Erdős-Ko-Rado em Famílias Aleatórias

Marcelo Matheus Gauy

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Programa: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do
CNPq.

São Paulo, março 2014

Erdős-Ko-Rado em Famílias Aleatórias

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Marcelo Matheus Gauy e aprovada pela Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente à minha família pela paciência e apoio inestimáveis; a Yoshiharu Kohayakawa pela orientação e inspiração; a Igor Carboni Oliveira e Hiêp Hàn pela excelente colaboração no desenvolvimento deste trabalho. Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio dado ao projeto.

Resumo

Gauy, M. M. **Erdős-Ko-Rado em Famílias Aleatórias**. Dissertação — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Estudamos o problema de famílias intersectantes extremas em um subconjunto aleatório $\mathcal{V}_p^k$ de $\mathcal{V}^k = \binom{A^n}{k}$ (conjunto de todos os subconjuntos de A^n com k elementos), onde cada elemento de $\mathcal{V}^k$ é escolhido independentemente e uniformemente com probabilidade p . Tal problema foi investigado por Balogh, Bohman e Mubayi em 2009. Seja $i(\mathcal{V}_p^k)$ uma variável aleatória denotando o tamanho máximo de uma família intersectante em $\mathcal{V}_p^k$. O teorema original de Erdős-Ko-Rado afirma que $i(\mathcal{V}_p^k) = p \binom{n-1}{k-1}$, quando $p = 1$. Paralelamente a este trabalho, Hamm e Kahn, e Balogh, Das, Delcourt, Liu e Sharifzadeh também obtiveram resultados relativos a este problema.

Obtemos uma descrição quase completa da evolução de $i(\mathcal{V}_p^k)$, para praticamente todos os valores de $k = k(n)$ e $p = p(n)$. Seja $2 \leq k \leq n/2$ e faça $D = \binom{n-k}{k}$. Obtemos, dentre outros resultados, que o comportamento de $i(\mathcal{V}_p^k)$ muda radicalmente em dois pontos críticos $p_0 \approx D^{-1}$ e $p_1 \approx (n/k)D^{-1}$. Curiosamente, na região entre estas probabilidades o tamanho máximo de uma família intersectante em $\mathcal{V}_p^k$ praticamente não muda. Por outro lado, quando $p \geq (n/k)^{1+o(1)}D^{-1}$, Erdős-Ko-Rado vale assintoticamente, e com probabilidade tendendo a 1 quando $n \rightarrow \infty$, temos $i(\mathcal{V}_p^k) = (1 + o(1))p \binom{n-1}{k-1}$.

Abstract

Gauy, M. M. **Erdős-Ko-Rado in Random Families.** Dissertation — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

We studied extremal intersecting families in a random subset $\mathcal{V}_p^k$ of $\mathcal{V}^k = \binom{A}{k}$ (family of all subsets of A with k elements), where each element of $\mathcal{V}^k$ is chosen independently and uniformly with probability p . This problem was first investigated by Balogh, Bohman and Mubayi. Let $i(\mathcal{V}_p^k)$ be a random variable denoting the size of the maximum intersecting family in $\mathcal{V}_p^k$. The original Erdős-Ko-Rado theorem states that $i(\mathcal{V}_p^k) = p \binom{n-1}{k-1}$, when $p = 1$. Concurrently to this work, Hamm and Kahn, and Balogh, Das, Delcourt, Liu and Sharifzadeh obtained new results in the aforementioned problem.

We obtain a fairly complete description of the evolution of $i(\mathcal{V}_p^k)$, for essentially any $k = k(n)$ and $p = p(n)$. Let $2 \leq k \leq n/2$, and set $D = \binom{n-k}{k}$. Among our results, we show that the behavior of $i(\mathcal{V}_p^k)$ changes drastically at two critical points $p_0 \approx D^{-1}$ and $p_1 \approx (n/k)D^{-1}$. Interestingly, in the small region between these two exponentially small probabilities, the size of a maximum intersecting family in $\mathcal{V}_p^k$ remains essentially the same. On the other hand, when $p \geq (n/k)^{1+o(1)}D^{-1}$, Erdős-Ko-Rado holds asymptotically, and with probability tending to 1 as $n \rightarrow \infty$, we have $i(\mathcal{V}_p^k) = (1 + o(1))p \binom{n-1}{k-1}$.

Sumário

Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Notação assintótica, Símbolos e Desigualdades	5
2.2 Estabilidade para Erdős-Ko-Rado	7
2.3 Grafo de Kneser	9
2.4 Desigualdades de Concentração	10
3 Resultados Principais	15
3.1 Versão esparsa de Erdős-Ko-Rado	15
3.2 Técnicas Principais e alguns resultados adicionais	18
4 Demonstrações	25
4.1 Supersaturação e Estabilidade Robusta para o grafo de Kneser . . .	25
4.2 Transferência	28
4.3 Prova do Teorema 3.1	37
5 Resultado de Balogh, Bohman e Mubayi	41
5.1 Comparando os Teoremas 3.1 e 5.2	43
6 Discussão e Comentários finais	47
Referências Bibliográficas	49

Lista de Tabelas

5.1	Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $k \ll n^{1/4}$	44
5.2	Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $n^{1/4} \ll k \ll n^{1/3}$	45
5.3	Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $n^{1/3} \ll k \leq n^{1/2-\varepsilon}$	45
5.4	Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$	45

Lista de Figuras

3.1	Gráfico de $i(K_n^k(p))$ em função de p	18
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos foi possível notar uma tendência na área de combinatória extremal, no sentido de obter versões esparsas de resultados conhecidos (por exemplo, os teoremas de Turán [Tur41], Ramsey [Ram30], Szemerédi [Sze75] e de Erdős, Ko e Rado [EKR61]). Um exemplo interessante dessa direção é a prova de que o conjunto dos primos contém progressões aritméticas arbitrariamente longas (Green e Tao [GT08]), que é baseada em uma versão do teorema de Szemerédi [Sze75] para conjuntos esparsos e pseudoaleatórios de inteiros.

Mais recentemente, princípios gerais de transferência (de teoremas para sua versão esparsa) foram desenvolvidos por Schacht [Sch09], Conlon e Gowers [CG10]. Eles permitem a obtenção de uma versão esparsa de teoremas clássicos como os de Turán, Ramsey, Szemerédi e outros. Outras técnicas, ainda mais recentes, são devidas a Saxton e Thomason [ST12], Balogh, Morris e Samotij [BMS12].

Apesar do extremo sucesso dos princípios de transferência citados acima, eles são incapazes de obter uma versão esparsa do teorema de Erdős-Ko-Rado [EKR61]. Embora seja possível utilizá-los para o caso de Erdős-Ko-Rado, os resultados obtidos são insatisfatórios em muitas situações. Assim, o foco central deste texto será apresentar uma versão esparsa do teorema de Erdős-Ko-Rado.

Mas o que é uma versão esparsa de um teorema combinatório dado? No que segue, vamos apresentar o teorema de Erdős-Ko-Rado e usá-lo como exemplo para tornar mais claro o significado de versão esparsa. Na sequência, apresentamos uma versão esparsa do teorema de Erdős-Ko-Rado devida a Balogh, Bohman e Mubayi ([BBM09]). Tal resultado (que não é o principal de [BBM09]) será apresentado a título de ilustração, uma vez que o Capítulo 3 contém resultados bem mais amplos.

São dados n e k inteiros positivos e A^n um conjunto com n elementos. Um *k -subconjunto* de A^n é um conjunto $B \subseteq A^n$ que possui exatamente k elementos. Seja $\mathcal{V}^k$ o conjunto de todos os k -subconjuntos de A^n . Uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ é dita *intersectante*, se todo par de elementos B e C em $\mathcal{F}$ for tal que $B \cap C \neq \emptyset$. As famílias $\mathcal{F}_i = \{B \in \mathcal{V}^k : i \in B\}$, para $i \in A^n$, são os exemplos mais simples de famílias intersectantes. Note que elas são as maiores famílias em que os membros possuem todos um mesmo elemento comum. Perceba ainda que elas possuem exatamente $\binom{n-1}{k-1}$ membros. Neste texto, chamaremos as famílias $\mathcal{F}_i$ de *principais*.

Erdős, Ko e Rado se interessaram pela seguinte pergunta: qual a maior quantidade

de elementos que uma família intersectante $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ pode possuir? Essencialmente, eles provaram que as maiores famílias intersectantes são as principais (isto é, são as famílias $\mathcal{F}_i = \{B \in \mathcal{V}^k : i \in B\}$). O enunciado completo é apresentado a seguir:

Teorema 1.1 (Erdős, Ko e Rado [EKR61]). Dados n e k inteiros positivos, tais que $n \geq 2k$, e um conjunto A^n com n elementos. Toda família intersectante $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ possui, no máximo, $\binom{n-1}{k-1}$ elementos. Caso $n > 2k$, as únicas famílias intersectantes que possuem exatamente $\binom{n-1}{k-1}$ elementos são as principais. Isto é, as famílias intersectantes de tamanho máximo são da forma $\{B \in \mathcal{V}^k : i \in B\}$ para algum $i \in A^n$.

Na sequência, apresentamos uma *versão esparsa* do teorema acima. Informalmente, isto corresponde a provar um resultado semelhante ao Teorema 1.1 para um subconjunto aleatório de $\mathcal{V}^k$. Para tanto, será necessário estudar as maiores famílias intersectantes do subconjunto referido. Os próximos parágrafos tornam estas afirmações mais precisas.

Dados n e k inteiros positivos e um conjunto A^n com n elementos, e dado um número real p , tal que $0 \leq p \leq 1$, construímos o subconjunto aleatório $\mathcal{V}_p^k$ de $\mathcal{V}^k$ a partir do seguinte experimento: para cada k -subconjunto $B \in \mathcal{V}^k$, lançamos uma moeda que resulta em cara com probabilidade p ; chamamos de $\mathcal{V}_p^k$ o conjunto dos B para os quais a moeda correspondente (a B) resultou em cara. Em outras palavras, $\mathcal{V}_p^k$ é o subconjunto de $\mathcal{V}^k$, em que escolhemos, independentemente e com probabilidade p , cada elemento de $\mathcal{V}^k$. Apesar de nos referirmos a $\mathcal{V}_p^k$ como um conjunto, de fato, ele é o espaço de probabilidade gerado pelo experimento descrito acima.

Para obter um resultado semelhante ao Teorema 1.1 para o conjunto $\mathcal{V}_p^k$, precisamos analisar famílias intersectantes $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_p^k$. O Teorema 1.1 versa: sobre o tamanho máximo de tais famílias; quem são as famílias que atingem tal máximo. Uma versão esparsa pode tentar estudar qualquer uma destas duas afirmações para o conjunto $\mathcal{V}_p^k$. Como a segunda é mais complicada, iremos nos focar em estudar a primeira¹. Assim, estamos interessados em determinar o tamanho máximo de uma família intersectante $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_p^k$. Mais precisamente, objetivamos estudar o comportamento da variável aleatória que representa a quantidade de elementos da maior família intersectante $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_p^k$. Tal variável aleatória será denotada por $i(\mathcal{V}_p^k)$ (a razão para escolha desta notação ficará mais clara na Seção 2.3).

Naturalmente, $i(\mathcal{V}_p^k)$ estará distribuída em $\mathbb{N}$ segundo alguma distribuição de probabilidade. Determinar com precisão esta distribuição é provalmente bem difícil e talvez pouco instrutivo. Ainda assim, podemos considerar k e p como funções de n (isto é, $k = k(n)$ e $p = p(n)$), e estudar o comportamento assintótico de $i(\mathcal{V}_p^k)$, ou, em outras palavras, estudar $i(\mathcal{V}_p^k)$ para valores grandes de n . Desta maneira, podemos ser capazes de demonstrar que $i(\mathcal{V}_p^k)$ está concentrada em torno de algum valor com probabilidade convergindo a 1 quando n vai a infinito. Por exemplo, podemos ser capazes de encontrar um valor M , naturalmente dependendo de p , n e k , tal

¹De certa forma, a segunda é o foco do resultado principal de [BBM09]. Este resultado será apresentado no Capítulo 5.

que, para qualquer $\varepsilon > 0$, o valor de $i(\mathcal{V}_p^k)$ está entre $(1 - \varepsilon)M$ e $(1 + \varepsilon)M$ com probabilidade convergindo a 1 quando n vai a infinito.

Especificamente, podemos imaginar que as maiores famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$ possuam alguma relação com as maiores famílias intersectantes em $\mathcal{V}^k$ (isto é, com as principais $\mathcal{F}_i$), ao menos para algumas escolhas de p e k . Por consequência, é interessante determinar quantos elementos as $\mathcal{F}_i$ possuem em $\mathcal{V}_p^k$. Sabemos que, em $\mathcal{V}^k$, as famílias $\mathcal{F}_i$ possuem $\binom{n-1}{k-1}$ elementos. Assim, o número esperado de elementos de $\mathcal{F}_i$ em $\mathcal{V}_p^k$ é $p\binom{n-1}{k-1}$ (pela linearidade da esperança). Portanto, se $i(\mathcal{V}_p^k)$ estiver concentrada em torno de $p\binom{n-1}{k-1}$, faz algum sentido dizer que 'transferimos' o Teorema 1.1 para o caso esparsa (de $\mathcal{V}^k$ para $\mathcal{V}_p^k$), uma vez que o limitante para o tamanho das famílias intersectantes estará diretamente relacionado. É possível, porém, que este não seja o caso para todos os valores de p .

Balogh, Bohman e Mubayi em [BBM09] provaram que $i(\mathcal{V}_p^k)$ está concentrada em torno de $p\binom{n-1}{k-1}$ com 'grande probabilidade' para alguns valores de k e p .

Proposição 1.2 (Balogh, Bohman, and Mubayi [BBM09]). Seja $\delta = \delta(n) > 0$. Se $\log n \ll k \leq (1/2 - \delta)n$ e $p \gg (1/\delta)((\log n)/k)^{1/2}$, então, com probabilidade convergindo a 1 quando n vai a infinito, vale que:

$$i(\mathcal{V}_p^k) = (1 + o(1))p\binom{n-1}{k-1}.$$

Utilizando desigualdades usuais de concentração de variáveis aleatórias em torno do valor esperado (que serão apresentadas no Capítulo 2), podemos concluir que, com probabilidade convergindo a 1 quando n vai a infinito, todas as famílias principais possuem $(1 + o(1))p\binom{n-1}{k-1}$ elementos em $\mathcal{V}_p^k$ (esta afirmação será apresentada em detalhes na Seção 2.4). Assim, de certa forma, o resultado acima garante uma propriedade semelhante ao teorema original de Erdős-Ko-Rado, a saber, que as maiores famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$ têm tamanho semelhante ao das famílias principais (em $\mathcal{V}_p^k$). Infelizmente, o resultado acima é bastante restritivo quanto ao valor de $p = p(n)$ e $k = k(n)$. *Tais restrições serão praticamente eliminadas no resultado principal deste texto.*

Além do resultado acima, Balogh, Bohman e Mubayi estudaram, em [BBM09], uma versão diferente deste problema. Tal versão do problema tenta responder como são as maiores famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$, em síntese, se elas provêm das principais ou não, ou seja, se são da forma $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k$; maiores detalhes serão apresentados no Capítulo 5. Eles obtiveram resultados bastante precisos para valores de k assintoticamente menores que $n^{1/3}$, sendo ainda excelentes até valores assintoticamente menores que $n^{1/2-\varepsilon}$ para algum ε positivo. Uma comparação entre as diferentes implicações obtidas por eles e o resultado principal deste texto (apresentado no Capítulo 3) será feita no Capítulo 5.

Mais recentemente, Hamm e Kahn em [HK14], e Balogh, Das, Delcourt, Liu e Sharifzadeh em [BDD⁺14] obtiveram resultados que também complementam os encontrados em [BBM09]. Neste texto, discutiremos muito brevemente os resultados obtidos por tais autores, e, assim, referimos o leitor aos trabalhos originais.

Adaptando técnicas desenvolvidas por Kleitman e Winston em [KW82] e ideias bastante semelhantes às presentes em um trabalho de Kohayakawa, Kreuter e Steger [KKS98], obtivemos um teorema que descreve o comportamento de $i(\mathcal{V}_p^k)$ para praticamente todos os valores de k e p . Tal teorema é bastante superior à Proposição 1.2, mas ainda é inferior ao resultado principal de [BBM09] no caso de $k \ll n^{1/2-\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$. Um trabalho está sendo escrito como resultado desta pesquisa. Os coautores são Igor Carboni Oliveira e Hiêp Hàn.

Organização

No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos essenciais de combinatória e probabilidade que são importantes para o restante do texto. Estendemos o escopo da introdução para conter também versões de estabilidade de Erdős-Ko-Rado para o caso aleatório de $\mathcal{V}_p^k$. Além disso, apresentamos um grafo que codifica o conjunto $\mathcal{V}^k$ em seus vértices e cujas arestas representam a relação de pares de conjuntos disjuntos em $\mathcal{V}^k$. Por fim, apresentamos algumas desigualdades de probabilidade úteis no estudo de variáveis aleatórias.

No Capítulo 3, apresentamos o resultado principal deste texto, que descreve o comportamento de $i(\mathcal{V}_p^k)$ para praticamente todos os valores de p e k possíveis. Também apresentamos as técnicas que serão utilizadas na demonstração deste resultado, bem como alguns resultados adicionais. Dentre estes, está uma versão abstrata do teorema principal que é verdadeira para famílias de grafos com certas propriedades especiais.

No Capítulo 4, apresentamos as demonstrações dos resultados que aparecem no Capítulo 3. Dividimos este capítulo em três seções: na primeira mostramos que $\mathcal{V}^k$ satisfaz as propriedades especiais exigidas pela proposição abstrata citada no parágrafo anterior; na segunda, demonstramos esta proposição abstrata usando técnicas semelhantes às encontradas em [KW82] e [KKS98]; na terceira, combinamos as duas anteriores e concluímos o teorema principal como corolário.

No Capítulo 5, apresentamos o teorema principal do artigo [BBM09]. Fazemos uma comparação entre o teorema principal deste texto e o obtido por Balogh, Bohman e Mubayi, com o intuito de tornar claro em quais situações nossos resultados superam aqueles já conhecidos na literatura, bem como de apresentar uma descrição mais completa do estudo das famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$. Fazemos, também, uma breve discussão sobre os resultados novos de Hamm e Kahn em [HK14], e Balogh, Das, Delcourt, Liu e Sharifzadeh em [BDD⁺14].

Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos uma discussão sobre outros problemas onde os métodos apresentados aqui poderiam ser aplicados. Discutimos, brevemente, algumas desvantagens do método utilizado aqui, relativamente aos trabalhos de Saxton e Thomason [ST12], e Balogh, Morris e Samotij [BMS12].

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos essenciais de combinatória e probabilidade que são importantes para o restante do texto. A Seção 2.1 contém noções e símbolos básicos que utilizamos ao longo da dissertação. Na Seção 2.2, estendemos um pouco o escopo da introdução (que trata de obter uma versão esparsa de Erdős-Ko-Rado), adicionando o objetivo de obter uma *versão de estabilidade* de Erdős-Ko-Rado para o caso esparsos¹. Na Seção 2.3 apresentamos um grafo que codifica os k -subconjuntos de A^n e a informação de um par deles possuir intersecção vazia ou não. Na Seção 2.4 apresentamos algumas desigualdades comumente usadas em probabilidade para estudar o comportamento de variáveis aleatórias.

