T -junções, T -cortes e funções conservativas

Mario Leston Rey

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Orientadora: Prof. Dr. Paulo Feofiloff

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

- São Paulo, outubro de 1999 -

T -junções, T -cortes e funções conservativas

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Mario Leston Rey
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 14 de dezembro de 1999.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Feofiloff (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Cristina Gomes Fernandes - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho - UFMS

Agradecimentos

Aos meus pais por toda paciência e compreensão durante todo o mestrado.

À Fátima por todo carinho e paciência.

Ao meu irmão que mesmo longe é uma contínua fonte de inspiração.

Ao Yoshi, à Yoshiko, à Cris e ao Coelho pelas conversas e pelo apoio.

Aos amigos Daniel e Juliano por serem uma presença fundamental.

Ao Pil por estar perto nos bons e nos maus momentos. Valeu *irmão*!

Finalmente, ao Professor Paulo Feofiloff, pela orientação, pela paciência e dedicação durante todo este trabalho. Mas, principalmente, por ser uma pessoa que mudou minha vida em aspectos fundamentais. Muito obrigado Professor!

Resumo

O problema da determinação de uma T -junção mínima e os desdobramentos desse problema constituem o assunto central desta dissertação.

Determinar uma T -junção mínima é equivalente a decidir se um grafo com pesos ± 1 nas arestas é livre de circuitos negativos. Exploramos o problema sob esta ótica e apresentamos o Teorema de Sebő-Lucchesi que caracteriza grafos livres de circuitos negativos.

Apresentamos, também, o algoritmo de Sebő que determina caminhos de peso mínimo em grafos sem circuitos negativos.

Algoritmos que determinam uma T -junção mínima produzem também uma coleção 2-disjunta máxima de T -cortes. Já a determinação de uma coleção 1-disjunta máxima é um problema difícil. Discutimos o algoritmo de Korach e Penn que extrai de uma coleção 2-disjunta máxima de T -cortes uma coleção 1-disjunta “grande”.

O estudo de T -junções mínimas leva naturalmente à consideração de conjuntos máximos de arestas negativas que não induzem circuitos negativos. Apresentamos uma relação minimax, devida a Frank, entre tais conjuntos de arestas e decomposições do grafo em orelhas.

Abstract

The problem of finding a minimum T -join and several related problems are the central topic of this thesis.

Determining a minimum T -join is equivalent to deciding whether a graph with weights ± 1 on the edges is free of negative circuits. We study the problem under this view and discuss the Sebő-Lucchesi Theorem that characterizes graphs with no negative circuits.

We also present Sebő's algorithm that determines minimum weight paths in graphs without negative circuits.

Algorithms that determine minimum T -joins also produce a maximum 2-packing of T -cuts. Determining a maximum 1-packing, however, is a hard problem. We discuss the algorithm of Korach and Penn that extracts from a maximum 2-packing of T -cuts a “large” 1-packing.

The study of minimum T -joins lead naturally to the consideration of maximum sets of negative edges that do not induce negative circuits. We present a minimax relation, due to Frank, between such sets of edges and ear-decompositions of graphs.

Sumário

1 Terminologia Básica	1
1.1 Multiconjuntos e multicoleções	1
1.2 Diferença simétrica	1
1.3 Grafos	3
1.4 Passeios, trilhas, caminhos, circuitos e ciclos	4
1.5 Contração e subdivisão	5
1.6 Abreviaturas	5
2 Introdução	7
2.1 T -junções	7
2.2 T -junções mínimas	9
2.3 Encontrando uma T -junção mínima	10
2.4 Funções conservativas e T -junções mínimas	13
3 Potenciais	15
3.1 Certificados de primeira ordem	15
3.2 Certificados de segunda ordem	18
3.3 Fatiamento de um grafo	21
3.4 Potenciais	23
4 O Teorema de Sebő-Lucchesi	27
4.1 Preliminares	27
4.2 O Teorema	28
4.3 Botões e hastes	30

4.4	Pétalas e flores	31
4.5	Prova do Teorema de Sebő-Lucchesi	34
4.6	O caso bipartido	36
4.7	Nota	37
5	O Algoritmo da macarronada	38
5.1	Macarronadas	38
5.2	Melhoramento local de uma macarronada	39
5.3	Determinando uma macarronada ótima	46
6	Igualdades Minimax	50
6.1	T -cortes	50
6.2	Outros certificados	52
6.3	Torres	54
7	Coleções disjuntas de T-cortes	58
7.1	Preliminares	58
7.2	O algoritmo de Korach-Penn	59
7.3	Consequências do algoritmo	65
7.4	O algoritmo de Sebő	66
7.5	Mais uma condição suficiente para $\tau = \nu$	70
7.6	T -partições	70
7.7	Grafos de Seymour	74
8	Conservadores máximos	76
8.1	Decomposição em orelhas	77
8.2	O Teorema Minimax	84
8.3	A desigualdade $\min \geq \max$	84
8.4	A desigualdade $\min \leq \max$	86
8.5	Nota	91
A	O caso ponderado	92
B	Algumas aplicações	94

B.1	Corte máximo	94
B.2	Caminhos disjuntos com origem e término pré-determinados	94

Capítulo 1

Terminologia Básica

1.1 Multiconjuntos e multicoleções

Por uma *coleção* entendemos um conjunto cada um de cujos elementos é um conjunto. Para uma coleção $\mathcal{X}$ com elementos $X_1, X_2, \dots, X_k$, denotaremos por $\bigcup \mathcal{X}$ o conjunto $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$. Diremos também que $\mathcal{X}$ é *disjunta* se $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

$\bigcup \mathcal{X}$
disjunta

Um *multiconjunto* é uma lista de objetos na qual podem haver repetições. Analogamente, uma *multicoleção* é uma lista de conjuntos na qual podem haver repetições. O número de cópias de cada elemento de um multiconjunto ou de uma multicoleção é a *multiplicidade* do elemento. Note que, a união de multiconjuntos (ou multicoleções) é entendida com *multiplicidade*, isto é, a multiplicidade de um elemento da união é a soma das multiplicidades do elemento em cada multiconjunto (ou multicoleção).

Se $\mathcal{A}$ é um multiconjunto (ou multicoleção) então a cardinalidade de $\mathcal{A}$, denotada por $|\mathcal{A}|$ leva em conta o número de cópias de cada elemento. Assim, se $m(A)$ denota a multiplicidade de A em $\mathcal{A}$ então $|\mathcal{A}| = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A)$.

$|\mathcal{A}|$

Uma coleção (ou multicoleção) é *laminar* se para quaisquer elementos X e Y na coleção (ou multicoleção) vale uma das alternativas: ou $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$ ou $X \cap Y = \emptyset$.

laminar

1.2 Diferença simétrica

Dados dois conjuntos A e B a *diferença simétrica* de A e B , denotada por $A \oplus B$, é o conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. São evidentes as seguintes propriedades da diferença simétrica:

$A \oplus B$

- $A \oplus \emptyset = A$,
- $A \oplus A = \emptyset$,
- $A \oplus B = B \oplus A$,
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ e
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

Para qualquer função w de X em $\mathbb{Z}$ e qualquer parte Y de X , $w(Y) := \sum_{y \in Y} w(y)$. O seguinte lema será usado no Capítulo 5 na demonstração da correção do algoritmo da macarronada.

LEMA 1.1. *Se A e B são conjuntos, w é uma função definida sobre $A \cup B$ e R é uma parte de $A \oplus B$ tal que $w(A \oplus R) \geq w(B)$ e $w(B \oplus R) \geq w(A)$ então $w(A \oplus R) = w(B)$ e $w(B \oplus R) = w(A)$.*

Prova. De fato,

$$w(A \oplus R) \geq w(B)$$

se, e só se,

$$w(A \setminus R) + w(R \setminus A) \geq w(B)$$

se, e só se,

$$w(A \setminus R) + w(R \cap B) \geq w(B)$$

se, e só se,

$$w(A) - w(B) \geq w(A \cap R) - w(B \cap R).$$

Trocando-se os papéis de A e B na argumentação acima obtemos

$$w(A) - w(B) \leq w(A \cap R) - w(B \cap R),$$

donde todas as desigualdades acima valem com igualdade. Em particular,

$$w(A \oplus R) = w(B) \text{ e } w(B \oplus R) = w(A).$$

□

1.3 Grafos

Um *grafo* G consiste de um conjunto finito, não vazio, V_G , de elementos chamados *vértices*, de um conjunto finito E_G de elementos chamados *arestas*, e uma *função de incidência* ψ_G que leva arestas em pares não-ordenados de vértices. A notação $\alpha = \{u, v\}$ é uma abreviatura para $\psi_G(\alpha) = \{u, v\}$. Ainda mais, por brevidade, denotaremos o par não-ordenado $\{u, v\}$ de vértices por uv ; é claro que $uv = vu$. Chamamos a atenção para o fato de que os grafos não admitem *laços*, ou seja, elementos da forma uu . Um vértice v *incide* em uma aresta α se $v \in \psi_G(\alpha)$. Os dois vértices incidentes em uma aresta são seus *extremos* ou *pontas*. Se u e v são os extremos de uma aresta α então diremos que α *liga* ou *une* u e v e que u e v são *adjacentes*. Um grafo é *simples* se cada par de vértices distintos é unido por no máximo uma aresta. Um grafo é *completo* se todo par de vértices distintos é unido por precisamente uma aresta.

O *grau* de um vértice v em um grafo G é o número de arestas incidentes em v e será denotado por $\deg_G(v)$. É fácil verificar que $\sum_{v \in V_G} \deg_G(v) = 2|E_G|$. Segue daí que é par o número de vértices cujo grau é ímpar. Se F é uma parte de E_G e v um vértice de G então $\deg_F(v)$ é o número de arestas de F incidentes em v .

Se X é um subconjunto de V_G , a *cofronteira* de X , denotada por $\nabla_G(X)$, é o conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra em $V_G \setminus X$. Se v é um vértice de G , abreviaremos $\nabla_G(\{v\})$ por $\nabla_G(v)$; é claro que $\deg_G(v) = |\nabla_G(v)|$. Se F é uma parte de E_G então $\nabla_F(X)$ é o conjunto de arestas $\nabla_G(X) \cap F$ donde $\deg_F(v) = |\nabla_F(v)|$.

Se X é um subconjunto de V_G , a *vizinhança* de X , denotada por $\Gamma_G(X)$, é o conjunto dos vértices de $V_G \setminus X$ adjacentes a pelo menos um vértice de X . Cada um dos elementos de $\Gamma_G(X)$ é um *vizinho* de X . Se v é um vértice de G , abreviaremos $\Gamma_G(\{v\})$ por $\Gamma_G(v)$.

Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$. Esta relação é denotada por $H \subseteq G$.

Se X é uma parte de V_G , denotaremos por $G - X$ o subgrafo obtido de G retirando-se o conjunto de vértices X , juntamente com as arestas que têm pelo menos uma ponta em X . Se F é uma parte de E_G então $G - F$ é o subgrafo obtido de G removendo-se F de E_G .

Se X é uma parte de V_G , denotaremos por $E_G[X]$ o conjunto de arestas de G que têm ambas as pontas em X .

Se X é uma parte de V_G , denotaremos por $G[X]$ o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X e cujo conjunto de arestas é $E_G[X]$. Se F é uma parte de E_G , denotaremos por $G[F]$ o subgrafo de G cujo conjunto de arestas é F e cujos vértices são os vértices de G incidentes em alguma aresta de F . Diremos freqüentemente “ F ” no lugar de “ $G[F]$ ”; conseqüentemente, V_F denota o conjunto $V_{G[F]}$; essa abreviatura não é usual, e por isso

exigirá atenção da parte do leitor.

A *união* de dois grafos G e H , denotada por $G \cup H$, é o grafo cujo conjunto de vértices é $V_G \cup V_H$ e cujo conjunto de arestas é $E_G \cup E_H$. $G \cup H$

1.4 Passeios, trilhas, caminhos, circuitos e ciclos

Um *passeio* em um grafo é uma seqüência $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2, \dots, \alpha_j, v_j \rangle$ onde $v_0, v_1, \dots, v_j$ são vértices e, para cada i , α_i é uma aresta cujas pontas são v_{i-1} e v_i . Note que os vértices $v_0, v_1, \dots, v_j$ não são necessariamente distintos dois a dois assim como as arestas $\alpha_1, \dots, \alpha_j$. Os vértices v_0 e v_j são os *extremos* ou *pontas* do passeio e diremos que o passeio *une* ou *liga* v_0 e v_j . Para cada $i < j$, v_{i+1} é o *sucessor* de v_i . Para cada $i > 0$, v_{i-1} é o *predecessor* de v_i . As arestas α_1 e α_j são as *arestas extremas* do passeio. O vértice v_0 é a *origem* do passeio e o vértice v_j é o *término* do passeio. Diremos, alternativamente, que o passeio é de v_0 a v_j . Os vértices $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}$ são os vértices *internos* do passeio. Diremos que um passeio *passa* por um vértice v se v é um vértice do passeio. Analogamente, diremos que um passeio *passa* por uma aresta α se α é uma aresta do passeio. *passeio*

Quando, para um passeio $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_j, v_j \rangle$, for irrelevante a aresta que une cada par v_i, v_{i+1} , nos referiremos ao passeio simplesmente como $\langle v_0, v_1, \dots, v_j \rangle$.

Se P é o passeio $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \alpha_2, v_2, \dots, \alpha_j, v_j \rangle$, o *reverso* de P , denotado por $\tilde{P}$, é o passeio $\langle v_j, \alpha_j, \dots, v_2, \alpha_2, v_1, \alpha_1, v_0 \rangle$. *reverso*
 $\tilde{P}$

Se P é o passeio $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_j, v_j \rangle$ e Q é o passeio $\langle v_j, \alpha_{j+1}, v_{j+1}, \dots, \alpha_l, v_l \rangle$ então o *produto* de P e Q , denotado por $P \cdot Q$, é o passeio *produto*
 $P \cdot Q$

$$\langle v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_j, v_j, \alpha_{j+1}, v_{j+1}, \dots, \alpha_l, v_l \rangle.$$

Um passeio é *aberto* se seus extremos são distintos. Um passeio é *fechado* se seus extremos coincidem. Uma *trilha* é um passeio no qual não há repetição de arestas. Um *caminho* é um passeio no qual não há repetição de vértices. Um *circuito* é uma trilha fechada com pelo menos três vértices no qual não há repetição de vértices a não ser em seus extremos. Um *ciclo* é uma coleção de circuitos disjuntos nas arestas. *trilha*
caminho
circuito
ciclo

Dado um subgrafo H de um grafo G , uma *orelha* de H é ou (1) um caminho em G , não trivial, cujas pontas são os únicos vértices em comum com H ou (2) um circuito em G que possui exatamente um vértice em comum com H . *orelha*

Se P é um caminho ou um circuito, denotaremos por V_P e E_P o seu conjunto de vértices e arestas respectivamente. Por brevidade, diremos simplesmente " P " no lugar de " E_P ". Ressaltamos que esta abreviatura não é usual e, por isso, exigirá atenção da parte do leitor. V_P, E_P

O *comprimento* de um caminho é seu número de arestas. Um caminho P é *mínimo* se dentre todos os caminhos que unem seus extremos, P tem comprimento mínimo. mínimo

Um grafo G é *conexo* se todo par de vértices é unido por um caminho. Um conjunto de arestas F é *conexo* se $G[F]$ é conexo. Um *componente conexo* de G é um subgrafo maximal conexo de G . Um *corte* em um grafo G é um conjunto de arestas cuja remoção desconecta G . conexo
corte

Um grafo é *acíclico* ou uma *floresta* se não possui circuitos; cada componente conexo de uma floresta é chamado de *árvore*. Um conjunto F de arestas é *acíclico* se $G[F]$ é acíclico. floresta
árvore

Uma aresta de uma floresta F é uma *folha* se pelo menos uma de suas pontas tem grau 1 em F . folha

1.5 Contração e subdivisão

Sejam $X_1, \dots, X_k$ partes, duas a duas disjuntas, do conjunto de vértices de um grafo G . O grafo G' obtido da *contração* de cada X_i , denotado por $G\langle X_1, \dots, X_k \rangle$, tem conjunto de vértices contração
 $G\langle X_1, \dots, X_k \rangle$

$$(V_G \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_k)) \cup \{X_1, \dots, X_k\},$$

conjunto de arestas

$$E_G \setminus (E[X_1] \cup \dots \cup E[X_k])$$

e função de incidência $\psi_{G'}$ dada por

$$\psi_{G'}(\alpha) := \begin{cases} X_i X_j & \text{se } \psi_G(\alpha) = x_i x_j \text{ onde } x_i \in X_i \text{ e } x_j \in X_j, \\ uv & \text{se } \psi_G(\alpha) = uv \text{ onde } u, v \in V_G \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_k), \\ uX_i & \text{se } \psi_G(\alpha) = ux_i \text{ onde } u \in V_G \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_k) \text{ e } x_i \in X_i. \end{cases}$$

para cada aresta α de G' .

A *subdivisão* de uma aresta α de um grafo G consiste na troca de α por um caminho P_α , internamente disjunto de V_G , e de comprimento ≥ 1 , unindo as pontas de α . subdivisão

1.6 Abreviaturas

Quando o grafo G estiver subentendido, omitiremos a letra “ G ” das funções definidas sobre G . Por exemplo, diremos, simplesmente, “ V, E e ∇ ” no lugar de “ V_G, E_G e ∇_G ”.

Se α é uma aresta de um grafo G , utilizaremos a notação $\alpha = xy$ como uma abreviatura para a sentença “ α tem pontas x e y ”. A notação $xy \in E$ é uma abreviatura para a sentença “existe α em E com $\alpha = xy$ ”.

Capítulo 2

Introdução

Neste capítulo introduziremos o conceito de T -junção e discutiremos algumas de suas propriedades básicas. Também descreveremos um algoritmo bem conhecido para determinação de uma T -junção mínima. O problema da determinação de uma T -junção mínima e os desdobramentos desse problema constituem o assunto central desta dissertação. Como veremos durante este capítulo, o problema é uma generalização de diversos problemas encontrados em Teoria dos Grafos.

2.1 T -junções

Se G é um grafo, denotaremos por I_G o conjunto dos vértices de grau ímpar de G . Analogamente, se F é uma parte de E , denotaremos por I_F o conjunto dos vértices incidentes a um número ímpar de arestas de F , ou seja, o conjunto de todos os vértices v tais que $\deg_F(v)$ é ímpar.

Seja T uma parte de V . Uma T -junção ($= T$ -join) é um subconjunto F de E tal que $I_F = T$. Portanto, para todo conjunto F de arestas, F é uma I_F -junção.

EXEMPLO 2.1. O conjunto de arestas de ciclo é uma $\emptyset$ -junção. Reciprocamente, uma $\emptyset$ -junção consiste do conjunto de arestas de um ciclo. O conjunto de arestas de um caminho unindo u e v é uma $\{u, v\}$ -junção. Em contrapartida, uma $\{u, v\}$ -junção com $u \neq v$, é a união disjunta do conjunto de arestas de um caminho ligando u e v e do conjunto de arestas de um ciclo. ■

LEMA 2.1. Se G é um grafo e F, J são partes de E então $F \oplus J$ é uma $(I_F \oplus I_J)$ -junção.

Figura 2.1: As arestas gordas correspondem a uma $(\{a, c, d, e\})$ -junção

Prova. Para todo elemento u de V temos

$$|\nabla_{F \oplus J}(u)| = |\nabla_F(u) \oplus \nabla_J(u)| = |\nabla_F(u)| + |\nabla_J(u)| - 2|\nabla_F(u) \cap \nabla_J(u)|,$$

ou seja,

$$\deg_{F \oplus J}(u) \equiv \deg_F(u) + \deg_J(u) \pmod{2}.$$

Porém, $u \in I_F \oplus I_J$ se, e só se, $\deg_F(u) + \deg_J(u) \equiv 1 \pmod{2}$, o que prova o lema. $\square$

Em particular, se F e J são duas T -junções, $F \oplus J$ é uma $\emptyset$ -junção. Se F é uma T -junção e K é uma $\emptyset$ -junção então $F \oplus K$ também é uma T -junção. Se F_1 é uma T_1 -junção, F_2 é uma T_2 -junção, $F_1 \subseteq F_2$ e $T_1 \subseteq T_2$ então $F_2 \setminus F_1$ é uma $(T_2 \setminus T_1)$ -junção.

É evidente que, se existe uma T -junção então $|T \cap V_H|$ é par para cada componente conexo H de G . A recíproca é verdadeira como mostraremos a seguir. Suponha que G seja um grafo conexo e T uma parte par de V . Denote por $u_1, v_1, \dots, u_k, v_k$ os vértices de T . Como G é conexo, existem caminhos P_i , unindo u_i a v_i , para $1 \leq i \leq k$. Cada P_i é uma $\{u_i, v_i\}$ -junção. Logo, devido ao Lema 2.1, $P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k$ é uma T -junção o que finaliza a prova.

T -junções minimais

Uma T -junção F é *minimal* se não existe T -junção J tal que $J \subset F$. É claro que o conjunto de arestas de um caminho unindo u e v é uma $\{u, v\}$ -junção minimal.

LEMA 2.2. Uma T -junção F é minimal se, e só se, F é acíclico.

Prova. Seja F uma T -junção minimal. Se F contém circuito K , então, pelo Lema 2.1, $F \oplus K = F \setminus K \subset F$ é uma T -junção, o que contraria a minimalidade de F . Portanto, F é acíclico. Reciprocamente, suponha que F é uma T -junção acíclica. Se F não é minimal então existe $J \subset F$ tal que J é uma T -junção. Pelo Lema 2.1, $J \oplus F$ é uma $\emptyset$ -junção. Ademais $J \oplus F$ é parte não-vazia de F . Logo, F inclui um circuito. $\square$

Se F é uma $\{u, v\}$ -junção minimal para algum par u, v de vértices distintos então existe precisamente um caminho com origem em u e término em v e um caminho com origem em v e término em u cujo conjunto de arestas é F .

2.2 T -junções mínimas

Uma T -junção F é *mínima* se $|F| \leq |J|$ para toda T -junção J . Denotaremos por $\tau(G, T)$ a cardinalidade de qualquer T -junção mínima em um grafo G . É fácil fornecer um limitante inferior para $\tau(G, T)$: como todo elemento de T deve ser incidente a pelo menos uma aresta de qualquer T -junção, segue que $\tau(G, T) \geq |T|/2$.

PROBLEMA 1. Dado um grafo conexo G e uma parte par T de V determinar uma T -junção mínima.

O problema foi resolvido por Edmonds e Johnson mas tem vários desdobramentos interessantes. Eis alguns resultados clássicos diretamente relacionados (às vezes casos particulares) do problema.

Dado um grafo G determinar uma I_G -junção mínima. Este problema é conhecido como o *problema chinês do carteiro*.

O *problema do caminho mínimo* é outro caso particular do problema. O problema é o seguinte: dado um par u, v de vértices determinar um caminho mínimo ligando u a v . Pela observação feita anteriormente, é imediato obter de uma $\{u, v\}$ -junção mínima um caminho mínimo com origem u e término v .

Um *emparelhamento* em um grafo é um conjunto M de arestas tal que todo vértice é incidente a no máximo uma aresta de M . É claro que todo emparelhamento M constitui uma I_M -junção mínima. Um emparelhamento é *perfeito* se todo vértice do grafo é incidente a exatamente uma aresta do emparelhamento. É evidente que todo grafo G que possui um emparelhamento perfeito contém um número par de vértices. Agora, toda V -junção tem pelo menos $|V|/2$ elementos. Portanto, se existe uma V -junção F com exatamente $|V|/2$ elementos, então F constitui um emparelhamento perfeito. Consequentemente, decidir se um grafo possui emparelhamento perfeito é equivalente a decidir se $\tau(G, V) = |V|/2$.

emparelhamento

perfeito

É claro que toda T -junção mínima é minimal. Em contrapartida, nem toda T -junção minimal é mínima, como mostra o exemplo a seguir. Considere um grafo completo com três vértices, denote por $\{a, b, c\}$ seu conjunto de vértices. É claro que $\{ab\}$ é uma $\{a, b\}$ -junção mínima e $\{ac, bc\}$ é uma $\{a, b\}$ -junção minimal.

T -junções máximas

Dado um grafo conexo G e uma parte par T de V , considere o problema de determinar uma T -junção máxima, ou seja, uma T -junção F tal que $|F| \geq |J|$ para toda T -junção J . Este problema não é diferente do problema da T -junção mínima. Uma simples redução leva de um problema ao outro, como mostra o lema abaixo:

LEMA 2.3. *Se G é um grafo conexo, T uma parte par de V então F é uma T -junção máxima se, e só se, $E \oplus F$ é uma $(I \oplus T)$ -junção mínima.*

Prova. Seja F uma T -junção máxima e J uma $(I \oplus T)$ -junção qualquer. De acordo com o Lema 2.1, $J \oplus E$ é uma $(I \oplus T \oplus I)$ -junção, ou seja, uma T -junção. Novamente, devido ao Lema 2.1, $E \oplus F$ é uma $(I \oplus T)$ -junção. Logo,

$$|F| \geq |J \oplus E| = |E \setminus J| = |E| - |J|,$$

o que implica que

$$|J| \geq |E| - |F| = |E \setminus F| = |E \oplus F|,$$

ou seja, $E \oplus F$ é uma $(I \oplus T)$ -junção mínima. Reciprocamente, suponha que $E \oplus F$ seja uma $(I \oplus T)$ -junção mínima e seja J uma T -junção qualquer. Em virtude do Lema 2.1, $E \oplus J$ é uma $(I \oplus T)$ -junção de modo que $|E \oplus F| \leq |E \oplus J|$, o que implica que $|J| \leq |F|$, ou seja, F é uma T -junção máxima. $\square$

2.3 Encontrando uma T -junção mínima

Suponha que T é um conjunto par de vértices em um grafo conexo G . Diremos que uma coleção de caminhos $\mathcal{P}$ é *apropriada para T* se

- (i) $\mathcal{P}$ é disjunta (ou seja, os caminhos em $\mathcal{P}$ são dois a dois disjuntos nas arestas),
- (ii) os extremos de cada elemento de $\mathcal{P}$ estão em T ,
- (iii) cada vértice de T é extremo de um e só um elemento de $\mathcal{P}$.

*coleção de
caminhos
apropriada
para T*

A definição acima implica que se $\mathcal{P}$ é uma coleção de caminhos apropriada para T então $|\mathcal{P}| = |T|/2$.

LEMA 2.4. F é uma T -junção se, e só se, $F = \bigcup \mathcal{C} \oplus \bigcup \mathcal{P}$, onde $\mathcal{C}$ é um ciclo e $\mathcal{P}$ é uma coleção de caminhos apropriada para T .

Prova. Devido ao Lema 2.1, se $\mathcal{C}$ é um ciclo e $\mathcal{P}$ é uma coleção de caminhos apropriada para T , então $\bigcup \mathcal{C} \oplus \bigcup \mathcal{P}$ é uma T -junção. Reciprocamente, suponha que F é uma T -junção. Vamos mostrar como construir uma coleção de caminhos apropriada para T cuja união está contida em F . A construção é por indução em $|T|$. Se $T = \emptyset$ o resultado é trivial, basta tomar $\mathcal{P} := \emptyset$. Suponha $T \neq \emptyset$. Seja u um vértice de T e H um componente de $G[F]$ que contém u . Como $|T \cap V_H|$ é par, segue que existe um vértice v distinto de u em $T \cap V_H$. Seja P um caminho em H unindo u e v . Em virtude do Lema 2.1, $F \setminus P$ é uma $(T \setminus \{u, v\})$ -junção. Por hipótese de indução, existe uma coleção $\mathcal{P}'$ de caminhos apropriada para $(T \setminus \{u, v\})$ contida em $F \setminus P$. Seja $\mathcal{P}$ a coleção $\mathcal{P}' \cup \{P\}$. É evidente que $\mathcal{P}$ é uma coleção de caminhos apropriada para T . Agora, o resultado segue observando-se que $F \setminus \bigcup \mathcal{P}$ é uma $\emptyset$ -junção. $\square$

COROLÁRIO 2.5. Se F é uma T -junção mínima então $F = \bigcup \mathcal{P}$ onde $\mathcal{P}$ é uma coleção de caminhos mínimos apropriada para T .

Prova. Devido ao Lema 2.4, F pode ser expressa como união de uma coleção de caminhos apropriada para T . Seja P um caminho de tal coleção e u, v suas pontas. Então P é um caminho mínimo de u a v , caso contrário, existiria um caminho P' de u até v com $|P'| < |P|$, mas isto implica que $(F \oplus P) \oplus P'$ é uma T -junção de cardinalidade menor que F , o que é uma contradição. $\square$

Historicamente, o primeiro algoritmo a resolver o Problema 1 foi o de Edmonds e Johnson [5] e depende do célebre algoritmo do emparelhamento de peso mínimo [14]. Para discutir o algoritmo precisamos das seguintes definições. Se w é uma função que atribui um número a cada aresta de um grafo, um emparelhamento perfeito M é w -mínimo se dentre todos os emparelhamentos perfeitos, M é um emparelhamento para o qual $\sum_{\alpha \in M} w(\alpha)$ é mínimo.

ALGORITMO 2.1 (EDMONDS E JOHNSON). Recebe um grafo conexo G e uma parte par T de V . Devolve uma T -junção mínima. O algoritmo consiste dos seguintes passos:

1. Para cada par u, v de vértices distintos em T , seja $d(u, v)$ o comprimento de um caminho mínimo de u até v .

2. Seja G' o grafo completo com conjunto de vértices T . Seja w a função definida por $w(uv) = d(u, v)$. Submeta G', w ao algoritmo do emparelhamento perfeito w -mínimo [14] que devolverá um emparelhamento perfeito w -mínimo M em G' . Seja $\{u_1v_1, \dots, u_kv_k\}$ ($k = |T|/2$) o conjunto das arestas de M .
3. Seja P_i um caminho de comprimento mínimo de u_i a v_i em G . Seja F o conjunto de arestas $P_1 \cup \dots \cup P_k$. Devolva F e pare.

