**Pertinência de Pontos em Objetos
Discretos de Dimensão Arbitrária**

Luciano Silva

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Curso: Doutorado em Ciência da Computação
Área de Concentração: Computação Gráfica
Orientador: Prof. Dr. Antonio Elias Fabris

São Paulo, Maio de 2004

Pertinência de Pontos em Objetos Discretos de Dimensão Arbitrária

Luciano Silva

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e
defendida por Luciano Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 31 de maio de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Antonio Elias Fabris (Orientador) - IME/USP
- Prof. Dr. Geovan Tavares - Departamento de Matemática/PUCRJ
- Prof. Dr. Hélio Lopes - Departamento de Matemática/PUCRJ
- Prof. Dr. Luiz Velho - IMPA
- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa - IME/USP

Dedico este trabalho a minha mãe que, por anos e anos, ofereceu-me carinho, amizade e compreensão frente aos mais árduos obstáculos da vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Antonio Elias Fabris pela excelente orientação desde os tempos do mestrado. Dedicção, respeito, amizade e competência técnica foram algumas de suas qualidades e com as quais tive a honra de conviver. Será um grande prazer continuarmos com trabalhos conjuntos em computação gráfica.

Ao Prof. A. Robin Forrest, da University of East Anglia, pelo incondicional apoio dado aos nossos trabalhos e publicações.

Ao Prof. Dr. Vilmar Pedro Votre, diretor da Faculdade de Computação e Informática da Universidade Mackenzie, por acreditar no meu trabalho e dispender todo o apoio necessário na condução da coordenação do Bacharelado em Ciência da Computação.

Ao Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa(MAC) e ao Prof. Dr. Luiz Velho(IMP) pelas valiosas críticas e sugestões no processo de qualificação deste trabalho.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da USP, por terem me oferecido excelentes cursos na graduação, mestrado e doutorado e a oportunidade de conviver com pessoas de altíssima capacitação técnica. Em especial, gostaria ainda de agradecer aos professores Yoshiharu Kohayakawa(MAC), Carmem Silvia Cardassi (*in memoriam*)(MAT), Lucília Daruiz Borsari(MAT) e Maria Lucia Sobral Singer(MAT) por acrescentarem muito a minha formação matemática e em computação no período da iniciação científica.

Aos funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da USP, pelo suporte necessário e fundamental para a condução deste trabalho.

Sinto-me, também, contemplado pela quantidade de amigos que consegui conhecer durante todos esses anos. Enumerar e destacar as qualidades de cada um seria uma tarefa infinitamente mais complexa que o assunto tratado nesta tese e não estaria à altura do que eles representam na minha vida. Só posso dizer que há um espaço infinito e não-enumerável no meu coração para todos.

RESUMO

O predicado de pertinência de pontos, que decide se um ponto está no interior de um objeto gráfico, é uma das operações mais elementares em computação gráfica e representa uma maneira natural de realizar vários processos tais como *rendering* de fontes, modelagem geométrica e visualização volumétrica. Esta tese apresenta uma técnica generalizada de pertinência de pontos para objetos discretos de dimensão arbitrária, cujas principais características são baixa complexidade e estruturas de dados simples.

Palavras-chave: Pertinência de pontos, algoritmos discretos, geometria discreta.

ABSTRACT

The point containment predicate which decides if a point is inside of a graphical object is one of the most elementary operations in computer graphics and represents a natural way to perform several processes such as font rendering, geometric modelling and volumetric visualization. This thesis presents a generalized point containment technique for arbitrary dimension discrete objects whose main characteristics are low complexity and simple data structures.

Keywords: Point containment, discrete algorithms , discrete geometry.

Lista de Figuras

1.1	Estruturas conexas usuais de $\mathbb{Z}^2$. Somente a estruturas(a) e (c) representam conectividades naturais.	12
1.2	Estruturas conexas naturais de $\mathbb{Z}^3$	13
1.3	Listas conexas bidimensionais.	16
1.4	Células euclidianas: células como (a) são chamadas <i>vértices</i> ou <i>pontos</i> , (b) são denominadas <i>arestas</i> , (c) faces ou polígonos e (d) <i>voxels</i>	20
1.5	Agrupamento de células euclidianas: (a) define um complexo euclidiano 2-dimensional ; (b) é apenas um agrupamento formado por células quadrangulares, pois existem intersecções de células que não são bordos comuns das células.	22
1.6	Configurações de células discretas em $\mathbb{Z}^3$, com estruturas 6, 18 e 26-conexas.	23
1.7	Objetos discretos: o objeto (b) deve ser interpretado como uma união de cubos com coordenadas inteiras(células discretas 3-dimensionais).	25
1.8	Bordos de objetos discretos: a primeira imagem de (a) mostra que, em particular, bordos não precisam ser inteiramente conexos. (b) deve ser inteprutado como uma união de quadrados(células discretas 2-dimensionais).	26
2.1	Objetos discretos bidimensionais e curvas discretas.	29
2.2	Curvas discretas que não são bordos combinatórios de objetos bidimensionais.	30
2.3	Interpretação geométrica do número de rotação.	31
2.4	Números de rotação para as componentes de $\mathbb{C} - \{\gamma\}$: (a) e (b) são duas curvas simples com orientações contrárias.	32

2.5	Posições relativas de L^1 e L^2 , sem orientação.	38
2.6	Perturbações ϵ em pontos.	40
2.7	Regiões semi-abertas limitantes não-vazias.	46
2.8	Pontos externos à região $\mathcal{R}$ para os quais $\mathcal{F}(L, P) = 0$	47
2.9	Pontos externos à região $\mathcal{R}$ para os quais o valor de $\mathcal{F}(L, P)$ é dado pela orientação da 1-célula.	48
2.10	Elementos para cálculo dentro da região semi-aberta limitante $\mathcal{R}$	49
2.11	Uma instância do teste de pertinência.	51
2.12	Planos discretos e suas células.	52
2.13	Direções-limite no plano discreto bidimensional 8-conexo.	53
2.14	Bordo de um objeto discreto bidimensional para determinação da direção ótima de rasterização.	54
2.15	Ponto P a ser testado contra as 1-células contidas nos hiperplanos não-paralelos à direção ótima $\rho^* = \frac{\pi}{4}$	55
2.16	Células com coordenadas não-inteiras.	56
2.17	Efeito na transformação de uma célula diagonal.	57
2.18	Hiperplanos para cálculo da contribuição.	58
2.19	Complexos convexos simples.	66
2.20	Complexos com várias geometrias.	68
2.21	Número médio total de invocações para resoluções pequenas e complexos pequenos.	69
2.22	Número médio total de invocações para resoluções grandes e complexos pequenos.	69
2.23	Número médio total de invocações para resoluções pequenas e complexos grandes.	70
2.24	Número médio total de invocações para grandes resoluções e complexos. . .	70
3.1	Esfera bidimensional e uma aproximação simplicial.	73
3.2	Um simplexo $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ em $[a, b]$ e a área definida por $(0, 0), \gamma^N(\mathbf{x}_0)$ e $\gamma^N(\mathbf{x}_1)$. .	75

3.3	Um simplexo $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ em $[a, b] \times [c, d]$ e o volume definido por $(0, 0, 0)$, $s^N(\mathbf{x}_0)$, $s^N(\mathbf{x}_1)$ e $s^N(\mathbf{x}_2)$	77
3.4	Translação ϵ em coordenadas esféricas.	88
3.5	Alguns casos elementares de pertinência.	99
3.6	Casos especiais com várias células compartilhando uma mesma 0-célula. . .	100
3.7	Superfície com auto-intersecção simples.	101
3.8	Objeto com auto-intersecção mais complexa.	101
3.9	Objeto com auto-intersecção, gerado a partir de união de várias instâncias de uma mesma primitiva escalada.	102
3.10	Objeto recursivo formado pela união de primitivas com auto-intersecção. .	103
3.11	Superfície e pontos classificados.	104
3.12	Várias visualizações do modelo BUNNY de Stanford.	105
3.13	Modelo discreto do <i>Triceratops</i>	106
3.14	Pontos classificados e uma aplicação em visualização volumétrica.	106
4.1	Modelo tridimensional de S^3 , via folheação por toros.	109

Lista de Tabelas

2.1	Número de invocações da função de contribuição para os pontos $(1,0)$ e $(10,10)$	67
2.2	Números totais e médios de comparações para testes em 169 pontos discretos.	67
2.3	Números totais e médios de comparações para testes em 169 pontos discretos e em várias geometrias.	68

Sumário

Introdução	1
1 Geometria e Topologia de Espaços e Objetos Discretos	8
1.1 Pontos e escalares discretos	8
1.2 Listas	9
1.3 Métricas e conectividade em espaços discretos	11
1.3.1 Plano discreto bidimensional	12
1.3.2 Espaço discreto tridimensional	13
1.3.3 Espaço discreto d -dimensional, $d \geq 4$	14
1.3.4 Relacionamento entre normas discretas e contínuas	15
1.4 Conectividade em listas e regiões	15
1.5 Objetos e hipersuperfícies discretas	16
1.5.1 Complexos celulares	17
1.5.2 Complexos celulares euclidianos	20
1.5.3 Complexos celulares discretos	23
1.5.4 Hipersuperfícies e objetos discretos	24
2 Pertinência em Objetos Discretos Bidimensionais	28
2.1 Problema da pertinência bidimensional	28
2.2 Números de rotação	30
2.2.1 Versão analítica	31

2.2.2	Versão geométrica	33
2.2.3	Relação entre as versões analítica e geométrica	36
2.2.4	A translação ϵ	40
2.3	Teorema Discreto da Curva de Jordan	42
2.4	Funções de rasterização	44
2.4.1	Rasterização via funções CW	44
2.5	Rasterização de objetos discretos 2-dimensionais	45
2.5.1	Teste com semi-retas discretas horizontais	46
2.5.2	Complexidade da pertinência bidimensional	51
2.5.3	Otimizações da pertinência bidimensional	51
2.5.3.1	Direção ótima para rasterização	53
2.5.3.2	Pertinência com uma direção ótima	55
2.5.3.3	Algoritmo da direção ótima	59
2.6	Implementação e Resultados do Teste de Pertinência Bidimensional	61
2.6.1	Estruturas de Dados e Métodos	61
2.6.2	Testes e resultados	66
3	Pertinência Tridimensional	72
3.1	Problema da pertinência tridimensional	72
3.2	Número de rotação tridimensional	74
3.2.1	Versão analítica	74
3.2.2	Versão Geométrica	79
3.2.3	Relação entre as versões analítica e geométrica	82
3.2.4	Existência e escolha da translação ϵ	85
3.3	Teorema de Jordan-Bröwer Tridimensional e uma versão discreta	89
3.4	Rasterização de objetos discretos tridimensionais	90
3.5	Algoritmo de Pertinência	92

3.6	Implementação e resultados do teste de pertinência tridimensional	95
3.6.1	Estruturas de dados e métodos	95
3.6.2	Testes e resultados	99
4	Pertinência em dimensão arbitrária	108
4.1	Problema generalizado da pertinência	108
4.2	Números de rotação generalizados	109
4.2.1	Versão analítica	109
4.2.2	Versão Geométrica	112
4.2.3	Relação entre as versões analítica e geométrica	115
4.2.4	Existência e escolha da translação ϵ	117
4.3	Rasterização de objetos discretos d -dimensionais	120
4.4	Algoritmo de Pertinência	122
4.5	Comentários para implementação dos testes generalizados	125
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	126

Introdução

Um dos objetivos centrais da computação gráfica é produzir imagens a partir de um modelo, processo denominado *rendering*. Um modelo é descrito como um conjunto de objetos gráficos: um objeto gráfico $\mathcal{O}$ consiste de uma família finita $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ de subconjuntos, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e uma função $F : U_1 \cup \dots \cup U_m \rightarrow \mathbb{R}^p$. A família $\mathcal{U}$ é chamada de conjunto de dados geométricos e define a forma (geometria e topologia) do objeto, e f é a função atributo do objeto que define, por exemplo, a cor e textura do objetos. A dimensão da união $U_1 \cup \dots \cup U_m$ define a dimensão do objeto. Uma imagem é uma função $I : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^k$: para cada ponto $p \in A$, $I(p)$ define os atributos de p , como cor e opacidade, por exemplo. Uma classe de imagens muito importante é formada tomando $A = \mathbb{Z}^p$, chamadas de imagens digitais.

No processo de transformação de um modelo em uma imagem notam-se três fases distintas:

Fase de pré-processamento: redução do modelo a uma forma mais simples.

Fase de rasterização: conversão do modelo simplificado em um *bitmap*.

Fase de pós-processamento: composição dos *bitmaps* em uma imagem.

Uma taxonomia dos algoritmos de *rendering* pode ser estabelecida com base no modo em que realizam as três fases anteriores:

Algoritmos baseados no objeto: tratam objeto por objeto do modelo, encontrando os pontos da imagem que são afetados por um determinado objeto. Neste processo, realizam uma projeção explícita do objeto na imagem. Algoritmos baseados em *scan-conversion* são exemplos clássicos desta classe.

Algoritmos baseados na imagem: para cada ponto da imagem a ser produzida, verificam se os atributos deste ponto são afetados por algum objeto(ou objetos) do

modelo. Caso afirmativo, calculam o valor desta contribuição. Um exemplo muito familiar desta classe é o algoritmo de *ray-tracing*.

Existem várias vantagens dos algoritmos baseados na imagem, quando comparados aos baseados no objeto:

1. Nenhum pré-processamento do objeto é necessário: os algoritmos baseados na imagem podem lidar diretamente com objetos de alta complexidade geométrica. Como nenhum pré-processamento é realizado, não é necessário memória adicional para armazenar estruturas de dados intermediárias. Os algoritmos baseados no objeto realizam um pré-processamento do objetos, geralmente projeções seguidas de reduções a objetos mais simples, cujas estruturas intermediárias são armazenadas em alguma ordem para facilitar a fase de rasterização. Em algumas implementações, os objetos são primeiramente reduzidos a regiões mais fáceis de serem rasterizadas, tais como segmentos poligonais.
2. *Clipping* explícito de objetos contra a imagem ou outros objetos não é necessário: simplesmente para cada ponto da imagem, ou ele é afetado ou não por um objeto(ou objetos) do modelo. Nos algoritmos baseados no objeto, o *clipping* precisa ser realizado ou no espaço do objeto ou no espaço da imagem.
3. Facilidade de adaptação com crescimento da complexidade do modelo: há somente a necessidade da especificação de um predicado de pertinência, que decide se um ponto é afetado ou não por algum objeto do modelo. Já nos algoritmos baseados no objeto, a complexidade do processo cresce drasticamente com o aumento da complexidade do modelo, principalmente nos processos de poligonalização e *clipping*.
4. Algoritmos baseados na imagem, geralmente, utilizam estruturas de dados simples (por exemplo, filas e pilhas), o que os tornam adequados para implementação em *hardware* dedicado. Implementações em hardware de algoritmos baseados no objeto necessitam de uma quantidade considerável de pré-processamento em *software*, fato que pode limitar o poder de modelamento: por exemplo, aceleradoras gráficas que suportam chamada direta para rasterização de figuras necessitam que as faces do objeto sejam passadas na forma triangularizada.
5. Os algoritmos baseados na imagem são altamente indicados para implementações paralelas, uma vez que geralmente não existe uma dependência entre as computações das contribuições nos pontos da imagem.

Principalmente no item 3 da descrição acima, torna-se evidente a dependência dos algoritmos baseados na imagem de um predicado de pertinência. O propósito deste predicado de pertinência é bem simples: dado um ponto P e um objeto matematicamente bem definido, decidir se P pertence ao interior do objeto.

Uma função que toma como argumentos um ponto e um objeto, devolvendo 0 ou 1, é chamada uma *função de pertinência*. Uma implementação computacional de tal função em alguma linguagem de programação é chamada um *algoritmo de pertinência*. A distinção entre função e algoritmo é importante. Funções matematicamente bem-definidas podem ter boas propriedades, porém com implementação direta impraticável, como será evidenciado na próxima seção.

Trabalhos prévios em pertinência

Poucas especificações de algoritmos de pertinência para classes extensas de geometrias têm sido propostas. Limitações inerentes a tais especificações incluem geometrias bastante particulares, tratamento exaustivo de casos especiais e problemas numéricos. Assim, é de grande interesse computacional o desenvolvimento de algoritmos de pertinência abrangendo geometrias complexas, tratamento simplificado e homogêneo de casos especiais e, principalmente, eficiência e robustez. Algumas publicações apenas caracterizam os conjuntos interior e exterior, como por exemplo Kopperman [KMW91], não se preocupando em suprir uma função de pertinência factível de ser implementada.

No ambiente bidimensional, o problema da pertinência para polígonos simples, isto é sem auto-intersecção, é bem conhecido em Geometria Computacional e pode ser tratado através de esquemas do tipo *Point Location*[KOS⁺97] utilizando, por exemplo, estratégias de triangularização do polígono. Uma outra parte dos algoritmos de pertinência bidimensional trabalha com base de cálculo de intersecções entre semi-retas e partes do objeto. No cálculo das intersecções, a geometria representa o principal obstáculo: mesmo para geometrias simples, tais como objetos poligonais, os algoritmos deparam-se com a necessidade de tratamento de vários casos especiais como, por exemplo, intersecção com vértices do objeto. Não é raro encontrar algoritmos que enumeram exaustivamente os casos especiais ou alteram localmente pontos do objeto através de perturbações aleatórias.

Na linha de tratamento de casos especiais, alguns exemplos são mostrados em Edelsbrunner [Ede87], Guibas *et al.* [GRS83] e em Figueiredo e Carvalho [FC91]. Um tratamento bem extenso para polígonos planares pode ser encontrado em Feito *et al.* [FTU95].

Normalmente, o tratamento de casos especiais é realizado com base em perturbações que eliminam degenerescências das entradas do problema de pertinência. Os efeitos e métodos computacionais destas perturbações são amplamente discutidos por Seidel [Sei98].

Pol e Corthout [CP92] desenvolveram algoritmos de pertinência robustos para uma classe extensa de bordas de objetos bidimensionais, tais como poligonais, curvas de Bézier polinomiais e racionais. Tais algoritmos possuem uma estreita relação com o bem conhecido Teorema da Curva de Jordan e baseiam-se numa contagem indireta de intersecções, o que permitiu evitar vários problemas da computação direta das insersecções. Neste trabalho, foi estabelecida uma versão discreta desse teorema, onde foi retirada a condição de simplicidade da curva. Tal versão estabelece que uma curva discreta fechada qualquer separa o plano “discreto” $\mathbb{Z}^2$ em um número finito de regiões interiores e uma região do exterior. Para a prova desta versão discreta, foi estabelecida uma equivalência entre o conceito analítico de interior/exterior e um conceito geométrico, baseado em contagem de intersecções. A partir desta equivalência e do conceito geométrico, uma função de pertinência pôde ser especificada e, surpreendentemente, uma implementação simples, que utiliza somente aritmética inteira, foi construída. Tal implementação teve como objetivo um mapeamento para *hardware* dedicado, culminando com a construção do *chip* PHAROS da PHILIPS para suporte à linguagem PostScript.

Apesar da robustez da técnica de Pol e Corthout, o seu comportamento quadrático com respeito à resolução da imagem torna determinadas operações de rasterização como, por exemplo, preenchimento (*filling*) e contorno (*stroking*), consideravelmente lentas. Em Fabris *et al.* [FSF97, FSF98] e Silva [Sil98], tal complexidade foi reduzida a patamares sub-lineares na resolução. Como tais operações têm naturezas essencialmente paralelas, uma outra estratégia de redução da complexidade também é proposta por Fabris *et al.* [FOF00] com a utilização de subdivisões dos espaços das imagens e dos objetos.

Um linha de tratamento alternativa para pertinência bidimensional pode ser encontrada em Tang [Tan88], que transforma a integral de linha da definição analítica de pertinência para uma integral dupla, utilizando o Teorema de Green.

Poucos trabalhos têm sido publicados para pertinência em dimensões maiores ou iguais a 3. Principalmente em dimensão 3, grande parte dos trabalhos apenas caracterizam os conjuntos interior e exterior: por exemplo, são provados teoremas de separação de espaços pelos objetos. Apesar do interesse teórico, tais trabalhos não representam métodos efetivos para a implementação computacional de uma função de pertinência.

Na linha de caracterização, onde os conjuntos interior e exterior são definidos através de propriedades topológicas, encontram-se os trabalhos de Morgenthaler e Rosenfeld [MR81], onde é provada uma versão discreta do Teorema de Jordan-Bröwer¹ para superfícies discretas com certas restrições de conectividade, e Ayala *et al.* [AFQR95], que estende os resultados de Morgenthaler e Rosenfeld para o domínio das variedades discretas.

Numa linha mais computável, existe um algoritmo proposto por Feito *et al.* [FT97], que trata de pertinência em poliedros gerais. A base deste algoritmo consiste no cálculo de vários determinantes para localização dos pontos. Apesar de incluir modelos do tipo *non-manifold*, a possibilidade de extensão e aplicação para geometrias mais complexas não é clara. Mello *et al.* [MVT03] propõem um método para avaliação de pertinência para superfícies simpliciais implícitas, que estende bastante a classe de geometrias alcançáveis pelo teste de pertinência.

Finalmente, outro trabalho de Ayala *et al.* [AFQR96] descreve um algoritmo bastante geral para determinar as componentes do complemento de uma $(n - 1)$ -variedade discreta em $\mathbb{Z}^n$. Neste algoritmo, a parte crucial foi determinar uma função de pertinência de um ponto contra a variedade, realizada através de *índices de pontos*. Apesar de ser geral, a implementação é bastante complexa mesmo no caso tridimensional. Este algoritmo representa, atualmente, o resultado mais geral em pertinência de pontos contra objetos discretos.

Proposta e contribuições da tese

Pertinência de pontos contra objetos discretos representa um procedimento fundamental para vários processos em computação gráfica. A especificação e implementação eficiente e robusta, porém simples e adaptável a *hardware*, de tais predicados para uma extensa classe de objetos discretos é de grande interesse computacional. Na linha de simplicidade, o teste de pertinência bidimensional de Pol e Corthout representa um tratamento efetivo e homogêneo para vários casos complexos de intersecção. Mesmo com complexidade linear no tamanho do objeto a ser testado contra a pertinência, é possível obter algumas otimizações baseadas em estruturas de dados simples e transformações elementares (rotações) de objetos.

¹O Teorema de Jordan-Bröwer estabelece que todo espaço homotópico à esfera unitária n -dimensional separa $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes: uma limitada, denominada interior, e outra, ilimitada, denominada exterior.

A partir desta linha de pertinência, esta tese propõe, inicialmente, otimizações no teste de pertinência bidimensional que permitem uma redução significativa da quantidade de cálculos de intersecção, utilizando uma fase simples de pré-processamento do objeto. Além disto, foi possível aumentar ainda mais a performance do teste através de testes lineares bastante elementares. A seguir, foi realizada uma extensão da técnica de pertinência para o ambiente tridimensional. Para tanto, a noção de interior e exterior precisou ser reformulada em termos uma medida especial baseada em subdivisões simpliciais, chamada Integral de Kronecker. A partir de uma relação entre as versões analíticas e geométrica de interior e exterior, foi provada uma versão discreta do Teorema de Jordan-Bröwer Tridimensional, especificado e implementado um teste eficiente e robusto para pertinência contra objetos discretos tridimensionais, inclusive com auto-intersecção. Finalmente, o teste foi generalizado para objetos com dimensão superior à tridimensional.

Assim, as principais contribuições desta tese são:

- otimização do teste de pertinência bidimensional de Pol e Corthout, formando uma base eficiente para a construção e implementação de uma teoria de pertinência tridimensional;
- extensão da técnica de pertinência bidimensional de Pol e Corthout para o ambiente tridimensional;
- generalização da técnica para espaços discretos de dimensão arbitrária.

É importante ressaltar que a extensão da técnica de Pol e Corthout para o ambiente tridimensional, assim como sua generalização, não foram tarefas triviais. Além do dimensionamento da geometria alcançável pela extensão, foi necessária a utilização de ferramentas avançadas de análise como, por exemplo, a Integral de Kronecker. O tratamento de casos especiais foi realizado através de esquemas de redução para dimensões mais baixas.

Os algoritmos propostos, além de terem complexidade linear no tamanho dos objetos testados, possuem estruturas de dados bastante simples e requerem operações elementares como, por exemplo, transformações lineares, o que os tornam adptáveis para implementação em *hardware*. A classe de objetos discretos atingida configura-se por objetos orientáveis com geometria bastante complexa como, por exemplo, objetos com auto-intersecção. Neste sentido, o teste estende bastante a quantidade de objetos atingíveis por outras técnicas.

Estrutura da tese

Esta tese está organizada em cinco capítulos, estruturados da seguinte maneira:

Capítulo 1: Apresenta as noções essenciais de geometria e topologia de espaços e objetos discretos. Define a classe de objetos discretos atingida pelos testes de pertinência dos capítulos subsequentes.

Capítulo 2: Resume a técnica de pertinência de Pol e Corthout, que é baseada numa equivalência entre as noções analítica e geométrica de interior. Analisa pontos passíveis de otimização na técnica, propõe e implementa tais otimizações.

Capítulo 3: Reescreve, inicialmente, a noção de número de rotação bidimensional vinculada a Integral de Kronecker. Apresenta a noção de interior/exterior tridimensional via números de rotação tridimensional, estende a teoria bidimensional de Pol e Corthout, especifica e implementa um teste de pertinência tridimensional com tratamento homogêneo de casos especiais.

Capítulo 4: Estende as construções do Capítulo 3 para objetos discretos de dimensão arbitrária, através de esquemas recursivos baseados em redução dos testes de pertinência a dimensões menores.

Capítulo 5: Resume os resultados obtidos e apresenta algumas direções de trabalhos possíveis para extensão das técnicas de pertinência apresentadas.

Algumas noções de análise, topologia e geometria discretas são necessárias para um acompanhamento mais profundo de alguns tópicos. Sempre que necessário, estas noções são apresentadas e contextualizadas no ambiente discreto.

Capítulo 1

Geometria e Topologia de Espaços e Objetos Discretos

Um ambiente geométrico e topológico para desenvolvimento de um teste de pertinência em dimensão arbitrária é apresentado neste capítulo. Tendo como objetivo a obtenção de algoritmos que utilizem somente aritmética inteira, os objetos residem em espaços discretos. Noções geométricas e topológicas subjacentes a tais espaços, tais como métricas e conectividade, desempenharão papel fundamental na obtenção de várias propriedades que permitirão caracterizar, de modo preciso, o interior e exterior dos objetos.

1.1 Pontos e escalares discretos

Como grande parte desta tese é localizada no ambiente discreto, o conjunto de escalares será o anel abeliano dos inteiros $\mathbb{Z}$, com as operações usuais de soma e multiplicação. Como suporte geométrico para construção dos objetos será utilizado o espaço discreto d -dimensional $\mathbb{Z}^d$:

Definição 1.1. *Seja $d \in \mathbb{N}_*$. O espaço discreto d -dimensional $\mathbb{Z}^d$ é formado pelo conjunto de pontos:*

$$\mathbb{Z}^d = \{(x_1, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d\}.$$

As coordenadas de um ponto $P \in \mathbb{Z}^d$ serão denotadas pela d -upla $(P^{x_1}, \dots, P^{x_d})$ e a origem de $\mathbb{Z}^d$, $\underbrace{(0, \dots, 0)}_{d \text{ coordenadas}}$, por $\mathcal{O}_d$. Para o teste de pertinência, os espaços discretos de

interesse têm dimensão d maior ou igual a 2. O caso $d = 1$ é trivial e se reduz a testar pertinência em intervalos de extremos inteiros.