2.1 Notação assintótica, Símbolos e Desigualdades

Nesta seção, apresentamos as definições das notações assintóticas que utilizamos, uma lista de símbolos para uniformizar a notação do texto, e uma lista de desigualdades que são úteis para o entendimento de algumas demonstrações.

Notação assintótica

Sejam $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ seqüências de números positivos. Escrevemos $f \ll g$ ou $f = o(g)$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Em particular, a notação $o(1)$ representa uma função que converge a 0, quando $n \rightarrow \infty$. Por exemplo, temos que $\ln(n) \ll n$, $n \ll n^2$ e $1/n = o(1)$. Em alguns momentos escrevemos $f \gg g$ para dizer que $g \ll f$ (por exemplo, $n^2 \gg n$).

Além disso, escrevemos $f = O(g)$ se existem constantes C e n_0 tais que $f(n) \leq Cg(n)$ para todo $n > n_0$. Em particular, escrevemos $f = O_\delta(g)$, para representar a dependência das constantes C e n_0 em relação a uma constante fixa δ . Mais precisamente, dado $\delta > 0$ temos que $f = O_\delta(g)$ se existem constantes $C = C(\delta)$ e $n_0 = n_0(\delta)$ tais que $f(n) \leq Cg(n)$ para todo $n > n_0$. Por exemplo, temos que $10n + \ln(n) = O(n)$, $n = O(n^2)$ e que $(3/\delta)n = O_\delta(n)$.

Ainda, escrevemos $f = \Omega(g)$ se $g = O(f)$. Em outras palavras, existem constantes c e n_0 tal que $f(n) \geq cg(n)$ para todo $n > n_0$. Por último, se $f = O(g)$ e $f = \Omega(g)$

¹O significado desta afirmação ficará mais preciso na referida seção.

então dizemos que $f = \Theta(g)$. Isto é, temos que $10n + \ln(n) = \Omega(n)$, $n^2 = \Omega(n)$ e que $10n + \ln(n) = \Theta(n)$.

Símbolos

$\doteq$ indica “igualdade por definição”

$\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \doteq \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{R}$ conjunto dos números reais

A^n conjunto com n elementos

$[n]$ subconjunto “canônico” com n elementos, $[n] \doteq \{1, \dots, n\}$

$\mathcal{V}^k = \binom{A^n}{k}$ família de *k-subconjuntos*, $\binom{A^n}{k} \doteq \{B \subseteq A^n : |B| = k\}$

$|B|$ quantidade de elementos do conjunto B , por exemplo $|[n]| = n$

$n!$ fatorial, $n! \doteq n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

$(n)_k$ fatorial decrescente, $(n)_k \doteq n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$

$N = \binom{n}{k}$ quantidade de elementos em $\mathcal{V}^k$, $\binom{n}{k} \doteq |\binom{A^n}{k}| = \frac{(n)_k}{k!}$

$D = \binom{n-k}{k}$ quantidade de k -subconjuntos em $\mathcal{V}^k$ que não interceptam um $B \in \mathcal{V}^k$ dado

$V(G), E(G)$ conjunto de vértices e de arestas de um grafo G

N, D quantidade de vértices em um grafo G ; grau médio dos vértices de G

$G[S]$ subgrafo de G induzido pelo conjunto $S \subseteq V(G)$

$i(G)$ tamanho do maior conjunto independente em G (número de independência de G)

$\mathcal{I}_G(t)$ família de todos os subconjuntos independentes de G possuindo exatamente t elementos

$\mathbb{E}[X]$ esperança de uma variável aleatória X

$\text{Var}[X]$ variância de uma variável aleatória X

Além disso, enfatizamos que todos os logaritmos estão na base natural $e \approx 2.718$. Mais ainda, frisamos que N e D possuem os dois significados listados acima. Por motivos que ficarão claros durante a leitura, acreditamos que não devem surgir confusões sobre qual o significado em cada caso (ao contrário, esta escolha tornará a leitura mais fácil). Utilizamos, também, o termo *assintoticamente quase certamente* (*a.q.c*) no lugar da expressão ‘com probabilidade convergindo a 1 quando n vai a infinito’.

Desigualdades

Estimativa para o fatorial: $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)};$

Estimativa para os binomiais: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k;$

Desigualdade exponencial I: $1 - x \leq e^{-x}$ para $x > 0$;

Desigualdade exponencial II: $1 - x \geq e^{-x}/2$ para $0 < x < 1/2$;

Comparação entre N e D : $\binom{n-k}{k} \leq e^{-k^2/n} \binom{n}{k}$

2.2 Estabilidade para Erdős-Ko-Rado

Neste texto fazemos mais do que apenas estudar $i(\mathcal{V}_p^k)$. Conseguimos um resultado estrutural, que corresponde a transferir para o caso esparsos uma *versão de estabilidade* do teorema de Erdős-Ko-Rado. Mas o que é uma *versão de estabilidade* do teorema de Erdős-Ko-Rado? Em combinatória extremal, é usual tentar obter versões de estabilidade de teoremas clássicos (como o teorema de Turán, por exemplo). Aqui, vamos apenas apresentar o significado de uma versão de estabilidade no caso do teorema de Erdős-Ko-Rado. A título de informação, o artigo [Sam12], devido a Samotij, obtém um princípio geral de transferência de versões de estabilidade de teoremas clássicos para o caso esparsos, fazendo uma adaptação da prova do princípio geral de transferência presente no artigo de Schacht [Sch09]. Neste texto, estamos interessados apenas na versão de *estabilidade esparsa* de Erdős-Ko-Rado. Tal versão é apresentada conjuntamente com o resultado principal deste artigo (sobre o comportamento de $i(\mathcal{V}_p^k)$) no Capítulo 3.

Dados n e k , com $n > 2k$, sabemos do teorema de Erdős-Ko-Rado (Teorema 1.1) que as maiores famílias intersectantes em um conjunto com n elementos possuem $\binom{n-1}{k-1}$ elementos e são principais. Considere então uma família intersectante com quase $\binom{n-1}{k-1}$ elementos, digamos, $(1 - \varepsilon)\binom{n-1}{k-1}$ elementos para algum $\varepsilon > 0$. Estamos interessados na seguinte pergunta: quão diferente das famílias principais tal família pode ser? A ideia de uma versão de estabilidade é que tal família não pode ser tão diferente assim das principais (informalmente, diferente em, no máximo, algo de ordem pequena em relação a $\binom{n-1}{k-1}$, o tamanho das famílias principais). De certa forma, uma versão de estabilidade, neste caso, afirma que podemos transformar famílias intersectantes de tamanho próximo a $\binom{n-1}{k-1}$ em alguma família $\mathcal{F}_i = \{B \in \mathcal{V}^k : i \in B\}$ adicionando e removendo uma quantidade pequena de elementos.

A proposição a seguir corresponde a uma versão de estabilidade do Teorema 1.1. Perceba que $k = k(n)$ precisa crescer, pelo menos, linearmente com n .

Proposição 2.1 (Friedgut [Fri08]). Dado $\beta > 0$, seja $k = k(n)$ uma sequência de inteiros satisfazendo $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e n_0 tal que, para todo $n > n_0$, vale o seguinte. Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ é uma família intersectante com *pelo menos* $(1 - \delta)\binom{n-1}{k-1}$ elementos, então, existe $i \in [n]$ tal que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon \binom{n-1}{k-1}$.

Assim como estamos interessados em demonstrar uma versão semelhante do Teorema 1.1 para o conjunto aleatório $\mathcal{V}_p^k$, também queremos demonstrar uma versão

semelhante da Proposição 2.1 para o conjunto $\mathcal{V}_p^k$. Informalmente, isto corresponde a mostrar que toda família intersectante em $\mathcal{V}_p^k$ com tamanho próximo de $p\binom{n-1}{k-1}$ não pode ser muito diferente de todas as famílias $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k$, isto é, não poderá diferir muito - algo bem menor que $p\binom{n-1}{k-1}$ - de alguma das $\mathcal{F}_i$ em $\mathcal{V}_p^k$. O teorema principal deste texto, apresentado no Capítulo 3, contém esta versão de estabilidade para $\mathcal{V}_p^k$ enunciada de maneira precisa.

É necessário, porém, obter uma versão mais forte do resultado acima para sermos capazes de obter estabilidade no caso esparsa da mesma maneira que, como veremos no Capítulo 3, é necessária uma versão mais forte do Teorema 1.1 para sermos capazes de provar uma versão esparsa de Erdős-Ko-Rado. Tal necessidade (de obter uma versão mais forte de um teorema clássico para provar a versão esparsa) não é uma exclusividade deste trabalho, e também está presente nos artigos sobre os princípios gerais de transferência citados na introdução ([Sch09], [CG10], [ST12] [BMS12]), bem como no artigo [Sam12].

O resultado a seguir é extremamente importante para obtermos uma versão mais forte da Proposição 2.1. Tal resultado é usualmente chamado de *lema de remoção*. Informalmente, dada uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ com 'poucos pares de conjuntos não intersectantes', podemos transformá-la em uma família intersectante removendo 'alguns poucos elementos' de $\mathcal{F}$. O enunciado preciso é o seguinte:

Proposição 2.2 (Friedgut-Regev [FR14]). Dado $\beta > 0$, seja $k = k(n)$ uma sequência de inteiros satisfazendo $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$. Além disso, seja $N = \binom{n}{k}$ e $D = \binom{n-k}{k}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e n_0 tal que, para todo $n > n_0$, vale o seguinte. Toda família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ que possui, no máximo, $\delta|\mathcal{F}|^2(D/N)$ pares (não-ordenados) não intersectantes pode ser transformada em uma família intersectante removendo, no máximo, $\varepsilon\binom{n-1}{k-1}$ elementos de $\mathcal{F}$.

Novamente, note que $k = k(n)$ precisa crescer linearmente com n . Perceba que a quantidade máxima de pares (não-ordenados) não intersectantes de uma família $\mathcal{F}$ deve ter ordem próxima do número $|\mathcal{F}|^2(D/N)$ (pois, dado um $B \in \mathcal{F}$, esperamos que $|\mathcal{F}|(D/N)$ k -subconjuntos de $\mathcal{F}$ não interceptem B). Assim, o resultado garante que se uma família $\mathcal{F}$ possui poucos pares de conjuntos não intersectantes (relativamente ao número esperado), então $\mathcal{F}$ pode ser transformada em uma família intersectante removendo poucos subconjuntos de $\mathcal{F}$ (relativamente ao tamanho das maiores famílias intersectantes).

A Proposição 2.2, quando combinada com a Proposição 2.1, permite transformar uma família qualquer $\mathcal{F}$ com 'poucos pares de conjuntos não intersectantes' e de tamanho próximo a $\binom{n-1}{k-1}$ em uma família principal removendo 'alguns poucos elementos' de $\mathcal{F}$ (e adicionando alguns poucos elementos da família principal respectiva). Tal afirmação corresponde a versão mais forte de estabilidade que precisamos e será apresentada com mais precisão e detalhe nos Capítulos 3 e 4.

2.3 Grafo de Kneser

Será conveniente estudar os resultados subsequentes por meio de um grafo auxiliar, denominado *grafo de Kneser*. São dados n e k inteiros positivos e um conjunto A^n com n elementos. O *grafo de Kneser* K_n^k possui como conjunto de vértices $V(K_n^k) = \mathcal{V}^k = \binom{A^n}{k}$, isto é, seus vértices são os k -subconjuntos de A^n . Um par de vértices, digamos T e R , possui uma aresta ligando ambos, se os k -subconjuntos correspondentes são disjuntos, isto é, se $T \cap R = \emptyset$. Dessa maneira, perceba que o grafo de Kneser codifica a informação de quando dois k -subconjuntos de A^n possuem intersecção vazia.

Mais ainda, note que as famílias intersectantes em $\mathcal{V}^k$ correspondem a conjuntos independentes (sem arestas internas) no grafo de Kneser. Chamamos um conjunto independente de *principal* quando os seus vértices correspondem a alguma das famílias $\mathcal{F}_i$ (ou seja, se os vértices do conjunto independente são da forma $\{B \in \mathcal{V}^k : i \in B\}$). Denotamos o número de vértices em K_n^k por $N = \binom{n}{k}$ (número de elementos em $\mathcal{V}^k$), e o grau de cada vértice por $D = \binom{n-k}{k}$ (número de k -subconjuntos disjuntos de um k -subconjunto fixado).

Por conta das observações feitas acima, o teorema de Erdős-Ko-Rado pode ser escrito por meio do grafo de Kneser de uma forma simples: dados n e k , com $n \geq 2k$, temos que² $i(K_n^k) = \binom{n-1}{k-1} = (k/n)N$. Estamos interessados em estudar o conjunto aleatório $\mathcal{V}_p^k$ e, assim, devemos associá-lo ao grafo K_n^k de alguma forma. Isto é feito de uma maneira bem simples. Veja que $\mathcal{V}_p^k \subseteq V(K_n^k)$. Considere o grafo³ $K_n^k(p) = K_n^k[\mathcal{V}_p^k]$ e perceba que as famílias intersectantes de $\mathcal{V}_p^k$ correspondem a conjuntos independentes em $K_n^k(p)$. Assim, para estudarmos $i(\mathcal{V}_p^k)$ é suficiente estudar o número de independência do subgrafo aleatório $K_n^k(p)$ do grafo de Kneser (denotado por $i(K_n^k(p))$). A partir de agora, vamos sempre utilizar $i(K_n^k(p))$ no lugar de $i(\mathcal{V}_p^k)$.

Matriz de adjacências e autovalores de K_n^k

Como ilustrado acima, podemos reduzir o estudo de famílias intersectantes ao estudo de conjuntos independentes no grafo K_n^k . Para estudar tais conjuntos, utilizaremos uma estimativa de quantas arestas estão contidas em uma família qualquer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}^k$ (isto é, uma estimativa para o número de arestas em $K_n^k[\mathcal{F}]$). Esta estimativa será obtida estudando os autovalores da matriz de adjacências do grafo K_n^k . Definimos, na sequência, o significado de matriz de adjacências de um grafo.

Seja G um grafo com vértices $v_1, \dots, v_n$. Consideramos uma matriz quadrada $n \times n$ M_G cuja entrada $\{i, j\}$ é 1 se v_i e v_j estão ligados por uma aresta em G , e é 0 caso contrário (por exemplo, um grafo completo têm todas as entradas da matriz iguais a 1, exceto a diagonal principal). Tal matriz M_G é chamada de *matriz de adjacências* do grafo G . A seguir, vamos ilustrar porque os autovalores da matriz de

²Lembre-se que $i(G)$ denota o número de independência de um grafo G .

³Lembre-se que $G[S]$ denota o subgrafo de G induzido pelo conjunto $S \subseteq V(G)$. Isto é, o subgrafo de G que têm S como conjunto de vértices e cujas arestas são aquelas de G que têm ambas as pontas em S .

adjacências de G fornecem informação sobre a quantidade de arestas presentes em $G[S]$, para algum $S \subseteq V(G)$.

Dado um grafo G e um subconjunto $S \subseteq V(G)$, considere v_S o vetor característico do conjunto S (isto é, o vetor de entradas 0 e 1 que possui 1 nos índices correspondentes a elementos de S e 0 nos demais) e e_S o número de arestas do grafo G que estão contidas em S (isto é, $e_S = |E(G[S])|$). Perceba que $\langle v_S, M_G v_S \rangle = 2e_S$. Podemos considerar $v_S = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ a expansão de v_S na base de autovetores u_i de M_G . Isto permite concluir que $2e_S = \langle v_S, M_G v_S \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2$ (onde, para $i = 1, \dots, n$, λ_i é o autovalor correspondente ao autovetor u_i). Se possuímos informação sobre os a_i , u_i e λ_i podemos obter estimativas interessantes para e_S . Uma cota inferior para e_S baseada neste método é apresentada na Seção 4.1. Tal cota exige, entre outras, conhecimento do menor autovalor do grafo G . Felizmente, os autovalores do grafo de Kneser já foram determinados por Lovász:

Proposição 2.3 (Lovász [Lov79]). Seja K_n^k o grafo de Kneser com parâmetros n e k , onde $2 \leq k \leq n/2$. Os autovalores da matriz de adjacência de K_n^k são dados por:

$$\lambda_j = (-1)^j \binom{n-k-j}{k-j},$$

onde $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Conjuntos Independentes

Novamente lembramos que conjuntos independentes no grafo de Kneser correspondem a famílias intersectantes em $\mathcal{V}^k$. Sendo assim, cotas inferiores e superiores para o tamanho dos conjuntos independentes em grafos com certas propriedades especiais poderão ser bastante úteis no estudo de $i(K_n^k(p))$. É natural que cotas bastante gerais não sejam de grande utilidade neste caso particular. A seguinte proposição, porém, será de grande importância na demonstração de uma parte do teorema principal deste texto, pois, garante uma cota inferior para o tamanho dos conjuntos independentes em grafos que não possuem triângulos.

Proposição 2.4 (Ajtai-Komlós-Szemerédi [AKS80], Shearer [She83]). Seja $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de grafos com $N = N(n)$ vértices e grau médio no máximo $D = D(n)$, onde $D \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Se cada G_n é livre de triângulos, então G_n contém um conjunto independente de tamanho $(1 - o(1))(N \ln D)/D$.

Note que a seguinte cota trivial é válida: temos $i(G) \geq D^{-1}N$ para todo grafo G , onde N é o número de vértices e D é o grau médio de G . Assim, a proposição acima obtém uma cota com um fator $\ln D$ a mais e é verdadeira somente para grafos livre de triângulos.

2.4 Desigualdades de Concentração

Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (por exemplo, o espaço $\mathcal{V}_p^k$ apresentado na introdução), e uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (por exemplo, a função

$i(\mathcal{V}_p^k)$ apresentada na introdução). Em probabilidade, é usual estarmos interessados no comportamento da variável aleatória X (isto é, como X está distribuída ao longo da reta real). Em particular, costuma ser de grande utilidade demonstrar que X está concentrada em torno da média $\mathbb{E}[X]$. Desigualdades de concentração têm precisamente esta função. Com elas, é possível analisar o quão concentrada uma variável está em torno da média e assim obter informações valiosas sobre sua distribuição ao longo da reta. Como estamos interessados no comportamento da variável aleatória $i(K_n^k(p)) = i(\mathcal{V}_p^k)$, algumas desigualdades de concentração serão muito úteis nesta análise e serão apresentadas ao longo desta seção.

Desigualdade de Markov

A primeira desigualdade não é exatamente uma desigualdade de concentração, mas, por sua simplicidade e generalidade, ela é muito útil para analisar o comportamento de uma variável aleatória. Ela é conhecida como desigualdade de Markov.

