na figura da posição “ p ”.

O maior cuidado que devemos tomar, cremos que seja da questão 2 para a 3. Existe um salto bem grande de uma para a outra pois não será de repente que o aluno irá desenvolver a capacidade de entender a necessidade de se escrever uma expressão ele poderia explicar por extenso qual a regra de formação dessa sequência. E a pergunta 3 ser realizada em algum momento que o aluno esteja mais maduro para essa situação. Isso porque para nós professores que já sabemos a resposta é bem simples, mas se colocando na posição do aluno vemos que não é tão fácil como parece. Talvez uma pergunta a se fazer seria “Explique como fez para descobrir a resposta da questão 2” ou “Explique como você faria para descobrir uma figura em qualquer lugar da sequência”. Temos que tomar cuidado com esse salto, não um salto mecânico, mas um salto conceitual daquilo que está acontecendo. E é esse o ponto em que se irá fazer o aluno entender ou criar mais confusão ainda em sua mente. E é por isso que devemos tomar bastante cuidado e não simplesmente desenvolver a atividade e jogar para o aluno fazer, sendo então muito importante se colocar no lugar do aluno para se desenvolver uma atividade produtiva e que faça sentido.

Vale destacar também que os padrões aparecem atualmente nos livros didáticos, não só no ensino de álgebra mas também no de geometria. Por exemplo, ao se ensinar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, encontra-se atividades que envolvem a observação de padrões para a generalização dos conceitos:

Polígono convexo	Número de lados	Número de triângulos interiores obtidos	Multiplicação que fornece a soma das medidas dos ângulos internos
4	2	$2 \cdot 180^\circ$
5	3	$3 \cdot 180^\circ$
6	4	$4 \cdot 180^\circ$

Figura 21 -Soma dos ângulos internos – Fonte: p. 19 MANUAL DO PROFESSOR ANGLO 8º ANO

Na figura acima, temos a atividade resolvida, onde o intuito é fazer com que o aluno estabeleça uma relação entre o número de lados de um polígono e o número de triângulos interiores obtidos para se chegar a alguma conclusão a respeito da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. Começando por polígonos mais simples até outros maiores.

Polígono convexo	Número de lados	Número de triângulos interiores obtidos	Multiplicação que fornece a soma das medidas dos ângulos internos
7	5	$5 \cdot 180^\circ$
8	6	$6 \cdot 180^\circ$
	15	13	$13 \cdot 180^\circ$
	20	18	$18 \cdot 180^\circ$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	$n - 2$	$(n - 2) \cdot 180^\circ$

Figura 22 – Soma dos ângulos internos 2 – Fonte: p. 20 MANUAL DO PROFESSOR ANGLO 8 ANO

Aqui, espera-se que os alunos percebam que o número de triângulos obtidos ao se traçar todas as diagonais partindo de um único ponto, seja o número de lados menos 2. E no final para um polígono de n lados tem-se $n - 2$ triângulos interiores à figura e portanto a soma dos ângulos internos é $(n - 2) \cdot 180$.

Mas aqui, vale destacar que se trata de uma atividade presente no livro do 8º Ano do ensino fundamental, e portanto já existe uma familiaridade por parte dos alunos no trato com expressões algébricas. Talvez para uma turma que ainda não tenha atingido maturidade com a manipulação de expressões algébricas esse salto de um polígono de 20 lados para outro com n lados não seja tão natural.

E portanto, é importante também observar as etapas envolvidas no processo de generalização de um padrão e do raciocínio indutivo. Segundo Polya (1965) esse raciocínio envolve 4 etapas: experiências com casos particulares, formulação de conjecturas, demonstração de conjecturas e validação das conjecturas para novos casos particulares. E nesta mesma linha, Cañadas e Castro (2007) desenvolveram um sistema de etapas relacionado ao pensamento envolvido na generalização de padrões:

1. Trabalho com casos particulares ;
2. Organização de casos particulares;
3. Identificação de um padrão;
4. Formulação de uma conjectura;
5. Justificação de uma conjectura;
6. Generalização;
7. Demonstração;

No que diz respeito à demonstração ou prova, De Villiers (1990) diz:

“A prova não é necessariamente um pré-requisito para a convicção – a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a prova”

E a citação vai ao encontro da listagem acima em que a demonstração está por último nessas etapas, onde convicção é construída por meio dos processos anteriores. Até por que não se teria a mesma determinação em provar algo em que se não acredita ou não se tem convicção.

Além disso, Radford (2008) traz essa discussão para a álgebra também propõe um modelo para a sua concepção de generalização de padrões:

Generalizar um padrão algebricamente significa compreender uma regularidade identificada em alguns casos particulares $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ estendendo ou generalizando esta regularidade a todos os subsequentes $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots)$ e ser capaz de usar essa propriedade comum para propor uma expressão para qualquer termo da sequência. (RADFORD, 2008, p. 84)

No modelo de Radford, o processo tem início numa regularidade local (R) em uma sequência (S), onde se observar alguma regularidade que se mantém em alguns elementos da sequência ou que não se mantém em outros. E em seguida R é generalizada a todos os termos de S. Essa etapa é chamada de S, ou seja, observou-se uma regularidade comum a elementos particulares da sequência e generalizou-se essa regularidade a todos os elementos (conhecidos e desconhecidos) da sequência. R então seria uma hipótese que foi testada e deduzida numa expressão algébrica geral para a sequência S. O processo está representado abaixo:

Figura 23 - Modelo de generalização algébrica de padrões – Fonte: (Radford, 2008)

Agora, falando de forma mais geral de problemas na matemática, encontramos o livro *Problem-Solving Through Problems*, onde Loren C. Larson propõe doze estratégias para a resolução de problemas onde entre elas além da generalização do padrão aparece também a resolução visual com o uso de figuras. No artigo *Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica* os autores descrevem essas doze estratégias e a questão da heurística (conjunto de regras e métodos que conduzem à resolução de problemas). Com base na descrição feita no artigo, as doze estratégias são as seguintes:

- **Procure um padrão:** a busca de casos particulares mais evidentes e examinando-os inspirando ideias para a resolução do problema;
- **Trace uma figura:** elaboração de figuras, esquemas e diagramas para a percepção de aspectos relevantes nela;
- **Formule um problema equivalente:** reformular o problema para que adquira uma forma mais simples através da manipulação algébrica, reorganização da figura, mudança de variáveis ou a reinterpretação do problema em outros contextos;
- **Modifique o problema:** um exemplo disso é a utilização de frases como “É suficiente mostrar que...”, ou “Podemos assumir que...” ou “Sem perda de generalidade...”;
- **Escolha uma notação efetiva:** Muitas vezes a notação utilizada pode deixar o problema mais fácil ou mais difícil. “Um dos primeiros passos ao se trabalhar em um problema de matemática é traduzir esse problema”. Inicialmente, todos os conceitos chave devem ser identificados e rotulados. As redundâncias na notação podem ser eliminadas à medida que novas relações são descobertas.”
- **Explore as simetrias:** significa a redução de trabalho na resolução do problema, seria a busca por atalhos e situações em que se possa adiantar o que irá acontecer;

- **Divida em casos:** por exemplo num problema em que seja necessário provar algo para os número inteiros, provar separadamente o caso dos número pares e dos ímpares;
- **Raciocine de trás para frente:** significa assumir a conclusão como verdade e a partir disso deduzir fatos até surgir algo que possa ser demonstrado com mais facilidade.
- **Argumente por contradição:** significa assumir que a conclusão é falsa e então desenvolver raciocínios que levam a uma afirmação que contradiz a hipótese.
- **Procure por paridade:** Muitos problemas podem ser resolvidos observando a invariância da paridade e imparidade dos números inteiros que aparecem nas informações do problema.
- **Considere os casos extremos:** é útil considerar as consequências da variação dos parâmetros do problema em casos extremos. Como por exemplo em expressões do tipo “Na pior (melhor) das hipóteses...” e “No pior (melhor) dos casos...”
- **Generalize:** Depois de generalizar um problema, buscar formas mais simples e de fácil entendimento do caso geral.

Capítulo 2 – Metodologia

Anteriormente ao período de imersão a esse universo acadêmico das pesquisas, imaginávamos que fosse existir um método pronto de como se deve realizar uma pesquisa. Não só isso mas também existia uma visão pouco profunda sobre o que é uma pesquisa, ou melhor ainda, o que seria uma boa pesquisa.

O texto de Borba e Araujo (2004) foi de grande contribuição para entender o real significado de uma pesquisa e quais as crenças e procedimentos necessários para elaborar uma boa pesquisa. E assim, vamos mostrar aqui o que foi aprendido e que foi de extrema importância para o direcionamento do presente trabalho como pesquisa.

Inicialmente, o primeiro ponto é a importância de se estabelecer uma “pergunta diretriz”. Pode parecer se tratar de uma simples pergunta, uma vez que podemos elaborar várias relacionadas ao trabalho, mas o grau de dificuldade reside em encontrar a pergunta certa, aquela que fará com que o trabalho caminhe e a pesquisa tenha sucesso. E percebemos que o grande aprendizado não ocorreu antes do trabalho no cumprimento das disciplinas, ou na entrega final do trabalho mas sim durante a sua realização. Podemos afirmar com total certeza que as perspectivas e impressões atuais são diferentes daquelas do início do trabalho, não por que as iniciais estavam erradas e as de agora estão certas, mas por que uma certa experiência e maturidade a cerca da realização de um trabalho ou de uma pesquisa hoje parecem mais estabelecidas do que antes. Esse fato é descrito por Borba e Araujo (2004) citando que foi definido por Lincoln e Guba (1985) como design emergente:

O naturalista [denominação dada pelos autores àquele que faz pesquisa naturalística, proposta por eles espera tais mudanças e antecipa que o design emergente será colorido por elas. Longe de serem destrutivas, elas são construtivas, já que estas mudanças sinalizam um movimento para um nível de investigação sofisticado e que proporciona um maior insight. (Lincoln & Guba, 2004, p.229)

Essa visão nos proporcionou um pouco mais de tranquilidade, uma vez que se imaginava que antes mesmo do trabalho começar já se deveria ter todo o trajeto pronto e praticá-los numa certa sequência. E agora vemos que o trabalho se desenvolve e amadurece naturalmente ao longo do tempo da dedicação do pesquisador para a sua realização chegando a um nível mais sofisticado de investigação.

Além disso, Borba e Araujo (2004) nos mostra outro aspecto importante presente numa pesquisa qualitativa para que esta tenha credibilidade: a importância da utilização de diferentes procedimentos para a obtenção dos dados, o que alguns autores (Alvez – Mazzoti, 1998; Lincoln & Guba, 1985) denominaram como “triangulação”:

Particularmente, a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. Quando checamos, por exemplo, as informações obtidas em uma entrevista com as atas de uma reunião sobre um mesmo assunto, estamos fazendo uma triangulação de

fontes. Por outro lado, se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho desenvolvido, realizaremos uma triangulação de métodos. Fazendo assim, o pesquisador, ao invés de construir suas conclusões apenas a partir de observações, pode utilizar as entrevistas para checar algum detalhe ou para compreender melhor algum fato ocorrido durante as observações, promovendo uma maior credibilidade de sua pesquisa. (Borba & Araujo, 2004, p. 36)

Temos consciência de que existem trabalhos tratando do mesmo tema, e para que não se faça mais do mesmo, outro ponto importante destacado por Borba & Araujo é a revisão de literatura, no qual “ o pesquisador situa seu trabalho no processo de produção de conhecimento da comunidade científica”. Além do que, cada pesquisa qualitativa é feita de acordo com a sua realidade, mas é importante observar as realidades dos outros trabalhos tanto como parâmetro de qualidade quanto para a busca de aprendizados, melhorias e para um trabalho cada vez melhor. Temos consciência de que é praticamente impossível, de início, buscar teorias capazes de entender e receitar exatamente o que fazer em uma dada realidade de sala de aula, até por que encaixar uma certa realidade em algo pré-estabelecido pode nos aprisionar e excluir novas possibilidades. E, portanto de acordo com Borba & Araujo devemos estar “abertos para encontrar o inesperado” para uma produção gradativa do conhecimento:

Para, nós o conhecimento não é descoberto e nem é transmitido: ele é uma produção gradativa de um coletivo pensante (Levy, 1999).

E portanto, pesquisar não se resume em uma lista de procedimentos que devemos realizar, é algo muito mais complexo e que não é feito de uma hora para outra, leva tempo, requer muito mais do que encontrar um resultado e tirar conclusões num passe de mágica. O que queremos é exatamente encontrar o inesperado. A citação acima me faz lembrar um aprendizado bastante valioso adquirido com o amigo e professor Sheikh Jihad Hassan Hammadeh a respeito da importância realizar atividades em num coletivo, em grupo: “sozinhos podemos voar, chegamos mais rápido. Mas em grupo somos mais fortes e chegamos mais longe”.