A adição e multiplicação por escalar é estendida a pontos da maneira usual:

Definição 1.2. *Sejam $P, Q \in \mathbb{Z}^d$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. O ponto $t_1P + t_2Q$ em $\mathbb{Z}^d$ é definido por:*

$$t_1P + t_2Q = (t_1P^{x_1} + t_2Q^{x_1}, \dots, t_1P^{x_d} + t_2Q^{x_d}).$$

Assim, $\mathbb{Z}^d$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}$ -módulo. As operações definidas anteriormente são essenciais para computar transformações afins de objetos.

1.2 Listas

Uma lista de pontos é definida como um função de um intervalo de números naturais $[0 \dots n]$ em $\mathbb{Z}^d$, ou seja, uma lista de pontos corresponde a uma seqüência de pontos em $\mathbb{Z}^d$.

Definição 1.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto de funções de $[0 \dots n]$ em $\mathbb{Z}^d$ será denotado por $\Lambda_n^d = \{L : [0 \dots n] \rightarrow \mathbb{Z}^d\}$. As funções L são chamadas de listas de comprimento n , denotado por $\#L$.*

Listas serão utilizadas como semi-retas discretas para contagem de intersecções, processo importante para o teste de pertinência geométrico a ser desenvolvido nos próximos capítulos.

Ao longo deste capítulo, L_i denota a imagem $L(i)$, ou seja, o i -ésimo ponto de L . Uma lista L é dita fechada se e somente se $L_0 = L_{\#L}$. O conjunto de pontos de uma lista L será denotado por $\langle L_i \rangle_{i=0}^n$. Em algumas definições, abusando da linguagem matemática, tal notação também será utilizada para indicar a função L que define uma lista.

Definição 1.4. *O conjunto de todas as listas mergulhadas num espaço discreto de dimensão d será denotado por Λ_*^d , ou seja:*

$$\Lambda_*^d = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i^d.$$

Utilizando-se o conjunto Λ_*^d , podem ser construídos operadores importantes para a formação de novas listas. O primeiro destes operadores, a concatenação, é um operador

binário $\uplus : \Lambda_*^d \times \Lambda_*^d \rightarrow \Lambda_*^d$ que permite fazer a junção de duas listas com um ponto extremo comum:

Definição 1.5. *Sejam L^1 e L^2 duas listas em $\Lambda_{n_1}^d$ e $\Lambda_{n_2}^d$, respectivamente. L^1 e L^2 podem ser concatenadas se e somente se $L_{n_1}^1 = L_0^2$. A concatenação de duas listas nestas condições será a lista $L^1 \uplus L^2$, de comprimento $n_1 + n_2$, definida por:*

$$(L^1 \uplus L^2)_i = \begin{cases} L_i^1 & \text{se } 0 \leq i \leq n_1 \\ L_{i-n_1}^2 & \text{se } n_1 \leq i \leq n_1 + n_2 \end{cases}$$

Observa-se facilmente que, se uma das listas tiver comprimento 0, a concatenação reduz-se ao operador identidade.

Definição 1.6. *A reversão é um operador unário $\mathcal{R} : \Lambda_d^* \rightarrow \Lambda_*^d$, definido por:*

$$\mathcal{R}(L) = \langle L_{n-i} \rangle_{i=0}^n.$$

Claramente $\mathcal{R}(\mathcal{R}(L)) = L$. O próximo operador é o bem conhecido operador de diferença .

Definição 1.7. *O operador de diferença $\Delta : \Lambda_*^d - \Lambda_0^d \rightarrow \Lambda_d^*$ é definido por:*

$$\Delta(L) = \langle L_{i+1} - L_i \rangle_{i=0}^{n-1}.$$

Como consequência imediata das definições anteriores, tem-se a seguinte relação entre estes três operadores:

Teorema 1.1.

$$\mathcal{R}(L^1 \uplus L^2) = \mathcal{R}(L^2) \uplus \mathcal{R}(L^1)$$

$$\Delta(L^1 \uplus L^2) = \Delta(L^1) \uplus \Delta(L^2)$$

$$\Delta \circ \mathcal{R} = -\mathcal{R} \circ \Delta$$

1.3 Métricas e conectividade em espaços discretos

A noção de métrica, ou distância, num espaço discreto $\mathbb{Z}^d$ será utilizada para definir conectividade de listas e objetos. Certas restrições de conectividade permitirão obter importantes corolários das versões discretas dos Teoremas de Jordan e Jordan-Bröwer.

Para evitar o tratamento separado para cada dimensão, será utilizado um método geral para definir métricas em espaços discretos. Inicialmente, será definida uma norma em $\mathbb{Z}^d$, visto como um $\mathbb{Z}$ -módulo, e, posteriormente, será tomada a métrica canônica advinda desta norma. Tal processo de construção de métricas é extremamente comum em Topologia Geral([Wil70]).

Definição 1.8. *Seja $V = \{v_i : 0 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{Z}^d$ um sistema finito de geradores de $\mathbb{Z}^d$, considerado como um $\mathbb{Z}$ -módulo. Defina-se a função $|\cdot|_V : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ por:*

$$|P|_V = \min \left\{ \sum |a_i|_{\mathbb{Z}} : \sum a_i v_i = P \right\},$$

onde $|\cdot|_{\mathbb{Z}}$ é a norma usual de $\mathbb{Z}$ (valor absoluto).

A função acima está bem definida pois, se V gera $\mathbb{Z}^d$, o conjunto do lado direito da igualdade é não-vazio, composto de números naturais e o mínimo sempre existe. Além disto, não é difícil ver que $|\cdot|_V$ define uma norma em $\mathbb{Z}^d$.

Considerando-se o conjunto formado por todos os sistemas geradores de $\mathbb{Z}^d$, tem-se uma família de funções-norma. Tomando-se qualquer função desta família, pode-se construir uma métrica canônica $\mathcal{D}_V$, associada ao sistema gerador V , tomando-se a norma da diferença entre dois pontos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V : \quad \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d &\rightarrow \mathbb{N} \\ (P, Q) &\mapsto |P - Q|_V \end{aligned}$$

Para cada dimensão $d \geq 1$, existem sistemas geradores que definem métricas usuais em espaços discretos. Estas métricas definem relações de conectividade entre pontos, estruturando o ambiente discreto como um grafo infinito, com conjunto de vértices enumerável, não-orientado. Para cada dimensão d , este grafo é estruturado da seguinte forma:

- os vértices são formados pelos pontos de $\mathbb{Z}^d$;
- existe uma aresta entre dois vértices P e Q se e somente se a distância entre os pontos P e Q for igual a 1.

Assim, a estrutura do grafo depende exclusivamente da métrica considerada no espaço.

1.3.1 Plano discreto bidimensional

Existem três sistemas geradores importantes no ambiente bidimensional, que produzem as distâncias comumente usadas no plano discreto bidimensional:

- $V_4^2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- $V_6^2 = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$
- $V_8^2 = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1)\}$

Na notação dos sistemas geradores acima, o índice superior denota a dimensão e, o índice inferior, o tipo de conectividade, explicada adiante. Partes dos grafos gerados pelas métricas associadas aos geradores anteriores são mostradas na Figura 1.1, onde são evidenciados pontos adjacentes a um ponto em cada uma das estruturas:

Figura 1.1: Estruturas conexas usuais de $\mathbb{Z}^2$. Somente a estruturas(a) e (c) representam conectividades naturais.

É comum associar o tipo, ou nome, da estrutura conexa à quantidade de pontos adjacentes a um determinado ponto. Assim, se qualquer ponto possui seis pontos adjacentes, a estrutura é chamada 6-conexa, ou simplesmente, plano 6-conexo. Observa-se, ainda,

que ocorre uma relação de inclusão entre as três estruturas usuais mostradas anteriormente: todo plano 6-conexo é 4-conexo, assim como todo plano 8-conexo é 6-conexo e 4-conexo. Existem outras caracterizações para tais planos, como em Rosenfeld [Ros79] e Serra [Ser82], onde são utilizadas métricas usuais de $\mathbb{R}^2$ restritas a $\mathbb{Z}^2$.

1.3.2 Espaço discreto tridimensional

Para o ambiente tridimensional, as primeiras caracterizações de conectividade encontram-se em Gray [Gra70] e Park e Rosenfeld [PR71], passando pelo clássico artigo de Rosenfeld [Ros81], que novamente utiliza restrições de métricas usuais de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{Z}^3$. Atualmente, conceitos avançados de ambientes contínuos e que dependem de suporte de conectividade, como índices e homotopia, têm sido adaptados para o ambiente discreto tridimensional ([ADFQ00],[Mal00]).

No ambiente tridimensional, existem três estruturas conexas naturais: espaço 6-conexo, 18-conexo e 26-conexo. A Figura 1.2 exhibe tais estruturas, evidenciando as adjacências de um ponto particular.

Figura 1.2: Estruturas conexas naturais de $\mathbb{Z}^3$.

Os sistemas geradores de tais espaços são, respectivamente:

- $V_6^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- $V_{18}^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$
- $V_{26}^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$

É possível definir outros critérios não-naturais de conectividade para $\mathbb{Z}^3$ como, por exemplo, 10-conectividade. Normalmente, grande parte dos resultados nesse espaço acaba se concentrando nas estruturas 6, 18 e 26-conexas.

1.3.3 Espaço discreto d -dimensional, $d \geq 4$

Existe pouca literatura sobre topologia de espaços discretos de alta dimensão. Algumas propriedades topológicas elementares, como conectividade, podem ser encontradas em Mylopoulos e Pavlids [MP71] e Turlakis e Mylopoulos [TM73].

No espaço discreto d -dimensional, $d \geq 4$, existem d diferentes critérios naturais de conectividade¹. Isto é fácil de ser ver pois, tomando-se um ponto discreto $P = (x_1, \dots, x_d)$, os pontos adjacentes naturais de P podem ser obtidos somando-se ou subtraindo-se 1 a, pelo menos, uma coordenada x_i de P . Alterando-se k coordenadas de P por soma ou subtração de 1, $1 \leq k \leq d$, obtém-se $2^k \binom{d}{k}$ pontos adjacentes. Como k pode ser visto como uma dimensão que define a adjacência k -dimensional natural, a quantidade total de pontos adjacentes até a dimensão k é obtida pela somatória:

$$\sum_{i=1}^k 2^i \binom{d}{i}.$$

O número resultante desta somatória designa o tipo de conectividade do espaço. Por exemplo, tomando-se $d = 5$ e $k = 3$, o espaço $\mathbb{Z}^5$ tem uma estrutura 130-conexa. Os sistemas geradores de cada uma dessas conectividades podem ser obtidos facilmente e não serão descritos nesta tese.

Com exceção de conectividades não-naturais, como a 6-conectividade de $\mathbb{Z}^2$ ou a 10-conectividade de $\mathbb{Z}^3$, a designação proposta é compatível, inclusive, com os espaços de dimensão mais baixa. A 18-conectividade de $\mathbb{Z}^3$, por exemplo, é obtida colocando-se $d = 3$ e $k = 2$.

¹Para dimensões d menores que 4, também existem d critérios naturais de conectividade. Para o caso $d = 2$, a 6-conectividade não é considerada um critério natural de conectividade.

1.3.4 Relacionamento entre normas discretas e contínuas

Nos próximos capítulos, os espaços $\mathbb{Z}^d$ serão freqüentemente mergulhados em $\mathbb{R}^d$ para utilização de algumas ferramentas de espaços contínuos. Este mergulho será o canônico, salvo algumas exceções particulares. Para manter uma compatibilidade de normas entre estes dois espaços, o seguinte teorema relaciona a norma geral $\mathbb{Z}^d$, definida anteriormente, com qualquer norma adotada em $\mathbb{R}^d$.

Teorema 1.2. *Seja $|\cdot|$ alguma norma em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Definindo $e = \max\{|\underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{d \text{ coordenadas}}|_V, \dots, |(0, 0, \dots, 1)|_V\}$, $v = \max\{|V_i|\}$ e $\rho = \max\{\sum_{i=1}^d |R^{x_i}| : R \in \mathbb{R} \text{ e } |R| = 1\}$, tem-se:*

$$\begin{aligned} e^{-1} \rho^{-1} |P|_V &\leq |P| \leq v |P|_V \\ v^{-1} |P| &\leq |P|_V \leq e \rho |P| \end{aligned}$$

1.4 Conectividade em listas e regiões

A norma geral, definida na seção anterior, pode ser estendida para o domínio das listas, da seguinte maneira:

Definição 1.9. *Seja L uma lista em Λ_n^d . Define-se a norma de L (com relação a um conjunto de geradores V do $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}^d$) por:*

$$|L|_V = \max_{0 \leq i \leq n} \{|L_i|_V\}.$$

A partir desta norma, tem-se a noção de lista m -conexa:

Definição 1.10. *Uma lista $L \in \Lambda_*^d - \Lambda_0^d$ é m -conexa se e somente se $|\Delta(L)|_{V_m^d} \leq 1$. Por convenção, todas as listas de tamanho 0 são m -conexas.*

A definição de lista m -conexa diz, essencialmente, que pontos adjacentes na lista estão contidos num cubo d -dimensional definido pela m -conectividade do espaço onde a lista está mergulhada.

A Figura 1.3 mostra exemplos de listas conexas no plano discreto bidimensional:

Figura 1.3: Listas conexas bidimensionais.

A noção de conectividade ainda pode ser extrapolada para o domínio das regiões discretas d -dimensionais, isto é, subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$, utilizando-se a noção de conectividade em listas:

Definição 1.11. *Uma região R discreta d -dimensional é dita m -conexa se e somente se, para todo ponto $P, Q \in R$, existe uma lista m -conexa L , tal que $\{L_i\}_{i=0}^{\#L} \subset R$, $L_0 = P$ e $L_{\#L} = Q$.*

1.5 Objetos e hipersuperfícies discretas

Uma classe específica de regiões discretas, os objetos discretos, é definida nesta seção. Tal classe representa o conjunto de objetos-alvo para o teste de pertinência desenvolvido nos próximos capítulos. A caracterização da geometria e topologia de tais objetos, sempre subjacente ao espaço onde estão mergulhados, é de grande importância para várias simplificações no cálculo de contribuições para pertinência.

A caracterização dos objetos discretos, bem como as hipersuperfícies que os delimitam, as hipersuperfícies discretas, será feita através de objetos combinatórios chamados

complexos celulares. Como a base do teste de pertinência é baseado em aritmética somente inteira, será construída uma classe especial desses complexos, os complexos celulares discretos, formando um suporte geométrico e topológico para formação dos objetos e hipersuperfícies.

1.5.1 Complexos celulares

Complexos celulares representam uma base fundamental para várias técnicas de modelagem geométrica e topológica de objetos. Um complexo celular abstrato é uma estrutura combinatória finita que permite formar agrupamentos de elementos básicos, chamados células. Tais agrupamentos são construídos sob certas restrições de ordem e dimensão.

Definição 1.12. *Seja T um conjunto finito, chamado conjunto de células. Um complexo celular abstrato com células em T é definido por uma 3-upla $\mathcal{K} = (T, \leq, \dim)$, onde:*

- $\leq$ é uma ordem parcial² em T , chamada relação de limitação.
- $\dim : T \rightarrow \mathbb{N}$, denominada função-dimensão, satisfaz a:

$$\tau' \leq \tau'', \tau' \neq \tau'' \implies \dim(\tau') < \dim(\tau'').$$

Uma célula τ , para a qual $\dim(\tau) = k$, é chamada de uma k -célula. Um complexo $\mathcal{K}$ é chamado k -dimensional se k for o valor máximo de $\dim(\tau)$, calculado sobre todas as células τ de $\mathcal{K}$. O número k é chamado dimensão ou ordem do complexo.

Definição 1.13. *Um subcomplexo $\mathcal{K}'$ de um complexo $\mathcal{K} = (T, \leq, \dim)$ é uma 3-upla $\mathcal{K}' = (T', \leq', \dim')$ onde:*

- $T' \subseteq T$
- $\leq'$ é a intersecção de $\leq$ com $T' \times T'$
- $\dim' = \dim|_{T'}$

As próximas definições abordam algumas estruturas subjacentes às células, como bordo e cobordo, de tal modo a caracterizar conectividade num complexo.

²Relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Definição 1.14. *Seja τ uma célula de um complexo $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \leq, \dim)$:*

- *o bordo de τ é o conjunto $\mathcal{B}(\tau) = \{\tau' \in \mathcal{T} - \{\tau\} | \tau' \leq \tau\}$.*
- *o cobordo, ou estrela, de τ é o conjunto $\tau^* = \{\tau' \in \mathcal{T} | \tau \leq \tau'\}$.*

Os elementos de $\mathcal{B}(\tau)$ são denominados bordos de τ , enquanto que os elementos de τ^* são denominados cobordos de τ . Se uma célula τ possui um bordo τ' de dimensão k , τ' é chamada de um k -bordo de τ . Pela definição da função $\dim$, os bordos de uma célula têm dimensão estritamente menor que a célula. Analogamente, temos a denominação de k -cobordo para uma célula de dimensão k que é cobordo de uma outra célula. O cobordo de τ também pode ser visto como a união de τ com o conjunto de células das quais τ é bordo.

Definição 1.15. *Duas células τ e τ' de um complexo $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \leq, \dim)$ são chamadas de incidentes se e somente se $\tau = \tau'$ ou $\tau \leq \tau'$ ou $\tau' \leq \tau$.*

Não é difícil ver que a propriedade de incidência define uma relação em $\mathcal{T}$, chamada *relação de incidência*. A relação de incidência permite definir a noção de conectividade em complexos celulares abstratos. Conectividade é uma propriedade importante para restringir a classe de objetos discretos a serem considerados nesta tese.

A conectividade em complexos celulares abstratos é, essencialmente, o fecho transitivo da relação de incidência e pode ser caracterizada utilizando-se as noções de bordo e cobordo.

Definição 1.16. *Seja $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \leq, \dim)$ um complexo celular abstrato. Uma seqüência de elementos $[\tau_0, \dots, \tau_p]$ de um subconjunto $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ é chamado um caminho em $\mathcal{T}'$ de τ_0 a τ_p se para todo par de células τ_{i-1}, τ_i , $i = 1, \dots, p$, então $\tau_{i-1} \in \mathcal{B}(\tau_i)$ ou $\tau_{i-1} \in \tau_i^*$.*

Com exceção da célula terminal τ_p , um caminho é formado por células incidentes, ou seja, que ou são bordos ou cobordos de células imediatamente posteriores no caminho.

Definição 1.17. *Um subconjunto $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ é chamado de conexo se para quaisquer pares de células $\tau', \tau'' \in \mathcal{T}'$ existir um caminho em $\mathcal{T}'$ de τ' a τ'' . $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \leq, \dim)$ é chamado de conexo se todo subconjunto $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ for conexo.*

Uma definição de conectividade com grau mais elevado, como a m -conectividade da Topologia, é estendida de maneira bastante simples para complexos celulares abstratos:

Definição 1.18. *Um complexo celular abstrato $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \leq, \dim)$ é m -conexo se para quaisquer pares de células $\tau', \tau'' \in \mathcal{T}$ existir um caminho $[\tau_0, \dots, \tau_p]$ formado alternativamente de $(m+1)$ -células e m -células de tal forma que τ' e τ'' sejam incidentes a τ_0 e τ_p , respectivamente.*

Uma última noção essencial no ambiente dos complexos celulares abstratos é a orientabilidade. A caracterização de orientabilidade num complexo é feita a partir da noção de orientabilidade nas células.

Definição 1.19. *Seja $\tau_n = (\tau_0^0, \dots, \tau_0^{n-1})$ o conjunto da 0-células de uma k -célula τ . Uma ordenação em τ é uma permutação $\tau_{\pi(n)} = (\tau_0^{\pi(0)}, \dots, \tau_0^{\pi(n-1)})$.*

Pela definição anterior, não é difícil observar que, associadas a uma célula τ com composta por n 0-células, existem $n!$ ordenações distintas em τ . Existem duas classes de ordenações de τ_n que permitem caracterizar a orientação de uma célula. A primeira classe é formada por τ_n (permutação identidade) e por todas as permutações pares³ de τ_n . Outra classe é formada pelas permutações ímpares de τ_n .

Definição 1.20. *Seja τ_n nas condições da definição anterior, com $n \geq 1$. Cada uma das classes de τ_n é chamada uma orientação de τ .*

Para o caso $n = 0$, a célula é formada de apenas uma 0-célula que, obviamente, tem uma única orientação. Para $n > 1$, cada célula possui duas orientações possíveis.

Definição 1.21. *Sejam τ, τ' duas células de um complexo $\mathcal{K}$. τ e τ' estão coerentemente orientadas se e somente as orientações de τ e τ' induzem orientações diferentes num bordo comum de τ e τ' .*

Se todos os pares de células que satisfazem a um critério de intersecção forem coerentemente orientadas, o conjunto formado por tais células será orientado:

Definição 1.22. *Um complexo celular abstrato é dito coerentemente orientado(ou orientado) se para cada par de células τ e τ' com um bordo comum forem coerentemente orientadas. $\mathcal{K}$ é orientável se admite uma orientação coerente.*

³Uma permutação é dita par se pode ser escrita como um número par de transposições. Uma transposição é um tipo especial de permutação que troca a posição de somente dois elementos. Uma permutação é dita ímpar se ela não for par.

A orientação das célula e do complexo como um todo representa um papel fundamental no processo de pertinência de um ponto. A localização de um ponto em relação a uma determinada célula é calculada com base na orientação da célula em relação ao ponto.

1.5.2 Complexos celulares euclidianos

Complexos celulares euclidianos representam uma classe específica de complexos celulares abstratos. A base de formação dos complexos euclidianos são as células euclidianas:

Definição 1.23. *Uma célula euclidiana τ de dimensão k em $\mathbb{R}^n$, ou uma k -célula euclidiana, com $0 \leq k \leq n$ é um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ homeomorfo à bola fechada unitária k -dimensional $B^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$.*

Para que a definição anterior se torne consistente, devemos considerar que τ está mergulhada canonicamente em $\mathbb{R}^n$. A Figura 1.4 mostra exemplos de células euclidianas mergulhadas em $\mathbb{R}^3$:

Figura 1.4: Células euclidianas: células como (a) são chamadas *vértices* ou *pontos*, (b) são denominadas *arestas*, (c) faces ou polígonos e (d) *voxels*.

Conforme evidenciado na figura anterior, células euclidianas não precisam ser necessariamente convexas. Uma classe importante de células euclidianas convexas são os simplexes ou células simpliciais, formadas de fechos convexos de pontos no espaço euclidiano ([Mas91]).

Partindo-se de um conjunto de células euclidianas, o próximo passo é agrupá-las de tal modo que seja possível caracterizar objetos d -dimensionais válidos.

Definição 1.24. *Seja $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ um conjunto finito de células euclidianas k -dimensionais em $\mathbb{R}^n$, com $0 \leq k \leq n$. O suporte (ou domínio) de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, denotado por $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas células de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.*

A definição de domínio de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ é muito mais geral que o exigido em vários processos de modelagem geométrica ou topológica. Para exibir a generalidade dessa definição, serão necessários os conceitos de interior e bordo relativos das células.

Definição 1.25. *Seja τ uma k -célula euclidiana e $f : B^k \rightarrow \tau$ um homeomorfismo:*

- *o interior relativo de τ , denotado por τ° , é o conjunto $f(B^k)$, ou seja, é a imagem do interior da bola B^k .*
- *o bordo relativo de τ , denotado por $\partial\tau$, é o conjunto $f(\partial(B^k))$.*

Conjuntos finitos de células com interiores relativos não-disjuntos ou células isoladas (células cujo bordo relativo não possui intersecção com o bordo relativo de outras células) podem gerar situações degeneradas como, por exemplo, em modelagem de sólidos, exibidas extensivamente em Mantyla [Man88]. Assim, será necessário impor certas restrições no agrupamentos das células euclidianas:

Definição 1.26. *Seja $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ um conjunto finito de células euclidianas k -dimensionais em $\mathbb{R}^n$, com $0 \leq k \leq n$. Um complexo celular euclidiano $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ é uma 3-upla $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} = (\mathcal{T}_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}}, \dim_{\mathbb{R}})$, onde:*

- *o conjunto dos interiores relativos das células de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ é uma partição do domínio $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$.*
- *para cada $\tau', \tau'' \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ tais que $\tau' \cap \tau'' \neq \emptyset$, então $\tau' \cap \tau''$ é uma união disjunta de células de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ com dimensão estritamente menor que k .*
- *$\dim_{\mathbb{R}}$ associa, a cada célula de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, sua dimensão como célula euclidiana.*
- *$\leq_{\mathbb{R}}$, uma relação de limitação sobre $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, é tal que $\tau' \leq_{\mathbb{R}} \tau''$ se e somente se $\tau' = \tau''$ ou τ' é uma cobertura do bordo relativo $\partial(\tau'')$ de τ'' .*

Não é difícil ver que a definição anterior constrói uma classe de complexos celulares abstratos.

Pode-se, ainda, derivar diretamente da definição que um complexo celular euclidiano satisfaz a :

- se $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, então $\forall \tau' \in \mathcal{B}(\tau)$, $\tau' \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, ou seja, todos os bordos de τ estão em $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.
- duas células $\tau, \tau' \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ são ou disjuntas ou possuem bordos comuns como intersecção.

A Figura 1.5 exibe dois exemplos de agrupamentos de células euclidianas 2-dimensionais, onde é explorado o critério de intersecção da definição anterior:

(a) Intersecções válidas

(b) Intersecções inválidas

Figura 1.5: Agrupamento de células euclidianas: (a) define um complexo euclidiano 2-dimensional ; (b) é apenas um agrupamento formado por células quadrangulares, pois existem intersecções de células que não são bordos comuns das células.

Propriedades como, por exemplo orientação, seguem as mesmas definições dos complexos celulares abstratos. Em particular, a orientação de uma célula euclidiana τ pode ser caracterizada por um vetor, que será denotado por $\vec{\tau}$.

1.5.3 Complexos celulares discretos

Complexos celulares discretos formam uma sub-classe de complexos celulares euclidianos que permite a representação e modelagem de vários objetos no ambiente discreto, conforme mostrado em Domínguez e Francés [DF01], Kovalevsky [Kov01] e Kenmochi e Imiya [KI01].

Definição 1.27. *Um complexo celular discreto é um complexo celular euclidiano onde as 0-células são elementos de $\mathbb{Z}^d$ e cada célula k -dimensional, $0 \leq k \leq d$, está contida num cubo unitário k -dimensional.*

Para cada dimensão k e conectividade escolhidas, existe um número finito de possíveis configurações para células de um complexo celular discreto, conforme mostra a Figura 1.6. Estas possíveis configurações são importantes para se provar uma equivalência entre duas versões dos números de rotação, desenvolvidas nos Capítulos 3 e 4.

Figura 1.6: Configurações de células discretas em $\mathbb{Z}^3$, com estruturas 6, 18 e 26-conexas.