■

Análise do algoritmo Vamos mostrar, inicialmente, que F é uma T -junção. Para tanto, mostraremos que a coleção de caminhos $\{P_1, \dots, P_k\}$ é apropriada para T e, para isso, basta mostrar que $P_i \cap P_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Suponha que $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ para algum $i \neq j$. Então $|P_i \oplus P_j| < |P_i| + |P_j|$ e como $P_i \oplus P_j$ é uma $\{u_i, v_i, u_j, v_j\}$ -junção, segue que $P_i \oplus P_j$ contém dois caminhos disjuntos entre dois pares disjuntos de vértices em $\{u_i, v_i, u_j, v_j\}$. Digamos que tais caminhos sejam entre u_i e v_j e entre u_j e v_i . Então $d(u_i, v_j) + d(u_j, v_i) \leq |P_i \oplus P_j|$, ou seja,

$$d(u_i, v_j) + d(u_j, v_i) < |P_i| + |P_j| = d(u_i, v_i) + d(u_j, v_j).$$

Considere o emparelhamento perfeito $M' := (M \setminus \{u_iv_i, u_jv_j\}) \cup \{u_iv_j, u_jv_i\}$ em G' . Então

$$\sum_{uv \in M'} w(uv) = \sum_{uv \in M} d(u, v) - d(u_i, v_i) - d(u_j, v_j) + d(u_i, v_j) + d(u_j, v_i) < \sum_{uv \in M} w(uv)$$

o que contradiz a minimalidade de M . Portanto, $P_i \cap P_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, o que implica que $F = P_1 \oplus \dots \oplus P_k$ e o resultado segue imediatamente aplicando-se o Lema 2.1.

Resta mostrar que F é uma T -junção mínima. Seja J uma T -junção mínima. Então, de acordo com o Corolário 2.5, J é uma união de uma coleção de caminhos mínimos apropriada para T . Sejam $Q_1, \dots, Q_k$ os elementos de tal coleção. Denote por x_i e y_i os extremos de Q_i e seja $\{x_1y_1, \dots, x_ky_k\}$ um emparelhamento perfeito em G' . Temos, então, que

$$|J| = \sum_{i=1}^k w(x_iy_i) \geq \sum_{i=1}^k w(u_iv_i) = |F|$$

o que prova a minimalidade de F .

Complexidade do algoritmo É possível determinar d em $O(|V|^3)$ utilizando-se o algoritmo de Floyd-Warshall [2]. A determinação do emparelhamento perfeito w -mínimo em G' pode ser feita em $O(|T|^3)$ utilizando-se a implementação de Lawler [14] do algoritmo de Edmonds [4]. Portanto, o consumo total de tempo do algoritmo é $O(|V|^3)$.

O algoritmo de Edmonds e Johnson apresentado acima, determina uma T -junção mínima, mas não fornece uma maneira direta de *comprovar* sua minimalidade. Durante os próximos capítulos estaremos preocupados em determinar um “certificado” que comprove a minimalidade de uma T -junção. Para isso, mudaremos um pouco a linguagem na qual o problema é tratado, o que será feito na próxima seção.

2.4 Funções conservativas e T -junções mínimas

Seja w uma função definida sobre as arestas de um grafo G . Diremos que w é um *peso*. Se F é uma parte de E , então $w(F)$ denota o número $\sum_{\alpha \in F} w(\alpha)$. Um circuito C é *negativo* se $w(C) < 0$. A função w é *conservativa* (= *conservative*) se não há circuitos negativos, ou seja, $w(C) \geq 0$ para todo circuito C de G . É claro que toda função com valores em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ é conservativa.

peso
 $w(F)$
circuito
negativo
conservativa

Se F é uma parte de E então w^F é a função de E em $\{-1, +1\}$ definida por

w^F

$$w^F(\alpha) := \begin{cases} -1 & \text{se } \alpha \text{ em } F \text{ e} \\ +1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

LEMA DE GUAN [11]. *Seja G um grafo e F uma parte de E . Então F é uma I_F -junção mínima se, e só se, w^F é conservativa.*

Prova. (Necessidade.) Seja F uma I_F -junção mínima e C um circuito. Então

$$\begin{aligned} w^F(C) &= w^F(C \setminus F) + w^F(C \cap F) \\ &= |C \setminus F| - |C \cap F| \\ &= |C \setminus F| - |C \cap F| + |F \setminus C| - |F \setminus C| \\ &= |F \oplus C| - |F| \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pois, em virtude do Lema 2.1, $F \oplus C$ é uma I_F -junção. Portanto w^F é conservativa.

(Suficiência.) Seja w^F conservativa e F' uma I_F -junção qualquer. Pelo Lema 2.1, $F \oplus F'$

é uma $\emptyset$ -junção, ou seja, a união do conjunto de arestas de um ciclo e

$$\begin{aligned}
 0 &\leq w^F(F \oplus F') \\
 &= w^F(F \setminus F') + w^F(F' \setminus F) \\
 &= |F' \setminus F| - |F \setminus F'| \\
 &= |F' \setminus F| - |F \setminus F'| + |F \cap F'| - |F \cap F'| \\
 &= |F'| - |F|,
 \end{aligned}$$

portanto, $|F| \leq |F'|$, ou seja, F é uma I_F -junção mínima. $\square$

É fácil ver que o Lema de Guan é equivalente à seguinte proposição: *F é uma T -junção mínima se, e só se, $|C \cap F| \leq |C \setminus F|$ para todo circuito C em G .*

O Lema de Guan sugere um algoritmo para determinação de uma T -junção mínima. Comece com uma T -junção qualquer, digamos F . Se existe circuito C com $w^F(C) < 0$ então comece nova iteração com $F \oplus C$ no lugar de F . Caso contrário, devolva F e pare. Embora a idéia pareça boa, Guan não forneceu nenhum algoritmo polinomial para a determinação de um circuito negativo e não parece nada óbvio como fazê-lo, como observa Lawler [14]: “O único problema com estas observações, como Edmonds apontou, é que não é aparente como detectar circuitos negativos em grafos não-dirigidos. Os algoritmos habituais para determinação de caminhos mínimos não se aplicam ao caso não-dirigido nos quais algumas arestas possuem peso negativo. E qualquer processo de enumeração envolve uma extensa computação.”

O Lema de Guan afirma, então, que determinar uma T -junção mínima em um grafo G é equivalente a decidir se G é livre de circuitos negativos. Portanto, um “certificado” que comprove que G é livre de circuitos negativos é um “certificado” que comprova a minimalidade de uma T -junção. No próximo capítulo iremos nos ocupar com a busca de um tal “certificado”.

Capítulo 3

Potenciais

Durante este capítulo, apresentaremos o conceito de função potencial devido a Sebő [22]. Mostraremos que a existência de uma função potencial garante a inexistência de circuitos negativos. Mostraremos também que qualquer função potencial fornece um limitante inferior para o peso de qualquer caminho.

No decorrer deste capítulo, G será um grafo conexo, w uma função de E em $\{-1, +1\}$, E^- o conjunto $\{\alpha \in E : w(\alpha) = -1\}$ e E^+ o conjunto $\{\alpha \in E : w(\alpha) = 1\}$. Uma aresta é *negativa* se pertence a E^- e *positiva* se pertence a E^+ . Para uma parte F de E , $w(F)$ é o número $\sum_{\alpha \in F} w(\alpha)$.

E^-, E^+
negativa
positiva
 $w(F)$

3.1 Certificados de primeira ordem

Uma coleção $\mathcal{L}$ de partes de V é ∇ -disjunta se cada aresta do grafo está na cofronteira de no máximo um elemento de $\mathcal{L}$, ou seja, se

∇ -disjunta

$$\nabla(L_1) \cap \nabla(L_2) = \emptyset$$

para todo par L_1, L_2 de elementos distintos de $\mathcal{L}$. Se $L_1, \dots, L_k$ são os elementos de $\mathcal{L}$ então $\nabla(\mathcal{L})$ denota o conjunto $\nabla(L_1) \cup \dots \cup \nabla(L_k)$.

$\nabla(\mathcal{L})$

Uma coleção $\mathcal{L}$ de partes de V é um *certificado de 1ª ordem para w* se

certificado
de 1ª-ordem

- $\mathcal{L}$ é ∇ -disjunta,
- cada aresta negativa está na cofronteira de algum elemento de $\mathcal{L}$ e
- $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$ para todo L em $\mathcal{L}$.

LEMA 3.1. *Se existe um certificado de 1ª ordem para w então w é conservativa.*

Prova. Seja K um circuito e $\mathcal{L}$ um certificado de 1ª ordem para w . Seja L um elemento de $\mathcal{L}$. Como $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$ e $|\nabla(L) \cap K|$ é par, segue que $w(\nabla(L) \cap K) \geq 0$. Ainda mais, como $\mathcal{L}$ é ∇ -disjunta e $E^- \subseteq \nabla(\mathcal{L})$, temos

$$w(K) \geq \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap K),$$

segue daí que w é conservativa. □

A recíproca do lema acima, em geral, não é verdadeira. Considere, por exemplo, o grafo completo de 4 vértices, K^4 , com função w de E em $\{-1, +1\}$ tal que E^- forme um emparelhamento perfeito. Claramente, w é conservativa. Entretanto, K^4 não tem dois cortes mutualmente disjuntos e, portanto, não admite nenhum certificado de 1ª ordem. Apesar deste resultado negativo, existe uma ampla classe de grafos para os quais a recíproca é válida. Veremos, em capítulos posteriores, quais são estas classes. Por enquanto, vamos tratar de um caso bem simples onde a recíproca é verdadeira. A prova da proposição que segue contém um prenúncio dos argumentos que usaremos para discutir resultados mais gerais.

Figura 3.1: O grafo K^4 . A função w é -1 nas aresta gordas e 1 nas magras.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Se w é conservativa e E^- é conexo então existe um certificado de 1ª ordem para w .*

Prova. A demonstração é por indução em E^- . Se $E^- = \emptyset$, $\mathcal{L} := \emptyset$ é um certificado de 1ª ordem para w . Suponha que $E^- \neq \emptyset$. Como w é conservativa e E^- é conexo, segue que E^- é uma árvore. Seja t um vértice de grau 1 em E^- . Afirmamos que

$$w(P) \geq 0 \text{ para todo caminho } P \text{ em } G - t \text{ com extremos em } \Gamma(t). \quad (*)$$

De fato, sejam x e y vizinhos de t e P um caminho de x até y incluído em $G - t$. Seja s o vizinho de t em E^- e α a aresta de E^- que une t e s . Para cada vértice v adjacente a t , seja α_v uma aresta com pontas v e t . Temos os seguintes casos:

Caso 1 $x = s$ ou $y = s$.

Suponha que $x = s$. Então $C := \langle t, \alpha, s \rangle \cdot P \cdot \langle y, \alpha_y, t \rangle$ é um circuito. Portanto, $w(P) = w(C) - w(\alpha) - w(\alpha_y) = w(C) \geq 0$ uma vez que w é conservativa.

Caso 2 $x \neq s$ e $y \neq s$.

Se $V_P \cap V_{E^-} = \emptyset$, $P \subseteq E^+$ e, portanto, $w(P) > 0$. Suponha, agora, que $V_P \cap V_{E^-} \neq \emptyset$. Seja z um vértice de E^- que também é vértice de P e que, ainda mais, minimiza o comprimento do caminho Q incluído em E^- que une s e z . Então $C := \langle t, \alpha, s \rangle \cdot Q \cdot P(z, y) \cdot \langle y, \alpha_y, t \rangle$ é um circuito donde $w(C) \geq 0$. Mas, $w(C) = w(\alpha) + w(Q) + w(P(z, y)) + w(\alpha_y) = w(Q) + w(P(z, y)) \geq 0$. Segue daí que $w(P(z, y)) \geq -w(Q)$ donde $w(P(z, y)) > w(Q)$ pois $w(Q) < 0$. Agora, $C' := \langle t, \alpha_x, x \rangle \cdot P(x, z) \cdot \tilde{Q} \cdot \langle s, \alpha, t \rangle$ é um circuito donde $w(C') \geq 0$. No entanto, $w(C') = w(\alpha_x) + w(P(x, z)) \cdot \tilde{Q} + w(\alpha)$ e isto implica que $w(P(x, z)) \geq -w(Q)$. Concluimos assim que $w(P) \geq 0$.

Seja G' o grafo $G \setminus \{t\}$ e w' a restrição de w às arestas de G' . É fácil que $|E_{G'}^-| = |E^-| - 1$. Afirmamos que w' é conservativa em G' . Seja C' um circuito em G' . Se C' é um circuito em G , por hipótese, $w'(C') \geq 0$. Se C' é um caminho em G , $w'(C') \geq 0$ em virtude de (*). Assim, w' é conservativa em G' . Por hipótese de indução, G' admite um certificado de 1ª ordem $\mathcal{L}'$ para w' . Portanto, $\mathcal{L}' \cup \{t\}$ é um certificado de 1ª ordem para w . $\square$

Como veremos a seguir, a proposição acima inclui como corolário o seguinte resultado bem conhecido (dual do Teorema de Menger): *se P é um caminho mínimo de u a v então existe uma coleção disjunta de $|P|$ cortes que separam u de v .* Nesta proposição, um corte *separa* vértices u e v se removendo-se as arestas do corte, os vértices u e v estão em componentes conexos distintos do grafo resultante. Seja P um caminho de comprimento mínimo unindo u e v . É claro que P é uma $(\{u, v\})$ -junção mínima. Pelo Lema de Guan, w^P é conservativa. Como P é conexo, pela proposição acima existe um certificado de 1ª ordem $\mathcal{L}$ para w^P . Para cada L em $\mathcal{L}$, se $\nabla(L) \cap E^- \neq \emptyset$ então $\nabla(L)$ separa u de v . Ademais, $|\nabla(\mathcal{L})| \geq |P|$.

3.2 Certificados de segunda ordem

Seja $\mathcal{L}$ uma *multicoleção* de partes de V . Diremos que $\mathcal{L}$ é ∇ -*bidisjunta* se cada aresta do grafo está na cofronteira de no máximo dois elementos de $\mathcal{L}$, ou seja, $\sum_{L \in \mathcal{L}} |\nabla(L) \cap \{\alpha\}| \leq 2$ para toda aresta α ¹.

∇ -bidisjunta

Uma multicoleção $\mathcal{L}$ de partes de V é um *certificado de 2ª ordem para w* se

certificado
de 2ª-ordem

- $\mathcal{L}$ é ∇ -bidisjunta,
- cada aresta negativa está na cofronteira de dois elementos de $\mathcal{L}$ e
- $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$ para todo L em $\mathcal{L}$.

Figura 3.2: Exemplo de certificado de segunda ordem para K^4 . As arestas gordas são negativas; as magras são positivas.

LEMA 3.3. Para todo certificado de 2ª ordem $\mathcal{L}$ para w e toda parte F de E

$$w(F) \geq \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap F).$$

¹Segue daí que a multiplicidade de cada elemento de $\mathcal{L}$ é no máximo 2.

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
 w(F) &= w(F \cap E^-) + w(F \cap E^+) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap F \cap E^-) + w(F \cap E^+) \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap F \cap E^-) + \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap F \cap E^+) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap F).
 \end{aligned}$$

□

LEMA 3.4. Se existe um certificado de 2ª ordem para w então w é conservativa.

Prova. Seja $\mathcal{L}$ um certificado de 2ª ordem para w , L um elemento de $\mathcal{L}$ e C um circuito. Então $w(\nabla(L) \cap C) \geq 0$, já que $|\nabla(L) \cap C|$ é par e $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$. De acordo com o Lema 3.3 temos

$$w(C) \geq \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap C),$$

donde w é conservativa.

□

De modo a motivar o conceito de potencial, que será explorado na Seção 3.4, mostraremos que é possível impor uma maior “estrutura” a um certificado de 2ª ordem. Para começar, precisamos das definições que seguem.

Se $\mathcal{L}$ é uma multicoleção de partes de V , dois elementos L_1 e L_2 em $\mathcal{L}$ se *cruzam* se

$$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset, \quad L_1 \setminus L_2 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad L_2 \setminus L_1 \neq \emptyset.$$

Um *cruzamento* é um par não-ordenado de elementos de $\mathcal{L}$ que se cruzam. A multicoleção $\mathcal{L}$ é *laminar* se, e só se, não possui nenhum cruzamento.

cruzamento
laminar

LEMA 3.5. Se existe um certificado de 2ª ordem então existe um certificado de 2ª ordem laminar.

Prova. Seja $\mathcal{L}$ um certificado de 2ª ordem com número mínimo de cruzamentos. Suponha que esse número, k , é positivo. Sejam L_1 e L_2 elementos de $\mathcal{L}$ que se cruzam. Vamos construir um certificado de 2ª ordem $\mathcal{L}'$ com menos de k cruzamentos. Temos os casos que seguem.

Suponha, inicialmente, que $\nabla(L_i) \cap E^- = \emptyset$ para $i = 1$ ou $i = 2$. Neste caso, tome $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \setminus \{L_i\}$.

Suponha, agora, que $\nabla(L_1) \cap E^- \neq \emptyset$ e $\nabla(L_2) \cap E^- \neq \emptyset$. Seja α a aresta de $\nabla(L_1) \cap E^-$ e β a aresta de $\nabla(L_2) \cap E^-$. Se $\alpha = \beta$ e $\alpha \in \nabla(L_1 \cap L_2)$ então tome

$$\mathcal{L}' := (\mathcal{L} \setminus \{L_1, L_2\}) \cup \{L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2\}.$$

Se $\alpha = \beta$ e $\alpha \in \nabla(L_1 \setminus L_2) \cap \nabla(L_2 \setminus L_1)$ então tome

$$\mathcal{L}' := (\mathcal{L} \setminus \{L_1, L_2\}) \cup \{L_1 \setminus L_2, L_2 \setminus L_1\}.$$

Se $\alpha \neq \beta$ então $\alpha \in \nabla(L_1 \setminus L_2)$ e $\beta \in \nabla(L_2 \setminus L_1)$. Tome, assim,

$$\mathcal{L}' := (\mathcal{L} \setminus \{L_1, L_2\}) \cup \{L_1 \setminus L_2, L_2 \setminus L_1\}.$$

Em qualquer dos casos acima, $\mathcal{L}'$ é certificado de 2ª ordem que possui no máximo $k-1$ cruzamentos. No entanto, isto contraria a minimalidade de k . Concluimos assim que $\mathcal{L}$ não tem cruzamentos e, portanto, é laminar. $\square$

Uma multicoleção $\mathcal{L}$ é *limpa em relação a um vértice r* se, para todo L em $\mathcal{L}$

limpa

- $\nabla(L) \cap E^- = \emptyset$ se r em L e
- $|\nabla(L) \cap E^-| = 1$ se r em $V \setminus L$.

LEMA 3.6. *Se existe certificado de 2ª ordem então, para todo vértice r , existe um certificado de 2ª ordem laminar e limpo em relação a r .*

Prova. Seja $\mathcal{L}$ um certificado de 2ª ordem. Em virtude do Lema 3.5 podemos supor que $\mathcal{L}$ é laminar. Seja r um vértice qualquer. Suponha que $\mathcal{L}$ não é limpo. Retire de $\mathcal{L}$ cada elemento L tal que $r \notin L$ e $\nabla(L) \cap E^- = \emptyset$. Seja $\mathcal{L}_1$ a multicoleção assim obtida. É claro que $\mathcal{L}_1$ é um certificado de 2ª ordem laminar. Seja $\mathcal{L}_r$ a multicoleção dos elementos L de $\mathcal{L}_1$ tais que

$$r \in L \quad \text{e} \quad |\nabla(L) \cap E^-| = 1.$$

Se $\mathcal{L}_r$ é vazia então $\mathcal{L}_1$ é limpa. Suponha $\mathcal{L}_r \neq \emptyset$. Tome um L maximal em $\mathcal{L}_r$. Considere a multicoleção $\mathcal{L}_2 := (\mathcal{L}_1 \setminus \{L\}) \cup \{V \setminus L\}$. É evidente que $\mathcal{L}_2$ é um certificado de 2ª ordem uma vez que $\nabla(L) = \nabla(V \setminus L)$. Afirmamos que $\mathcal{L}_2$ é laminar. Eis a prova. Para todo L' em $\mathcal{L}_r$, temos $L' \subseteq L$ donde $(V \setminus L) \cap L' = \emptyset$. Para todo L' em $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_r$ temos (1) $L' \subset L$ o que implica que $(V \setminus L) \cap L' = \emptyset$ ou (2) $L' \cap L = \emptyset$ o que implica que $(V \setminus L) \supseteq L'$. Portanto, $\mathcal{L}_2$ é laminar. Aplicando-se repetidamente a construção acima obtém-se um certificado de 2ª ordem laminar e limpo em relação a r . $\square$

Uma multicoleção $\mathcal{L}$ é *conexa* se $G[L]$ é conexo para todo L em $\mathcal{L}$.

conexa

LEMA 3.7. Se existe um certificado de 2ª ordem então existe, para todo vértice r , um certificado de 2ª ordem laminar, limpo em relação a r e conexo.

Prova. Seja $\mathcal{L}$ um certificado de 2ª ordem. Devido ao Lema 3.6, podemos supor que $\mathcal{L}$ é laminar e limpo em relação a r . Escolha $\mathcal{L}$ de modo a minimizar o número

$$k := |\{L : L \in \mathcal{L}, G[L] \text{ é desconexo}\}|.$$

Suponha $k > 0$. Seja L um elemento de $\mathcal{L}$ para o qual $G[L]$ não é conexo. Se $r \in L$ então seja $\mathcal{L}'$ a multicoleção $\mathcal{L} \setminus \{L\}$. Se $r \notin L$ então seja G' o componente conexo de $G[L]$ para o qual $\nabla(V_{G'}) \cap E^- \neq \emptyset$ e $\mathcal{L}'$ a multicoleção $(\mathcal{L} \setminus \{L\}) \cup \{V_{G'}\}$. Em ambos os casos, $\mathcal{L}'$ é um certificado de 2ª ordem laminar e limpo, uma vez que $\nabla(V_{G'}) \subseteq \nabla(L)$. Ainda mais, $\mathcal{L}'$ possui $k - 1$ elementos L para os quais $G[L]$ é desconexo, o que contraria a minimalidade de k . Concluimos assim que $k = 0$ e, portanto, $\mathcal{L}$ é conexo. $\square$

3.3 Fatiamento de um grafo

Nesta seção discutiremos multicoleções laminares “geradas” por funções de V em $\mathbb{Z}$. Como veremos tais multicoleções são, naturalmente, conexas.

Seja h uma função arbitrária de V em $\mathbb{Z}$. Para toda parte L de V , uma h -alça de L é uma aresta xy dotada das seguintes propriedades

 h -alça

- $x, y \in L$,
- $h(x) = h(y) \geq h(l)$ para todo l em L .

Denotaremos por $\Delta_h(L)$ o conjunto das alças de L .

 $\Delta_h(L)$

Dado i no conjunto de valores de h , seja V^i o conjunto $\{x \in V : h(x) \leq i\}$. Uma *fatia gorda de nível i* é o conjunto de vértices de um componente conexo de $G[V^i]$. Uma *fatia magra de nível i* é o conjunto de vértices de um componente conexo de $G[V^i] - \Delta_h(V^i)$. É claro que as fatias gordas num mesmo nível são disjuntas duas a duas. O mesmo vale para as fatias magras. Cada fatia gorda é uma união de fatias magras. Em particular, uma fatia gorda pode ser idêntica à correspondente fatia magra. Uma *fatia* é uma fatia magra ou uma fatia gorda em algum nível.

fatia gorda
fatia magra

fatia

Seja $\mathcal{L}_g$ a coleção das fatias gordas determinadas por h e $\mathcal{L}_m$ a coleção das fatias magras determinadas por h . O *fatiamento de G determinado por h* é a multicoleção $\mathcal{L} := \mathcal{L}_g \cup \mathcal{L}_m$ onde a união é entendida com multiplicidade. Assim, se L é uma fatia de $\mathcal{L}_g$ e também

fatiamento

uma fatia de $\mathcal{L}_m$ então $\bar{L}$ comparece com duas cópias em $\mathcal{L}$. É evidente que qualquer fatiamento constitui uma multicoleção laminar de partes de V , cada qual induzindo um subgrafo conexo de G .

Figura 3.3: Uma fatia gorda de nível i e as correspondentes fatias magras de nível i .

Seja i um inteiro no conjunto de valores de h e L um conjunto maximal de vértices com relação à seguinte propriedade: para cada par u, v de vértices em L , existe um caminho P de u até v tal que $h(x) \leq i$ para todo x em V_P . É claro que $G[L]$ é conexo e todo vizinho x de L é tal que $h(x) > i$. Portanto, L é uma fatia gorda de nível i . Reciprocamente, uma fatia gorda de nível i é um conjunto maximal de vértices relativo à propriedade acima. Assim, se L_1 e L_2 são fatias gordas distintas de nível i então para todo u_1 em L_1 e para todo u_2 em L_2 , qualquer caminho de u_1 até u_2 contém pelo menos um vértice interno x tal que $h(x) > i$.

Seja i um inteiro no conjunto de valores de h e L um conjunto maximal de vértices com relação à seguinte propriedade: para cada par u, v de vértices em L , existe um caminho P de u até v tal que $\min(h(x), h(y)) < i$ para toda aresta xy de P . É claro que $G[L]$ é conexo e todo vizinho x de L é tal que $h(x) \geq i$. Portanto, L é uma fatia magra de nível i . Reciprocamente, uma fatia magra de nível i é um conjunto maximal de vértices relativo à propriedade acima. Assim, se L_1 e L_2 são fatias magras distintas de nível i então para todo u_1 em L_1 e para todo u_2 em L_2 , qualquer caminho de u_1 até u_2 restrito a vértices v tais que $h(v) \leq i$, contém pelo menos uma aresta xy tal que $h(x) = h(y) = i$.

3.4 Potenciais

No decorrer desta seção r é um vértice arbitrário de G . Uma função h de V em $\mathbb{Z}$ é um *w-potencial relativo a r* se

w-potencial

- (p0) $h(r) = 0$,
- (p1) $|h(x) - h(y)| \leq 1$ para toda aresta xy ,
- (p2) para toda fatia magra L determinada por h , $\Delta_h(L) \cap E^- = \emptyset$ e
- (p3) para toda fatia L determinada por h
 - (a) $\nabla(L) \cap E^- = \emptyset$ se r em L e
 - (b) $|\nabla(L) \cap E^-| = 1$ se r em $V \setminus L$,

LEMA 3.8. Se h é um *w-potencial relativo a r* e $\mathcal{L}$ o fatiamento determinado por h então $\mathcal{L}$ é um certificado de 2ª ordem laminar, conexo e limpo em relação a r .

Prova. O fatiamento $\mathcal{L}$ é, por definição, laminar, conexo e limpo em relação a r . Sendo assim, basta mostrar que $\mathcal{L}$ é um certificado de 2ª-ordem. É evidente que $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$ para todo L em $\mathcal{L}$. Mostraremos, inicialmente, que $\mathcal{L}$ é ∇ -bidisjunta. Seja α uma aresta de G com pontas a e b . Troque os papéis de a e b , se necessário, de modo que $h(a) \leq h(b)$. Se $h(a) < h(b)$ então, em virtude de (p1), $h(a) = h(b) - 1$ e α está na cofronteira de exatamente uma fatia gorda e uma fatia magra de nível $h(a)$. Se $i > h(a)$, a e b são elementos de V^i , de modo que α não está na cofronteira de nenhuma fatia de nível i . Se $i < h(a)$ então a e b são elementos de $V \setminus V^i$, de modo que α não está na cofronteira de nenhuma fatia de nível i . Portanto, $h(a) < h(b)$ implica que α está na cofronteira de exatamente dois elementos de $\mathcal{L}$.

Suponha, agora, que $h(a) = h(b)$. Seja L a fatia magra de nível $h(a)$ que contém a . Se $b \in L$ então α não está na cofronteira de nenhuma fatia de $\mathcal{L}$. Se $b \notin L$ então existe uma fatia magra L' de nível $h(a)$ que contém b . Analogamente ao mostrado acima, α não está na cofronteira de nenhuma fatia de nível i para $i > h(a)$ ou $i < h(a)$. Portanto, cada aresta está na cofronteira de no máximo duas fatias de $\mathcal{L}$.

Mostraremos, agora, que cada aresta negativa está na cofronteira de dois elementos de $\mathcal{L}$. Seja α uma aresta negativa. Já provamos que, se $h(a) < h(b)$ então α está na cofronteira de dois elementos de $\mathcal{L}$. Se $h(a) = h(b)$ então, devido a (p2) e (p3), a e b estão em fatias magras distintas de nível $h(a)$, ou seja, existem dois elementos de $\mathcal{L}$ que contêm α em sua cofronteira. $\square$

COROLÁRIO 3.9. Se h é um *w-potencial relativo a r* então w é conservativa. $\square$

Circuitos de peso zero, ou seja, circuitos C tais que $w(C) = 0$, são importantes em virtude da seguinte observação: seja F uma T -junção mínima. De acordo com o Lema de Guan, w^F é conservativa. Seja C um circuito tal que $w^F(C) = 0$, ou seja, $|C \cap F| = |C \setminus F|$. Então $F \oplus C$ é uma T -junção mínima uma vez que $|F \oplus C| = |F|$ e, portanto, $w^{F \oplus C}$ é conservativa. Assim, trocando-se os sinais das arestas de qualquer circuito de peso zero obtemos uma nova função conservativa.