2.1. Pesquisa qualitativa

O presente trabalho se trata de uma pesquisa qualitativa. Um estudo qualitativo pode ser definido da seguinte maneira:

Um tipo de investigação que recorre a múltiplos métodos e onde a abordagem ao tema em estudo é de natureza interpretativa e naturalística. Isto significa que os investigadores qualitativos estudam os objetos em contextos naturais, tentando perceber, ou interpretar os fenómenos de acordo com os significados que as pessoas lhes atribuem. Na investigação qualitativa a utilização e recolha de uma diversidade de materiais empíricos (...) permitem descrever momentos problemáticos e rotineiros nas vidas dos indivíduos. (Denzin & Lincoln, 2000,p. 2).

Basicamente, o principal objetivo da investigação qualitativa é compreender de forma aprofundada o que os sujeitos pensam. Isso faz com que seja necessário que o pesquisador passe um longo período de tempo com os sujeitos em seu contexto natural, propondo questões e garantindo os registros com detalhes das suas respostas e discussões. O registro pode ser feito por meio de filmagem, áudio, escrito, entre outros. Procuramos alguns trabalhos que descrevem a pesquisa qualitativa com base em diversos autores. Nesse sentido o trabalho de Barbosa foi de grande ajuda. Nele encontram-se algumas características e perspectivas de alguns autores:

O foco da investigação qualitativa assenta essencialmente nos processos e nos significados e o enquadramento de um estudo desta natureza deve ser descrito de forma detalhada, o que implica a procura de informação acerca do contexto e dos participantes (Denzin & Lincoln, 2000). Estas características levam o investigador a utilizar vários métodos de recolha de dados, de natureza interativa, e implicam um envolvimento personalizado bem como uma

presença prolongada no contexto. As técnicas mais representativas nos estudos de natureza qualitativa são: *observações, registros de observações, entrevistas, documentos e artefatos* (Bogdan & Biklen, 1994; Lincoln & Guba, 2000). No entanto, há outras formas de recolha de dados que complementam as referidas e que contribuem para a interpretação e para a triangulação dos dados, como é o caso das gravações áudio e vídeo. (BARBOSA)

Além dos dados e respostas dos alunos o registro permite recolher informações a cerca do comportamento dos alunos: por exemplo suas dúvidas, dificuldades e facilidades. E as vezes informações que fugiram ao momento da aplicação. Durante a atividade são diversas as situações que podem ocorrer, não só entre os alunos mas na participação ou não do professor nesse processo. Podemos então definir também o grau de envolvimento do pesquisador podendo assumir diferentes papéis. O investigador pode ser participante ou não participante. No presente trabalho tentaremos ser não participante e a ideia é que por se tratarem de atividades envolvendo contexto que foram propostos, os alunos sejam capazes de mergulhar nessas situações e sentirem-se capazes de resolver o que está sendo proposto.

Ao longo da segunda fase do ensino fundamental e do ensino médio, nossos alunos são expostos a diversas situações em que diversas vezes não sabem ou não entendendo do porquê ou para que disso tudo. Não veem sentido nos exercícios, nas avaliações, nas atividades. O que queremos é dar um sentido, um significado à matemática. Que não são apenas fórmulas que surgem num passe de mágica ou somente pelas mentes de pessoas geniais, mas que a matemática é investigativa, é curiosa, possui uma história e principalmente que todos são capazes de aprender e praticar a matemática. Assim elaboramos uma sequência didática seguindo alguns pontos principais de acordo com a teoria desenvolvida e aprendida ao longo dos anos de graduação e de mestrado:

- Contextualização
- Representação visual
- Investigação

- Levantamento de hipóteses
- Generalização de padrões

E implementar essa sequência didática nas turmas em que seja coerente levando em conta o conteúdo e os conhecimentos prévios dos alunos e sua disponibilidade.

Ao longo da graduação, existiu a possibilidade de realização de estágios adquirindo experiência em diferentes escolas das redes estadual e municipal para o cumprimento de horas em algumas disciplinas. Estágios alguns mais voltados para área da educação e outros voltados mais para a matemática. Mas todos com foco na observação das situações e na melhoria do ensino de matemática. Em particular no terceiro ano de graduação a disciplina de projetos de estágio, anual, que permitiu o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino do sistema métrico para alunos do 6º ano. No quarto e último ano de graduação surgiu a oportunidade de realizar a disciplina de Projetos de Ensino de Matemática, onde tem-se um trabalho em nível de pesquisa e de aplicação de uma proposta didática para o ensino de matemática e tendo maior experiência no desenvolvimento de um trabalho de pesquisa, seus métodos e regras.

Durante o mestrado antes da qualificação foi desenvolvido um primeiro momento de aplicação das atividades. Sendo esse um momento em que foi possível identificar erros que nos levaram a identificar melhores formas de se desenvolver, aplicar e analisar uma atividade para melhor aprendizado dos alunos e proveito para fins de pesquisa. Buscou-se maneiras de levar os alunos a iniciarem o contato com variáveis/incógnitas/letras na matemática de forma intuitiva e que faça sentido para que no futuro se evitem barreiras no ensino dos conteúdos que vem em seguida.

2.2. Contextualização no ensino de Matemática

Uma das estratégias adotadas para o desenvolvimento da sequência didática será o uso da contextualização. Segundo o dicionário Michaelis online o termo “contextualizar” está relacionado a “inserir ou introduzir em um texto; incorporar em uma narrativa” ou “produzir um texto em que se encontre palavra ou expressão, de modo a ampliar o entendimento de seu uso ou eliminar dúvidas acerca de sua aceitabilidade”. É bastante comum que os alunos possuam diversas dúvidas e não exista aceitabilidade fazendo com que a matemática seja aquela matéria “chata e que não faz nenhum sentido” ou que “nunca será usada na vida” entre outras reclamações frequentes. Então talvez a matemática não seja nenhuma dessas coisas mas sim que o fato dela ser apresentada de forma descontextualizada acabe por não fazer sentido algum para os alunos. E então teríamos que contextualizar para obter maior aceitabilidade por parte dos alunos.

Queremos que faça sentido o termo “contextualização” pois ele é utilizado de forma equivocada em muitas situações. Para isso iremos nos basear, entre outros textos, no trabalho de WANESSA, 2018 “ Contextualização: o sentido e o significado na aprendizagem de matemática”.

São enumerados seis tipos de contextualização:

1. De aplicação cotidiana: quando os contextos da atividade matemática está inserida na vida cotidiana de um aluno em particular ou de um conjunto específico de pessoas;
2. Interdisciplinar: quando os contextos da atividade matemática encontram-se inseridos em outras disciplinas escolares;
3. Histórica: quando os contextos da atividade matemática encontram-se inseridos em passagens da história da humanidade (não necessariamente história da matemática)
4. Intradisciplinar: quando os contextos da atividade matemática encontram-se inseridos junto com outros conteúdos da própria matemática;
5. Lúdica: quando os contextos da atividade matemática surgem com atividades lúdicas, jogos, música, etc.

Além disso, a contextualização também pode ser classificada como pontual ou duradoura. Pontual seria quando o contexto de uma atividade é considerado de forma mais rápida e não estando relacionado com outras atividades, por exemplo uma lista de problemas. Enquanto que a duradoura seria quando a contextualização persiste por uma sequência didática envolvendo várias aulas com atividades interligadas entre si.

Outra classificação que também pode ser feita pela contextualização é a induzida e a espontânea. Os próprios nomes de cada uma já indicam seus significados: a induzida é quando o professor induz o aluno a necessidade da atividade em determinado contexto, enquanto que a espontânea ocorre quando o contexto mostra espontaneamente a necessidade da atividade em determinado contexto.

A contextualização também pode ser vista como meio ou como fim. Como meio no sentido de que o objetivo principal é o aprendizado do conteúdo pelo aluno e a contextualização será um meio para isso. E como fim no sentido de que o objetivo principal é o próprio contexto onde os conteúdos seriam os meios para solucioná-lo.

Na Lei de Diretrizes e Bases da educação Nacional (LDBEN) 9.394/ 1996 a contextualização é tratada como um importante princípio pedagógico:

[...] dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p. 83).

Nesta citação, é enfatizado algo bastante importante no que diz respeito à forma como a contextualização é tratada ou interpretada pelos professores. Muitas vezes entende-se por contextualização simplesmente o fato de relacionar o conteúdo com algo de fora da sala de aula e utilizado simplesmente para dar um motivo, desculpa ou pretexto para o problema. Problemas do tipo “Joãozinho

comprou 50 melancias” onde o aluno pensa “Para que Joãozinho quer 50 melancias?” ou “Como vai levar as 50 melancias?”. Mas, muito mais do que isso, o contexto é uma maneira de “dar sentido ao conhecimento matemático” e assim aumentar a aceitabilidade.

Capítulo 3 – Produto

3.1. A sequência didática

Levando em conta o público e o tema, foi elaborada uma sequência didática com o fim de levar o aluno a desenvolver o pensamento algébrico por meio das sequências de padrões. E isso, buscamos a todo momento apresentar e fazer com que os alunos usem diferentes formas de representação.

Essa sequência foi baseada no que foi encontrado no trabalho “A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico” de Ana Cristina Coelho Barbosa no ano de 2009. Que também se baseou em outra atividade, sendo adaptada de Lannin (2005) o qual a encontramos alguns links mas não encontramos acesso a esse trabalho.

Ao terem contato com a sequência didática esperamos que os alunos desenvolvam intuitivamente e com o raciocínio lógico algumas hipóteses de como cada problema pode ser resolvido. E para isso criamos uma narrativa ao encontro da vida cotidiana dos alunos que farão a atividade. Trata-se de Fatima que terá em sua escola a Semana da Álgebra, seu irmão a deixa aterrorizada com o assunto e durante a semana ela percebe se seu irmão estava certo ou errado e acompanhamos cada dia da semana de Fatima.

A Semana da Álgebra

Fatima está no 7º ano em sua escola, é a filha caçula da família. Nos últimos dias anda muito estressada. Vai começar a "Semana da Álgebra" na sua escola! Será uma semana inteira com atividades para introduzir esse assunto difícil - Álgebra. Fatima nem está conseguindo dormir direito de tanta preocupação. Seu irmão Samir a andou aterrorizando sobre esse evento:

- Samir: Semana da Álgebra? Boa sorte, vão ser os piores dias da sua vida!

- Fatima: Mas por quê?

- Samir: Como assim por quê? Álgebra é um negócio impossível onde começam a se misturar números e letras. Se com números já é difícil a Matemática imagina quando colocam letras junto! É simplesmente a matéria mais difícil de todas. Se eu fosse você, faltava a semana inteira.

- Fatima: Números e letras juntos? Isso não faz sentido algum! Eu não vou aguentar, quero morrer!!

Fatima estava quase entrando em desespero. Faltar nessa semana seria impossível, as atividades da semana valeriam nota. Sua mãe interveio e disse:

- Fátima, você parece preocupada! É com a Semana da Álgebra? Não fique assim, você vai ver como é até divertido estudar Álgebra! Por que você não faz um planejamento da semana, para ficar mais tranquila?

Fátima ficou um pouco aliviada, e seguiu o conselho de sua mãe. No sábado, ela resolveu então organizar as suas tarefas para a semana.

Figura 24-Semana da álgebra – introdução -- 2019. Fonte: Autor

Acompanhamos alguns trabalhos de mestrado e vimos que no ensino de matemática as narrativas chamam a atenção dos alunos e assumem papel importante. Um dos trabalhos em que observamos isso foi o de Wanessa Aparecida Trevizan “Ensinando matemática por meio de situações potencialmente adidáticas: estudo de casos envolvendo análise combinatória” e ela cita que Cruz (2006) considera que as narrativas são “fontes inesgotáveis para a produção do significado”.

Sábado: Organizando o mural

Preocupada com a semana que viria pela frente, assustada com o que disse seu irmão, Fatima começou a organizar a sua semana. Ela gostava de prender lembretes em seu mural. Para prende-los, viu que precisava organizá-los de forma bem bonita seguindo um certo padrão que criou.

Mas não havia tachinhas mais! Ela ficou pensando em quantas tachinhas iria precisar:

- Fatima: Para fixar 1 lembrete são 4 tachinhas, para 2 lembretes são 7 tachinhas, para 3 lembretes são 10 tachinhas...

Figura 25-organizando o mural de Fatima - 2019. Fonte: Autor

Essa situação permitiu que fizéssemos algumas perguntas a respeito do mural de Fatima.

Veja se pode ajudar a Fátima respondendo as questões abaixo:

1. Quantas tachinhas ela precisa para prender 4 lembretes?
2. Quantas tachinhas ela precisa para prender 5 lembretes?
3. Quantas tachinhas ela precisa para prender 6 lembretes?
4. Quantas tachinhas ela precisa para prender 10 lembretes?
5. O mais interessante é que chegou uma hora em que Fatima não escreveu todas as opções de lembretes e tachinhas e elaborou uma estratégia para descobrir a quantidade de tachinhas para quantidades bem grandes de lembretes. Qual será essa estratégia? Por exemplo, como fazer para descobrir a quantidade de tachinhas para prender 35 lembretes seguindo o mesmo padrão?
6. Mesmo sem querer, Fatima começou a imaginar como faria para descobrir o número de tachinhas para uma quantidade qualquer de

lembretes. Você consegue imaginar uma forma de descobrir esse número, dada uma quantidade qualquer de lembretes?