Não é difícil observar, ainda, que cada célula de um complexo celular discreto pode ser decomposta em simplexos com cujas 0-células têm coordenadas inteiras.

1.5.4 Hipersuperfícies e objetos discretos

Os objetos discretos representam a classe de modelagem onde será aplicado teste de pertinência de pontos. Para a pertinência é necessário apenas o bordo do objeto, ou em termos mais geométricos, a hipersuperfície que delimita o objeto.

Existem três abordagens fundamentais para se definir hipersuperfície no espaço discreto:

1. abordagem baseada no Teorema de Jordan-Bröwer([Ale56]), na qual um reticulado de pontos é definido como uma hipersuperfície discreta se divide $\mathbb{Z}^d$ sob algumas restrições de conectividade([MR81],[CB81]);
2. abordagem baseada em topologia algébrica([Sti93]), onde uma superfície $(d - 1)$ -dimensional é definida como o bordo de objetos d -dimensionais([AFH81], [Vos93], [KII98], [Kov89] e [KI01]);
3. abordagem utilizando estruturas topológicas de variedades d -dimensionais([Fra95]).

Dentre as três abordagens mostradas anteriormente, a mais adequada aos propósitos desta tese é abordagem (2), pois permite tratar objetos com auto-intersecção. As definições de objetos e hipersuperfícies discretas apresentadas a seguir seguem a linha de Kenmochi e Imiya [KI01].

Definição 1.28. *Um complexo k -dimensional $\mathcal{K}$ é dito puro se toda célula com dimensão menor que k é bordo de alguma célula k -dimensional.*

Utilizando-se somente complexos discretos, tem-se a noção de objeto discreto:

Definição 1.29. *Todo complexo k -dimensional discreto puro é um objeto discreto k -dimensional Ω . O conjunto de todos os objetos discretos k -dimensionais, cujas 0-células tenham coordenadas em $\mathbb{Z}^d$, será denotado por $\Omega^{k,d}$.*

A Figura 1.7 mostra exemplos de objetos discretos:

(a) Objetos bidimensionais

(b) Objeto tridimensional

Figura 1.7: Objetos discretos: o objeto (b) deve ser interpretado como uma união de cubos com coordenadas inteiras(células discretas 3-dimensionais).

Mais um pouco de notação:

Definição 1.30. O símbolo $\Omega_n^{k,d}$, $n \geq 1$, representa o subconjunto de $\Omega^{k,d}$ formado por objetos discretos k -dimensionais compostos de n células. Seja $\{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}\}$ o conjunto das células k -dimensionais de um objeto discreto $\Omega \in \Omega_n^{k,d}$. A i -ésima célula de Ω , $i = 0, \dots, n-1$, denotada por $\Omega(i)$, é dada por $\Omega(i) = \tau_i$.

O próximo passo é caracterizar o bordo de um objeto discreto k -dimensional. O bordo de um objeto discreto é importante, pois ele é passado como um parâmetro para o teste de pertinência. A caracterização é baseada na noção de fecho combinatório([Ale56]):

Definição 1.31. Seja $\mathcal{K}' = (T', \leq', \dim')$ um subcomplexo de um complexo discreto $\mathcal{K} = (T, \leq, \dim)$. O fecho combinatório de $\mathcal{K}'$ em $\mathcal{K}$, denotado por $Cl(\mathcal{K}')$, é conjunto:

$$Cl(\mathcal{K}') = \mathcal{K}' \cup \{\tau \in T \mid \exists \tau' \in T', \tau \leq \tau'\}.$$

Essencialmente, o fecho $Cl(\mathcal{K}')$ é formado por todas as células de $\mathcal{K}'$ mais as células de $\mathcal{K}$ que precedem pelo menos uma célula de $\mathcal{K}'$.

Definição 1.32. *Seja Ω um objeto discreto k -dimensional e Ω' o subcomplexo formado pelas células discretas $(k - 1)$ -dimensionais de Ω que precedam exatamente uma célula k -dimensional de Ω . O bordo combinatório de Ω , denotado por $\partial(\Omega)$, é definido como:*

$$\partial(\Omega) = Cl(\Omega').$$

A Figura 1.8 mostra os bordos combinatórios dos objetos discretos exibidos na Figura 1.7.

Figura 1.8: Bordos de objetos discretos: a primeira imagem de (a) mostra que, em particular, bordos não precisam ser inteiramente conexos. (b) deve ser interpretado como uma união de quadrados(células discretas 2-dimensionais).

Não é difícil observar que o bordo combinatório $\partial(\Omega)$ é um subcomplexo $(k - 1)$ -dimensional puro e, portanto, é um objeto discreto $(k - 1)$ -dimensional. Esta observação é extremamente importante, pois ela permitirá reduzir o cálculo da pertinência k -dimensional a uma sequência recursiva de testes em dimensões mais baixas.

Definição 1.33. *Uma hipersuperfície poliédrica discreta k -dimensional $\mathcal{M}$, ou simplesmente uma hipersuperfície discreta, é um subconjunto de $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^{k+1}$ que seja bordo combinatório de algum objeto discreto $(k + 1)$ -dimensional $\Omega \in \Omega^{k+1,k+1}$. No caso $k = 2$, será usado o termo superfície discreta ao invés de hipersuperfície discreta.*

É importante ressaltar que esta definição possibilita a existência de hipersuperfícies com auto-intersecção. Isto permite aumentar o poder de modelagem, uma vez que não se fica restrito aos modelos clássicos de hipersuperfícies baseados em variedades k -dimensionais.

Como os objetos discretos estão restritos à conectividade, as hipersuperfícies associadas também serão referenciadas com respeito à conectividade:

Definição 1.34. *Uma hipersuperfície discreta $\mathcal{M}$ é chamada m -conexa se o complexo que a define for m -conexo.*

Finalmente, o cálculo da pertinência de um ponto em relação a um objeto discreto é dependente da orientação da hipersuperfície discreta $\mathcal{M}$ que delimita o objeto:

Definição 1.35. *Uma hipersuperfície discreta $\mathcal{M}$ é dita orientável se o complexo subjacente for orientável.*

Exemplos típicos de hipersuperfícies discretas orientáveis são as triangularizações das esferas unitárias. Exemplos não-orientáveis incluem, por exemplo, modelos discretos da Garrafa de Klein.

Capítulo 2

Pertinência em Objetos Discretos Bidimensionais

O teste de pertinência bidimensional de Pol e Corthout [CP92] é apresentado neste capítulo, onde foram feitas algumas adaptações de notação para mantê-lo compatível com as definições do capítulo anterior. A base de construção desse teste é o estabelecimento de uma versão discreta do bem-conhecido Teorema da Curva de Jordan e constitui uma base importante para o desenvolvimento da teoria e implementação de pertinência em dimensões mais elevadas. Apesar do teste ser assintoticamente ótimo, é proposta uma otimização baseada na remoção e transformações de hiperplanos contendo das células discretas que formam o bordo do objeto discreto bidimensional.

Todos as definições, enunciados e demonstrações de proposições, teoremas e colorários até a Seção 2.5.2 são devidas a Pol e Corthout [CP92] ou configuram resultados clássicos de Funções Analíticas. Para não sobrecarregar demasiadamente os enunciados, omitiu-se a fonte em cada um deles.

2.1 Problema da pertinência bidimensional

Uma instância do problema da pertinência bidimensional consiste de um objeto discreto bidimensional Ω , representado através de seu bordo combinatório $\mathcal{M}$, e um ponto P , todos mergulhados em $\mathbb{Z}^2$ e o objetivo é verificar se P está no interior de Ω somente com a informações geométricas e topológicas de $\mathcal{M}$. Neste contexto, a caracterização das regiões interior e exterior ao bordo $\mathcal{M}$ é fundamental e é um dos objetivos centrais deste capítulo.

O bordo combinatório de um objeto bidimensional Ω é coleção finita de objetos discretos 1-dimensionais conexos maximais. Cada uma destas componentes maximais tem orientação induzida da orientação de Ω e podem ser representadas como listas $L \in \Lambda^2$. Como listas são, também, denominadas curvas discretas, as componentes do bordo combinatório também são denominadas de curvas discretas. A Figura 2.1 exibe dois objetos discretos bidimensionais e as respectivas curvas discretas associadas aos bordos combinatórios dos objetos:

(a) Objeto com bordo formado por uma componente conexa simples.

(b) Objeto com bordo formado por duas componentes conexas.

Figura 2.1: Objetos discretos bidimensionais e curvas discretas.

Apesar do bordo de um objeto discreto bidimensional poder ser representada por uma lista, nem toda lista representa o bordo combinatório de um objeto bidimensional. Exemplos típicos ocorrem nos espaços das listas que não são fechadas e nos das listas da forma $L \uplus \mathcal{R}(L)$. Listas não-fechadas, em particular, possuem, pelo menos, uma célula

1-dimensional que não está contida numa célula 2-dimensional. A figura a seguir exhibe instâncias de listas nos espaços mencionados:

Figura 2.2: Curvas discretas que não são bordos combinatórios de objetos bidimensionais.

Não obstante o fato de tais listas serem importantes para modelagem, seu interior é vazio e podem ser removidas do bordo do objeto, pois sua contribuição será nula na classificação das regiões interior e exterior. A teoria de pertinência desenvolvida por Pol e Corthout será apresentada para o ambiente Λ^2 , que inclui listas da forma $L \uplus \mathcal{R}(L)$, com algumas modificações na notação original. Tal teoria se aplica diretamente ao conjunto $\Omega^{1,2}$, ambiente dos bordos combinatórios dos objetos bidimensionais, pois ele pode ser visto como um subconjunto de Λ^2 . Em alguns instantes deste capítulo, porém, termos como 1-célula e segmento poligonal, pontos e 0-células podem ser usados indistintamente.

2.2 Números de rotação

A noção de interior e exterior a uma curva, não necessariamente discreta, é baseada no conceito de número de rotação (*winding number*). Existem, essencialmente, dois modos diferentes de se definir o número de rotação: uma versão analítica, que emprega uma integral de linha complexa, e outra, conhecida como versão geométrica, que conta o número de intersecções diretas com uma semi-reta.

2.2.1 Versão analítica

A versão analítica do número de rotação emprega uma integral complexa¹ sobre uma curva fechada γ , e constitui uma ferramenta poderosa em Funções Analíticas ([Pal91]) e na Teoria de Intersecção em Topologia Diferencial ([GP74]):

Definição 2.1. O número de rotação $w(\gamma, P)$, de uma curva γ fechada e C^1 por partes, com respeito a P , é dado pela fórmula:

$$w(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - P},$$

onde está admitido $\mathbb{R}^2$ mergulhado em $\mathbb{C}$ para o cálculo da integral complexa.

Esta definição possui uma interpretação geométrica bastante simples. Considere-se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva fechada e C^1 por partes, e um ponto $P \in \mathbb{C} - \{\gamma\}$. Fixe-se um círculo $K = K(P, r)$ centrado em P e defina-se a projeção radial de γ em K por $\beta(t) = P + r \left[\frac{\gamma(t) - P}{|\gamma(t) - P|} \right]$, conforme mostrado na Figura 2.3.

Figura 2.3: Interpretação geométrica do número de rotação.

Denotando-se por $v(t)$ o vetor radial de P até $\beta(t)$, pode-se relacionar o número de rotações completas deste vetor, em torno do ponto P , com a integral que define o número de rotação pelo resultado da próxima página.

¹A versão analítica com integral complexa é uma forma usual para se definir número de rotação. Existem definições equivalentes como a integração da função-ângulo(forma diferencial) sobre γ interpretada como uma variedade 1-dimensional ou pela Integral de Kronecker [Pri84].

Teorema 2.1. *O número de rotação $w(\gamma, P)$ é igual ao número de rotações completas em torno de P , isto é, o número de rotações completas no sentido anti-horário menos o número de rotações completas no sentido horário, realizadas por $v(t)$ quando t varia de a até b .*

Com a definição analítica, pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja γ uma curva fechada e C^1 por partes no plano complexo e $U = \mathbb{C} - \gamma$. Então:*

- $w(\gamma, P)$ permanece constante nas componentes de U
- $w(\gamma, P) = 0$ se P pertence a uma componente ilimitada de U
- Quando γ é simples, isto é, sem auto-intersecções, $w(\gamma, P) = 1$, para todo P na componente limitada de U , ou $w(\gamma, P) = -1$ para tais pontos P . O sinal do número de rotação depende da orientação da curva.

A Figura 2.4 exhibe as situações mostradas no resultado anterior:

Figura 2.4: Números de rotação para as componentes de $\mathbb{C} - \{\gamma\}$: (a) e (b) são duas curvas simples com orientações contrárias.

O resultado anterior oferece, também, uma forma analítica para se testar se um ponto pertence ou não ao interior de alguma região limitada por uma curva γ nas condições do resultado: se $w(\gamma, P) \neq 0$, P está no interior da curva e, estará no exterior, caso contrário. Apesar de simples, a implementação computacional deste resultado é bastante difícil, pois envolve o cálculo de uma integral complexa. Mesmo por métodos numéricos ou cálculo via Teorema dos Resíduos, a tarefa não é das mais fáceis.

Para tornar o cálculo mais tratável computacionalmente, tem-se a versão geométrica do número de rotação, cuja principal característica reside na facilidade de implementação.

2.2.2 Versão geométrica

A versão geométrica do número de rotação é baseada na contagem das intersecções entre duas curvas, realizada através de funções chamadas *funções de contagem de intersecção*, comumente conhecidas como funções CW (*cross weight*). Informalmente, dadas duas curvas em $\mathbb{R}^2$, o CW destas duas curvas é igual ao número de cruzamentos com orientação esquerda-para-direita menos o número de cruzamentos com orientação direita-para-esquerda, com as definições usuais da Teoria dos Nós ([BZ85], [Kau87]).

No âmbito das curvas discretas, será definida a noção de função CW. Esta definição será mais geral do que o necessário, praticamente sem nenhuma relação com a versão analítica do número de rotação. Porém, a definição apresenta várias propriedades algébricas interessantes para decomposição de funções de rasterização. No final desta seção, será derivada uma função CW específica para estabelecer esse relacionamento.

Definição 2.2. *Uma função $C : \Lambda^2 \times \Lambda^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ é chamada de função CW se satisfaz às seguintes condições:*

Distribuição sob concatenação:

$$C(L^1 \uplus L^2, L^3) = C(L^1, L^3) + C(L^2, L^3)$$

$$C(L^1, L^2 \uplus L^3) = C(L^1, L^2) + C(L^1, L^3)$$

Inversão de sinal sob reversão:

$$C(\mathcal{R}(L^1), L^2) = C(L^1, \mathcal{R}(L^2)) = -C(L^1, L^2)$$

Nulidade sob triângulos: Se L^1 e L^2 são triângulos (listas fechadas de comprimento 3), então:

$$C(L^1, L^2) = 0.$$

Utilizando-se indução no comprimento das listas e as definições anteriores, pode ser provado o seguinte:

Teorema 2.3. *Sejam L^1 e L^2 duas listas fechadas. Então $C(L^1, L^2) = 0$.*

Observa-se, ainda, que este teorema induz uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^2$:

Corolário 2.1. *Dada uma função CW C e uma lista fechada L^1 , a relação $P \equiv Q \Leftrightarrow C(L^1, L^2) = 0$, para toda L^2 com $L_0^2 = P$ e $L_{\#L^2}^2 = Q$, é uma equivalência em $\mathbb{Z}^2$.*

Para definir uma versão mais implementável do número de rotação e estabelecer uma relação com a versão analítica, será desenvolvida uma função CW especial. Para tal fim, serão fixadas algumas notações:

Definição 2.3. • O produto vetorial de P e Q será denotado por $P \times Q$, onde a imersão em $\mathbb{R}^3$ está implícita.

- A coordenada z de um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ será denotada por P^z .
- A função sinal $s : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ é definida como: $s(x) = -1$ se $x < 0$, $s(x) = 0$ se $x = 0$ e $s(x) = 1$, se $x > 0$.
- Serão utilizados quatro tipos de imersão, definidas por:

– A imersão de pontos por $\varphi_\delta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$\varphi_\delta(P) = P + \delta, \delta \in \mathbb{R}^2.$$

- A imersão $\varphi_\delta(L)$ de uma lista $L = \langle L_0, L_1 \rangle$, de comprimento 1, como o segmento de reta parametrizado $l(t) = (1 - t)L_0 + tL_1 + \delta \in \mathbb{R}^2$, para $0 \leq t \leq 1$.
- A imersão de $\varphi_\delta(L)$ de listas $L \in \Lambda_n^2$ de comprimento $n > 1$ como o polígono (não necessariamente fechado):

$$\uplus_{0 \leq i \leq n-1} \varphi_\delta(\langle L_i, L_{i+1} \rangle)$$

onde o operador $\uplus$ denota a concatenação de segmentos de reta imersos na forma paramétrica.

- A imersão canônica, denotada por φ . A imersão canônica da origem será denotada por $\varphi_{\mathcal{O}}$.

Com as notações desta definição, constrói-se a seguir, recursivamente, uma função que desempenhará papel fundamental no relacionamento com a versão analítica.

Definição 2.4. *Seja $\epsilon \in \mathbb{R}^2$ dado e defina-se uma função parcial $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda^2 \times \Lambda^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda_0^2 \times \Lambda^2 \cup \Lambda^2 \times \Lambda_0^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$$

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda_1^2 \times \Lambda_1^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\begin{cases} \varphi(L^1) \cap \varphi_\epsilon(L^2) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0 \\ \varphi(L^1) \cap \varphi_\epsilon(L^2) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = s((\Delta(L^1) \times \Delta(L^2))^z) \end{cases}$$

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Lambda_{n_1}^2 \times \Lambda_{n_2}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, com $n_1, n_2 > 1$, por:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_\epsilon(\langle L_i^1, L_{i+1}^1 \rangle, \langle L_j^2, L_{j+1}^2 \rangle).$$

Nota-se que, como somente uma lista é deslocada de ϵ antes de ser checado se os segmentos das listas têm um ponto em comum, uma assimetria é introduzida na função: pode ser que $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) \neq \pm \mathcal{W}_\epsilon(L^2, L^1)$.

O próximo passo será mostrar que a função parcial definida anteriormente é uma função CW:

Teorema 2.4. *$\mathcal{W}_\epsilon$ distribui sob concatenações e muda de sinal sob reversões.*

A prova deste teorema é simples, pois a distribuição sob concatenações segue diretamente da terceira parte da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$. A mudança de sinal sob reversões segue da fato que o sinal do produto vetorial muda de sinal quando a orientação de um dos vetores é alterada.

A próxima tarefa é mostrar que $\mathcal{W}_\epsilon$ se anula sob triângulos. Isto pode ser feito checando-se todas as configurações de dois triângulos. Isto pode acarretar um número grande de testes. Para diminuir esta quantidade, utilizar-se-á o seguinte resultado intermediário:

Proposição 2.1. $\mathcal{W}_\epsilon$ é invariante sob translações e transformações lineares inteiras com determinante positivo.

Utilizando-se este resultado, o número de configurações geométricas essencialmente diferentes reduz-se drasticamente.

Ao invés de se provar diretamente a nulidade sob triângulos, será estabelecido um resultado mais geral, que fará, inclusive, a ligação entre as duas versões do número de rotação.

2.2.3 Relação entre as versões analítica e geométrica

O seguinte teorema mostra uma equivalência, sob certas restrições, entre as definições analítica e geométrica do número de rotação:

Teorema 2.5. *Sejam L^1 e L^2 duas listas. Se L^1 é fechada e $\epsilon \notin \varphi(L)$, $\forall L \in \Lambda_1^2$, então:*

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_0^2)} \\ \mathcal{W}_\epsilon(L^2, L^1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\epsilon(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi(L_{n_2}^2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\epsilon(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi(L_0^2)}\end{aligned}$$

Antes de se provar o teorema, uma observação quanto à restrição sobre ϵ . Analisando-se a definição analítica do número de rotação, observa-se que a integral complexa não está definida quando P está no caminho γ . Esta é a razão pela qual o parâmetro de translação ϵ não poder estar na imersão de cada segmento da lista.

Prova. Nota-se, primeiramente, que as versões analíticas utilizadas estão bem definidas, pois os pontos $\varphi_\epsilon(L_i^2)$ nunca estarão no caminho $\varphi(L^1)$, pelo comentário anterior.

A prova utilizará indução no comprimento das listas L^1 e L^2 . Para isto, serão estabelecidos três casos-base:

- $(n_1 = 0 \text{ ou } n_1 = 1), n_2 \text{ qualquer:}$

Como L^1 é fechada, precisa-se ter $L_0^1 = L_1^1$. Pela definição de $\mathcal{W}_\epsilon$, segue diretamente que

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_0^2)} = 0.$$

- $n_1 = 2, n_2$ qualquer:

Como L^1 é fechada, ela precisa ser da forma $L \uplus \mathcal{R}(L)$. Assim:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0.$$

Como a definição analítica também distribui sob concatenações e muda de sinal sob reversões, tem-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_0^2)} = 0.$$

- $n_1 = 3, n_2 = 1$:

Este caso será provado enumerando-se todas as possibilidades. Aqui somente casos essencialmente diferentes serão checados, uma vez que $\mathcal{W}_\epsilon$ e $w(\gamma, P)$ são invariantes sobre translações e transformações inteiras com determinante positivo. Além disto, $\mathcal{W}_\epsilon$ e $w(\gamma, P)$ mudam de sinal sob reflexões: assim, toda transformação linear não-degenerada pode ser usada.

- Se $L_0^2 = L_1^2$, tem-se $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$ e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_0^2)} = 0,$$

ou seja, a primeira asserção do teorema vale neste caso.

- Assuma-se, agora, que $L_0^2 \neq L_1^2$. Nota-se que nenhum vértice do triângulo T gerado por $\varphi(L^1)$ pode estar na linha l através de $\varphi_\epsilon(L^2)$. Quando todos os vértices de T estão de um lado de l precisa-se ter $T \cap l = \emptyset$, implicando $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$. Por outro lado,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_{n_2}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_\epsilon(L_0^2)} = 0,$$

que pode ser visto cortando-se o plano complexo com um raio partindo de um extremo de l .

Assim, os casos remanescentes são formados quando um vértice de T está de um lado de l , e os outros dois vértices estão do outro lado. Isto significa que exatamente dois lados de T cruzam l . Novamente, pelas restrições sobre ϵ , estas intersecções não podem coincidir com os extremos de $\varphi_\epsilon(L^2)$.

Quando aplicada uma translação e uma transformação linear não-degenerada, L_0^2 é mapeado na origem $\mathcal{O}$, L_1^2 é mapeado em $(1, 0)$ e os dois outros vértices de T estão sobre o eixo x . Um extremo de L^2 pode estar à esquerda, entre ou à direita dos pontos de intersecção. Assim, tem-se seis casos distintos a considerar (não contando a orientação de T):

Figura 2.5: Posições relativas de L^1 e L^2 , sem orientação.

Em cada um destes casos, para cada orientação de T , o valor resultante da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$ é igual à diferença das integrais complexas.

Isto conclui os casos-base.

- Suponha-se o teorema válido para $n_1 = m \geq 3$ e n_2 fixado. Seja L^1 uma lista de comprimento $m + 1$. Assim:

$$\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = \mathcal{W}_\epsilon(\langle L_0^1, \dots, L_{m+1}^1 \rangle \uplus \langle L_{m+1}^1, L_{m-1}^1, L_m^1, L_{m+1}^1 \rangle, L^2) = \mathcal{W}_\epsilon(L^3 \uplus L^4, L^2),$$

onde os comprimentos de L^3 e L^4 são m e 3 , respectivamente. Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(L^3 \uplus L^4, L^2) &= \mathcal{W}_\epsilon(L^3, L^2) + \mathcal{W}_\epsilon(L^4, L^2) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_0^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3} \frac{dz}{z - L_0^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^4} \frac{dz}{z - L_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3 \uplus L^4} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^3 \uplus L^4} \frac{dz}{z - L_0^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_{n_2}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_0^2}$$

Isto mostra que a primeira asserção do teorema é válida para $n_1 = m + 1$ e n_2 fixo.

Por outro lado, assumindo-se o teorema válido para n_1 fixo e $n_2 = m \geq 3$, tem-se para uma lista L^2 de comprimento $m + 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) &= \mathcal{W}_\epsilon(L^1, \langle L_i^2 \rangle_{i=0}^m \uplus \langle L_i^2 \rangle_{i=m}^{m+1}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_m^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_0^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_{m+1}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_{m+1}^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{dz}{z - L_0^2} \end{aligned}$$

Isto mostra que a primeira asserção do teorema é válida para n_1 fixo e $n_2 = m + 1$.

Uma prova similar pode ser feita para a segunda asserção do teorema. $\square$

Um corolário imediato deste teorema estabelece a nulidade de $\mathcal{W}_\epsilon$ quando aplicada a triângulos.

Corolário 2.2. *Para ϵ satisfazendo à condição do teorema anterior, $\mathcal{W}_\epsilon$ anula-se sob triângulos.*

Isto pode ser provado observando-se que o teorema implica que $\mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) = 0$ quando L^1 e L^2 são fechadas. Lembrando que triângulos são listas fechadas de comprimento 3, o corolário segue imediatamente.

Uma questão importante sobre o teorema refere-se à existência do parâmetro de translação ϵ . O resultado seguinte contempla sua existência:

Teorema 2.6. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Se $\epsilon = (q, r)$ ou $\epsilon = (r, q)$, então $\epsilon \notin \varphi(L)$, $\forall L \in \Lambda_1^2$.*

2.2.4 A translação ϵ

Técnicas de translação(ou perturbação) de pontos são largamente utilizadas em algoritmos de computação gráfica e geometria computacional([Ede87], [Sei98]). Problemas fundamentais, como intersecção, freqüentemente utilizam-se destas técnicas para tratamento de casos especiais. As técnicas mais conhecidas, geralmente, utilizam perturbações pequenas ou aleatórias. No problema específico das listas, a Figura 2.6 mostra porque a translação ϵ é introduzida e seus efeitos:

Figura 2.6: Perturbações ϵ em pontos.

Na figura anterior, em (a) o ponto P não tem número de rotação definido, pois está sobre um dos segmentos da lista: isto pode ser contornado transladando P de ϵ , antes de se calcular efetivamente o número de rotação. Caso esta translação não seja efetuada com cuidado, podem aparecer problemas como os mostrados em (b) e (c). No caso (b), o diagrama mostra que a introdução da translação ϵ poderia também mover pontos do interior para as bordas, recaindo no caso da esquerda. Já no caso (c), a translação foi grande demais, chegando-se a alterar o número de rotação do ponto P .

O principal problema encontrado nestas técnicas é controlar, de maneira efetiva, o tamanho da translação ϵ , fato que é amplamente discutido em Seidel([Sei98]) para tratamento de casos degenerados. Conforme mostra a figura, translações pequenas podem não ser satisfatórias, ou seja, dado $\epsilon \neq \mathcal{O}$, existe uma lista $L \in \Lambda_1^2$ tal que $\varphi(L) \cap \varphi(\langle \mathcal{O}, \epsilon \rangle) \neq \emptyset$

$\{\mathcal{O}\}$. Em outras palavras, a translação ϵ pode mover os pontos para fora de alguma borda, alterando seus números de rotação.