Proposição 2.5 (Desigualdade de Markov). Dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, seja X uma variável aleatória não-negativa e a um número real. Temos a seguinte desigualdade:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Em combinatória, usualmente, a variável aleatória X conta a quantidade de vezes que um certo tipo de estrutura (por exemplo, arestas, triângulos, circuitos, entre outras) aparecem em um grafo aleatório. Assim, usando Markov (e calculando a esperança de X), podemos estimar a probabilidade de uma certa estrutura combinatória existir (isto é, o caso em que $X \geq 1$). Muitas vezes, tal estimativa é suficiente para garantir que tal estrutura aparece apenas com probabilidade muito baixa no grafo aleatório considerado.

Vamos ilustrar a afirmação acima apresentando uma maneira de obter cotas superiores para $i(K_n^k(p))$. Dado um inteiro positivo t , podemos considerar a variável aleatória X_t que conta a quantidade de conjuntos independentes de tamanho t em $K_n^k(p)$. Se o número de conjuntos independentes de tamanho t em K_n^k é denotado por I_t , então temos que $\mathbb{E}[X_t] = I_t p^t$ (pela definição de $\mathcal{V}_p^k$ e pela linearidade da esperança). Se conseguirmos provar que, para um certo valor de t , o valor de $\mathbb{E}[X_t]$ converge a zero quando $n \rightarrow \infty$, então a desigualdade de Markov (com $a = 1$) garante que $\mathbb{P}[X_t \geq 1]$ converge a zero e, portanto, que $i(K_n^k(p)) \leq t$ (assintoticamente quase certamente). Assim, uma boa cota superior para I_t deve levar a uma cota razoável para $i(K_n^k(p))$. Este método será utilizado na demonstração de um dos casos do teorema principal deste texto. Tal demonstração (juntamente com uma cota para I_t , que é válida para uma classe de grafos que contém os grafos de Kneser) será apresentada na Seção 4.2.

Desigualdade de Chebyshev

A próxima desigualdade, conhecida como desigualdade de Chebyshev, é uma consequência direta da desigualdade de Markov. Por conta de sua generalidade, ela é

particularmente útil para demonstrar concentração em torno da média.

Proposição 2.6 (Desigualdade de Chebyshev). Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, seja X uma variável aleatória não-negativa e a um número real. Vale a seguinte desigualdade:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a] \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}.$$

A desigualdade de Chebyshev, em geral, não é capaz de demonstrar grande concentração em torno da média. Apesar disso, ela é útil em muitos casos, em particular, naqueles que a desigualdade de Chernoff, apresentada abaixo, não puder ser usada.

Usamos Chebyshev, porém, não para mostrar que X é 0 na maioria dos casos, mas para estimar o quanto X desvia da média (e assim, por exemplo, obter uma estimativa para o número de triângulos presentes no grafo aleatório em questão).

Neste texto a Proposição 2.6 será usada apenas em um momento específico onde vamos precisar estimar o número de arestas presentes em $K_n^k(p)$ (equivalentemente, pares de k -subconjuntos não intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$). Para tanto, consideramos a variável aleatória X que conta o número de arestas em $K_n^k(p)$ e usando Chebyshev podemos estimar X calculando apenas sua esperança e variância (e fazendo a escolha correta de a). Estas observações são apresentadas com detalhe em um lema da Seção 4.2.

Desigualdade de Chernoff

A terceira desigualdade é extremamente importante por ser capaz de garantir que variáveis aleatórias estejam muito concentradas em torno da média. Infelizmente, ela tem hipóteses mais restritivas que a desigualdade de Chebyshev. Tal desigualdade é conhecida como desigualdade de Chernoff (a versão a seguir pode ser encontrada no apêndice A do livro de Alon e Spencer [AS92]).

Proposição 2.7 (Desigualdade de Chernoff). Sejam $X_1, \dots, X_m$ variáveis aleatórias independentes assumindo valores em $\{0, 1\}$, onde cada X_i é 1 com probabilidade p . Além disso, seja $X = \sum_i X_i$, e faça $\mu = \mathbb{E}[X] = pm$. Então, para cada $\delta > 0$, existe uma constante $c_\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[|X - \mu| > \delta\mu] < 2e^{-c_\delta\mu}.$$

A desigualdade de Chernoff, porém, não pode ser aplicada para qualquer variável aleatória X . Precisamos ser capazes de obter variáveis aleatórias X_i nas condições do enunciado.

Ilustramos uma maneira simples de usar a Proposição 2.7 a seguir. Suponha que desejamos estimar o número de elementos no conjunto $\mathcal{V}_p^k$. Consideramos X a variável aleatória que conta tal quantidade. Para cada $B \in \mathcal{V}_p^k$, consideramos a variável aleatória X_B que assume valor 1 se $B \in \mathcal{V}_p^k$ e 0 caso contrário. Veja que as variáveis X_B satisfazem todas as condições do enunciado (em particular, são independentes). Assim, podemos usar a Proposição 2.7 para garantir que X está

concentrada em torno da média (que é pN) com probabilidade extremamente alta. Concluimos, portanto, que $X = (1 + o(1))pN$ com grande probabilidade.

Suponha agora que X representa o número de pares não intersectantes (como no caso em que usamos Chebyshev na subseção acima). Podemos tentar construir, para cada par $B, C \in \mathcal{V}^k$ não intersectantes, uma variável aleatória $X_{B,C}$ que assume valor 1 se ambos estão em $\mathcal{V}_p^k$ e 0 caso contrário. Neste caso, porém, não teremos independência e não será possível usar a Proposição 2.7 (podemos tentar usar a desigualdade de Chebyshev no lugar).

Antes de prosseguir para o próximo capítulo, vamos utilizar a desigualdade de Chernoff para obter uma cota inferior interessante para o valor de $i(K_n^k(p))$. Naturalmente, todas as famílias principais $\mathcal{F}_i$ terão alguns elementos escolhidos em $\mathcal{V}_p^k$. Como elas são as maiores famílias intersectantes em $\mathcal{V}^k$ faz sentido usar a que possuir mais elementos em $\mathcal{V}_p^k$ como cota inferior para $i(K_n^k(p))$. Podemos usar a Proposição 2.7 para estimar o tamanho das $\mathcal{F}_i$ em $\mathcal{V}_p^k$. Obtemos a seguinte afirmação.

Afirmção 2.8 Dada $k = k(n)$ uma sequência de inteiros positivos e $p = p(n)$ uma sequência de reais entre 0 e 1 tal que $p \gg (n/k) \ln(n)N^{-1}$. Então, assintoticamente quase certamente, todas as famílias principais $\mathcal{F}_i$ possuem $(1 + o(1))p\binom{n-1}{k-1}$ elementos em $\mathcal{V}_p^k$. Em particular, obtemos a seguinte conclusão:

$$i(K_n^k(p)) \geq (1 + o(1))p\binom{n-1}{k-1} = (1 + o(1))p(k/n)N.$$

Demonstração. Como comentado acima, vamos determinar o tamanho de cada uma das famílias principais em $\mathcal{V}_p^k$. Assim, dado $i \in A^n$, considere a variável aleatória X^i que conta o número de elementos de $\mathcal{F}_i$ que estão presentes em $\mathcal{V}_p^k$. Para cada $B \in \mathcal{F}_i$, considere a variável aleatória X_B^i que vale 1 se $B \in \mathcal{V}_p^k$ e 0 caso contrário. As hipóteses do enunciado da Proposição 2.7 estão satisfeitas e assim dado um $\delta > 0$ existe um $c_\delta > 0$ tal que $\mathbb{P}[|X^i - \mu| > \delta\mu] < 2e^{-c_\delta\mu}$ onde $\mu = \mathbb{E}[X^i]$.

Veja que portanto X^i está fora da faixa $(1 - \delta)\mu$ e $(1 + \delta)\mu$ com probabilidade menor que $2e^{-c_\delta\mu}$. Como $\mu = p\binom{n-1}{k-1} = p(k/n)N$ e $p \gg (n/k) \ln(n)N^{-1}$, temos que a probabilidade de X não estar entre $(1 - \delta)\mu$ e $(1 + \delta)\mu$ é $o(1/n)$. Veja que temos n famílias principais $\mathcal{F}_i$ e, portanto, a probabilidade de alguma das variáveis aleatórias X^i não estar entre $(1 - \delta)\mu$ e $(1 + \delta)\mu$ é, no máximo, $no(1/n) = o(1)$. Assim, assintoticamente quase certamente, todas as famílias $\mathcal{F}_i$ possuem $(1 + o(1))p\binom{n-1}{k-1}$ elementos em $\mathcal{V}_p^k$. Consequentemente, $i(K_n^k(p)) \geq (1 + o(1))p\binom{n-1}{k-1} = (1 + o(1))(k/n)pN$. $\square$

O resultado acima mostra que é razoável esperarmos que, para valores não tão pequenos de p , $i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))(k/n)pN$. Em particular, note a grande diferença entre a restrição sobre p da afirmação acima e a restrição da Proposição 1.2. O capítulo seguinte apresenta uma descrição completa sobre o comportamento de $i(K_n^k(p))$.

Capítulo 3

Resultados Principais

Neste capítulo iremos apresentar um teorema que descreve o comportamento de $i(\mathcal{V}_p^k)$ de forma bastante satisfatória para quase todo valor de p e praticamente sem restrições sobre k . Além disso, este teorema também garante estabilidade no caso em que k cresce linearmente com n . Ainda neste capítulo, apresentamos uma discussão sobre as técnicas principais utilizadas na demonstração deste teorema, bem como, alguns resultados adicionais que são necessários.

3.1 Versão esparsa de Erdős-Ko-Rado

Conforme mencionado na Seção 2.3, vamos estudar as famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$ por meio de um grafo auxiliar denominado grafo de Kneser. Lembre-se que, dados n e k inteiros positivos e um conjunto A^n com n elementos, definimos o grafo de Kneser da seguinte maneira: o conjunto de vértices $V(K_n^k) = \mathcal{V}^k$ é o conjunto de todos os k -subconjuntos de A^n (isto é, $\binom{A^n}{k}$). Um par de vértices está ligado se os k -subconjuntos correspondentes são disjuntos ($T, R \in \mathcal{V}^k$ estão ligados se $T \cap R = \emptyset$). Lembre-se ainda que conjuntos independentes no grafo de Kneser correspondem a famílias intersectantes. Denotamos o número de vértices de K_n^k por $N = \binom{n}{k}$ e o grau de cada vértice por $D = \binom{n-k}{k}$.

O Teorema 1.1 implica que¹, se $n \geq 2k$, $i(K_n^k) = \binom{n-1}{k-1} = (k/n)N$. Como iremos estudar $\mathcal{V}_p^k$ consideramos o subgrafo $K_n^k[\mathcal{V}_p^k]$ induzido por $\mathcal{V}_p^k$ em K_n^k . Recorde que famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$ correspondem a conjuntos independentes em $K_n^k(p)$ e, portanto, $i(\mathcal{V}_p^k) = i(K_n^k(p))$.

Estamos prontos para enunciar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 3.1 Seja $p = p(n) \in (0, 1]$, $k = k(n)$, onde $2 \leq k \leq n/2$. Defina $N = \binom{n}{k}$ e $D = \binom{n-k}{k}$. Fixe constantes suficientemente pequenas $\delta, \varepsilon > 0$. Então assintoticamente quase certamente:

1. $i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))pN$ se $N^{-1} \ll p \ll D^{-1}$,
- 2.1. $i(K_n^k(p)) = O_\delta(D^{-1} \ln(pD)N)$ se $D^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta} D^{-1}$,
- 2.2. $i(K_n^k(p)) = O_\delta(D^{-1} \ln^2(pD)N)$ se $(n/k)^{1-\delta} D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln^2(n/k) D^{-1}$,

¹Na nossa notação, $i(G)$ denota o tamanho do maior conjunto independente em G .

$$2.3. \ i(K_n^k(p)) \geq (1 + o(1))D^{-1} \ln(pD)N \quad \text{se } D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n/k)D^{-1} \\ \text{e } k \geq n^{1/2+\varepsilon},$$

$$3. \ i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))p(k/n)N \quad \text{se } p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}.$$

Além disso, se $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$ para alguma constante $\beta > 0$, e $p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$, então vale estabilidade. Em outras palavras, para qualquer $\varepsilon_1 > 0$ existe uma constante $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ tal que, assintoticamente quase certamente, para toda família intersectante $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_p^k$ de tamanho ao menos $(1 - \delta_1)p(k/n)N$ existe um $i \in [n]$ tal que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon_1 p(k/n)N$.

Como o enunciado acima é bastante complexo, os próximos parágrafos estão dedicados a interpretação de cada um dos casos do Teorema 3.1. Os quatro primeiros são relativos ao comportamento de $i(K_n^k(p))$. O quinto e último apresentará comentários sobre o trecho que trata de estabilidade. A prova do Teorema 3.1 será apresentada no Capítulo 4.

Caso 1. Perceba que este caso é válido para p somente se $D \ll N$, o que ocorre, por exemplo, se $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$, para algum $\varepsilon > 0$. Apesar disso, o primeiro caso é de fácil interpretação: como é possível provar que o número de vértices em $K_n^k(p)$ é assintoticamente quase certamente $(1 + o(1))pN$ (via Proposição 2.7, conforme discutido nos parágrafos seguintes ao seu enunciado), o primeiro caso realmente afirma que o maior conjunto independente em $K_n^k(p)$ cobre quase todo o $K_n^k(p)$. Em outras palavras, quase não temos arestas no grafo $K_n^k(p)$ para valores de p na faixa entre N^{-1} e D^{-1} .

Caso 2.1. Veja que este caso é válido para p somente quando $k \ll n$. Note que, como $p \gg D^{-1}$, temos $pN \gg D^{-1} \ln(pD)N$. Assim, o número de vértices em $K_n^k(p)$ (que, novamente, é assintoticamente quase certamente igual a $(1 + o(1))pN$) é assintoticamente maior que o tamanho do maior conjunto independente em $K_n^k(p)$. Além disso, nesta faixa de p , $i(K_n^k(p))$ praticamente não cresce quando p aumenta. Combinando com o caso anterior, isto indica uma transição de fase para $i(K_n^k(p))$ com ponto crítico aproximadamente em D^{-1} . Tal fato é ilustrado no gráfico 3.1 apresentado na sequência.

Caso 2.2. Novamente, este caso é válido somente se $k \ll n$. Esta faixa de p apenas preenche o espaço deixado entre o Caso 2.1 e o Caso 3. Infelizmente, não sabemos como obter a cota do caso anterior para $i(K_n^k(p))$ nesta faixa, mas conseguimos uma cota ligeiramente inferior acrescentando um fator $\ln(pD)$ extra. Tal mudança não influencia na observação de que $i(K_n^k(p))$ quase não cresce quando p aumenta.

Caso 2.3. Note a exigência de que $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$. Veja que podemos obter, assintoticamente quase certamente, a cota $i(K_n^k(p)) \geq (1 + o(1))D^{-1}N$ independente de k , pois tal fato vale para todo grafo². A afirmação deste caso representa uma ligeira melhora nesta cota. Além disso, a ordem das cotas superior e inferior dos casos Caso 2.1 e Caso 2.3 é a mesma. Mais ainda, como $D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n/k)D^{-1}$,

²De fato, podemos mostrar que o número de vértices e o grau médio de $K_n^k(p)$ estão concentrados em pN e pD respectivamente. Isto será feito durante a demonstração do Caso 2.3 no Capítulo 4. A afirmação segue usando a cota apresentada logo após a Proposição 2.4.

temos $p(k/n)N \ll D^{-1} \ln(pD)N$. No caso de $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$, vale que³ se $p \gg D^{-1}$ então $p \gg (n/k) \ln(n)N^{-1}$ e, assim, podemos concluir (pela Afirmação 2.8) que o número de vértices em cada família principal é assintoticamente quase certamente $(1 + o(1))p(k/n)N$. Assim, nesta faixa de p e k , as maiores famílias intersectantes de $K_n^k(p)$ não provém de nenhuma das principais.

Caso 3. Novamente, usando a Afirmação 2.8, é possível provar que, para valores de $p \gg (n/k) \ln(n)N^{-1}$, o número de vértices em cada família principal é assintoticamente quase certamente $(1 + o(1))p(k/n)N$. Este caso, portanto (como $(n/k) \ln^2(n/k)D^{-1} \geq (n/k) \ln(n)N^{-1}$), afirma que as maiores famílias intersectantes em $K_n^k(p)$ possuem tamanho muito semelhante às maiores famílias principais. Isto corresponde a uma segunda transição de fase de $i(K_n^k(p))$ com ponto crítico aproximadamente em $(n/k)D^{-1}$.

Estabilidade. Veja que este resultado garante uma propriedade análoga a do Teorema 2.1 mas para o subconjunto aleatório $\mathcal{V}_p^k$ de $\mathcal{V}^k$. Informalmente, o Teorema 3.1 garante que as famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$ de tamanho próximo ao máximo possível serão muito semelhantes a alguma das famílias principais $\mathcal{F}_i$ em $\mathcal{V}_p^k$. É importante observar que o teorema principal de [Sam12], quando devidamente combinado às Proposições 2.1 e 2.2, também é capaz de obter conclusões semelhantes. A principal diferença entre o nosso método e o do artigo [Sam12] é que o Teorema 3.1 só não é verdadeiro para todo k (com o valor de p apresentado) por conta das Proposições 2.1 e 2.2 (enquanto que o teorema principal do artigo [Sam12] continuará incapaz de fazer o caso $k \ll n$, mesmo que as Proposições 2.1 e 2.2 sejam verdadeiras para todo k). Esta é a razão para termos escrito $p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$ e não $p \gg D^{-1}$ (como k é linear em n as duas hipóteses são equivalentes). Se formos capazes de provar uma versão das Proposições 2.1 e 2.2 para todo k , nossos resultados implicariam no mesmo teorema para todo k (e $p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$). Estas afirmações ficarão mais claras adiante, quando formos apresentar nossos métodos e as demonstrações dos resultados.

Observe, ainda, que o Teorema 3.1 exibe uma descrição quase completa da evolução de $i(K_n^k(p))$, excetuando uma região pequena de valores em torno de $(n/k)D^{-1}$. Ainda assim, o resultado principal do artigo [BBM09] é superior ao apresentado acima na faixa $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ (tal teorema será apresentado no Capítulo 5). Podemos enunciar o seguinte corolário para a faixa $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$, que não é coberta pelo resultado principal de [BBM09].

Corolário 3.2 Suponha que $n^{1/2+\varepsilon} \leq k(n) \leq n/2$, onde $\varepsilon > 0$ é uma constante fixada. Então, para qualquer $\delta > 0$, assintoticamente quase certamente:

$$i(K_n^k(p)) \begin{cases} = (1 + o(1))pN & \text{se } N^{-1} \ll p \ll D^{-1}. \\ = \Theta_\delta(\ln(pD)ND^{-1}) & \text{se } D^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta}D^{-1}. \\ = (1 + o(1))(k/n)pN & \text{se } p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}. \end{cases}$$

O Corolário 3.2 sintetiza as informações principais do Teorema 3.1. Veja que, nesta faixa de k , podemos afirmar que $i(K_n^k(p))$ apresenta uma dupla transição de fase com

³Basta usar uma aproximação assintótica boa o suficiente para os fatoriais e fazer os cálculos.

pontos críticos aproximadamente em D^{-1} e $(n/k)D^{-1}$. Na primeira fase, $i(K_n^k(p))$ é quase igual ao número de vértices em $K_n^k(p)$; na segunda fase, $i(K_n^k(p))$ praticamente não cresce com p ; na terceira e última fase, as famílias principais passam a influenciar muito os maiores conjuntos independentes e temos uma conclusão semelhante ao teorema de Erdős-Ko-Rado: $i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))p(k/n)N$.