LEMA 3.10 (SEBÖ [22]). *Se h é um w -potencial relativo a r e C é um circuito tal que $w(C) = 0$ então $\Delta_h(L) \cap C = \emptyset$ para toda fatia magra L determinada por h . Se, ademais, $\nabla(L) \cap C \neq \emptyset$ para alguma fatia L então $r \notin L$ e $\nabla(L) \cap C = \{\alpha, \beta\}$ onde $\alpha \in E^-$ e $\beta \in E^+$.*

Prova. Seja $\mathcal{L}$ o fatiamento determinado por h e L uma de suas fatias. Então $|\nabla(L) \cap C|$ é par pois C é um circuito donde $w(\nabla(L) \cap C) \geq 0$ porque $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$. Segue do Lema 3.3 que

$$w(C) \geq \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap C) \geq 0.$$

Como $w(C) = 0$, vale igualdade em todas as passagens, assim $w(\nabla(L) \cap C) = 0$ para toda fatia L . Devido a (p2), $\Delta_h(L)$ só inclui arestas positivas para toda fatia magra L donde $\Delta_h(L) \cap C = \emptyset$. Suponha, agora, que $\nabla(L) \cap C \neq \emptyset$. Então $\nabla(L) \cap C = \{\alpha, \beta\}$ onde $\alpha \in E^-$ e $\beta \in E^+$. Ademais, como $\nabla(L) \cap E^- \neq \emptyset$, segue que $r \notin L$. $\square$

A seguinte notação será útil. Se $\mathcal{L}$ denota o fatiamento de G determinado por h e x, y são vértices de G então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &:= \{L \in \mathcal{L} : x \in L\}, & \mathcal{L}(x) \\ \mathcal{L}(\bar{x}) &:= \{L \in \mathcal{L} : x \notin L\}, & \mathcal{L}(\bar{x}) \\ \mathcal{L}(x, y) &:= \{L \in \mathcal{L}, x \in L, y \in L\}, & \mathcal{L}(x, y) \\ \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) &:= \{L \in \mathcal{L}, x \notin L, y \notin L\} \text{ e} & \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \mathcal{L}(x, \bar{y}) &:= \{L \in \mathcal{L}, x \in L, y \notin L\}. & \mathcal{L}(x, \bar{y}) \end{aligned}$$

LEMA 3.11 (SEBÖ [22]). *Se h é um w -potencial relativo a r então $w(P) \geq h(x)$ para todo caminho P unindo r e x ,*

Prova. A seguinte observação será útil na demonstração do lema: seja $\mathcal{L}$ o fatiamento determinado por h e x um vértice. É fácil determinar a cardinalidade de $\mathcal{L}(x)$. Basta

observar que, para cada $i \geq h(x)$, existem exatamente duas fatias, uma gorda e uma magra, de nível i que contêm x . Portanto, $|\mathcal{L}(x)| = 2(\max_{v \in V} h(v) - h(x) + 1)$.

Seja x um vértice e P um caminho de r até x . Para todo elemento L de $\mathcal{L}$ temos, em virtude da definição de potencial, que

$$w(\nabla(L) \cap P) \geq \begin{cases} 0 & \text{se } L \in \mathcal{L}(\bar{r}, \bar{x}) \cup \mathcal{L}(r, x) \\ -1 & \text{se } L \in \mathcal{L}(\bar{r}, x) \\ 1 & \text{se } L \in \mathcal{L}(r, \bar{x}). \end{cases}$$

Conseqüentemente, pelo Lema 3.3, temos que

$$\begin{aligned} w(P) &\geq \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} w(\nabla(L) \cap P) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}(\bar{r}, \bar{x})} w(\nabla(L) \cap P) + \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}(\bar{r}, x)} w(\nabla(L) \cap P) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}(r, \bar{x})} w(\nabla(L) \cap P) + \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}(r, x)} w(\nabla(L) \cap P) \\ &\geq \frac{1}{2} (|\mathcal{L}(r, \bar{x})| - |\mathcal{L}(\bar{r}, x)|) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathcal{L}(r)| - |\mathcal{L}(r, x)| - |\mathcal{L}(x)| + |\mathcal{L}(r, x)|) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathcal{L}(r)| - |\mathcal{L}(x)|) \\ &= \frac{1}{2} (2(\max_{v \in V} h(v) - h(r) + 1) - 2(\max_{v \in V} h(v) - h(x) + 1)) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

□

Um w -potencial h é *ótimo* se, para todo vértice x , existe um caminho P de r até x tal que $w(P) = h(x)$. potencial ótimo

COROLÁRIO 3.12 (SEBŐ [22]). *Se h é um w -potencial relativo a r e P um caminho de r a x então $w(P) = h(x)$ implica em*

- (i) para toda fatia magra $L \in \mathcal{L}$, $\Delta_h(L) \cap P = \emptyset$,
- (ii) para todo $L \in \mathcal{L}(\bar{r}, x)$, $\nabla(L) \cap P = \{\alpha\}$ onde $\alpha \in E^-$,
- (iii) para todo $L \in \mathcal{L}(r, \bar{x})$, $\nabla(L) \cap P = \{\alpha\}$ onde $\alpha \in E^+$,

(iv) para todo $L \in \mathcal{L}(\bar{r}, \bar{x})$ tal que $\nabla(L) \cap P \neq \emptyset$, $\nabla(L) \cap P = \{\alpha, \beta\}$ onde $\alpha \in E^-$ e $\beta \in E^+$ e

(v) para todo $L \in \mathcal{L}(r, x)$, $\nabla(L) \cap P = \emptyset$.

onde $\mathcal{L}$ é o fatiamento determinado por h . Reciprocamente, (i) a (v) garantem que $w(P) = h(x)$.

Capítulo 4

O Teorema de Sebő-Lucchesi

No Capítulo 3 vimos que a existência de uma função potencial garante a inexistência de circuitos negativos. Neste capítulo, veremos uma prova não-algorítmica da recíproca deste fato, ou seja, mostraremos que se o grafo é livre de circuitos negativos então admite uma função potencial.

4.1 Preliminares

Seja G um grafo e w uma função que leva cada aresta de G num número. Se P é uma trilha então diremos que o número

$$w(P) := \sum_{\alpha \in P} w(\alpha)$$

é o *peso* de P . Uma trilha P de u até v é *w-mínima* se, dentre todas as trilhas que unem u e v , $w(P)$ é mínimo.

Para cada par u, v de vértices, seja $\lambda^w(u, v)$ o peso de um caminho w -mínimo de u até v . Diremos que λ^w satisfaz a *desigualdade triangular* se

$$\lambda^w(x, z) \leq \lambda^w(x, y) + \lambda^w(y, z)$$

para toda tripla x, y, z de vértices. É bem sabido que λ^w satisfaz a desigualdade triangular sempre que $w \geq 0$. Ademais, sob a hipótese $w \geq 0$, toda trilha w -mínima é um caminho e subcaminhos de caminhos w -mínimos são w -mínimos. Isto é, se P é um caminho w -mínimo de x até z e y é um vértice interno de P , então $P(x, y)$ é um caminho w -mínimo de x até y . Esta “estrutura” deixa de existir se $w \not\geq 0$ como mostra a Figura 4.1.

peso

$\lambda^w(u, v)$
desigualdade triangular

Figura 4.1: A aresta gorda é negativa e a magra é positiva. É fácil verificar que $P_{xy} = \langle x, z, y \rangle$ é um caminho w -mínimo de x até y , $P_{xz} = \langle x, y, z \rangle$ é um caminho w -mínimo de x até z e $P_{yz} = \langle y, z \rangle$ é um caminho w -mínimo de y até z . A função λ^w não satisfaz a desigualdade triangular pois $\lambda^w(x, y) = \lambda^w(x, z) = 0$ e $\lambda^w(y, z) = -1$. Assim, $\lambda^w(x, z) > \lambda^w(x, y) + \lambda^w(y, z)$. Ainda mais, subcaminhos de caminhos w -mínimos não são mínimos já que, por exemplo, $\langle x, y \rangle$ é subcaminho de P_{xz} mas não é w -mínimo.

4.2 O Teorema

Durante o restante do capítulo, G denotará um grafo conexo, w uma função conservativa de E em $\{-1, +1\}$ e r um vértice fixo de G . Como de hábito, E^- será o conjunto das arestas negativas, isto é, arestas α tais que $w(\alpha) = -1$ e E^+ será o conjunto das arestas positivas.

O w -posto relativo a r de um vértice x , é o número

w -posto

$$\min\{w(P) : P \text{ é uma trilha de } r \text{ a } x\}.$$

Seja λ uma função que associa a cada vértice x o w -posto relativo a r de x . Uma função λ nessas condições é denominada de *função w -posto relativa a r* . É fácil verificar que,

$$\lambda(x) = \min\{w(P) : P \text{ é um caminho de } r \text{ a } x\},$$

para todo vértice x , visto que w é conservativa.

No que segue, nos ocuparemos com a demonstração do teorema que segue. Note que este teorema implica que λ é um w -potencial relativo a r .

Figura 4.2: Ilustração do Teorema de Sebő-Lucchesi. As arestas gordas são negativas; as magras são positivas.

TEOREMA 4.1 (SEBŐ [22] E LUCCHESI [6]). *Seja G um grafo conexo, w uma função conservativa de E em $\{-1, +1\}$ e r um vértice arbitrário. Então,*

(p1) $|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq 1$ para toda aresta xy ,

(p2) para toda fatia magra L determinada por λ , $\Delta_\lambda(L) \cap E^- = \emptyset$ e

(p3) para toda fatia L determinada por λ

(a) $\nabla(L) \cap E^- = \emptyset$ se r em L e

$$(b) |\nabla(L) \cap E^-| = 1 \text{ se } r \text{ em } V \setminus L.$$

Trilhas, neste capítulo, serão tratadas também como subgrafos, ou seja, a trilha P será confundida com o subgrafo $G[E_P]$. Assim, se $P_1, \dots, P_k$ são trilhas então $P_1 \cup \dots \cup P_k$ denota o subgrafo $G[E_{P_1}] \cup \dots \cup G[E_{P_k}]$.

4.3 Botões e hastes

Um vértice v é *profundo* se $\lambda(v)$ é um mínimo de λ em V . É claro que o mínimo de λ em V é no máximo 0.

*vértice
profundo*

LEMA 4.2. Para todo vértice profundo v e todo caminho w -mínimo P de r até v ,

- (i) $w(P(y, v)) \leq 0$ para todo y em V_P e
- (ii) se $\lambda(v) < 0$ então v incide em uma única aresta negativa, digamos α , e α é a última aresta de P .

Prova de (i). Seja v um vértice profundo e P um caminho w -mínimo de r até v . Seja y um vértice de P . Se $w(P(y, v)) > 0$ então $w(P(r, y)) = w(P) - w(P(y, v)) < w(P) = \lambda(v)$, o que é uma contradição. Portanto, $w(P(y, v)) \leq 0$ para todo y em V_P , o que prova (i).

Prova de (ii). Em virtude de (i) e visto que $\lambda(v) < 0$, a aresta terminal α de P é negativa. Agora, suponha que exista uma aresta $\beta \neq \alpha$ negativa incidente em v . Denote por u a outra ponta de β . Se $u \in V_P$ então $P(u, v) \cdot \langle v, \beta, u \rangle$ é um circuito de peso $w(P(u, v)) + w(\beta) < 0$, o que é uma contradição pois w é conservativa. Se $u \notin V_P$, então $P \cdot \langle v, \beta, u \rangle$ é um caminho de r até u de peso $\lambda(v) - 1$, o que contraria v profundo. Concluimos assim que α é a única aresta negativa incidente em v que, ademais, é terminal em P donde (ii) está provado. $\square$

Um *botão* é um vértice profundo, digamos t , tal que existe um caminho w -mínimo N de r até t para o qual $w(N(z, t)) < 0$ para todo z em $V_N \setminus \{t\}$. Qualquer caminho N com essas propriedades será chamado de *haste* do botão t .

botão

haste

É fácil estabelecer a existência de um botão. Dentre todos os caminhos com origem em r e peso $\min_v \lambda(v)$, tome um caminho P cuja cardinalidade é mínima. Seja t o término de P . É claro que se $\lambda(t) = 0$ então $t = r$ e r é o único botão. Neste caso, P é degenerado e não há nada a provar. Suponha, pois, $\lambda(t) < 0$. Em virtude do Lema 4.2, para todo y em $V_P \setminus \{t\}$, $w(P(y, t)) \leq 0$. Se, para algum y em $V_P \setminus \{t\}$, $w(P(y, t)) = 0$ então $w(P(r, y)) = w(P)$. Entretanto, $|P(r, y)| < |P|$, o que contraria a minimalidade de $|P|$.

A discussão acima juntamente com o Lema 4.2 mostram que, para todo botão t tal que $\lambda(t) < 0$, a aresta terminal de qualquer haste de t é a única aresta negativa incidente em t .

4.4 Pétalas e flores

Para qualquer botão t e correspondente haste N , uma *flor com botão t* é um subgrafo D de G tal que

flor

$$(f0) \quad V_N \cap V_D = \{t\},$$

$$(f1) \quad E^- \cap E_D \text{ é emparelhamento perfeito em } D - t,$$

$$(f2) \quad |\nabla(a) \cap E^-| = 1 \text{ para todo vértice } a \text{ de } D - t \text{ e}$$

$$(f3) \text{ para todo par } a, b \text{ de vértices de } D \text{ existe um caminho } S \text{ de } a \text{ até } b \text{ em } D \text{ tal que } w(S) \leq 0.$$

LEMA 4.3. *Se D é uma flor com botão t então, para todo vértice a em D , existe um caminho S de t até a em D tal que $w(S) = 0$, ou seja, todo vértice de D é profundo.*

Prova. Seja N a haste de t . Seja a um vértice de D . Em virtude de (f3), existe um caminho S de t até a em D tal que $w(S) \leq 0$. De acordo com (f1), $N \cdot S$ é um caminho de r até a tal que $w(N \cdot S) \leq \lambda(t)$. Como t é profundo segue que $w(S) = 0$ e $w(N \cdot S) = \lambda(t)$. $\square$

Fixemos a seguinte notação: para cada vértice a em D , R_a denota um caminho de t até a em D tal que $w(R_a) = 0$. Deste modo, para cada a , R_a é um caminho, de comprimento par, cujas arestas estão alternadamente em E^+ e E^- .

R_a

O lema seguinte é consequência imediata da definição de flor:

LEMA 4.4. *Para toda flor D com botão t , se $\lambda(t) < 0$ então $|\nabla(V_D) \cap E^-| = 1$ e se $\lambda(t) = 0$ então $\nabla(V_D) \cap E^- = \emptyset$.* $\square$

Uma *pétala de D* é uma orelha Q de D , disjunta de $V_N \setminus \{t\}$, tal que $w(Q) \leq 1$.

pétala

LEMA 4.5. *Se D é uma flor com botão t e Q é uma pétala de D então $D \cup Q$ é uma flor com botão t .*

Prova. Seja N a haste de t . É claro que $D \cup Q$ satisfaz (f0). Sejam a e b as pontas de Q . Suponha, inicialmente, $|Q| = 1$. Então, como D é flor, $ab \in E^+$. Portanto, neste caso, $D \cup Q$ é uma flor.

Suponha, agora, $|Q| > 1$. Seja z um vértice interno de Q . Como $w(Q) \leq 1$, um dos caminhos $Q(a, z)$ ou $Q(z, b)$ tem peso no máximo 0. Ajuste a notação de modo que $w(Q(a, z)) \leq 0$. Então $K := N \cdot R_a \cdot Q(a, z)$ é um caminho de r até z tal que $w(K) \leq \lambda(t)$. Assim, $w(K) = \lambda(t)$, porque t é profundo donde $w(Q(a, z)) = 0$. Pelo Lema 4.2, a aresta

Figura 4.3: Uma flor D com botão t e correspondente haste N e uma pétala Q de D .

terminal de K é a única aresta negativa que incide em z pois $Q(a, z) \neq \emptyset$ e z é profundo. Portanto, $D \cup Q$ satisfaz (f1) e (f2).

Vamos provar que $D \cup Q$ satisfaz (f3). Seja x um vértice de D e z um vértice interno de Q . Ajuste a notação de modo que $w(Q(a, z)) \leq 0$. Por hipótese, existe um caminho S de x até a em D tal que $w(S) \leq 0$. Consequentemente, $S \cdot Q(a, z)$ é um caminho de x até z tal que $w(S \cdot Q(a, z)) \leq 0$. Logo, (f3) vale para o par x, z . Agora, sejam z_1 e z_2 vértices internos de Q . Suponha que z_1 seja o vértice de Q mais próximo de a e z_2 o mais próximo de b . Se $w(Q(z_1, z_2)) \leq 0$ então $Q(z_1, z_2)$ é o caminho procurado. Suponha, então, que $w(Q(z_1, z_2)) > 0$, ou seja, $w(Q(a, z_1) \cup Q(b, z_2)) \leq 0$. Por hipótese, existe um caminho S de a até b em D tal que $w(S) \leq 0$. Portanto, $Q(z_1, a) \cdot S \cdot Q(b, z_2)$ é um caminho de z_1 até z_2 em $D \cup Q$ de peso no máximo 0. Concluimos assim que $D \cup Q$ satisfaz (f3). $\square$

LEMA 4.6. Se D é uma flor maximal com botão t e haste N então

$$w(Q) \geq \begin{cases} 0 & \text{se } Q \text{ inclui a aresta terminal de } N \text{ e} \\ 2 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para toda orelha Q de D .

Prova. Suponha, inicialmente, que $\lambda(t) = 0$. Neste caso, N é degenerado donde qualquer orelha de D com peso no máximo 1 é uma pétala de D . Segue, em virtude da maximalidade de D , que $w(Q) \geq 2$.

Suponha, agora, que $\lambda(t) < 0$. Sejam a e b as pontas de Q . Seja α a aresta terminal de N . Suponha, também, que Q não inclui α e $w(Q) \leq 1$. É claro que $V_N \cap V_Q \neq \emptyset$ caso contrário Q é uma pétala mas isto contraria a maximalidade de D . Escolha z em $V_Q \cap (V_N \setminus \{t\})$ de modo a minimizar $|N(z, t)|$. Como $w(Q) \leq 1$ um dos subcaminhos $Q(a, z)$ ou $Q(z, b)$ tem peso no máximo 0. Ajuste a notação de modo que $w(Q(a, z)) \leq 0$. Conseqüentemente, $N(z, t) \cdot R_a \cdot Q(a, z)$ é um circuito de peso negativo, o que contraria w conservativa.

Suponha, finalmente, que Q inclui α donde uma das pontas de Q , digamos a , é igual a t . Então $Q \cdot \tilde{R}_b$ é um circuito donde $w(Q \cdot \tilde{R}_b) \geq 0$. Portanto, $w(Q) \geq 0$ pois $w(\tilde{R}_b) = 0$. $\square$

LEMA 4.7. *Se D é uma flor maximal com botão t então $w(P) \geq -1$ para todo caminho P com origem e término em V_D .*

Prova. Sejam a e b elementos de V_D e P um caminho de a até b . Se $P \subseteq E_D$ então $w(P) \geq -1$ em virtude de (f1). Suponha, agora, que $P \not\subseteq E_D$. Neste caso, $P \setminus E_D$ é uma união de orelhas de D ; denote por $Q_1, \dots, Q_k$ tais orelhas. Podemos, assim, decompor P no produto de caminhos

$$P_1 \cdot Q_1 \cdot P_2 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_k \cdot P_{k+1}$$

onde $P_1 \cup \dots \cup P_{k+1} \subseteq E_D$. Suponha, inicialmente, que nenhum Q_i inclui a aresta terminal α de N . Pelo lema anterior, $w(Q_i) \geq 2$ para todo i . Logo,

$$w(P) = \sum_{j=1}^{k+1} w(P_j) + \sum_{j=1}^k w(Q_j) \geq -k - 1 + 2k = k - 1 \geq 0$$

uma vez que $k \geq 1$. Suponha, agora, que algum Q_i inclui α . Neste caso, um dos caminhos P_i ou P_{i+1} tem peso pelo menos 0 em virtude de (f1) e (f2). Suponha, sem perda de generalidade, que $w(P_i) \geq 0$. Portanto,

$$w(P) = w(P_i) + w(Q_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^{k+1} w(P_j) + \sum_{j=1, j \neq i}^k w(Q_j) \geq -k + 2(k-1) = k-2 \geq -1$$

uma vez que $k \geq 1$. $\square$

COROLÁRIO 4.8. *Se D é uma flor maximal com botão t e haste N então $w(P) \geq 0$ para todo caminho P , que não inclui a aresta terminal de N , unindo t e algum vértice em V_D .* $\square$

LEMA 4.9. Se D é uma flor maximal com botão t então $\lambda(x) = \lambda(t) + 1$ para todo x em $\Gamma(V_D)$, ou seja, D é um componente conexo de $G^{\lambda(t)}$.

Prova. Suponha, inicialmente, que $\lambda(t) < 0$. Seja N uma haste de t e α sua aresta terminal. Seja s a outra ponta de α . Vamos mostrar que $\lambda(s) = \lambda(t) + 1$. Pela definição de botão, $w(\alpha) = -1$ e, portanto, $N(r, s)$ é um caminho de r até s de peso $\lambda(t) + 1$ donde $\lambda(s) \leq \lambda(t) + 1$. Se $s = r$ então $\lambda(s) = 0 = \lambda(t) + 1$. Suponha $s \neq r$. Seja $\alpha_s = zs$ a aresta de N distinta de α incidente em s . Se $\alpha_s \in E^+$ então $w(N(z, t)) = 0$, o que é uma contradição pois N é uma haste de t . Então $\alpha_s \in E^-$, isto é, s incide em duas arestas negativas. Pelo Lema 4.2, segue que $\lambda(s) \geq \lambda(t) + 1$. Portanto, $\lambda(s) = \lambda(t) + 1$.

Seja x em $\Gamma(V_D) \setminus \{s\}$ e a um vizinho de x em D . Então $N \cdot R_a \cdot \langle a, x \rangle$ é uma trilha de r até x de peso $\lambda(t) + 1$ donde $\lambda(x) \leq \lambda(t) + 1$. Suponha que $\lambda(x) = \lambda(t)$ e seja P um caminho w -mínimo de r até x . Temos os seguintes casos:

Caso 1 $V_P \cap V_D = \emptyset$.

É evidente que, neste caso, $\lambda(t) < 0$. Tome z em $V_N \cap V_P$ de modo a minimizar $|N(z, t)|$. Considere o circuito $C := N(z, t) \cdot R_a \cdot \langle a, x \rangle \cdot \tilde{P}(x, z)$. Como w é conservativa, $w(C) \geq 0$ o que implica que $w(\tilde{P}(x, z)) \geq 0$. Agora, $w(P(r, z)) \leq w(P)$ donde $w(P(r, z)) = w(P)$ uma vez que $w(P) = \lambda(t)$ e t é profundo. Visto que N é uma haste, temos que $w(N(z, t)) < 0$ mas isto implica que $P(r, z) \cdot N(z, t)$ é um caminho de r a t de peso menor que $\lambda(t)$, o que contraria t profundo.

Caso 2 $V_P \cap V_D \neq \emptyset$.

Seja b o último vértice de P em D e $\alpha_b = by$ a aresta de $\nabla(V_D)$ que também é aresta de P . É claro que $w(P(r, b)) \geq \lambda(b) = \lambda(t)$. Se $\alpha_b \neq \alpha$ então, devido ao Lema 4.6, $w(P(b, x)) \geq 1$ o que implica que $w(P) \geq \lambda(t) + 1$.¹ Se $\alpha_b = \alpha$ então $\lambda(t) < 0$ e a aresta terminal de $P(r, b)$ é positiva. De acordo com o Lema 4.2, $w(P(r, b)) \geq \lambda(t) + 1$. Em virtude do Lema 4.6, $w(P(b, x)) \geq 0$. Portanto, $w(P) \geq \lambda(t) + 1$.

□

4.5 Prova do Teorema de Sebő-Lucchesi

Prova de (p1). Suponha que $|\lambda(x) - \lambda(y)| > 1$ para alguma aresta xy de G . Ajuste a notação, trocando-se os papéis de x e y se necessário, de modo que $\lambda(y) > \lambda(x) + 1$. Seja P um caminho w -mínimo de r até x . Se $xy \notin P$ então $Q := P \cdot \langle x, y \rangle$ é uma trilha de r até y satisfazendo $w(Q) \leq \lambda(x) + 1 < \lambda(y)$, o que é uma contradição. Se $xy \in P$ então

¹Note que esta argumentação inclui o caso em que $\lambda(t) = 0$.

$P(r, y)$ é um caminho de r até y satisfazendo $w(P(r, y)) \leq \lambda(x) + 1 < \lambda(y)$, novamente uma contradição. Portanto, $|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq 1$ para todo $xy \in E$. $\square$

Prova de (p2) e (p3). A demonstração é por indução em $|V|$. Se $|V| = 1$ é trivial. Suponha $|V| > 1$. Seja D uma flor maximal com botão t . Para cada a em V_D , $\{a\}$ constitui uma fatia magra de nível $\lambda(t)$. Ainda mais, em virtude do Lema 4.9, todo vizinho de V_D tem w -posto $\lambda(t) + 1$ donde V_D é uma fatia gorda de nível $\lambda(t)$. É evidente que tais fatias satisfazem as condições (p2) e (p3).

Seja T' o conjunto $V_D \cup \Gamma(V_D)$ e G' o grafo $G\langle T' \rangle$. Se $r \in T'$, seja r' o vértice T' ; caso contrário, seja r' o próprio r . Seja w' a restrição de w a $E_{G'}$ e λ' a função w' -posto relativa a r' em G' . De acordo com o Lema 4.6, w' é conservativa em G' . Então, por hipótese de indução, o fatiamento de G' determinado por λ' satisfaz (p2) e (p3). Temos os seguintes casos:

- (i) Se $\lambda(t) < 0$ então, devido ao Fato 1 abaixo, o fatiamento de G determinado por λ é igual ao fatiamento de G' determinado por λ' com exceção de que $(\{a\} : a \in V_D)$ e V_D não são fatias de G' .
- (ii) Se $\lambda(t) = 0$ então, devido ao Fato 2 abaixo, o fatiamento de G determinado por λ é igual ao fatiamento de G' determinado por $\lambda' - 1$ com exceção de que $(\{a\} : a \in V_D)$ e V_D não são fatias de G' .

Isto completa a prova de (p2) e (p3). $\square$

FATO 1. Se $\lambda(t) < 0$ então $\lambda'(T') = \lambda(t) + 1$ e $\lambda'(v) = \lambda(v)$ para todo $v \neq T'$.

Prova. Seja N a haste de t . Seja x o primeiro vértice de T' que N atinge. É claro que $x \neq t$. Como t é botão, temos $w(N(x, t)) < 0$. No entanto, $N(r, x)$ corresponde em G' a um caminho de r até T' . Logo, $\lambda'(T') \leq w(N(r, x)) \leq \lambda(t) + 1$. Suponha que $\lambda'(T') < \lambda(t) + 1$. Seja P' um caminho w' -mínimo de r' a T' em G' . P' corresponde em G a um caminho de r a um vértice x em $\Gamma(V_D)$. Então $\lambda(x) \leq w'(P') < \lambda(t) + 1$, mas isto contraria o Lema 4.9. Portanto, $\lambda'(T') = \lambda(t) + 1$.

Provaremos, agora, que $\lambda'(v) \leq \lambda(v)$ para todo $v \neq T'$. Seja P um caminho w -mínimo de r até v . Se P não passa por T' então P é um caminho em G' de r' até v . Assim, $\lambda'(v) \leq \lambda(v)$. Suponha que P passa por pelo menos um elemento de T' . É evidente que P pode ser decomposto em um produto de caminhos $P_1 \cdot Q \cdot P_2$, onde o término de P_1 e origem de Q é o primeiro vértice de T' que P atinge e o término de Q e origem de P_2 é o último vértice de T' que P atinge. É claro que $P_1 \cdot P_2$ é um caminho de r' até v em G' . Mostraremos que $w(Q) \geq 0$. Seja x_1 a origem de Q e y_1 o término de Q . Seja a o primeiro vértice de D que Q atinge e x o seu predecessor em Q . Seja b o último vértice

de D que Q atinge e y o seu sucessor em Q . Note que podem não haver vértices a e b como acima. Em tal caso, $Q(a, b) = \emptyset$. Agora, $w(Q(x_1, x)) \geq 0$ e $w(Q(y_1, y)) \geq 0$ em virtude do Lema 4.6. De acordo com o Lema 4.7, $w(Q(a, b)) \geq -1$. Se $\alpha \in Q(a, b)$ então $ax \in E^+$ e $by \in E^+$. Segue daí que $w(Q) \geq 0$. Se $\alpha \notin Q(a, b)$, $ax \neq \alpha$ e $by \neq \alpha$ então $ax \in E^+$ e $by \in E^+$ donde $w(Q) \geq 0$. Se $\alpha \notin Q(a, b)$ e, ou $ax = \alpha$ ou $by = \alpha$ então, de acordo com o Corolário 4.8, $Q(a, b) \geq 0$ e, portanto, $w(Q) \geq 0$. Concluimos assim que $P_1 \cdot P_2$ corresponde a um caminho de r' até v em G' de peso no máximo $w(P)$, ou seja, $\lambda'(v) \leq \lambda(v)$.

Agora vamos provar que $\lambda'(v) \geq \lambda(v)$. Seja P' um caminho w' -mínimo de r' até v em G' . Suponha que P' inclua o vértice T' . P' pode ser escrito como $P_1 \cdot P_2$ onde P_1 é um caminho de r até T' e P_2 é um caminho de T' até v . P_1 corresponde em G a um caminho de r até um elemento x de $\Gamma(V_D)$. Analogamente, P_2 corresponde em G a um caminho de um elemento y de $\Gamma(V_D)$ até v . Seja a um vizinho de x em V_D e b um vizinho de y em V_D . Se $x = s$ então o caminho $P_1 \cdot \langle s, \alpha, t \rangle \cdot R_b \cdot \langle b, y \rangle \cdot P_2$ é um caminho de r até v em G de peso $w(P')$. Se $x \neq s$, seja z o primeiro vértice de $P_1 \cup P_2$ encontrado ao caminharmos sobre N partindo-se de s em direção a r . Suponha que z seja um vértice de P_1 . O outro caso é análogo. Considere o circuito $K := N(z, t) \cdot R_a \cdot \langle a, x \rangle \cdot \tilde{P}_1(x, z)$. Como $w(N(z, t)) < 0$, $w(R_a) = 0$, $w(ax) = 1$ e $w(K) \geq 0$, segue que $w(\tilde{P}_1(x, z)) \geq w(N(z, t)) + 1$. Portanto, $P_1(r, z) \cdot N(z, t) \cdot R_b \cdot \langle b, y \rangle \cdot P_2$ é um caminho de r até v de peso no máximo $w(P)$. Logo, $\lambda'(v) \geq \lambda(v)$. Assim, $\lambda'(v) = \lambda(v)$ o que termina a prova do Fato 1. $\square$

FATO 2. Se $\lambda(t) = 0$ então $\lambda'(T') = 0$ e $\lambda'(v) = \lambda(v) - 1$ para todo $v \neq T'$.