Para se evitar tal situação, será fixado um grau de liberdade para ϵ . Será deixada sua direção indeterminada, porém seu tamanho será tomado infinitesimal. Isto significa que, para todo segmento de linha com um extremo na origem e outro num ponto de coordenadas inteiras, pode ser determinado (usando somente a direção) em que semi-plano ϵ está contido e, para todo segmento não passando pela origem, ϵ sempre estará do mesmo lado da origem.

Para se provar tal asserção, será utilizada a seguinte definição:

Definição 2.5.

$$\mathcal{L}_n^2 = \{L : |\Delta(L)|_V \leq n\}.$$

Claramente $\mathcal{L}_n^2 \subset \mathcal{L}_{n+1}^2$ e $\Lambda^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n^2$. A seguinte proposição afirma que, para toda lista L , existe uma translação ϵ que não mapeia P para além de L .

Proposição 2.2. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $\lambda > 0$ tal que, $\forall L \in \mathcal{L}_n^2, P \in \mathbb{Z}^2, 0 < \mu(q, r) \leq \lambda$, tomando-se $\epsilon = \mu(q, r)$, vale $\varphi(\langle P, P + \epsilon \rangle) \cap \varphi(L) \subset \{P\}$.*

Isto significa afirmar que, para um λ suficientemente pequeno, substituindo-se ϵ por $\mu(q, r)$, com $0 < \mu(q, r) \leq \lambda$, $\mathcal{W}_\epsilon$ não é afetado em $\mathcal{L}_n^2 \times \mathcal{L}_n^2$. Além disto, pode-se provar que esta invariância de $\mathcal{W}_\epsilon$ em $\mathcal{L}_n^2 \times \mathcal{L}_n^2$ não depende do tamanho de ϵ , mas somente de sua direção. Isto é contemplado pela seguinte proposição:

Proposição 2.3. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $\lambda > 0$ tal que, $\forall L^1, L^2 \in \mathcal{L}_n^2, P \in \mathbb{Z}^2, 0 < \mu_1(q, r) \leq \mu_2(q, r) \leq \lambda$, vale que*

$$\mathcal{W}_{\mu_1(q, r)}(L^1, L^2) = \mathcal{W}_{\mu_2(q, r)}(L^1, L^2).$$

Um detalhe extremamente importante neste processo de minimização dos efeitos da translação ϵ é manter a propriedade CW de $\mathcal{W}_\epsilon$. Isto é analisado pelo próximo resultado:

Teorema 2.7. *O limite $\lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(L^1, L^2)$ existe para toda L^1 e L^2 . Além disto, a função limite:*

$$\mathcal{W}_\rho(L^1, L^2) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(L^1, L^2)$$

é uma função CW .

Para uma conveniência de notação do tamanho e direção de ϵ , tomar-se-á a forma polar de ϵ por (r, ρ) . Na sequência, utilizar-se-á a notação $\mathcal{W}_\rho$ para indicar $\mathcal{W}_{(r, \rho)}$ e será tomada a versão analítica correspondente por:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}.$$

Se um ponto P não pertence a um segmento poligonal, o tamanho infinitesimal de r garante que P nunca será movido para ou além deste segmento, após a translação. Porém, se P pertence a algum segmento poligonal, a irracionalidade da tangente ρ permite garantir que P nunca permanece neste segmento após a translação.

2.3 Teorema Discreto da Curva de Jordan

O Teorema da Curva de Jordan é um resultado importante em Topologia de baixa dimensão e estabelece o seguinte:

Teorema 2.8. *Seja γ uma curva homotópica a S^1 , i.e. sem auto-intersecções, imersa em $\mathbb{R}^2$. Então o complemento de γ , com respeito a $\mathbb{R}^2$, tem exatamente duas componentes, cada qual tendo γ como borda. Uma destas componentes (o interior de γ) é um conjunto limitado, e a outra, o exterior de γ , um conjunto ilimitado.*

Apesar do resultado parecer bastante intuitivo, sua prova requer argumentos sofisticados de topologia algébrica, como homotopia e homologia. Uma prova bastante acessível pode ser encontrada em Massey [Mas91].

No ambiente discreto, existem diversas versões do teorema anterior. Utilizando a função CW $\mathcal{W}_\rho$, Pol e Corthout [CP92] estabeleceram uma versão discreta do teorema, mostrada abaixo. Tal versão contempla, inclusive, curvas discretas com auto-intersecção.

Teorema 2.9. *Seja ρ um ângulo com tangente irracional. Dada uma lista fechada L^1 , a função CW $\mathcal{W}_\rho$ divide o plano $\mathbb{Z}^2$ em um número finito de regiões com pontos P de igual número de rotação:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}.$$

Precisamente uma destas regiões é infinita, contendo pontos com número de rotação igual a 0. Além disto, quando para uma lista L^2 de comprimento n_2 valer:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_0^2)} \neq \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_{n_2}^2)},$$

então necessariamente precisa-se ter:

$$\varphi(L^1) \cap \varphi(L^2) \neq \emptyset.$$

Prova. O Corolário 2.1 mostra como construir a partição dada pela função $\mathcal{W}$ e a lista L^1 . O Teorema 2.5 mostra que as regiões contêm pontos com números de rotação iguais. Para mostrar que precisamente uma das regiões é infinita, basta notar que para todo ponto P com $|P| > |L^1|$ tem-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)} = 0.$$

Logo, segue-se que somente um número finito de pontos tem número de rotação diferente de zero.

Para provar a última asserção do teorema, observa-se que, por definição de $\mathcal{W}_\epsilon$, tem-se para todo ϵ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_0^2)} &\neq \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(L_{n_2}^2)} \Rightarrow \\ \mathcal{W}_\epsilon(L^1, L^2) &\neq 0 \Rightarrow \\ \varphi(L^1) \cap \varphi_\epsilon(L^2) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como os polígonos gerados por φ_ϵ são conjuntos fechados para todo ϵ , no limite $r \downarrow 0$ a intersecção não é vazia também. $\square$

Este teorema afirma que, sob certas condições, as imersões poligonais de duas listas precisam ter um ponto em comum. O teorema a seguir afirma que, sob certas condições de conectividade, elas têm um ponto em comum.

Teorema 2.10. *Seja $(m_1, m_2) \in \{(4, 4), (4, 6), (4, 8), (6, 4), (6, 6), (8, 4)\}$, L^1 e L^2 listas m_1 -conexa e m_2 -conexa, respectivamente, não necessariamente fechadas. Se $\mathcal{W}_\rho(L^1, L^2) \neq 0$, então $\{L_i^1\} \cap \{L_j^2\} \neq \emptyset$. Este resultado não é válido para $(m_1, m_2) \in \{(6, 8), (8, 6), (8, 8)\}$.*

Estes dois teoremas apresentam algumas propriedades importantes de limitação e intersecção, mas não explicitam, ainda, um procedimento efetivo para cálculo do número de rotação. A próxima seção apresenta uma forma operacional para computar números de rotação, baseada na definição geométrica e realizada através de uma função especial de rasterização.

2.4 Funções de rasterização

No contexto da operação de preenchimento, considera-se o processo de rasterização do interior(e do exterior) de uma lista L consistindo de dois estágios:

- Construção de uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^2$, atribuindo a cada região de uma classe de equivalência um único número (por exemplo, o número de rotação com relação a L).
- Atribuição de um valor binário aos pontos da imagem, tal que todos os pontos em uma classe de equivalência tenham um mesmo valor, geralmente não único.

O primeiro estágio requer a especificação de uma função de partição, a ser calculada para cada ponto de uma região de interesse. A funcionalidade requerida pelo segundo estágio pode ser provida por uma função muito simples².

As funções que fazem o particionamento da região de interesse em classes de equivalência são conhecidas como *funções de rasterização*:

Definição 2.6. Uma função de rasterização $Q(L, P)$ é uma função $Q : \Lambda_c^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, onde Λ_c^2 denota o conjunto das listas fechadas.

Especificando-se uma função de rasterização $Q(L, P)$, obtém-se a numeração de cada classe de equivalência. Estas classes são, no máximo, enumeráveis. Dada uma lista fechada L e um ponto P na imagem, calcula-se $Q(L, P)$ para se obter a qual classe de equivalência P pertence.

2.4.1 Rasterização via funções CW

A função CW $\mathcal{W}_\rho$ pode ser usada para construir uma função de rasterização. Para listas fechadas, o valor do número de rotação relacionado

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}$$

será utilizado como a função de enumeração de classes de equivalência.

²Por exemplo, classes de equivalência no interior da curva recebem valor 0, e as do exterior, valor 1.

Definição 2.7. *Defina-se a função de rasterização $\mathcal{F}_\rho : \Lambda^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

$$\mathcal{F}_\rho(L, P) = \lim_{Q \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_\rho(L, \langle Q, P \rangle)$$

Nota-se que o domínio de $\mathcal{F}$ é maior que o requerido pela definição de função de rasterização. Este levantamento de domínio é utilizado para gerar resultados fundamentais sobre a função. Um destes resultados é mostrado a seguir:

Proposição 2.4. *Se L é uma lista fechada, então:*

$$\mathcal{F}_\rho(L, P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L)} \frac{dz}{z - \varphi_\rho(P)}.$$

Algumas propriedades da função de rasterização acima são condensadas na próxima proposição:

Proposição 2.5. • $\mathcal{F}_\rho$ anula-se sobre triângulos:

Se L é um triângulo, então $\mathcal{F}_\rho(L, P) = 0$.

• $\mathcal{F}_\rho$ distribui sobre concatenações gerais

Se L^1 e L^2 são listas concatenáveis, não necessariamente fechadas, então $\mathcal{F}_\rho(L^1 \uplus L^2, P) = \mathcal{F}_\rho(L^1, P) + \mathcal{F}_\rho(L^2, P)$.

• $\mathcal{F}_\rho$ é invariante sobre mudanças de escala

$\forall_{a \in \mathbb{Z} - \{0\}} : \mathcal{F}_\rho(aL, aP) = \mathcal{F}_\rho(L, P)$.

Este conjunto de propriedades forma uma base fundamental para um algoritmo de rasterização de objetos discretos 2-dimensionais, descritos na próxima seção.

2.5 Rasterização de objetos discretos 2-dimensionais

Em qualquer implementação da função de rasterização $\mathcal{F}_\rho$ definida anteriormente, um limite para ρ precisa ser escolhido. Normalmente, a direção usual de rasterização é horizontal como, por exemplo, em algoritmos baseados em *scan-lines* com *Z-Buffer*. Seguindo esta tradição, Pol e Corthout construíram um teste com semi-retas discretas que, no limite, são horizontais.

2.5.1 Teste com semi-retas discretas horizontais

O teste construído utiliza o limite $\rho \uparrow 0$:

Definição 2.8. *Defina-se a função de rasterização $\mathcal{F}(L, P)$ por $\mathcal{F}(L, P) = \lim_{\rho \uparrow 0} \mathcal{F}_\rho(L, P)$.*

Como $\mathcal{F}$ distribui sob concatenações, o primeiro passo da implementação de $\mathcal{F}$ será uma soma da contribuição de cada 1-célula $L = \langle L_0, L_1 \rangle$ da lista para o número de rotação. O cálculo da contribuição será realizado com base na definição de região semi-aberta limitante:

Definição 2.9. *Seja $L = \langle L_0, L_1 \rangle$ uma 1-célula de uma lista. A região semi-aberta limitante $\mathcal{R}$ de L é o conjunto discreto:*

$$\mathcal{R} = \{P \mid \min\{L_i^x\} \leq P^x < \max\{L_i^x\} \text{ e } \min\{L_i^y\} < P^y \leq \max\{L_i^y\}\}.$$

Como o tamanho de cada 1-célula é unitário, uma região semi-aberta limitante $\mathcal{R}$ é ou vazia (1-células verticais e horizontais) ou formada de apenas um ponto (1-células nas direções $(1, 1)$ e $(-1, 1)$). A figura abaixo exhibe as regiões semi-abertas limitantes não vazias, evidenciadas através de um duplo círculo:

Figura 2.7: Regiões semi-abertas limitantes não-vazias.

O cálculo da contribuição será efetuado através de três casos. Os dois primeiros casos irão tratar os pontos fora da região semi-aberta limitante $\mathcal{R}$ e , o último caso, do ponto (caso exista) dentro de $\mathcal{R}$.

O primeiro caso trata de pontos fora de $\mathcal{R}$ cuja contribuição para o número de rotação é nula:

Proposição 2.6. *Se $P^y > \max\{L_i^y\}$ ou $P^y \leq \min\{L_i^y\}$ ou $P^x < \min\{L_i^x\}$, então $\mathcal{F}(L, P) = 0$.*

Prova. Para todo par (r, ρ) , com r e ρ pequenos, e um $x < 0$ com $|x|$ grande o suficiente, o segmento poligonal $\varphi(L)$ e $\varphi_{(r,\rho)}(\langle P, (x, P^y) \rangle)$ não se intersectam. $\square$

A figura abaixo exhibe alguns pontos com as características da proposição acima para cada um dos tipos de 1-célula possíveis:

Figura 2.8: Pontos externos à região $\mathcal{R}$ para os quais $\mathcal{F}(L, P) = 0$.

Observa-se, em particular, que 1-células horizontais não contribuem para o número de rotação de nenhum ponto.

O próximo caso trata do restante dos pontos externos à região $\mathcal{R}$. Estes pontos contribuem efetivamente para o número de rotação e esta contribuição é dada pela orientação

da 1-célula:

Proposição 2.7. *Se $P^y \leq \max\{L_i^y\}$ e $P^y > \min\{L_i^y\}$ e $P^x \geq \max\{L_i^x\}$, então $\mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_1^y)$.*

Prova. Para todo par (r, ρ) , com r e ρ pequenos, e um $x < 0$ com $|x|$ grande o suficiente, o segmento poligonal $\varphi(L)$ e $\varphi_{(r, \rho)}(\langle(x, P^y), P\rangle)$ se intersectam.

$$\begin{aligned} \text{Além disto, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_{(r, \rho)}(L, \langle(x, P^y), P\rangle) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} s(\Delta(L) \times (P^x - x, 0)) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} s(-(L_1^y - L_0^y)(P^x - x)) &= s(L_0^y - L_1^y). \end{aligned} \quad \square$$

Novamente, a figura abaixo exhibe alguns pontos com as características da proposição acima para cada um dos tipos de 1-célula possíveis:

Figura 2.9: Pontos externos à região $\mathcal{R}$ para os quais o valor de $\mathcal{F}(L, P)$ é dado pela orientação da 1-célula.

O último caso trata dos pontos dentro da região $\mathcal{R}$. Na realidade, existe somente um

ponto dentro da região. O enunciado do resultado utilizará alguns elementos da figura abaixo:

Figura 2.10: Elementos para cálculo dentro da região semi-aberta limitante $\mathcal{R}$.

Proposição 2.8. *Sejam $\min\{L_i^y\} < P^y \leq \max\{L_i^y\}$, $\min\{L_i^x\} \leq P^x < \max\{L_i^x\}$ e $\mathcal{L}$ a linha passando através da 1-célula L .*

1. *Se $\mathcal{L}$ é paralela ao eixo x , então $\mathcal{F}(L, P) = 0$.*
2. *Se $\mathcal{L}$ não é paralela ao eixo x , então $\Delta(L)^y \neq 0$. Seja v o vetor perpendicular a $\mathcal{L}$, tal que $v^x > 0$ e $v = \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}(\Delta(L)^y, -\Delta(L)^x)$. Assim, $\mathcal{L}$ pode ser descrita como $(x, y) \cdot v = c$, com $c = L_0 \cdot v$, e valem as seguintes asserções :*

$$P \cdot v \geq c \Rightarrow \mathcal{F}(L, P) = s(L_0^y - L_1^y)$$

$$P \cdot v < c \Rightarrow \mathcal{F}(L, P) = 0.$$

Prova. Quando $\mathcal{L}$ é paralela ao eixo x , segue diretamente da definição que $\mathcal{F}(L, P) = 0$. Caso contrário, divide-se o plano em três regiões: pontos à esquerda, sobre e à direita de $\mathcal{L}$. Como se está interessado em calcular $\lim_{\rho \uparrow 0} \mathcal{F}_\rho$, pontos P que estão à esquerda de $\mathcal{L}$ não contribuem para função de rasterização, mas para pontos P sobre ou à direita de $\mathcal{L}$ os segmentos $\varphi(L)$ e $\varphi_\rho(\langle (x, P^y), P \rangle)$ se intersectam. Nestes casos, um argumento idêntico ao usado na proposição anterior estabelece a segunda asserção. $\square$

Estes casos cobrem todas as possibilidades de posicionamento do ponto P em relação à 1-célula $L = \langle L_0, L_1 \rangle$ e já definem como calcular a contribuição de L para o número de rotação. A função CONTRIBUICAO, mostrada na próxima página, calcula a contribuição de L tomando-se $P = (0, 0)$. Isto simplifica a implementação e, através de um processo

de translação, pontos genéricos podem ser reduzidos a essa configuração:

```

CONTRIBUICAO(Celula  $\langle L_0, L_1 \rangle$ )
1   $minx \leftarrow minimo(L_0^x, L_1^x)$ 
2   $maxx \leftarrow maximo(L_0^x, L_1^x)$ 
3   $miny \leftarrow minimo(L_0^y, L_1^y)$ 
4   $maxy \leftarrow maximo(L_0^y, L_1^y)$ 
5  if  $minx > 0$  or  $miny \leq 0$  or  $maxy < 0$ 
6    then return 0  $\triangleright$  Proposição 2.5
7   $s \leftarrow sinal(L_0^y - L_1^y)$ 
8  if  $maxx \leq 0$ 
9    then return  $s$   $\triangleright$  Proposição 2.6
10  $v \leftarrow (L_1^y - L_0^y, -(L_1^x - L_0^x))$ 
11 if  $v^x = 0$ 
12   then return 0  $\triangleright$  Proposição 2.7 - caso (a)
13 if  $v^x < 0$ 
14   then  $v \leftarrow -v$   $\triangleright$  Garante que  $v^x > 0$ 
15 if PRODUTOESCALAR( $L_0, v$ )  $> 0$ 
16   then return 0  $\triangleright$  Proposição 2.7 - caso (b) - subcaso  $P \cdot v < c$ 
17 return  $s$   $\triangleright$  Proposição 2.7 - caso (b) - subcaso  $P \cdot v \geq c$ 

```

Tendo-se a contribuição para cada 1-célula de uma lista L , utiliza-se a propriedade de distribuição sobre concatenação para se calcular $\mathcal{F}(L, P)$:

```

NUMEROROTACAO2D(Lista  $L$ , Ponto  $P$ )
1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\langle L_i, L_{i+1} \rangle$  in  $L$ 
3    do  $w \leftarrow w + CONTRIBUICAO(\langle L_i, L_{i+1} \rangle - P)$ 
4  return  $w$ 

```

A translação do passo (3) da função NUMEROROTACAO2D é denominada *normalização* do ponto P e é baseada na invariância de $\mathcal{F}(L, P)$ a translações inteiras. Através desta translação, o ponto testado reduz-se à origem e a função CONTRIBUICAO, definida anteriormente, pode ser utilizada.

2.5.2 Complexidade da pertinência bidimensional

A função $\text{NUMEROROTACAO2D}(L, P)$, possui complexidade polinomial no tamanho da entrada. Se a lista L tem tamanho igual a n , então tem-se $(n - 1)$ chamadas à função CONTRIBUICAO . Como a função CONTRIBUICAO tem complexidade $O(1)$, a complexidade total da função NUMEROROTACAO2D é $O(n)$.

Embora a complexidade do teste seja assintoticamente ótima em relação ao tamanho da lista L , existem vários casos em que o teste faz chamadas desnecessárias à função CONTRIBUICAO . A figura abaixo ilustra um caso típico onde seria possível considerar algumas fontes de redução do número de chamadas a tal função:

Figura 2.11: Uma instância do teste de pertinência.

Para o teste de pertinência do ponto P seriam realizadas 24 chamadas à função contribuição. Porém, apenas uma 1-célula contida hiperplano $\mathcal{H}_1$ está contribuindo para o número de rotação do ponto. Todas as 1-células horizontais (20, no total), não contribuem para o número de rotação do ponto P . Aliás, para qualquer ponto que não esteja sobre a curva discreta, tais células também não contribuem pois elas são paralelas à direção do teste. Além disto, todas as 1-células contidas no hiperplano $\mathcal{H}_2$ também não contribuem para o número de rotação de P , uma vez que P está à esquerda de $\mathcal{H}_2$. Esta instância bastante simples mostra que algumas otimizações podem ser incluídas para reduzir o número de chamadas à função CONTRIBUICAO . Tais otimizações serão abordadas na próxima seção.

2.5.3 Otimizações da pertinência bidimensional

Mantendo-se a essência do teste de pertinência de Pol e Corthout, serão propostas duas otimizações no processo. Uma destas otimizações não depende do ponto P que está sendo

testado e, a outra, depende explicitamente de P .

A primeira observação para justificar as construções a seguir refere-se ao processamento sequencial das 1-células do bordo. Como o cálculo da contribuição de uma célula não depende do resultado obtido em outra célula, não há necessidade de processá-las de forma sequencial. Assim, para suportar as otimizações que serão propostas, será fundamental organizar as 1-células em agrupamentos com suporte em hiperplanos discretos bidimensionais.

Definição 2.10. Dados $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, 3$, um hiperplano discreto bidimensional $\mathcal{H}$ é o conjunto discreto:

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{Z}^2 : a_1 P^{x_1} + a_2 P^{x_2} + a_3 = 0\}.$$

Uma 1-célula discreta τ estará contida num plano discreto bidimensional $\mathcal{H}$ se e somente se as 0-células de τ forem elementos de $\mathcal{H}$. A figura abaixo mostra um conjunto de 1-células discretas que formam o bordo de um objeto discreto bidimensional e os respectivos planos discretos $\mathcal{H}_i$:

Figura 2.12: Planos discretos e suas células.

Não é difícil observar que uma 1-célula discreta está contida em somente um plano discreto bidimensional. A partir destes agrupamentos, serão propostas duas otimizações:

1. determinação de direção ótima para rasterização;
2. determinação dos hiperplanos que possam realizar contribuição ao número de rotação.

A otimização (1) será aplicada numa fase de pré-processamento do bordo do objeto discreto e não depende do ponto que está sendo testado. Em linhas gerais, ela remove os hiperplanos paralelos à direção de rasterização. Por outro lado, a otimização (2) já depende do ponto que está sendo testado e irá determinar quais hiperplanos contém potenciais células que possam contribuir para o número de rotação do ponto.

2.5.3.1 Direção ótima para rasterização

Uma direção ótima para rasterização é uma direção-limite ρ^* que permite maximizar a quantidade de 1-células paralelas às semi-retas definidas por ρ^* . A discussão sobre a determinação de uma direção ótima para rasterização será feita diretamente sobre a estrutura 8-conexa do plano discreto bidimensional, pois ela permite receber curvas discretas de qualquer conectividade.

Para a estrutura 8-conexa, existem quatro direções-limite para rasterização, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 2.13: Direções-limite no plano discreto bidimensional 8-conexo.

A determinação da direção ótima de rasterização pode ser realizada por uma contagem simples das 1-células de cada uma das direções-limite. Por exemplo, considere-se o bordo de um objeto discreto mostrado abaixo:

Figura 2.14: Bordo de um objeto discreto bidimensional para determinação da direção ótima de rasterização.

Neste exemplo, existem: 12 1-células na direção-limite (I), 17 na direção (II), 10 na direção (III) e 9 na direção (IV). Como a direção (II) apresentou o maior número de 1-células, tem-se a direção ótima $\rho^* = \frac{\pi}{4}$. Assim, tomando-se o limite $\lim_{\rho \uparrow \rho^*} \mathcal{F}_\rho$, a contribuição de tais células é nula para o número de rotação de qualquer ponto não contido no bordo, pois elas são paralelas à direção ótima de rasterização. A prova deste fato é bastante simples: basta rotacionar o objeto de $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido horário e recai-se no caso de uma rasterização com $\rho \uparrow 0$.

Determinada uma direção ótima de rasterização, todos os hiperplanos paralelos a tal direção podem ser removidos da representação do bordo, pois suas células não contribuem para o número de rotação. É importante ressaltar que a remoção destes hiperplanos pode ser realizada numa etapa de pré-processamento do bordo e garante uma redução de, no mínimo, 25% das chamadas à função CONTRIBUICAO.

2.5.3.2 Pertinência com uma direção ótima

A partir de uma direção ótima ρ^* e da eliminação dos hiperplanos paralelos a este direção, o trabalho do cálculo da contribuição fica restrito às 1-células dos hiperplanos restantes. A Figura 2.15 mostra uma instância do teste de pertinência contra o bordo da Figura 2.14, onde já foram removidos os hiperplanos não-paralelos à direção ótima:

Figura 2.15: Ponto P a ser testado contra as 1-células contidas nos hiperplanos não-paralelos à direção ótima $\rho^* = \frac{\pi}{4}$.

O cálculo da contribuição de cada célula pode ser feito reduzindo-se a instância do teste com direção ótima ρ^* a uma instância com direção horizontal. Cada direção terá uma redução específica e será obtida com base em matrizes associadas a rotações.

Existem três casos de redução:

- **Direção ótima vertical** ($\rho^* = \frac{\pi}{2}$): trata-se do caso mais simples de redução. Basta uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido horário, ou seja, todas as células e hiperplanos serão transformados segundo a matriz:

$$M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tal transformação não altera o número de rotação, pois ele é invariante sob transformações lineares inteiras com determinante positivo.

- Direção ótima $\rho^* = \frac{\pi}{4}$: neste caso, uma simples rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido horário não é suficiente, pois a matriz de rotação associada é dada por

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

e, sua aplicação, quase sempre produz 0-células com coordenadas não-inteiras (exceção feita à origem). Esta afirmação pode ser comprovada pela rotação da Figura 2.15, cujo resultado é mostrado abaixo:

Figura 2.16: Células com coordenadas não-inteiras.

Porém, a matriz M pode ser reescrita como:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Isto mostra que a rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido horário é uma composição de uma transformação linear inteira com determinante positivo e uma escala. Como

o número de rotação é invariante sob transformações lineares inteiras com determinante positivo e escalas, pode-se tomar a matriz de transformação $M_{\frac{\pi}{4}}$ necessária à redução como:

$$M_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

É importante observar que esta transformação pode levar 1-células de tamanho 1 em 1-células de tamanho 2. Um caso típico é o das 1-células cujos hiperplanos suportes possuam coeficientes angulares $+1$ ou -1 , conforme ilustrado na figura a seguir:

Figura 2.17: Efeito na transformação de uma célula diagonal.

Isto não restringe a aplicação do teste desenvolvido na Seção 2.5.1, pois o teste nas 1-células de tamanho 2 é equivalente a testes em duas 1-células de tamanho 1, pela propriedade de distribuição sob concatenações.

- **Direção ótima** $\rho^* = \frac{3\pi}{4}$: basta utilizar uma composição das transformações efetuadas nos dois casos anteriores, ou seja:

$$M_{\frac{3\pi}{4}} = M_{\frac{\pi}{2}} M_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Claramente $M_{\frac{3\pi}{4}}$ é uma transformação linear inteira com determinante positivo, pois é uma composição de duas transformações com essa característica. Assim, o número de rotação fica invariante sob tal transformação.