Em particular, podemos construir um gráfico que compara o crescimento de p e $i(K_n^k(p))$ utilizando a seguinte parametrização: $p = (n/k)^{a+o(1)}D^{-1}$ e $i(K_n^k(p)) = (n/k)^{b+o(1)}ND^{-1}$, onde $\ln(D/N)/\ln(n/k) \leq a, b \leq \ln(D)/\ln(n/k)$ (para que $N^{-1} \leq p \leq 1$ e $1 \leq i(K_n^k(p)) \leq N$). O Corolário 3.2 afirma que: se $\ln(D/N)/\ln(n/k) \leq a \leq 0$ então $b = a$; se $0 \leq a \leq 1$ então $b = 0$; e se $1 \leq a \leq \ln(D)/\ln(n/k)$ então $b = a - 1$. Desta forma, obtemos o seguinte gráfico que ilustra a dupla transição de fase comentada acima:

Figura 3.1: Gráfico de $i(K_n^k(p))$, no caso $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$ com $\varepsilon > 0$, em função de p segundo a parametrização $p = (n/k)^{a+o(1)}D^{-1}$ e $i(K_n^k(p)) = (n/k)^{b+o(1)}ND^{-1}$, conforme obtido no Corolário 3.2.

Embora a dupla transição de fase acima possa parecer estranha, ela já foi observada nos trabalhos de Kohayakawa, Kreuter e Steger [KKS98] e Kohayakawa, Lee e Rödl [KLR11]. Tais trabalhos têm em comum o fato de que o problema original (digamos Erdős-Ko-Rado) possuía a razão entre o maior conjunto independente e o número total de vértices indo para zero conforme o número de vértices cresce (no caso de Erdős-Ko-Rado, esta razão seria de k/n).

Notamos ainda que os trabalhos recentes de Hamm e Kahn [HK14] e Balogh, Das, Delcourt, Liu e Sharifzadeh em [BDD⁺14] cobrem uma parte dos resultados apresentados aqui. Não entraremos em detalhe sobre os resultados obtidos por tais autores.

3.2 Técnicas Principais e alguns resultados adicionais

Como conjuntos independentes no grafo de Kneser K_n^k correspondem a famílias intersectantes, iremos estudar os conjuntos independentes do grafo de Kneser K_n^k . De fato, vamos apresentar resultados que valem para quaisquer grafos que satisfaçam

algumas propriedades especiais. Assim, passaremos a utilizar uma linguagem mais geral. Os resultados apresentados aqui valerão para uma classe mais geral de grafos e, em particular, para o grafo de Kneser.

Nossos métodos são bastante semelhantes aos apresentados por Balogh, Morris e Samotij em [BMS12]. Além disso, muitas das ideias encontradas aqui, incluindo o lema apresentado a seguir, também estão presentes no artigo de Kohayakawa, Kreuter e Steger [KKS98]. Apesar das semelhanças, para simplificar a exposição e obter cotas precisas iremos reformular um pouco os resultados. Começamos com um resultado estrutural sobre conjuntos independentes em grafos arbitrários.

Lema 3.3 Seja G um grafo com N vértices, e $\gamma > 0$ um número real qualquer. Além disso, sejam $0 < \ell < t$ inteiros. Então, para cada conjunto independente $I \subseteq V(G)$ de tamanho pelo menos t , existe uma sequência de vértices $x_1, \dots, x_\ell \in I$ e uma sequência de subconjuntos $V(G) \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_\ell$ dependendo somente de $x_1, \dots, x_\ell$ tal que:

- $x_1, \dots, x_i \notin X_i$ para todo $i \leq \ell$,
- $I \setminus \{x_1, \dots, x_i\} \subseteq X_i$ para todo $i \leq \ell$.

Mais ainda, ao menos uma das duas seguintes é verdadeira:

- (i) $|X_i| \leq \left(1 - 2\gamma \frac{e(G)}{N^2}\right) |X_{i-1}|$ para todo $1 \leq i \leq \ell$, ou
- (ii) $e(G[X_i]) < \gamma \frac{|X_i|^2}{N^2} e(G)$ para algum $1 \leq i \leq \ell$.

A prova do Lema 3.3 é baseada numa técnica introduzida por Kleitman e Winston em [KW82]. Informalmente, o lema afirma que dado um conjunto independente I , podemos remover alguns vértices de I e obter um conjunto $X \subseteq V(G)$ que contenha o resto do conjunto independente e tal que ou $|X|$ é pequeno ou $G[X]$ induz poucas arestas. É muito importante observar que X depende apenas dos vértices removidos e não do conjunto independente I original.

O Lema 3.3 é bastante interessante quando possuímos mais informação sobre o grafo G (por exemplo, quando G é o grafo K_n^k). Essencialmente, com mais informação, podemos determinar qual dos dois casos do Lema 3.3 de fato acontece. A seguinte definição descreve uma propriedade que nos permite afirmar qual dos dois casos deve acontecer. Informalmente, diremos que um grafo G é *supersaturado* se todo subconjunto suficientemente grande do conjunto de vértices induz um subgrafo com muitas arestas (em outras palavras, G é localmente denso).

Definição 3.4 Dadas constantes $\lambda \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, 1]$, e um grafo G com N vértices, dizemos que G é um grafo (λ, γ) -*supersaturado* se para cada subconjunto $S \subseteq V(G)$ com $|S| \geq \lambda N$, vale que

$$e(G[S]) \geq \gamma \left(\frac{|S|}{N}\right)^2 \cdot e(G).$$

Além disso, sejam $\lambda = \lambda(n) > 0$ e $\gamma = \gamma(n) > 0$. Para uma sequência $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dizemos que G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -*supersaturado* se existe uma constante $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, G_n é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -*supersaturado*.

Observe que, dado um conjunto independente I de G , o Lema 3.3 obtém conjuntos X_i tais que ou X_i induz poucas arestas, ou X_i é menor que X_{i-1} . No caso particular de G ser (λ, γ) -supersaturado, sabemos que enquanto X_i for maior que λN não pode acontecer o caso de X_i induz poucas arestas. Este fato nos traz muita informação sobre o tamanho dos conjuntos X_i . Esta afirmação será apresentada detalhadamente na Seção 4.2.

A definição apresentada acima será útil para estimarmos $i(K_n^k(p))$. A próxima definição é referente à segunda parte do Teorema 3.1 que trata de estabilidade. Informalmente, diremos que um grafo G é *estável* se existe uma família de subconjuntos de $V(G)$ (por exemplo, o conjunto das famílias principais no caso do K_n^k) tal que todo subconjunto grande dos vértices de G que induz poucas arestas está 'próximo' de um dos subconjuntos da família.

Definição 3.5 (Samotij [Sam12]). Sejam $\lambda, \varepsilon, \delta > 0$ quaisquer. Dado um grafo G com N vértices, seja $\mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{P}(V(G))$ uma família de subconjuntos de vértices de G . Dizemos que G é $(\lambda, \mathcal{B}(G))$ -estável com respeito a (ε, δ) se para cada $U \subseteq V(G)$ com $|U| \geq (1 - \delta)\lambda N$, vale ao menos uma das duas afirmações seguintes

- $e(G[U]) \geq \delta \frac{|U|^2}{N^2} \cdot e(G)$, ou
- $|U \setminus B| \leq \varepsilon \lambda |V(G)|$ para algum $B \in \mathcal{B}(G)$.

Além disso, dado $\lambda = \lambda(n) > 0$, sejam $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de grafos, e $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{P}(V(G_n))$, uma sequência de famílias de subconjuntos. Dizemos que $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, o grafo G_n é $(\lambda(n), \mathcal{B}_n)$ -estável com respeito a (ε, δ) .

Note que se aplicarmos o Lema 3.3 para um grafo estável G , também iremos possuir informações valiosas sobre o tamanho dos conjuntos X_i . Mais detalhes sobre como as duas definições acima serão usadas em conjunto com o Lema 3.3 serão apresentadas na Seção 4.2.

A seguinte proposição geral pode ser obtida como resultado da discussão apresentada acima. Veja que ela é uma espécie de generalização do Teorema 3.1 (fazendo $\lambda = k/n$ e γ uma constante, dá para notar as semelhanças entre os casos dos dois resultados).

Proposição 3.6 Sejam $\lambda = \lambda(n)$ e $\gamma = \gamma(n)$ funções que assumem valores em $(0, 1)$ e $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de grafos, onde cada G_n possui $N = N(n)$ vértices (com $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n) = \infty$) e grau médio $D = D(n)$. Para cada constante $\varepsilon > 0$ existem constantes $C = C(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda sequência de probabilidades $p = p(n) \in (0, 1]$, vale o seguinte. Para um subgrafo induzido aleatório $H_n = G_n[V_p]$, onde $V = V(G_n)$, vale, assintoticamente quase certamente, que:

- (i) Se G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -supersaturado e $D^{-1} \ll p \ll \lambda^\varepsilon (\lambda \gamma D)^{-1}$, então $i(H_n) \leq C \gamma^{-1} D^{-1} \ln(pD) N$ elementos.

- (ii) Se G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -supersaturado e $\lambda^\varepsilon(\lambda\gamma D)^{-1} \ll p \ll (\lambda\gamma D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$, então $i(H_n) \leq C\gamma^{-1}D^{-1} \ln^2(pD)N$ elementos.
- (iii) Se G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -supersaturado e $p \gg (\lambda\gamma D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$, então $i(H_n) \leq (1 + \varepsilon)\lambda pN$ elementos.
- (iv) Se G é $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável e $p \gg (\lambda D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$, então todo subconjunto independente I de H_n com ao menos $(1 - \delta)\lambda pN$ elementos satisfaz $|I \setminus B| \leq \varepsilon\lambda pN$, para algum $B \in \mathcal{B}_n$.

Nota 3.7 A proposição acima é bastante semelhante aos princípios gerais de transferência citados na introdução. A principal vantagem de tais princípios sobre esta proposição é que eles são verdadeiros para hipergrafos k -uniformes (grafos onde as arestas possuem k -elementos). Por outro lado, esta proposição é capaz de transferir resultados como Erdős-Ko-Rado, onde os maiores conjuntos independentes possuem ordem assintoticamente menor que número de vértices total. Esta discussão é retomada com mais detalhe no Capítulo 6.

Em outras palavras, se os conjuntos independentes no grafo original G_n satisfazem certas propriedades estruturais, podemos converter esta informação em cotas para o tamanho e para a estrutura do maior conjunto independente no subgrafo aleatório H_n de G_n . Os teoremas gerais de transferência mencionados na introdução ([Sch09, CG10, BMS12, ST12]) também possuem condições de supersaturação (semelhantes à Definição 3.4) mas que são satisfeitas pelo grafo de Kneser somente quando k cresce linearmente com n . A Proposição 3.6, por outro lado, pode ser aplicada ao caso *degenerado* $k \ll n$, o que nos permite mostrar o Teorema 3.1 para valores arbitrários de k .

Mais, os Casos 2.1, 2.2 e 3 do Teorema 3.1 serão demonstrados usando, respectivamente, os itens (i), (ii), (iii) da Proposição 3.6. A parte de estabilidade do Teorema 3.1 será demonstrada utilizando o item (iv) da Proposição 3.6. Os casos remanescentes do Teorema 3.1 serão demonstrados de outra maneira.

Para realizar o objetivo traçado no parágrafo anterior, é necessário demonstrar que o grafo de Kneser é localmente denso (no sentido da Definição 3.4). Na linguagem de famílias intersectantes, isto equivale a mostrar uma versão mais forte do teorema clássico de Erdős, Ko e Rado. Mais precisamente, note que a proposição abaixo garante que toda família com mais de $\binom{n-1}{k-1}$ elementos possui não apenas um par de k -subconjuntos não intersectantes (como afirma o teorema de Erdős-Ko-Rado) mas muitos pares com esta característica.

Proposição 3.8 Sejam $2 \leq k \leq n/2$ e $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ uma família de tamanho $(1+\varepsilon)\binom{n-1}{k-1}$, onde $\varepsilon = \varepsilon(n) \geq 0$. Faça $\alpha = k/n$, denote o número de pares não-ordenados $\{A, B\}$, com $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap B = \emptyset$, por $e(\mathcal{F})$. Então

$$e(\mathcal{F}) \geq \varepsilon(1 + \varepsilon) \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{ND}{2},$$

onde $N = \binom{n}{k}$ e $D = \binom{n-k}{k}$.

Perceba que a proposição anterior garante que o grafo de Kneser K_n^k é $\left((1 + \varepsilon)\frac{k}{n}, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)$ -supersaturado, para qualquer função $0 < \varepsilon = \varepsilon(n) \leq n/k - 1$.

A prova da proposição acima utiliza técnicas espectrais (em outras palavras, é obtida estudando os autovalores do grafo de Kneser), e é baseada numa prova do teorema de Erdős-Ko-Rado obtida por Lovász em [Lov79]. Mais precisamente, a cota espectral de Hoffman [Hof70] sobre o tamanho do maior conjunto independente em um grafo regular pode ser estendida para obter uma cota inferior para o número de arestas induzidas por subconjuntos grandes de vértices. Esta observação é crucial na demonstração da Proposição 3.8. Mais ainda, uma construção simples mostra que a cota obtida está errada por um fator de no máximo 2, para qualquer valor de k e qualquer tamanho para a família $\mathcal{F}$.

Esta proposição, portanto, garante que podemos afirmar os itens (i), (ii), (iii) da Proposição 3.6, que por sua vez será utilizada para garantir os Casos 2.1, 2.2 e 3 do Teorema 3.1. Para provarmos a parte sobre estabilidade do Teorema 3.1 precisamos mostrar que o grafo de Kneser é estável (no sentido da Definição 3.5). Isso equivale a mostrar uma versão mais forte que a de estabilidade usual (comumente chamada de estabilidade robusta) para o teorema de Erdős-Ko-Rado.

Mais precisamente, os resultados conhecidos de estabilidade para o teorema clássico de Erdős-Ko-Rado ([Fri08, DF09, DFR08, KM10, Kee08]) não são verdadeiros na presença de alguns poucos pares não-intersectantes. Assim, tais resultados, embora capazes de garantir estabilidade, não são capazes de provar estabilidade no sentido que precisamos (estabilidade robusta). Eles garantem que famílias intersectantes grandes são semelhantes a famílias principais, mas não permitem conclusão semelhante com famílias grandes com alguns poucos pares não-intersectantes (como seria necessário para obter estabilidade no sentido da Definição 3.5).

Felizmente, num trabalho concorrente ao nosso, Friedgut e Regev [FR14] obtiveram um lema de remoção para o grafo de Kneser $K(n, k)$, para $k = \Omega(n)$. Informalmente, o resultado deles afirma que toda família de k -subconjuntos grandes com alguns poucos pares não intersectantes pode ser transformada numa família intersectante removendo apenas alguns poucos elementos (Proposição 2.2). Consequentemente, este resultado novo pode ser usado conjuntamente com o teorema original de estabilidade de Friedgut [Fri08] para provar uma versão de estabilidade robusta de Erdős-Ko-Rado (isto é, estabilidade no sentido da Definição 3.5), conforme enunciado a seguir⁴.

Proposição 3.9 Dado um real $\beta > 0$ fixo, seja $k = k(n)$ uma sequência de inteiros satisfazendo $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, vale o seguinte. Se $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família de subconjuntos que possui pelo menos $(1 - \delta)\binom{n-1}{k-1}$ elementos e que contém no máximo $\delta|\mathcal{F}|^2 D/N$ pares (não ordenados) e não intersectantes, então existe algum $i \in [n]$ tal que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon \binom{n-1}{k-1}$.

⁴Convidamos o leitor a ler o artigo de Friedgut e Regev [FR14] para consequências mais gerais do lema de remoção deles.

Finalmente, este resultado pode ser usado com o item (iv) da Proposição 3.6 para obter a parte de estabilidade do Teorema 3.1.

Capítulo 4

Demonstrações

Neste capítulo vamos apresentar as demonstrações dos resultados apresentados no Capítulo 3. Na Seção 4.1, apresentamos as demonstrações de que os grafos de Kneser são (λ, γ) -supersaturados e $(\lambda, \mathcal{B})$ -estáveis para escolhas apropriadas de λ , γ e $\mathcal{B}$ (Proposições 3.8 e 3.9 respectivamente). Na Seção 4.2 apresentamos a demonstração do Lema 3.3 e, a partir das Definições 3.4 e 3.5, obtemos, respectivamente, dois corolários deste lema. Estes corolários, por sua vez, são essenciais na demonstração da Proposição 3.6. Por fim, na Seção 4.3, combinamos os resultados das duas seções anteriores para demonstrar o Teorema 3.1 e, assim, concluímos a demonstração do resultado principal deste trabalho.

4.1 Supersaturação e Estabilidade Robusta para o grafo de Kneser

Conforme informado anteriormente, planejamos utilizar a Proposição 3.6 para demonstrar o Teorema 3.1. Assim, será necessário provar que os grafos $G_n = K_n^k$ são (λ, γ) -supersaturados para algum par de funções $\lambda = \lambda(n)$ e $\gamma = \gamma(n)$ (conforme a Definição 3.4). Perceba que isto corresponde a demonstrar uma versão mais forte do teorema de Erdős-Ko-Rado (no sentido da Proposição 3.8).

Para realizar tal objetivo, utilizamos álgebra linear. Mais especificamente, usamos os autovalores da matriz de adjacência de K_n^k (apresentados na Seção 2.3) para obter uma cota inferior para o número de arestas induzidas por um conjunto S de vértices (isto é, o número $e_S = |E(G[S])|$). Esta cota é verdadeira para todo grafo D -regular e é conhecida como cota de Hoffman (veja [Hof70]). Veja que a cota inferior é dada em função do menor autovalor do grafo. A ideia por trás desta prova já havia sido apresentada brevemente na Seção 2.3.