Prova. Suponha $\lambda(t) = 0$. Então $t = r$. Como w' é conservativa em G' , segue que $\lambda'(T') = 0$. Seja v um vértice em $V \setminus T'$ e P um caminho w -mínimo de r a v em G . Seja x o último vértice de P em T' . Então $P(x, v)$ corresponde em G' a um caminho de r' até v . Em virtude do Lema 4.9, $w(P(r, x)) \geq 1$ donde $w(P(x, v)) \leq w(P) - 1$. Portanto, $\lambda'(v) \leq \lambda(v) - 1$. Suponha que $\lambda'(v) < \lambda(v) - 1$. Seja P' um caminho w' -mínimo de r' até v em G' . P' corresponde em G a um caminho de um vizinho de V_D , digamos x , até v . Seja a um vizinho de x em V_D . Conseqüentemente, $R_a \cdot \langle a, x \rangle \cdot P'$ é um caminho de r até v de peso estritamente menor que $\lambda(v)$, o que é uma contradição. Portanto, $\lambda'(v) = \lambda(v) - 1$ para todo $v \neq T'$ em $V_{G'}$ provando assim o Fato 2. $\square$

4.6 O caso bipartido

Um grafo é *bipartido* se seu conjunto de vértices admite uma partição em conjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta do grafo tem uma ponta em V_1 e a outra em V_2 . É um fato bem conhecido que um grafo é bipartido se, e só se, não contém circuitos ímpares. *bipartido*

TEOREMA 4.10 (SEBŐ [22] E LUCCHESI [6]). *Seja H um grafo bipartido e conexo, w uma função conservativa de E em $\{-1, +1\}$ e r um vértice arbitrário. Se λ denota a função w -posto relativa a r então,*

- (b1) $|\lambda(x) - \lambda(y)| = 1$ para toda aresta xy e
- (b2) para toda fatia gorda L determinada por λ
 - (a) $\nabla(L) \cap E^- = \emptyset$ se r em L e
 - (b) $|\nabla(L) \cap E^-| = 1$ se r em $V \setminus L$.

Prova. Seja xy uma aresta de H . Em virtude de (p1) do Teorema 4.1, $|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq 1$. Como H é bipartido, x e y estão em diferentes classes da bipartição de H . Segue daí que qualquer caminho unindo r e x tem paridade distinta de qualquer caminho unindo r e y . Assim, $|\lambda(x) - \lambda(y)| = 1$ donde $\Delta_\lambda(L) = \emptyset$ para toda fatia magra L determinada por λ . Isto completa a prova do teorema. Observe que a coleção das fatias gordas determinadas por λ particiona E e, portanto, esta coleção é um certificado de 1ª ordem para w . Note, também, que a coleção das fatias magras é igual a coleção das fatias gordas. $\square$

4.7 Nota

A prova do Teorema 4.1 apresentada é original, porém baseada numa prova para grafos bipartidos de Sebő [22, 23] e Lucchesi [6] que deduzem deste o caso geral. Embora, em princípio, não-algorítmica, é possível extrair da demonstração apresentada um algoritmo polinomial que recebe um grafo, uma função w das arestas em $\{-1, +1\}$ e devolve ou (1) um circuito negativo ou (2) o w -posto de cada vértice.

Capítulo 5

O Algoritmo da macarronada

Sebő [19] descreve um algoritmo $O(|V|^4)$ que, dado um grafo *bipartido* G , uma parte par T de V e um vértice r , determina uma $(T \oplus \{r, x\})$ -junção mínima para cada vértice x distinto de r . Neste capítulo, apresentaremos uma versão daquele algoritmo para grafos *arbitrários* sob uma ótica diferente da original, porém equivalente.

5.1 Macarronadas

Seja G um grafo conexo e r um de seus vértices. Uma *macarronada com raiz* r é uma função M que associa a cada x em V um caminho de r até x . Para cada vértice x , denotaremos por M^x o valor de M em x . Se w é uma função de E em $\{-1, +1\}$, então a *função peso* de M é a função w_M definida por

macarronada

M^x

w_M

$$w_M(x) := w(M^x) = \sum_{\alpha \in M^x} w(\alpha)$$

para todo vértice x . Por brevidade, quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos por w a função w_M . Note que w , diante desta abreviatura, denota funções definidas sobre $E, 2^E$ e V .

$w := w_M$

Duas macarronadas M e N são *equivalentes* se $w_M = w_N$. A macarronada M será dita *melhor* que N se $w_M(x) \leq w_N(x)$ para todo vértice x e $w_M(x) < w_N(x)$ para algum vértice x . Uma macarronada é *ótima* se não existe macarronada melhor. É evidente que uma macarronada M é ótima se, e só se, para todo x , M^x é um caminho w -mínimo de r até x . Durante este capítulo nos ocuparemos com o seguinte problema:

equivalentes

melhor

ótima

PROBLEMA 2. Dado um grafo conexo G , uma função w de E em $\{-1, +1\}$ e um vértice arbitrário r , determinar uma macarronada ótima com raiz r .

5.2 Melhoramento local de uma macarronada

Esta seção descreve uma generalização para grafos arbitrários de um algoritmo desenvolvido por Sebő [19] para grafos bipartidos. O algoritmo depende dos seguintes conceitos.

Uma *2-junção* é uma $\{x, y\}$ -junção para algum par x, y de vértices distintos. Os *extremos* da 2-junção são os vértices x e y . 2-junção

Normalizar uma 2-junção J significa ou (1) extrair de J um caminho P unindo os extremos de J tal que $w(P) \leq w(J)$ ou (2) extrair de J um circuito negativo. Eis como a operação pode ser executada. Sejam x e y os extremos de J . Tome um caminho P de x até y em J . Se $w(P) \leq w(J)$, devolva P e pare. Caso contrário, $w(P) > w(J)$ e $w(J \setminus P) = w(J) - w(P) < 0$. Mas, $J' := J \setminus P$ é uma $\emptyset$ -junção não-vazia. Agora, devemos extrair de J' um circuito negativo. Para isso, basta executar o seguinte processo iterativo. Como $J' \neq \emptyset$, existe um circuito C em J' . Se $w(C) < 0$ devolva C e pare. Caso contrário, $w(C) \geq 0$ e $w(J' \setminus C) = w(J') - w(C) < 0$. Porém, $J' \setminus C$ é uma $\emptyset$ -junção não-vazia. Comece nova iteração com $J' \setminus C$ no papel de J' . Claramente, a complexidade deste processo é $O(|J|)$. normalizar

Se M é uma macarronada e P é um caminho unindo r e a então denotaremos por $M \stackrel{a}{\leftarrow} P$ a macarronada N definida por: $N^a := P$ e $N^x := M^x$ para todo x distinto de a . $M \stackrel{a}{\leftarrow} P$

O algoritmo que passaremos a descrever depende fortemente do fatiamento determinado por w . Precisaremos da seguinte definição: para uma fatia gorda L , $E_w[L]$ denota o conjunto de arestas $E[L]$; para uma fatia magra L , $E_w[L]$ denota o conjunto de arestas $E[L] \setminus \Delta_w(L)$. Diante destas definições, é fácil verificar que dada uma fatia magra L de nível i e uma aresta xy com $w(x) \leq w(y)$ tem-se $E_w[L]$

$$xy \in E_w[L] \text{ se, e só se, } x, y \in L, w(x) < i \text{ e } w(y) \leq i.$$

Seja M uma macarronada, L uma fatia determinada por w e a um vértice em L . Uma aresta δ é *mal-ajustada ao par L, M^a* se mal-ajustada

(m1) δ tem pelo menos uma ponta em L ,

(m2) $\delta \notin E_w[L]$ e

(m3) $\delta \in E^+ \cap M^a$ ou $\delta \in E^- \setminus M^a$.

Assim, se L é uma fatia gorda então δ é mal-ajustada se, e só se, δ está na cofronteira de L e satisfaz (m3). Se L é uma fatia magra então δ é mal-ajustada se, além de satisfazer (m3), δ é uma w -alça de L ou δ está na cofronteira de L .

Figura 5.1: Aresta mal-ajustada. A aresta gorda é negativa.

ALGORITMO 5.1 (SEBŐ [19]). Recebe um grafo G , uma função w de E em $\{-1, +1\}$, uma macarronada M_0 com raiz r , uma fatia L no fatiamento determinado por w_{M_0} , um vértice a_0 em L e uma aresta δ mal-ajustada ao par $L, M_0^{a_0}$. Devolve ou (1) uma macarronada melhor que M_0 ou (2) um circuito negativo.

Antes de começar a descrição do algoritmo, observe que $G[E_{w_{M_0}}[L]]$ é conexo, portanto, existe um caminho Q_0 com origem a_0 e aresta terminal δ cujas arestas não-terminais estão todas em $E_{w_{M_0}}[L]$. Podemos, agora, descrever o algoritmo.

Cada iteração começa com uma macarronada M equivalente a M_0 (donde L é elemento do fatiamento determinado por w_{M_0}), um vértice a em L e um caminho Q com origem a e aresta terminal δ . Adotaremos a seguinte abreviatura $w := w_M$. A primeira iteração começa com $M = M_0$, $a = a_0$ e $Q = Q_0$. Cada iteração consiste no seguinte:

Seja d a primeira ponta de δ que Q atinge e c a outra ponta de δ .

CASO 1 $|Q| = 1$.

Seja P o resultado da normalização de $M^d \oplus \{\delta\}$. Se P é um circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \stackrel{c}{\leftarrow} P$ e pare.

CASO 2 $|Q| > 1$.

Figura 5.2: Aresta mal-ajustada. A aresta gorda é negativa.

Seja b o vértice adjacente a a em Q e β a aresta de Q que une a e b . Seja R um caminho de a até b incluído em $M^a \oplus M^b$.

CASO 2.1 $w(M^b \oplus R) < w(M^a)$ ou $w(M^a \oplus R) < w(M^b)$.

No primeiro caso, seja P o resultado da normalização de $M^b \oplus R$ e $x := a$. No segundo caso, seja P o resultado da normalização de $M^a \oplus R$ e $x := b$. Se P é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \stackrel{x}{\leftarrow} P$ e pare.

CASO 2.2 $w(M^b \oplus R) \geq w(M^a)$, $w(M^a \oplus R) \geq w(M^b)$ e $R \not\subseteq E_w[L]$.

Ajuste a notação (intercambiando os papéis de a e b se necessário) de modo que $w(a) \geq w(b)$. Partindo-se de a e caminhando sobre R seja γ a primeira aresta fora de $E_w[L]$ encontrada. Seja x a primeira ponta de γ que R atinge e y a outra ponta de γ . Adote as abreviaturas $X := R(a, x)$ e $Y := R(a, y)$.

CASO 2.2.1 $w(Y \setminus M^a) < w(Y \cap M^a)$ ou $w(Y \setminus M^a) = w(Y \cap M^a)$ e $y \notin L$.

Seja P o resultado da normalização de $M^a \oplus Y$. Se P é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \stackrel{y}{\leftarrow} P$ e pare.

CASO 2.2.2 $w(Y \setminus M^a) > w(Y \cap M^a)$.

Seja P o resultado da normalização de $M^b \oplus (\{\beta\} \cup Y)$. Se P é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \stackrel{y}{\leftarrow} P$ e pare.

CASO 2.2.3 $w(Y \setminus M^a) = w(Y \cap M^a)$ e $y \in L$.

Se $w(X \setminus M^a) = w(X \cap M^a) - 1$ então seja P o resultado da normalização

Figura 5.3: Aresta mal-ajustada. A aresta gorda é negativa.

de $M^a \oplus X$. Se P é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \xleftarrow{x} P$ e pare.

Se $w(X \setminus M^a) = w(X \cap M^a) + 1$ então seja P o resultado da normalização de $M^b \oplus (\{\beta\} \cup X)$. Se P é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \xleftarrow{x} P$ e pare.

CASO 2.3 $w(M^b \oplus R) \geq w(M^a)$, $w(M^a \oplus R) \geq w(M^b)$ e $R \subseteq E_w[L]$.

Seja P o resultado da normalização de $M^a \oplus R$. Se P é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, se $w(P) < w(M^a \oplus R)$ devolva $M \xleftarrow{b} P$ e pare.

Se $w(P) = w(M^a \oplus R)$, comece nova iteração com $M \xleftarrow{b} P$, b e $Q(b, d)$ nos papéis de M , a e Q respectivamente.

■

Análise do algoritmo

INVARIANTES. No início de cada iteração do algoritmo

- (i1) M é equivalente a M_0 ,

Figura 5.4: Aresta mal-ajustada. A aresta gorda é negativa.

- (i2) δ é mal-ajustada ao par L, M^a e
- (i3) Q tem origem a , aresta terminal δ e $Q \setminus \{\delta\} \subseteq E_w[L]$.

É claro que para provarmos (i1), (i2) e (i3) basta analisarmos o Caso 2.3, uma vez que nos demais casos o algoritmo termina.

Prova de (i1). É evidente que $M \xleftarrow{b} P$ é uma macarronada. Ademais, em virtude do Lema 1.1, as desigualdades $w(M^b \oplus R) \geq w(M^a)$ e $w(M^a \oplus R) \geq w(M^b)$ implicam que $w(M^a \oplus R) = w(M^b)$. Se P é circuito negativo, o algoritmo termina e não há nada a provar. Suponha, então, que P é um caminho de r até b . Neste caso, $w(P) \leq w(M^a \oplus R)$. Se $w(P) < w(M^a \oplus R)$, $M \xleftarrow{b} P$ é macarronada melhor que M e o algoritmo termina. Se $w(P) = w(M^a \oplus R)$, $M \xleftarrow{b} P$ é equivalente a M e, portanto, equivalente a M_0 , o que prova (i1). $\square$

Prova de (i2). Como R está incluído em $E_w[L]$ e δ é mal-ajustada ao par L, M^a , segue que se $w(\delta) = 1$ então $\delta \in M^a$ o que implica que $\delta \in P$; se $w(\delta) = -1$ então $\delta \notin M^a$ o que implica que $\delta \notin P$. Em ambos os casos, δ é mal ajustada ao par $L, (M \xleftarrow{b} P)^b$. $\square$

Prova de (i3). É imediato, já que $Q(b, d) = Q \setminus \{\beta\}$. $\square$

Para completar a demonstração da correção do algoritmo basta provarmos a afirmação abaixo.

FATO 3. Se o algoritmo não devolve um circuito negativo então a macarronada devolvida é melhor que M .

Prova. Suponha que ocorre o Caso 1. Neste caso, $d = a$. Então $w(c) \geq w(d)$. Como δ é mal-ajustada ao par L, M^d temos que, se $w(\delta) = 1$ então $\delta \in M^d$, de modo que

$$w(P) \leq w(M^d \oplus \{\delta\}) = w(M^d \setminus \{\delta\}) = w(M^d) - w(\delta) = w(M^d) - 1 < w(M^c).$$

Portanto, $M \xleftarrow{c} P$ é melhor que M . Se $w(\delta) = -1$ então $\delta \notin M^d$, de modo que

$$w(P) \leq w(M^d \oplus \{\delta\}) = w(M^d \cup \{\delta\}) \leq w(M^d) + w(\delta) = w(M^d) - 1 < w(M^c).$$

Portanto, $M \xleftarrow{c} P$ é melhor que M .

Suponha que ocorre o Caso 2.1. Suponha $w(M^b \oplus R) < w(M^a)$. Como $w(P) \leq w(M^b \oplus R)$, segue que $M \xleftarrow{a} P$ é macarronada melhor que M . O outro caso é análogo.

Suponha que ocorre o Caso 2.2. Afirmamos que, neste caso, $w(b) < w(y)$. Eis a prova. Se L é uma fatia gorda então $\gamma \in \nabla(L)$ e, portanto, $w(y) > w(a) \geq w(b)$. Se L é uma fatia magra então $\gamma \in \nabla(L) \cup \Delta_w(L)$, ou seja, $w(a) \leq w(y)$. Se $w(b) = w(y)$ então $w(a) = w(b)$. No entanto, isto implica que $\beta \notin E_w[L]$ o que é uma contradição. Portanto, $w(b) < w(y)$.

Suponha que ocorre o Caso 2.2.1. Suponha, inicialmente, que

$$w(Y \setminus M^a) < w(Y \cap M^a).$$

Então,

$$w(P) \leq w(M^a \oplus Y) = w(M^a) + w(Y \setminus M^a) - w(Y \cap M^a) < w(M^a).$$

Como $w(a) \leq w(y)$, $M \xleftarrow{y} P$ é macarronada melhor que M . Suponha, agora, que $w(Y \setminus M^a) = w(Y \cap M^a)$ e $y \notin L$. Então

$$w(P) \leq w(M^a \oplus Y) = w(M^a) + w(Y \setminus M^a) - w(Y \cap M^a) = w(M^a).$$

Como $w(a) < w(y)$, $M \xleftarrow{y} P$ é macarronada melhor que M .

Suponha que ocorre o Caso 2.2.2. Como $w(Y \setminus M^a) > w(Y \cap M^a)$, segue que $w(Y \cap M^b) > w(Y \setminus M^b)$ donde $w((\{\beta\} \cup Y) \cap M^b) \geq w((\{\beta\} \cup Y) \setminus M^b)$. Então,

$$\begin{aligned} w(P) &\leq w(M^b \oplus (\{\beta\} \cup Y)) \\ &= w(M^b) + w((\{\beta\} \cup Y) \setminus M^b) - w((\{\beta\} \cup Y) \cap M^b) \\ &\leq w(M^b). \end{aligned}$$

Portanto, $M \xleftarrow{y} P$ é macarronada melhor que M uma vez que $w(b) < w(y)$.

Suponha que ocorre o Caso 2.2.3. Como $y \in L, k \in L$ e $\gamma \notin E_w[L]$ temos $\gamma \in \Delta_w(L)$ donde $w(x) = w(y)$ e, portanto, $w(b) < w(x)$. Note que, neste caso, L é uma fatia magra.

Vamos, agora, mostrar que $w(X \setminus M^a) - w(X \cap M^a) = 1$ ou $w(X \setminus M^a) - w(X \cap M^a) = -1$. De fato, suponha $\gamma \in M^a$, então

$$\begin{aligned} w(X \setminus M^a) - w(X \cap M^a) &= w((Y \setminus \{\gamma\}) \setminus M^a) - w((Y \setminus \{\gamma\}) \cap M^a) \\ &= w(Y \setminus M^a) - w(Y \cap M^a) - w(\gamma) \\ &= -w(\gamma). \end{aligned}$$

Se $\gamma \notin M^a$, então

$$\begin{aligned} w(X \setminus M^a) - w(X \cap M^a) &= w((Y \setminus \{\gamma\}) \setminus M^a) - w((Y \setminus \{\gamma\}) \cap M^a) \\ &= w(Y \setminus M^a) + w(\gamma) - w(Y \cap M^a) \\ &= w(\gamma). \end{aligned}$$

Se $w(X \setminus M^a) = w(X \cap M^a) - 1$ então

$$w(P) \leq w(M^a \oplus X) = w(M^a) + w(X \setminus M^a) - w(X \cap M^a) = w(M^a) - 1.$$

Como $w(a) \leq w(x)$, segue que $M \stackrel{x}{\leftarrow} P$ é macarronada melhor que M .

Se $w(X \setminus M^a) = w(X \cap M^a) + 1$ então $w((\{\beta\} \cup X) \setminus M^b) - w((\{\beta\} \cup X) \cap M^b) \leq 0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} w(P) &\leq w(M^b \oplus (\{\beta\} \cup X)) \\ &= w(M^b) + w((\{\beta\} \cup X) \setminus M^b) - w((\{\beta\} \cup X) \cap M^b) \\ &\leq w(M^b). \end{aligned}$$

Portanto, $M \stackrel{x}{\leftarrow} P$ é macarronada melhor que M uma vez que $w(b) < w(x)$. $\square$

Complexidade do algoritmo É fácil estimar o número máximo de iterações do algoritmo. Basta observar que a cada iteração o caminho Q diminui de uma unidade. Portanto, se Q_0 denota o valor de Q no início da primeira iteração então o algoritmo realiza no máximo $|Q_0| - 1$ iterações. Como Q_0 não tem vértices repetidos, $|Q_0| \leq |V| - 1$.

As demais operações do algoritmo consistem de somas simétricas entre caminhos e da normalização de 2-junções. Claramente, a soma simétrica de caminhos pode ser realizada em $O(|V|)$. Cada 2-junção obtida no algoritmo é resultado da soma simétrica de dois caminhos e, portanto, tem cardinalidade no máximo $2|V| - 2$. Por conseguinte, cada iteração do algoritmo tem consumo de tempo $O(|V|)$. Logo, o consumo total de tempo do algoritmo no pior caso é $O(|V|^2)$.

5.3 Determinando uma macarronada ótima

Como vimos no Algoritmo 5.1, se existe uma aresta mal-ajustada é possível ou (1) melhorar a macarronada ou (2) detectar um circuito negativo. Veremos, nesta seção, como a violação de (p2) e (p3) do Teorema 4.1 implicam na existência de uma aresta mal-ajustada.

ALGORITMO 5.2. Recebe um grafo conexo G , uma função w de E em $\{-1, +1\}$ e uma macarronada M com raiz r . Devolve ou (1) uma macarronada melhor que M ou (2) um circuito negativo ou (3) um potencial ótimo.

O algoritmo tem uma única iteração e depende do Algoritmo 5.1 da seção anterior. O algoritmo consiste no seguinte:

Seja $\mathcal{L}$ o fatiamento determinado por $w := w_M$ e $\mathcal{L}_m$ a coleção das fatias magras de $\mathcal{L}$.

CASO 1 $|w(x) - w(y)| > 1$ para alguma aresta xy .

Seja $\delta = xy$. Ajuste a notação de modo que $w(x) - w(y) > 1$. Seja R o resultado da normalização de $M^y \oplus \{\delta\}$. Se R é um circuito negativo, devolva-o e pare. Senão, devolva $M \xleftarrow{x} R$ e pare.

CASO 2 Existe L em $\mathcal{L}$ tal que $|\nabla(L) \cap E^-| \geq 1$ e r em L ou existe L em $\mathcal{L}_m$ tal que $|\Delta_w(L) \cap E^-| \geq 1$ e r em L .

No primeiro caso, seja δ uma aresta de $\nabla(L) \cap E^-$. No segundo caso, seja δ uma aresta de $\Delta_w(L) \cap E^-$. Devolva o resultado da aplicação do Algoritmo 5.1 a M, L, r e δ e pare.

CASO 3 Existe L em $\mathcal{L}$ tal que $E^- \cap \nabla(L) = \emptyset$ e r em $V \setminus L$.

Seja a um vértice em L e δ uma aresta em $\nabla(L) \cap M^a$. Devolva o resultado da aplicação do Algoritmo 5.1 a M, L, a e δ e pare.

CASO 4 Existe L em $\mathcal{L}$ tal que $|\nabla(L) \cap E^-| \geq 2$ e r em $V \setminus L$ ou existe L em $\mathcal{L}_m$ tal que $|\Delta_w(L) \cap E^-| \geq 1$ e r em $V \setminus L$.

Seja δ uma aresta em $E^- \setminus E_w[L]$ com pelo menos uma ponta, digamos d , em L . Seja P o menor segmento inicial de M^d que termine em L . Seja p o término de P e Q um caminho de p até d incluído em $M^p \oplus M^d$. Temos os seguintes casos:

CASO 4.1 $w(P) < w(M^p)$ ou $w(M^p \oplus Q) < w(M^d)$ ou $w(M^d \oplus Q) < w(M^p)$.

No primeiro caso, defina $S := P$ e $v := p$; no segundo caso, defina $S := M^p \oplus Q$ e $v := d$ e, no terceiro caso, defina $S := M^d \oplus Q$ e $v := p$. Seja R o resultado da normalização de S . Se R é circuito negativo, devolva-o e pare. Caso contrário, devolva $M \xleftarrow{v} R$ e pare.

CASO 4.2 $w(P) = w(M^p)$.

Seja δ uma aresta de $E^- \setminus (E_w[L] \cup P)$ com pelo menos uma ponta em L .
Devolva o resultado da aplicação do Algoritmo 5.1 a $M \xleftarrow{p} P, L, p$ e δ .

CASO 4.3 $Q \not\subseteq E_w[L]$.

Seja δ uma aresta de $Q \setminus E_w[L]$ com pelo menos uma ponta em L . Se $w(\delta) = 1$ e $\delta \in M^p$ então defina $a := p$. Se $w(\delta) = 1$ e $\delta \in M^d$ então defina $a := d$. Se $w(\delta) = -1$ e $\delta \in M^p$ então defina $a := d$. Se $w(\delta) = -1$ e $\delta \in M^d$ então defina $a := p$. Devolva o resultado da aplicação do Algoritmo 5.1 a M, L, a e δ .

CASO 4.4 $Q \subseteq E_w[L], w(P) > w(M^p), w(M^p \oplus Q) \geq w(M^d)$ e $w(M^d \oplus Q) \geq w(M^p)$.

Seja C um circuito negativo em $M^d(p, d) \oplus Q$. Devolva C e pare.

CASO 5 Nenhum dos casos anteriores se aplica.

Devolva w e pare.

■

Análise do algoritmo

FATO 4. Se o algoritmo não devolve um circuito negativo, então devolve ou (1) uma macarronada melhor que M ou (2) um w -potencial ótimo relativo a r .

Prova. É claro que se ocorre o Caso 5 então w_M é um w -potencial relativo a r . Como, por definição, $w_M(x) = w(M^x)$ para todo vértice x , segue que w_M é um w -potencial ótimo relativo a r . Suponha, pois, que não ocorre o Caso 5.

Suponha que ocorre o Caso 1. Então

$$w(R) \leq w(M^y \oplus \{\delta\}) \leq w(M^y) + w(\delta) = w(M^y) + 1 < w(M^x)$$

e $M \xleftarrow{x} R$ é melhor que M .

Suponha que ocorre o Caso 2. Então δ é uma aresta mal-ajustada para o par L, M^r pois $M^r = \emptyset$. O resultado segue devido à correção do Algoritmo 5.1.

Suponha que ocorre o Caso 3. Então δ é uma aresta mal-ajustada ao par L, M^a pois $\delta \in E^+ \cap M^a \cap \nabla(L)$. O resultado segue devido à correção do Algoritmo 5.1.

Suponha que ocorre o Caso 4.1. Como R é um caminho com origem r e término v satisfazendo $w(R) < w(M^v)$, segue que $M \xleftarrow{v} R$ é melhor que M .

Suponha que ocorre o Caso 4.2. Como $w(P) = w(M^p)$ e P é um caminho de r até p , segue que $M_1 := M \xleftarrow{p} P$ é uma macarronada equivalente a M . É claro que o caminho P

usa exatamente uma aresta em $\nabla(L)$ e nenhuma aresta em $\Delta_w(L)$. Se $|E^- \cap \nabla(L)| \geq 2$ então $(\nabla(L) \cap E^-) \setminus P \neq \emptyset$, isto é, $\delta \notin P$. Se L é fatia magra e $|E^- \cap \Delta_w(L)| \geq 1$ então $\delta \notin P$ visto que P não possui w -alças. Em ambos os casos δ é uma aresta mal-ajustada ao par L, M_1^P . O resultado segue da correção do Algoritmo 5.1.

Suponha que ocorre o Caso 4.3. É claro que δ é uma aresta mal-ajustada ao par L, M^a . O resultado segue da correção do Algoritmo 5.1.

Suponha que ocorre o Caso 4.4. Como Q é um caminho de p a d , $M^d(p, d) \oplus Q$ é uma $\emptyset$ -junção e, portanto, um ciclo. Para mostrar a existência de circuito negativo basta mostrar que $w(M^d(p, d) \oplus Q) < 0$.

Devido ao Lema 1.1, as desigualdades $w(M^p \oplus Q) \geq w(M^d)$ e $w(M^d \oplus Q) \geq w(M^p)$ implicam que $w(M^p \oplus Q) = w(M^d)$. Então

$$\begin{aligned}
 w(M^d(p, d) \oplus Q) &= w(M^d(p, d) \setminus Q) + w(Q \setminus M^d(p, d)) \\
 &= w(M^d(p, d) \setminus (Q \cap M^d(p, d))) + w(Q \setminus M^d(p, d)) \\
 &= w(M^d(p, d)) - w(Q \cap M^d(p, d)) + w(Q \cap M^p) \\
 &= w(M^d(p, d)) - w(Q \setminus M^p) + w(Q \cap M^p) \\
 &= w(M^d(p, d)) - w(M^p \oplus Q) + w(M^p) \\
 &= w(M^d) - w(M^d(r, p)) - w(M^p \oplus Q) + w(M^p) \\
 &= w(M^d) - w(M^p \oplus Q) - w(M^d(r, p)) + w(M^p) \\
 &= -w(P) + w(M^p) \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

o que completa a prova da correção do algoritmo. $\square$

Complexidade do algoritmo É claro que é possível determinar uma aresta xy com $|w(x) - w(y)| > 1$ em $O(|E|)$. Não é difícil ver também que é possível determinar se existe uma fatia nas condições dos Casos 2, 3 e 4 em $O(|E|)$. Assim, o consumo total de tempo do Algoritmo 5.2 é $O(|E| + |V|^2)$.