A mesma transformação que for aplicada aos hiperplanos também deverá ser aplicada ao ponto P a ser testado. Além disto, os coeficientes dos hiperplanos deverão ser alterados para comportar a normalização de cada ponto P . Seja (a_1, a_2, a_3) o conjunto dos coeficientes de um hiperplano $\mathcal{H}$. O processo de normalização de um ponto P , ou seja, uma translação de $(-P^{x_1}, -P^{x_2})$, produz um hiperplano com coeficientes (a_1, a_2, a'_3) , onde $a'_3 = a_1 P^{x_1} + a_2 P^{y_1} + a_3$. Após realizadas todas estas transformações, como a semi-reta de teste é orientada da direita para a esquerda, somente os hiperplanos que estão à esquerda da ou sobre a origem contêm células que podem contribuir para o número de rotação. Tomando-se novamente a Figura 2.15 como exemplo, agora com a redução ao teste horizontal, somente as 1-células dos hiperplanos marcados na figura abaixo deveriam ser testadas:

Figura 2.18: Hiperplanos para cálculo da contribuição.

Finalmente, calcula-se a contribuição de cada célula de cada hiperplano que não foi rejeitado pelo teste descrito acima.

2.5.3.3 Algoritmo da direção ótima

O algoritmo da direção ótima implementa as otimizações descritas anteriormente e é formado de duas etapas:

Pré-processamento: nesta etapa é determinada a direção ótima para o teste de pertinência, a remoção dos hiperplanos paralelos a tal direção e aplicação da matriz de transformação M_p aos hiperplanos e suas respectivas células para redução ao caso de teste horizontal. É importante que esta fase não depende do ponto a ser testado e é realizado uma única vez.

Cálculo do número de rotação: a partir da normalização do ponto a ser testado, são efetuadas invocações da função CONTRIBUICAO para as 1-células dos hiperplanos cuja translação pela normalização os coloque à esquerda da ou sobre a origem. Trata-se de uma fase que depende explicitamente das coordenadas do ponto a ser testado.

A etapa de pré-processamento é realizada pela função mostrada abaixo:

```

PREPROCESSAMENTO(Lista L)
1  dir[0...3] ← {0, 0, 0, 0}
2  dirOtima ← 0
3  for each H in L  ▷ Determina quantidade de células em cada direção
4    do for each <L0, L1> in H
5      do dir[DIRECAO(<L0, L1>)] ++
6  dirOtima ← min{i : dir[i] ≥ dir[j], i, j ∈ [0, 3], i ≠ j}
7  REMOCAOHIPERPLANOS(L, dirOtima)
8  M ← MATRIZTRANSFORMACAO(dirOtima)
9  TRANSFORMACAOHIPERPLANOS(L, M)
10 return M

```

Representando-se cada hiperplano como um vetor de 1-células e, a lista L , também com um vetor de hiperplanos e, considerando-se $tamanho(L) = n$, os passos de (1) a (6) podem ser realizados em tempo $O(n)$. A função REMOCAOHIPERPLANOS remove todos os hiperplanos paralelos à direção ótima e também pode ser realizada em $O(n)$. A função MATRIZTRANSFORMACAO(DIROTIMA) calcula a matriz de transformação associada à

direção ótima de rasterização e tem complexidade $O(1)$. Finalmente, a função `TRANSFORMACAOHIPERPLANOS` aplica a matriz de transformação M a todas as células de uma lista L , e seus respectivos hiperplanos, podendo ser realizada em tempo $O(n)$ com a estrutura de vetores citada anteriormente. Não é difícil observar, assim, que a complexidade total da função `PREPROCESSAMENTO` é $O(n)$, o que equivale a dizer que, assintoticamente, a etapa de pré-processamento tem o mesmo “custo” do cálculo do número de rotação de apenas um ponto.

Após a etapa de pré-processamento, todos os hiperplanos e células vinculados a uma lista L já foram transformados pela matriz M determinada pela direção ótima de rasterização e o cálculo do número de rotação pode ser efetuado através da função exibida a seguir:

```

NUMEROROTACAO2D(Lista L, Ponto P, Matriz M)
1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\mathcal{H}$  in  $L$ 
3      do  $\mathcal{H}^t \leftarrow \mathcal{H}_{-MP}$   $\triangleright$  Obtém a translação do hiperplano  $\mathcal{H}$  pelo vetor  $-MP$ 
4          if LEFT( $\mathcal{H}^t$ )
5              then for each  $\langle L_i, L_j \rangle$  in  $\mathcal{H}$ 
6                  do  $contrib \leftarrow \text{CONTRIBUICAO}(\langle L_i, L_j \rangle - MP)$ 
7                      if  $contrib \neq 0$ 
8                          then  $w \leftarrow w + contrib$ 
9                          break
10 return  $w$ 

```

A função `LEFT` verifica se um hiperplano está à esquerda da origem. Os passos que definitivamente determinam a complexidade da função `NUMEROROTACAO2D` são os passos (2) e (6), pois todos os outros têm complexidade $O(1)$. No passo (2), testa-se, no máximo, 75% dos planos da lista original, pois a função `PREPROCESSAMENTO` já eliminou os hiperplanos paralelos à direção ótima. A quantidade dos hiperplanos que torna `LEFT` verdadeira depende explicitamente do ponto P a ser testado, pois ocorre uma dependência com a normalização do ponto, o que torna bastante difícil a obtenção de uma complexidade muito justa. Numa avaliação inicial bastante pessimista, a função ainda tem complexidade $O(n)$. Porém, como será mostrado nos resultados práticos, consegue-se uma redução bastante significativa nas invocações à função `CONTRIBUICAO`.

2.6 Implementação e Resultados do Teste de Pertinência Bidimensional

Esta seção descreve os resultados obtidos nas implementações do teste de pertinência de Pol e Corthout [CP92] e das otimizações propostas na seção anterior. Toda a implementação foi realizada utilizando-se a linguagem Java. Foram efetuados, inicialmente, vários testes em objetos discretos bidimensionais com várias particularidades, exibindo a amplitude das técnicas. Finalmente, para evidenciar o ganho obtido na otimização, foram gerados testes variando-se o tamanho dos objetos e a resolução do ambiente de testes.

2.6.1 Estruturas de Dados e Métodos

Os algoritmos de pertinência bidimensional estão encerrados em três classes: *Celula2D*, *Hiperplano2D* e *Complexo2D*.

A classe *Celula2D* abstrai o conceito de uma célula discreta 1-dimensional τ e é formada por quatro números inteiros, representando as coordenadas das duas 0-células discretas que formam a célula τ . A estrutura e os principais métodos da classe são mostrados no código abaixo:

```
public class Celula2D {
    int px0,py0,px1,py1;    // Célula [px0,px1]->[px1,py1]
    ...
    void transforma(int m[] []){...}
    int contribuicao(int x,int y) {...}
}
```

Não há necessidade de se armazenar a orientação de uma 1-célula, pois ela pode ser calculada rapidamente com a aplicação do operador de diferença às 0-células que formam a 1-célula. O método `void transforma(int m[] [])` aplica a transformação de redução ao caso de rasterização horizontal:

```
void transforma(int m[] []){
    int x0=px0*m[0][0]+py0*m[0][1]; int y0=px0*m[1][0]+py0*m[1][1];
    int x1=px1*m[0][0]+py1*m[0][1]; int y1=px1*m[1][0]+py1*m[1][1];
    px0=x0;
    py0=y0;
    px1=x1;
    py1=y1;
}
```

O método `int contribuicao(int x,int y)` recebe as coordenadas de um ponto $P \in \mathbb{Z}^2$, já transformadas pela redução ao caso de rasterização horizontal, realiza a transformação de normalização do ponto e calcula a contribuição da 1-célula para o número de rotação de P :

```
int contribuicao(int x,int y) {
    int x0=px0-x; int y0=py0-y;
    int x1=px1-x; int y1=py1-y;
    int minx=Math.min(x0,x1); int miny=Math.min(y0,y1);
    int maxx=Math.max(x0,x1); int maxy=Math.max(y0,y1);
    if (minx>0 || miny>=0 || maxy<0)
        return(0);
    int s=(y0-y1>0?1:(y0-y1<0?-1:0));
    if (maxx<=0) return(s);
    int normx=y0-y1; int normy=x1-x0;
    if (normx==0) return(0);
    if (normx<0){
        normx=-normx;
        normy=-normy;
    }
    if ((x0*normx+y0*normy)>0) return(0);
    return(s);
}
```

A classe `Hiperplano2D` é um agregado de 1-células, armazenadas num vetor dinâmico do tipo `Vector`. A estrutura principal da classe é mostrada abaixo:

```
public class Hiperplano2D {
    int a,b,c;          // Coeficientes do hiperplano
    Vector celulas;     // Células do hiperplano
    ...
    boolean esquerda(){...}
    int numeroCelulas(){...}
    void reducao(int m[][]){...}
    Hiperplano2D translacao(int x,int y){...}
    int contribuicao(int x,int y) {...}
}
```

O método `boolean esquerda()` verifica se o hiperplano está à esquerda de ou sobre a origem. Conforme mencionado na seção 2.5, este é um teste fundamental para reduzir o número de chamadas à função que calcula a contribuição de uma célula para o número de rotação. Se tal teste devolve `false`, não se invoca o método `contribuicao` das células do plano. O método `numeroCelulas()` determina o número de células armazenadas no hiperplano. A complexidade desta determinação é constante, pois a classe

Vector já mantém um atributo para armazenar o número de elementos inseridos. O método `reducao(int m[] [])` altera os coeficientes do plano e as coordenadas de todas as 1-células segundo a matriz de redução `m[] []`, conforme o trecho mostrado abaixo:

```
void reducao(int m[] []){
    ...
    for (int i = 0; i < celulas.size(); i++)
        ((Celula2D) celulas.elementAt(i)).transforma(m);
}
```

O método `translacao(int x,int y)` calcula o hiperplano resultante da translação pelo vetor (x,y) e sua implementação consiste basicamente na alteração do atributo `d` da classe `Hiperplano2D`. Já o método `contribuicao` calcula efetivamente a contribuição das células do hiperplano:

```
int contribuicao(int x,int y ) {
    for (int i = 0; i < celulas.size(); i++) {
        int contrib = ( (Celula2D) celulas.elementAt(i)).contribuicao(x,y);
        if (contrib != 0)
            return (contrib);
    }
    return (0);
}
```

Finalmente, tem-se a classe `Complexo2D`, formada essencialmente por um vetor de vetores³ de objetos do tipo `Hiperplano2D`, a direção ótima de rasterização das células dos hiperplanos do complexo e a matriz de redução:

```
public class Complexo2D {
    Vector hiperplanos;           // Grupos de hiperplanos que formam o complexo
    int dirOtima=0;               // Direção ótima de rasterização
    int m[] []={{1,0},{0,1}};    // Matriz de redução
    ...
    void insercaoCelula(int x0,int y0,int x1,int y1){...}
    void direcaoOtima(){...}
    void matrizTransformacao(){...}
    void remocaoHiperplanos(){...}
    void transformacaoHiperplanos(){...}
    int numeroRotacao(int x,int y){...}
}
```

³Cada posição do vetor mais externo representa uma direção possível para rasterização e aponta para um conjunto(vetor) de hiperplanos com tal direção.

O método `insercaoCelula(int x0,int y0,int x1,int y1)` é responsável por criar um objeto da classe `Celula2D` e inserí-lo num hiperplano adequado dentro do vetor de hiperplanos do complexo. O método `direcaoOtima()` determina a direção ótima da rasterização através de um algoritmo muito simples de determinação de máximo num vetor:

```
void direcaoOtima(){
    int q=0;
    Vector v= (Vector) hiperplanos.elementAt(0);
    for(int j=0;j<v.size();j++){
        q+=((Hiperplano2D) v.elementAt(j)).numeroCelulas();
    }
    for(int i=1;i<4;i++){
        int q1=0;
        Vector w= (Vector) hiperplanos.elementAt(i);
        for(int j=0;j<w.size();j++){
            q1+=((Hiperplano2D) w.elementAt(j)).numeroCelulas();
        }
        if (q1>q){
            dirOtima = i;
            q=q1;
        }
    }
}
```

O método `matrizTransformacao()` calcula a matriz de redução, utilizando como base a direção ótima:

```
void matrizTransformacao(){
    if (dirOtima==1){
        m[0][0]=1; m[0][1]=1;
        m[1][0]=-1; m[1][1]=1;
    }
    else if (dirOtima==2){
        m[0][0]=0; m[0][1]=1;
        m[1][0]=-1; m[1][1]=0;
    }
    else if (dirOtima==3){
        m[0][0]=-1; m[0][1]=1;
        m[1][0]=-1; m[1][1]=-1;
    }
}
```

Para a direção 0, o atributo associado à matriz de redução(`m`) já está iniciado com a matriz identidade.

Utilizando-se, também, a direção ótima de rasterização, a eliminação dos hiperplanos paralelos a tal direção é realizada de maneira bem simples:

```
void remocaoHiperplanos(){
    hiperplanos.removeElementAt(dirOptima);
}
```

Com os hiperplanos paralelos à direção ótima de rasterização removidos, procede-se à transformação dos hiperplanos restantes:

```
void transformacaoHiperplanos(){
    for(int i=0;i<3;i++){
        Vector v = (Vector) hiperplanos.elementAt(i);
        for (int j = 0; j < v.size(); j++)
            ((Hiperplano2D) v.elementAt(j)).reducao(m);
    }
}
```

O último e mais importante método da classe `Complexo2D` calcula efetivamente o número de rotação bidimensional de um ponto:

```
int numeroRotacao(int x,int y){
    int soma=0,
        xt=x*m[0][0]+y*m[0][1],
        yt=x*m[1][0]+y*m[1][1];
    for (int i = 0; i < hiperplanos.size(); i++) {
        Vector v = (Vector) hiperplanos.elementAt(i);
        for (int j = 0; j < v.size(); j++){
            Hiperplano2D hp=(Hiperplano2D) v.elementAt(j);
            hp=hp.translacao(xt,yt);
            if (hp.esquerda())
                soma += hp.contribuicao(xt,yt);
        }
    }
    return(soma);
}
```

O método acima é uma implementação direta da função `NUMEROROTACAO2D`, mostrada na seção 2.5.3, e consiste em somar as contribuições das células de todos os hiperplanos reduzidos que estejam à esquerda da origem.

2.6.2 Testes e resultados

Foram efetuados vários testes com a implementação anterior, onde foi medida a quantidade de chamadas à função de cálculo de contribuição de cada célula. Os primeiros testes apresentam o comportamento da implementação frente a polígonos convexos simples, mostrados a seguir e onde foram indicadas as direções ótimas para rasterização:

Figura 2.19: Complexos convexos simples.

Cada um dos objetos anteriores é formado por 20 células discretas de dimensão 1 e

possui a maioria destas células nas direções ótimas de rasterização. Inicialmente, foram efetuados testes para o ponto $P = (1, 0)$, interior aos objetos anteriores, e para o ponto $P = (10, 10)$, exterior a todos os objetos. Os resultados encontram-se condensados na tabela abaixo:

Caso	Algoritmo com otimização		Algoritmo sem otimização	
	Ponto (1, 0)	Ponto (10, 10)	Ponto (1, 0)	Ponto (10, 10)
(a)	2	6	20	20
(b)	3	6	20	20
(c)	3	4	20	20
(d)	3	3	20	20

Tabela 2.1: Número de invocações da função de contribuição para os pontos (1, 0) e (10, 10).

Fica evidente, para os complexos apresentados na Figura 2.19, uma grande redução no número de invocações à função que calcula a contribuição de cada célula. Isto já era esperado, pois a maioria das células estão nas direções ótimas de rasterização e são eliminadas na etapa de pré-processamento dos complexos. Para reforçar a redução do número de invocações à função de contribuição, foram contados o número total e o número médio de invocações para cada um dos pontos presentes na *bouding box* discreta mínima que contém os complexos, formada por 169 pontos (*grid* 13×13). Os resultados são apresentados na tabela a seguir:

Caso	Número total de invocações		Número médio de invocações	
	Com otimização	Sem Otimização	Com otimização	Sem otimização
(a)	468	3380	2.8	20
(b)	468	3380	2.8	20
(c)	423	3380	2.5	20
(d)	423	3380	2.5	20

Tabela 2.2: Números totais e médios de comparações para testes em 169 pontos discretos.

Mesmo no casos total e médio, a redução do número de invocações ainda se torna muito evidente.

Os próximos testes exploram a simetria através de complexos côncavos, com bordo formado por mais de uma componente e com auto-intersecção, conforme mostrado na figura a seguir:

Figura 2.20: Complexos com várias geometrias.

Novamente foram testados os pontos na *bouding box* discreta mínima que contém os complexos e os resultados do número total e médio de invocações é apresentado na tabela a seguir:

Caso	Número total de invocações		Número médio de invocações	
	Com otimização	Sem Otimização	Com otimização	Sem otimização
(a)	1494	4732	8.8	28
(b)	2406	7436	14.2	44
(c)	2994	15548	17.7	92

Tabela 2.3: Números totais e médios de comparações para testes em 169 pontos discretos e em várias geometrias.

Mesmo com simetria nos objetos, à medida que a quantidade dos hiperplanos começa a aumentar e o número das células em cada direção começa a ficar mais equilibrado, nota-se um aumento no número de invocações à função que calcula a contribuição de cada célula. Mesmo assim, o número de invocações ainda é bastante pequeno.

Finalmente, foram efetuados vários testes com complexos pequenos (20 células) e grandes (900 células). Para dez instâncias de cada uma destas classes, foram obtidos o número médio total de invocações à função contribuição. O primeiro gráfico mostra o resultado para complexos e resoluções pequenos.

Figura 2.21: Número médio total de invocações para resoluções pequenas e complexos pequenos.

A diferença entre a otimização e a versão original do teste de pertinência já é bastante grande, mesmo em resoluções muito pequenas. O próximo gráfico já ilustra um outro extremo, o das grandes resoluções:

Figura 2.22: Número médio total de invocações para resoluções grandes e complexos pequenos.

A redução do número de invocações para grandes grandes resoluções tornou-se ainda mais evidente. A diferença percentual, quando comparada às baixas resoluções, é também

muito superior.

A situação exibida a seguir mostra o comportamento da otimização para grandes complexos e resoluções pequenas.

Figura 2.23: Número médio total de invocações para resoluções pequenas e complexos grandes.

O comentário do resultado anterior será feito juntamente com a situação mostrada a seguir, que exhibe o comportamento para grandes complexos e grandes resoluções:

Figura 2.24: Número médio total de invocações para grandes resoluções e complexos.

Em ambos os casos, a redução do número de invocações ainda é muito grande, embora a diferença percentual, se comparada ao caso de complexos pequenos, tenha diminuído. Mesmo assim, a redução de 25%, esperada só com a eliminação das células na direção ótima da rasterização, foi cumprida.

Como comentários finais da otimização, é bastante difícil obter, com precisão, o percentual exato da redução. Isto se deve ao fato da posição relativa do ponto a ser testado e os hiperplanos poder mudar radicalmente de complexo para complexo. Porém, pela análise dos gráficos apresentados anteriormente, a redução média do número de chamadas chega a 40%.

É importante ressaltar que tal redução é muito importante em vários algoritmos bidimensionais que dependam de objetos poligonais e do teste de pertinência. Exemplos clássicos destes algoritmos incluem *rendering* de fontes e outros objetos poligonais([FSF97], [FSF98], [FOF00], [FS00]), modelagem via objetos implícitos([MVT03]) e implementação de operadores espaciais em Sistemas de Informações Geográficas([SNT01], [FS04]).

Capítulo 3

Pertinência Tridimensional

A teoria e implementação de teste de pertinência de Pol e Corthout é estendida para o ambiente tridimensional neste capítulo. A definição analítica de número de rotação bidimensional foi reescrita em termos da Integral de Kronecker, equivalente à noção via funções analíticas, o que torna possível uma extensão da noção de número de rotação para o ambiente tridimensional. É construída uma versão geométrica de tal número e é provada uma versão tridimensional discreta do Teorema de Jordan-Bröwer. A partir de limites tomados nessa versão geométrica, é proposto um algoritmo para rasterização de objetos discretos tridimensionais.

3.1 Problema da pertinência tridimensional

Dado o bordo combinatório $\mathcal{M}$ de um objeto tridimensional $\Omega \in \Omega_n^{3,3}$ e um ponto $P \in \mathbb{Z}^3$, o problema da pertinência tridimensional consiste em determinar se $P \in \Omega$ utilizando $\mathcal{M}$. Neste contexto, o problema consiste em verificar se P está no interior ou no exterior da superfície $\mathcal{M}$.

Se a superfície é simples, isto é, sem auto-intersecção, as noções de interior e exterior são intuitivamente simples. Apesar desta simplicidade, decidir se um ponto está no interior ou no exterior da superfície já não é uma tarefa trivial. Por exemplo, considere-se uma aproximação simplicial da superfície da esfera unitária S^2 , cujos simplexes 0-dimensionais tenham coordenadas inteiras, conforme mostrado na Figura 3.1, próxima página.

Figura 3.1: Esfera bidimensional e uma aproximação simplicial.

Na esfera “contínua”, sem entrar no mérito da precisão numérica, a pertinência pode ser testada de maneira bastante simples: se a distância do ponto P ao centro da esfera for menor que o raio da esfera, o ponto está no interior; caso contrário, o ponto está no exterior. Porém, quando o teste é realizado contra a aproximação simplicial, ou mesmo numa aproximação celular com células poligonais planas, não se dispõe mais do raio e o teste exige mais ferramentas geométricas.

Quando a superfície já possui auto-intersecção, o problema torna-se mais complexo. O primeiro problema é caracterizar de modo preciso as regiões interiores e exteriores à superfície. Definido um critério para interior e exterior, o próximo problema é como implementá-lo de maneira eficiente e robusta.

Tanto no caso das superfícies simples quanto daquelas com auto-intersecção, o interior e o exterior de uma superfície podem ser caracterizados por uma versão tridimensional do número de rotação. A partir da equivalência com uma versão geométrica, mais computável, pode ser derivado um algoritmo bastante simples e eficiente, reduzindo o problema da pertinência tridimensional a uma série de instâncias do problema da pertinência bidimensional. A próxima seção mostra a equivalência entre a versão analítica e uma versão geométrica do número de rotação tridimensional, base para a construção de tal algoritmo.

3.2 Número de rotação tridimensional

Assim como no caso bidimensional, existem duas versões do número de rotação: uma analítica, que emprega a Integral de Kronecker, e outra geométrica, que utiliza funções de contagem de intersecções entre 2-células discretas e listas. Sob certas restrições, será provado que estas duas versões são equivalentes.

3.2.1 Versão analítica

A extensão da versão analítica do número de rotação bidimensional para o ambiente tridimensional não é trivial, pois não existe uma versão “tridimensional” dos números complexos. Assim, ao invés de usar ferramentas de funções analíticas, a extensão da versão analítica utilizará uma ferramenta de análise chamada Integral de Kronecker. A teoria da Integral de Kronecker apresentada a seguir é baseada em Price [Pri84] e será feita em duas etapas. Na primeira etapa, será apresentada a Integral de Kronecker no caso bidimensional, que será relacionada com a versão de número de rotação via funções analíticas, desenvolvida no Capítulo 2. A seguir, com a motivação introduzida no caso bidimensional, será feita uma extensão para o ambiente tridimensional.

Seja $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$, $x \in [a, b]$, C^1 por partes. Assuma-se que esta curva seja fechada, ou seja, $\gamma(a) = \gamma(b)$, e que a origem não está no traço $T(\gamma)$ de γ . Defina-se $|\gamma(x)|$ como a distância de $\gamma(x)$ à origem. Assim, $|\gamma(x)|$ pode ser escrita como:

$$|\gamma(x)| = \{[\gamma_1(x)]^2 + [\gamma_2(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [a, b].$$

Como a origem não está em $T(\gamma)$, tem-se que $|\gamma(x)| > 0$, $x \in [a, b]$. Defina-se a função $\gamma^N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com componentes (γ_1^N, γ_2^N) , da seguinte forma:

$$\gamma_j^N(x) = \frac{\gamma_j(x)}{|\gamma(x)|}, \quad j = 1, 2, \quad x \in [a, b].$$

Então, $\{[\gamma_1^N(x)]^2 + [\gamma_2^N(x)]^2\}^{\frac{1}{2}} = 1$ e o traço $T(\gamma^N)$ de γ^N está contido na esfera unitária unidimensional S^1 . Seja $\mathcal{A}$ a área sinalizada subentendida pela curva γ^N e a origem. Esta área tem um sinal derivado da orientação do plano e é usado para estabelecer uma orientação na esfera unitária S^1 .

Para justificar esta afirmação, seja $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2, \dots$ uma seqüência de subdivisões simpliciais de $[a, b]$ e $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ um simplexo típico de $\mathcal{P}_k$.

Figura 3.2: Um simplexo $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ em $[a, b]$ e a área definida por $(0, 0), \gamma^N(\mathbf{x}_0)$ e $\gamma^N(\mathbf{x}_1)$.

Então, uma aproximação $\mathcal{A}_k$ para $\mathcal{A}$ é dada por:

$$\mathcal{A}_k = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1^N(\mathbf{x}_0) & \gamma_2^N(\mathbf{x}_0) & 1 \\ \gamma_1^N(\mathbf{x}_1) & \gamma_2^N(\mathbf{x}_1) & 1 \end{vmatrix}.$$

Cada um dos determinantes anteriores tem um sinal que é derivado da orientação do simplexo $\mathbf{x}$ no plano. A área $\mathcal{A}$ pode ser dada, então, pelo limite:

$$\mathcal{A} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_k = \frac{1}{2} \int_b^a \begin{vmatrix} \gamma_1^N(x) & \gamma_2^N(x) \\ \frac{\partial \gamma_1^N(x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_2^N(x)}{\partial x} \end{vmatrix} dx.$$

Como a curva γ^N é fechada, a integral anterior é um múltiplo inteiro w da área da

esfera unitária S^1 e corresponde exatamente ao valor do número de rotação da curva γ^N em relação à origem:

$$\frac{1}{2} \int_b^a \left| \begin{array}{cc} \gamma_1^N(x) & \gamma_2^N(x) \\ \frac{\partial \gamma_1^N(x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_2^N(x)}{\partial x} \end{array} \right| dx = w\pi \implies w = \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left| \begin{array}{cc} \gamma_1^N(x) & \gamma_2^N(x) \\ \frac{\partial \gamma_1^N(x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_2^N(x)}{\partial x} \end{array} \right| dx.$$

Colocando-se o valor de w em termos da função original $\gamma(x)$, tem-se a Integral de Kronecker da curva γ com relação à origem, denotada por $K_1(\gamma, (0,0))$ e cuja forma é dada por:

$$w = K_1(\gamma, (0,0)) = \frac{1}{2\pi} \int_b^a \frac{\left| \begin{array}{cc} \gamma_1(x) & \gamma_2(x) \\ \frac{\partial \gamma_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_2(x)}{\partial x} \end{array} \right|}{|\gamma(x)|^2} dx.$$

Para se definir a Integral de Kronecker com relação a um ponto genérico P e, consequentemente, o número de rotação da curva γ em relação a P , são necessárias algumas translações:

Definição 3.1. *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$, $x \in [a, b]$, C^1 por partes e $P = (P^{x_1}, P^{x_2})$ um ponto não contido no traço $T(\gamma)$. A Integral de Kronecker $K_1(\gamma, P)$ de γ em relação a P é dada por:*

$$K_1(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi} \int_b^a \frac{\left| \begin{array}{cc} \gamma_1(x) - P^{x_1} & \gamma_2(x) - P^{x_2} \\ \frac{\partial \gamma_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_2(x)}{\partial x} \end{array} \right|}{|\gamma(x) - P|^2} dx.$$

O número de rotação de γ em relação a P , $w(\gamma, P)$, é dado por $w(\gamma, P) = K_1(\gamma, P)$.