Lema 4.1 Seja G um grafo D -regular com N vértices, onde $D \geq 1$. Para $S \subset V(G)$, seja $e_S = |E(G[S])|$, e assuma que $|S| = \beta N$, onde $0 \leq \beta \leq 1$. Finalmente, seja M a matriz de adjacência de G , e denote o seu menor autovalor por $\lambda_{\min}$. Então

$$e_S \geq \frac{\beta N}{2}(\lambda_{\min} + \beta(D - \lambda_{\min})).$$

Demonstração. Para $x, y \in \mathbb{R}^N$, defina $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^N x_i y_i$. Seja v_S o vetor característico de S (portanto, suas entradas são 0 ou 1). Primeiro, perceba que $\langle v_S, M v_S \rangle = 2e_S$. Como M é uma matriz simétrica, M é diagonalizável por uma base ortonormal. Sejam $u_1, \dots, u_N$ autovetores normalizados de M cujos autovalores correspondentes são $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N = \lambda_{\min}$, respectivamente. Como G é um grafo D -regular, temos que $u_1 = (1/\sqrt{N}, \dots, 1/\sqrt{N})$ and $\lambda_1 = D$. Assim, seja $v_S = \sum_{i=1}^N a_i u_i$ a expansão de v_S na base de autovetores. Temos

$$2e_S = \langle v_S, M v_S \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^2 \geq \lambda_1 a_1^2 + \lambda_{\min} \sum_{i=2}^N a_i^2.$$

Observe agora que $a_1 = \langle v_S, u_1 \rangle = |S|/\sqrt{N}$. Além disso, $|S| = \langle v_S, v_S \rangle = \sum_{i=1}^N a_i^2$. Portanto,

$$2e_S \geq D \frac{|S|^2}{N} + \lambda_{\min} \left(|S| - \frac{|S|^2}{N} \right),$$

que é equivalente a afirmação do lema. $\square$

Com este resultado é possível demonstrar uma versão mais forte do teorema de Erdős-Ko-Rado, a saber, a Proposição 3.8. Aqui, enunciamos a Proposição 3.8 com uma notação ligeiramente diferente (o enunciado original segue fazendo $\zeta = 1 + \epsilon$). Perceba que a proposição garante que toda família com mais de $\binom{n-1}{k-1}$ elementos possui muitos pares de k -subconjuntos não intersectantes.

Proposição 4.2 Seja $\mathcal{F}$ uma família de k -subconjuntos de um conjunto A^n com n elementos, onde $k = \alpha n$ para algum $\alpha = \alpha(n)$, e $2 \leq k \leq n/2$. Seja $N = \binom{n}{k}$, $D = \binom{n-k}{k}$, e $1 \leq \zeta \leq 1/\alpha$. Se $|\mathcal{F}| \geq \zeta \binom{n-1}{k-1} = \zeta \alpha N$, então

$$|\{\{A, B\} \mid A, B \in \mathcal{F} \text{ e } A \cap B = \emptyset\}| \geq \zeta(\zeta - 1) \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{ND}{2}.$$

Demonstração. Aplicamos o Lema 4.1 ao grafo de Kneser K_n^k . Claramente, $G := K_n^k$ é um grafo D -regular com N vértices. Seja $S \subset V(G)$ o subconjunto dos vértices de G correspondendo à família $\mathcal{F}$, i.e., se A é um subconjunto de $[n]$ de tamanho k e v_A é o vértice correspondente em G , então $v_A \in S$ se e somente se $A \in \mathcal{F}$. Usando a notação do Lema 4.1, temos que $\beta \geq \zeta \alpha$. Note que $e_S = |\{\{A, B\} \mid A, B \in \mathcal{F} \text{ e } A \cap B = \emptyset\}|$. Mais ainda, segue da Proposição 2.3 que o menor autovalor $\lambda_{\min}$ da matriz de adjacência de G é dado por

$$\lambda_{\min} = -\binom{n-k-1}{k-1} = -\frac{k}{n-k}D = -\frac{\alpha}{1-\alpha}D.$$

Aplicando o Lema 4.1 e usando que $\beta \geq \zeta \alpha$ obtemos:

$$e_S \geq \frac{\zeta \alpha N}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}D + \zeta \alpha \left(D + \frac{\alpha}{1-\alpha}D \right) \right)$$

que é equivalente a:

$$e_S \geq \zeta \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \frac{ND}{2} (\zeta + \alpha \zeta - 1)$$

o que completa a demonstração. $\square$

Naturalmente, para utilizarmos a Proposição 3.6 é necessário garantir que os grafos K_n^k são (λ, γ) -supersaturados para algum par (λ, γ) . Por essa razão, enunciamos o seguinte corolário.

Corolário 4.3 Seja $G = K_n^k$ o grafo de Kneser com parâmetros n e k , onde $2 \leq k \leq n/2$. Para qualquer função $\tau = \tau(n)$, onde $0 < \tau \leq n/k - 1$, vale que G é um grafo $\left((1 + \tau)\frac{k}{n}, \frac{\tau}{1 + \tau}\right)$ -supersaturado.

Demonstração. Fixe $\tau = \tau(n)$ segundo as condições do enunciado. Dado $S \subseteq V(G)$, tal que $|S| \geq (1 + \tau)\frac{k}{n}N$, defina ζ para que $|S| = \zeta\frac{k}{n}N$. Aplicando a Proposição 4.2 obtemos que $e_S \geq \frac{\zeta-1}{(1-\alpha)\zeta} \frac{D}{2N} |S|^2$, e assim o resultado segue. $\square$

A discussão anterior era necessária para utilizarmos os itens (i), (ii) e (iii) da Proposição 3.6 com a família de grafos $\{K_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para obtermos estabilidade no caso esparsos (afirmação final do Teorema 3.1) utilizaremos o item (iv) da Proposição 3.6 que requer que a família de grafos K_n^k seja $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável para algum λ real, e uma família $\mathcal{B}$. Isto é equivalente a provarmos uma versão mais forte de estabilidade do teorema de Erdős-Ko-Rado (veja a versão de estabilidade - a Proposição 2.1 - na Seção 2.2). Esta versão mais forte está enunciada na Proposição 3.9 e foi copiada aqui para facilitar a leitura. Perceba que, ao contrário da versão de estabilidade (que exige que as famílias $\mathcal{F}$ sejam intersectantes), esta versão exige apenas que as famílias $\mathcal{F}$ possuam poucos pares não intersectantes. A sua demonstração utiliza ambas as Proposições 2.1 e 2.2 de maneira crucial.

Proposição Dado um real $\beta > 0$ fixo, seja $k = k(n)$ uma sequência de inteiros satisfazendo $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, vale o seguinte. Se $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família de subconjuntos que possui pelo menos $(1 - \delta)\binom{n-1}{k-1}$ elementos e que contém no máximo $\delta|\mathcal{F}|^2 D/N$ pares (não ordenados) não intersectantes, então existe algum $i \in [n]$ tal que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon \binom{n-1}{k-1}$.

Demonstração. Informalmente, dada uma família grande $\mathcal{F}$ com poucos pares não intersectantes, obtemos, usando a Proposição 2.2, uma família intersectante $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ satisfazendo $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'|$ pequeno. Da Proposição 2.1 segue que $\mathcal{F}'$ está próxima de alguma família principal $\mathcal{F}_i$. Portanto, a família original $\mathcal{F}$ deve estar próxima de $\mathcal{F}_i$ também.

Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, considere $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$, e aplique a Proposição 2.2 para obter um $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ correspondente. Agora, fixe $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon/2, \delta_2/2)$, e utilize a Proposição 2.1 para obter um $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ apropriado. Finalmente, defina $\delta = \min(\delta_1, \delta_2/2) = \delta(\varepsilon) > 0$.

Segue, pela Proposição 2.2, que para toda família $\mathcal{F}$ com $|\mathcal{F}| \geq (1 - \delta)\binom{n-1}{k-1}$ e $e(\mathcal{F}) \leq \delta|\mathcal{F}|^2(D/N)$ existe uma família intersectante $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ obtida de $\mathcal{F}$ removendo

ao máximo $\varepsilon_1 \binom{n-1}{k-1}$ elementos tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}'| &\geq (1 - \delta - \varepsilon_1) \binom{n-1}{k-1} \\ &\geq (1 - \delta_2/2 - \delta_2/2) \binom{n-1}{k-1} \\ &\geq (1 - \delta_2) \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Além disso, a Proposição 2.1 implica que para algum $i \in [n]$ vale que $|\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon_2 \binom{n-1}{k-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i| &\leq |\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'| + |\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon_1 \binom{n-1}{k-1} + \varepsilon_2 \binom{n-1}{k-1} \\ &\leq \varepsilon/2 \binom{n-1}{k-1} + \varepsilon/2 \binom{n-1}{k-1} \\ &= \varepsilon \binom{n-1}{k-1}, \end{aligned}$$

o que completa a prova. $\square$

Novamente, precisamos reescrever a proposição anterior de forma a garantir que os grafos K_n^k são $(\lambda, \mathcal{B})$ -estáveis. O seguinte corolário realiza este objetivo.

Corolário 4.4 Seja $G_n = K_n^k$ o grafo de Kneser com parâmetros n e $k = k(n)$, onde $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$ para alguma constante $\beta > 0$ fixa. Além disso, seja $\mathcal{B}_n(G_n) = \{\mathcal{F}_i \mid i \in [n]\} \subset \mathcal{P}(V(G_n))$, e defina $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então a sequência de grafos $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é $(k/n, \mathcal{B})$ -estável.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 3.9 temos que existe δ e n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ o grafo G_n é $(\lambda, \mathcal{B}_n)$ -estável com respeito a (ε, δ) $\square$

4.2 Transferência

Enquanto a Seção 4.1 tem como objetivo garantir que podemos aplicar a Proposição 3.6 para a família de grafos $\{K_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$, esta seção objetiva demonstrar a Proposição 3.6. A discussão nesta seção será, portanto, para famílias de grafos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ quaisquer.

Conforme mencionado na Seção 3.2, a demonstração da Proposição 3.6 baseia-se num lema estrutural sobre conjuntos independentes em grafos (Lema 3.3). Este lema baseia-se numa técnica introduzida por Kleitman e Winston em [KW82]. Frisamos ainda que ideias muito semelhantes às do Lema 3.3 e dos corolários subsequentes também estão presentes no artigo [KKS98]. Informalmente, ele garante que dado um conjunto independente I em um grafo G , podemos remover alguns poucos vértices de I e obter um conjunto $X \subseteq V(G)$ tal que ou $|X|$ é pequeno ou $G[X]$ possui poucas arestas. Procedemos para a prova do Lema 3.3. Para facilitar a leitura, ele está enunciado novamente aqui.

Lema Seja G um grafo com N vértices, e $\gamma > 0$ um número real qualquer. Além disso, sejam $0 < \ell < t$ inteiros. Então, para cada conjunto independente $I \subset V(G)$ de tamanho exatamente t , existe uma sequência de vértices $x_1, \dots, x_\ell \in I$ e uma sequência de subconjuntos $V(G) \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_\ell$ dependendo somente de $x_1, \dots, x_\ell$ tal que:

- $x_1, \dots, x_i \notin X_i$ para todo $i \leq \ell$,
- $I \setminus \{x_1, \dots, x_i\} \subset X_i$ para todo $i \leq \ell$.

Mais ainda, ao menos uma das duas seguintes é verdadeira:

- (i) $|X_i| \leq \left(1 - 2\gamma \frac{e(G)}{N^2}\right) |X_{i-1}|$ para todo $1 \leq i \leq \ell$, ou
- (ii) $e(G[X_i]) < \gamma \frac{|X_i|^2}{N^2} e(G)$ para algum $1 \leq i \leq \ell$.

Demonstração. Fixe um conjunto independente $I \in \mathcal{I}_G(t)$ ¹. Precisamos definir as sequências $x_1, \dots, x_\ell$ e $X_1, \dots, X_\ell$. Assuma que já escolhemos os elementos $x_1, \dots, x_{i-1} \in I$ e os conjuntos $V(G) = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_{i-1}$ satisfazendo as condições do lema. Observe que inicialmente nenhum elemento foi escolhido, e, por conveniência, defina $X_0 = V(G)$.

Considere uma ordenação $(v_1, \dots, v_{|X_{i-1}|})$ dos vértices de X_{i-1} que satisfaz

$$|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_{|X_{i-1}|}\}| \geq |N(v_j) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_{|X_{i-1}|}\}|$$

para todo $i < |X_{i-1}|$ e todo $j > i$. Tal ordem existe, pois podemos escolher (e remover) repetidamente o vértice de grau maior no grafo remanescente. Chamaremos tal ordem de *ordem máxima* dos elementos em X_{i-1} .

Seja j o menor índice tal que o vértice v_j na ordem máxima de X_{i-1} está contido em I . Tal índice existe, pois, $I \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\} \subseteq X_{i-1}$ e $i-1 < \ell < |I| = t$. Definimos $x_i = v_j$, e seja $S = X_{i-1} \setminus \{v_1, \dots, v_j\}$.

Se $\deg(v_j, S) < 2\gamma|S|e(G)/N^2$ então $X_i = S$. Note que, pela ordem máxima e a definição de v_j , o número de arestas em X_i satisfaz $e(X_i) < \gamma|X_i|^2 e(G)/N^2$. Caso contrário, isto é, caso $\deg(v_j, S) \geq 2\gamma|S|e(G)/N^2$, seja $X_i = S \setminus N(v_j)$. Então,

$$|X_i| \leq |S| - \deg(v_j, S) = \left(1 - 2\gamma \frac{e(G)}{N^2}\right) |S| \leq \left(1 - 2\gamma \frac{e(G)}{N^2}\right) |X_{i-1}|.$$

Finalmente, observe que, pela definição de v_j , sempre vale que $I \setminus \{x_1, \dots, x_i\} \subset X_i$, o que completa a prova. $\square$

O Lema 3.3 se torna muito mais forte quando possuímos informações adicionais sobre o grafo G . O corolário a seguir assume que o grafo G é (λ, γ) -supersaturado. Essencialmente, isto permite decidir qual das duas afirmações sobre os conjuntos X_i devem ser verdadeiras no lema anterior.

¹Lembramos o leitor que $\mathcal{I}_G(t)$ é a família dos subconjuntos independentes de G com exatamente t vértices.

Corolário 4.5 Seja $G = (V, E)$ um grafo (λ, γ) -supersaturado com N vértices e grau médio D , onde $\lambda, \gamma > 0$. Sejam $t \geq 1$ e ℓ inteiros tais que $0 < \ell < t$. Finalmente, defina

$$\nu = \nu(\ell) = \max \left\{ \left(1 - \gamma \frac{D}{N} \right)^\ell, \lambda \right\}.$$

Então, para cada subconjunto independente $I \in \mathcal{I}_G(t)$, existe um subconjunto $L \subset I$ de tamanho ℓ e um conjunto $P(L)$, que depende apenas de L , de tamanho no máximo νN tal que $(I \setminus L) \subset P(L) \subset V(G)$. Além disso, vale que $L \cap P(L) = \emptyset$. Em particular, segue que $|\mathcal{I}_G(t)| \leq \binom{N}{\ell} \binom{\nu N}{t-\ell}$.

Demonstração. Dados $I \in \mathcal{I}_G(t)$, aplicamos o Lema 3.3 para obter sequências de vértices $x_1, \dots, x_\ell$ e conjuntos $V = X_0, X_1, \dots, X_\ell$. Defina $L = \{x_1, \dots, x_\ell\}$ e $P(L) = X_\ell$, e observe que $(I \setminus L) \subset P(L)$ e $L \cap P(L) = \emptyset$.

Se $|X_i| \leq \left(1 - 2\gamma \frac{e(G)}{N^2} \right) |X_{i-1}|$ para todo $i \leq \ell$ então $|P(L)| \leq \left(1 - 2\gamma \frac{e(G)}{N^2} \right)^\ell N$. Em outras palavras, $|P(L)| \leq \left(1 - \gamma \frac{D}{N} \right)^\ell N$. Por outro lado, se $e(X_i) < \gamma \frac{|X_i|^2}{N^2} e(G)$ para algum $i \leq \ell$ então $|P(L)| \leq \lambda N$, já que, por hipótese G é (λ, γ) -supersaturado. Assim, segue que $|P(L)| \leq \nu N$, o que completa a prova. $\square$

Perceba que o corolário acima obtém uma cota superior para o número de conjuntos independentes (de tamanho fixado) em um grafo G . Note também que $\nu(\ell) = \lambda$ sempre que $\ell \geq \frac{N}{\gamma D} \ln \frac{1}{\lambda}$. Caso exista um conjunto independente de tamanho próximo a λN em G , temos pelo menos algo da ordem de $\binom{\lambda N}{t}$ como número de conjuntos independentes de tamanho exatamente t em G . Isto indica que a cota superior do corolário é muito boa (principalmente quando ℓ é pequeno, por exemplo, se ℓ não vai a infinito - ou vai lentamente para infinito - quando o tamanho do grafo vai a infinito). Lembre-se que, como discutimos rapidamente na Seção 2.4, uma cota boa para o número de conjuntos independentes de um certo tamanho, se traduziria, usando a desigualdade de Markov, em uma cota para o maior conjunto independente em um subconjunto aleatório em $V(G)$.

Apesar disso, alguns trechos da Proposição 3.6 (especificamente os itens (ii) e (iii)) exigem que utilizemos a parte estrutural do corolário. Informalmente, se escolhermos ℓ de forma que $\nu(\ell) = \lambda$, o Corolário 4.5 permite afirmar que para obtermos um conjunto independente de tamanho um pouco acima de $\lambda p N$ (em $G[V_p]$, onde $V = V(G_n)$), precisamos primeiro obter ℓ vértices de $V(G)$ em V_p e os restantes estarão em um conjunto bem menor que $V(G)$. Utilizando a desigualdade de Chernoff (Proposição 2.7), podemos garantir que é bastante improvável que estes eventos aconteçam. Detalhes mais precisos serão apresentados durante a demonstração da Proposição 3.6.

Ainda assim, o Corolário 4.5 não é suficiente para demonstrarmos a Proposição 3.6 em toda a sua extensão. Mais precisamente, o item (iv) que trata de estabilidade exige que o grafo G seja $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável. O seguinte corolário do Lema 3.3 é válido para grafos $(\lambda, \mathcal{B})$ -estáveis. Informalmente, a hipótese de $(\lambda, \mathcal{B})$ -estabilidade permite decidir qual das afirmações do Lema 3.3 sobre os conjuntos X_i é verdadeira e obter um X_j que ou é pequeno (de tamanho ligeiramente menor que λN) ou satisfaz

$|X_j \setminus B|$ pequeno (em relação a λN) para algum $B \in \mathcal{B}$. O enunciado preciso e sua demonstração são apresentados a seguir.

Corolário 4.6 Dados $\lambda, \varepsilon, \delta > 0$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$, seja $G = (V, E)$ um grafo com N vértices que é $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável com respeito a (ε, δ) . Dado $t > \ell = \ln \left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda} \right) \frac{N^2}{2\delta e(G)}$. Então, para cada subconjunto independente $I \in \mathcal{I}_G(t)$, existe um subconjunto $L \subset I$ de tamanho ℓ e um conjunto $P(L) \subset V(G)$ que depende apenas de L tal que $(I \setminus L) \subset P(L)$ e $L \cap P(L) = \emptyset$. Mais ainda, ao menos uma das seguintes afirmações é verdadeira.

- $|P(L)| \leq (1 - \delta)\lambda N$, ou
- $|P(L) \setminus B| \leq \varepsilon \lambda N$ para algum $B \in \mathcal{B}$.