7. Quantas tachinhas ela precisa para prender n lembretes?
8. Se ela utilizasse 250 tachinhas, quantos lembretes ela teria pendurado?

Figura 26-questões sobre o mural de Fatima- 2019. Fonte: Autor

Para a solução desse primeiro problema disponibilizamos aos alunos: um mural, lembretes e tachinhas além de folhas de papel sulfite, lápis de cor e canetinha.

Existem algumas possibilidades de resolução desses problemas. A primeira delas pode ser pela simples mas contagem das quantidades, entretanto conforme a quantidade aumenta isso pode se tornar exaustivo. Ou observando a construção dessa situação no mural ou representando na folha de papel pode ocorrer a observação de alguns padrões de construção.

Figura 27-possíveis soluções do primeiro problema- 2019. Fonte: Autor

Na primeira imagem podemos observar que cada um dos lembretes menos o último possui 3 tachinhas, e apenas o último possui 4 e portanto aplicando esse caso para 10 lembretes seriam $(10 - 1) \cdot 3 + 4 = 31$ tachinhas. Na segunda imagem temos que todos os lembretes possui 3 tachinhas e apenas o último possui um lembrete a mais e portanto para 10 lembretes seriam $10 \cdot 3 + 1 = 31$ tachinhas. E na terceira imagem podemos observar que as composições das duas extremidades possuem uma dupla de lembretes alinhados enquanto que as composições que estão no entre as extremidades (são uma a menos que o total de lembretes) possuem 3 tachinhas alinhadas, e portanto para os mesmos 10 lembretes existem $2 + (10 - 1) \cdot 3 + 2 = 31$ tachinhas. Portanto para o caso de n lembretes a quantidade de tachinhas que Fatima iria precisar seriam $(n - 1) \cdot 3 + 4$ ou $n \cdot 3 + 1$ ou $2 + (n - 1) \cdot 3 + 2$. Sendo essas expressões todas equivalentes.

Analogamente, observadas algumas dessas ou qualquer outras possibilidades de resolução seria possível saber a quantidade de lembretes dado o número de tachinhas utilizadas. Para 250 lembretes seria resolver qualquer uma dessas equações igual a 250 ou utilizar o raciocínio inverso que que havia sido utilizado antes, encontrando por exemplo $n \cdot 3 + 1 = 250$ e portanto $n = \frac{250-1}{3} = 83$ lembretes.

Esperamos que com problemas desse tipo os alunos vejam como a generalização de um problema com a construção de equações que traduzam o que está acontecendo pode facilitar a sua resolução. E caso não percebessem procurar questioná-los com quantidades cada vez maiores até perceberem a importância de encontrar um padrão.

Domingo: O dia da pizzeria

Fátima conseguiu organizar seu mural, que ficou muito bonito. Vendo a filha ainda apreensiva, os pais de Fatima resolveram levar a família no domingo para uma pizzeria. Chegando lá, Fatima viu que havia mesas com diversas quantidades de pizzas e pratos ao seu redor. Empolgada com a história dos bilhetes e das tachinhas, ela começou a imaginar diferentes opções de disposições nas mesas.

Acima estão representadas duas mesas da pizzeria que Fatima viu logo na entrada, em que as pizzas são os círculos laranjas e os pratos são círculos brancos. Nas disposições das mesas em que observou, ela viu que para 3 pizzas havia 8 pratos, e para 4 pizzas, 10 pratos...

Ela andou pelo restaurante e observou o mesmo padrão em outras mesas.

Figura 28-domingo na pizzeria- 2019. Fonte: Autor

Em seguida a semana de Fatima continua, agora observando a disposição dos pratos e pizzas nas mesas da pizzeria, elaboramos algumas perguntas. Foram fornecidas algumas fichas para representarem os pratos e as pizzas além também da possibilidade de representar no papel a situação descrita.

Para responder as questões abaixo, você pode desenhar ou utilizar o material fornecido pelo professor (fichas de duas cores diferentes).

1. Se numa mesa havia 5 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos havia nessa mesa?
2. Se numa mesa havia 6 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos havia nessa mesa?
3. Se numa mesa havia 10 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos tinham nessa mesa?

-
4. Se numa mesa havia 25 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos havia nessa mesa?
 5. Fátima logo imaginou uma forma de descobrir a quantidade de pratos para uma quantidade qualquer de pizzas. Você consegue também?
 6. Se numa mesa forem colocadas p pizzas, quantos pratos deverão ter nessa mesa?
 7. Se numa mesa há 58 pratos, quantas pizzas pode haver nessa mesa, para manter a mesma configuração?

Figura 29-questões sobre o dia de Fatima na pizzaria- 2019. Fonte: Autor

Da mesma forma esse problema também pode ser resolvido através de contagem, mas novamente para quantidades maiores o trabalho será muito grande nessa resolução.

Figura 30- possíveis soluções para o problema da pizzaria-- Fonte: (BARBOSA, 2009)

Na figura acima, podemos observar algumas soluções visuais para responder às perguntas propostas, no caso para 5 pizzas. Na primeira imagem observamos que os pratos na parte de cima e embaixo da mesa estão exatamente alinhados com as pizzas ao centro da mesa sobrando os dois pratos

das pontas da mesa. E portanto aplicando esse caso para 25 pizzas são $25 \cdot 2 + 2 = 52$ pratos na mesa. Na segunda imagem vemos que ao redor de cada pizza das pontas existe um trio de pratos e depois olhando apenas as pizzas do centro (retirando essas pizzas e pratos que já observamos nas pontas), as pizzas e pratos ficam alinhados com dois pratos para cada pizza e portanto temos $2 \cdot 3 + 2 \cdot (25 - 2) = 52$ pratos na mesa. Na última imagem vemos que podemos separar a mesa em dois conjuntos em que cada conjunto possui um prato a mais do que pizzas (os pratos alinhados com as pizzas e um prato da ponta) sendo portanto para 25 pizzas $(25 + 1) \cdot 2 = 52$ pizzas. E portanto se Fatima observar uma mesa com n pizzas, ela irá ver $n \cdot 2 + 2$ ou $2 \cdot 3 + 2 \cdot (n - 2)$ ou $(n + 1) \cdot 2$ pratos ao redor da mesa. E também essas expressões são equivalentes entre si.

Analogamente, analisando a situação inversa se Fatima observar que na mesa existem 58 pratos, uma das soluções possibilidades de se chegar a solução seria $(n + 1) \cdot 2 = 58$ e portanto resolvendo a equação ou realizando as operações inversas, ela irá observar que existem $n = \frac{58}{2} - 1 = 28$ pizzas nessa mesa.

Segunda feira; Começa a Semana da Álgebra

Fátima teve um ótimo final de semana! Mesmo assim, ela pensava que a semana da Álgebra seria terrível! Assim que chegou à escola, ela viu a programação da semana e achou que seria tudo muito difícil de fazer.

Mas, logo em sua primeira atividade, foi proposto um trabalho de dobrar papeis. Fatima sempre foi boa nisso! Na verdade, ela adorava Artes e mexer com papeis. O professor pediu para que todos os alunos usassem uma folha do caderno ou papel sulfite e seguissem as instruções abaixo:

- Dobrando uma vez, a folha fica dividida em 2 partes, dobrando duas vezes a folha fica dividida em 4 partes...

Figura 31-começa a semana da álgebra- 2019. Fonte: Autor

Agora, começa a semana da álgebra e Fatima conforme realiza as atividades começa a perceber se aquilo que seu irmão havia dito era verdade ou não. Inicia-se por uma atividade com dobradura que propomos que os alunos realizem também para responder as perguntas que vem a seguir

Com uma folha de papel e seguindo o exemplo acima, siga os passos de dobradura que foram propostos para Fatima, e responda:

1. Dobre a folha ao meio. Em seguida abra a folha. Em quantas partes ela ficou dividida?
2. E se dobrar a folha ao meio 2 vezes seguindo o modelo? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
3. E se dobrar a folha ao meio 3 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida? E
4. E se dobrar a folha ao meio 4 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
5. E se dobrar a folha ao meio 5 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
6. Ao término dessa atividade, o professor sugeriu que os alunos abrissem a folha de papel e pintassem os retângulos formados pelas dobras com cores diferentes. Depois disso, continuou o desafio em que os alunos agora deveriam imaginar o resultado das dobras, mas sem fazê-las no papel porque ficaria muito difícil dobrar.
7. E se dobrar a folha ao meio 10 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
8. E se dobrar a folha ao meio 30 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida? Justifique.
9. Explique como você pode fazer para descobrir em quantas partes a folha ficará dividida, para um número qualquer de dobras?
10. E se dobrar a folha ao meio d vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
11. Para a folha ficar dividida em 1024 partes, quantas dobragens teriam que ser feitas? Explique o seu raciocínio.

Figura 32-perguntas sobre a dobradura- 2019. Fonte: Autor

Conforme as dobras são feitas é possível simplesmente contar as partes da folha:

Figura 33-dobras na folha- 2019. Fonte: Autor

A seguir foram realizadas algumas perguntas a respeito da quantidade de divisões na folha após cada dobradura. Em cada dobra a quantidade de divisões

também dobra e portanto espera-se que os alunos observem e preencham a tabela:

Nº de dobras	Nº de partes iguais que a folha ficou dividida
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
10	1024
30	2^{30}
d	2^d
10	1024

Figura 34-tabela dobras na folha- 2019. Fonte: Autor

Apesar de parecer ter um nível de dificuldade menor do que em relação às anteriores, a potenciação como vamos ver nos resultados da atividade não se mostra uma alternativa tão óbvia para os alunos, a soma, subtração, multiplicação e a divisão são as operações que são buscadas com maior naturalidade. Além disso essa atividade possibilita o contato com outras ideias matemáticas: o dobro, área, divisão.

Assim como nos problemas anteriores a contagem deve surgir como uma alternativa para saber o número de divisões iguais na folha. Entretanto apesar de ser uma estratégia eficiente, chega um momento em que se torna quase impossível realizar uma dobra na folha devido ao aumento da espessura da folha conforme se faz mais dobras, sendo então necessário estabelecer alguma estratégia para casos de números grandes de dobras.

Uma outra solução seria comparar cada quantidade de dobras com a anterior (sabendo essa), na tabela pode-se observar que a quantidade numa linha é o dobro da quantidade na linha anterior.

Nº de dobragens	Nº de partes
1	2
2	$2 \times 2 = 4$
3	$4 \times 2 = 8$
4	$8 \times 2 = 16$
5	$16 \times 2 = 32$
6	$32 \times 2 = 64$

Tabela 2-dobras na folha- 2019. Fonte: Autor

Como já dissemos, a multiplicação deve ser uma alternativa mais natural para os alunos, mas ela nos leva a perceber as potências de base 2:

Nº de dobragens	Nº de partes
1	2
2	$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
3	$4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
4	$8 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
5	$16 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$
6	$32 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$

Tabela 3-dobras na folha- 2019. Fonte: Autor

Assim como nos problemas anteriores o componente visual atua de forma importante não só na observação das dobras na folha mas a visualização da relação entre os números da tabela.

Ao final da atividade, o professor sugeriu que os alunos pintassem os retângulos formados pelas folhas que tinham dobrado com cores diferentes.

Ao chegar em casa depois das aulas de segunda-feira, Fátima foi logo procurar seu irmão Samir para mostrar sua arte e contar que o primeiro dia da semana da Álgebra tinha sido muito divertido!

Veja a pintura de Fátima:

Mesmo assim, ele ainda quis colocar medo nela:

- Ah, você gostou é? Pois aguarde os próximos dias....

Figura 35-colorindo as dobras- 2019. Fonte: Autor

Ao final os alunos poderão pintar as dobras na folha com cores diferentes, sendo possível observar com mais destaque as dobras além de dar um aspecto artístico e estando de acordo com o contexto da tarefa de artes de Fatima.

Terça feira: Um desafio com pontinhos

Como tinha gostado muito das atividades do 1º dia, de dobradura de papel, Fatima tinha medo de que os dias seguintes apresentassem a Álgebra terrível como seu irmão havia comentado. Ou seja, chegou a escola receosa de que o pior poderia ainda estar por vir. Ao encontrar sua melhor amiga, Laila, ela disse:

Fátima: Bom, ontem achei muito divertido a atividade de dobrar papeis e contar.... Até o uso de letras no final não me espantou nem um pouco. O que você achou?

Laila: Olha, até que Álgebra, se continuar assim, não parece tão ruim. As letras na verdade foram muito úteis para expressar uma quantidade qualquer....