Estabelecida esta definição alternativa do número de rotação bidimensional, a extensão para o caso tridimensional obedece uma construção semelhante. Seja $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície C^1 por partes definida num retângulo $A = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. Suponha-se, ainda, que tal superfície seja sem bordo, orientável e parametrizada com componentes $s(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v))$, $(u, v) \in A$. Defina-se $|s(u, v)|$ como a distância de $s(u, v)$ à origem de $\mathbb{R}^3$, ou seja:

$$|s(u, v)| = \left\{ \sum_{i=1}^3 [s_i(u, v)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Assumindo-se que a origem de $\mathbb{R}^3$ não esteja no traço $T(s)$ da superfície s , tem-se que:

$$|s(u, v)| > 0, \quad (u, v) \in C_2(a).$$

Defina-se, então, a função $s^N : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, com componentes (s_1^N, s_2^N, s_3^N) por:

$$s_j^N(u, v) = \frac{s_j(u, v)}{|s(u, v)|}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (u, v) \in A.$$

Como $\left\{ \sum_{i=1}^3 [s_i^N(u, v)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 1$, a função s^N descreve uma superfície cujo traço $T(s^N)$ está contido na esfera unitária bidimensional S^2 . Agora, seja $\mathcal{V}$ o volume sinalizado definido pela superfície $s^N(u, v)$ e a origem. Este volume tem um sinal que é derivado da orientação em $\mathbb{R}^3$ e é usado para estabelecer uma orientação na esfera unitária S^2 . Assim como no caso bidimensional, seja $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2, \dots$ uma sequência de subdivisões simpliciais de A . Seja $\mathbf{x} : [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ um simplexo típico em $\mathcal{P}_k$.

Figura 3.3: Um simplexo $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ em $[a, b] \times [c, d]$ e o volume definido por $(0, 0, 0)$, $s^N(\mathbf{x}_0)$, $s^N(\mathbf{x}_1)$ e $s^N(\mathbf{x}_2)$.

Assim, uma aproximação $\mathcal{V}_k$ para o volume $\mathcal{V}$ é dado por:

$$\mathcal{V}_k = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ s_1^N(\mathbf{x}_0) & s_2^N(\mathbf{x}_0) & s_3^N(\mathbf{x}_0) & 1 \\ s_1^N(\mathbf{x}_1) & s_2^N(\mathbf{x}_1) & s_3^N(\mathbf{x}_1) & 1 \\ s_1^N(\mathbf{x}_2) & s_2^N(\mathbf{x}_2) & s_3^N(\mathbf{x}_2) & 1 \end{vmatrix}.$$

Cada um dos determinantes acima tem um sinal que é derivado da orientação de cada simplexo $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^3$. O volume $\mathcal{V}$ pode ser calculado, então, pelo limite:

$$\mathcal{V} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_k = \frac{1}{3} \int \int_A (-1)^3 \begin{vmatrix} s_1^N(u, v) & s_2^N(u, v) & s_3^N(u, v) \\ \frac{\partial s_1^N(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_2^N(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_3^N(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial s_1^N(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_2^N(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_3^N(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

Como $s^N(u, v)$ também é sem bordo, ele é fechada e a integral anterior é um múltiplo w do volume da esfera unitária S^2 . Como no caso bidimensional, é um número inteiro:

$$\frac{1}{3} \int \int_A (-1)^3 \begin{vmatrix} s_1^N(u, v) & s_2^N(u, v) & s_3^N(u, v) \\ \frac{\partial s_1^N(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_2^N(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_3^N(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial s_1^N(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_2^N(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_3^N(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = w \frac{4\pi}{3}.$$

Este número inteiro é denominado número de rotação de s^N em relação à origem e seu valor é dado a partir da igualdade anterior:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int \int_A (-1)^3 \begin{vmatrix} s_1^N(u, v) & s_2^N(u, v) & s_3^N(u, v) \\ \frac{\partial s_1^N(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_2^N(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_3^N(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial s_1^N(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_2^N(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_3^N(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

Não é coincidência o valor 4π aparecer no denominador do fator que multiplica a integral dupla. Ele corresponde à área de esfera unitária S^2 e as áreas das esferas em dimensões mais altas aparecerão, também, nas generalizações a serem realizadas no próximo capítulo.

A Integral de Kronecker $K_2(s, (0, 0, 0))$ da superfície $s(u, v)$ original em relação à origem é definida retirando-se o termo $(-1)^3$ e tomando-se as componentes $s_i(u, v)$ da forma mostrada na próxima página.

$$K_2(s, (0, 0, 0)) = \frac{1}{4\pi} \int \int_A \frac{\begin{vmatrix} s_1(u, v) & s_2(u, v) & s_3(u, v) \\ \frac{\partial s_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_3(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial s_1(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_2(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_3(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}}{|s(u, v)|^3} dudv.$$

O número de rotação de $s(u, v)$ em relação à origem, $w(s, (0, 0, 0))$, é dado por:

$$w(s, (0, 0, 0)) = (-1)^3 K_2(s, (0, 0, 0)).$$

Numa definição mais geral da Integral de Kronecker no espaço tridimensional, considera-se um ponto genérico $P \in \mathbb{R}^3$ não contido no traço da superfície $s(u, v)$:

Definição 3.2. *Seja $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida num retângulo $A = [a, b] \times [c, d]$, C^1 por partes, sem bordo, parametrizada e $P = (P^{x_1}, P^{x_2}, P^{x_3}) \in \mathbb{R}^3$ não contido no traço $T(s)$ de $s(u, v)$. A Integral de Kronecker $K_2(s, P)$, de $s(u, v)$ em relação a P , é dada por:*

$$K_2(s, P) = \frac{1}{4\pi} \int \int_A \frac{\begin{vmatrix} s_1(u, v) - P^{x_1} & s_2(u, v) - P^{x_2} & s_3(u, v) - P^{x_3} \\ \frac{\partial s_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial s_3(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial s_1(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_2(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial s_3(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}}{|s(u, v) - P|^3} dudv,$$

onde $s(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v))$, $(u, v) \in A$. O número de rotação de $s(u, v)$ em relação a P , $w(s, P)$, é dado por $w(s, P) = (-1)^3 K_2(s, P)$.

Para tornar a notação mais cômoda se ser manipulada, o número de rotação será tomado pela fórmula abaixo:

$$w(s, P) = \frac{-1}{4\pi} \int \int_A \frac{\det[s(u, v) - P, D_1 s(u, v), D_2 s(u, v)]}{|s(u, v) - P|^3} dudv.$$

3.2.2 Versão Geométrica

Para se construir uma versão geométrica do número de rotação tridimensional, será utilizado um mecanismo semelhante ao caso bidimensional. É definido um suporte geral para contagem de intersecções entre objetos discretos, via funções *cross-weight*, e constrói-se uma função CW específica com deslocamentos para tratamento homogêneo dos casos especiais e, a partir de algumas restrições sobre estes deslocamentos, prova-se uma equivalência com a versão analítica.

O primeiro passo é estender a noção de funções CW para o ambiente tridimensional. O primeiro fator do domínio de funções desta natureza é o espaço $\Omega^{2,3}$, pois cada superfície discreta que limita os objetos discretos tridimensionais de $\Omega^{3,3}$ pertencem a tal espaço:

Definição 3.3. *Uma função $\mathcal{C} : \Omega^{2,3} \times \Lambda^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ é denominada uma função cross-weight tridimensional, ou uma função CW tridimensional, se satisfaz às propriedades a seguir:*

Distribuição sob uniões e concatenações

Se $\Omega = \cup_{i=0}^{n-1} \tau_i$, onde cada τ_i é uma célula discreta 2-dimensional que forma Ω , L^1 e L^2 listas em $\mathbb{Z}^3$, então:

$$\mathcal{C}(\Omega, L^1 \uplus L^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}(\tau_i, L^1) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}(\tau_i, L^2)$$

Inversão de sinal sob inversão de orientação

Se $-\Omega$ é o objeto Ω com orientação contrária:

$$\mathcal{C}(-\Omega, L^1) = \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{R}(L^1)) = -\mathcal{C}(\Omega, L^1)$$

Nulidade sob tetraedros e triângulos

Se Ω' é a superfície de um tetraedro $\Omega \in \Omega^{3,3}$ contido num cubo unitário e L^1 é um triângulo, então:

$$\mathcal{C}(\Omega', L^1) = 0.$$

O próximo passo será construir uma função CW particular que permita provar a equivalência com a versão analítica. A construção de tal função será semelhante ao caso bidimensional, ou seja, a avaliação do valor da função será feita com base em intersecções verificadas a partir de imersões com perturbação no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Inicialmente, será fixada uma notação para as imersões.

Definição 3.4. *Seja $\delta \in \mathbb{R}^3$ um vetor não-nulo:*

- a imersão canônica de $\mathbb{Z}^3$ em $\mathbb{R}^3$ será denotada por φ .
- a imersão canônica de uma superfície discreta $\Omega \in \Omega^{2,3}$ em $\mathbb{R}^3$ será denotada por $\varphi(\Omega)$.
- a imersão de pontos $\varphi_\delta : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por:

$$\varphi_\delta(P) = P + \delta.$$

- a imersão $\varphi_\delta(L)$ de uma lista $L = \langle L_0, L_1 \rangle \in \Lambda_1^3$ como o segmento de reta parametrizado:

$$l(t) = (1-t)L_0 + tL_1 + \delta, \quad t \in [0, 1].$$

- a imersão $\varphi_\delta(L)$ de listas $L \in \Lambda_n^3$ de comprimento $n > 1$ como o polígono não necessariamente fechado:

$$\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} \varphi_\delta(\langle L_i, L_{i+1} \rangle).$$

Fixada a notação de imersão anterior, é definida abaixo a função $\mathcal{W}_\epsilon$ que calcula o número de intersecções sinalizadas entre o bordo combinatório de um objeto discreto tridimensional e uma lista de comprimento arbitrário:

Definição 3.5. *Seja $\epsilon \in \mathbb{R}^3$, $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$, defina-se a função $\mathcal{W}_\epsilon : \Omega^{2,3} \times \Lambda^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Omega^{2,3} \times \Lambda_0^3 \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = 0$$

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Omega_1^{2,3} \times \Lambda_1^3 \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \varphi(\Omega) \cap \varphi_\epsilon(L) = \emptyset \implies \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = 0 \\ \varphi(\Omega) \cap \varphi_\epsilon(L) \neq \emptyset \implies \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = s(\vec{\Omega} \cdot \Delta(L)) \end{cases}$$

- $\mathcal{W}_\epsilon : \Omega_{n_1}^{2,3} \times \Lambda_{n_2}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \geq 2$, e $\Omega = \bigcup_{i=0}^{n_1-1} \tau_i$, $\tau_i \in \Omega_1^{2,3}$

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_\epsilon(\tau_i, \langle L_j, L_{j+1} \rangle).$$

Assim como no caso bidimensional, somente a lista é perturbada de ϵ antes de se checar se a superfície discreta e a lista têm intersecções. É importante adiantar que existe uma classe especial de deslocamentos ϵ permitirá um tratamento homogêneo de vários casos especiais de intersecção, como será visto adiante. A razão da restrição de ϵ não poder estar na imersão de qualquer superfície discreta reside no fato da Integral de Kronecker não estar definida quando o ponto a ser testado está no traço da superfície e tal restrição será essencial para se provar a equivalência com a versão analítica.

A prova de que a função $\mathcal{W}_\epsilon$ é uma função CW será feita em duas etapas. Inicialmente, será enunciado o resultado a distribuição sob uniões/concatenações e inversão de sinal sob inversão de orientação, cuja prova decorre trivialmente da própria definição da definição. A seguir, será provado um resultado mais forte, que permite obter a equivalência entre as versões analítica e geométrica e, como corolário, obtém-se a nulidade sob tetraedros e triângulos.

Proposição 3.1. *$\mathcal{W}_\epsilon$ distribui sob uniões de células, concatenações de listas e muda de sinal quando a orientação da superfície ou da lista (não ambas) é invertida.*

Prova. A distribuição sob uniões de células e concatenações de listas decorre diretamente da última parte da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$. Se a orientação da superfície ou da lista, mas não de ambas, é invertida, o sinal do produto escalar da segunda parte da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$ também é invertido, o que prova uma alteração do sinal da função. $\square$

3.2.3 Relação entre as versões analítica e geométrica

Para se provar uma relação entre as versões analítica e geométrica do número de rotação, é necessário impor uma restrição sobre o deslocamento ϵ . A versão analítica utiliza a Integral de Kronecker, definida somente quando o ponto a ser testado não se encontra sobre o traço da superfície. Assim, para que tal integral esteja bem definida, as imersões com perturbação φ_ϵ não poderão levar pontos discretos na imagem da imersão de uma superfície discreta. Isto pode ser realizado impondo-se que $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, para todo $\Omega \in \Omega^{2,3}$. Como todas as 2-células de elementos de Ω são planares e com 0-células inteiras, essa imposição significa tomar deslocamentos ϵ não contidos em qualquer plano definido por três pontos não-colineares de coordenadas inteiras.

O resultado, utilizando a restrição descrita anteriormente, é enunciado e provado a seguir:

Teorema 3.1. *Seja $\Omega \in \Omega^{2,3}$ uma superfície discreta fechada e orientável. Se $L \in \Lambda_n^3$, $n \geq 0$, é uma lista e $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$, então:*

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_n)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)).$$

Prova. Em primeiro lugar, observa-se que as integrais estão bem definidas pelo fato das imersões com perturbação nunca mapearem pontos com coordenadas inteiras sobre o traço da superfície discreta.

O restante da prova utiliza uma dupla indução. A indução mais externa é feita no comprimento da lista L e, a mais interna, na quantidade de células da superfície Ω :

- Se $n = 0$, então a lista L se reduz a um único ponto e tem-se necessariamente:

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) \stackrel{def}{=} 0 = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)).$$

- Considere-se, agora, $n = 1$. Como Ω é fechada, ela precisa ter, no mínimo, quatro células. Isto pode ser facilmente verificado na Figura 1.6.

- Se $\Omega = \cup_{i=0}^3 \tau_i$, então ela pode ser vista como uma célula discreta 3-dimensional e este caso consiste em estudar as posições relativas de tal célula e as imersões com perturbação dos extremos do segmento L . Tem-se três casos distintos:
 1. $\varphi_\epsilon(L_0)$ e $\varphi_\epsilon(L_1)$ estão ambos no interior de $\varphi(\Omega)$.
 2. $\varphi_\epsilon(L_0)$ e $\varphi_\epsilon(L_1)$ estão ambos no exterior de $\varphi(\Omega)$.
 3. $\varphi_\epsilon(L_0)$ e $\varphi_\epsilon(L_1)$ estão em componentes conexas diferentes, um no exterior e outro no exterior, uma vez que Ω é homeomorfa a S^2 .

No caso (1), os dois extremos perturbados têm o mesmo número de rotação (+1 ou -1) e a diferença resulta em zero. Por outro lado, o segmento não intersecta nenhuma célula de Ω , o que também anula o resultado da versão geométrica.

No caso (2), o número de rotação dos dois extremos é zero. Se o segmento L não intersecta nenhuma das células de Ω , o valor da versão geométrica é nulo e o resultado segue imediatamente. Porém, se ocorre intersecção, duas células de Ω são envolvidas, cada uma resultado em valores +1 e -1, respectivamente, para o resultado da versão geométrica, o que a torna nula.

No caso (3), tem-se um extremo cuja imersão com perturbação resulta num valor nulo para o número de rotação. Assim, o número de rotação do outro extremo é $+1$ ou -1 , dependendo da orientação da 2-células de Ω e a diferença das versões analíticas também assume tais valores. Por outro lado, a versão geométrica conta apenas uma intersecção e a contribuição de tal intersecção depende do sinal da orientação relativa entre o segmento L e a célula participante da intersecção, que pode ser $+1$ ou -1 e iguala-se ao resultado da versão analítica, pela dependência da orientação da célula.

- Seja, agora, $\Omega = \cup_{i=0}^m \tau_i$, $m > 3$. Não é difícil observar, pela Figura 1.6, que Ω pode ser decomposta como uma soma conexa de duas superfícies fechadas Ω_1 e Ω_2 , cujas quantidades de 2-células são menores que m . Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) &= \mathcal{W}_\epsilon(\Omega_1 \cup \Omega_2, L) = \mathcal{W}_\epsilon(\Omega_1, L) + \mathcal{W}_\epsilon(\Omega_2, L) \\ &\stackrel{ind.}{=} w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_0)) + w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_0)) \\ &= w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_1)) + w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_0)) - w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_0)) \\ &= w(\varphi(\Omega_1 \cup \Omega_2), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_1 \cup \Omega_2), \varphi_\epsilon(L_0)) \end{aligned}$$

É importante ressaltar que grande parte das igualdades são válidas pelo fato da 2-célula usada como disco na soma conexa aparecer com orientações contrárias nas duas parcelas da decomposição, o que não altera o resultado do número de rotação.

- Tomando-se novamente a indução externa, assuma-se o resultado válido para $n = k \geq 1$. Seja L uma lista de comprimento $k + 1$ e m fixo. A lista L pode ser decomposta como $L = \langle L_0, \dots, L_k \rangle \uplus \langle L_k, L_{k+1} \rangle$. Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) &\stackrel{def}{=} \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, \langle L_0, \dots, L_k \rangle) + \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, \langle L_k, L_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{ind.}{=} w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_k)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) + w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_{k+1})) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_k)) \\ &= w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_{k+1})) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)). \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando-se $n = k$ fixo e decompondo-se Ω como uma soma conexa duas superfícies fechadas, a demonstração segue por indução nesta decomposição.

□

Um corolário imediato do teorema anterior permite provar que a função $\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L)$, com ϵ satisfazendo às condições do teorema, anula-se quando os argumentos Ω e L definem um tetraedro e um triângulo, respectivamente.

Corolário 3.1. *Para ϵ nas condições do teorema anterior, $\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L)$ anula-se sob tetraedros e triângulos.*

Prova. Seja $L = \langle L_0, L_1, L_2, L_3 \rangle$ um triângulo e Ω um tetraedro. Isto implica que $L_3 = L_0$. Pelo teorema:

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_3)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) = 0.$$

□

Isto termina a prova de que $\mathcal{W}_\epsilon$ é uma função do tipo CW. Para efeitos teóricos, a amplitude do corolário anterior poderia ser bastante estendida, pois se os dois argumentos da função forem fechados, $\mathcal{W}_\epsilon$ se anula obrigatoriamente.

3.2.4 Existência e escolha da translação ϵ

A hipótese de que ϵ não perturba pontos sobre a imersão de uma superfície discreta foi fundamental para estabelecer a relação entre as versões analítica e geométrica do número de rotação. O próximo resultado mostra um conjunto infinito de possibilidades para escolha de ϵ :

Teorema 3.2. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r_0, r_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Se $\epsilon = (q, r_0, r_1)$, então $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \Omega_1^{2,3}$.*

Prova. As imersões $\varphi(\Omega)$ das 2-células $\Omega \in \Omega_1^{2,3}$ têm como suporte planos tridimensionais definidos por números inteiros. Seja $ax + by + cz + d = 0$ um plano que passa por por três pontos não-colineares de $\mathbb{Z}^3$, com a, b, c e d inteiros. Suponha, por absurdo, que (x, y, z) esteja sobre este plano e que x seja um número racional não-inteiro:

- tomando-se $b = 0$ e $c = 0$, então o plano toma a forma $x = \frac{d}{a}$, o que contradiz o fato que o plano passa por, pelo menos, três pontos com coordenadas inteiras.
- tomando-se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, x considerado como racional implica que y e z sejam necessariamente números racionais.

□

Apesar do resultado anterior apresentar muitas possibilidades para escolha de ϵ , elas não poderão ser utilizadas diretamente pois o objetivo é obter um algoritmo de pertinência que manipule somente números inteiros. Para se alcançar tal objetivo, será definida uma nova função CW a partir de uma minimização da função $\mathcal{W}_\epsilon$ utilizando limites. A construção desta nova função depende dois resultados enunciados a seguir.

O primeiro resultado afirma que para qualquer superfície discreta bidimensional Ω existe uma translação ϵ pequena o suficiente para evitar que perturbações de pontos P por ϵ sejam mapeados sobre $\varphi(\Omega)$:

Proposição 3.2. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r_0, r_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então, $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$ e $P \in \mathbb{Z}^3$, existe um $\lambda > 0$ tal que tomando-se $\epsilon = \mu(q, r_0, r_1)$, $0 < \mu(q, r_0, r_1) \leq \lambda$, vale $\varphi(\langle P, P + \epsilon \rangle) \cap \varphi(\Omega) \subset \{P\}$.*

Prova. Como $\varphi(\Omega)$ é uma união de 2-células, é suficiente mostrar que o resultado é válido para $\Omega \in \Omega_1^{2,3}$. Além disso, como o operador de intersecção de conjuntos é invariante sob translações, é suficiente mostrar que a proposição é válida para $P = \mathcal{O}$. Assim, será demonstrado que $\forall \Omega \in \Omega_1^{2,3}$, existe um $\lambda > 0$ tal que tomando-se $\epsilon = \mu(q, r_0, r_1)$, $0 < \mu(q, r_0, r_1) \leq \lambda$, vale $\varphi(\langle \mathcal{O}, \epsilon \rangle) \cap \varphi(\Omega) \subset \{\mathcal{O}\}$.

Seja $|\cdot|$ alguma norma de $\mathbb{R}^2$. Defina-se e, v e ρ como no Teorema 1.2, que relaciona normas discretas e contínuas. Considere-se $|\Omega|_V = \min_{0 \leq i \leq n} |\tau_i|_V$, onde τ_i é a i -ésima 0-célula de Ω e $|\cdot|_V$ é a norma discreta considerada.

Tome-se, agora, $m = \lceil e\rho(1 + v|\Omega|_V) \rceil$:

- Quando $|\Omega|_V \geq m$, então:

$$\begin{aligned} |\tau_i| &\geq e^{-1}\rho^{-1}|\tau_i|_V \text{ (Teorema 1.2)} \\ &\geq e^{-1}\rho^{-1}m \\ &\geq e^{-1}\rho^{-1} \lceil e\rho(1 + v|\Omega|_V) \rceil \geq 1. \end{aligned}$$

Isto demonstra que a distância de $\varphi(\Omega)$ à origem é maior ou igual a 1, uma vez que $\varphi(\Omega)$ é o fecho convexo da 0-células τ_i . Neste caso, basta tomar λ no intervalo $\left]0, \frac{1}{|(q, r_0, r_1)|}\right]$, se $|(q, r_0, r_1)| \geq 1$, ou no intervalo $]0, |(q, r_0, r_1)|[$, se $|(q, r_0, r_1)| < 1$, que o resultado segue imediatamente.

- Quando $|\Omega|_V < m$, será provado que existe $\lambda \in]0, \frac{1}{|(q, r_0, r_1)|}]$ ou $\lambda \in]0, |(q, r_0, r_1)|[$ que satisfaça à proposição:
 - se $\mathcal{O} \in \varphi(\Omega)$, pela definição de ϵ , tem-se que $\varphi(\langle \mathcal{O}, \epsilon \rangle) \cap \varphi(\Omega) = \{\mathcal{O}\}$ e o resultado segue imediatamente.
 - se $\mathcal{O} \notin \varphi(\Omega)$, defina-se o conjunto:

$$D = \{d(\varphi(\Omega), \mathcal{O}) \mid \Omega \in \Omega_1^{2,3}, |\Omega|_V < m, \mathcal{O} \notin \varphi(\Omega)\}.$$

Não é difícil verificar que $0 < \min(D) \leq 1$. Isto significa dizer que para todo $|\delta| < \min(D)$ vale $\varphi(\langle \mathcal{O}, \delta \rangle) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$. Logo, basta tomar $\lambda = \frac{\min(D)}{|(q, r_0, r_1)|^2}$ ou $\lambda = \min(D)|(q, r_0, r_1)|^2$, dependendo do tamanho da perturbação (q, r_0, r_1) .

□

O próximo resultado estabelece que $\mathcal{W}_\epsilon$ não depende do tamanho da translação ϵ , mas somente de sua direção:

Proposição 3.3. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r_0, r_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então, $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$ e $L \in \Lambda^3$, existe um $\lambda > 0$ tal que se $0 < \mu_1(q, r_0, r_1) \leq \mu_2(q, r_0, r_1) \leq \lambda$, então vale:*

$$\mathcal{W}_{\mu_1(q, r_0, r_1)}(\Omega, L) = \mathcal{W}_{\mu_2(q, r_0, r_1)}(\Omega, L).$$

Prova. Devido às propriedades de distribuição sob uniões de células e concatenações de listas, basta provar o resultado para $\Omega \in \Omega_1^{2,3}$ e $L \in \Lambda_1^3$. Escolha λ segundo a proposição anterior. Seja $0 < \mu_1(q, r_0, r_1) \leq \mu_2(q, r_0, r_1) \leq \lambda$:

- se $\varphi(\Omega) \cap \varphi_{\mu_1}(L) = \emptyset$ e $\varphi(\Omega) \cap \varphi_{\mu_2}(L) = \emptyset$ ou $\varphi(\Omega) \cap \varphi_{\mu_1}(L) \neq \emptyset$ e $\varphi(\Omega) \cap \varphi_{\mu_2}(L) \neq \emptyset$, tem-se pela definição de $\mathcal{W}_{\mu_1}$ e $\mathcal{W}_{\mu_2}$ que $\mathcal{W}_{\mu_1(q, r_0, r_1)}(\Omega, L) = \mathcal{W}_{\mu_2(q, r_0, r_1)}(\Omega, L)$ para ambos os casos.
- por outro lado, assuma-se por absurdo que precisamente uma das intersecções é não-vazia. Suponha que $\varphi(\Omega) \cap \varphi_{\mu_1}(L) \neq \emptyset$. Então existe ϵ , $\mu_1 \leq \epsilon \leq \mu_2$, tal que $(L_i + \epsilon) \in \varphi(\Omega)$, para $i = 0$ ou $i = 1$. Isto implica que $\varphi(\langle L_i, L_i + \epsilon \rangle) \cap \varphi(\Omega) \not\subset \{L_i\}$, o que contradiz a proposição anterior. Uma demonstração análoga pode ser feita para o caso $\varphi(\Omega) \cap \varphi_{\mu_2}(L) \neq \emptyset$.

□

A partir deste ponto, então, a translação ϵ será tomada em coordenadas esféricas com a notação $\epsilon = (r, \rho_0, \rho_1)$ e conforme mostrado na figura a seguir:

Figura 3.4: Translação ϵ em coordenadas esféricas.

O seguinte resultado define uma nova função CW $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}$. Como não há dependência do tamanho da translação, omitiu-se o parâmetro r , mantendo-se somente a direção definida pelos ângulos ρ_0 e ρ_1 .