Demonstração. Aplicamos o Lema 3.3 no grafo G usando $\gamma = \delta$ para obter uma sequência de vértices $x_1, \dots, x_\ell$ e subconjuntos $X_1, \dots, X_\ell$ com as propriedades desejadas. Seja $L = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Se $|X_i| \leq \left(1 - 2\delta \frac{e(G)}{N^2}\right) |X_{i-1}|$ para todo $i \leq \ell$, então defina $P(L) = X_\ell$. Pela hipótese sobre ℓ , temos que $|P(L)| \leq \left(1 - 2\delta \frac{e(G)}{N^2}\right)^\ell N \leq (1 - \delta)\lambda N$. Caso contrário, escolha o menor índice $j \leq \ell$ tal que $e(G[X_j]) < \delta \frac{|X_j|^2}{N^2} e(G)$, e defina $P(L) = X_j$. Novamente, se $|P(L)| \leq (1 - \delta)\lambda N$, então não há o que fazer. Caso contrário, deduzimos da $(\lambda, \mathcal{B})$ -estabilidade de G que existe um conjunto $B \in \mathcal{B}$ para o qual $|P(L) \setminus B| \leq \varepsilon \lambda N$, o que completa a prova. $\square$

O corolário acima é utilizado na demonstração do item (iv) da Proposição 3.6. Informalmente, podemos utilizar o Corolário 4.6 para estimar a probabilidade de existir um conjunto I em V_p com tamanho pelo menos $(1 - \delta)\lambda p N$ e que é muito diferente de todo $B \in \mathcal{B}$. Assim, I deve conter ℓ elementos em V_p e os outros elementos têm que estar em um conjunto $P(L)$ que ou é ligeiramente menor que λN ou é tal que $|P(L) \setminus B|$ é pequeno (em relação a λN) para algum $B \in \mathcal{B}$. Novamente, utilizando a desigualdade de Chernoff (Proposição 2.7) podemos garantir que é bastante improvável que conjuntos I satisfaçam as propriedades acima. Maiores detalhes serão apresentados durante a demonstração da Proposição 3.6.

Procedemos agora para a demonstração da Proposição 3.6, o resultado abstrato mais importante deste texto. Como já mencionado, utilizaremos o Corolário 4.5 para os itens (i) (usando a desigualdade de Markov) e os itens (ii) e (iii) (usando a desigualdade de Chernoff), e usaremos o Corolário 4.5, juntamente com a desigualdade de Chernoff, para o item (iv). Copiamos o enunciado da proposição aqui para facilitar a leitura.

Proposição Dados $\lambda = \lambda(n)$ e $\gamma = \gamma(n)$ funções que assumem valores em $(0, 1)$, seja $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de grafos, onde cada G_n possui $N = N(n)$ vértices (com $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n) = \infty$) e grau médio $D = D(n)$. Para cada constante $\varepsilon > 0$ existem constantes $C = C(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda sequência de probabilidades $p = p(n) \in (0, 1]$, vale o seguinte. Para um subgrafo induzido aleatório $H_n = G_n[V_p]$, onde $V = V(G_n)$, vale, assintoticamente quase certamente, que:

- (i) Se G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -supersaturado e $D^{-1} \ll p \ll \lambda^\varepsilon(\lambda\gamma D)^{-1}$, então temos que $i(H_n) \leq C\gamma^{-1}D^{-1} \ln(pD)N$ elementos.
- (ii) Se G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -supersaturado e $\lambda^\varepsilon(\lambda\gamma D)^{-1} \ll p \ll (\lambda\gamma D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$, então temos que $i(H_n) \leq C\gamma^{-1}D^{-1} \ln^2(pD)N$ elementos.
- (iii) Se G é $(\lambda(n), \gamma(n))$ -supersaturado e $p \gg (\lambda\gamma D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$, então temos que $i(H_n) \leq (1 + \varepsilon)\lambda pN$ elementos.
- (iv) Se G é $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável e $p \gg (\lambda D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$, então todo subconjunto independente I de H_n com ao menos $(1 - \delta)\lambda pN$ elementos satisfaz $|I \setminus B| \leq \varepsilon \lambda pN$, para algum $B \in \mathcal{B}_n$.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Precisamos obter $C = C(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que as condições do enunciado sejam satisfeitas. Faça

$$C = \max\left\{\frac{2(1 + \varepsilon)}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}, \frac{13 + 10\varepsilon}{c_\varepsilon}\right\},$$

onde c_ε é a constante obtida pela Proposição 2.7. Definiremos δ durante a prova do item correspondente.

Parte (i). Assuma que $D^{-1} \ll p < \lambda^\varepsilon(\lambda\gamma D)^{-1}$, e considere $\ell = (1 + \varepsilon)\frac{N}{\gamma D} \ln(pD)$ e $t = C\frac{N}{\gamma D} \ln(pD)$. Observe que $1 \leq \ell < t$, já que $\gamma \leq 1$, $N \geq D$, $p \gg D^{-1}$ e $1 + \varepsilon < C$. Seja X uma variável aleatória que conta o número de subconjuntos independentes de tamanho exatamente t em H_n , isto é, $X = |\mathcal{I}_{H_n}(t)|$. Provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X] = 0$, o que garante a afirmação pela desigualdade de Markov. Pela escolha dos parâmetros, o Corolário 4.5 se aplica, e obtemos:

$$\mathbb{E}[X] \leq \binom{N}{\ell} \binom{\nu(\ell)N}{t - \ell} p^t,$$

onde $\nu(\ell) = \max\left\{\left(1 - \gamma\frac{D}{N}\right)^\ell, \lambda\right\}$. Primeiro, observe que

$$\binom{N}{\ell} \leq \left(\frac{eN}{\ell}\right)^\ell \leq \left(\frac{e\gamma D}{\ln(pD)}\right)^\ell.$$

Além disso, temos:

$$\binom{\nu(\ell)N}{t - \ell} \leq \left(\frac{e\nu(\ell)N}{t - \ell}\right)^{t - \ell} \leq \left(\frac{e\nu(\ell)\gamma D}{\ln(pD)}\right)^{t - \ell}.$$

Combinando as desigualdades acima e usando o fato de que a escolha de C garante que $\ell \leq \varepsilon t/2$, obtemos:

$$\mathbb{E}[X] \leq \left(\frac{e\gamma p D \nu^{1 - \varepsilon/2}}{\ln(pD)}\right)^t.$$

Caso $\nu(\ell) = \lambda$, obtemos $\mathbb{E}[X] = o(1)$, uma vez que vale, para valores grandes de n , que $e \leq \ln(pD)$, e assim a escolha de p garante que $e\gamma p D \lambda^{1 - \varepsilon/2} / (\ln(pD)) \leq \lambda^{\varepsilon/2}$. Como t vai a infinito (já que $p \gg D^{-1}$), obtemos $\mathbb{E}[X] = o(1)$.

Podemos, portanto, supor que $\nu(\ell) \leq e^{-\ell \gamma \frac{D}{N}} \leq (pD)^{-1-\varepsilon}$. Então obtemos $\nu^{1-\varepsilon/2} \leq (pD)^{-1}$, o que garante que:

$$\mathbb{E}[X] \leq \left(\frac{e\gamma}{\ln(pD)} \right)^t = o(1),$$

pois $\gamma \leq 1$ e $p \gg D^{-1}$. Isto conclui a prova do primeiro item.

Parte (ii). Na primeira parte utilizamos a cota superior para $|\mathcal{I}_G(t)|$ presente no Corolário 4.5. Já na segunda parte utilizaremos a componente estrutural do Corolário 4.5. Além disso, nesta prova escolheremos ℓ para que $\nu(\ell)$ seja um pouco maior que λ . Na Parte (iii) iremos escolher ℓ para que $\nu(\ell) = \lambda$, e esta é a principal diferença entre ambas. Por questões técnicas, teremos que utilizar o fato de que G é $(\lambda(n), \gamma(n)/2)$ -supersaturado, e assim seja $\gamma'(n) = \gamma(n)/2$. Durante a prova da parte (ii), utilizaremos γ' no lugar de γ .

Assuma que $\lambda^\varepsilon(\lambda\gamma'D)^{-1} \ll p \ll (\lambda\gamma'D)^{-1} \ln^2 \frac{1}{\lambda}$. Além disso, seja $\ell = \frac{N}{\gamma'D}(\ln(p\gamma'D) - \ln(\frac{10}{c_\varepsilon} \ln^2(p\gamma'D)))$ e $t = C \frac{N}{\gamma'D} \ln^2(pD)$, onde c_ε é a constante obtida pela Proposição 2.7. Novamente, observe que $1 \leq \ell < t$, pois $\gamma' \leq 1$, $N \geq D$, $p\gamma'D \gg 1$ e $\ln^2(pD) > \ln(p\gamma'D)$. Precisamos obter uma cota superior para a seguinte probabilidade:

$$q = \mathbb{P}[\exists I \subset V_p, |I| = t, I \text{ é um conjunto independente em } G_n].$$

Segue do Corolário 4.5 que para todo $I \in \mathcal{I}_{G_n}(t)$, existe um subconjunto $L \subset I$ de tamanho ℓ para o qual $I \setminus L \subset P(L) \subset V$. Portanto,

$$q \leq \sum_L \mathbb{P}[L \subset V_p \text{ e } |V_p \cap P(L)| \geq t - \ell],$$

onde a soma é feita sobre todos os subconjuntos $L \in \binom{V}{\ell}$ que correspondem a algum subconjunto independente de tamanho t conforme obtido pelo Corolário 4.5. Usando o fato que L e $P(L)$ são disjuntos, obtemos

$$q \leq \sum_L \mathbb{P}[L \subset V_p] \cdot \mathbb{P}[|V_p \cap P(L)| \geq t - \ell].$$

Note que a escolha de ℓ implica que $\nu(\ell) = \left(1 - \gamma' \frac{D}{N}\right)^\ell \geq \lambda$, uma vez que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \gamma' \frac{D}{N}\right)^\ell &\geq \exp\left(-\ln(p\gamma'D) + \ln\left(\frac{10}{c_\varepsilon} \ln^2(p\gamma'D)\right)\right) / 2 \\ &= \frac{5 \ln^2(p\gamma'D)}{c_\varepsilon p \gamma' D}, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade utilizamos que $1 - x \geq e^{-x}/2$ para $0 \leq x \leq 1/2$ e que $0 \leq \gamma' \frac{D}{N} \leq 1/2$. A última desigualdade é consequência da hipótese sobre p . Além disso utilizaremos a seguinte cota superior para $\nu(\ell)$ (consequência das desigualdades $1 - x \leq e^{-x}$ para $x \geq 0$ e $\nu(\ell) \geq \lambda$):

$$\nu(\ell) \leq \frac{10 \ln^2(p\gamma'D)}{c_\varepsilon p \gamma' D}.$$

Na sequência, vamos assumir sem perda de generalidade que $|P(L)| = \nu(\ell)N$ para todo L . Seja $m = \nu(\ell)N$, e defina $X = \sum_{i=1}^m X_i$, onde cada X_i é uma variável aleatória indicadora independente que assume valor 1 com probabilidade p . Por conveniência, defina $\mu = \mathbb{E}[X] = pm$. Pelas escolhas de t , ℓ , p e pela cota superior para $\nu(\ell)$, temos que $t - \ell \geq (1 + \varepsilon)\nu(\ell)pN = (1 + \varepsilon)\mu$. Como consequência, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|V_p \cap P(L)| \geq t - \ell] &= \mathbb{P}[X \geq t - \ell] \\ &\leq \mathbb{P}[X \geq (1 + \varepsilon)\mu] \\ &\leq \mathbb{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon\mu], \end{aligned}$$

o que, pela Proposição 2.7 é no máximo $2 \cdot \exp(-c_\varepsilon p \nu(\ell)N)$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} q &\leq \binom{N}{\ell} \cdot p^\ell \cdot 2 \exp(-c_\varepsilon p \nu(\ell)N) \\ &\leq \left(\frac{eNp}{\ell}\right)^\ell 2 \cdot \exp(-c_\varepsilon p \lambda N) \\ &= 2 \cdot \exp\left(\ell \cdot \ln\left(\frac{eNp}{\ell}\right) - c_\varepsilon p \nu(\ell)N\right). \end{aligned}$$

Novamente, pelas escolhas de ℓ e p e pela cota inferior em $\nu(\ell)$, podemos verificar que o último termo acima converge a zero quando $n \rightarrow \infty$, o que completa a prova.

Parte (iii). Assim como na parte (ii), utilizamos a componente estrutural do Corolário 4.5 na prova da parte (iii). Esta prova é bastante similar à anterior, mas os cálculos são bem mais simples. A principal diferença é que escolhemos ℓ para que $\nu(\ell) = \lambda$. Assuma que $p > C(\lambda\gamma D)^{-1} \ln^2(\frac{1}{\lambda})$. Defina $t = (1 + \varepsilon)p\lambda N$, e $\ell = \frac{N}{\gamma D} \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Nossa escolha de p implica que $1 \leq \ell < t$. Novamente, queremos uma cota superior para a seguinte probabilidade:

$$q = \mathbb{P}[\exists I \subset V_p, |I| = t, I \text{ é um conjunto independente em } G_n].$$

Do Corolário 4.5 segue que para todo $I \in \mathcal{I}_{G_n}(t)$, existe um subconjunto $L \subset I$ de tamanho ℓ para o qual $(I \setminus L) \subset P(L) \subset V$. Portanto,

$$q \leq \sum_L \mathbb{P}[L \subset V_p \text{ e } |V_p \cap P(L)| \geq t - \ell],$$

onde a soma é tomada sobre todos os subconjuntos $L \in \binom{V}{\ell}$ que correspondem a algum conjunto independente de tamanho t conforme obtido pelo Corolário 4.5. Usando o fato de que L e $P(L)$ são disjuntos, obtemos

$$q \leq \sum_L \mathbb{P}[L \subset V_p] \cdot \mathbb{P}[|V_p \cap P(L)| \geq t - \ell].$$

Além disso, pela escolha de ℓ , segue que $\nu(\ell) = \lambda$. Portanto, para qualquer L , temos que $|P(L)| \leq \nu(\ell)N \leq \lambda N$. Para o resto da prova, podemos assumir sem perda de generalidade que $|P(L)| = \lambda N$ para todo L . Seja $m = \lambda N$, e defina $X = \sum_{i=1}^m X_i$,

onde cada X_i é uma variável aleatória indicadora independente que assume valor 1 com probabilidade p . Por conveniência, seja $\mu = \mathbb{E}[X] = pm$. Nossa escolha de ℓ e p implica que $\ell \leq (\varepsilon/2)p\lambda N$. Como consequência, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|V_p \cap P(L)| \geq t - \ell] &= \mathbb{P}[X \geq (1 + \varepsilon)p\lambda N - \ell] \\ &\leq \mathbb{P}[X \geq (1 + \varepsilon/2)p\lambda N] \\ &\leq \mathbb{P}[|X - \mu| \geq (\varepsilon/2)\mu], \end{aligned}$$

e pela Proposição 2.7 o último termo é no máximo $2 \cdot \exp(-c_\varepsilon p\lambda N)$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned} q &\leq \binom{N}{\ell} \cdot p^\ell \cdot 2 \exp(-c_\varepsilon p\lambda N) \\ &\leq \left(\frac{eNp}{\ell}\right)^\ell 2 \cdot \exp(-c_\varepsilon p\lambda N) \\ &= 2 \cdot \exp\left(\ell \cdot \ln\left(\frac{eNp}{\ell}\right) - c_\varepsilon p\lambda N\right). \end{aligned}$$

Pela escolha de ℓ e p , é possível verificar que tal valor converge a zero quando $n \rightarrow \infty$, o que completa a prova.

Parte (iv). Esta prova depende do Corolário 4.6. Como $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável, dado $\varepsilon/2$ existe um $\delta' > 0$ tal que, para todo n suficientemente grande, qualquer subconjunto $S \subset V(G_n)$ de tamanho ao menos $(1 - \delta')\lambda N$ contém pelo menos $\delta'|S|^2 e(G_n)/N^2$ arestas ou satisfaz $|S \setminus B| \leq \varepsilon\lambda N/2$ para algum $B \in \mathcal{B}_n$. Escolhemos $\delta = \delta'/4$, e definimos c_δ e $c_{\varepsilon/2}$ como as constantes obtidas pela Proposição 2.7, aplicadas com δ e $\varepsilon/2$ respectivamente. Também, defina $c = \min\{c_\delta, c_{\varepsilon/2}\}$, e escolha $C_2 = \max\{3/c, 1/\delta\}$. Provaremos a afirmação para $C = C_2$, e perceba que, assim, a afirmação é verdadeira para todo $C \geq C_2$. Para completar a prova basta fazer $C = \max\{C_1, C_2\}$.

Seja $\mathcal{T} = \{I \in \mathcal{I}_{G_n} : |I| > (1 - \delta)\lambda pN \text{ e } |I \setminus B| > \varepsilon\lambda pN \text{ para todo } B \in \mathcal{B}_n\}$. Nosso objetivo é mostrar que

$$q_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}[\text{Existe um conjunto independente } I \subset V_p \text{ com } I \in \mathcal{T}]$$

converge a zero quando n vai a infinito.

Lembre-se da escolha de δ e veja que podemos assumir n é grande o suficiente para que G_n é $(\lambda, \mathcal{B}_n)$ -estável com respeito a $(\varepsilon/2, 4\delta)$. Aplicamos o Corolário 4.6 com $\varepsilon/2$, 4δ , $t = (1 - 4\delta)\lambda pN$ e $\ell = \frac{N}{4\delta D} \ln \frac{1}{\lambda(1-4\delta)} \leq \delta\lambda pN$ para concluir que para todo conjunto $I \in \mathcal{T}$ existe algum $L = L(I)$ de tamanho ℓ e algum $P(L) \subset V(G_n)$ (que depende apenas de L) disjunto de L tal que $I \setminus L \subset P(L)$. Portanto, se existe algum I em V_p com $I \in \mathcal{T}$ então devemos ter

1. $L \subset V_p$ e
2. $|P(L) \cap V_p| \geq (1 - \delta)p\lambda N - \ell \geq (1 - 2\delta)p\lambda N$ e
 $|P(L) \setminus B| \cap V_p| > \varepsilon\lambda pN$ para todo $B \in \mathcal{B}_n$.

Como L e $P(L)$ são disjuntos temos que $q_{\mathcal{T}} \leq \sum_{L \in \binom{N}{\ell}} \mathbb{P}[L \subset V_p] \cdot q_{P(L)}$ onde $q_{P(L)}$ é a probabilidade de que o evento (2) aconteça.