Fátima: Bem, vamos aguardar os próximos dias pra tirar alguma conclusão, não é?

Logo então começou a aula da terça feira. A atividade proposta pelo professor apresentava uma sequência de figuras como a representada abaixo, onde são mostradas as três primeiras figuras. O desafio era descobrir quais são as próximas figuras dessa sequência. Embalada por sua habilidade em relacionar números a padrões, Fatima começou a contar as quantidades:

- Figura 1 são 3 pontinhos, na figura 2 são 8 pontinhos, na figura 3 são 15 pontinhos...

Figura 36-desafio com pontinhos- 2019. Fonte: Autor

No diálogo da terça-feira, Laila e Fatima trocam algumas ideias a respeito do que foi feito até aqui e algumas características importantes da álgebra como o uso de letras e como elas aparecem para facilitar o nosso trabalho. Em seguida é proposto o desafio dos pontinhos, onde trazemos a figura abaixo:

Utilizando o material disponibilizado pelo seu professor, responda:

01. Quantos pontinhos terá a figura 4 dessa sequência?
02. Quantos pontinhos terá a figura 5 dessa sequência?
03. Quantos pontinhos terá a figura 10 dessa sequência?
04. Explique como você pode fazer para descobrir a quantidade de pontinhos de uma figura qualquer dessa sequência.
05. Quantos pontinhos terá a figura p dessa sequência?
06. A figura de qual posição dessa sequência possui 63 pontinhos?

Figura 37-as perguntas do desafio dos pontinhos- 2019. Fonte: Autor

Novamente, de início, a contagem aparece como elemento importante para se identificar o padrão presente na sequência. A primeira figura possui 3 pontinhos, a segunda 8 pontinhos e a terceira 15 pontinhos. E nesse caso de início com algumas tentativas é possível observar que de uma figura para a próxima os números não mostram relação entre eles. Mas observando os números com atenção, do 3 para o 8 somam 5, do 8 para o 15 somam 7 e continuando a soma aumentando de 2 em 2 a próxima seria somar 9 sendo $15 + 9 = 24$ pontinhos, sendo essa resposta correta. Em seguida somando 11 são 35 pontinhos, resposta correta novamente. Nesse caso não há relação entre o número de pontos e a posição da figura para estabelecer uma expressão, mas essa é uma solução possível a ser apresentada.

Outras solução possível seria imaginar a figura como completa formando um quadrado e portanto a cada figura da sequência seria um quadrado menos um quadradinho. A figura 1 é um quadrado de lado 2 menos um pontinho, a

figura 2 é um quadrado de lado 3 menos um pontinhos, a figura 3 é um quadrado de lado 4 menos um pontinhos, e assim por diante.

Figura 38-quadrados completos – 2019. Fonte: Autor

Observamos que aquele “L” formado no canto superior direito aparece por que se o quadrado está completo, um pontinho é retirado originando cada figura da sequência. E portanto a figura n terá $(n + 1)^2 - 1$ pontinhos.

Figura 39-quadrados com lado igual número de figura– 2019. Fonte: Autor

Uma outra solução possível, seria observar quadrados com lado medindo o mesmo número de posição da figura, e observamos que retirando esse quadrado os pontinhos que sobram são o dobro do número da posição, então a figura 1 é composta de um “quadrado” de lado 1 mais 2 pontinhos, a figura 2 possui um quadrado de lado 2 mais 4 pontinhos, a figura 3 possui um quadrado de lado 3 mais 6 pontinhos, a figura 4 possui um quadrado de lado 4 mais 8 pontinhos, e assim por diante. E portanto a figura n possui um quadrado de lado n mais $2n$ pontinhos, ou seja, a figura n tem $n^2 + 2n$ pontinhos.

Além disso, podemos observar que as expressões dessas duas últimas soluções são equivalentes:

$$(n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$$

Quarta feira: jogo das fichas

Quando chegou a quarta-feira, Fátima pensou: nossa, já estamos no meio da semana, e nada apavorante aconteceu. Será que é hoje que a terrível Álgebra irá aparecer?

Mas na verdade a proposta era muito interessante: um jogo usando fichas. Esse jogo consiste no seguinte:

São 12 fichas dispostas em fila, 6 brancas e 6 verdes. O jogo se inicia com as fichas brancas em fila juntas e as verdes em fila juntas, cada fila uma de frente para outra e apenas uma casa vazia separando as duas cores, como no exemplo abaixo com 3 fichas de cada cor. E o jogo termina quando as verdes ocupam o espaço inicial das brancas e vice versa. E para isso, cada ficha pode andar apenas uma casa para frente ou pular uma peça para frente. Não é permitido andar para trás. Veja abaixo como funciona:

Figura 40-quarta feira— 2019. Fonte: Autor

No próximo dia, o professor de Fatima propõe um jogo das fichas. Esse jogo equivale a um jogo talvez um pouco mais conhecido que é o desafio dos sapinhos.

Figura 41-desafio dos sapinhos- 2019. Fonte: <https://genioquiz.com.br/desafio-dos-sapos/>

Nesse desafio, os sapos que estão do lado esquerdo devem passar para o lado direito e vice-versa. Mas isso só pode ocorrer andando para frente, não pode andar para trás. E cada sapo anda para frente ocupando o espaço vazio ou pulando um sapo de cor diferente. Não é permitido pular um sapo de mesma cor. De início, após algumas tentativas o desafio vai da errado mas é possível perceber alguns passos que “travam” o jogo e portanto não devem ser repetidos nas próximas tentativas. E no caso das fichas essas mesmas estratégias e mesmos passos que “travam” o jogo podem ser observados ao jogar com 3, 4, 5 ou 6 fichas. E por isso, será sugerido aos alunos iniciarem com 3 fichas, em seguida com 4 e continuar até tentar o jogo com 6 fichas.

Figura 42-exemplo com 6 fichas – 2019. Fonte: Autor

É apresentado aos alunos um exemplo com 6 fichas dos passos que são permitidos realizar.

A proposta é a seguinte: Monte duas duplas e joguem juntos para trocar as cores de lugar. Em seguida descubra quantos passos foram necessários para chegar até o final. Atenção: não é um jogo de um time contra o outro, os dois grupos jogam juntos, um de cada lado movimentando cada grupo uma cor diferente até conseguir trocar as cores de posição.

Número de peças	Número de movimentos para chegar ao final
2	
3	
4	
5	
6	
10	
n	

Figura 43-tabela jogo das fichas – 2019. Fonte: Autor

A proposta é que os alunos além de trocar as cores de lugar é também contar quantos movimentos foram feitos até chegar até a solução e contar os movimentos do jogo para 2, 3, 4, 5, 6, 10 e até n peças.

Vamos observar alguns movimentos que “trava” o jogo e portanto ver os movimentos que devem ser feitos e que serão os mesmo independente da quantidade de peças utilizadas.

Figura 44-exemplo com jogo dos sapos- 2019. Fonte: <https://genioquiz.com.br/desafio-dos-sapos/>

Logo no início do jogo é possível observar que na primeira jogada, andar um sapo verde para frente irá travar o jogo e portanto a segunda jogada deve ser pular o sapo marrom para frente.

Figura 45-exemplo com jogo dos sapos- 2019. Fonte: <https://genioquiz.com.br/desafio-dos-sapos/>

Já na próxima jogada é possível observar mais um passo importante: quando dois sapos de cores diferentes estão frente a frente e separados por um espaço vazio, andar o sapo verde trava o jogo e portanto se deve andar o sapo marrom a frente. De uma forma geral, observamos que sempre nessa situação deve-se andar a frente o sapo que ainda está em seu lado inicial.

Figura 46-exemplo com jogo dos sapos- 2019. Fonte: <https://genioquiz.com.br/desafio-dos-sapos/>

O mesmo observamos nessa situação, o jogo não irá travar se andarmos o sapo que ainda está em seu lado, ou seja, deve-se andar o sapo verde para frente para em seguida o sapo marrom pulá-lo.

Figura 47-exemplo com jogo dos sapos- 2019. Fonte: <https://genioquiz.com.br/desafio-dos-sapos/>

E no momento em que os sapos estiverem intercalados deve-se pular todos, ou seja, os sapos marrons todos pularem os verdes. Caso o sapo marrom da esquerda pule o verde e em seguida esse mesmo verde andar para frente, o jogo irá travar. Seguindo esses passos e evitando realizar passos que travam o jogo, independente do número de peças, as peças naturalmente vão trocando de lugar até chegar ao objetivo final.

Figura 48-jogo dos sapos finalizado- 2019. Fonte: <https://genioquiz.com.br/desafio-dos-sapos/>

Em meio ao processo, contando o número de passos realizados, obtém-se os números da tabela:

Número de peças	Número de movimentos para chegar ao final
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
10	120

Figura 49-tabela jogo das fichas – 2019. Fonte: Autor

Observando atentamente os números dessa tabela, vemos que os resultados são os mesmos obtidos no problema dos pontinhos. Talvez os alunos percebam essa coincidência e ajude-os a chegar em uma solução geral. Diferente do caso dos pontinhos e outros casos anteriores, não há aqui uma sequência de figuras, apenas uma sequência de números que são eles quem irão dar as pistas de como descobrir quantidades maiores. E portanto, assim como no problema anterior temos a solução para p peças $(p + 1)^2 - 1$.

Quinta feira: A sugestão de Fatima

Nem é preciso dizer que Fátima havia adorado o jogo e tinha sido uma das primeiras do grupo a encontrar o padrão que permitia descobrir o número de jogadas a partir do número n de peças em cada lado. Devido ao seu sucesso das atividades anteriores, ela chegou a quinta feira com uma pergunta que tinha lhe ocorrido na véspera. Ela então perguntou ao professor:

Fátima: Professor Youssef, afinal, Álgebra é isso que estamos fazendo? Usando letras para representar números quaisquer?

Youssef: Sim, Fátima, esse é um dos usos da Álgebra. As letras que representam um número qualquer se chamam variáveis. Vamos aprender muito mais sobre Álgebra, que tem vários usos interessantes. Alguém tem mais uma pergunta?

Dessa vez foi Laila quem levantou a mão:

Professor, que palavra é essa - "Álgebra"?

Professor: Muito boa pergunta, Laila. Vamos justamente agora tratar disso - entender um pouco da história da Álgebra e do surgimento dessa palavra. Vocês repararam na pessoa representada no cartaz da entrada da Semana da Álgebra? Alguém sabe quem ele é?

Fátima: Professor, meu irmão me falou que a gente iria conhecer o Pai da Álgebra... será ele?.

Professor: Sim, Fátima... vamos conhecer esse personagem e um pouco da História da Álgebra.

Ele propôs então que os alunos assistissem ao vídeo *Ciência na Idade de Ouro - Al-Khwarizmi: O pai da Álgebra*.

Figura 50-atividade de quinta-feira – 2019. Fonte: Autor

Na quinta-feira deixamos as sequências um pouco de lado para propor uma atividade envolvendo história da álgebra.

Assim como Fatima, assista ao vídeo e responda às questões abaixo:

01. Qual a origem do nome "Álgebra"?
02. Quem foi Al-Khwarizmi?
03. O que era a Casa da Sabedoria?
04. Cite algumas das principais atividades realizadas pelos matemáticos e outros cientistas na Casa da Sabedoria.
05. Explique por que os algarismos do sistema decimal de numeração que usamos hoje são chamados de algarismos Indo-arábicos.
06. Dê exemplos de atividades práticas e trabalhos do dia a dia em que a matemática está presente atualmente para nós e que esteve presente para os povos do Oriente.

Figura 51 - perguntas atividade de quinta feira– 2019. Fonte: Autor

A proposta é que os alunos através da história da matemática entendam um pouco melhor todo o processo de desenvolvimento da variáveis, incógnitas, equações e tudo que envolvem essa área do conhecimento e propomos então algumas questões após assistir ao vídeo Ciência na Idade de Ouro - Al-Khwarizmi: O pai da Álgebra (https://www.youtube.com/watch?v=sAxWF_W6Q9w).

Sexta feira: faça você mesmo

Chegou o último dia da Semana da Álgebra. E o que parecia ser a semana do terror acabou sendo a melhor semana para Fatima na escola. Empolgada pelas descobertas a respeito da Álgebra e sua história, Fatima chegou pronta para o último dia. Nesse dia seu professor propôs que cada aluno criasse uma sequência de figuras utilizando o material disponível e em seguida propor o desafio para um colega descobrir as próximas figuras da sequência e uma expressão algébrica que descreva o seu funcionamento.

Fátima era boa em criar coisas! Crie você também uma sequência bem interessante para partilhar com seus colegas da classe.

Figura 52-atividade da sexta feira– 2019. Fonte: Autor

Em seguida, é proposto que os alunos voltem a trabalhar com as sequências. Porém desta vez os grupos irão cada um criar uma sequência para os outros colegas tentarem encontrar a regra de funcionamento dela.

Também propomos um questionário para os alunos a respeito da atividade realizada por eles.