Teorema 3.3. *Seja $\epsilon = (r, \rho_0, \rho_1)$ uma translação em $\mathbb{R}^3$, com $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, $\rho_0, \rho_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. O limite $\lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(\Omega, L)$, existe e a função-limite:*

$$\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(\Omega, L)$$

é uma função do tipo CW.

Prova. Sejam $\Omega \in \Omega^{2,3}$ e $L \in \Lambda^3$ dados. Escolha λ como na Proposição 3.3. Assim, $\forall 0 < \mu_1 \leq \lambda, 0 < \mu_2 \leq \lambda$, tem-se $\mathcal{W}_{\mu_1\epsilon}(\Omega, L) = \mathcal{W}_{\mu_2\epsilon}(\Omega, L)$, o que implica que o limite proposto existe.

A distribuição sob concatenações e mudanças de sinal sob alterações de orientação são imediatas para $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}$, pois estas propriedades são verificadas imediatamente no limite. Ainda mais, como $\mathcal{W}_\epsilon$ se anula em tetraedros e triângulos, o mesmo ocorre no limite. Assim, $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}$ é uma função CW. $\square$

O algoritmo de pertinência contra objetos discretos tridimensionais irá implementar um duplo limite nos ângulos ρ_0 e ρ_1 , de modo a obter uma função de rasterização tridimensional. Antes, porém, a teoria desenvolvida anteriormente permite obter uma versão

discreta do bem-conhecido Teorema de Jordan-Bröwer tridimensional, cujo resultado é mostrado na próxima seção.

3.3 Teorema de Jordan-Bröwer Tridimensional e uma versão discreta

O Teorema da Curva de Jordan pode ser estendido para dimensões mais altas, sendo conhecido como o Teorema de Separação de Jordan-Brower (veja-se, por exemplo, Guillemin e Pollack [GP74]). Este teorema estabelece o seguinte:

Teorema 3.4. *Todo mergulho da esfera unitária $(d-1)$ -dimensional no espaço euclidiano d -dimensional o separa em duas regiões disjuntas.*

Instanciando este resultado para o ambiente tridimensional, isto equivale a dizer que toda superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e simples, isto é homotópica a S^2 , separa $\mathbb{R}^3$ em duas regiões disjuntas, uma limitada (interior da superfície) e outra ilimitada (exterior da superfície). Apesar de muito intuitivo, a prova deste resultado envolve argumentos sofisticados de Topologia Algébrica.

No ambiente discreto, não há necessidade da superfície ser simples. O resultado abaixo, denominado Teorema Discreto de Jordan-Bröwer Tridimensional, mostra uma extensão do Teorema Discreto de Curva de Jordan, estabelecido no capítulo anterior, onde a superfície discreta pode ter auto-intersecção:

Teorema 3.5. *Seja (ρ_0, ρ_1) uma direção em $\mathbb{R}^3$ não contida no plano definido por qualquer 3-upla de pontos não-colineares com coordenadas inteiras. Dada uma superfície discreta fechada e orientável $\Omega \in \Omega^{2,3}$, a função CW $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}$ separa o espaço $\mathbb{Z}^3$ em um número finito de regiões com pontos P com o mesmo número de rotação tridimensional:*

$$w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(P)).$$

Somente uma destas regiões é infinita, cujos pontos têm número de rotação 0. Além disso, para qualquer lista $L \in \Lambda_n^3$, se $w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(L_0)) \neq w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(L_n))$ então necessariamente $\varphi(\Omega) \cap \varphi(L) \neq \emptyset$.

Prova. A partição de $\mathbb{Z}^3$ é dada pela seguinte relação de equivalência:

$$P \equiv Q \Leftrightarrow \mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, L) = 0, \forall L \in \Lambda^3, L_0 = P \text{ e } L_{\#L} = Q.$$

O Teorema 3.1 mostra que cada uma das regiões da partição anterior possui pontos com números de rotação iguais. Seja D a maior distância (na métrica discreta considerada) de uma 0-célula de Ω à origem. Se $|P| > D$, então $w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(P)) = 0$, pois P estará no exterior de Ω . Assim, tem-se um número finito de pontos com número de rotação não-nulo.

Finalmente, se $w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(L_0)) \neq w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(L_n))$, então $\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) \neq 0$, pelo Teorema 3.1. Pela definição de $\mathcal{W}_\epsilon$, então $\varphi(\Omega) \cap \varphi_\epsilon(L) \neq \emptyset$. Como as imersões $\varphi_\epsilon(L)$ geram sempre conjuntos fechados para todo ϵ , no limite $r \downarrow 0$ tem-se necessariamente $\varphi(\Omega) \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ $\square$

3.4 Rasterização de objetos discretos tridimensionais

Conforme enunciado no Teorema Discreto de Jordan-Bröwer Tridimensional, a função CW $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}$ separa pontos do espaço $\mathbb{Z}^3$ pelos seus números de rotação em relação à superfície Ω . Esta separação permite rasterizar objetos discretos tridimensionais e é um caso particular de uma classe maior de funções, chamadas funções de rasterização tridimensional:

Definição 3.6. Uma função de rasterização tridimensional $\mathcal{Q}(\Omega, P)$ é uma função

$$\mathcal{Q} : \Omega^{2,3} \times \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Para se construir uma função de rasterização a partir de $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, L)$, será tomada uma instância particular desta função utilizando-se uma semi-reta discreta com base no ponto P a ser testado:

Definição 3.7. Defina-se a função de rasterização tridimensional $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1} : \Omega^{2,3} \times \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, \langle (P^{x_1}, P^{x_2}, z), P \rangle).$$

O próximo resultado demonstra que a função $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}$ realmente calcula o número de rotação estabelecido no Teorema Discreto de Jordan-Bröwer Tridimensional.

Proposição 3.4. *Se $\Omega \in \Omega^{2,3}$ é uma superfície discreta fechada e orientável, então $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P) = w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(P))$.*

Prova. Pelo Teorema 3.1, tem-se que:

$$\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, \langle (P^{x_1}, P^{x_2}, z), P \rangle) = w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}(P)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}((P^{x_1}, P^{x_2}, z))).$$

Aplicando-se o Teorema 3.5, vale o limite abaixo:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \rho_1}((P^{x_1}, P^{x_2}, z))) = 0,$$

e o resultado segue imediatamente. $\square$

Duas propriedades acerca de $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}$, importantes na implementação do algoritmo de pertinência, são enunciadas na proposição abaixo e podem ser provadas imediatamente a partir da definição da função.

Proposição 3.5. *A função $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}$:*

- *distribui sobre as células τ_i de $\Omega = \bigcup_{i=0}^{n-1} \tau_i$:*

$$\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \tau_i, P\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\tau_i, P).$$

- *é invariante sob mudanças de escala:*

$$\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\} : \mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(a\Omega, aP) = \mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P).$$

Finalmente, para a implementação de $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}$, será necessário escolher os limites para ρ_0 e ρ_1 . Inicialmente, serão tomados os limites $\rho_0 \uparrow 0$ e $\rho_1 \uparrow 0$. Posteriormente, será determinada uma direção ótima para rasterização, semelhante à técnica desenvolvida no capítulo anterior.

Definição 3.8. *Defina-se a função de rasterização $\mathcal{F} : \Omega^{2,3} \times \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

$$\mathcal{F}(\Omega, P) = \lim_{\rho_0, \rho_1 \uparrow 0} \mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P).$$

Intuitivamente, a rasterização definida por $\mathcal{F}(\Omega, P)$ faz uso de uma semi-reta paralela, no limite, ao eixo z , orientada no sentido negativo do eixo. Definida, então, uma função de rasterização que coincide com o número de rotação, o próximo passo será implementá-la.

3.5 Algoritmo de Pertinência

Como a função de rasterização $\mathcal{F}(\Omega, P)$ é invariante sob translações inteiras, o algoritmo de pertinência será construído somente para a origem $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{Z}^3$. Para outros pontos P diferentes da origem, basta aplicar o processo de normalização do ponto e tem-se:

$$\mathcal{F}(\Omega, P) = \mathcal{F}(\Omega - P, \mathcal{O}).$$

Assim, a partir deste instante, todos os resultados apresentados neste capítulo são referentes à pertinência da origem em relação a uma superfície já translada pela normalização. Além disto, como $\mathcal{F}(\Omega, P)$ distribui sobre uniões das células 2-dimensionais da superfície, os resultados farão referências sempre a células discretas 2-dimensionais mergulhadas em $\mathbb{Z}^3$. Estes resultados serão chamados de contribuição de uma célula para o número de rotação da origem e, o número de rotação final, será obtido através de um somatório destas contribuições. Inicialmente, será necessária a definição de hiperplano discreto tridimensional:

Definição 3.9. *Dados $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3, 4$, um hiperplano discreto tridimensional $\mathcal{H}$, ou simplesmente um plano tridimensional, é o conjunto:*

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0\}.$$

Alguns casos para implementação de $\mathcal{F}$ são bastante triviais. O primeiro deles analisa o caso em que uma célula está contida num hiperplano tridimensional paralelo ao eixo z :

Proposição 3.6. *Seja $\Omega \in \Omega_1^{2,3}$ contida num hiperplano $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ é paralelo ao eixo z , então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.*

Prova. Se $\mathcal{H}$ é paralelo ao eixo z , então $\varphi(\Omega)$ não intersecta o eixo z . Para (r, ρ_0, ρ_1) pequenos o suficiente e $(0, 0, z) \in \mathbb{Z}^3$, $z < 0$ e $|z|$ grande o suficiente, as imersões $\varphi(\Omega)$ e $\varphi_{(r, \rho_0, \rho_1)}(\langle (0, 0, z), \mathcal{O} \rangle)$ não têm intersecção. Isto segue diretamente da definição de $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{P})$. $\square$

Se o hiperplano $\mathcal{H}$ não é paralelo ao eixo z , então existem duas situações: $\mathcal{H}$ intercepta o eixo z segundo numa coordenada inteira ou $\mathcal{H}$ contém todos os pontos inteiros do eixo z . A primeira situação é tratada pelo resultado mostrado na próxima página.

Proposição 3.7. *Seja $\Omega \in \Omega_1^{2,3}$ contida num hiperplano $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{H} \cap \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}\} = \{Q\}$, então:*

- se $Q^{x_3} > 0$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.
- se $Q^{x_3} \leq 0$, então considere-se Ω_{XY} como a projeção ortogonal de Ω no plano discreto XY :
 - se $(Q^{x_1}, Q^{x_2}) \in \Omega_{XY}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = s(\vec{\Omega} \cdot (0, 0, -1))$;
 - se $(Q^{x_1}, Q^{x_2}) \notin \Omega_{XY}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.

Antes de realizar a prova desta proposição, ressalta-se que a condição $(Q^{x_1}, Q^{x_2}) \in \Omega_{XY}$ significa, essencialmente, testar se o semi-eixo negativo z e a imersão $\varphi(\Omega)$ têm intersecção. Claramente, isto é uma instância do problema de pertinência bidimensional no hiperplano $\mathcal{H}$ que pode ser resolvido via projeção no plano XY . É importante ressaltar que o tratamento de casos especiais, como será mostrado nos resultados da implementação, é remetido ao tratamento de casos especiais da pertinência bidimensional.

Prova. Se $Q^{x_3} > 0$, então para (r, ρ_0, ρ_1) pequenos o suficiente e $(0, 0, z) \in \mathbb{Z}^3$, $z < 0$ e $|z|$ grande o suficiente, as imersões $\varphi(\Omega)$ e $\varphi_{(r, \rho_0, \rho_1)}((0, 0, z), \mathcal{O})$ não têm intersecção. Logo, $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.

Considere-se, agora, $Q^{x_3} \leq 0$. Se $(Q^{x_1}, Q^{x_2}) \in \Omega_{XY}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) \neq 0$ e pode-se afirmar ainda mais: $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = +1$ ou $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = -1$, pois ocorre apenas uma intersecção. Como Ω não é paralela ao eixo z , tem-se que $s(\vec{\Omega} \cdot (0, 0, -1)) = +1$ ou $s(\vec{\Omega} \cdot (0, 0, -1)) = -1$. Porém, pela Definição 3.5, segue imediatamente que $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = s(\vec{\Omega} \cdot (0, 0, -1))$. Por outro lado, se $(Q^{x_1}, Q^{x_2}) \notin \Omega_{XY}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$, pois não ocorre intersecção. $\square$

Finalmente, na segunda situação, o resultado é bastante simples:

Proposição 3.8. *Seja $\Omega \in \Omega_1^{2,3}$ contida num hiperplano $\mathcal{H}$. Se $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{H}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.*

Prova. As projeções de $\varphi(\Omega)$ e $\varphi_{\rho_0, \rho_1}(\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}_-\})$ no plano XY geram, respectivamente, uma reta que passa pela origem e um ponto que não está sobre esta reta. Logo, a perturbação do semi-eixo negativo z não gera intersecções e $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$. $\square$

O algoritmo de pertinência consiste na verificação de cada um dos casos anteriores para cada célula Ω da superfície discreta. O primeiro passo é definir uma função de contribuição para cada célula, conforme mostrado a seguir:

```

CONTRIBUICAO(Celula  $\Omega$ )
1   $\mathcal{H} \leftarrow \text{HIPERPLANO}(\Omega)$ 
2  if  $\mathcal{H} \cap \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$   $\triangleright$  Proposição 3.6
3    then return 0
4  else if  $(0, 0, 0) \in \mathcal{H}$  and  $(0, 0, 1) \in \mathcal{H}$   $\triangleright$  Proposição 3.8
5    then return 0
6  else  $Q \leftarrow \mathcal{H} \cap \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}\}$   $\triangleright$  Proposição 3.7
7    if  $Q^{x_3} \leq 0$ 
8      then  $\Omega_{XY} \leftarrow \text{PROJECAOXY}(\Omega)$ 
9        if  $\text{NUMEROROTACAO2D}(\Omega_{XY}, (0, 0)) \neq 0$ 
10          then return  $s(\vec{\Omega} \cdot (0, 0, -1))$ 
11          else return 0
12    else return 0

```

A função HIPERPLANO calcula o hiperplano tridimensional $\mathcal{H}$ que contém a célula Ω , enquanto que a função PROJECAOXY projeta uma célula 2-dimensional, mergulhada em $\mathbb{Z}^3$, no plano discreto $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{Z}\}$. A verificação se o eixo z discreto está contido num hiperplano $\mathcal{H}$ pode ser realizada de maneira muito eficiente determinando se $\mathcal{H}$ contém dois pontos distintos do eixo, $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ por exemplo. Se a célula Ω é formada por m células 1-dimensionais, a complexidade da função CONTRIBUICAO, mostrada acima, é $O(m)$ pois as chamadas a PROJECAOXY e a NUMEROROTACAO2D são de ordem $O(m)$ e, todos os passos restantes, são $O(1)$. Reforçando novamente a distribuição de $\mathcal{F}$ sobre uniões de células, constrói-se uma função para testar a pertinência de um ponto genérico $P \in \mathbb{Z}^3$ através do somatório das contribuições de cada célula, com o ponto P normalizado:

```

NUMEROROTACAO3D(Complexo  $\Omega$ , Ponto  $P$ )
1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\tau_i$  in  $\Omega$ 
3    do  $w \leftarrow w + \text{CONTRIBUICAO}(\tau_i - P)$ 
4  return  $w$ 

```

Se Ω é formado por n células 2-dimensionais, o número de chamadas à função CONTRIBUICAO é $O(n)$. Assim como no caso bidimensional, a determinação de uma direção ótima para rasterização e reduções ao teste segundo o eixo z podem ser realizadas e permitem reduzir de maneira significativa o número de chamadas à função CONTRIBUICAO e, consequentemente, reduzir a constante de complexidade do teste.

3.6 Implementação e resultados do teste de pertinência tridimensional

Esta seção implementa o teste de pertinência descrito nas seções anteriores, juntamente com a otimização para determinação da direção ótima de rasterização a redução ao teste de pertinência segundo a direção do eixo z . Evitou-se uma descrição muito detalhada da determinação ótima de rasterização e redução, como a realizada anteriormente, pois ela é extremamente análoga ao caso bidimensional. Praticamente, a únicas diferenças significativas são a quantidade de direções de rasterização e o tamanho da matriz de redução.

3.6.1 Estruturas de dados e métodos

A implementação do teste de pertinência tridimensional é formada por seis classes: Celula2D, Hiperplano2D, Complexo2D, Celula3D, Hiperplano3D e Complexo3D. As três primeiras classes, com exceção da classe Complexo2D, têm implementação idêntica ao caso bidimensional.

A modificação realizada na classe Complexo2D consistiu na introdução de um vetor tridimensional de números inteiros, que define a orientação do complexo, e de um método chamado orientacaoRelativa:

```
public class Complexo2D {
    Vector hiperplanos;           // Grupos de hiperplanos que formam o complexo
    int dirOtima=0;               // Direção ótima de rasterização
    int m[] []={{1,0},{0,1}};    // Matriz de redução
    int orient[]=new int[3];      // Orientacao do complexo
    ...
    void insercaoCelula(int x0,int y0,int x1,int y1){...}
    void direcaoOtima(){...}
```



```

void matrizTransformacao(){...}
void remocaoHiperplanos(){...}
void transformacaoHiperplanos(){...}
int numeroRotacao(int x,int y){...}
int orientacaoRelativa(){...}

```

No caso do complexo contribuir para o número de rotação tridimensional de um ponto, a contribuição é calculada pelo método `orientacaoRelativa`, obtida pelo sinal do produto escalar entre o vetor que define a orientação do complexo e o versor negativo $(0,0,-1)$, que define o eixo z .

A classe `Celula3D` é uma classe auxiliar para leitura e pré-processamento de um complexo tridimensional. Sua estrutura é mostrada a seguir:

```

public class Celula3D {
    int celulas[];
    int orientacao[];
    ...
    void reducao(int m[] []){...}
    Complexo2D conversao(){...}
}

```

Tal classe armazena todas as 0-células de um complexo tridimensional no vetor `celulas[]` e sua orientação. Existem dois métodos importantes na classe: `reducao(int m[] [])`, que aplica uma transformação de rotação (redução) ao caso de rasterização segundo o eixo z , e `conversao()`, que permite a conversão desta estrutura auxiliar para um objeto do tipo `Complexo2D`. A conversão é mostrada abaixo:

```

Complexo2D converte(){
    Complexo2D cp=new Complexo2D(orientacao);
    for (int i = 0; i < celulas.length / 3 ; i++) {
        cp.insereCelula(celulas[(3 * i)%celulas.length],
                        celulas[(3 * i + 1)%celulas.length],
                        celulas[(3 * (i + 1))%celulas.length],
                        celulas[(3 * (i + 1) + 1)%celulas.length]);
    }
    cp.direcaoOtima();
    cp.matrizTransformacao();
    cp.transformacaoHiperplanos();
    cp.removeHiperplanos();
    return(cp);
}

```

É importante ressaltar que a conversão produz um complexo bidimensional já projetado no plano XY e com estrutura de hiperplanos já otimizada.

A classe Hiperplano3D permite agrupar, num instante inicial, objetos do tipo Celula3D e, depois das transformações de redução, objetos do tipo Complexo2D, prontos receber consultas do tipo pertinência bidimensional. Os atributos e os métodos mais importantes da classe são mostrados a seguir:

```
class Hiperplano3D {
    int a,b,c,d;        // Coeficientes do hiperplano
    Vector celulas;     // Células do hiperplano
    ...
    void reducao(int m[][]) {
    boolean interseccao(){...}
    boolean abaixo(int x,int y,int z){...}
    int contribuicao(int x,int y,int z){...}
}
```

O método `reducao(int m[][])` aplica a transformação de redução `m` aos coeficientes e a todas às células do hiperplano. Os métodos `interseccao()` e `abaixo()` são métodos auxiliares para cálculo da contribuição das células para o número de rotação e decidem, respectivamente, se o hiperplano tem intersecção com o eixo `z` e se o hiperplano está abaixo do ponto a ser testado. Pelo teste tridimensional desenvolvido nas seções anteriores, é importante ressaltar que somente os planos abaixo dos pontos testados possuem células que podem contribuir efetivamente para o número de rotação.

O método `contribuicao(int x,int y,int z)` calcula a contribuição das células do hiperplano para o número de rotação e tem uma implementação análoga ao caso bidimensional:

```
int contribuicao(int x,int y,int z){
    int w = 0;
    for (int i = 0; i < celulas.size(); i++) {
        int contrib= ((Complexo2D) celulas.elementAt(i)).numeroRotacao(x,y);
        if (contrib != 0)
            w += ((Complexo2D) celulas.elementAt(i)).orientacaoRelativa();
    }
    return (w);
}
```

Finalmente, tem-se a classe `Complexo3D`, que armazena toda a estrutura de um complexo tridimensional:

```
public class Complexo3D {
    Vector hiperplanos;           // Grupos de hiperplanos que formam o complexo
    int dirOtima=0;              // Direção ótima de rasterização
    int m[][]={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}; // Matriz de redução
    ...
    void insercaoCelula(int orient[], int celulas[]){...}
    void direcaoOtima(){...}
    void matrizTransformacao(){...}
    void remocaoHiperplanos(){...}
    void transformacaoHiperplanos(){...}
    int numeroRotacao(int x,int y,int z){...}
}
```

A estrutura de tal classe é muito semelhante à classe `Complexo2D`, exceto por dois fatos:

- a matriz de redução é de ordem 3×3 ;
- a inserção das células, feita através do método `insercaoCelula`, recebe um vetor de 0-células mergulhadas em $\mathbb{Z}^3$ que formam uma célula do complexo tridimensional e a orientação de tal célula.

O cálculo do número de rotação, segundo a função `CONTRIBUICAO` deste capítulo, é implementada pelo método abaixo:

```
int numeroRotacao(int x, int y,int z) {
    int soma = 0;
    for (int i = 0; i < hiperplanos.size(); i++) {
        Vector v = ( (Vector) hiperplanos.elementAt(i));
        for (int j = 0; j < v.size(); j++) {
            Hiperplano3D hp = (Hiperplano3D) v.elementAt(j);
            if (hp.interseccao()) {
                if (hp.abaixo(x, y, z)) {
                    soma += hp.contribuicao(x, y, z);
                }
            }
        }
    }
    return (soma);
}
```

Para tornar este método mais eficiente, foi detectado somente o caso em que pode haver a contribuição efetiva de uma célula.

3.6.2 Testes e resultados

Para demonstrar a sensibilidade do teste de pertinência proposto, foram construídos vários bordos de complexos celulares discretos tridimensionais e classificada a pertinência de vários pontos. Cada bordo foi armazenado num arquivo no formato PLY, desenvolvido pela Universidade de Stanford. Cada vértice é indexado por um número natural a partir do valor 0. O vetor que define a orientação de cada célula não faz parte da descrição do arquivo e é calculado em função da ordem das 0-células de cada face. Todos os vetores de orientação são normalizados. A implementação lê um arquivo no formato PLY e instancia, inicialmente, um objeto do tipo COMPLEXO3D. As células lidas, após as transformações descritas na seção anterior, estão agrupadas em instâncias da classe HIPERPLANO2D e os testes de pertinências poder ser iniciados.

O primeiro teste realizado, mostrado na Figura 3.5, exibe versões discretas de quatro dos sólidos de Platão.

Figura 3.5: Alguns casos elementares de pertinência.

Tais sólidos possuem tipos variados de células e são convexos, o que os torna casos simples para pertinência. Todas as células do bordo foram orientadas para o exterior e

foi, então realizado o teste de pertinência para a origem. Para todos os casos, o resultado final foi +1. O resultado está correto, pois encontra-se, com a translação ϵ somente uma face e o sinal produto escalar do vetor de orientação e o versor $(0, 0, -1)$ é positivo.

O segundo grupo de testes incluiu os casos especiais várias células compartilhando a mesma 0-célula. Trata-se de um caso relativamente complexo, pois se a célula compartilhada for o ponto que está sendo testado ou se encontrar na trajetória do raio de teste, quantas intersecções devem ser contadas ?

Figura 3.6: Casos especiais com várias células compartilhando uma mesma 0-célula.

O ponto P_1 , no caso (a) é considerado um estado especial enquanto que em (b) é um caso convencional. No primeiro caso, o algoritmo devolveu 0, ou seja, P_1 é um ponto exterior. Com a translação ϵ , foi contada apenas uma intersecção com as células que compartilham a 0-célula, que contribui com -1 e com a célula inferior do objeto, que contribui com $+1$. Isto está correto, pois o ponto está sobre a superfície e, a priori, não teria um número de rotação bem-definido. No caso (b), seu número de rotação é $+1$ e a justificativa segue a mesma linha do teste da Figura 3.5. Já o ponto P_2 é especial nos dois casos, pois o raio (sem a translação ϵ) cairia diretamente na intersecção. Porém, com tal translação são encontradas somente duas células no caminho do raio, uma delas contribuindo com $+1$ e outra com -1 . Assim, o número de rotação de P_2 nos dois casos é zero e o ponto está no exterior, como esperado.

Na Figura 3.7, mostrada na próxima página, são iniciados os testes usando objetos com auto-intersecção. Neste primeiro exemplo de auto-intersecção, considerado simples, foram testados dois pontos, P_1 e P_2 .

Em ambos os casos, o resultado do número de rotação foi 0. Mesmo com auto-intersecção, a justificativa do resultado é análoga ao caso anterior, pois P_1 está na superfície e P_2 é exterior.

(a) Eliminação das faces ocultas (b) Superfície completa

Figura 3.7: Superfície com auto-intersecção simples.

O próximo caso, mostrado na Figura 3.8, é um pouco mais complexo e é um exemplo de situação encontrada em sistemas de modelagem baseada em CSG (*Constructive Solid Geometry*) ([FSF04]). O objeto foi construído a partir da operação de união de três instâncias de uma mesma primitiva, produzindo um objeto com auto-intersecção.

(a) Eliminação das faces ocultas (b) Conjunto das superfícies

Figura 3.8: Objeto com auto-intersecção mais complexa.

Foram classificados quatro pontos. É importante observar que os testes foram efetuados separadamente para cada superfície de cada primitiva, semelhante à classificação

convencional em CSG. Para o ponto P_1 , o resultado foi +1, pois o ponto está no interior do objeto. O raio encontrou três células, duas contribuindo com +1 e uma com -1. Para os demais pontos, o resultado foi 0 pois os pontos estão no exterior do objeto.

O próximo resultado apresenta outro exemplo na área de modelagem. O objeto foi construído com uma primitiva simples, um cubo, cujas instâncias foram escaladas e unidas de forma a formar várias intersecções nas fronteiras dos cubos, conforme mostra a superfície discreta.

(a) Objeto renderizado

(b) Superfície completa

(c) Pontos interiores e da superfície

Figura 3.9: Objeto com auto-intersecção, gerado a partir de união de várias instâncias de uma mesma primitiva escalada.

Na figura anterior, são mostrados também os pontos interiores e os pontos da superfície do objeto. O conjunto formado por estes pontos poderia ser utilizado, por exemplo, em processos de visualização volumétrica.

Pode-se ainda, partir de uma primitiva formada por um objeto com auto-intersecção para formar estruturas mais complexas, conforme mostrado na figura a seguir.

(a) Primitiva com auto-intersecção

(b) Superfície CSG renderizada

Figura 3.10: Objeto recursivo formado pela união de primitivas com auto-intersecção.