Pelo Corolário 4.6 e os parâmetros escolhidos obtemos que $|P(L)| \leq (1 - 4\delta)\lambda N$ ou $|P(L) \setminus B| \leq \varepsilon\lambda N/2$ para algum $B \in \mathcal{B}_n$. Se $|P(L)| \leq (1 - 4\delta)\lambda N$ então, pela desigualdade de Chernoff (Proposição 2.7), obtemos

$$\mathbb{P}[|P(L) \cap V_p| \geq (1 - 2\delta)p\lambda N] \leq \exp\{-c_\delta\lambda pN\},$$

e de maneira semelhante, se $|P(L) \setminus B| \leq \varepsilon\lambda N/2$ para algum $B \in \mathcal{B}_n$, então temos que

$$\mathbb{P}[|(P(L) \setminus B) \cap V_p| > \varepsilon\lambda pN \text{ para todo } B \in \mathcal{B}_n] \leq \exp\{-c_{\varepsilon/2}\lambda pN\}.$$

Como $c = \min\{c_\delta, c_{\varepsilon/2}\}$, obtemos que $q_{P(L)} \leq 2\exp\{-c\lambda pN\}$ e combinando-a com

$$\sum_{L \in \binom{N}{\ell}} \mathbb{P}[L \subset V_p] \leq \left(\frac{epN}{\ell}\right)^\ell \leq \exp\{\ell + \ell \ln(4\delta pD)\}$$

obtemos

$$q_{\mathcal{T}} \leq 2\exp\{-c\lambda pN + \ell + \ell \ln(4\delta pD)\},$$

que converge a zero quando n vai a infinito. □

A Proposição 3.6 cobre todos os casos do Teorema 3.1, exceto o Caso 1 (que é mais simples) e o Caso 2.3 que corresponde a obtermos um conjunto independente de tamanho $(1 + o(1))D^{-1} \ln(pD)N$ no grafo $K_n^k(p)$. Dada uma família de grafos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o lema a seguir garante condições sobre p para as quais os subgrafos aleatórios $H_n = G_n[V_p]$ possuem, assintoticamente quase certamente, um subconjunto independente de tamanho $(1 + o(1))D^{-1} \ln(pD)N$. Perceba que a cota de p obtida depende do número de triângulos nos grafos G_n . Isto é consequência do uso da Proposição 2.4 na demonstração. Como tal proposição exige que o grafo seja livre de triângulos, precisamos eliminar alguns (poucos) vértices do grafo H_n para eliminar todos os triângulos. Caso o grafo H_n tenha triângulos demais, não será possível eliminar todos eles. Este fato é a razão para o Caso 2.3 exigir que $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$. Caso $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ o grafo K_n^k (e consequentemente o grafo $K_n^k(p)$) terá muitos triângulos.

Lema 4.7 Seja $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de grafos regulares com $N = N(n)$ vértices e grau $D = D(n)$, onde $D \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, seja $T = T(n)$ o número de triângulos em G_n . Finalmente, seja $p = p(n)$ uma sequência de probabilidades satisfazendo $D^{-1} \ll p \ll (N/T)^{1/2}$, e considere um subgrafo aleatório induzido $H_n = G_n[V_p]$, onde $V = V(G_n)$. Então, assintoticamente quase certamente, H_n contém um conjunto independente de tamanho $(1 + o(1))D^{-1} \ln(pD)N$.

Demonstração. Aplicaremos a Proposição 2.4 para obter um conjunto independente de tamanho $(1 + o(1))(N/D) \ln(pD)$. Como tal proposição exige que o grafo seja livre de triângulos, teremos que remover alguns vértices de H_n para obter um grafo

livre de triângulos. Além disso, precisamos de uma cota no número de vértices e no grau médio de H_n .

Vamos estimar o número de vértices em H_n . Seja X uma variável aleatória que conta o número de vértices em H_n . Claramente, $\mathbb{E}[X] = pN$. Pela Proposição 2.7 existe uma constante $c_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq \varepsilon pN) \leq 2 \exp(-c_\varepsilon pN).$$

Pela escolha de p , vale, com probabilidade alta, que $X = (1 + o(1))pN$.

Agora, vamos estimar o grau médio em H_n . Aplicaremos a desigualdade de Chebyshev. Seja Y uma variável aleatória que conta o número de arestas em H_n . É fácil verificar que $\mathbb{E}[Y] = p^2 ND/2$ e que $\text{Var}[Y] \leq 2p^3 N^2 D + p^2 ND$. Dado $\varepsilon > 0$ pequeno, sabemos, por Chebyshev, que

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| \leq \varepsilon p^2 ND) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{\varepsilon^2 p^4 N^2 D^2}.$$

Nossa escolha de p implica que a probabilidade acima converge a zero. Combinando esta com a expressão anterior, observamos que o grau médio de H_n é $(1 + o(1))pD$ com probabilidade converge a 1 quando ε converge a zero.

O número esperado de triângulos em H_n é Tp^3 , que é muito menor que pN pois $p \ll (N/T)^{1/2}$. Assim, com probabilidade convergindo a 1, o número de triângulos em H_n é $o(pN)$. Isto implica que podemos remover $o(pN)$ vértices de H_n e obter um grafo livre de triângulos H . Portanto, H possui $(1 + o(1))pN$ vértices. Mais ainda, o grau médio em H é menor que $(1 + o(1))pD$. Pela Proposição 2.4, obtemos um conjunto independente I dentro de H com tamanho $(1 + o(1))(N/D) \ln pD$. $\square$

4.3 Prova do Teorema 3.1

Esta seção encerra a discussão deste capítulo apresentando a demonstração do Teorema 3.1. Conforme mencionado, esta prova utiliza a Proposição 3.6 para os Casos 2.1, 2.2, 3 e a parte sobre estabilidade, e utiliza o Lema 4.7 para o Caso 2.3. De fato, como as hipóteses da Proposição 3.6 já foram provadas (para os grafos de Kneser K_n^k) na Seção 4.1, a demonstração a seguir apenas reúne todos os resultados apresentados até agora e ajusta a notação. Nenhuma ideia realmente nova é apresentada (a menos das demonstrações das cotas inferiores para $i(\mathcal{V}_p^k)$ - que são bem mais simples). Para facilitar a leitura, reenunciamos o Teorema 3.1 a seguir.

Teorema Seja $p = p(n) \in (0, 1]$, $k = k(n)$, onde $2 \leq k \leq n/2$. Defina $N = \binom{n}{k}$ e $D = \binom{n-k}{k}$. Fixe constantes suficientemente pequenas $\delta, \varepsilon > 0$. Então assintoticamente quase certamente:

- 1. $i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))pN$ se $N^{-1} \ll p \ll D^{-1}$,
- 2.1. $i(K_n^k(p)) = O_\delta(D^{-1} \ln(pD)N)$ se $D^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta} D^{-1}$,
- 2.2. $i(K_n^k(p)) = O_\delta(D^{-1} \ln^2(pD)N)$ se $(n/k)^{1-\delta} D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln^2(n/k) D^{-1}$,

$$2.3. \ i(K_n^k(p)) \geq (1 + o(1))D^{-1} \ln(pD)N \quad \text{se } D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n/k)D^{-1} \\ \text{e } k \geq n^{1/2+\varepsilon},$$

$$3. \ i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))p(k/n)N \quad \text{se } p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}.$$

Além disso, se $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$ para alguma constante $\beta > 0$, e $p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$, então vale estabilidade. Em outras palavras, para qualquer $\varepsilon_1 > 0$ existe uma constante $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ tal que, assintoticamente quase certamente, para toda família intersectante $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_p^k$ de tamanho ao menos $(1 - \delta_1)p(k/n)N$ existe um $i \in [n]$ tal que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i| \leq \varepsilon_1 p(k/n)N$.

Demonstração. Seja $G_n = K_n^k$, e lembre-se que G_n é um grafo D -regular com N vértices. Além disso, seja $H_n = G_n[V_p]$, onde $V = V(G_n)$, e cada vértice de V é incluído em V_p independentemente com probabilidade p . Usando esta notação, para obter cotas para o número $i(\mathcal{V}_p^k)$ é suficiente estudar o tamanho do maior subconjunto independente no grafo aleatório H_n . Analisaremos os casos separadamente.

Caso 1. Assuma que $N^{-1} \ll p \ll D^{-1}$. Como $p \gg N^{-1}$, segue da Proposição 2.7 que assintoticamente quase certamente vale $|V_p| = (1 + o(1))pN$, o que prova a cota superior. Por outro lado, observe que o número esperado de arestas em H_n é $NDp^2/2$. Para qualquer função crescente $\eta(n) \rightarrow \infty$, segue da desigualdade de Markov que assintoticamente quase certamente o grafo H_n possui no máximo $\eta(n)2NDp^2$ arestas. Como $p \ll D^{-1}$, podemos escolher $\eta(n)$ tal que $p \ll (\eta(n)D)^{-1}$. Daí, obtemos $|E(H_n)| \ll pN$. Em particular, para valores grandes de n , o subgrafo aleatório H_n possui, assintoticamente quase certamente, no máximo $o(pN)$ arestas. Deletando no máximo este número de vértices de H_n , obtemos um conjunto independente de tamanho pelo menos $(1 + o(1))pN$, o que prova a cota inferior.

Caso 2.1. Assuma que $D^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta}D^{-1}$. Observe que o Caso 2 é válido apenas se $k \ll n$. Faça $\varepsilon' = \delta$. Além disso, seja $\tau(n) = \varepsilon'$, e observe que segue do Corolário 4.3 que G_n é um grafo (λ, γ) -supersaturado, onde $\lambda = (1 + \tau)(k/n)$, e $\gamma = \tau/(1 + \tau)$. É fácil verificar que estas funções satisfazem as hipóteses da Proposição 3.6. Mais ainda, usando nossa hipótese sobre p , obtemos $D^{-1} \ll p \ll \lambda^{\varepsilon'}(\lambda\gamma D)^{-1}$. Portanto, aplique a Proposição 3.6 com ε' para obter constantes C' e δ' . Pelo item (i) o maior subconjunto independente em H_n tem tamanho, a.q.c., no máximo $C' \frac{N}{\gamma D} \ln(pD)$ e, portanto, tamanho no máximo $O_\delta(D^{-1} \ln(pD)N)$, já que C' depende apenas de $\varepsilon' = \delta$.

Caso 2.2. Assuma que $(n/k)^{1-\delta}D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$. Novamente, note que este caso é válido apenas se $k \ll n$. Defina $\tau(n) = \varepsilon'$ (onde $\varepsilon' = \delta$), e observe que segue do Corolário 4.3 que G_n é um grafo (λ, γ) -supersaturado, onde $\lambda = (1 + \tau)(k/n)$, e $\gamma = \tau/(1 + \tau)$. Nossas hipóteses implicam que $\lambda^{\varepsilon'}(\lambda\gamma D)^{-1} \ll p \ll (\lambda\gamma D)^{-1} \ln^2(\frac{1}{\lambda})$. Portanto, aplicando a Proposição 3.6 com ε' obtemos constantes C' e δ' . Pelo item (ii) o maior conjunto independente em H_n tem tamanho, a.q.c., no máximo $C' \frac{N}{\gamma D} \ln^2(pD)$

e, portanto, tamanho no máximo $O_\delta(D^{-1} \ln^2(pD)N)$.

Caso 2.3. Assuma que $D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n/k)D^{-1}$ e $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$. Aplicaremos o Lema 4.7 à sequência de grafos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Note que o número de vértices é $N = \binom{n}{k}$, o grau médio é $D = \binom{n-k}{k}$ e o número de triângulos é $T = \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} \binom{n-2k}{k}$. O subgrafo aleatório de G_n é H_n e, do Lema 4.7, obtemos um conjunto independente de tamanho $(1 + o(1))(N/D) \ln(pD)$, desde que $p \ll (N/T)^{1/2}$. Para completar a prova, é suficiente verificar que $(n/k) \ln(n/k)D^{-1} \ll (N/T)^{1/2}$. Isto é equivalente a $(n/k) \ln(n/k)D^{-1/2} \ll \binom{n-2k}{k}^{-1/2}$, que é verdadeiro pela hipótese sobre k .

Caso 3. Assuma que $p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$. Novamente, dado $\varepsilon' > 0$, defina $\tau(n) = \varepsilon'$, e observe que segue do Corolário 4.3 que G_n é um grafo (λ, γ) -supersaturado, onde $\lambda = (1 + \tau)(k/n)$, e $\gamma = \tau/(1 + \tau)$. Além disso, das definições e hipótese sobre p , obtemos $p \gg (\gamma \lambda D)^{-1} \ln^2(1/\lambda)$. Assim, aplique a Proposição 3.6 com ε' para obter constantes C' e δ' . Pelo item (iii), obtemos a.q.c. que o maior subconjunto independente de H_n tem tamanho no máximo $(1 + \varepsilon')p(k/n)N$. Para obter a cota inferior, fixe um dos maiores subconjuntos independentes $I \subset V(G_n)$. Como $|I| = (k/n)N$, a Proposição 2.7 implica que

$$\mathbb{P}[|I \cap V_p| < (1 - \varepsilon')p(k/n)N] \leq 2 \cdot \exp(-c_{\varepsilon'} p(k/n)N).$$

Observe que esta probabilidade converge a 0 desde que $p \gg (n/k)N^{-1}$, o que é satisfeito pela hipótese $p \gg (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$. Em outras palavras, a.q.c. o grafo H_n contém um subconjunto independente de tamanho pelo menos $(1 - \varepsilon')p(k/n)N$. Como as cotas inferior e superior para $i(H_n)$ são verdadeiras para todo ε' , concluímos que a.q.c. $i(H_n) = (1 + o(1))p(k/n)N$.

Estabilidade para k linear. Para completar a prova do Teorema 3.1, assuma que $\beta n \leq k \leq (1/2 - \beta)n$ para algum $\beta > 0$ fixo. Faça $\lambda = k/n$. Além disso, dado n , seja $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todas as maiores famílias intersectantes (isto é, as famílias $\mathcal{F}_i$, para $i = 1, \dots, n$, na qual todo elemento de $\mathcal{F}_i$ contém i). Pelo Corolário 4.4, a família $\{G_n\}$ é $(\lambda, \mathcal{B})$ -estável (onde $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Dado ε_1 , aplique a Proposição 3.6 para obter constantes C e δ_1 . Pelo item (iv) da Proposição 3.6, obtemos o resultado desejado. $\square$

Capítulo 5

Resultado de Balogh, Bohman e Mubayi

Neste capítulo iremos apresentar o resultado principal obtido por Balogh, Bohman e Mubayi em [BBM09]. O principal objetivo é apresentar uma visão diferente da discutida até aqui. Nosso trabalho consistiu, prioritariamente, em estudar o problema de determinar o tamanho da maior família intersectante em um subconjunto aleatório de $\mathcal{V}^k = \binom{A^n}{k}$. Balogh, Bohman e Mubayi, em contrapartida, estudaram características estruturais das maiores famílias intersectantes de $\mathcal{V}_p^k$. De certa forma, enquanto o nosso resultado tenta traduzir a informação (do Teorema 1.1) de que $i(\mathcal{V}^k) = \binom{n-1}{k-1}$ para o caso esparsa, o trabalho de Balogh, Bohman e Mubayi têm como objetivo traduzir a informação (do Teorema 1.1) de que as famílias principais são as maiores famílias intersectantes para o caso esparsa.

Além de apresentar o resultado principal de [BBM09], faremos uma comparação entre ele e o Teorema 3.1. Naturalmente, um resultado que descreve algumas características estruturais dos maiores conjuntos independentes de um grafo tende a ser mais forte que um resultado que apenas apresente cotas para os tamanhos de tais conjuntos independentes (por exemplo, a afirmação de que as famílias principais são as maiores intersectantes é mais forte que a afirmação de que $i(\mathcal{V}^k) = \binom{n-1}{k-1}$). Ainda assim, o resultado de Balogh, Bohman e Mubayi só é válido para valores de $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$, o que torna o resultado do Teorema 3.1 um complemento ao teorema principal de [BBM09]. Prosseguimos, assim, para o resultado principal de [BBM09]. Vamos utilizar uma linguagem ligeiramente diferente da apresentada originalmente no artigo.

Sejam n e k inteiros positivos e A^n um conjunto com n elementos. Novamente, iremos considerar o grafo de Kneser K_n^k que codifica os k -subconjuntos de A^n . Lembremos que $V(K_n^k) = \binom{A^n}{k}$ e que dois vértices estão ligados se os k -subconjuntos correspondentes são disjuntos. Lembre-se também da relação entre conjuntos independentes no grafo de Kneser e famílias intersectantes em A^n . Além disso, recorde que denotamos o número de vértices de K_n^k por $N = \binom{n}{k}$ e o grau de cada vértice por $D = \binom{n-k}{k}$.

Neste capítulo, além da noção já apresentada de famílias principais (denotadas

por $\mathcal{F}_i$), vamos destacar um outro tipo de famílias intersectantes que chamaremos de triviais. Uma família intersectante $\mathcal{F}$ é dita *trivial* se todos os seus k -subconjuntos possuem um elemento comum. Em outras palavras, $\mathcal{F}$ é trivial se, para algum i , vale que se $B \in \mathcal{F}$ então $i \in B$. Observe que as famílias triviais são necessariamente subfamílias de alguma $\mathcal{F}_i$. Seguindo nossa nomenclatura usual, chamaremos conjuntos independentes (de K_n^k) de triviais quando a família correspondente for dita trivial.

Dado um real p , tal que $0 \leq p \leq 1$, a versão esparsa de Erdős, Ko e Rado corresponde a estudar os conjuntos independentes em um subconjunto aleatório $\mathcal{V}_p^k$ de $\mathcal{V}^k$. Assim, lembramos que é útil considerar o subgrafo $K_n^k(p)$ do grafo de Kneser K_n^k induzido pelo conjunto $\mathcal{V}_p^k$. Isto é, os vértices de $K_n^k(p)$ são escolhidos independentemente com probabilidade p , e dois vértices escolhidos estão ligados se e somente se estivessem conectados no K_n^k original.

Como já informamos, este capítulo não têm como foco determinar a evolução de $i(K_n^k(p))$. Ao invés disso, vamos estudar características estruturais dos maiores conjuntos independentes do grafo $K_n^k(p)$. É natural esperar que as propriedades desses conjuntos sejam satisfeitas de maneira assintótica, e assim diremos que o grafo $K_n^k(p)$ satisfaz uma propriedade S , se ele satisfaz S assintoticamente quase certamente.

A seguir, definimos o que é satisfazer a propriedade de Erdős-Ko-Rado, conforme a definição de [BBM09]. Esta propriedade tenta caracterizar se os maiores conjuntos independentes de $K_n^k(p)$ são todos triviais (como definido acima), se apenas alguns são triviais ou se nenhum deles é trivial.

Definição 5.1 Seja G um subgrafo induzido de K_n^k . Defina $i(G)$ como a maior quantidade de elementos em um conjunto independente de G . Dizemos que G satisfaz *EKR (forte)* se $i(G)$ é atingida apenas por conjuntos independentes triviais em G . Se $i(G)$ é atingida por um conjunto independente trivial, mas também possivelmente por outros não triviais, então dizemos que G satisfaz *EKR fraco*.

Esta definição é relevante porque as famílias principais $\mathcal{F}_i$ geram famílias intersectantes (triviais) em $\mathcal{V}_p^k$ (apenas alguns elementos de $\mathcal{F}_i$ estarão presentes em $\mathcal{V}_p^k$). Como as famílias principais contêm todas as triviais, se o grafo $K_n^k(p)$ satisfaz EKR então suas maiores famílias intersectantes são as maiores famílias principais em $\mathcal{V}_p^k$. Como o teorema original de Erdős-Ko-Rado afirma que, se $n > 2k$, todos os maiores conjuntos independentes do grafo K_n^k (ou $K_n^k(p)$ com $p = 1$) são principais, a definição acima, é equivalente ao grafo K_n^k satisfazer a propriedade EKR (forte). De certa forma, satisfazer EKR é equivalente a valer o teorema de Erdős-Ko-Rado no grafo em questão. Portanto, podemos fazer a seguinte pergunta: para quais funções $p = p(n)$, o grafo $K_n^k(p)$ satisfaz EKR (a.q.c.)?