Questionário

1. Fizemos as atividades da Semana da Álgebra, você achou difícil? O que você achou?
2. Você usou alguns materiais nessas atividades como post its, tachinhas, papel...Você acha que o uso desses materiais ajudaram a resolver os problemas e entender melhor a matemática?
3. Nós vimos um vídeo sobre a história da álgebra, você gostou?
4. Você acha importante estudar a história da matemática? Por quê?
5. Após essa atividade, o que você acha do uso de letras e números na Álgebra?

Figura 53-questionário– 2019. Fonte: Autor

3.2. Relato da atividade aplicada

Aplicamos o projeto no Colégio Medina, escola particular situada em São Bernardo do Campo – SP. Atuamos como professor de Matemática na área de álgebra desde o início de 2017. A turma que atualmente é o 7º ano do ensino fundamental, acompanhamos desde o sexto ano. Além disso em outras turmas observamos que existe uma certa dificuldade com o aprendizado de equações e isso também nos motivou a desenvolver uma atividade nesse tema. Espera-se que ao final do projeto os alunos tenham uma visão diferente do irmão de Fatima e a ampla a respeito do tema. Basicamente a escola serve a comunidade de origem árabe muçulmana da região de São Bernardo do Campo e por isso possui poucos alunos por sala de aula. Na sala do 7º ano são 8 e a atividade será aplicada em dois grupos de 4 alunos cada. A atividade aplicada ocorreu durante

o mês de novembro de 2019 e a escola permitiu utilizar quantas aulas fossem necessárias e portanto foi possível deixar os alunos à vontade e sem apressá-los quanto ao tempo de realização. Após a resolução por parte dos alunos de cada desafio, chamamos a atenção dos dois grupos para discutir, analisar e comparar as resoluções. Ao todo foram 7 aulas de 45 minutos cada necessárias para realizar a atividade por completo.

Os registros que fizemos dessas aulas são:

- Câmera fotográfica: Durante toda a sequência andamos pela sala entre os dois grupo registrando momentos que consideramos importantes da ação dos alunos na resolução de cada problema proposto.
- Gravador de áudio: Com um gravador, o áudio ficou ligado durante todos os momentos. Alguns sons não ficaram tão perfeitamente audíveis mas foi possível registrar momentos importantes da sequência nos dois grupos.
- Registro das atividades realizadas na folha com a sequência e em folhas de papel sulfite a parte para registro a ser feito pelos alunos.
- Questionário após a aplicação da atividade.

Neste ano de 2019 eu já estava em meu 3º ano como professor de álgebra no Colégio Medina e no meu primeiro ano como professor de Matemática na Escola Islâmica Brasileira após ter me formado no IME/USP no final do ano de 2016.

Nesse tempo como professor de Matemática, foi possível aprender muito do que não se aprende na faculdade, existem situações diversas que ocorrem num ambiente da sala de aula e que é quase impossível de se prever. E esse anos me proporcionaram bastante aprendizado para chegar até aqui.

Além disso os anos de graduação também proporcionaram participar de atividades práticas: estágios das disciplina da Faculdade de Educação, participação no PIBID com aplicação de atividade de ângulos no transferidor, realização da disciplina de projetos de estágio do IME/USP a aplicação de atividade para o ensino do sistema métrico decimal e realização da disciplina de Projetos de Ensino com a aplicação de atividade sobre as provas sem palavras

e o pensamento visual. Todas essas atividades aplicadas proporcionaram conhecimento do que acontece na prática em sala de aula.

Para essa atividade os alunos já haviam tido aulas que lhes proporcionavam a manipulação de expressões e equações algébricas, entretanto era um conhecimento que gerava muita angústia e dúvidas para a maioria dos alunos deste 7º ano e portanto esperamos que a atividade lhes dê maior conhecimento e segurança quando em contato com esse assunto. Essa atividade não estava valendo nota e todos os 8 alunos se mostraram interessados, mas alguns participaram mais do que outros e procuraremos mostrar relatos desses que nos deram uma resposta (positiva ou negativa) maior. Vamos chamar os alunos de aluno A, B, C, etc ou grupo 1 e grupo 2.

3.2.1. Análise dos dados

Os lembretes de Fatima

Os alunos foram levados para a sala de artes da escola, onde as mesas estão melhor dispostas para realizar trabalho em grupo e para apoiar os materiais disponibilizados.

Os alunos iniciaram a atividade fazendo a leitura do início da narrativa envolvendo Fatima. O grupo 1 utilizou primeiro o mural e montou os lembretes com as tachinhas, quando o aluno E do grupo 2 disse:

Aluno E: A gente precisa esperar eles usarem o mural para a gente montar.

Professor: Não precisa esperar não, vai fazendo.

Os alunos do grupo 2 começaram então a representar a situação dos lembretes na folha de papel.

Figura 54-Mural montado pelo grupo 1– 2019. Fonte: Autor

Figura 55-Representação do grupo 2 feita na folha de papel– 2019. Fonte: Autor

E então os alunos foram respondendo as perguntas conforme contavam aquilo que haviam construído. Observamos que os alunos do grupo 2 perceberam que as tachinhas foram aumentando de 3 em 3.

Aluno E: A gente percebeu que vai sempre somando 3.

Professor: Você consegue usar a quantidade de lembretes para saber o número de tachinhas?

Aluno E: Não sei não...

Professor: pensa um pouco daqui a pouco eu volto para ver o que vocês fizeram.

O grupo 1 apresentou algo mais próximo do que esperávamos, completando a tabela corretamente. Após nosso diálogo:

Aluno A: Tá professor olha, a gente montou e viu que pra 3 tem 10 tachinhas, pra 4 tem 13, pra 5 tem 16 e pra 10 tem 31, mas a gente contou, não sei como saber pra 35. Mas ir somando 3, não sei não vai dar certo.

Professor: Então tá, calma. Olha para os números: o 3 virou 10, o quatro virou 13, o 5 virou 16, o 6 virou 19 e o 10 virou 31. Tenta ver as operações que transformaram um número em outro.

Aluna A: Ta bom do 3 pro 10 somou 7.

Professor: e do 4 pro 13?

Aluna A: Aí somou 9. Mas não, ai mudou. Tem que mudar do mesmo jeito.

Professor: Tá bom, pensa mais um pouco.

Aluna A: Se multiplicar por 3 vai dar 9 mas tem que somar 1.

Professor: Tá vê se dá certo com 4.

Aluna A: 4 vezes 3 dá 12 se somar 1 dá 13.

Professor: Agora vê se dá certo nas outras.

Aluna A: Tá mas e pra n?

Professor: Faz a mesma coisa.

Aluna 4: Não sei. N vezes 3? Mais 1?

Professor: Isso mesmo, agora escreve isso em símbolos matemáticos.

$3 \times 3 + 1$	10
$4 \times 3 + 1$	13
$5 \times 3 + 1$	16
$6 \times 3 + 1$	19
$10 \times 3 + 1$	31
$35 \times 3 + 1$	106
83 $\times 3 + 1$	250
$n \times 3 + 1$	$n \times 3 + 1$

Figura 56-Tabela do grupo 1 para o problema das tachinhas. – 2019. Fonte: Autor

Para descobrir qual a quantidade de lembretes para 250 tachinhas, esse mesmo grupo foi multiplicando vários números até chegar em um mais perto do 250.

$n \times 3 + 1$	$n \times 3 + 1$
6) Contagem de Tachinhas	
40 120	11 34
41 123	12 37
42 126	13 40
43 129	14 43
44 132	15 46
45 135	16 49
46 138	17 52
47 141	18 55
48 144	19 58
49 147	20 61
50 150	21 64
51 153	22 67
52 156	23 70
53 159	24 73
54 162	
	25 76
	26 79
	27 82
	28 85
	29 88
	30 91
	31 94
	32 97
	33 100
	34 103
	35 106
	36 109
	37 112
	38 115
	39 118

Figura 57 - Contagem das tachinhas - 2019. Fonte: Autor

Os alunos multiplicaram diversos números por 3 até observar algum em que faltava uma unidade para chegar em 250, encontrando o número 83.

Nenhum dos dois grupos pensou em montar a equação e resolver. O pensamento utilizado foi ocultamente o mesmo, subtrair um e dividir por três, mas por um caminho de tentativa e erro até se chegar ao número procurado.

Aqui os alunos inicialmente buscaram a representação visual, fazendo desenhos ou construindo com os materiais, percebemos que nem tiveram dúvida quanto ao que fazer primeiro. Em seguida, com as perguntas feitas foram buscar uma representação algébrica para o que tinham construído.

O dia da pizzeria

Um aluno de cada grupo leu o que acontecia no dia da pizzeria em voz alta para os outros ouvirem. Havia outra folha disponível para acompanharem a leitura.

Nesse problema foi disponibilizado algumas fichas para servirem de representação das pizzas e pratos e havia disponível para os dois grupos, com isso acabaram não recorrendo ao desenho assim como o grupo 2 fez no primeiro problema e também novamente era um problema em que era possível observar e contar as quantidades.

Figura 58-Grupo 1: fichas com 10 pizzas - 2019. Fonte: Autor

Figura 59-Grupo 2: problema das pizzas - 2019. Fonte: Autor

Ao se deparar com uma quantidade relativamente grande de pizzas o grupo 2 não pensou duas vezes em representar a situação por meio das fichas, ainda não haviam percebido algum padrão que pudesse facilitar a contagem de pratos. Estavam então na fase de trabalhar e organizar casos particulares.

Após as contagens, os grupos preencheram a tabela e se depararam com “p” pizzas e mostrando irritação por não entender o que isso significava.

Aluna E: E como eu vou saber com “p” pizzas? Sei lá.

Professor: É só fazer a mesma coisa que você fez nos outros números, p também é um número. Como você fez nos outros?

Aluna E: Eu contei.

Professor: Agora olha para as fichas e veja se você observa alguma relação entre a quantidade de pratos e de pizzas.

Apesar de ter deixado claro aos alunos desde o início da atividade de que teriam o tempo que fosse necessário para terminar, estavam um pouco com pressa de se chegar até a resposta. Perceberam que descobrindo a fórmula estava resolvido e quando não sabiam ficavam impacientes. Além disso nesse, querendo ir direto para a fórmula estavam pulando a pergunta “Fatima logo

imaginou uma forma de descobrir a quantidade de pratos para uma quantidade qualquer de pizzas. Você consegue também?”

Encaramam essa questão como “ Qual é a expressão que descreve esse problema?”. A todo tempo enfatizamos que gostaríamos que explicassem o raciocínio e não apenas apresentassem uma fórmula e que a fórmula é resultado do raciocínio desenvolvido. A aluna A percebeu que as duas linhas de pratos estavam alinhadas com a de pizzas e portanto teria o dobro da quantidade e mais os dois das pontas e logo utilizou a mesma letra “n” do problema anterior:

Se numa mesa há 58 pratos, quantas pizzas pode haver nessa mesa, para manter a mesma configuração? 28

Nº de pizzas	Nº de pratos
5	12
6	14
7	16
10	22
25	52
28	58
p	$p \times 2 + 2$

58 | 2 56 | 2
 4 4
 16 28

Figura 60 - Tabelas pratos e pizzas - 2019. Fonte: Autor

Aqui o objetivo era de que em cada problema o aluno percebesse a regra de funcionamento e aplicasse para todos os elementos da sequência. Entretanto percebemos que estavam percebendo a regra de um problema e tentando aplicar em outro e isso acontece com bastante frequência em sala de aula, o aluno busca padronizar a matemática como por exemplo achar que regra de três e fórmula de Bháskara resolvem todas as situações. Os alunos estavam com a pressa habitual de se chegar ao resultado e por isso tentavam acelerar o

processo. É algo que cada vez buscamos enfatizar nos próximos problemas: não queremos que cheguem rápido em qualquer resultado, mas sim que desenvolvam um raciocínio levando o tempo que for necessário para chegar ao resultado correto.

Segunda-Feira: Começa a Semana da Álgebra

O problema 4 é o das dobraduras das folhas de papel. Assim como esperado, as dobraduras foram feitas e conforme aumentava, percebeu-se que em um momento era quase impossível de dobrar o papel e assim buscaram alternativas para descobrir o número de divisões na folha. Diferentemente da situação anterior e conforme solicitei a eles, conseguiram descrever um pouco melhor o raciocínio ao invés de logo buscarem uma expressão que descreva o funcionamento da sequência.

Figura 61 - respostas grupo 1 - 2019. Fonte: Autor

Figura 62 - resposta grupo 2 - 2019. Fonte: Autor

Percebemos também que constatar que aparecem potências de 2 não foi algo natural para os alunos, buscam alternativas que utilizarem as quatro operações fundamentais e aqui perceberam que conforme dobrava a folha, dobrava também o número de divisões nela.

Ao final do problema resolvido pitaram a folha como Fatima havia feito e em seguida discutimos a respeito de uma fórmula (pois eles não haviam encontrado):

Professor: olhem com calma para estes números. O 4 é 2×2 , o 8 é $2 \times 2 \times 2$, o 16 é $2 \times 2 \times 2 \times 2$. Como a gente pode escrever essas multiplicações?