Complexidade total O Algoritmo 5.2 devolve ou (1) uma macarronada melhor ou (2) um circuito negativo ou (3) w -potencial ótimo. É claro que se ocorre a alternativa (3), w_M é um w -potencial e, portanto, M é ótima. É evidente que para determinar um circuito negativo ou uma macarronada ótima basta iterar o Algoritmo 5.2 enquanto a alternativa (1) for obtida. É fácil delimitar o número máximo de ocorrências da alternativa (1). A cada ocorrência de (1) o peso de algum caminho na macarronada decresce de pelo menos uma unidade. Por um lado, o peso de qualquer caminho é no máximo $|V| - 1$. Por outro

lado, o peso de qualquer caminho é no mínimo $-|V| + 1$. Assim, o número de ocorrências da alternativa (1) está limitado por

$$|V|(|V| - 1 + |V| - 1) = 2|V|^2 - |V|.$$

Cada iteração do Algoritmo 5.2 tem consumo de tempo $O(|E| + |V|^2)$. Concluimos assim que o consumo total de tempo do algoritmo é $O(|V|^4 + |E||V|^2)$.

Capítulo 6

Igualdades Minimax

Este capítulo deduz do Lema de Guan e do Teorema 4.1 várias igualdades minimax clássicas.

Para não distrair a atenção do leitor com hipóteses e restrições secundárias, vamos supor ao longo do capítulo todo que o grafo em estudo é conexo e T é um conjunto par de vértices. Nessas condições, como vimos no Capítulo 2, existe uma T -junção.

6.1 T -cortes

Dado um grafo G e uma parte T de V , um subconjunto X de V é T -ímpar ($= T$ -odd) se $|T \cap X|$ e $|T \setminus X|$ são ambos ímpares. Se X é T -ímpar então $\nabla(X)$ é um T -corte ($= T$ -cut). Por exemplo, se u, v são vértices distintos de G então todo corte que separa u de v é um $\{u, v\}$ -corte.

LEMA 6.1. Para toda T -junção F , um corte C é um T -corte se, e só se, $|F \cap C|$ é ímpar.

Prova. Seja X uma parte de V tal que $C = \nabla(X)$. Então

$$|C \cap F| = \sum_{x \in X} \deg_F(x) - 2|\{\alpha : \alpha \in E[X] \cap F\}|$$

donde $|C \cap F| \equiv \sum_{x \in X} \deg_F(x) \pmod{2}$. Mas,

$$\sum_{x \in X} \deg_F(x) = \sum_{x \in X \cap T} \deg_F(x) + \sum_{x \in X \setminus T} \deg_F(x)$$

Como $\deg_F(x)$ é par para todo $x \in X \setminus T$, segue que

$$|C \cap F| \equiv \sum_{x \in X} \deg_F(x) \equiv \sum_{x \in X \cap T} \deg_F(x) \equiv |X \cap T| \pmod{2}.$$

□

COROLÁRIO 6.2. *Se $\mathcal{C}$ é uma coleção disjunta de T -cortes e F é uma T -junção então $|F| \geq |\mathcal{C}|$.*

Prova. Se C é um elemento de $\mathcal{C}$ então, pelo Lema 6.1, $|F \cap C| \geq 1$. Portanto,

$$|F| \geq \sum_{C \in \mathcal{C}} |F \cap C| \geq \sum_{C \in \mathcal{C}} 1 = |\mathcal{C}|.$$

□

Denotaremos por $\nu(G, T)$ a cardinalidade de uma coleção disjunta máxima de T -cortes. $\nu(G, T)$
O Corolário 6.2 acima afirma que $\tau(G, T) \geq \nu(G, T)$. Em geral, a igualdade $\tau(G, T) = \nu(G, T)$ não é válida como vimos no Capítulo 3. Seymour provou, no entanto, que a igualdade vale em grafos bipartidos¹.

TEOREMA 6.3 (SEYMOUR [25]). *Para todo grafo bipartido H , $\tau(H, T) = \nu(H, T)$.*

Prova. Seja F uma T -junção mínima. Pelo Lema de Guan, w^F é conservativa. Seja r um elemento de V e λ a função w^F -posto relativo a r . De acordo com o Teorema 4.10, a coleção das cofronteiras das fatias gordas determinadas por λ é ∇ -disjunta e particiona o conjunto de arestas de H . Seja $\mathcal{L}$ a coleção das fatias gordas L tais que $r \notin L$. Assim, cada aresta de F , está na cofronteira de exatamente um elemento de $\mathcal{L}$. Reciprocamente, cada elemento de $\mathcal{L}$ contém exatamente uma aresta de F em sua cofronteira. Portanto, $|\nabla(\mathcal{L})| = |F|$. Pelo Lema 6.1, cada elemento de $\nabla(\mathcal{L})$ é um T -corte, o que completa a prova. □

Uma multicoleção de cortes é *2-disjunta* se cada aresta pertence a no máximo dois elementos de tal multicoleção. Denotaremos por $\nu_2(G, T)$ a cardinalidade de uma multicoleção 2-disjunta máxima de T -cortes. É fácil verificar que $\tau(G, T) \geq \nu_2(G, T)/2$. 2-disjunta
 $\nu_2(G, T)$

TEOREMA 6.4 (LOVÁSZ [15]). *Para todo grafo G , $\tau(G, T) = \nu_2(G, T)/2$.*

¹Para uma prova elementar veja Sebő [20].

Prova. Seja F uma T -junção mínima. Pelo Lema de Guan, w^F é conservativa. Seja r um elemento de V e λ a função w^F -posto com centro r . Seja $\mathcal{L}$ a multicoleção das fatias L determinadas por λ tais que $r \notin L$. Então, devido ao Lema 3.8, cada aresta de F está na cofronteira de exatamente dois elementos de $\mathcal{L}$. Cada elemento de $\mathcal{L}$ contém exatamente uma aresta de F em sua cofronteira. Portanto, $|F| = |\nabla(\mathcal{L})|/2$. Pelo Lema 6.1, cada elemento de $\nabla(\mathcal{L})$ é um T -corte, o que completa a prova. $\square$

O Teorema 6.4 pode ser deduzido do Teorema 6.3 através da seguinte construção. Introduza um novo vértice no meio de cada aresta de G . Seja H o grafo bipartido assim obtido. Se F é uma T -junção mínima em G , F corresponde, da maneira natural, a uma T -junção mínima J em H de cardinalidade $2|F|$ e vice-versa. Portanto, temos que a coleção disjunta de T -cortes em H cuja existência é garantida pelo Teorema 6.3 corresponde a multicoleção 2-disjunta de T -cortes em G .

6.2 Outros certificados

Durante esta seção veremos outras formas de certificar a minimalidade de uma T -junção.

TEOREMA 6.5 (FRANK, TARDOS E SEBŐ [10]). *Se H é um grafo bipartido então, para toda T -junção mínima F , qualquer das classes da bipartição de H admite uma partição $\mathcal{X}$ tal que, para todo X em $\mathcal{X}$, cada componente conexo de $H - X$ contém no máximo uma aresta de F em sua cofronteira.*

Prova. Seja F uma T -junção mínima. Seja r um elemento arbitrário de V e λ a função w^F -posto com centro r . Pelo Teorema 4.10, a coleção das cofronteiras das fatias gordas determinadas por λ particiona o conjunto de arestas de H . Se H tem bipartição V_1, V_2 e r é elemento de V_1 então $\lambda(x)$ é par se, e só se, $x \in V_1$. Para cada i , seja $V^=i$ o conjunto dos vértices x tais que $\lambda(x) = i$. Seja L uma fatia de nível i . Então, cada componente conexo de $G - (L \cap V^=i)$ possui no máximo uma aresta negativa em sua cofronteira pois, por um lado, $L \setminus (L \cap V^=i) \subseteq V^{i-1}$ e, por outro lado, $|\nabla(L) \cap E^-| \leq 1$. Para cada i , seja $\mathcal{L}_i$ a coleção

$$\{L \cap V^i : L \text{ é uma fatia gorda de nível } i\}.$$

Assim, $\bigcup(\mathcal{L}_i : i \text{ é par})$ é a partição de V_1 procurada e $\bigcup(\mathcal{L}_i : i \text{ é ímpar})$ é a partição de V_2 procurada. $\square$

Se T é um conjunto de vértices de um grafo G e X uma parte de V , então $q_T(G - X)$ denota o número de componentes T -ímpares de $G - X$.

TEOREMA 6.6 (FRANK, TARDOS E SEBŐ [10]). *Para todo grafo bipartido H ,*

$$\tau(H, T) = \max_{\mathcal{X}} \sum_{X \in \mathcal{X}} q_T(H - X),$$

onde o máximo é tomado sobre todas as partições $\mathcal{X}$ de um dos lados da bipartição de H .

Prova. É claro que, por simetria, basta demonstrar o teorema para uma das classes da bipartição de H . Suponha que H tenha bipartição (V_1, V_2) . Mostraremos, inicialmente, que

$$|F| \geq \sum_{X \in \mathcal{X}} q_T(H - X) \quad (*)$$

para toda T -junção F e toda partição $\mathcal{X}$ de V_1 .

Seja F uma T -junção e $\mathcal{X}$ uma partição de V_1 . Sejam $H_1, \dots, H_k$ os componentes T -ímpares de $H - X$ para algum X em $\mathcal{X}$. Como H é bipartido, segue que $\nabla(X) \cap \nabla(Y) = \emptyset$ para todo par X, Y de elementos distintos de $\mathcal{X}$. Agora, $\nabla(X) = \nabla(V_H \setminus X)$ donde $\nabla(X) \supseteq \nabla(V_{H_1}) \cup \dots \cup \nabla(V_{H_k})$. Então, como cada H_i é T -ímpar, $\nabla(V_{H_i})$ é um T -corte, logo,

$$|\nabla(X) \cap F| \geq \sum_{i=1}^k |\nabla(V_{H_i}) \cap F| \geq \sum_{i=1}^k 1 = k \geq q_T(H - X)$$

e, portanto,

$$|F| \geq \sum_{X \in \mathcal{X}} |\nabla(X) \cap F| \geq \sum_{X \in \mathcal{X}} q_T(H - X).$$

Mostraremos, agora, que existe uma T -junção F e uma partição $\mathcal{X}$ de V_1 para a qual (*) vale com igualdade. Seja F uma T -junção mínima. Pelo Teorema 6.5, existe uma partição $\mathcal{X}$ de V_1 tal que para todo X em $\mathcal{X}$, cada componente de $H - X$ contém no máximo uma aresta de F em sua cofronteira. Seja X um elemento de $\mathcal{X}$ e denote por $H_1, \dots, H_j$ os componentes conexos de $H - X$. Em virtude do Lema 6.1, H_i possui um número ímpar de vértices de T se, e só se, $|\nabla(V_{H_i}) \cap F| = 1$. Ajuste a notação de modo que $H_1, \dots, H_j$ correspondam aos componentes T -ímpares de $H - X$. Temos, então, que

$$|F \cap \nabla(X)| = \sum_{i=1}^j |\nabla(V_{H_i}) \cap F| = \sum_{i=1}^j 1 = j = q_T(H - X)$$

e, portanto,

$$|F| = \sum_{X \in \mathcal{X}} |\nabla(X) \cap F| = \sum_{X \in \mathcal{X}} q_T(H - X).$$

□

É fácil deduzir do caso bipartido o caso geral via subdivisão de arestas.

TEOREMA 6.7 (FRANK, TARDOS E SEBŐ [10]). *Para todo grafo G ,*

$$\tau(G, T) = \frac{1}{2} \max_{\mathcal{X}} \sum (q_T(G - X) : X \in \mathcal{X}),$$

onde o máximo é tomado sobre todas as partições $\mathcal{X}$ de V .

□

Para um grafo G e uma parte X de V , seja $q(G - X)$ o número de componentes ímpares de $G - X$. Como veremos a seguir, o teorema acima tem como corolário o Teorema de Tutte [3] que afirma que: *um grafo G não contém nenhum emparelhamento perfeito se, e só se,*

 $q(G - X)$

$$q(G - X) > |X|$$

para alguma parte X de V .

Para uma prova da necessidade veja, por exemplo, Bondy e Murty [3]. Eis a prova da suficiência. Tomando-se $T := V$, temos que uma parte X de V é T -ímpar se $|X|$ é ímpar. Suponha que G não possui emparelhamento perfeito. Então a cardinalidade de uma T -junção mínima é estritamente maior que $|V|/2$. Portanto, pelo teorema anterior, existe uma partição $\mathcal{X}$ de V tal que

$$\frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{X}} q(G - X) > |V|/2,$$

ou seja,

$$\sum_{X \in \mathcal{X}} q(G - X) > \sum_{X \in \mathcal{X}} |X| = |V|.$$

Logo, existe pelo menos um X em $\mathcal{X}$ para o qual $q(G - X) > |X|$.

6.3 Torres

Na discussão que segue, r será um vértice fixo de um grafo G . Se x é um vértice de G , denotaremos por T^x o conjunto $T \oplus \{r\} \oplus \{x\}$. Note que $T^r = T$.

 T^x

Uma *torre* (*= tower*)² com base T e raiz r é uma função que associa a cada vértice

torre

²O termo foi cunhado por Sebő [19].

x uma T^x -junção. Uma tal T^x -junção existe pois G é conexo. Se F é uma torre e x um vértice, denotaremos por F^x o valor de F em x . A *função cardinalidade* de F é a função F^x ϑ que associa a cada vértice x o valor $|F^x|$. Uma torre F é *ótima* se, para toda torre J , $|F^x| \leq |J^x|$ para todo vértice x . É evidente que se F é uma torre ótima então, para todo x , F^x é uma T^x -junção mínima.

TEOREMA 6.8 (SEBŐ [19]). *Uma torre F com base T e raiz r é ótima se, e só se,*

- (p1) $|\vartheta(x) - \vartheta(y)| \leq 1$ para toda aresta xy ,
- (p2) para toda fatia magra L determinada por ϑ , $\Delta_\vartheta(L) \cap F^x = \emptyset$ e
- (p3) para todo x em V e todo fatia L determinada por ϑ ,
 - (a) $\nabla(L) \cap F^x = \emptyset$ se x em L e
 - (b) $|\nabla(L) \cap F^x| = 1$ se x em $V \setminus L$,

onde ϑ denota a função cardinalidade de F .

Prova. (Necessidade.) Seja F uma torre ótima. Então F^r é uma T -junção mínima e, pelo Lema de Guan, w^{F^r} é conservativa. Adote a abreviatura $w := w^{F^r}$. Note que $E^- = F^r$. Seja M a macarronada que leva cada vértice x em algum caminho de r até x incluído em $F^r \oplus F^x$. Seja λ a função w -posto relativa a r . Como F^x é uma T^x -junção mínima para todo x em V , segue, devido ao Lema 6.9 abaixo, que $F^r \oplus F^x$ é uma $\{r, x\}$ -junção w -mínima. Consequentemente, $w(C) = 0$ para todo circuito C em $F^r \oplus F^x$ e qualquer caminho simples de r até x incluído em $F^r \oplus F^x$ é w -mínimo, ou seja, M é ótima. Para cada vértice x , seja C^x o conjunto $(F^r \oplus F^x) \setminus M^x$. É evidente que C^x é uma união disjunta de circuitos. Agora,

$$\begin{aligned}
 w(M^x) &= w(M^x \cup C^x) \\
 &= w(F^r \oplus F^x) \\
 &= w(F^r \setminus F^x) + w(F^x \setminus F^r) \\
 &= |F^r| - |F^r \cap F^x| - |F^x| + |F^r \cap F^x| \\
 &= |F^x| - |F^r| \\
 &= \vartheta(x) - \vartheta(r).
 \end{aligned}$$

Portanto, $\vartheta(x) = w_M(x) + \vartheta(r) = \lambda(x) + \vartheta(r)$, ou seja, L é uma fatia de nível i determinada por λ se, e só se, L é uma fatia de nível $i + \vartheta(r)$ determinada por ϑ . Segue, então, que $|\vartheta(x) - \vartheta(y)| \leq 1$ para toda aresta xy o que prova (p1). Ademais, (p2) e (p3) são válidas para F^r . Resta, assim, mostrar (p2) e (p3) para todo $x \neq r$.

Vamos mostrar (p2). Seja L uma fatia magra determinada por ϑ . O Lema 3.10 garante que $\Delta_{\vartheta}(L) \cap C^x = \emptyset$ uma vez que $w(C^x) = 0$. O Corolário 3.12 garante que $\Delta_{\vartheta}(L) \cap M^x = \emptyset$ visto que M^x é w -mínimo. Assim, $\Delta_{\vartheta}(L) \cap F^x = \emptyset$.

Vamos mostrar (p3). Seja L uma fatia determinada por ϑ . Suponha, inicialmente, que $\nabla(L) \cap C^x \neq \emptyset$. Em virtude do Lema 3.10, $\nabla(L) \cap C^x = \{\alpha, \beta\}$ onde $\alpha \in F^r$ e $\beta \notin F^r$. É claro que, neste caso, $x \notin L$. Caso contrário, de acordo com o Corolário 3.12, $\nabla(L) \cap M^x = \{\alpha\}$ o que contraria $M^x \cap C^x = \emptyset$. Logo, $|\nabla(L) \cap F^x| = 1$.

Suponha, agora, que $\nabla(L) \cap C^x = \emptyset$. Temos os casos que seguem.

Se $r \in L$ e $x \in L$ então, de acordo com o Corolário 3.12, temos que $\nabla(L) \cap M^x = \emptyset$. Portanto, $\nabla(L) \cap F^x = \emptyset$.

Se $r \notin L$ e $x \in L$ então, de acordo com o Corolário 3.12, temos que $\nabla(L) \cap M^x = \{\alpha\}$ onde $\alpha \in F^r$. Portanto, $\nabla(L) \cap F^x = \emptyset$.

Se $r \in L$ e $x \notin L$ então, de acordo com o Corolário 3.12, temos que $\nabla(L) \cap M^x = \{\beta\}$ onde $\beta \notin F^r$. Portanto, $|\nabla(L) \cap F^x| = 1$.

Se $r \notin L$, $x \notin L$ e $\nabla(L) \cap M^x = \emptyset$ então $|\nabla(L) \cap F^x| = 1$.

Se $r \notin L$, $x \notin L$ e $\nabla(L) \cap M^x \neq \emptyset$ então, de acordo com o Corolário 3.12, temos que $\nabla(L) \cap M^x = \{\alpha, \beta\}$ onde $\alpha \in F^r$ e $\beta \notin F^r$. Portanto, $|\nabla(L) \cap F^x| = 1$. $\square$

É claro que se H é um grafo bipartido então uma torre F com base T e raiz r é ótima se, e só se,

- (b1) $|\vartheta(x) - \vartheta(y)| = 1$ para toda aresta xy ,
- (b2) para todo x em V e toda fatia gorda L determinada por ϑ ,
 - (a) $\nabla(L) \cap F^x = \emptyset$ se x em L e
 - (b) $|\nabla(L) \cap F^x| = 1$ se x em $V \setminus L$,

onde ϑ denota a função cardinalidade de F .

LEMA 6.9. *Seja F uma T -junção mínima. Se P é um caminho w^F -mínimo com extremos x e y então $F \oplus P$ é uma $(T \oplus \{x, y\})$ -junção mínima. Reciprocamente, se F é uma T -junção mínima e J é uma $(T \oplus \{x, y\})$ -junção mínima, para $x \neq y$, então todo caminho de x até y incluído em $F \oplus J$ é w^F -mínimo e todo circuito C incluído em $F \oplus J$ é tal que $w^F(C) = 0$.*

Prova. Seja A uma parte de E . Então $w^F(A) = w^F(A \setminus F) + w^F(A \cap F) = |A \setminus F| - |A \cap F|$, ou seja,

$$w^F(A) = |F \oplus A| - |F| \quad (*)$$

Seja P um caminho w^F -mínimo com extremos x e y . Em virtude do Lema 2.1, $F \oplus P$ é uma $(T \oplus \{x, y\})$ -junção. De acordo com (*), $|F \oplus P| = w^F(P) + |F|$. Como P é w^F -mínimo, segue que $F \oplus P$ é uma $(T \oplus \{x, y\})$ -junção mínima.

Seja J uma $(T \oplus \{x, y\})$ -junção mínima para $x \neq y$. Em virtude do Lema 2.1, $F \oplus J$ contém um caminho P de x até y . De acordo com (*), $w^F(F \oplus J) = |J| - |F|$. Então, $F \oplus J$ é uma $\{x, y\}$ -junção w^F -mínima. Segue daí que $w^F(P) = w^F(F \oplus J)$ e todo circuito C em $F \oplus J$ é tal que $w^F(C) = 0$. $\square$

Capítulo 7

Coleções disjuntas de T -cortes

Nos Capítulos 2 e 5 vimos como encontrar uma T -junção mínima. Em particular, no Capítulo 5, vimos também como encontrar uma coleção 2-disjunta máxima de T -cortes. Isso leva naturalmente ao problema de determinar uma coleção disjunta máxima de T -cortes.

PROBLEMA 3. Dado um grafo conexo G e um conjunto par T de vértices encontrar uma coleção disjunta máxima de T -cortes.

Middendorf e Pfeiffer [18] demonstraram que o problema é NP-difícil. Em vista disto, durante este capítulo, nos preocuparemos em encontrar uma coleção disjunta “grande” de T -cortes.

7.1 Preliminares

O Teorema 6.4 afirma que $\tau(G, T) = \nu(G, T)/2$ para todo graft (G, T) . Embora não esteja explícito no enunciado do teorema, a demonstração deste garante que existe uma T -junção J e uma multicoleção laminar ∇ -bidisjunta $\mathcal{L}$ de partes T -ímpares de V tal que $|J| = |\mathcal{L}|/2$. Ainda mais, o Capítulo 5 fornece um algoritmo polinomial para determinar J e $\mathcal{L}$. A idéia é extrair de $\mathcal{L}$ uma coleção ∇ -disjunta grande.

Convém introduzir dois lemas técnicos.

LEMA 7.1. *Para toda T -junção J e para toda multicoleção ∇ -bidisjunta $\mathcal{L}$ de partes T -ímpares de V , se $|J| = |\mathcal{L}|/2$ então*

- (i) $|\nabla(L) \cap J| = 1$ para todo L em $\mathcal{L}$ e

(ii) cada aresta α de J está na cofronteira de exatamente dois elementos de $\mathcal{L}$.

Prova. Para cada aresta α , seja $m_{\mathcal{L}}(\alpha)$ o número de elementos de $\mathcal{L}$ (considerando as multiplicidades) que contêm α em sua cofronteira. Como $\mathcal{L}$ é ∇ -bidisjunta, temos $m_{\mathcal{L}}(\alpha) \leq 2$ para todo α em E . Logo,

$$\begin{aligned} 2|J| &\geq \sum_{\alpha \in J} m_{\mathcal{L}}(\alpha) \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} |\nabla(L) \cap J| \\ &\geq \sum_{L \in \mathcal{L}} 1 \quad \text{devido ao Lema 6.1} \\ &= |\mathcal{L}| \\ &= 2|J| \end{aligned}$$

Portanto, igualdade vale em todas as passagens, o que prova o lema. $\square$

LEMA 7.2. Se $\mathcal{L}$ é uma multicoleção ∇ -bidisjunta de partes de V e J é uma T -junção tais que

(i) $|\nabla(L) \cap J| = 1$ para todo L em $\mathcal{L}$ e

(ii) cada aresta de J está na cofronteira de exatamente dois elementos de $\mathcal{L}$

então os elementos de $\mathcal{L}$ são T -ímpares e $|J| = |\mathcal{L}|/2$.

Prova. Em virtude do Lema 6.1, todo elemento de $\mathcal{L}$ é T -ímpar. Agora, é suficiente mostrar que $|J| = |\mathcal{L}|/2$.

$$|J| = \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} |\nabla(L) \cap J| = \frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} 1 = \frac{1}{2} |\mathcal{L}|.$$

$\square$

7.2 O algoritmo de Korach-Penn

Vimos, no Capítulo 2, que toda T -junção mínima é uma floresta. O número de componentes de uma T -junção mínima J , denotado por $c(J)$, desempenha um papel importante na determinação de uma coleção disjunta “grande” de T -cortes.

O algoritmo que passaremos a descrever recebe uma T -junção mínima J e uma multicoleção ∇ -bidisjunta máxima de partes T -ímpares e extrai desta última uma coleção ∇ -disjunta “grande”. “Grande” neste contexto significa que a coleção tem pelo menos $|J| - c(J) + 1$ elementos.

Figura 7.1: Aresta periférica. As arestas magras são arestas fora da T -junção.

Seja $\mathcal{L}$ uma multicoleção laminar de partes de V . Uma aresta α de J é *periférica em relação a $\mathcal{L}$* se $J \cap E[L] = \emptyset$ para todo L em $\mathcal{L}$ que contém α em sua cofronteira. O lema seguinte está implícito em Korach e Penn [13].

aresta
periférica

LEMA 7.3. *Se $\mathcal{L}$ é uma multicoleção laminar ∇ -bidisjunta de partes T -ímpares de V e J é uma T -junção tais que $|J| = |\mathcal{L}|/2$ então alguma aresta de J é periférica em relação a $\mathcal{L}$.*

Prova. Para cada aresta α de J , existem, pelo Lema 7.1, precisamente dois elementos de $\mathcal{L}$ que contêm α em sua cofronteira. Denote por L_1^α e L_2^α tais elementos e seja $\iota(\alpha)$ o número $\max\{|E[L_1^\alpha] \cap J|, |E[L_2^\alpha] \cap J|\}$.

Tome uma aresta α de J de modo a minimizar $\iota(\alpha)$. Mostraremos que $\iota(\alpha) = 0$, ou seja, α é periférica. Suponha $\iota(\alpha) > 0$. Ajuste a notação de modo que L_1^α satisfaça $E[L_1^\alpha] \cap J \neq \emptyset$. Seja β uma aresta de $E[L_1^\alpha] \cap J$. Como $\mathcal{L}$ é laminar, segue que

$$L_1^\beta \subseteq L_1^\alpha \quad \text{e} \quad L_2^\beta \subseteq L_1^\alpha.$$

Entretanto, $\beta \notin E[L_1^\beta] \cup E[L_2^\beta]$ e, portanto, $\iota(\beta) \leq \iota(\alpha) - 1$, o que contraria a minimalidade de $\iota(\alpha)$. $\square$

Esta prova pode ser facilmente convertida em um algoritmo que produz uma aresta periférica. O algoritmo tem complexidade $O(|V|^2)$.

ALGORITMO 7.1 (KORACH E PENN [13]). Recebe um grafo conexo G , uma parte par T de V não-vazia, uma T -junção J_0 e uma multicoleção laminar $\mathcal{L}_0$ de partes T -ímpares de V tais que

- $\mathcal{L}_0$ é ∇ -bidisjunta e
- $|J_0| = |\mathcal{L}_0|/2$.

Devolve uma subcoleção $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que

- $\mathcal{B}$ é ∇ -disjunta e
- $|\mathcal{B}| \geq |J_0| - c(J_0) + 1$.

Cada iteração começa com um subconjunto J de J_0 , uma multicoleção $\mathcal{L}$ e uma coleção $\mathcal{B}$ incluídas em $\mathcal{L}_0$ tais que $\mathcal{L} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. A primeira iteração começa com $J = J_0$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ e $\mathcal{B} = \emptyset$. Cada iteração consiste em:

CASO 1 $|J| = 1$.

Seja $\mathcal{B}'$ a coleção $\mathcal{B} \cup \{L\}$, onde L é um elemento de $\mathcal{L}$. Devolva $\mathcal{B}'$ e pare.

CASO 2 $|J| > 1$.

Seja α uma aresta periférica de J em relação a $\mathcal{L}$. Denote por L_1 e L_2 os elementos de $\mathcal{L}$ que contêm α em sua cofronteira. Seja J' o conjunto $J \setminus \{\alpha\}$ e $\mathcal{L}'$ a coleção $\mathcal{L} \setminus \{L_1, L_2\}$.

CASO 2.1 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

Ajuste a notação, trocando os papéis de L_1 e L_2 se necessário, de modo que $L_1 \subseteq L_2$. Seja $\mathcal{B}'$ a coleção $\mathcal{B} \cup \{L_1\}$. Comece nova iteração com J' , $\mathcal{L}'$ e $\mathcal{B}'$ nos papéis de J , $\mathcal{L}$ e $\mathcal{B}$.

CASO 2.2 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Comece nova iteração com J' e $\mathcal{L}'$ nos papéis de J e $\mathcal{L}$.

■

Análise do algoritmo

Durante a análise¹ deste algoritmo, para não tornar a notação muito pesada, confundiremos um componente conexo de um grafo com o seu conjunto de arestas. Assim, por exemplo, se H é um componente conexo de um grafo G , a expressão $|H|$ significa $|E_H|$.

INVARIANTES. No início de cada iteração do algoritmo

- (i1) $\mathcal{L}$ é ∇ -bidisjunta,
- (i2) $|\nabla(L) \cap J| = 1$ para todo L em $\mathcal{L}$,
- (i3) cada aresta de J está na cofronteira de precisamente dois elementos de $\mathcal{L}$,
- (i4) $\mathcal{B}$ é ∇ -disjunta,
- (i5) $\mathcal{B}$ é ∇ -disjunta de $\mathcal{L}$, isto é, $\nabla(B) \cap \nabla(L) = \emptyset$ para todo B em $\mathcal{B}$ e todo L em $\mathcal{L}$ e
- (i6) $|\mathcal{B}| \geq |J_0| - c(J_0) - |J| + c(J)$.

Ainda que isso não seja essencial para a análise do algoritmo, é útil observar que no início de cada iteração

- (i7) cada componente conexo H de $J_0 \setminus J$ satisfaz

$$\begin{cases} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap H| \geq |H| - 1 & \text{se } H \text{ é componente conexo de } J_0 \\ \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap H| = |H| & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que a cada iteração $\mathcal{L}$ e $\mathcal{B}$ são laminares, pois ambas são partes de $\mathcal{L}_0$. Ainda mais, $|\nabla(B) \cap J_0| = 1$ para todo B em $\mathcal{B}$, em virtude do Lema 7.1.