O teorema principal de [BBM09] responde esta pergunta de forma bastante satisfatória para valores de $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$, para algum $\varepsilon > 0$. Em síntese, o teorema garante que o grafo $K_n^k(p)$ satisfaz EKR:

- (i) quando $k \ll n^{1/4}$ (independente do valor de p),
- (ii) quando $n^{1/4} \ll k \ll n^{1/3}$ e $p \ll (n/k^2)N^{-1}$ ou $(n^{3/4}/k)N^{-1} \ll p$,

(iii) quando $n^{1/3} \ll k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ e $p \gg (n/k)N^{-1}$ (para algum $\varepsilon > 0$).

Além disso, o teorema trata da propriedade EKR fraca e de algumas faixas de p e k na qual não vale EKR (ou mesmo EKR fraco). O enunciado completo está apresentado a seguir.

Teorema 5.2 (Balogh, Bohman, Mubayi [BBM09]). Seja $p = p(n) \in [0, 1]$ uma sequência de reais e $0 < \epsilon < 1/3$ uma constante fixada.

- (i) Se $k \ll n^{1/4}$ então $K_n^k(p)$ satisfaz EKR.
- (ii) Se $k \ll n^{1/3}$ então $K_n^k(p)$ satisfaz EKR fraco. Além disso, se $n^{1/4} \ll k \ll n^{1/3}$ então $K_n^k(p)$ satisfaz EKR se $p \ll (n/k^2)N^{-1}$ ou $(n^{3/4}/k)N^{-1} \ll p$; e não satisfaz EKR se $(n/k^2)N^{-1} \ll p \ll (n^{3/4}/k)N^{-1}$.
- (iii) Na faixa $n^{1/3} \leq k \leq n^{2/3-\epsilon}$, vale o seguinte resultado negativo: para todo inteiro positivo t , se $n^{1/2-1/(2t)} \ll k$, e

$$(n^{(t-1)/2}/k^{t-1})N^{-1} \ll p \ll (n^{1-1/t}/k)N^{-1}$$

então $K_n^k(p)$ não satisfaz EKR. Se $n^{(1/2)(1-(t-1)/(t+1)(t-2))} \ll k$ e

$$(n^{(t-1)/2}/k^{t-1})N^{-1} \ll p \ll (n^{1-1/(t+1)}/k)N^{-1}$$

então $K_n^k(p)$ não satisfaz EKR fraco.

- (iv) Se $k \leq n^{1/2-\epsilon}$ e $p \gg (n/k)N^{-1}$, então $K_n^k(p)$ satisfaz EKR.

Como comentamos antes, do fato de que as famílias principais contém todas as triviais, podemos concluir que se $K_n^k(p)$ satisfaz EKR, então seus maiores conjuntos independentes têm a forma $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k$, para os valores de i em que $\mathcal{F}_i$ possuir mais elementos em $\mathcal{V}_p^k$. Assim, podemos entender que o teorema acima garante umas faixas de p e k na qual sabemos precisamente como são os maiores conjuntos independentes de $K_n^k(p)$. Nas faixas de p e k onde vale EKR fraco, sabemos ao menos que um dos conjuntos independentes é da forma $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k$. Na faixa onde EKR fraco não vale, sabemos que os maiores conjuntos independentes do grafo não provém das famílias principais.

Veja que, quando $K_n^k(p)$ satisfaz EKR (ou EKR fraco), podemos usar o fato de que os maiores conjuntos independentes são da forma $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k$, para estimar o valor de $i(K_n^k(p))$ (por exemplo, estudando as variáveis aleatórias $X_i = |\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k|$). Assim, a propriedade EKR (ou EKR fraco) não só traz informação sobre a estrutura dos maiores conjuntos independentes, como também traz informação sobre seu tamanho. Esta observação será utilizada na próxima seção, quando iremos comparar os Teoremas 3.1 e 5.2.

5.1 Comparando os Teoremas 3.1 e 5.2

Lembre-se que, na Seção 2.4, demonstramos a Afirmação 2.8 sobre o tamanho das famílias principais em $\mathcal{V}_p^k$, utilizando a Proposição 2.7. Tal afirmação garante uma

Tabela 5.1: Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $k \ll n^{1/4}$.

Faixa de p	$i(K_n^k(p))$	EKR
$p \ll N^{-1}$	Sem informação	Forte
$N^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta} N^{-1}$	$O_\delta(\ln(pD))$	Forte
$(n/k)^{1-\delta} N^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n) N^{-1}$	$O_\delta(\ln^2(pD))$	Forte
$(n/k) \ln(n) N^{-1} \ll p$	$(1 + o(1))p(k/n)N$	Forte

cota inferior simples para $i(K_n^k(p))$ quando o valor de p não é muito pequeno (recorde que $i(\mathcal{V}_p^k) = i(K_n^k(p))$). A partir desta afirmação (e das observações anteriores que relacionam $i(K_n^k(p))$ com a propriedade EKR fraco) é possível concluir o seguinte corolário do Teorema 5.2.

Corolário 5.3 Dada $k = k(n)$ uma sequência de inteiros positivos satisfazendo $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ (para algum $\varepsilon > 0$) e $p = p(n)$ uma sequência de reais entre 0 e 1 tal que $p \gg (n/k) \ln(n) N^{-1}$. Então assintoticamente quase certamente:

$$i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))p(k/n)N.$$

Demonstração. Utilizando a Afirmação 2.8 concluímos que as variáveis aleatórias $X_i = |\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}_p^k|$ são, assintoticamente quase certamente, iguais a $(1 + o(1))(k/n)pN$. Pelo item (iv) do Teorema 5.2, concluímos que o grafo $K_n^k(p)$ satisfaz EKR, e portanto $i(K_n^k(p))$ é dado pelo maior valor das variáveis aleatórias X_i . Como consequência, $i(K_n^k(p)) = (1 + o(1))p(k/n)N$. $\square$

Observe que o Corolário 5.3 é mais forte que o Caso 3 do Teorema 3.1, quando $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$, uma vez que lá exigimos um fator $\ln(n/k)$ a mais¹ (N e D , neste caso, são praticamente iguais). É por esta razão que dissemos que o Teorema 5.2 era mais forte que o Teorema 3.1 no caso em que $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$. Não só o Teorema 5.2 garante propriedades estruturais sobre os maiores conjuntos independentes, como a partir desta informação podemos concluir o caso principal do Teorema 3.1 (quando $k \leq n^{1/2-\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$).

Por outro lado, o Teorema 5.2 não pode ser aplicado no caso em que $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$. Neste caso, então o Corolário 3.2 do Teorema 3.1 nos traz bastante informação sobre o comportamento das maiores famílias intersectantes em $\mathcal{V}_p^k$. Em particular, o Caso 2.3 do Teorema 3.1 garante que a propriedade EKR fraco não é verdadeira na faixa de p entre D^{-1} e $(n/k) \ln(n/k) D^{-1}$ e para $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$. Isto segue a partir da Afirmação 2.8, do Caso 2.3 do Teorema 3.1 e do fato de que $p \gg D^{-1}$ implica que $p \gg (n/k) \ln(n) N^{-1}$ nesta faixa de k .

Apresentamos, a seguir, quatro tabelas que resumem as informações obtidas pelos Teoremas 3.1 e 5.2.

¹De fato, é possível fazer uma análise mais cuidadosa da demonstração do item (iii) da Proposição 3.6 e eliminar o fator $\ln(n/k)$ a mais. Essencialmente, como N e D são quase iguais neste caso, é possível escolher um ℓ constante(!) e, ainda assim, obter $\nu(\ell) = \lambda$. De qualquer forma, o Teorema 5.2 implica um dos casos do Teorema 3.1.

Tabela 5.2: Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $n^{1/4} \ll k \ll n^{1/3}$.

Faixa de p	$i(K_n^k(p))$	EKR
$p \ll N^{-1}$	Sem informação	Forte
$N^{-1} \ll p \ll (n/k^2)N^{-1}$	$O_\delta(\ln(pD))$	Forte
$(n/k^2)N^{-1} \ll p \ll (n^{3/4}/k)N^{-1}$	$O_\delta(\ln(pD))$	Fraco
$(n^{3/4}/k)N^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta}N^{-1}$	$O_\delta(\ln(pD))$	Forte
$(n/k)^{1-\delta}N^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n)N^{-1}$	$O_\delta(\ln^2(pD))$	Forte
$(n/k) \ln(n)N^{-1} \ll p$	$(1 + o(1))p(k/n)N$	Forte

Tabela 5.3: Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $n^{1/3} \ll k \leq n^{1/2-\varepsilon}$.

Faixa de p	$i(K_n^k(p))$	EKR
$p \ll N^{-1}$	Sem informação	Sem informação
$N^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta}N^{-1}$	$O_\delta(\ln(pD))$	Sem informação
$(n/k)^{1-\delta}N^{-1} \ll p \ll (n/k)N^{-1}$	$O_\delta(\ln^2(pD))$	Sem informação ²
$(n/k)N^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n)N^{-1}$	$O_\delta(\ln^2(pD))$	Forte
$(n/k) \ln(n)N^{-1} \ll p$	$(1 + o(1))p(k/n)N$	Forte

Tabela 5.4: Resumo das informações apresentadas pelo Teorema 3.1 e o Teorema 5.2 na faixa $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$.

Faixa de p	$i(K_n^k(p))$	EKR
$p \ll N^{-1}$	Sem informação	Sem informação
$N^{-1} \ll p \ll D^{-1}$	pN	Sem informação
$D^{-1} \ll p \ll (n/k)^{1-\delta}D^{-1}$	$\Theta_\delta(D^{-1} \ln(pD)N)$	Falso
$(n/k)^{1-\delta}D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln(n/k)D^{-1}$	$O_\delta(D^{-1} \ln^2(pD)N)$	Falso
$(n/k) \ln(n/k)D^{-1} \ll p \ll (n/k) \ln^2(n/k)D^{-1}$	$O_\delta(D^{-1} \ln^2(pD)N)$	Sem informação
$(n/k) \ln^2(n/k)D^{-1} \ll p$	$(1 + o(1))p(k/n)N$	Sem informação

As tabelas apresentadas aqui não contém toda a informação conhecida sobre o problema. A seguir, apresentamos, brevemente, os resultados presentes nos artigos [HK14] e [BDD⁺14]. Referimos o leitor aos trabalhos originais para maiores detalhes. Apresentamos, primeiro o resultado principal de Hamm e Kahn.

Teorema 5.4 (Hamm, Kahn [HK14]). Existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $n = 2k + 1$ e $p > 1 - \varepsilon$, então $K_n^k(p)$ satisfaz a propriedade EKR (forte) assintoticamente quase certamente.

Agora, apresentamos um dos resultados de Balogh, Das, Delcourt, Liu e Sharifzadeh.

Teorema 5.5 (Balogh, Das, Delcourt, Liu e Sharifzadeh [BDD⁺14]). Para $3 \leq k \leq n/4$, se

$$p = p(n) \geq \frac{9n \log \left(\frac{ne}{k} \right) \binom{2k}{k} N}{D^2}$$

então assintoticamente quase certamente o grafo $K_n^k(p)$ satisfaz a propriedade EKR (forte).

Não faremos uma discussão sobre os resultados obtidos pelos autores acima. Apenas notamos que o teorema acima cobre boa parte dos resultados que obtivemos.

Capítulo 6

Discussão e Comentários finais

Estudamos o problema de determinar o tamanho das maiores famílias intersectantes em um subconjunto aleatório de $\mathcal{V}^k$. Para tirarmos conclusões sobre tal tamanho, utilizamos técnicas gerais que podem ser aplicadas a diversas famílias de grafos. Podemos nos perguntar se nossos métodos (em particular, a Proposição 3.6) podem ser aplicados para transferir outros teoremas clássicos e, em especial, aqueles que não eram consequências dos princípios de transferência já conhecidos. Um exemplo interessante em que podemos aplicar nossos resultados é o teorema de Furstenberg-Sarkozy enunciado a seguir (esta versão foi obtida por Balog, Pelikán, Pintz, e Szemerédi em [BPPS94]).

Teorema 6.1 Existe uma constante $c > 0$ tal que vale o seguinte. Dado $k \geq 2$ e um conjunto¹ $A \subset \mathbb{Z}_N$ com densidade $|A|/N \geq (\ln N)^{-c \ln \ln \ln N}$, vale que A contém dois elementos distintos que diferem de uma potência de ordem k , isto é, existem $x, d \in \mathbb{Z}_N$ tais que $\{x, x + d^k\} \subset A$.

Novamente, podemos considerar um grafo que possui $\mathbb{Z}_N$ como conjunto de vértices e tal que dois vértices estão ligados se eles diferem de uma potência de ordem k . Os princípios de transferência originais quando aplicados a este grafo, não produzem resultados satisfatórios uma vez que o tamanho dos maiores conjuntos independentes é assintoticamente menor que N . Por outro lado, a Proposição 3.6 pode ser utilizada para obter uma versão esparsa bem mais interessante de tal resultado, desde que sejamos capazes de demonstrar que o grafo em questão é (λ, γ) -supersaturado para algum par de funções λ e γ . Naturalmente, a conclusão da Proposição 3.6 será melhor se formos capazes de obter boas funções λ e γ (quanto menor λ e maior γ melhor). Apesar disso, resultados mais interessantes (do que o método citado acima seria capaz de produzir) foram obtidos recentemente por Aigner-Horev e Hàn em [AHH13].

Em geral, a Proposição 3.6 pode ser aplicada sempre que pudermos traduzir o teorema em questão para a linguagem de grafos. Infelizmente, porém, isto não é sempre possível. O que podemos fazer, muitas vezes, é traduzir o problema em questão para uma linguagem de hipergrafos k -uniformes, isto é, grafos em que as arestas possuem k elementos. Esta é a principal razão para os princípios de

¹ $\mathbb{Z}_N$ é o conjunto dos inteiros módulo N .

transferência de Schacht [Sch09] e Conlon e Gowers [CG10], citados na introdução, serem capazes de transferir tantos teoremas clássicos de combinatória para sua versão esparsa (dependendo apenas da capacidade de demonstrar uma propriedade semelhante a definição de supersaturação apresentada aqui).

Os resultados de Saxton e Thomason [ST12] e Balogh, Morris e Samotij [BMS12] podem ser considerados extensões do Lema 3.3 para hipergrafos k -uniformes. Eles podem ser aplicados mesmo que, na sequência de hipergrafos em questão, a razão entre o maior conjunto independente e o número de vértices vai a zero quando o número de vértices aumenta (no caso de Erdős-Ko-Rado, esta razão é k/n). Isto permite obter versões da Proposição 3.6 para sequências especiais de hipergrafos k -uniformes. Tais sequências possuem uma restrição extra, uma vez que, para o hipergrafo em questão, é necessário demonstrar um resultado um pouco mais forte do que a 'propriedade de supersaturação' presente nos artigos de [Sch09] e [CG10] e presente, no caso de grafos, neste texto. Citamos o artigo de Morris e Saxton [MS] como exemplo das afirmações presentes aqui.

Referências Bibliográficas

- [AHH13] E. Aigner-Horev and H. Hàn. On two-point configurations in subsets of pseudo-random sets. In *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, pages 421–424. Springer, 2013.
- [AKS80] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi. A note on Ramsey numbers. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 29(3):354–360, 1980.
- [AS92] N. Alon and J.H. Spencer. *The Probabilistic Method*. Wiley, New York, 1992.
- [BBM09] J. Balogh, T. Bohman, and D. Mubayi. Erdős–Ko–Rado in random hypergraphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 18(05):629–646, 2009.
- [BDD⁺14] J. Balogh, S. Das, M. Delcourt, H. Liu, and M. Sharifzadeh. The typical structure of intersecting families of discrete structures. *arXiv preprint arXiv:1408.2559*, 2014.
- [BMS12] J. Balogh, R. Morris, and W. Samotij. Independent sets in hypergraphs. *ArXiv preprint arXiv:1204.6530*, 2012.
- [BPPS94] A. Balog, J. Pelikán, J. Pintz, and E. Szemerédi. Difference sets without k -th powers. *Acta Mathematica Hungarica*, 65(2):165–187, 1994.
- [CG10] D. Conlon and W.T. Gowers. Combinatorial theorems in sparse random sets. *Arxiv preprint arXiv:1011.4310*, 2010.
- [DF09] I. Dinur and E. Friedgut. Intersecting families are essentially contained in juntas. *Combinatorics, Probability & Computing*, 18(1-2):107–122, 2009.
- [DFR08] I. Dinur, E. Friedgut, and O. Regev. Independent sets in graph powers are almost contained in juntas. *Geometric and Functional Analysis*, 18(1):77–97, 2008.
- [EKR61] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 12:313–320, 1961.
- [FR14] E. Friedgut and O. Regev. Work in Progress. 2014.

- [Fri08] E. Friedgut. On the measure of intersecting families, uniqueness and stability. *Combinatorica*, 28(5):503–528, 2008.
- [GT08] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Annals of mathematics*, 167(2):481–547, 2008.
- [HK14] A. Hamm and J. Kahn. On Erdős–Ko–Rado for random hypergraphs II. *arXiv preprint arXiv:1406.5793*, 2014.
- [Hof70] A.J. Hoffman. On eigenvalues and colorings of graphs. In *Graph Theory and its Applications (Proc. Advanced Sem., Math. Research Center, Univ. of Wisconsin)*, pages 79–91, 1970.
- [Kee08] P. Keevash. Shadows and intersections: Stability and new proofs. *Advances in Mathematics*, 218(5):1685 – 1703, 2008.
- [KKS98] Y. Kohayakawa, B. Kreuter, and A. Steger. An extremal problem for random graphs and the number of graphs with large even-girth. *Combinatorica*, 18(1):101–120, 1998.
- [KLR11] Y. Kohayakawa, S. Lee, and V. Rödl. The maximum size of a Sidon set contained in a sparse random set of integers. In *Proceedings of the 22st Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2011)*, Philadelphia, PA, USA, 2011. Society for Industrial and Applied Mathematics. to appear.
- [KM10] P. Keevash and D. Mubayi. Set systems without a simplex or a cluster. *Combinatorica*, 30(2):175–200, 2010.
- [KW82] D.J. Kleitman and K.J. Winston. On the number of graphs without 4-cycles. *Discrete Mathematics*, 41(2):167–172, 1982.
- [Lov79] L. Lovász. On the shannon capacity of a graph. *IEEE Transactions on Information Theory*, 25(1):1–7, 1979.
- [MS] R. Morris and D. Saxton. The number of C_2 -free graphs. *arXiv preprint arXiv:1309.2927*.
- [Ram30] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. 30:264–286, 1930.
- [Sam12] W. Samotij. Stability results for random discrete structures. *Random Structures & Algorithms*, 2012.
- [Sch09] M. Schacht. Extremal results for random discrete structures. submitted, 27pp, 2009.
- [She83] J.B. Shearer. A note on the independence number of triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, 46(1):83–87, 1983.
- [ST12] D. Saxton and A. Thomason. Hypergraph containers. *Arxiv preprint arXiv:1204.6595*, 2012.

- [Sze75] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arithmetica*, 27(585):199–245, 1975.
- [Tur41] P. Turán. Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941.