Aluna F: Ah já sei, é potência!

Professor: Potências de qual número?

Aluna F: É sempre potência de 2.

Foi possível observar nos problemas até aqui, que as situações que envolveram construções com os materiais utilizados os alunos se mostraram mais participativos. Até mesmo aqueles que nas aulas ao longo do ano pouco falam e participam, agiram mais e tiveram atitude maior do que o habitual.

Terça-feira: um desafio com pontinhos

Percebemos que ao longo dos problemas foram evoluindo e percebendo cada situação. De início estavam tentando descobrir logo uma fórmula e a partir do problema anterior perceberam que era importante perceber qual o padrão estabelecido e que era necessário desenvolver algum tipo de raciocínio para isso. Como no problema anterior já viram que o uso das potências também é uma alternativa para descrever a sequência, tinham uma ferramenta a mais para utilizar nos próximos problemas.

Posição 1 Posição 2 Posição 3

Utilizando o material disponibilizado pelo seu professor, responda:

01. Quantos pontinhos terá a figura 4 dessa sequência? 24

02. Quantos pontinhos terá a figura 5 dessa sequência? 35

03. Quantos pontinhos terá a figura 10 dessa sequência?

O grupo 2 interpretou que de uma figura para a próxima havia um aumento na quantidade de pontinhos e com isso utilizou a terceira figura como base para completar e desenhar a quarta figura. Em seguida representaram numa outra folha as próximas figuras da sequência.

Em seguida perguntamos como as figuras podem ajudar a saber as quantidades de pontinhos.

Professor: Tá bom, e agora?

Aluna G: Agora não sei, só sei que todas são assim.

Professor: Mas você precisa descobrir o número de pontinhos nas próximas figuras.

Aluna G: Só se a gente fingir que o quadrado tá completo e aí tirando um pontinho fica daquele formato ali. A primeira tem 4 pontinhos menos 1, a segunda

tem 9 pontinhos menos 1, a terceira tem 16 pontinhos menos 1, então a quarta vai ter 15 pontinhos menos 1.

Professor: Isso mesmo, está certo, e de onde você trouxe esses número 4, 9, 16...?

Aluna G: é só fazer o número vezes ele mesmo e depois tirar 1.

Professor: Qual número vezes ele mesmo.

Aluna G: Assim, por exemplo. Na primeira figura ficou dois vezes dois menos 1, depois três vezes três menos um, depois quatro vezes quatro menos 1, e vai indo. É sempre o número da figura mais 1 multiplica com ele mesmo e depois faz menos 1.

Percebemos em sala de aula que os alunos sentem uma certa insegurança em falar o que estão pensando na resolução de um problema de matemática, pelo medo de estar errado, por achar que é muito difícil ou por diversos motivos. Procuramos questionar o máximo possível para o aluno não desistir de seu raciocínio até sentir-se seguro em prosseguir e não ficar receoso em mostrar a sua resposta. E aqui, novamente a aluna poderia ter falado “o número ao quadrado” ou “o número elevado a dois” ou também como costumam falar muito “o número com o doizinho em cima”. Ao invés disso respondeu “o número vezes ele mesmo”, o que também está correto.

Utilizando o material disponibilizado pelo seu professor, responda:

01. Quantos pontinhos terá a figura 4 dessa sequência? 24

02. Quantos pontinhos terá a figura 5 dessa sequência? 35

03. Quantos pontinhos terá a figura 10 dessa sequência?

04. Explique como você pode fazer para descobrir a quantidade de pontinhos de uma figura qualquer dessa sequência. Número vezes número menos 1 (do número anterior)

05. Quantos pontinhos terá a figura p dessa sequência?

06. A figura de qual posição dessa sequência possui 63 pontinhos?

Posição da figura	Quantidade de pontinhos
1	3
2	

10	120
7	63
p	$p+1 \cdot p+1$

na chegou em casa toda empolgada dessa vez.

Ao registrar uma expressão que representa o raciocínio não foi colocado o “menos 1” mas foi escrito corretamente que o sucessor é $p + 1$. Já havíamos trabalhado em sala algumas expressões como o sucessor de um número, o antecessor de um número, o complemento de um ângulo, o suplemento entre outras expressões que normalmente falamos mas que podem ser escritas como uma expressão algébrica.

O grupo 1 apresentou uma solução que ainda não conhecíamos, diferentes das soluções esperadas. Primeiro observaram que em cada figura aparecia o formato de um “L” em uma das pontas, depois analisaram que isso não ajudaria muito. Em seguida, analisando as quantidades de pontos nas 5 primeiras figuras chegaram à expressão $p(p + 1) + p$. Analisando a figura, percebemos que $p(p + 1)$ é a área do retângulo mais à esquerda da figura e deve-se somar p , pois aparece uma quantidade p de pontinhos ao lado onde p é a posição da figura. Analisando as anotações desse grupo percebemos que não olharam assim mas apenas analisando a sequência de número como “um número vezes o próximo número mais o número”.

Posição 1

Posição 2

Posição 3

Utilizando o material disponibilizado pelo seu professor, responda:

01. Quantos pontinhos terá a figura 4 dessa sequência? 24
02. Quantos pontinhos terá a figura 5 dessa sequência? 35
03. Quantos pontinhos terá a figura 10 dessa sequência? 120

Utilizando o material disponibilizado pelo seu professor, responda:

01. Quantos pontinhos terá a figura 4 dessa sequência? 24
02. Quantos pontinhos terá a figura 5 dessa sequência? 35
03. Quantos pontinhos terá a figura 10 dessa sequência? 120
04. Explique como você pode fazer para descobrir a quantidade de pontinhos de uma figura qualquer dessa sequência.
05. Quantos pontinhos terá a figura p dessa sequência? $p \cdot (p + 1) + p$
06. A figura de qual posição dessa sequência possui 63 pontinhos? 39

Posição da figura	Quantidade de pontinhos
1	2

Quarta feira: jogo das fichas

A ideia inicial do jogo das fichas era utilizar as mesmas fichas brancas e verdes que utilizamos no problema das pizzas, entretanto não estávamos com as fichas nesse dia. Os alunos se propuseram a eles mesmos construírem fichas redondas e pintá-las para utilizar no jogo. Como estávamos na sala de artes tínhamos disponíveis diversos materiais, entre eles tampinhas de garrafa de leite com tamanho médio e foram utilizadas para fazer os círculos em seguida essa mesma tampinha foi utilizada para controlar o espaço vazio entre as peças do jogo. Vamos mostrar abaixo uma sequência de fotos com os alunos construindo as fichas.

No início diversas vezes as fichas ficaram travadas e procuramos dar o máximo de liberdade para os alunos por si próprios perceberem o que deveria ser feito. Apenas avisamos para prestarem atenção nas jogadas que dão certo e nas que dão errado e que isso independe do número de peças na mesa. Também pedimos para que se concentrassem em primeiro resolver o jogo para depois novamente resolvendo contar o número de passos necessários.

Aluna B: Não, você não pode fazer isso, tá vendo que as duas peças da mesma cor estão juntas? Assim não vai dar pra mexer elas.

...a seguinte: Monte duas duplas e joguem juntos para trocar as cores de lugar. Em seguida descubra quantos passos foram necessários para chegar até o final. Atenção: não é um jogo de um time contra o outro, os dois grupos jogam juntos, um de cada lado movimentando cada grupo uma cor diferente até conseguir trocar as cores de posição.

Número de peças	Número de movimentos para chegar ao final
2 x 4	8
3 x 5	15
4 x 6	24
5 x 7	35
6 x 8	48
10 x 9	90
n x 10	

Ao final do jogo, apresente uma estratégia para resolver o problema proposto.

Diga: se forem n peças de cada lado, quantos movimentos serão necessários?

Após algumas tentativas com sucesso, um dos grupos começou a preencher a tabela que havia disponível com o número de movimentos necessários para trocar as peças de lugar. Perceberam que o número de movimentos era o número de peças multiplicado pelo sucessor do sucessor, entretanto ao chegar em 10 ou “n”, seguindo a sequência de número a serem multiplicados, escreveram que deveria ser multiplicado por 9 e por 10. E questionamos:

Professor: Por quê para n peças devemos multiplicar por 10?

Aluno C: Assim oh, o primeiro multiplicou por 4, depois por 5, depois 6, 7, 8, 9 então o próximo multiplica por 10.

Professor: Mas olha aqui, com 6 peças você multiplica por 8, certo. Depois do 6 vem qual número?

Aluno C: Vem o 7.

Professor: Então o 7 multiplica por quanto?

Aluno C: Fica sete vezes nove.

Professor: Pois é, você colocou que o 10 multiplica por 9. Está certo isso?

Aluno C: Não, tá errado. Por quê sempre multiplica por dois número a mais então o 10 vai ser vezes 12.

Professor: Isso! E para n peças?

Aluno C: Fica multiplicando com n mais dois?

Professor: Isso mesmo.

3	$\times 5$	15
4	$\times 6$	24
5	$\times 7$	35
6	$\times 8$	48
10	$\times 12$	120
n		$n \cdot (n+2)$

Ao final do jogo, apresente uma estratégia para resolver o problema proposto.

O mesmo raciocínio foi desenvolvido pelo grupo 2.

10	$10 \cdot 12 = 120$
n	$n \cdot (n+2) =$

Ao final do jogo, apresente uma estratégia para resolver o problema proposto.

Diga: se forem n peças de cada lado, quantos movimentos serão necessários?

Nós fizemos o número vezes ~~dele~~ mais dois números depois.

Ao final, quando os dois grupos haviam conseguido trocar as peças de lugar com seis de cada cor, propusemos que fizéssemos com os 8 alunos o mesmo jogo mas que desta vez eles é quem seriam as peças.

Quinta feira: a sugestão de Fatima

Em seguida, estávamos prontos para assistir ao vídeo proposto para aprender um pouco sobre história da matemática. Havia folhas com espaço disponível mas os alunos optaram por responder logo após as perguntas onde havia pouco espaço, então vamos transcrever abaixo as respostas dos alunos para cada questão.

Grupo 1

01. Qual a origem do nome álgebra?

Do livro de Al-Khwarizmi sobre equação.

02. Quem foi Al-Khwarizmi?

Foi um matemático considerado o pai da álgebra

03. O que era a Casa da Sabedoria?

Era um lugar que todo mundo iria, os mais espertos para aprender tipos de matérias traduzidas.

04. Cite algumas das principais atividades realizadas pelos matemáticos e outros cientistas na Casa da Sabedoria.

Traduções de livros

05. Explique por que os algarismos do sistema decimal de numeração que usamos hoje são chamados de algarismos Indo-arábicos.

Os árabes e os hindus criaram os números

06. Dê exemplos de atividades práticas e trabalhos do dia a dia em que a matemática está presente atualmente para nós e que esteve presente para os povos do Oriente.

Comerciantes, geometria islâmica (desenhos nas mesquitas), criptografia.

Grupo 2

01. Qual a origem do nome álgebra?

Vem do livro que Al-khwarizmi escreveu sobre álgebra

02. Quem foi Al-Khwarizmi?

Foi um matemático considerado pai da matemática

03. O que era a Casa da Sabedoria?

Era tipo uma faculdade que pessoas do mundo inteiro aprendiam álgebra, ciências.

04. Cite algumas das principais atividades realizadas pelos matemáticos e outros cientistas na Casa da Sabedoria.

A tradução de livros e principalmente obras gregas

05. Explique por que os algarismos do sistema decimal de numeração que usamos hoje são chamados de algarismos Indo-arábicos.

Hindu vem dos indianos e por que os árabes estudaram sobre eles e passou para o mundo inteiro.

06. Dê exemplos de atividades práticas e trabalhos do dia a dia em que a matemática está presente atualmente para nós e que esteve presente para os povos do Oriente.

Comércio, geometria nas mesquitas e criptografia.

Sexta feira: faça você mesmo

No último problema proposto aos alunos, eles elaboraram uma sequência de figuras. Cada grupo fez uma diferente e passou para o outro grupo tentar descobrir a regra de funcionamento da sequência. Para isso deixamos à vontade todo o material disponível para utilizarem da forma como julgassem necessário.

O grupo 1 elaborou a seguinte sequência na folha de papel. Em azul estão as respostas colocadas pelo grupo 2.

Eles mantiveram a estrutura da atividade, fazendo perguntas a cerca de alguns termos da sequência. As figuras mostram que em cada posição há uma figura com o número da figura multiplicado por 3.

O grupo 2 utilizou as fichas para elaborar uma sequência parecida com aquela dos pontinhos. Se naquele problema viram que poderia olhar para a figura completa, aqui fizeram uma sequência da figura inteira sem a retirada de uma ficha.

E o grupo 2 ao resolver utilizou as fichas verdes para completar a quarta figura da sequência a partir da terceira figura com fichas brancas.