Prova de (i1), (i2), (i3) e (i4). Devido ao Lema 7.1, (i1), (i2) e (i3) são válidas no início primeira iteração. Suponha que (i1), (i2) e (i3) sejam válidas no início de uma iteração em que ocorre o Caso 2. Como L_1 e L_2 são os únicos elementos de $\mathcal{L}$ que contêm α em sua cofronteira e a única aresta de J na cofronteira de L_1 e L_2 é α , segue que $\mathcal{L}'$ e J' satisfazem (i1), (i2) e (i3). O invariante (i4) é consequência imediata de (i5). $\square$

Em virtude de (i1), (i2) e (i3), do Lema 7.2 e do Lema 7.3 existe uma aresta periférica em relação a $\mathcal{L}$. Portanto, a aresta α no algoritmo é bem definida.

¹A análise do algoritmo, sua organização e identificação dos invariantes é original.

Prova de (i5). Vamos mostrar que se B é um elemento de $\mathcal{B}$ e β é uma aresta de $\nabla(B)$ então, para todo L em $\mathcal{L}$, ou L contém ambas as pontas de β ou L não contém nenhuma das pontas de β . É claro que esta propriedade é válida no início da primeira iteração. Suponha que seja válida no início de uma iteração em que ocorre o *Caso 2.1* (é claro que este é o único caso relevante). Suponha, por contradição, que exista L' em $\mathcal{L}'$ tal que $\nabla(L') \cap \nabla(L_1) \neq \emptyset$ e seja β uma aresta em $\nabla(L') \cap \nabla(L_1)$. Como $\mathcal{L}$ é ∇ -bidisjunta, L' não possui α em sua cofronteira e L_2 contém as pontas de β . Conseqüentemente,

$$L_2 \cap L' \neq \emptyset \quad \text{e} \quad L_2 \setminus L' \neq \emptyset. \quad (*)$$

Ainda mais, L' é T -ímpar, de modo que possui uma aresta de J' em sua cofronteira, digamos γ . Como α é periférica, ambas as pontas de γ estão fora de L_1 e de L_2 , de modo que,

$$L' \setminus L_2 \neq \emptyset. \quad (**)$$

No entanto, (*) e (**) implicam que $\mathcal{L}$ não é laminar, o que é uma contradição.

Portanto, $\nabla(L_1)$ é disjunto de $\nabla(B)$ para todo B em $\mathcal{B}$ e, conseqüentemente, a coleção $\mathcal{B}'$ é ∇ -disjunta de $\mathcal{L}'$. $\square$

Prova de (i6). É evidente que (i6) vale no início da primeira iteração visto que $J = J_0$ e $\mathcal{B} = \emptyset$. Suponha que (i6) seja válida no início de uma iteração em que ocorre o *Caso 2.1*. Então

$$|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| + 1 \quad \text{e} \quad |J'| = |J| - 1.$$

É claro que toda aresta periférica é uma folha de J , portanto,

$$c(J') = \begin{cases} c(J) - 1 & \text{se } \{\alpha\} \text{ é componente de } J \\ c(J) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}'| &= |\mathcal{B}| + 1 \\ &\geq |J_0| - c(J_0) - |J| + c(J) + 1 \\ &= |J_0| - c(J_0) - |J'| + c(J) \\ &\geq |J_0| - c(J_0) - |J'| + c(J'). \end{aligned}$$

Suponha, agora, que (i6) seja válida no início de uma iteração em que ocorre o *Caso 2.2*. Neste caso, $\{\alpha\}$ é uma árvore de J . Sendo assim, temos

$$|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}|, \quad |J'| = |J| - 1 \quad \text{e} \quad c(J') = c(J) - 1$$

e, portanto,

$$|\mathcal{B}'| \geq |J_0| - c(J_0) - |J| + c(J) = |J_0| - c(J_0) - |J'| + c(J')$$

o que completa a prova de (i6). $\square$

Prova de (i7). É claro que (i7) é válida no início da primeira iteração. Suponha que seja válida no início de uma iteração qualquer em que ocorre o Caso 2. Seja H_α o componente de $J_0 \setminus J'$ que contém α . Claramente, $H_\alpha - \alpha$ não é componente conexo de J_0 . Note que o grafo $H_\alpha - \alpha$ possui dois componentes conexos (que podem ser triviais). Entretanto, por hipótese, para cada componente conexo H' de $H_\alpha - \alpha$, temos

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap H'| = |H'|$$

e, portanto,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap (H_\alpha - \alpha)| = |H_\alpha| - 1.$$

Suponha que ocorre o Caso 2.1. Então

$$\sum_{B' \in \mathcal{B}'} |\nabla(B') \cap H_\alpha| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap (H_\alpha - \alpha)| + |\{\alpha\} \cap \nabla(L_1)| = |H_\alpha|.$$

Suponha que ocorre o Caso 2.2. Então ambas as pontas de α têm grau 1 em J . Afirmamos que H_α é componente conexo de J_0 . Suponha que não, então existe pelo menos uma aresta $\beta \neq \alpha$ em J que incide em algum elemento de V_{H_α} . Contudo, como α é periférica, temos $(E[L_1] \cup E[L_2]) \cap J = \emptyset$. Logo, $\beta \in \nabla(L_1) \cup \nabla(L_2)$ o que contraria (i2). Portanto,

$$\sum_{B' \in \mathcal{B}'} |\nabla(B') \cap H_\alpha| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap (H_\alpha - \alpha)| = |H_\alpha| - 1.$$

$\square$

A afirmação abaixo completa a prova da correção do algoritmo.

FATO 5. A coleção $\mathcal{B}'$ devolvida pelo algoritmo tem cardinalidade pelo menos

$$|J_0| - c(J_0) + 1.$$

Prova. Considere a última iteração do algoritmo. Em virtude de (i5), $|\mathcal{B}| \geq |J_0| - c(J_0) - |J| + c(J)$. Mas, $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| + 1$ e $c(J) = |J| = 1$. Segue daí que $|\mathcal{B}'| \geq |J_0| - c(J_0) + 1$. $\square$

FATO 6. A coleção $\mathcal{B}'$ devolvida pelo algoritmo é tal que existe pelo menos um componente H de J_0 para o qual

$$\sum_{B \in \mathcal{B}'} |\nabla(B) \cap H| = |H|.$$

Prova. Considere a última iteração do algoritmo. Neste ponto, $|J| = 1$. Denote por α a aresta de J . Por hipótese, o componente H_α de J_0 que contém α satisfaz

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap (H_\alpha - \alpha)| = |H_\alpha| - 1.$$

Porém, $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{L\}$ e, por conseguinte,

$$\sum_{B' \in \mathcal{B}'} |\nabla(B') \cap H_\alpha| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap (H_\alpha - \alpha)| + |\{\alpha\} \cap \nabla(L)| = |H_\alpha|.$$

□

Complexidade do algoritmo Claramente, o algoritmo realiza $|J_0|$ iterações. Cada iteração deve encontrar uma aresta periférica. A demonstração do Lema 7.3 sugere um método para encontrar uma aresta periférica em $O(|V|^2)$. É possível implementar os demais passos em $O(|V|)$. Como $|J_0| \leq |V|$, segue que o algoritmo tem consumo de tempo $O(|V|^3)$.

7.3 Conseqüências do algoritmo

Observe que o Fato 5 constitui a prova de que o algoritmo faz o que promete, ou seja, para toda T -junção mínima J existe uma coleção ∇ -disjunta $\mathcal{B}$ de partes T -ímpares de V tal que

$$|\mathcal{B}| \geq |J| - c(J) + 1.$$

O Fato 6, aliado a análise do algoritmo, provam que:

TEOREMA 7.4. Para toda T -junção mínima F com componentes $F_1, F_2, \dots, F_k$ existe, para algum i ($1 \leq i \leq k$), uma coleção ∇ -disjunta $\mathcal{B}$ de partes T -ímpares de V tal que

$$(i) \quad |\nabla(B) \cap F| = 1 \text{ para todo } B \text{ em } \mathcal{B},$$

$$(ii) \quad \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap F_i| = |F_i| \text{ e}$$

(iii) $\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap F_j| \geq |F_j| - 1$ para todo $j \neq i$.

□

Note que, se F contém um único componente o teorema acima garante que existe uma coleção disjunta de T -cortes equicardinal a F , o que constitui uma nova prova para a Proposição 3.2.

7.4 O algoritmo de Sebő

O Algoritmo 7.1 apresentado difere de versão original [13] em dois aspectos. Em primeiro lugar, o Algoritmo 7.1 não envolve contrações de arestas. Em segundo lugar, o Algoritmo 7.1 prova um resultado mais fraco que o resultado original de Korach e Penn [13]—Teorema 7.5 abaixo. A diferença é sutil, como veremos. Entretanto, o tamanho da coleção disjunta de T -cortes prometida pelos dois teoremas é a mesma.

TEOREMA 7.5 (KORACH E PENN [13]). *Para toda T -junção mínima F com componentes $F_1, F_2, \dots, F_k$ existe, para todo i ($1 \leq i \leq k$), uma coleção ∇ -disjunta $\mathcal{B}$ de partes T -ímpares de V tal que*

- (i) $|\nabla(B) \cap F| = 1$ para todo B em $\mathcal{B}$,
- (ii) $\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap F_i| = |F_i|$ e
- (iii) $\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap F_j| \geq |F_j| - 1$ para todo $j \neq i$.

Prova. A demonstração apresentada a seguir é devida a Sebő [23]. É claro que é suficiente provar o teorema para cada componente conexo de G . Sendo assim, suponha G conexo. Escolha um i entre 1 e k . Pelo Lema de Guan, w^F é conservativa. Tome r arbitrário em V_{F_i} e seja λ a função w -posto relativa a r .

A seguinte definição será útil: uma aresta xy é *horizontal* se $\lambda(x) = \lambda(y)$.

horizontal

Seja $\mathcal{L}_g$ a coleção das fatias gordas determinadas por λ . De acordo com o Lema 7.6 abaixo, a coleção $\mathcal{B} := \{L : L \in \mathcal{L}_g, r \notin L\}$ de partes T -ímpares de V é ∇ -disjunta e, evidentemente, satisfaz (i). Ainda mais, toda aresta xy de F para a qual $|\lambda(x) - \lambda(y)| = 1$ está na cofronteira de exatamente um elemento de $\mathcal{B}$. Os Fatos 7 e 8 abaixo implicam que existe no máximo uma aresta horizontal em cada componente conexo de F . Portanto,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap F_j| \geq |F_j| - 1 \text{ para todo } j \neq i,$$

o que prova (iii); ademais, em virtude do Corolário 7.8 abaixo, $|\lambda(x) - \lambda(y)| = 1$ para toda aresta xy , ou seja, F_i não possui aresta horizontal. Logo,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |\nabla(B) \cap F_i| = |F_i|,$$

o que prova (ii).

Figura 7.2: Um componente conexo de uma T -junção mínima.

FATO 7. Para todo x em V_{F_j} existe no máximo uma aresta xy em F_j tal que $\lambda(y) \geq \lambda(x)$.

Prova. Suponha que existam $\alpha_1 = xy_1$ e $\alpha_2 = xy_2$ em F_j tais que

$$y_1 \neq y_2, \quad \lambda(y_1) \geq \lambda(x) \quad \text{e} \quad \lambda(y_2) \geq \lambda(x).$$

Seja P um caminho simples de r a x com $w(P) = \lambda(x)$. Como P é simples, contém no máximo uma das arestas α_1 ou α_2 . Suponha que P não contém α_2 . Seja Q o caminho $P \cdot \langle x, \alpha_2, y_2 \rangle$ de r a y_2 . Logo, $w(Q) = w(P) + 1 = \lambda(x) + 1 > \lambda(y_2)$, o que é uma contradição.

FATO 8. O máximo de λ restrito a V_{F_j} é alcançado em um vértice ou nas duas pontas de uma aresta.

Prova. Suponha que existam vértices distintos x e y não adjacentes em F_j para os quais $\lambda(x)$ e $\lambda(y)$ são máximos quando restringimos λ a V_{F_j} . Como F_j é uma árvore e x, y são

elementos de V_{F_j} , segue que existe um caminho P em F_j unindo x e y . Mas, isto implica que P possui um vértice interno z para o qual, seus dois vizinhos v_1, v_2 em V_P satisfazem

$$\lambda(v_1) \geq \lambda(z) \quad \text{e} \quad \lambda(v_2) \geq \lambda(z).$$

Porém, isto contraria o Fato 7. □

Conforme vimos no Capítulo 5, dado um grafo conexo G e uma função conservativa w de E em $\{-1, +1\}$ é possível calcular a função w -posto em $O(|V|^4)$. Claramente, se já dispomos da função w -posto é possível determinar a coleção $\mathcal{B}$ da demonstração do teorema acima em $O(|V|^2)$.

LEMA 7.6. *Seja G um grafo conexo, w uma função conservativa de E em $\{-1, +1\}$, r um vértice arbitrário de G e λ a função w -posto relativa a r . Se $\mathcal{L}_g$ denota a coleção das fatias gordas determinadas por λ então $\mathcal{B} := \{L : L \in \mathcal{L}_g, r \notin L\}$ satisfaz*

- (i) $|\nabla(B) \cap E^-| = 1$ para todo B em $\mathcal{B}$,
- (ii) $\mathcal{B}$ é ∇ -disjunta e
- (iii) para toda aresta xy , $xy \notin \nabla(\mathcal{B})$ se, e só se, $\lambda(x) = \lambda(y)$.

Prova de (i). É imediato do Teorema 4.1.

Prova de (ii) Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é ∇ -disjunta. Seja xy uma aresta na cofronteira de algum B em $\mathcal{B}$. Ajuste a notação, trocando-se os papéis de x e y se necessário, de modo que $\lambda(x) \leq \lambda(y)$. Em virtude do Teorema 4.1 e como $xy \in \nabla(B)$, segue que $\lambda(y) = \lambda(x) + 1$. Pela definição de fatiamento, nenhuma fatia gorda de nível i para $i \geq \lambda(y) + 1$ ou $i < \lambda(x)$ contém α em sua cofronteira, o que completa a prova de (ii).

Prova de (iii). Seja xy uma aresta de G . Ajuste a notação, trocando-se os papéis de x e y se necessário, de modo que $\lambda(x) \leq \lambda(y)$. Pelo Teorema 4.1, $\lambda(y) - \lambda(x) \leq 1$. Temos, portanto, dois casos:

Caso 1 $\lambda(x) = \lambda(y) - 1$.

Então α está na cofronteira de uma fatia gorda de nível $\lambda(x)$.

Caso 2 $\lambda(x) = \lambda(y)$.

Pela definição de fatiamento, a fatia gorda B de nível $\lambda(x)$ que contém x também contém y , ou seja, $xy \in E_\lambda[B]$. Como, para toda fatia B de nível i para $i > \lambda(x)$ ou $i < \lambda(x)$, ou $\{x, y\} \subseteq B$ ou $\{x, y\} \cap B = \emptyset$ segue que nenhum elemento de $\mathcal{B}$ contém α em sua cofronteira.

□

LEMA 7.7. *Seja G um grafo conexo, w uma função conservativa de E em $\{-1, +1\}$, H um componente conexo de E^- . Se $r \in V_H$ então, para todo x em V_H , o único caminho unindo r e x em H é w -mínimo.*

Prova. Seja x um vértice de H e P o caminho incluído em H unindo r e x . Seja Q um caminho w -mínimo de r até x (existe pois w é conservativa). Suponha que $P \oplus Q \neq \emptyset$. Seja C um circuito em $P \oplus Q$. Como tanto P quanto Q são caminhos, segue que

$$C \cap P \neq \emptyset \quad \text{e} \quad C \cap Q \neq \emptyset.$$

No entanto, $P \subseteq E^-$ e, portanto, $w(C \cap P) < 0$. Como w é conservativa,

$$w(C) = w(C \cap P) + w(C \cap Q) \geq 0,$$

ou seja, $w(C \cap Q) > 0$. Agora, $Q \oplus C$ contém um caminho R unindo r e x e

$$w(Q \oplus C) = w(Q) - w(Q \cap C) + w(C \setminus Q) = w(Q) - w(C \cap Q) + w(C \cap P) < w(Q).$$

Como w é conservativa, segue que $w(R) \leq w(Q \oplus C) < w(Q)$, o que é uma contradição. □

COROLÁRIO 7.8. *Seja G um grafo conexo, w uma função conservativa de E em $\{-1, 1\}$, H um componente conexo de E^- e r um vértice de H . Então $|\lambda(x) - \lambda(y)| = 1$ para todo xy em E , onde λ é a função w -posto com centro em r .* □

É interessante notar que o corolário acima é uma prova para a parte não-trivial da Proposição 3.2.

Frank e Szegedi [9] generalizaram o Teorema 7.5 provando o seguinte: seja G um grafo e F uma T -junção mínima e suponha que a coleção dos componentes de F admite uma bipartição: $\{K_0, K_1, \dots, K_k\}$ e $\{J_1, \dots, J_l\}$ com $k, l \geq 0$. Para todo circuito C , seja $k_+(C)$ o número de componentes K_i ($i \geq 1$) dos quais C contém pelo menos uma aresta. Se $w^F(C) \geq k_+(C)$ para todo circuito C de G , então existe uma coleção ∇ -disjunta $\mathcal{L}$ de partes T -ímpares de V tal que

- $|\nabla(L) \cap F| = 1$ para todo L em $\mathcal{L}$,
- $\sum_{L \in \mathcal{L}} |\nabla(L) \cap K_i| = |K_i|$ para todo i e
- $\sum_{L \in \mathcal{L}} |\nabla(L) \cap J_i| \geq |J_i| - 1$ para todo i .

Embora isso não esteja explícito em [9], a hipótese do teorema acima garante que é possível subdividir exatamente uma aresta de cada componente K_i ($i \geq 1$) de F de modo que F continue sendo uma T -junção mínima. Intuitivamente, esta subdivisão implica que, como existe exatamente uma aresta horizontal em cada componente conexo de F , podemos escolher uma coleção de T -cortes que não cobre exatamente uma das metades da aresta subdividida.

7.5 Mais uma condição suficiente para $\tau = \nu$

Durante as próximas seções iremos nos ocupar com a demonstração do Teorema 7.9 abaixo. Para isso, precisaremos de um novo tipo de “certificado” para a minimalidade de uma T -junção o qual introduziremos na próxima seção.

TEOREMA 7.9 (SEYMOUR [24]). *Se G é um grafo conexo e T é uma parte par de V tais que G não admite uma partição $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ de V tal que cada V_i é T -ímpar e $G(V_1, V_2, V_3, V_4)$ é um K^4 então $\tau(G, T) = \nu(G, T)$.*

Um grafo G é *série-paralelo* se não possui uma partição $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ de V tal que $G(V_1, V_2, V_3, V_4)$ é um K^4 . Assim, o teorema acima tem como corolário imediato que $\tau = \nu$ para grafos série-paralelos.

série-paralelo

7.6 T -partições

Para um grafo conexo G e um conjunto par T de vértices, uma T -partição ($= T$ -partition)² é uma partição $\mathcal{X} := \{X_1, \dots, X_k\}$ de V tal que cada X_i é T -ímpar, ou seja, $|X_i \cap T|$ é ímpar, e induz um subgrafo conexo de G . O conjunto das arestas com pontas em diferentes elementos de $\mathcal{X}$ será denotado por $E[\mathcal{X}]$. É claro que $E[\mathcal{X}] = \nabla(X_1) \cup \dots \cup \nabla(X_k)$. Como $|T|$ é par e cada X_i tem um número ímpar de elementos de T , segue que k é par. Diremos que $\text{val}(\mathcal{X}) := k/2$ é o *valor* da T -partição $\mathcal{X}$.

 T -partição $E[\mathcal{X}]$ $\text{val}(\mathcal{X})$

Uma coleção Ω de T -partições é *E -disjunta* se

 E -disjunta

$$E[\mathcal{X}_1] \cap E[\mathcal{X}_2] = \emptyset$$

para todo par $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ de elementos distintos de Ω . O *valor* de uma coleção E -disjunta de T -partições, denotado por $\text{val}(\Omega)$, é o número

 $\text{val}(\Omega)$

$$\sum (\text{val}(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \in \Omega)$$

²O termo é devido a Sebő.

LEMA 7.10. Para toda T -junção F e toda coleção E -disjunta Ω de T -partições, $|F| \geq \text{val}(\Omega)$.

Prova. Seja F uma T -junção e Ω uma coleção E -disjunta de T -partições. Seja $\mathcal{X} := \{X_1, \dots, X_k\}$ um elemento de Ω . Então

$$|F \cap E[\mathcal{X}]| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |F \cap \nabla(X_i)| \geq \frac{k}{2} = \text{val}(\mathcal{X})$$

e, portanto,

$$|F| \geq \sum_{\mathcal{X} \in \Omega} |F \cap E[\mathcal{X}]| \geq \sum_{\mathcal{X} \in \Omega} \text{val}(\mathcal{X}) = \text{val}(\Omega).$$

□

Grafos bicríticos desempenham um papel de fundamental importância na prova do Teorema 7.9. Como veremos adiante, um grafo bicrítico G admite uma partição $\mathcal{X}$ de seu conjunto de vértices em conjuntos ímpares que induzem subgrafos conexos de G tal que $G\langle\mathcal{X}\rangle$ é um K^4 . Daí a conexão entre o Teorema 7.9 e grafos bicríticos.

Um grafo G é *bicrítico* (= *bicritical*) se $G - \{u, v\}$ tem emparelhamento perfeito para todo par u, v de vértices distintos de G . É claro que todo grafo bicrítico tem emparelhamento perfeito.

bicrítico

Para uma T -partição $\mathcal{X} := \{X_1, \dots, X_k\}$ de um graft (G, T) , denotaremos por $G\langle\mathcal{X}\rangle$, o grafo $G\langle X_1, \dots, X_k \rangle$.

 $G\langle\mathcal{X}\rangle$

TEOREMA 7.11 (SEBŐ [21]). Para todo grafo conexo G e todo conjunto par T de vértices, existe uma T -junção F e uma coleção E -disjunta Ω de T -partições tais que $|F| = \text{val}(\Omega)$. Ainda mais, é possível escolher Ω tal que $G\langle\mathcal{X}\rangle$ é bicrítico para todo $\mathcal{X}$ em Ω .

Prova. A prova que segue é devida a Sebő [23]³. Seja F uma T -junção mínima. Pelo Lema de Guan, w^F é conservativa. Seja r um vértice arbitrário de G e λ a função w^F -posto relativa a r . Seja $\mathcal{L}_g$ a coleção das fatias gordas determinadas por λ e $\mathcal{L}_m$ a coleção das fatias magras determinadas por λ . Definiremos para cada L de $\mathcal{L}_g$ uma T -partição de V , denotada por $\mathcal{X}_L$. Para cada elemento L de $\mathcal{L}_g$ denote por $A_1, \dots, A_k$ os elementos maximais de $\mathcal{L}_m$ dentre os que são parte de L . Temos os seguintes casos:

³Na verdade esta prova é uma versão completa da prova de Sebő [23]. A primeira demonstração para este resultado pode ser encontrada em Sebő [21]. Para uma prova distinta que faz uso do Teorema 6.5, veja Frank e Szigeti [8].

Caso 1 $r \notin L$.

Então $r \notin A_i$ para $1 \leq i \leq k$. O conjunto de vértices X_0 de um dos componentes conexos de $G - L$ é tal que $\nabla(X_0)$ contém a única aresta negativa de $\nabla(L)$. Agora, adicione o conjunto de vértices de cada componente conexo de $G - L$, com exceção de X_0 , a qualquer A_i que lhe seja adjacente. Denote por $X_1, \dots, X_k$ os conjuntos de vértices assim obtidos e seja $\mathcal{X}_L$ a coleção $\{X_0, X_1, \dots, X_k\}$.

Caso 2 $r \in L$.

Se $k = 1$ então defina $\mathcal{X}_L := \emptyset$. Suponha $k > 1$. Então existe exatamente um i tal que $r \in A_i$. Ajuste a notação de tal modo que $r \in A_1$. Agora, adicione A_1 a qualquer A_i que lhe seja adjacente. Adicione, também, o conjunto de vértices de cada componente de $G - L$ a algum A_i que lhe seja adjacente. Denote por $X_2, \dots, X_k$ os conjuntos de vértices assim obtidos e seja $\mathcal{X}_L$ a coleção $\{X_2, \dots, X_k\}$.

Seja Ω a coleção

$$\{\mathcal{X}_L : L \in \mathcal{L}_g \text{ e } \mathcal{X}_L \neq \emptyset\}.$$

Seja xy uma aresta de $E[\mathcal{X}_L]$ para alguma fatia gorda L de nível i . Ajuste a notação de modo que $\lambda(x) \leq \lambda(y)$. Então, ou (1) $\lambda(x) = \lambda(y) = i$ ou (2) $\lambda(x) = \lambda(y) - 1 = i$. Porém, isto implica que Ω é E -disjunta. Suponha, agora, que xy é uma aresta negativa. Se $\lambda(x) = \lambda(y) - 1$ então $xy \in E[\mathcal{X}_L]$ onde L é a fatia gorda de nível $\lambda(x)$ que contém xy em sua cofronteira. Se $\lambda(x) = \lambda(y)$ então, seja L a fatia gorda de nível $\lambda(x)$ que contém x e y . Em virtude do Teorema 4.1 x e y estão em diferentes fatias magras de nível $\lambda(x)$ donde $xy \in E[\mathcal{X}_L]$. Assim, Ω é uma coleção E -disjunta de T -partições de valor $|F|$.

Suponha que $G' := G\langle \mathcal{X} \rangle$ não é bicrítico para algum $\mathcal{X}$ em Ω . Vamos mostrar como encontrar uma coleção E -disjunta de T -partições de valor $|F|$ cuja cardinalidade é maior que a de Ω .

É claro que $F' := F \cap E[\mathcal{X}]$ é um emparelhamento perfeito em G' . Seja r' um vértice arbitrário de G' e λ' a função $w^{F'}$ -posto relativa a r' (obviamente definida sobre as arestas de G'). Em virtude do Lema 7.12, existe $x \neq r'$ em $V_{G'}$ tal que $\lambda'(x) \geq 0$.

Agora, repita a construção acima com G' no lugar de G e F' no lugar de F . Obtemos, assim, uma coleção E -disjunta Ω' de partes $I_{F'}$ -ímpares em G' cujo valor é $|F'|$. Afirmamos que $|\Omega'| \geq 2$. De fato, seja α a aresta negativa que incide em r' e $\mathcal{X}'$ a T -partição em Ω' tal que $\alpha \in E[\mathcal{X}']$. Então o $w^{F'}$ -posto relativo a r' de todo vizinho de r' é -1 . Logo, $E[\mathcal{X}']$ não contém a aresta negativa incidente em x . Portanto, $|\Omega'| \geq 2$.

Assim, $(\Omega \setminus \{\mathcal{X}\}) \cup \Omega'$ é uma coleção E -disjunta de T -partições de cardinalidade maior que Ω . Portanto, por finitude, uma coleção E -disjunta Ω de T -partições de valor $|F|$ e de cardinalidade máxima é tal que $G\langle \mathcal{X} \rangle$ é bicrítico para todo $\mathcal{X}$ em Ω . $\square$

Em outras palavras, o Teorema 7.11 juntamente com o Lema 7.10, afirmam que

$$\tau(G, T) = \max(\text{val}(\Omega) : \Omega \text{ é uma coleção } E\text{-disjunta de } T\text{-partições}).$$

LEMA 7.12. *Seja G um grafo com emparelhamento perfeito M , r um vértice arbitrário de G e λ a função w^M -posto relativa a r . Então, G é bicrítico se, e só se, $\lambda(x) = -1$ para todo vértice $x \neq r$.*

Prova. (Necessidade.) Suponha G bicrítico. Como M é um emparelhamento em G , segue que $w^M(P) \geq -1$ para todo caminho P unindo r e x . Seja M_{rx} um emparelhamento perfeito em $G - \{r, x\}$. Pelo Lema 2.1, $M \oplus M_{rx}$ contém um caminho P de r até x . Portanto, $w^M(P) = -1$ e, conseqüentemente, $\lambda(x) = -1$.

(Suficiência.) Seja $x \neq r$ um vértice de G e P_{rx} um caminho w^M -mínimo de r até x , ou seja, $w^M(P_{rx}) = -1$. Mas, M é um emparelhamento perfeito em G , o que implica que P_{rx} alterna arestas em M e $E_G \setminus M$ respectivamente. Portanto, $M \oplus P_{rx}$ é um emparelhamento perfeito em $G - \{r, x\}$. $\square$

Prova do Teorema 7.9. Seja Ω uma coleção E -disjunta máxima de T -partições tal que $G\langle\mathcal{X}\rangle$ é bicrítico para todo $\mathcal{X}$ em Ω . Afirmamos que $|\mathcal{X}| = 2$ para todo $\mathcal{X}$ em Ω . De fato, seja $\mathcal{X}$ uma T -partição em Ω e suponha que $|\mathcal{X}| \geq 4$. Como $G' := G\langle\mathcal{X}\rangle$ é bicrítico, pelo Lema 7.13, existe uma partição $\mathcal{X}'$ de $V_{G'}$ tal que $G'\langle\mathcal{X}'\rangle$ é um K^4 . No entanto, cada elemento de $\mathcal{X}'$ é T -ímpar uma vez que cada elemento de $\mathcal{X}$ é T -ímpar. Sendo assim, $\mathcal{X}'$ é uma T -partição, o que é uma contradição. Portanto, $|\mathcal{X}| = 2$ para todo $\mathcal{X}$ em Ω . Escolha, então, de cada $\mathcal{X}$ em Ω um de seus elementos e seja $\mathcal{B}$ a coleção de partes T -ímpares assim obtida. É claro que $\mathcal{B}$ é ∇ -disjunta; ademais, $|\mathcal{B}| = |F|$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

A demonstração apresentada claramente induz um algoritmo que recebe uma T -junção mínima e devolve ou (1) uma T -partição $\mathcal{X}$ tal que $G\langle\mathcal{X}\rangle$ é um K^4 ou (2) uma coleção ∇ -disjunta de partes T -ímpares equicardinal à T -junção mínima.

TEOREMA 7.13 (SEBŐ [21]). *O conjunto de vértices de um grafo bicrítico G com $|V| \geq 4$ pode ser particionado em quatro subconjuntos V_1, V_2, V_3 e V_4 de cardinalidade ímpar tal que cada V_i induz um subgrafo conexo de G e $G\langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ é um K^4 .*

Prova. A prova que apresentaremos a seguir é devida a Frank e Szegedi [8].

Seja M um emparelhamento perfeito de G , uv uma aresta de M e $M_{uv} := M \setminus \{uv\}$. Seja $z \neq v$ um vizinho de u . Como G é bicrítico, $G - \{v, z\}$ tem emparelhamento perfeito M_{vz} . É claro que, M_{uv} deixa u e v expostos enquanto que M_{vz} deixa v e z expostos. Deste modo, pelo Lema 2.1, $M_{uv} \oplus M_{vz}$ é uma $\{u, z\}$ -junção e, portanto, contém um caminho P

de u até z . É evidente que $uz \notin M_{uv} \cup M_{vz}$. Logo, $C := P \cdot \langle z, u \rangle$ é um circuito. Denote este circuito por $\langle u, u_1, \dots, u_k, u \rangle$ onde $u_k = z$.

Seja K o componente conexo de $G - V_C$ que contém v . Como $\nabla(V_C) \cap M = \{uv\}$ e $v \in V_K$, segue do Lema 6.1, que V_K tem cardinalidade ímpar enquanto que os demais componentes de $G - V_C$ tem cardinalidade par. Defina $V_1 := K$. Pelo Lema 7.14, G é 2-conexo; ainda mais, não contém nenhum conjunto de vértices X com dois elementos para o qual $q(G - X) > 0$. Em vista disto, K tem pelo menos três vizinhos distintos em C . Sejam u, u_i e u_j tais vizinhos com $j > i$. Se existe $u_p u_{p+1} \in M$ tal que $p \geq i$ e $p + 1 \leq j$ então defina $V'_2 := \{u_1, \dots, u_p\}$, $V'_3 := \{u_{p+1}, \dots, u_k\}$ e $V'_4 := \{u\}$. Caso contrário, isto é, $j = i + 1$ e i é par, defina $V'_2 := \{u_i\}$, $V'_3 := \{u_j\}$ e $V'_4 := V_C \setminus \{u_i, u_j\}$. É fácil ver que em ambos os casos cada V'_l tem cardinalidade ímpar. Agora, adicione cada componente par de $G - V_C$ a algum V'_l que lhe seja adjacente e sejam V_2, V_3, V_4 os conjuntos de vértices assim obtidos. Então $G[V_1, V_2, V_3, V_4]$ é um K^4 . $\square$

LEMA 7.14. *Um grafo G é bicrítico se, e só se, $q(G - X) \leq |X| - 2$ para toda parte X de V com $|X| \geq 2$. Ainda mais, todo grafo bicrítico é 2-conexo.*

Prova. Suponha G bicrítico e seja X uma parte de V com $|X| \geq 2$. Seja x, y um par de vértices distintos de X e $X' := X \setminus \{x, y\}$. Então $G' := G - \{x, y\}$ tem emparelhamento perfeito e, pelo Teorema de Tutte, $q(G' - X') \leq |X'|$. No entanto, $q(G' - X') = q((G - \{x, y\}) - X') = q(G - X) \leq |X'| = |X| - 2$. Reciprocamente, suponha que $q(G - X) \leq |X| - 2$ para toda parte X de V com $|X| \geq 2$. Vamos mostrar que G é bicrítico. Seja x, y um par de vértices distintos em V e $G' := G - \{x, y\}$. Seja X' um subconjunto de V' e $X := X' \cup \{x, y\}$. Então $q(G - X) \leq |X| - 2$ se, e só se, $q((G - \{x, y\}) - X') \leq |X'|$ ou, equivalentemente, $q(G' - X') \leq |X'|$. Concluimos assim, em virtude do Teorema de Tutte, que G' tem emparelhamento perfeito. Portanto, G é bicrítico.

Para a segunda parte, seja x um vértice; G tem emparelhamento perfeito, assim $q(G - x) = 1$. Suponha que $G - x$ possua algum componente H com número par de vértices. Tome um vértice y em H . É evidente que $H - y$ não tem emparelhamento perfeito. No entanto, isto implica que $G - \{x, y\}$ não tem emparelhamento perfeito, o que contraria G ser bicrítico. Portanto, G é 2-conexo. $\square$

7.7 Grafos de Seymour

Um grafo G é *de Seymour* se $\tau(G, T) = \nu(G, T)$ para toda parte par T de V . Como vimos anteriormente, $\tau > \nu$ para muitos grafos. Recentemente Ageev, Kostochka e Szegedi [1] demonstraram a seguinte caracterização, conjecturada por Sebő, para grafos de Seymour.

de Seymour

Figura 7.3: Prisma triangular.

TEOREMA 7.15 (AGEEV, KOSTOCHKA E SZIGETI [1]). *Um grafo G não é de Seymour se, e só se, existe uma função conservativa w de E em $\{-1, +1\}$ e dois circuitos C_1 e C_2 tais que $w(C_1) = w(C_2) = 0$ e $C_1 \cup C_2$ é ou um K_4 ímpar ou um prisma ímpar ou, equivalentemente, $C_1 \cup C_2$ não é bipartido.* $\square$

No enunciado acima um K_4 ímpar é um grafo obtido através da subdivisão de cada aresta de K_4 um número par de vezes. Um prisma ímpar é um grafo obtido através da subdivisão das arestas de um embutimento planar⁴ do prisma triangular tal que cada ciclo limitando uma face triangular tem comprimento ímpar e cada ciclo limitando uma face quadrangular tem comprimento par.

⁴Para definições e conceitos básicos em planaridade, veja, por exemplo, Bondy e Murty [3].

Capítulo 8

Decomposição em orelhas e conservadores máximos

Um *conservador* (= *join*) em um grafo G é um conjunto de arestas J tal que

conservador

$$|C \cap J| \leq |C \setminus J|$$

para todo circuito C de G . É evidente que se J é conservador então a função w^J é conservativa. Reciprocamente, para uma função conservativa w de E em $\{-1, +1\}$, E^- é um conservador. Ainda mais, pelo Lema de Guan, se J é um conservador então J é uma I_J -junção mínima. Reciprocamente, para todo T , toda T -junção mínima é um conservador. É claro que todo emparelhamento é um conservador.

Um conservador J é *máximo* se $|J| \geq |F|$ para todo conservador F . Denotaremos por μ_G a cardinalidade de um conservador máximo. Durante este capítulo nos ocuparemos com a solução do seguinte problema: μ_G

PROBLEMA 4. Dado um grafo G , determinar um conservador máximo em G .

ou, equivalentemente,

PROBLEMA 5. Dado um grafo G , determinar uma função conservativa w de E em $\{-1, +1\}$ que minimize $w(E)$.

Em virtude das observações acima, também podemos enunciar o problema como: dado um grafo conexo G , determinar $\max (\tau(G, T) : T \text{ é uma parte par de } V)$ onde $\tau(G, T)$, como de hábito, denota a cardinalidade de uma T -junção mínima.

Apresentaremos uma interessante relação minimax, devida a Frank [7], envolvendo conservadores máximos e decomposição em orelhas. Tal relação fornecerá um algoritmo polinomial para a resolução do problema.

Figura 8.1: As arestas gordas correspondem às arestas do conservador. O item (a) mostra que nem todo conservador pode ser estendido para um conservador máximo. As arestas gordas de (b) correspondem a um conservador máximo.

8.1 Decomposição em orelhas

Dado um subgrafo H de um grafo G , uma *orelha* ($= ear$) de H é ou (1) um caminho não trivial¹, em G , cujas pontas constituem os únicos vértices em comum com H ou (2) um circuito em G que possui exatamente um vértice em comum com H . Uma *decomposição em orelhas* ($= ear-decomposition$) de um grafo G é uma seqüência $G_0, G_1, \dots, G_k$ de subgrafos de G tal que (i) G_0 é trivial², (ii) para todo $i > 0$, G_i é obtido de G_{i-1} adicionando-se uma orelha P_i de G_{i-1} e (iii) $G_k = G$. Diremos que $P_1, P_2, \dots, P_k$ constituem as *orelhas* de tal decomposição.

orelha

orelhas

Freqüentemente nos referiremos a uma decomposição em orelhas de um grafo G como

¹Isto é, com pelo menos uma aresta.

²Isto é, $|V_{G_0}| = 1$ e $E_{G_0} = \emptyset$.

a seqüência de orelhas $P_1, \dots, P_k$ ao invés da seqüência de subgrafos $G_0, \dots, G_k$. Por vezes, convém confundir P_i com o grafo $G[E_{P_i}]$. Assim, poderemos dizer “considere o grafo $G_{i-1} \cup P_i$ ”.

Um grafo é *2-aresta-conexo* se, para qualquer par x, y de vértices distintos, existem pelo menos dois caminhos *disjuntos nas arestas* cujos extremos são x e y ou, equivalentemente, se toda aresta está incluída em algum circuito. É um fato bem conhecido (veja Lovász [16]) que um grafo G possui uma decomposição em orelhas se, e só se, G é 2-aresta-conexo.

LEMA 8.1. *O número de orelhas numa decomposição em orelhas de um grafo G é independente da decomposição e seu valor é $|E| - |V| + 1$.*

Prova. Seja $P_1, \dots, P_k$ uma decomposição em orelhas de G . Adote as abreviaturas $E_i := E_{P_i}$ e $V_i := V_{P_i} \setminus V_{G_{i-1}}$ para $1 \leq i \leq k$ onde $G_i := P_1 \cup \dots \cup P_i$. Como para cada orelha P_i as duas pontas da orelha estão em $V_{G_{i-1}}$, temos que $|E_i| = |V_i| + 1$. Então

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2| + \dots + |E_k| \\ |E| &= |V_1| + 1 + |V_2| + 1 + \dots + |V_k| + 1 \\ |E| &= |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k| + k \\ |E| &= |V| - 1 + k. \end{aligned}$$

Portanto, $k = |E| - |V| + 1$. □

O *comprimento* de uma orelha é o número de arestas da orelha. Uma orelha é *ímpar* se seu comprimento é ímpar. Analogamente, uma orelha é *par* se seu comprimento é par. Uma decomposição em orelhas é *ímpar* se cada uma de suas orelhas é ímpar.

orelha ímpar
orelha par

Para um grafo G , φ_G é o número mínimo de orelhas *pares* dentre todas as decomposições em orelhas de G . Portanto, $\varphi_G = 0$ se, e só se, G admite uma decomposição em orelhas ímpar. Uma decomposição em orelhas de G é *ótima* se possui φ_G orelhas pares.

φ_G

ótima

Grafos hipoemparelháveis e sua decomposição em orelhas

Um grafo G é *hipoemparelhável* (*= hypomatchable, factor-critical*) se $G - v$ possui emparelhamento perfeito para todo v em V . Um vértice v é *exposto* por um emparelhamento M se nenhuma aresta de M incide em v . Um emparelhamento é *quase-perfeito* se existe precisamente um vértice que não é incidente a nenhuma aresta do emparelhamento, ou seja, se possui um único vértice exposto. É evidente que todo grafo hipoemparelhável tem emparelhamento quase-perfeito.

hipoemparelhável
exposto

TEOREMA 8.2 (LOVÁSZ E PLUMMER [17]). *Um grafo G é hipoemparelhável se, e só se, G possui uma decomposição em orelhas ímpar. Ainda mais, para cada aresta α de G existe uma decomposição em orelhas ímpar de G tal que a primeira orelha usa α .*

A necessidade decorre do Lema 8.3 e a suficiência decorre do Lema 8.4. Ambos são discutidos abaixo.

O teorema acima afirma, em outras palavras, que $\varphi_G = 0$ se, e só se, G é hipoemparelhável.

LEMA 8.3 (LOVÁSZ E PLUMMER [17]). *Seja G um grafo hipoemparelhável e M um emparelhamento quase-perfeito. Se G' é um subgrafo próprio de G , $E_{G'} \cap M$ é um emparelhamento quase-perfeito em G' e G' contém o vértice exposto por M , então existe uma orelha ímpar P de G' tal que $G' \cup P$ tem emparelhamento quase-perfeito $E_{G' \cup P} \cap M$.*

Prova. Denote por r o vértice exposto por M . Seja xy uma aresta com pelo menos uma ponta, digamos x , em $V_{G'}$. Se y é vértice de G' , tome $P := \{xy\}$. Suponha, agora, que y é elemento de $V_G \setminus V_{G'}$. Seja M_y um emparelhamento perfeito em $G - y$. Em virtude do Lema 2.1, $M \oplus M_y$ contém um caminho Q de y até r . Partindo-se de y e caminhando sobre Q , denote por z o primeiro vértice de G' encontrado. É claro que a aresta de Q que incide em y está incluída em M . Por outro lado, a aresta de Q que incide em z está incluída em M_y . Portanto, $|Q(y, z)|$ é par. Tome $P := \{xy\} \cup Q(y, z)$. Em ambos os casos, P é uma orelha ímpar de G' e $E_{G' \cup P} \cap M$ é um emparelhamento quase-perfeito em $G' \cup P$. $\square$

LEMA 8.4. *Seja G um grafo e G' um subgrafo hipoemparelhável de G . Se P é uma orelha ímpar de G' então o grafo $G' \cup P$ é hipoemparelhável.*

Prova. Seja x um vértice arbitrário de G' . Como G' é hipoemparelhável, existe um emparelhamento perfeito M_x em $G' - x$. Denote por $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_{2p+1}, v_{2p+1} \rangle$ a orelha P . Então $M_x \cup \{\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2p}\}$ é um emparelhamento perfeito em $(G' \cup P) - x$.

Resta mostrar que existe um emparelhamento perfeito em $(G' \cup P) - v_i$ para $1 \leq i \leq 2p$. Não é difícil ver que existe um emparelhamento M_i que cobre todos os vértices internos de P com exceção de v_i . É claro que uma das pontas de P é coberta por M_i . Ajuste a notação de modo que v_0 seja coberto por M_i . Seja M_0 um emparelhamento perfeito em $G' - v_0$. Se $v_0 \neq v_{2p+1}$ então v_{2p+1} é coberto por M_0 donde $M_0 \cup M_i$ é um emparelhamento perfeito em $(G' \cup P) - v_i$. Suponha $v_0 = v_{2p+1}$. Como v_0 é coberto por M_i , segue que $M_0 \cup M_i$ é um emparelhamento perfeito em $(G' \cup P) - v_i$. $\square$

Grafos bipartidos elementares e sua decomposição em orelhas

No que segue, K^2 é o grafo que consiste de dois vértices e de uma aresta unindo estes vértices. Um grafo bipartido H é *elementar* (= *elementary*) se toda aresta está em algum emparelhamento perfeito. Uma decomposição em orelhas de um grafo bipartido é *bipartida* (= *bipartite ear-decomposition*) se a primeira orelha é par e as demais orelhas são ímpares (donde suas pontas estão em diferentes classes da bipartição do grafo).

elementar

bipartida

Para um grafo G com emparelhamento M , um caminho $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, v_k \rangle$ é *M-alternante* se $\alpha_i \in M$ quando i é ímpar e $\alpha_i \notin M$ quando i é par. Um caminho P de u até v é *M-alternante par* se P é *M-alternante* e tem comprimento par, ou seja, v é exposto por M . Um caminho P de u até v é *M-alternante ímpar* se P é *M-alternante* e tem comprimento ímpar, ou seja, tanto u quanto v são saturados por M . Um circuito é *M-alternante* se tem comprimento par e alterna arestas em M e $E \setminus M$.

M-alternante

Grafos bipartidos elementares e decomposição em orelhas bipartida se relacionam através do seguinte teorema:

TEOREMA 8.5 (LOVÁSZ E PLUMMER [17]). *Um grafo bipartido distinto de K^2 é elementar se, e só se, possui uma decomposição em orelhas bipartida. Ademais, para toda aresta α existe uma decomposição em orelhas bipartida tal que a primeira orelha inclui α .*

Prova. (Necessidade.) Seja $H \neq K^2$ um grafo bipartido elementar. Escolha uma aresta α e um emparelhamento perfeito M que inclua α . Pelo Lema 8.8, existe uma orelha ímpar P de $G[\{\alpha\}]$. Então $P_1 := P \cup \{\alpha\}$ é uma orelha par. As demais orelhas ímpares são obtidas por aplicações sucessivas do Lema 8.8.

(Suficiência.) Suponha que H seja um grafo bipartido que possua uma decomposição em orelhas bipartida. Denote por X e Y as classes da bipartição de H . Temos que mostrar que H tem emparelhamento perfeito e que toda aresta de H está incluída em algum emparelhamento perfeito. Pelo Lema 8.9, H tem um emparelhamento perfeito M . Seja xy uma aresta de H com $x \in X$ e $y \in Y$. Se xy está em M , não há nada a provar. Suponha que xy não está em M . Em virtude do Lema 8.9, existe um caminho *M-alternante ímpar* de x até y que juntamente com a aresta xy forma um ciclo C de comprimento par. Portanto, $M \oplus C$ é um emparelhamento perfeito que inclui a aresta xy . $\square$

COROLÁRIO 8.6. *Se $H \neq K^2$ é um grafo bipartido elementar então $\varphi_G = 1$.*

Prova. Devido ao Teorema 8.2, $\varphi \geq 1$. O teorema acima garante que existe uma decomposição em orelhas de H que possui exatamente uma orelha par. Portanto, $\varphi = 1$. $\square$

COROLÁRIO 8.7. *Se G é um grafo e $H \neq K^2$ um subgrafo de G tal que $V_H = V_G$ e H é bipartido elementar então $\varphi_G = 1$.*

Prova. É claro que G tem emparelhamento perfeito, assim, em virtude do Teorema 8.2, $\varphi_G \geq 1$. Tome uma decomposição em orelhas ótima $P_1, \dots, P_k$ de H . Cada aresta α de G que não está em H é uma orelha ímpar de H . Portanto, $\varphi_G = 1$. $\square$

LEMA 8.8 (LOVÁSZ E PLUMMER [17]). *Seja $H \neq K^2$ um grafo bipartido elementar e M um emparelhamento perfeito. Se H' é um subgrafo próprio de H e $E_{H'} \cap M$ é um emparelhamento perfeito em H' , então existe uma orelha ímpar P em H' tal que $H' \cup P$ tem emparelhamento perfeito $E_{H' \cup P} \cap M$.*

Prova. Seja xy uma aresta de $E_H \setminus E_{H'}$ tal que $x \in V_{H'}$. Se x, y são elementos de $V_{H'}$, tome $P := \{xy\}$. Suponha, agora, que y não está em $V_{H'}$. Como H é elementar, existe emparelhamento perfeito M_{xy} que usa xy . Pelo Lema 2.1, $M \oplus (M_{xy} \setminus \{xy\})$ é uma $\{x, y\}$ -junção e, portanto, contém um caminho Q de y a x que não usa xy . Partindo-se de y e caminhando sobre P , denote por z o primeiro vértice de H' encontrado. Então $Q(y, z)$ é um caminho que alterna arestas de M e M_{xy} respectivamente, ou seja, $|Q(y, z)|$ é par. Neste caso, tome $P := \{xy\} \cup Q(y, z)$. Em ambos os casos, P é uma orelha ímpar em H' e $E_{H' \cup P} \cap M$ é um emparelhamento perfeito em $H' \cup P$. $\square$

LEMA 8.9. *Se H é um grafo bipartido que possui uma decomposição em orelhas bipartida então (i) H tem emparelhamento perfeito M e (ii) para todo par u, v de vértices de H existe um caminho M -alternante de u até v .*

Prova. Seja $P_1, \dots, P_k$ uma decomposição em orelhas bipartida de H . Para cada i , seja P_i a sequência $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_k, v_k \rangle$. Para cada i , seja M_i o conjunto das arestas α_j de P_i tal que j é par. É evidente que $M := \bigcup_i M_i$ é um emparelhamento perfeito de H . Isto prova (i).

Seja (X, Y) a bipartição de H . Para cada i , seja H_i o grafo $P_1 \cup \dots \cup P_i$. Mostraremos (ii) por indução em k . Construa um emparelhamento perfeito M como na prova de (i). O resultado é evidente se $k = 1$. Suponha $k > 1$. Considere a orelha P_k de H_{k-1} . Sejam x e y as pontas de P_k em X e Y respectivamente. Tome vértices arbitrários x_1 e x_2 em $X \cap V_{H_k}$. Temos os seguintes casos:

Caso 1 $x_1 \in V_{H_{k-1}}$ e $x_2 \in V_{H_{k-1}}$.

O resultado vale por hipótese de indução.

Caso 2 $x_1 \in V_{H_{k-1}}$ e $x_2 \notin V_{H_{k-1}}$.

Por hipótese de indução, existe um caminho M -alternante par Q de x_1 até x . Então $Q \cdot P(x, x_2)$ é um caminho M -alternante par de x_1 até x_2 .

Caso 3 $x_1 \notin V_{H_{k-1}}$ e $x_2 \notin V_{H_{k-1}}$.

Neste caso, é claro que $P(x_1, x_2)$ é um caminho M -alternante par de x_1 até x_2 .

Agora, seja x' em $X \cap V_{H_k}$ e y' em $Y \cap V_{H_k}$. Temos os seguintes casos:

Caso 1 $x' \in V_{H_{k-1}}$ e $y' \in V_{H_{k-1}}$.

O resultado vale por hipótese de indução.

Caso 2 $x' \in V_{H_{k-1}}$ e $y' \notin V_{H_{k-1}}$.

Por hipótese de indução, existe um caminho M -alternante ímpar Q de x' até y . Então $Q \cdot \tilde{P}(y, y')$ é um caminho M -alternante ímpar de x' até y' .

Caso 3 $x' \notin V_{H_{k-1}}$ e $y' \in V_{H_{k-1}}$.

Por hipótese de indução, existe um caminho Q M -alternante ímpar de x até y' . Então $\tilde{P}(x, x') \cdot \tilde{Q}$ é um caminho M -alternante ímpar de x' até y' .

Caso 4 $x' \notin V_{H_{k-1}}$ e $y' \notin V_{H_{k-1}}$.

Neste caso, é claro que $P(x', y')$ é um caminho M -alternante ímpar de x' até y' .

Isto completa a prova de (ii). □

O lema técnico que segue será útil na demonstração do Teorema 8.12, permitindo evitar a complexa hipótese de indução que Frank [7] usa.

LEMA 8.10. *Para todo grafo bipartido elementar $H \neq K^2$ com bipartição (X, Y) e para todo par x_1, x_2 de vértices distintos de X , existe uma seqüência $P_1, P_2, \dots, P_k$ de trilhas tal que*

$$H = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k,$$

P_1 é um caminho de comprimento par unindo x_1 e x_2 , P_2 é uma orelha par de P_1 e, para cada $i > 2$, P_i é uma orelha ímpar de $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{i-1}$.

Prova. Seja M um emparelhamento perfeito em H . Então, de acordo com o Lema 8.9, existe um caminho M -alternante par P_1 ligando x_1 e x_2 . Como M é emparelhamento perfeito, existe uma aresta x_2y de M que incide em x_2 . É evidente que y não é vértice de P_1 . Agora, seja H' o grafo obtido adicionando-se x_2y a P_1 . É claro que existe uma aresta yx de H que não é aresta de H' visto que H é 2-aresta-conexo. Em virtude do Lema 8.8, existe uma orelha ímpar Q de H' cuja origem é y . Então, $P_2 := \{x_2y\} \cup Q$ é uma orelha par de P_1 . Para terminar a demonstração, basta definir $H' := P_1 \cup P_2$ e o resultado segue aplicando-se sucessivamente o Lema 8.8 até que $H' = H$. □

Convém ressaltar que a decomposição $P_1, \dots, P_k$ do lema acima pode não ser uma decomposição em orelhas porque P_1 não é necessariamente um circuito.

Grafos orientados e grafos bipartidos elementares

Um *grafo orientado* $\vec{G}$ é constituído de um conjunto não-vazio, $V_{\vec{G}}$, de elementos chamados *vértices*, de um conjunto $E_{\vec{G}}$ de elementos chamados *arcos* e de uma função $\psi_{\vec{G}}$ que associa a cada arco de G um par ordenado de elementos de $V_{\vec{G}}$. Para um arco α , a notação $\alpha = uv$ é uma abreviatura para $\psi_{\vec{G}}(\alpha) = (u, v)$. Para um arco uv , o vértice u é a *ponta inicial* do arco enquanto que o vértice v é a *ponta final* do arco.

As definições de passeio, trilha, caminho e circuito orientados são análogas ao caso não orientado, exceto que todos os arcos são usados de maneira consistente, da ponta inicial para a final. Um grafo orientado é *fortemente conexo* se para cada par u, v de vértices existe um caminho orientado de u até v . Um *componente fortemente conexo* de um grafo orientado G é um subgrafo orientado fortemente conexo maximal de G . Um grafo orientado sem circuitos orientados é *acíclico*. Um vértice u é um *sorvedouro* se o conjunto dos arcos com ponta inicial u e ponta final distinta de u é vazio.

Suponha que H é um grafo bipartido com bipartição (X, Y) e emparelhamento perfeito M . Oriente as arestas de H de Y para X e, para cada aresta α de M , adicione um arco paralelo a α orientado de X para Y . O grafo $\vec{H}$ assim obtido é uma *M-orientação* de H .

M-orientação

LEMA 8.11 (LOVÁSZ [17]). *Seja H um grafo bipartido e M um emparelhamento perfeito de H . Uma M-orientação de H é fortemente conexa se, e só se, H é elementar.*

Prova. Suponha que H tenha bipartição (X, Y) . Seja $\vec{H}$ uma *M-orientação* de H . Ajuste a notação, trocando-se os papéis de X e Y se necessário, de modo que as arestas de H estejam orientadas de Y para X .

(*Necessidade.*) Seja yx uma aresta de $E_H \setminus M$ com $y \in Y$ e $x \in X$. Mostraremos que existe um emparelhamento perfeito em H que inclui a aresta yx . Como $\vec{H}$ é fortemente conexo, existe um circuito orientado C que contém o arco yx . Não é difícil ver que C em H corresponde a um circuito *M-alternante*. Portanto, $M \oplus C$ é um emparelhamento perfeito em H que inclui yx .

(*Suficiência.*) Suponha que H é elementar. Mostraremos que $\vec{H}$ é fortemente conexo. Seja M um emparelhamento perfeito de H . É suficiente mostrar que toda aresta yx que não está em M está contida em um circuito *M-alternante*. Como H é elementar, existe um emparelhamento perfeito M_{yx} que contém yx . Pelo Lema 2.1, $M \oplus M_{yx}$ é uma união de circuitos disjuntos nas arestas. Porém, $yx \in M \oplus M_{yx}$ de modo que existe um circuito *M-alternante* C que contém yx . Consequentemente, C determina um circuito orientado em $\vec{H}$. $\square$

Seja H um grafo bipartido, não necessariamente elementar, e M um emparelhamento perfeito. Seja $\vec{H}$ uma M -orientação de H . Sejam $V_1, \dots, V_j$ os conjuntos de vértices dos componentes fortemente conexos de $\vec{H}$. É claro que $V_1, \dots, V_j$ é uma partição de V e toda aresta de M tem ambas as pontas em algum V_i . O lema anterior mostra que cada $H[V_i]$ é elementar. Ademais, todo subgrafo elementar é parte de algum V_i .

8.2 O Teorema Minimax

Nas próximas seções nos ocuparemos com a demonstração do seguinte teorema que constitui o resultado central deste capítulo.

TEOREMA 8.12 (FRANK [7]). *Para todo grafo 2-aresta-conexo G , $\varphi_G = 2\mu_G - |V| + 1$.*

A próxima seção mostra que $\varphi_G \geq 2\mu_G - |V| + 1$. A seguinte mostra a outra desigualdade.

8.3 A desigualdade $\min \geq \max$

LEMA 8.13 (FRANK [7]). *Para toda orelha P de um subgrafo G' de um grafo G , se $G = G' \cup P$ então*

$$\mu_{G'} \geq \mu_G - \lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor.$$

Prova. Seja J um conservador máximo em G . Suponha, inicialmente, que $|P \cap J| \leq |P \setminus J|$. Então $|P \cap J| \leq \lfloor |P|/2 \rfloor$. Entretanto, o conjunto de arestas $J' := J \setminus P$ é conservador em G' e

$$|J'| = |J| - |J \cap P| \geq |J| - \lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor.$$

Logo, $\mu_{G'} \geq |J'| \geq \mu_G - \lfloor |P|/2 \rfloor$.

Suponha, agora, que $|P \cap J| > |P \setminus J|$, ou seja, $|P \cap J| > \lfloor |P|/2 \rfloor$. Sejam u e v as pontas de P . Para todo caminho Q' em G' unindo u e v temos

$$|P \cap J| - |P \setminus J| \leq |Q' \setminus J'| - |Q' \cap J'|$$

pois J é conservador e $J' \subseteq J$. Escolha um caminho Q' de u a v em G' que minimize

$|Q' \setminus J'| - |Q' \cap J'|$. Pelo Lema 6.9, $J' \oplus Q'$ é conservador e

$$\begin{aligned} |J' \oplus Q'| &= |J'| + |Q' \setminus J'| - |Q' \cap J'| \\ &\geq |J'| + |P \cap J| - |P \setminus J| \\ &= |J| - |P \setminus J| \\ &\geq |J| - \lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu_{G'} \geq |J' \oplus Q'| \geq |J| - \lfloor |P|/2 \rfloor$. □

LEMA 8.14 (FRANK [7]). *Para todo grafo 2-aresta-conexo G ,*

$$\varphi_G \geq 2\mu_G - |V| + 1.$$

Prova. Por indução no número de orelhas. Seja G um grafo 2-aresta-conexo e $P_1, \dots, P_k$ uma decomposição em orelhas ótima³ de G . Seja G' o grafo $P_1 \cup \dots \cup P_{k-1}$. É claro que $P_1, \dots, P_{k-1}$ é uma decomposição em orelhas ótima de G' . Portanto, por hipótese de indução, $\varphi_{G'} \geq 2\mu_{G'} - |V_{G'}| + 1$. Se $|P_k|$ é ímpar então

$$\begin{aligned} \varphi_G &= \varphi_{G'} \\ &\geq 2\mu_{G'} - |V_{G'}| + 1 \\ &\geq 2(\mu_G - \frac{|P_k| - 1}{2}) - |V_{G'}| + 1 \quad \text{devido ao Lema 8.13} \\ &= 2\mu_G - |P_k| + 1 - |V_{G'}| + 1 \\ &= 2\mu_G - |V_G| + 1. \end{aligned}$$

Se $|P_k|$ é par então

$$\begin{aligned} \varphi_G &= \varphi_{G'} + 1 \\ &\geq 2\mu_{G'} - |V_{G'}| + 2 \\ &\geq 2(\mu_G - \frac{|P_k|}{2}) - |V_{G'}| + 2 \quad \text{devido ao Lema 8.13} \\ &= 2\mu_G - |P_k| - |V_{G'}| + 1 + 1 \\ &= 2\mu_G - |V_G| + 1. \end{aligned}$$

□

³Isto é, com φ_G orelhas pares.