Em seguida, os alunos do grupo 2 representaram essa sequência numa folha de papel:

Nesse momento percebemos que os alunos, em comparação com o início das atividades, estão mais seguros e familiarizados em utilizar letras e equações

para representar a regra de funcionamento da sequência. O grupo 1 percebeu que essa sequência era a próxima posição da figura multiplicada por ela mesma e não hesitaram em escrever na forma de $(n + 1)(n + 1)$.

Conclusões

A questão abordada por esse trabalho de pesquisa era como seria possível tornar o conteúdo de Álgebra no 7º ano mais compreensível e agradável aos alunos por meio da proposição de atividades de vivência na introdução à álgebra. Além disso, queríamos ver se essa abordagem poderia evitar ou mitigar os medos e estigmas que marcam essa fase escolar.

Assim, tínhamos como objetivo propor e estudar atividades de introdução à álgebra no 7º ano do Ensino Fundamental. A hipótese era de que elas possibilitariam aos estudantes uma melhor vivência na introdução à álgebra.

A pesquisa foi realizada no Colégio Medina, escola particular que serve a comunidade de origem árabe muçulmana da região em torno da cidade de São Bernardo do Campo. Tivemos boas condições para aplicar as atividades em nossa turma do 7º ano, e investigar como ocorreram, pois a escola tem turmas pequenas e foi possível deixar os alunos muito à vontade.

Dentro dos limites dessa aplicação, pudemos concluir que o trabalho da forma como foi proposto pode sim proporcionar elementos para criar essa “adesão natural” dos estudantes com a Álgebra conforme era nossa intenção. Pudemos criar e aplicamos a sequência didática constituída de problemas e situações que imaginávamos serem próximas ao cotidiano deles, além de serem potencialmente interessantes. Essas atividades giravam em torno da ideia de identificar regularidades e padrões em sequências numéricas, de modo a trabalhar o pensamento algébrico. Os alunos puderam então transitar entre formas de representação matemática numérica, geométrica e algébrica.

Em relação ao que os alunos já sabiam sobre o conteúdo abordado, por exemplo, pude verificar que já sabiam resolver equações. Essa necessidade de saber resolver se deu ao fato de esse tema ser importante também em outras disciplinas como ciências e geometria, então não poderia ser dado esse conteúdo em aulas anteriores à atividade e esperar para tratar da resolução das equações após a atividade poderia prejudicar o andamento dos alunos em outras disciplinas.

O trabalho permitiu refletir sobre a relação com a escola e com os alunos. Lecionamos nessa escola há 3 anos e com essa turma do 7º ano trabalhamos desde o 6º ano. Sentimos que a relação com os alunos é de parceria, existem os momentos de brincadeiras mas também sabem a hora de levar a sério. E um momento deste ano alguns estudantes dessa sala estavam focados em canetas coloridas e a todo momento foi solicitado que não deixassem de prestar atenção para caprichar no caderno, então em muitas aulas o foco maior foi em prestar atenção e dialogar conosco para em seguida ter um tempo para realizar as anotações.

A relação com a escola também é de uma parceria sem tamanho. Desde o início a direção e coordenação sempre estiveram abertas a novos projetos e ideias assim como também sempre estivemos dispostos a ouvir as orientações propostas.

Pudemos também considerar as motivações provocadas nos alunos. cremos que os alunos se sentiram motivados por dois aspectos: primeiro o fato de estar na prática de uma atividade fora do ambiente da sala de aula após quase que um ano todo de aula. A atividade foi realizada na sala de artes e em seguida na sala de vídeo exatamente para os alunos se sentirem mais libertos em relação a isso. Outro ponto importante que os motivou foi o fato da atividade não valer nota. Normalmente mostram uma excessiva preocupação com isso e uma tensão se forma no ambiente, percebemos que sentiram-se livres para usar a criatividade.

Já em termos de desenvolvimento conceitual, pudemos considerar que os alunos já haviam tido contato com o tema, resolução de equações e expressões algébricas não era algo estranho. Mas quando em contato com situações problema do dia a dia em que fosse necessário a interpretação e a tradução para a linguagem algébrica, parece que tudo o que haviam aprendido já não estava mais lá. Percebemos, conforme a atividade foi avançando que começaram a encarar os problemas e a presença e significado da letra em expressões com mais naturalidade. Portanto cremos que o significado da letra numa expressão algébrica, a letra como número de pizzas, número de tachinhas, número de pontinhos deu a eles uma maturidade maior em interpretar e manipular essa simbologia.

Procuramos atender nesse trabalho que alguns aspectos que foram objeto de consideração no exame de qualificação. Temos a impressão que nesse momento o trabalho possui muitas diferenças em relação à qualificação. A principal delas é ter um objetivo definido, no início muito se queria fazer e, na ânsia de querer fazer muito, pouco pudemos avançar. As considerações da banca da qualificação e do orientador nos proporcionaram temas para reflexão e para promover melhoras no trabalho. Outro ponto importante foi o desenvolvimento de uma sequência didática adequada ao tema e que pôde nos trazer os resultados da pesquisa que desejávamos.

Enfim, a realização desse trabalho de pesquisa mostrou como é importante ser professor pesquisador. Pesquisando minha própria prática, pude descobrir diversos fatos que permaneceriam ocultos aos olhos menos observadores.

Com relação ao que podemos fazer daqui para a frente, considero que ao longo de todo o curso do mestrado, além das disciplinas oferecidas pelo instituto, o aprendizado e a evolução como profissional do ensino de matemática se deu também indiretamente de diversas formas. Antes de entrar no programa, eu tinha uma visão superficial sobre o que é ser um pesquisador, um mestre. É muito mais do que um título, é uma responsabilidade. Cada aluno que defende o mestrado sai com a responsabilidade de ser não só em matemática mas um defensor da educação no Brasil. Sabemos todas as dificuldades que são enfrentadas por professores e profissionais da educação por todo o país e terminamos esse programa com a sensação de responsabilidade de promover uma educação de qualidade, aproveitando a oportunidade que tivemos de adquirir tanto conhecimento.

Assim como disse o Tio Ben do filme Homem Aranha: Com grandes poderes, vem grandes responsabilidades. Conseguimos observar que apesar de a matemática ser uma ciência exata, o ato de pesquisar, mesmo em matemática, não é. A defesa do mestrado não é como a graduação em que uma etapa se termina, mas aqui é uma etapa que se inicia. A conclusão desse trabalho nos deu mais consciência do que significa carregar essa responsabilidade. Achávamos que era só terminar o ensino médio que a faculdade estaria lá nos esperando, mas foram necessários mais anos de estudos para conseguir a tão

desejada vaga. Achávamos que era só terminar a graduação que o emprego dos sonhos estaria lá esperando por nós, mas foi e está sendo necessário muito esforço para crescer profissionalmente como professor. E da mesma forma achávamos que terminando o mestrado a solução de todos os problemas estariam nos esperando, mas o que nos espera é a consciência de que estando num programa de mestrado ou não, estando num programa de doutorado ou não, devemos sempre pesquisar, investigar e buscar melhorar cada vez mais no aspecto pessoal e profissional.

Referências

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Comum Curricular. **Base Nacional Comum Curricular**. p. 265-319, 2018. Disponível em : <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 9 de Janeiro de 2020.

BARBOSA, A. C. C. **A resolução de problemas que envolvem generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico**. 2009. 484 f. Tese (Doutorado) - Universidade do Minho. Braga. 2009.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-posições**, Março 1993. 18-23.

BROUSSEAU, G. Os Diferentes Papéis do Professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática - Reflexões Psicopedagógicas**. São Paulo: Artmed, 1996. p. 48-72.

CARAÇA, B. D. J. **Conceitos Fundamentais da Matemáticas**. Lisboa: [s.n.], 2005.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje?, Brasília, 1989. 15-19.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiro elementos de semiótica Sua presença e sua importância no processo ensino-aprendizagem da matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

Devlin, Keith. Matemática: a ciência dos padrões: à procura de uma ordem na mente, na vida e no universo. Porto: Porto editora, 2002.

DO CARMO, M. D. S.; DE MOURA, A. R. L. O lógico-histórica da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetike**, Cmapinas, v. 13, n. 24, p. 11-46, Julho/Dezembro 2005.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. **IREM-ULP**, Strasbourg, p. 37-64, 1993.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar. a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, Março 1993. 78-91.

IDOETA, P. A. BBC. **BBC**, 2019. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/brasil-50606793>>. Acesso em: 17 Dezembro 2019.

LAUAND, L. J. A álgebra como ciência árabe. **Revista de estudos orientais**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 9-25, Novembro 1996.

LAURO, M. M. **Percepção - Contrução - Representação - Concepção**. 2007. 397 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2007.

LIMA, W. A. T. D. **Contextualização: o sentido e o significado na aprendizagem de matemática**. 2018. 186 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Sao Paulo. 2018.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 1995.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo. **Pro-posições**, Campinas, v. 3, n. 7, p. 39-54, Março 1992. ISSN 1.

MORENO, A. C. Portal G1. **Portal G1**, 2019. Disponível em: <<https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/pisa-2018-dois-tercos-dos-brasileiros-de-15-anos-sabem-menos-que-o-basico-de-matematica.ghtml>>. Acesso em: 23 Março 2020.

NABATEA. **Nabatea**, 2002. Disponível em: <<http://nabataea.net/arabia.html>>. Acesso em: 2020 Março 2020.

NELSEN, R. B. **Proofs Without Words II: Exercises in Visual Thinking**. Washington: The Mathematical Association of America, v. 2, 2000.

OLIVEIRA, E.; MORENO, A. C. Portal G1. **G1**, 2019. Disponível em: <<https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/04/motivos-para-o-brasil-ir-mal-no-pisa-vao-alem-da-falta-de-conhecimento-sobre-as-disciplinas-diz-pesquisador.ghtml>>. Acesso em: 17 Dezembro 2019.

PALAZZO, C. L. A Idade de ouro do Islã: o mecenato do Califado Abássida e a Casa da Sabedoria. **Mirabilia: electronic journal of antiquity and middle ages**, 2017. 25-41.

QUINA, C. M. **Sequências e séries: uma proposta duvaliana para a educação básica**. 2015. 181 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2015.

REIS, A. Q. M.; NEHERING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Pesquisa Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, p. 339-364, 2017.

ROQUE, T. **História da Matemática Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SOUZA, E. R. D. **Álgebra: das variáveis às equações e funções**. São Paulo: [s.n.], 2008.

SOUZA, V. R. D. **Funções no Ensino Médio: História e modelagem**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 173. 2011.

SPINELLI, W. Contextos de ensino e a construção do conhecimento. In: MACHADO, N. J. **Linguagem, Epistemologia e Didática**. São Paulo: Escrituras, 2016. p. 271-290.

TREVIZAN, W. A. **Ensinando matemática por meio de situações potencialmente adidáticas: estudo de caso envolvendo análise combinatória**. 2015. 137 f. (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2014.

VILLIERS, M. D. **The Role and function of Proof in Mathematics**. Proof in the Mathematics Curriculum. Stellenbosch: University of Stellenbosch. 1990. p. 25-28.

Anexos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu _____,

RG _____, declaro saber da participação de meu/minha filho/a _____ na pesquisa *Al-jabr*: atividades para vivenciar a introdução à álgebra, desenvolvida junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelo pesquisador XXXXXXXX, sob orientação XXXXXXXX os quais podem ser contatados pelo XXXXXXXX ou telefone

XXXXXXXXX. O presente trabalho tem por objetivo propor um cenário para investigação que possa promover um ambiente de aprendizagem que contribua para uma formação mais crítica dos alunos, provoque reflexões sobre a importância da Escola e ainda trabalhe temas da Álgebra, e os instrumentos utilizados são: questionário aberto, gravação de áudio e imagens. Compreendo que tenho liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento, posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo, assegurando a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa, e que essa participação não inclui nenhum tipo de pagamento.

São Bernardo do Campo

Data: ____ / ____ / ____

Assinatura do responsável: _____

A semana da álgebra

A Semana da Álgebra

Fatima está no 7º ano em sua escola, é a filha caçula da família. Nos últimos dias anda muito estressada. Vai começar a "Semana da Álgebra" na sua escola! Será uma semana inteira com atividades para introduzir esse assunto difícil - Álgebra. Fatima nem está conseguindo dormir direito de tanta preocupação. Seu irmão Samir a andou aterrorizando sobre esse evento:

- Samir: Semana da Álgebra? Boa sorte, vão ser os piores dias da sua vida!

- Fatima: Mas por quê?

- Samir: Como assim por quê? Álgebra é um negócio impossível onde começam a se misturar números e letras. Se com números já é difícil a Matemática imagina quando colocam letras junto!. É simplesmente a matéria mais difícil de todas. Se eu fosse você, faltava a semana inteira.

- Fatima: Números e letras juntos? Isso não faz sentido algum! Eu não vou aguentar, quero morrer!!