É interessante observar que o lema acima fornece um limitante superior para a cardinalidade de qualquer T -junção mínima. Suponha que J é uma T -junção mínima donde J é conservador. Então, $|E| - |V| + 1 \geq \varphi \geq 2\mu - |V| + 1 \geq 2|J| - |V| + 1$ e, portanto, $|J| \leq \mu \leq |E|/2$.

Seja G um grafo hipoemparelhável. Pelo Teorema 8.2, $\varphi = 0$. Em virtude do Lema 8.14, $\mu \leq (|V| - 1)/2$. Entretanto, qualquer emparelhamento quase-perfeito M tem cardinalidade $(|V| - 1)/2$, ou seja, M é um conservador máximo. Assim, para qualquer grafo hipoemparelhável, todo emparelhamento quase-perfeito é um conservador máximo.

Também é fácil verificar que para qualquer grafo bipartido elementar, todo emparelhamento perfeito é um conservador máximo. Eis a prova. Seja G um grafo quase-elementar. O resultado é óbvio se $G = K^2$. Suponha, pois, que $G \neq K^2$. Pelo Teorema 8.14, $\mu \leq |V|/2$. Entretanto, qualquer emparelhamento perfeito M tem cardinalidade $|V|/2$, ou seja, M é um conservador máximo.

8.4 A desigualdade $\min \leq \max$

Grafos quase-elementares e sua decomposição em orelhas

Um grafo G é *quase-elementar* (= *half-elementary*) se (i) existe $X \subseteq V$ tal que cada componente conexo de $G - X$ é hipoemparelhável e (ii) o grafo $G\langle U_1, \dots, U_k \rangle - E[X]$ é bipartido elementar, onde $U_1, \dots, U_k$ denotam os componentes conexos de $G - X$. Quando quisermos nos referir a um conjunto X nas condições acima, diremos que X é uma *base* de G . quase-elementar
base

É fácil verificar que todo grafo quase-elementar G tem emparelhamento perfeito. De fato, seja X uma base de G e $U_1, \dots, U_k$ os componentes conexos de $G - X$. Como o grafo $G' := G\langle U_1, \dots, U_k \rangle - E[X]$ é bipartido elementar, segue que G' tem emparelhamento perfeito M' . Cada aresta de M' incide em exatamente um elemento u_i de cada U_i . Seja M_i um emparelhamento quase-perfeito de $U_i - u_i$. Então $M' \cup M_1 \cup \dots \cup M_k$ é um emparelhamento perfeito de G .

TEOREMA 8.15 (FRANK [7]). *Se G é um grafo 2-aresta-conexo quase-elementar então $\varphi_G = 1$.*

Prova. Seja G um grafo quase-elementar com base X . É claro que se $E[X] \neq \emptyset$ então qualquer decomposição em orelhas ótima de $G - E[X]$ pode ser estendida para uma decomposição em orelhas ótima de G , bastando, para isso, adicionar uma a uma cada aresta de $E[X]$ à decomposição ótima de G' . Em vista disso, suporemos que $E[X] = \emptyset$. Como G tem emparelhamento perfeito, pelo Teorema 8.2, $\varphi \geq 1$. Sejam $U_1, \dots, U_k$ os componentes

conexos não triviais de $G - X$. Mostraremos que $\varphi = 1$ por indução em k . Se $k = 0$ então G é bipartido elementar e, portanto, pelo Teorema 8.6, $\varphi = 1$. Suponha $k > 0$. Seja G' o grafo $G\langle U_1 \rangle$. Por hipótese de indução, $\varphi_{G'} = 1$. Seja $P_1, \dots, P_j$ uma decomposição em orelhas ótima de G' . Tome a primeira orelha, digamos P_i , que passe por U_1 . Suponha que x_1y_1 e x_2y_2 denotem as arestas de P_i que incidem em U_1 onde $y_1, y_2 \in U_1$. O grafo U_1 , por ser hipoemparelhável, possui uma decomposição em orelhas ímpar. Se $y_1 = y_2$, tome uma decomposição em orelhas $Q_1, \dots, Q_l$ ímpar de U_1 tal que a primeira orelha use y_1 . Então

$$P_1, \dots, P_i, Q_1, \dots, Q_l, P_{i+1}, \dots, P_j$$

é uma decomposição em orelhas de G com exatamente uma orelha par. Suponha, agora, que $y_1 \neq y_2$. Adicione a aresta y_1y_2 a U_1 se esta não estiver presente. O grafo resultante é hipoemparelhável e possui uma decomposição em orelhas ímpar $Q_1, \dots, Q_l$ tal que a primeira orelha usa y_1y_2 . A orelha Q_1 é ímpar donde $Q_1 \setminus \{y_1y_2\}$ é par; ademais $Q_1 \setminus \{y_1y_2\}$ é um caminho de y_1 até y_2 . Portanto,

$$P_1, \dots, P_i \cup (Q_1 \setminus \{y_1y_2\}), Q_2, \dots, Q_l, P_{i+1}, \dots, P_j$$

é uma decomposição em orelhas de G com precisamente uma orelha par. Se y_1y_2 é aresta de G adicione $\{y_1y_2\}$ à decomposição anterior. $\square$

TEOREMA 8.16 (FRANK [7]). *Para qualquer grafo quase-elementar, todo emparelhamento perfeito é um conservador máximo.*

Prova. Seja G um grafo quase-elementar com base X e M um emparelhamento perfeito de G . Sejam $U_1, \dots, U_k$ os componentes conexos de $G - X$. Seja G' o grafo $G\langle U_1, \dots, U_k \rangle - E[X]$. Se $G' = K^2$ então $k = 1$. Adicione uma nova aresta α em G ligando U_1 a X . É claro que o grafo G_1 assim obtido é 2-aresta-conexo e qualquer conservador máximo de G_1 que não inclui α é um conservador máximo de G . Suponha, então, que $G \neq K^2$. Pelo Teorema 8.14, $\mu \leq |V|/2$. Entretanto, M tem cardinalidade $|V|/2$, ou seja, M é um conservador máximo. $\square$

Um subgrafo H de um grafo G é *forte* ($=$ *strong end*) se (i) H é quase-elementar com base X e (ii) $X = V_G$ ou X separa $G - H$ de $H - X$. forte

Como de costume, para um grafo G e uma parte X de V , $q(G - X)$ é o número de componentes ímpares de $G - X$.

TEOREMA ESTRUTURAL DE GALLAI-EDMONDS [17]. *Seja G um grafo, D_G o conjunto dos vértices expostos por algum emparelhamento máximo e $A_G := \Gamma(D_G)$. Então os componentes ímpares de $G[D_G]$ são hipoemparelháveis e para qualquer parte, não-vazia, X , de A_G o número de componentes ímpares em D_G que possuem um vizinho em X é de pelo menos $|X|$.*

Este teorema pode ser deduzido do Teorema 4.1 através da seguinte construção: seja M um emparelhamento máximo em G . Adicione um novo vértice r a G e uma aresta ligando r a cada vértice exposto por M . Seja w a função de E em $\{-1, +1\}$ definida por $w(\alpha) := -1$ se $\alpha \in M$ ou se α é uma nova aresta e $w(\alpha) := 1$ caso contrário. Não é difícil verificar que w é conservativa. Seja λ a função w -posto relativa a r . Os componentes conexos induzidos pelos vértices x tais que $\lambda(x) = -1$ são hipoemparelháveis e correspondem ao conjunto D_G do teorema.

TEOREMA 8.17 (FRANK [7]). *Um grafo não é hipoemparelhável se, e só se, possui um subgrafo forte.*

Prova. (Suficiência.) Suponha que G é um grafo que possui um subgrafo forte H grudado em X . O resultado é imediato se $H = G$. Suponha que $H \subset G$. Mostraremos que, para todo x em X , o grafo $G' := G - x$ não possui emparelhamento perfeito. Seja H' o grafo $H - x$ e X' o conjunto $X \setminus \{x\}$. Como H é quase-elementar, segue que $q(H - X) = |X|$ donde

$$q(H' - X') = |X'| + 1.$$

O conjunto X separa $G - H$ de $H - X$, conseqüentemente,

$$q(G - X) = q(G' - X') \geq q(H - X) = q(H' - X') = |X'| + 1.$$

Portanto, X' viola a condição de Tutte em G' , ou seja, G' não tem emparelhamento perfeito.

(Necessidade.) Suponha que G seja um grafo não-hipoemparelhável. Sejam A_G e D_G os conjuntos de vértices de G como definidos no Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds. Se G não tem emparelhamento perfeito, defina $S := A_G$. Como G não é hipoemparelhável, temos que $S \neq \emptyset$. Suponha, agora, que G possua emparelhamento perfeito. Seja v um vértice de G e defina $S := A_{G-v} \cup \{v\}$. Afirmamos que $q(G - S) = |S|$. Seja M um emparelhamento perfeito em G e $uv \in M$. Então $M \setminus \{uv\}$ é um emparelhamento máximo em $G' := G - v$. Pelo Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds,

$$q(G' - A_{G'}) = |A_{G'}| + 1$$

donde $q(G - S) = |S|$. Portanto, em qualquer caso, existe um emparelhamento máximo de G que satura S .

Seja B o grafo bipartido obtido de G da seguinte maneira: (i) remova de G as arestas com ambas as pontas em S ; (ii) remova de G os vértices em $V \setminus (S \cup D_G)$; (iii) remova de G os componentes de D_G que não são incidentes a nenhuma aresta de M e (iv) contraia os demais elementos de D_G . Seja N o conjunto das arestas de M em B . É evidente que N é

um emparelhamento perfeito em B e que S é uma das classes da bipartição de B . Denote por T a outra classe da bipartição de B . Claramente, cada elemento de T corresponde a um subgrafo hipoemparelhável de G .

Seja $\vec{B}$ uma N -orientação de B e suponha que as arestas de B estão orientadas de T para S . O grafo obtido contraindo-se cada componente fortemente conexo de $\vec{B}$ é acíclico e, portanto, possui um sorvedouro. Tal sorvedouro correde a um conjunto de vértices L no grafo B . Pelo Lema 8.11, $H := B[L]$ é bipartido elementar. Ademais, se X é o conjunto de vértices $L \cap S$ então X separa $G - H$ de $H - X$, ou seja, H é um subgrafo forte de G com base X . $\square$

LEMA 8.18 (FRANK [7]). *Se G é um grafo não-hipoemparelhável e H é um subgrafo forte de G então*

$$\mu_G \geq \mu_{G'} + \frac{|V_H|}{2}$$

onde G' é o grafo $G \setminus V_H$.

Prova. Seja X uma base de H . Seja J um conservador máximo em G' . Seja M um emparelhamento perfeito de H . Mostraremos que $J \cup M$ é um conservador em G . De fato, seja C um circuito de G . Se C é um circuito de H então $w^{J \cup M}(C) \geq 0$ pois M é conservador em H . Se V_C é disjunto de X então C corresponde a um circuito C' em G' donde $w^{J \cup M}(C) \geq 0$ porque J é conservador em G' . Suponha, agora, que V_C não é disjunto de X . Como X separa $G - H$ de $H - X$, segue que C é particionado em dois caminhos P_1 e P_2 disjuntos nas arestas tais que $P_1 \subseteq E_{G-H}$ e $P_2 \subseteq E_H$. Agora, P_1 corresponde em G' a um circuito P'_1 donde $w^{J \cup M}(P_1) \geq 0$. O caminho P_2 tem ambas as pontas em X de modo que $w^{J \cup M}(P_2) \geq 0$. Portanto, $w^{J \cup M}(C) \geq 0$, ou seja, $J \cup M$ é conservador em G e tem cardinalidade pelo menos $\mu_{G'} + |V_H|/2$. $\square$

LEMA 8.19 (FRANK [7]). *Se G é um grafo 2-aresta-conexo não-hipoemparelhável e H é um subgrafo 2-aresta-conexo forte de G então*

$$\varphi_G \leq \varphi_{G'} + 1$$

onde G' é o grafo $G \setminus V_H$.

Prova. Seja X uma base de H . Seja $Q_1, \dots, Q_l$ uma decomposição em orelhas ótima de G' . Considere a primeira orelha, digamos Q_j , que passe por V_H . As pontas de Q_j são vértices de X uma vez que X separa $G - H$ de $H - X$. Sejam x_1 e x_2 tais vértices. Se $x_1 = x_2$, considere uma decomposição em orelhas ótima $P_1, \dots, P_k$ de H tal que a primeira orelha passa por x_1 . Logo,

$$Q_1, \dots, Q_j, P_1, P_2, \dots, P_k, Q_{j+1}, \dots, Q_l$$

é uma decomposição em orelhas de G com $\varphi_{G'} + 1$ orelhas pares.

Suponha, agora, que $x_1 \neq x_2$. O Teorema 8.15 e o Lema 8.10 implicam que existe uma seqüência de trilhas $P_1, P_2, \dots, P_k$ tal que

$$H = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$$

e P_1 é um caminho par unindo x_1 e x_2 , P_2 é uma orelha par em P_1 e, para cada $i > 2$, P_i é uma orelha ímpar de $P_1 \cup \dots \cup P_{i-1}$. Como P_1 é par, $Q_j \cup P_1$ tem a mesma paridade de Q_j . É evidente que

$$Q_1, \dots, Q_{j-1}, Q_j \cup P_1, P_2, \dots, P_k, Q_{j+1}, \dots, Q_l$$

é uma decomposição em orelhas de G ; ademais tal decomposição tem exatamente $\varphi_{G'} + 1$ orelhas pares. Portanto, em ambos os casos, $\varphi_G \leq \varphi_{G'} + 1$. $\square$

TEOREMA 8.20 (FRANK [7]). Para todo grafo 2-aresta-conexo G , $\varphi_G \leq 2\mu_G - |V| + 1$

Prova. Seja G um grafo 2-aresta-conexo. A demonstração é por indução em $|E|$. Se G é hipoemparelhável, pelo Teorema 8.2, $\varphi = 2\mu - |V| + 1$. Suponha, então, que G não é hipoemparelhável. Devido ao Teorema 8.17, G possui um subgrafo forte H . É claro que H é 2-aresta conexo pois G é 2-aresta conexo. Seja G' o grafo $G \setminus V_H$. Por hipótese de indução, $\varphi_{G'} \leq 2\mu - |V_{G'}| + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_G &\leq \varphi_{G'} + 1 \quad \text{pelo Lema 8.19} \\ &\leq 2\mu_{G'} - |V_{G'}| + 2 \quad \text{por hipótese de indução} \\ &\leq 2\mu_G - (|V_H| + |V_{G'}|) + 2 \quad \text{pelo Lema 8.18} \\ &= 2\mu_G - |V| + 1. \end{aligned}$$

$\square$

COROLÁRIO 8.21 (FRANK [7]). O número máximo de orelhas ímpares em uma decomposição em orelhas de um grafo 2-aresta-conexo G é igual ao mínimo de $w(E)$ sobre todas as funções conservativas w de E em $\{-1, +1\}$.

Prova. Seja σ_G o número máximo de orelhas ímpares numa decomposição em orelhas de G . Então, em virtude do Lema 8.1, $\sigma = |E| - |V| + 1 - \varphi$. Agora, para todo conservador J em G , $w^J(E) = |E| - 2|J|$. Logo, se J é um conservador máximo, $w^J(E)$ é mínimo. Portanto,

$$\begin{aligned} \sigma &= |E| - |V| + 1 - \varphi \\ &= |E| - |V| + 1 - 2\mu + |V| - 1 \\ &= |E| - 2\mu \\ &= w^J(E). \end{aligned}$$

□

8.5 Nota

A demonstração do teorema minimax apresentado neste capítulo segue de perto a demonstração de Frank [7]. No entanto, é distinta da original no aspecto que passaremos a descrever. A prova de Frank baseia-se no seguinte teorema cuja demonstração está incorreta em [7]: *para qualquer grafo 2-aresta-conexo G , φ_G é igual ao número mínimo de arestas cuja contração torna G hipoemparelhável*. Deste teorema, Frank mostra que *para todo vértice x de um grafo G , existe uma decomposição em orelhas ótima de G tal que a primeira orelha passa por x* . Este fato é utilizado na demonstração do Lema 8.19 para construir uma decomposição em orelhas de G com $\varphi_G + 1$ orelhas pares. Nossa demonstração faz uso do Lema 8.10 aliado ao Teorema 8.15 evitando, assim, a hipótese adicional que Frank utiliza.

Recentemente Szigeti [26] provou a versão ponderada do problema mostrando que os conjuntos minimais de arestas cuja contração torna o grafo hipoemparelhável formam a base de um matróide.

Apêndice A

O caso ponderado

Durante este apêndice, G será um grafo conexo e w uma função arbitrária de E em $\mathbb{Z}$.

Seja h uma função arbitrária de V em $\mathbb{Z}$. Para toda parte L de V , uma h -alça de L é uma aresta xy dotada das seguintes propriedades

- $x, y \in L$ e
- $h(x) + h(y) > 2 \max_{v \in L} h(v) - |w(xy)|$.

Denotaremos por $\Delta_h(L)$ o conjunto das alças de L . Note que esta redefinição de h -alça é equivalente a anterior quando w é uma função de E em $\{-1, +1\}$.

Seja m o número $\min_{v \in V} h(v)$ e M o número $\max_{v \in V} h(v)$. Dado i no conjunto de valores $\{m + 1/2, m + 1, m + 3/2, \dots, M - 3/2, M - 1, M - 1/2, M\}$, seja V^i o conjunto

$$\{v \in V : h(v) \leq i\}$$

e E^i o conjunto

$$\{xy \in E : h(x) \leq i, h(y) \leq i \text{ e } h(x) + h(y) \leq 2i - |w(xy)|\}.$$

Seja G^i o grafo que tem conjunto de vértices V^i e conjunto de arestas E^i . Uma *fatia* determinada por h é o conjunto de vértices de um componente conexo de G^i . Para cada fatia L de G^i , $E_h[L]$ denota o conjunto de arestas $E[L] \cap E^i$. A multicoleção de todas as fatias é o *fatiamento de G determinado por h* .

Seja r um vértice arbitrário. Um w -potencial relativo a r é uma função h de V em $\mathbb{Z}$ tal que

$$(p0) \quad h(r) = 0,$$

- (p1) $|h(x) - h(y)| \leq |w(xy)|$ para toda aresta xy ,
- (p2) $\Delta_h(L) \cap E^- \subseteq E_h[L]$,
- (p3) para toda fatia L determinada por h ,
 - (a) $\nabla(L) \cap E^- = \emptyset$ se r em L e
 - (b) $|\nabla(L) \cap E^-| = 1$ se r em $V \setminus L$.

O leitor atento notará, mais uma vez, que a definição acima, quando os valores de w estão em $\{-1, +1\}$, é equivalente à definição dada no Capítulo 3. Não é difícil ver também que se existe uma função potencial então w é conservativa (veja Sebő [23]). O w -posto de um vértice x relativo a r é o peso de uma trilha w -mínima de r até x . Denotaremos, no que segue, por λ a função w -posto relativa a r .

TEOREMA A.1 (SEBŐ [23]). λ é um w -potencial.

É possível através da subdivisão de arestas determinar por meio do algoritmo da macarronada o w -posto de cada vértice. Entretanto, neste caso, o algoritmo não é polinomial no número original de arestas. No entanto, é possível determinar o w -posto em tempo polinomial aplicando-se a versão ponderada do Algoritmo de Edmonds e Johnson visto no Capítulo 2 — detalhes em Sebő [23]. Uma outra observação importante é quanto ao cálculo do fatiamento determinado por λ . Não é imediato como fazê-lo, porém é possível determinar tal fatiamento em tempo polinomial, apesar da multicoleção de fatias não ter a cardinalidade limitada por um polinômio no número original de arestas. Basta observar que não é necessário determinar todo o fatiamento; é suficiente, apenas, saber a multiplicidade de cada fatia. Para maiores detalhes, veja Sebő [23].

Apêndice B

Algumas aplicações

B.1 Corte máximo

PROBLEMA 6. Dado um grafo G e uma função w de E em $\mathbb{Z}$, encontrar um corte K tal que $w(K)$ é máximo.

É sabido que o problema de determinar um corte máximo em um grafo é NP-completo. Hadlock [12] mostrou como resolver o problema restrito aos grafos *planares*. A solução de Hadlock consiste numa redução ao problema de determinar uma T -junção mínima. Seja G um grafo planar, G^* seu dual e $w' := -w$. Seja F uma $\emptyset$ -junção w' -mínima em G^* . F é a união de circuitos disjuntos nas arestas e, claramente, F é uma $\emptyset$ -junção w -máxima em G^* . Conseqüentemente, F é um corte w -máximo em G .

B.2 Caminhos disjuntos com origem e término pré-determinados

PROBLEMA 7. Dado um grafo G e k pares de vértices $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$, decidir se existem k caminhos $P_1, \dots, P_k$ dois a dois disjuntos nas arestas tal que P_i liga u_i a v_i .

Middendorf e Pfeiffer [18] demonstraram que o problema dos caminhos disjuntos nas arestas é NP-completo, mesmo para grafos planares. Seja H o grafo com conjunto de vértices $T := \{u_1, v_1, \dots, u_k, v_k\}$ e conjunto de arestas $F := \{u_1v_1, \dots, u_kv_k\}$. Chamaremos cada aresta de F de *aresta de demanda*. Seja G' o grafo $G \cup H$. Uma condição necessária para que o problema tenha solução é que

$$|C \cap F| \leq |C \setminus F| \text{ para todo corte } C.$$

Esta condição, chamada de *condição do corte*, em geral, não é suficiente. Suporemos, no que segue, que G' é *planar* e satisfaz a condição do corte. Se, ainda mais, G' é *euleriano* então G^* , o dual de G , é bipartido. Como G' satisfaz a condição do corte então F é uma T -junção mínima. Portanto, pelo Teorema de Seymour, existe uma coleção disjunta $\mathcal{C}$ de T -cortes em G^* eqüicardinal a F . Em G' a coleção $\mathcal{C}$ corresponde a uma coleção de circuitos disjuntos nas arestas, cada um de cujos circuitos inclui exatamente uma aresta de F . Portanto, de cada um destes circuitos podemos extrair uma coleção de caminhos disjuntos nas arestas ligando u_i a v_i . Em resumo, se $G' := G \cup H$ é planar e euleriano então o problema dos caminhos disjuntos nas arestas possui solução se, e só se, G' satisfaz a condição do corte. Este resultado é devido a Seymour [25].

O Teorema de Korach e Penn implica que, se $G' := G \cup H$ é planar e a condição do corte é satisfeita, então é possível ignorar no máximo uma aresta de demanda em cada face finita de G de modo que o problema dos caminhos disjuntos nas arestas resultante possua solução.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Ageev, A.V. Kostochka, and Z. Szigeti. A characterization of Seymour graphs. *Journal of Graph Theory*, 24:357–364, 1997.
- [2] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network flows, theory, algorithms, and applications*. Prentice Hall, 1993.
- [3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press Ltd, 1976.
- [4] Jack Edmonds. Maximum matchings and a polyhedron with a 0,1 vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, (69B):125–130, 1965.
- [5] Jack Edmonds and Ellis L. Johnson. Matching, euler tours and the chinese postman. *Mathematical Programming*, (5):88–124, 1973.
- [6] Paulo Feofiloff and Cláudio L. Lucchesi. *Algoritmos para igualdades minimax em grafos*. VI Escola de Computação, Campinas, 1988.
- [7] András Frank. Conservative weightings and ear-decompositions of graphs. *Combinatorica*, (13):65–81, 1993.
- [8] András Frank and Zoltán Szigeti. On packing T -cuts. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, (61):263–271, 1994.
- [9] András Frank and Zoltán Szigeti. A note on packing paths in planar graphs. *Mathematical Programming*, (70):201–209, 1995.
- [10] András Frank, Éva Tardos, and András Sebő. Covering directed and odd cuts. *Mathematical Programming Study*, (22):99–112, 1984.
- [11] M. Guan. Graphic programming using odd and even points. *Chinese Journal of Mathematics*, (1):273–277, 1962.

- [12] F. Hadlock. Finding a maximum cut of a planar graph in polynomial time. *SIAM Journal on Computing*, 4(3), 1975.
- [13] Ephraim Korach and Michael Penn. Tight integral duality in the chinese postman problem. *Mathematical Programming*, (55):183–191, 1992.
- [14] Eugene L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [15] Laszlo Lovász. 2-matchings and 2-covers of hypergraphs. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, (26):433–444, 1975.
- [16] Laszlo Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [17] Laszlo Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [18] M. Middendorf and F. Pfeiffer. On the complexity of the edge-disjoint path problem. *Combinatorica*, (13):97–108, 1993.
- [19] András Sebő. Finding the t -join structure of graphs. *Mathematical Programming*, (36):123–134, 1986.
- [20] András Sebő. A quick proof of Seymour’s theorem on t -joins. *Discrete Mathematics*, (64):101–103, 1987.
- [21] András Sebő. The Schrijver-system of odd-join polyhedra. *Combinatorica*, 8(1):103–116, 1988.
- [22] András Sebő. Undirected distances and the postman-structure of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, (49):10–39, 1990.
- [23] András Sebő. Potentials in undirected graphs and planar multiflows. *SIAM Journal of Computing*, 26(2):582–603, 1997.
- [24] Paul D. Seymour. Matroids with the max-flow min-cut property. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, (23):189–222, 1977.
- [25] Paul D. Seymour. On odd cuts and plane multicommodity flows. *Proc. London Math. Soc.*, 3(42):178–192, 1981.
- [26] Zoltán Szigeti. On a matroid defined by ear-decompositions of graphs. *Combinatorica*, (13):65–81, 1996.

Índice Remissivo

- T -ímpar, 50
- T -corte, 50, 58
- T -junção, 7
 - máxima, 10
 - mínima, 9
 - minimal, 8
- T -partição, 70
- ∇ -bidisjunta, 18, 58
- ∇ -disjunta, 15, 58
- h -alça, 21
- w -posto, 28
- w -potencial
 - ótimo, 25
- árvore, 5
- 2-junção, 39
 - normalizar, 39
- Ageev, 74
- algoritmo
 - Edmonds e Johnson, 11
 - Korach e Penn, 59, 61
- aresta, 3
 - extrema, 4
 - extremos, 3
 - horizontal, 66
 - mal-ajustada, 39
 - periférica, 60
 - pontas, 3
 - subdivisão, 5
- base, 86
- botão, 30
- caminho, 4
 - alternante, 80
 - alternante ímpar, 80
 - alternante par, 80
 - comprimento, 4
 - mínimo, 4
- certificado de 1ª ordem, 15
- certificado de 2ª ordem, 18
- ciclo, 4
- circuito, 4
 - alternante, 80
- cofronteira, 3
- coleção, 1
 - caminhos apropriada para T , 10
 - disjunta, 1
 - laminar, 1
- componente conexo, 5
- conjuntos
 - diferença simétrica, 1
- conservador, 76
- contração, 5
- corte, 5
- decomposição em orelhas, 77
 - ótima, 78
 - ímpar, 78
 - bipartida, 80
- Edmonds e Johnson, 11

- emparelhamento, 9
 - perfeito, 9
 - perfeito w -mínimo, 11
 - quase-perfeito, 78
- fatia, 21
 - gorda, 21
 - magra, 21
- fatiamento, 21
- flor, 31
- floresta, 5
- Frank, 52, 70
- função de incidência, 3
- grafo, 3
 - 2-aresta-conexo, 78
 - acíclico, 5
 - bicrítico, 71
 - bipartido elementar, 80
 - completo, 3
 - conexo, 5
 - de Seymour, 74
 - quase-elementar, 86
 - simples, 3
- grafos
 - união de, 4
- grau, 3
- haste, 30
- hipoemparelhável, 78
- Korach e Penn, 60
- Kostochka, 74
- laços, 3
- Lawler, 13
- Lovász, 51
- macarronada, 38
 - ótima, 38
 - equivalente, 38
- função peso, 38
 - melhor, 38
- multicoleção, 1
 - laminar, 1
- multiconjunto, 1
- multiplicidade, 1
- orelha, 4, 77
 - ímpar, 78
 - comprimento, 78
 - par, 78
- orientação, 83
- pétala, 31
- passeio, 4
 - aberto, 4
 - extremos, 4
 - fechado, 4
 - origem, 4
 - pontas, 4
 - produto, 4
 - reverso, 4
 - término, 4
 - vértices internos, 4
- problema
 - T -junção mínima, 9
 - caminho mínimo, 9
 - chinês do carteiro, 9
- Sebő, 51
- Sebő, 52, 55, 66, 71, 74
- Seymour, 51
- subgrafo, 3
 - forte, 87
- Szigeti, 70, 74
- Tardos, 52
- torre, 54
 - ótima, 54
 - função cardinalidade, 54

trilha, 4

vértice, 3

 grau, 3

 profundo, 30

vértices

 adjacentes, 3

vizinhança, 3

vizinho, 3