Fatima estava quase entrando em desespero. Faltar nessa semana seria impossível, as atividades da semana valeriam nota. Sua mãe interveio e disse:

- Fátima, você parece preocupada! É com a Semana da Álgebra? Não fique assim, você vai ver como é até divertido estudar Álgebra! Por que você não faz um planejamento da semana, para ficar mais tranquila?

Fátima ficou um pouco aliviada, e seguiu o conselho de sua mãe. No sábado, ela resolveu então organizar as suas tarefas para a semana.

Sábado: Organizando o mural

Preocupada com a semana que viria pela frente, assustada com o que disse seu irmão, Fatima começou a organizar a sua semana. Ela gostava de prender lembretes em seu mural. Para prende-los, viu que precisava organizá-los de forma bem bonita seguindo um certo padrão que criou.

Mas não havia tachinhas mais! Ela ficou pensando em quantas tachinhas iria precisar:

- Fatima: Para fixar 1 lembrete são 4 tachinhas, para 2 lembretes são 7 tachinhas, para 3 lembretes são 10 tachinhas...

Veja se pode ajudar a Fátima respondendo as questões abaixo:

1. Quantas tachinhas ela precisa para prender 4 lembretes?
2. Quantas tachinhas ela precisa para prender 5 lembretes?
3. Quantas tachinhas ela precisa para prender 6 lembretes?
4. Quantas tachinhas ela precisa para prender 10 lembretes?
5. O mais interessante é que chegou uma hora em que Fatima não escreveu todas as opções de lembretes e tachinhas e elaborou uma estratégia para descobrir a quantidade de tachinhas para quantidades bem grandes de lembretes. Qual será essa estratégia? Por exemplo, como fazer para descobrir a quantidade de tachinhas para prender 35 lembretes seguindo o mesmo padrão?
6. Mesmo sem querer, Fatima começou a imaginar como faria para descobrir o número de tachinhas para uma quantidade qualquer de lembretes. Você consegue imaginar uma forma de descobrir esse número, dada uma quantidade qualquer de lembretes?
7. Quantas tachinhas ela precisa para prender n lembretes?
8. Se ela utilizasse 250 tachinhas, quantos lembretes ela teria pendurado?

Lembretes	Tachinhas
3	
4	
5	
6	
10	
35	
	250
n	

Domingo: O dia da pizzeria

Fátima conseguiu organizar seu mural, que ficou muito bonito. Vendo a filha ainda apreensiva, os pais de Fatima resolveram levar a família no domingo para uma pizzeria. Chegando lá, Fatima viu que havia mesas com diversas quantidades de pizzas e pratos ao seu redor. Empolgada com a história dos bilhetes e das tachinhas, ela começou a imaginar diferentes opções de disposições nas mesas.

Acima estão representadas duas mesas da pizzaria que Fatima viu logo na entrada, em que as pizzas são os círculos laranjas e os pratos são círculos brancos. Nas disposições das mesas em que observou, ela viu que para 3 pizzas havia 8 pratos, e para 4 pizzas, 10 pratos...

Ela andou pelo restaurante e observou o mesmo padrão em outras mesas. Para responder as questões abaixo, você pode desenhar ou utilizar o material fornecido pelo professor (fichas de duas cores diferentes).

1. Se numa mesa havia 5 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos havia nessa mesa?
2. Se numa mesa havia 6 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos havia nessa mesa?
3. Se numa mesa havia 10 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos tinham nessa mesa?
4. Se numa mesa havia 25 pizzas, mantendo o mesmo padrão, então quantos pratos havia nessa mesa?
5. Fátima logo imaginou uma forma de descobrir a quantidade de pratos para uma quantidade qualquer de pizzas. Você consegue também?
6. Se numa mesa forem colocadas p pizzas, quantos pratos deverão ter nessa mesa?
7. Se numa mesa há 57 pratos, quantas pizzas pode haver nessa mesa, para manter a mesma configuração?

Nº de pizzas	Nº de pessoas
5	
6	
7	
10	
25	
	57
p	

Segunda feira: Começa a Semana da Álgebra?

Fátima teve um ótimo final de semana! Mesmo assim, ela pensava que a semana da Álgebra seria terrível! Assim que chegou à escola, ela viu a programação da semana e achou que seria tudo muito difícil de fazer.

Mas, logo em sua primeira atividade, foi proposto um trabalho de dobrar papeis. Fatima sempre foi boa nisso! Na verdade, ela adorava Artes e mexer com papeis. O professor pediu para que todos os alunos usassem uma folha do caderno ou papel sulfite e seguissem as instruções abaixo:

- Dobrando uma vez, a folha fica dividida em 2 partes, dobrando duas vezes a folha fica dividida em 4 partes...

Com uma folha de papel e seguindo o exemplo acima, siga os passos de dobradura que foram propostos para Fatima, e responda:

1. Dobre a folha ao meio. Em seguida abra a folha. Em quantas partes ela ficou dividida?
2. E se dobrar a folha ao meio 2 vezes seguindo o modelo? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
3. E se dobrar a folha ao meio 3 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida? E
4. E se dobrar a folha ao meio 4 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
5. E se dobrar a folha ao meio 5 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
6. Ao término dessa atividade, o professor sugeriu que os alunos abrissem a folha de papel e pintassem os retângulos formados pelas dobras com cores diferentes. Depois disso, continuou o desafio em que os alunos agora deveriam imagina o resultado das dobras, mas sem fazê-las no papel porque ficaria muito difícil dobrar.
7. E se dobrar a folha ao meio 10 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
8. E se dobrar a folha ao meio 30 vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida? Justifique.

9. Explique como você pode fazer para descobrir em quantas partes a folha ficará dividida, para um número qualquer de dobras?
10. E se dobrar a folha ao meio d vezes? Em quantas partes iguais ficaria dividida?
11. Para a folha ficar dividida em 1024 partes, quantas dobragens teriam que ser feitas? Explique o seu raciocínio.

Nº de dobras	Nº de partes iguais que a folha ficou dividida
1	
2	
3	
4	
5	
10	
30	
D	
	1024

Ao final da atividade, o professor sugeriu que os alunos pintassem os retângulos formados pelas folhas que tinham dobrado com cores diferentes.

Ao chegar em casa depois das aulas de segunda-feira, Fátima foi logo procurar seu irmão Samir para mostrar sua arte e contar que o primeiro dia da semana da Álgebra tinha sido muito divertido!

Veja a pintura de Fátima:

Mesmo assim, ele ainda quis colocar medo nela:

- Ah, você gostou é? Pois aguarde os próximos dias....

Terça feira: Um desafio com pontinhos

Como tinha gostado muito das atividades do 1º dia, de dobradura de papel, Fatima tinha medo de que os dias seguintes apresentassem a álgebra terrível como seu irmão havia comentado. Ou seja, chegou a escola receosa de que o pior poderia ainda estar por vir. Ao encontrar sua melhor amiga, Laila, ela disse:

Fátima: Bom, ontem achei muito divertido a atividade de dobrar papeis e contar.... Até o uso de letras no final não me espantou nem um pouco. O que você achou?

Laila: Olha, até que álgebra, se continuar assim, não parece tão ruim. As letras na verdade foram muito úteis para expressar uma quantidade qualquer....

Fátima: Bem, vamos aguardar os próximos dias pra tirar alguma conclusão, não é?

Logo então começou a aula da terça feira. A atividade proposta pelo professor apresentava uma sequência de figuras como a representada abaixo, onde são mostradas as três primeiras figuras. O desafio era descobrir quais são as próximas figuras dessa sequência. Embalada por sua habilidade em relacionar números a padrões, Fatima começou a contar as quantidades:

- Figura 1 são 3 pontinhos, na figura 2 são 8 pontinhos, na figura 3 são 15 pontinhos...

Posição 1

Posição 2

Posição 3

Utilizando o material disponibilizado pelo seu professor, responda:

01. Quantos pontinhos terá a figura 4 dessa sequência?
02. Quantos pontinhos terá a figura 5 dessa sequência?
03. Quantos pontinhos terá a figura 10 dessa sequência?
04. Explique como você pode fazer para descobrir a quantidade de pontinhos de uma figura qualquer dessa sequência.
05. Quantos pontinhos terá a figura p dessa sequência?
06. A figura de qual posição dessa sequência possui 63 pontinhos?

Posição da figura	Quantidade de pontinhos
1	3
2	8
3	15
4	
5	
10	
	63
p	

Fátima chegou em casa toda empolgada dessa vez.

- Meu irmão, você é um chato... pois estou adorando a semana da álgebra!

Samir deu uma risadinha... Fátima logo entendeu que ele tinha apenas querido amedrontar a irmã. Será?

- Bom, minha irmãzinha... você verá que há muito mais coisas em álgebra... inclusive, você irá conhecer o Pai da Álgebra.

Fátima ficou encafifada com essa história de álgebra ter um pai. Isso a motivou ainda mais para ir a escola no dia seguinte.

Quarta feira: jogo das fichas

Quando chegou a quarta-feira, Fátima pensou: nossa, já estamos no meio da semana, e nada apavorante aconteceu. Será que é hoje que a terrível álgebra irá aparecer?

Mas na verdade a proposta era muito interessante: um jogo usando fichas. Esse jogo consiste no seguinte:

São 12 fichas dispostas em fila, 6 brancas e 6 verdes. O jogo se inicia com as fichas brancas em fila juntas e as verdes em fila juntas, cada fila uma de frente para outra e apenas uma casa vazia separando as duas cores, como no exemplo abaixo com 3 fichas de cada cor. E o jogo termina quando as verdes ocupam o espaço inicial das brancas e vice versa. E para isso, cada ficha pode andar apenas uma casa para frente ou pular uma peça para frente. Não é permitido andar para trás. Veja abaixo como funciona:

A proposta é a seguinte: Monte duas duplas e joguem juntos para trocar as cores de lugar. Em seguida descubra quantos passos foram necessários para chegar até o final. Atenção: não é um jogo de um time contra o outro, os dois grupos jogam juntos, um de cada lado movimentando cada grupo uma cor diferente até conseguir trocar as cores de posição.

Número de peças	Número de movimentos para chegar ao final
-----------------	---

2	
3	
4	
5	
6	
10	
n	

Ao final do jogo, apresente uma estratégia para resolver o problema proposto.

Diga: se forem n peças de cada lado, quantos movimentos serão necessários?

Quinta feira: A sugestão de Fatima

Nem é preciso dizer que Fátima havia adorado o jogo e tinha sido uma das primeiras do grupo a encontrar o padrão que permitia descobrir o número de jogadas a partir do número n de peças em cada lado. Devido ao seu sucesso das atividades anteriores, ela chegou a quinta feira com uma pergunta que tinha lhe ocorrido na véspera. Ela então perguntou ao professor:

Fátima: Professor Youssef, afinal, álgebra é isso que estamos fazendo? Usando letras para representar números quaisquer?

Youssef: Sim, Fátima, esse é um dos usos da álgebra. As letras que representam um número qualquer se chamam variáveis. Vamos aprender muito mais sobre álgebra, que tem vários usos interessantes. Alguém tem mais uma pergunta?

Dessa vez foi Laila quem levantou a mão:

Professor, que palavra é essa - "álgebra"?

Professor: Muito boa pergunta, Laila. Vamos justamente agora tratar disso - entender um pouco da história da álgebra e do surgimento dessa palavra. Vocês repararam na pessoa representada no cartaz da entrada da Semana da álgebra? Alguém sabe quem ele é?

Fátima: Professor, meu irmão me falou que a gente iria conhecer o Pai da álgebra... será ele?

Professor: Sim, Fátima... vamos conhecer esse personagem e um pouco da História da Álgebra.

Ele propôs então que os alunos assistissem ao vídeo *Ciência na Idade de Ouro - Al-Khwarizmi: O pai da Álgebra*.

Assim como Fatima, assista ao vídeo e responda às questões abaixo:

01. Qual a origem do nome "álgebra"?
02. Quem foi Al-Khwarizmi?
03. O que era a Casa da Sabedoria?
04. Cite algumas das principais atividades realizadas pelos matemáticos e outros cientistas na Casa da Sabedoria.
05. Explique por que os algarismos do sistema decimal de numeração que usamos hoje são chamados de algarismos Indo-arábicos.
06. Dê exemplos de atividades práticas e trabalhos do dia a dia em que a matemática está presente atualmente para nós e que esteve presente para os povos do Oriente.

Sexta feira: faça você mesmo

Chegou o último dia da Semana da Álgebra. E o que parecia ser a semana do terror acabou sendo a melhor semana para Fatima na escola. Empolgada pelas descobertas a respeito da álgebra e sua história, Fatima chegou pronta para o último dia. Nesse

dia seu professor propôs que cada aluno criasse uma sequência de figuras utilizando o material disponível e em seguida propor o desafio para um colega descobrir as próximas figuras da sequência e uma expressão algébrica que descreva o seu funcionamento.

Fátima era boa em criar coisas! Crie você também uma sequência bem interessante para partilhar com seus colegas da classe.