O objeto mostrado na Figura 3.10(b) tem uma estrutura recursiva, formada por três grupos da mesma primitiva. O primeiro grupo representando a primitiva central é a instância de maior escala. A seguir, a primitiva foi reduzida pela metade e várias instâncias foram unidas com o primeiro grupo, formando uma união com auto-intersecção. Novamente, a primitiva foi reduzida pela metade e as instâncias foram unidas com o segundo grupo, também formando auto-intersecção. Ao final, formou-se um objeto com auto-intersecção composto de instâncias de primitivas com auto-intersecção. É importante ressaltar novamente que o teste é feito separadamente para cada superfície de cada primitiva, cujos resultados são combinados posteriormente através de somas.

A seguir, na Figura 3.11, é mostrada parte da superfície discreta resultante. Foram exibidos, também, parte dos pontos interiores e da superfície. Para evidenciar melhor a exibição dos pontos interiores, foi destacada uma parte da superfície no item (a) da figura e, os correspondentes pontos, no item (b).

(a) Superfície associada ao objeto recursivo

(b) Pontos classificados e da superfície

Figura 3.11: Superfície e pontos classificados.

Com exceção da última superfície, todas as outras possuem um número bastante reduzido de 2-células. Para evidenciar um pouco do desempenho do algoritmo, principalmente com a otimização dos hiperplanos, foram gerados exemplos com números elevados de células, mostrados a seguir.

O primeiro exemplo exhibe uma versão discreta do clássico exemplo BUNNY, obtido via *scanner 3D* pela Universidade de Stanford.

(a) Objeto renderizado

(b) Malha triangular

(c) Alguns pontos classificados

Figura 3.12: Várias visualizações do modelo BUNNY de Stanford.

Este modelo é formado por 69.451 células triangulares discretas bidimensionais. Foram testadas as pertinências de 50.000 pontos discretos.

Sem a otimização dos hiperplanos, seriam necessárias 3.472.550.000 invocações à função CONTRIBUICAO3D. Com a organização de hiperplanos tridimensionais, o número de invocações foi reduzido para 2.347.443.800, o que representa uma redução de 32.4%.

O último teste envolveu um modelo discreto do animal pré-histórico *Triceratops*, composto de 11.308 células triangulares discretas bidimensionais, mostradas abaixo:

(a) Objeto renderizado

(b) Superfície discreta

Figura 3.13: Modelo discreto do *Triceratops*.

Foram classificados 1.000.000 de pontos cujo resultado parcial, juntamente com os pontos da superfície, são mostrados na figura a seguir:

(a) Pontos classificados e da superfície

(b) Par estéreo de imagens sobrepostas

Figura 3.14: Pontos classificados e uma aplicação em visualização volumétrica.

Sem otimização dos hiperplanos tridimensionais, seriam necessárias 11.308.000.000 invocações à função CONTRIBUICAO3D. Com a otimização, são realizados 7.960.832.000, uma redução de 29.6%.

Finalmente, para ilustrar uma aplicação em visualização volumétrica, foram duplicados os pontos classificados e da superfície, formando dois grupos, conforme mostra a Figura 3.14(b). A cada grupo foi associada uma cor, verde e vermelho. Os dois grupos foram ligeiramente separados, de tal forma a configurar um par estéreo de imagens. Utilizando um simples óculos que faz polarização destas duas cores, observa-se perfeitamente o volume que forma o modelo. Assim, é possível a partir da classificação de pontos interiores formar estereogramas para visualização volumétrica.

Capítulo 4

Pertinência em dimensão arbitrária

As técnicas de pertinência apresentadas nos capítulos anteriores são generalizadas para objetos discretos de dimensão arbitrária neste capítulo. Após uma generalização do número de rotação para espaços de dimensão arbitrária, é apresentado um algoritmo geral para determinação de pertinência. O algoritmo apresenta uma técnica de redução recursiva de dimensão, que pode ser otimizada via agrupamento e redução de hiperplanos em cada dimensão.

4.1 Problema generalizado da pertinência

A principal dificuldade quando se aborda a pertinência para dimensões mais altas como, por exemplo $d = 4$, é a perda da intuição geométrica do que é interior e exterior, mesmo para hipersuperfícies simples como as esferas unitárias. Por exemplo, considere-se a esfera unitária 3-dimensional S^3 . Embora se trate de um objeto contínuo, ela ilustra de maneira adequada a perda da sensibilidade geométrica. A caracterização algébrica do interior de S^3 pode ser feita de forma muito simples. Em contrapartida, um dos únicos modelos geométricos visíveis de S^3 é obtido em $\mathbb{R}^3$ via Folheação de Reeb, conforme mostra a Figura 4.1, exibida na próxima página.

No ambiente discreto as coisas não são diferentes. Assim, no restante deste capítulo, todas as argumentações serão bastante algébricas, sem apelos intuitivos visuais, como ocorreu nos capítulos anteriores. Mesmo com a perda da sensibilidade geométrica, é possível caracterizar o número de rotação para qualquer dimensão, via Integral de Kronecker generalizada, o que permite definir a noção de interior e exterior a uma hipersuperfície discreta.

Figura 4.1: Modelo tridimensional de S^3 , via folheação por toros.

O problema generalizado da pertinência pode ser enunciado como: dado o bordo combinatório $\mathcal{M}$ de um objeto d -dimensional $\Omega \in \Omega_n^{d,d}$ e um ponto $P \in \mathbb{Z}^d$, o problema da pertinência tridimensional consiste em determinar se $P \in \Omega$ utilizando $\mathcal{M}$. Numa forma geral, o problema também consiste em verificar se P está no interior ou no exterior da hipersuperfície $\mathcal{M}$.

Novamente, existem duas formas básicas para se caracterizar a noção de interior e exterior de $\mathcal{M}$. Uma versão analítica, que emprega números de rotação generalizados, e uma geométrica. Sob determinadas restrições, as duas versões são equivalentes e, via esta equivalência, é possível construir um teste robusto para o problema generalizado da pertinência.

4.2 Números de rotação generalizados

4.2.1 Versão analítica

A construção da versão analítica via Integral de Kronecker segue os mesmos princípios apresentados no Capítulo 3, ou seja, através de subdivisões simpliciais é obtida uma

aproximação para volumes sinalizados e, passando-se ao limite, obtém-se a integral.

Seja $s : A \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma superfície C^{d-1} por partes definida num paralelepípedo $(d-1)$ -dimensional $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{d-1}, b_{d-1}]$ de $\mathbb{R}^{d-1}$. Suponha-se, ainda, que tal superfície seja sem bordo, orientável e parametrizada com componentes:

$$s(u) = (s_1(u), \dots, s_d(u)), \quad u \in A.$$

Defina-se $|s(u)|$ como a distância de $s(u)$ à origem de $\mathbb{R}^d$, ou seja:

$$|s(u)| = \left\{ \sum_{i=1}^d [s_i(u)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Assumindo-se que a origem de $\mathbb{R}^d$ não esteja no traço $T(s)$ da superfície s , tem-se que:

$$|s(u)| > 0, \quad u \in A.$$

Defina-se, então, a função $s^N : A \rightarrow \mathbb{R}^d$, com componentes $(s_1^N, \dots, s_d^N)$ dadas por:

$$s_j^N(u) = \frac{s_j(u)}{|s(u)|}, \quad j = 1, \dots, d, \quad u \in A.$$

Como $\left\{ \sum_{i=1}^d [s_i^N(u)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 1$, a função s^N descreve uma superfície cujo traço $T(s^N)$ está contido na esfera unitária bidimensional S^{d-1} . Agora, seja $\mathcal{V}$ o volume sinalizado subentendido pela superfície $s(u)$ e a origem. Este volume tem um sinal que é derivado da orientação em $\mathbb{R}^d$ e é usado para estabelecer uma orientação na esfera unitária S^{d-1} . Seja $\mathcal{P}_k$, $k = 1, 2, \dots$ uma seqüência de subdivisões simpliciais de A . Seja $\mathbf{x} : [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{d-1}]$ um simplexo típico em $\mathcal{P}_k$. Assim, uma aproximação $\mathcal{V}_k$ para o volume $\mathcal{V}$ é dado por:

$$\mathcal{V}_k = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{d!} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ s_1^N(\mathbf{x}_0) & \dots & s_d^N(\mathbf{x}_0) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_1^N(\mathbf{x}_{d-1}) & \dots & s_d^N(\mathbf{x}_{d-1}) & 1 \end{vmatrix}.$$

Cada um dos determinantes acima tem um sinal que é derivado da orientação de cada simplexo $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^d$. O volume $\mathcal{V}$ pode ser calculado, então, pelo limite:

$$\mathcal{V} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_k = \frac{1}{d} \int \cdots \int_A (-1)^d \det[s^N(u), D_1 s^N(u), \dots, D_{d-1} s^N(u)] du_1 \dots du_{d-1}.$$

Como $s^N(u)$ também é sem bordo, ele é fechada e a integral anterior é um múltiplo w do volume da esfera unitária S^{d-1} . Assim como nos casos bi e tridimensional, w é um número inteiro e obedece à relação abaixo:

$$\frac{1}{d} \int \cdots \int_A (-1)^d \det[s^N(u), D_1 s^N(u), \dots, D_{d-1} s^N(u)] du_1 \dots du_{d-1} = w V_{d-1}(1),$$

onde $V_{d-1}(1)$ representa o volume encerrado pela esfera unitária S^{d-1} . Este número inteiro é denominado número de rotação de s^N em relação à origem e seu valor é dado a partir da igualdade anterior:

$$w = \frac{1}{d V_{d-1}(1)} \int \cdots \int_A (-1)^d \det[s^N(u), D_1 s^N(u), \dots, D_{d-1} s^N(u)] du_1 \dots du_{d-1}$$

Tomando-se $A_{d-1}(1)$ como a área da superfície de S^{d-1} , não é difícil provar que:

$$A_{d-1}(1) = d V_{d-1}(1).$$

Utilizando-se o fato anterior, pode-se reescrever w como:

$$w = \frac{1}{A_{d-1}(1)} \int \cdots \int_A (-1)^d \det[s^N(u), D_1 s^N(u), \dots, D_{d-1} s^N(u)] du_1 \dots du_{d-1}$$

A Integral de Kronecker $K_{d-1}(s, (0, \dots, 0))$ da superfície $s(u)$ original em relação à origem é definida retirando-se o termo $(-1)^d$ e tomando-se as componentes $s_i(u, v)$ da seguinte forma:

$$K_{d-1}(s, (0, \dots, 0)) = \frac{1}{A_{d-1}(1)} \int \cdots \int_A \frac{\det[s(u), D_1 s(u), \dots, D_{d-1} s(u)]}{|s(u)|^d} du_1 \dots du_{d-1}$$

O número de rotação de $s(u)$ em relação à origem, $w(s, (0, \dots, 0))$, é dado por:

$$w(s, (0, \dots, 0)) = (-1)^d K_{d-1}(s, (0, \dots, 0)).$$

Numa definição mais geral da Integral de Kronecker no espaço tridimensional, considera-se um ponto genérico $P \in \mathbb{R}^d$ não contido no traço da superfície $s(u)$:

Definição 4.1. *Seja $s : A \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma hipersuperfície, definida num paralelepípedo $(d-1)$ -dimensional $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{d-1}, b_{d-1}]$, C^{d-1} por partes, orientável, sem bordo, parametrizada e $P \in \mathbb{R}^d$ não contido no traço $T(s)$ de $s(u)$. A Integral de Kronecker $K_{d-1}(s, P)$, de $s(u)$ em relação a P , é dada por:*

$$K_{d-1}(s, P) = \frac{1}{A_{d-1}(1)} \int \cdots \int_A \frac{\det[s(u) - P, D_1 s(u), \dots, D_{d-1} s(u)]}{|s(u) - P|^d} du_1 \dots du_{d-1}.$$

O número de rotação de $s(u)$ em relação a P , $w(s, P)$, é dado por :

$$w(s, P) = (-1)^d K_{d-1}(s, P).$$

Mesmo por métodos numéricos, o cálculo direto da integral generalizada mostrada acima pode ser bastante complexo. A próxima seção constrói, como nos casos bidimensional e tridimensional, uma versão geométrica do número de rotação generalizado que, sob certas restrições, é equivalente à definição dada acima.

4.2.2 Versão Geométrica

O mecanismo de construção de uma versão geométrica d -dimensional do número de rotação é análogo aos casos bi e tridimensional. Define-se o conceito de *função cross-weight d -dimensional* e constrói-se uma família específica de tais funções utilizando-se translações ϵ .

Definição 4.2. *Uma função $\mathcal{C} : \Omega^{d-1,d} \times \Lambda^d \rightarrow \mathbb{Z}$ é denominada uma função cross-weight d -dimensional, ou uma função CW d -dimensional, se satisfaz às propriedades a seguir:*

Distribuição sob uniões e concatenações

Se $\Omega = \cup_{i=0}^{n-1} \tau_i$, onde cada τ_i é uma célula discreta $(d-1)$ -dimensional que forma Ω e $L^1, L^2 \in \Lambda^d$, então:

$$\mathcal{C}(\Omega, L^1 \uplus L^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}(\tau_i, L^1) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}(\tau_i, L^2)$$

Inversão de sinal sob inversão de orientação

Se $-\Omega$ é objeto Ω com orientação contrária:

$$\mathcal{C}(-\Omega, L^1) = \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{R}(L^1)) = -\mathcal{C}(\Omega, L^1)$$

Nulidade sob simplexes e triângulos

Se Ω' é a superfície de simplexo d -dimensional $\Omega \in \Omega^{d,d}$ contido num hipercubo unitário d -dimensional e L^1 é um triângulo, então:

$$\mathcal{C}(\Omega', L^1) = 0.$$

Novamente, para se construir uma função CW específica serão utilizadas algumas imersões de objetos discretos em espaços contínuos:

Definição 4.3. Seja $\delta \in \mathbb{R}^d$ um vetor não-nulo:

- a imersão canônica de $\mathbb{Z}^d$ em $\mathbb{R}^d$ será denotada por φ .
- a imersão canônica de uma hipersuperfície discreta $\Omega \in \Omega^{d-1,d}$ em $\mathbb{R}^d$ será denotada por $\varphi(\Omega)$.
- a imersão de pontos $\varphi_\delta : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ por:

$$\varphi_\delta(P) = P + \delta.$$

- a imersão $\varphi_\delta(L)$ de uma lista $L = \langle L_0, L_1 \rangle$ de comprimento 1 como o segmento de reta parametrizado:

$$l(t) = (1 - t)L_0 + tL_1 + \delta, \quad t \in [0, 1].$$

- a imersão $\varphi_\delta(L)$ de listas $L \in \Lambda_n^d$ de comprimento $n > 1$ como o polígono não necessariamente fechado:

$$\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} \varphi_\delta(\langle L_i, L_{i+1} \rangle).$$

O conceito de se calcular o número de intersecções sinalizadas entre as células da hipersuperfície discreta e listas é generalizada na construção da função $\mathcal{W}_\epsilon$ mostrada abaixo:

Definição 4.4. *Seja $\epsilon \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \Omega^{d-1,d}$, defina-se a função $\mathcal{W}_\epsilon : \Omega^{d-1,d} \times \Lambda^d \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

$$\bullet \mathcal{W}_\epsilon : \Omega^{d-1,d} \times \Lambda_0^d \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = 0$$

$$\bullet \mathcal{W}_\epsilon : \Omega_1^{d-1,d} \times \Lambda_1^d \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \varphi(\Omega) \cap \varphi_\epsilon(L) = \emptyset \implies \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = 0 \\ \varphi(\Omega) \cap \varphi_\epsilon(L) \neq \emptyset \implies \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = s(\vec{\Omega} \cdot \Delta(L)) \end{cases}$$

$$\bullet \mathcal{W}_\epsilon : \Omega_{n_1}^{d-1,d} \times \Lambda_{n_2}^d \rightarrow \mathbb{Z}, n_1, n_2 \geq 2, \text{ e } \Omega = \bigcup_{i=0}^{n_1-1} \tau_i, \tau_i \in \Omega_1^{d-1,d}$$

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_\epsilon(\tau_i, < L_j, L_{j+1} >).$$

Ressalta-se, novamente, que a perturbação efetuada nas listas antes de se checar a ocorrência de intersecções permite colocar os dois objetos(hipersuperfícies e listas) em posição geral e realizar um tratamento homogêneo de casos especiais. A prova de que $\mathcal{W}_\epsilon$ é uma função CW é bastante análoga aos capítulos anteriores e é colocada a seguir.

Proposição 4.1. *$\mathcal{W}_\epsilon$ distribui sob uniões de células, concatenações de listas e muda de sinal quando a orientação da hipersuperfície ou da lista (não ambas) é invertida.*

Prova. A distribuição sob uniões de células e concatenações de listas decorre diretamente da última parte da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$. Se a orientação da hipersuperfície ou da lista, mas não de ambas, é invertida, o sinal do produto escalar da segunda parte da definição de $\mathcal{W}_\epsilon$ também é invertido, o que prova uma alteração do sinal da função. $\square$

A última parte da verificação de que $\mathcal{W}_\epsilon$ é uma função CW é obtida como um corolário de um resultado mais forte, que mostra a relação entre as versões analítica e geométrica do número de rotação.

4.2.3 Relação entre as versões analítica e geométrica

Para que a Integral de Kronecker, base da versão analítica, esteja bem definida é necessário que o ponto testado não esteja sobre o traço da superfície. Como todas as $(d - 1)$ -células de elementos de uma hipersuperfície Ω estão contidas em hiperplanos e com 0-células inteiras, tomando-se, por exemplo, deslocamentos ϵ não contidos em qualquer hiperplano definido por d pontos não-colineares de coordenadas inteiras, garante-se que $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$.

Impondo-se a restrição de que $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, mostra-se que as versões analítica e geométrica do número de rotação são equivalentes:

Teorema 4.1. *Seja $\Omega \in \Omega^{d-1,d}$ uma hipersuperfície discreta fechada e orientável. Se $L \in \Lambda_n^d$, $n \geq 0$, é uma lista fechada e $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \Omega^{d-1,d}$, então:*

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_n)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)).$$

Prova. As integrais estão bem definidas pelo fato das imersões com perturbação nunca mapearem pontos com coordenadas inteiras sobre o traço da superfície discreta.

O restante da prova utiliza novamente uma dupla indução. A indução mais externa é feita no comprimento da lista L e, a mais interna, na quantidade de células da hipersuperfície Ω :

- Se $n = 0$, então a lista L se reduz a um único ponto e tem-se necessariamente:

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) \stackrel{\text{def}}{=} 0 = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)).$$

- Considere-se, agora, $n = 1$:

- Se Ω é o bordo combinatório de única célula d -dimensional e tomando-se o fato que ela é fechada, então ela é homeomorfa a S^{d-1} . Neste caso, a prova consiste em estudar as posições relativas de tal célula e as imersões com perturbação dos extremos do segmento L . Tem-se três casos distintos:

1. $\varphi_\epsilon(L_0)$ e $\varphi_\epsilon(L_1)$ estão ambos no interior de $\varphi(\Omega)$.
2. $\varphi_\epsilon(L_0)$ e $\varphi_\epsilon(L_1)$ estão ambos no exterior de $\varphi(\Omega)$.
3. $\varphi_\epsilon(L_0)$ e $\varphi_\epsilon(L_1)$ estão em componentes conexas diferentes, um no exterior e outro no interior.

No caso (1), os dois extremos perturbados têm o mesmo número de rotação (+1 ou -1) e a diferença resulta em zero. Por outro lado, o segmento não intersecta nenhuma célula de Ω , o que também anula o resultado da versão geométrica.

No caso (2), o número de rotação dos dois extremos é zero. Se o segmento L não intersecta nenhuma das células de Ω , o valor da versão geométrica é nulo e o resultado segue imediatamente. Porém, se ocorre intersecção, duas células de Ω são envolvidas, cada uma resultado em valores +1 e -1, respectivamente, para o resultado da versão geométrica, o que a torna nula.

No caso (3), tem-se um extremo cuja imersão com perturbação resulta num valor nulo para o número de rotação. Assim, o número de rotação do outro extremo é +1 ou -1, dependendo da orientação da $(d - 1)$ -células de Ω e a diferença das versões analíticas também assume tais valores. Por outro lado, a versão geométrica conta apenas uma intersecção e a contribuição de tal intersecção depende do sinal da orientação relativa entre o segmento L e a célula participante da intersecção, que pode ser +1 ou -1 e iguala-se ao resultado da versão analítica, pela dependência da orientação da célula.

- Suponha-se, agora, que Ω seja bordo combinatório de um objeto discreto d -dimensional formado de, pelo menos, duas células d -dimensionais. Seja Ω formada por m células $(d - 1)$ -dimensionais. Como Ω pode ser decomposta como uma soma conexa de duas hipersuperfícies fechadas Ω_1 e Ω_2 , cujas quantidades de $(d - 1)$ -células são menores que m , tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) &= \mathcal{W}_\epsilon(\Omega_1 \cup \Omega_2, L) = \mathcal{W}_\epsilon(\Omega_1, L) + \mathcal{W}_\epsilon(\Omega_2, L) \\ &\stackrel{ind.}{=} w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_0)) + w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_0)) \\ &= w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_1)) + w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_1), \varphi_\epsilon(L_0)) - w(\varphi(\Omega_2), \varphi_\epsilon(L_0)) \\ &= w(\varphi(\Omega_1 \cup \Omega_2), \varphi_\epsilon(L_1)) - w(\varphi(\Omega_1 \cup \Omega_2), \varphi_\epsilon(L_0)) \end{aligned}$$

É importante ressaltar que grande parte das igualdades são válidas pelo fato da $(d - 1)$ -célula usada como disco $(d - 1)$ -dimensional na soma conexa aparecer com orientações contrárias nas duas parcelas da decomposição, o que não altera o resultado do número de rotação.

- Tomando-se novamente a indução externa, assuma-se o resultado válido para $n = k \geq 1$. Seja L uma lista de comprimento $k + 1$ e m fixo. A lista L pode ser

decomposta como $L = \langle L_0, \dots, L_k \rangle \uplus \langle L_k, L_{k+1} \rangle$. Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, \langle L_0, \dots, L_k \rangle) + \mathcal{W}_\epsilon(\Omega, \langle L_k, L_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{\text{ind.}}{=} w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_k)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) + w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_{k+1})) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_k)) \\ &= w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_{k+1})) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)). \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando-se $n = k$ fixo e decompondo-se Ω em duas hipersuperfícies fechadas, a demonstração segue imediatamente por indução nesta decomposição. □

Como corolário deste teorema, prova-se que $\mathcal{W}_\epsilon$ anula-se sobre simplexes d -dimensionais e triângulos, terminando-se a sequência de verificações de que $\mathcal{W}_\epsilon$ é uma função CW:

Corolário 4.1. *Para ϵ nas condições do teorema anterior, $\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L)$ anula-se sob simplexes d -dimensionais e triângulos.*

Prova. Seja $L = \langle L_0, L_1, L_2, L_3 \rangle$ um triângulo e Ω um simplexo d -dimensional contido num hipercubo unitário d -dimensional. Isto implica que $L_3 = L_0$. Pelo teorema anterior:

$$\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_3)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\epsilon(L_0)) = 0. \quad \square$$

As próximas fases minimizam os efeitos da translação ϵ , obtém uma versão generalizada do Teorema Discreto de Jordan-Bröwer e propõem um algoritmo generalizado de pertinência.

4.2.4 Existência e escolha da translação ϵ

Existem infinitas possibilidades de escolha para a translação ϵ , conforme mostrado pelo resultado a seguir:

Teorema 4.2. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r_0, \dots, r_{d-2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Se $\epsilon = (q, r_0, \dots, r_{d-2})$, então $\epsilon \notin \varphi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \Omega_1^{d-1, d}$.*

Prova. As imersões $\varphi(\Omega)$ das $(d-1)$ -células $\Omega \in \Omega_1^{d-1, d}$ têm como suporte hiperplanos d -dimensionais definidos por números inteiros. Seja $a_1x_1 + \dots + a_dx_d + a_{d+1} = 0$ um hiperplano que passa por d pontos não-colineares de $\mathbb{Z}^d$, com $a_i, i = 1, \dots, d+1$ inteiros. Suponha, por absurdo, que $(x_1, \dots, x_d)$ esteja sobre este plano e que x_1 seja um número racional não-inteiro:

- tomando-se $a_i = 0$, $i = 2, \dots, d$, então o hiperplano toma a forma $x_1 = -\frac{a_{d+1}}{a_1}$, o que contradiz o fato que o plano passa por, pelo menos, d pontos com coordenadas inteiras.
- tomando-se $a_i \neq 0$, $i = 2, \dots, d$, x_1 considerado como racional implica que x_i , $i = 2, \dots, d$ sejam necessariamente números racionais.

□

Como nos capítulos anteriores, a utilização direta das translações estabelecidas anteriormente pode comprometer aspectos de robustez dos algoritmos, pois o objetivo é manipular representações somente inteiras. Assim, os dois próximos resultados permitirão minimizar os efeitos das translações.

O primeiro resultado novamente afirma que, para qualquer hipersuperfície discreta $(d-1)$ -dimensional Ω , existe uma translação ϵ pequena o suficiente para evitar que perturbações de pontos P por ϵ sejam mapeados sobre a imersão $\varphi(\Omega)$:

Proposição 4.2. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r_0, \dots, r_{d-2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então, $\forall \Omega \in \Omega^{d-1,d}$ e $P \in \mathbb{Z}^d$ existe um $\lambda > 0$ tal que se $0 < \mu(q, r_0, \dots, r_{d-2}) \leq \lambda$, tomando-se $\epsilon = \mu(q, r_0, \dots, r_{d-2})$, vale $\varphi(\langle P, P + \epsilon \rangle) \cap \varphi(\Omega) \subset \{P\}$.*

Prova. A demonstração é análoga à Proposição 3.2, pois os valores de e , v e ρ valem para qualquer dimensão inteira. Constrói-se m da mesma forma e obtém-se λ para os casos da norma de uma célula ser maior ou igual a m e menor que m . □

O segundo resultado mostra que é possível se tomar perturbações infinitesimais, onde somente a direção será relevante:

Proposição 4.3. *Seja $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e $r_0, \dots, r_{d-2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dados. Então, $\forall \Omega \in \Omega^{d-1,d}$ e $L \in \Lambda^n$, existe um $\lambda > 0$ tal que se $0 < \mu_1(q, r_0, \dots, r_{d-2}) \leq \mu_2(q, r_0, \dots, r_{d-2}) \leq \lambda$, então vale:*

$$\mathcal{W}_{\mu_1(q, r_0, \dots, r_{d-2})}(\Omega, L) = \mathcal{W}_{\mu_2(q, r_0, \dots, r_{d-2})}(\Omega, L).$$

Prova. A prova também é análoga à Proposição 3.3. Escolhe-se λ segundo a Proposição 4.2 e a prova é novamente dividida em dois casos. No primeiro caso, se as duas translações μ_1 e μ_2 provocam ou não provocam, simultaneamente, intersecções com a imersão $\varphi(\Omega)$, o resultado segue imediatamente. Caso contrário, se somente uma das translações provoca intersecção com a imersão $\varphi(\Omega)$, entra-se em contradição com a Proposição 4.2. □

Tome-se, a partir deste ponto, a translação ϵ em coordenadas esféricas generalizadas com a notação $\epsilon = (r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})$. Como o tamanho da translação r pode ser tomado infinitesimalmente pequeno, será construída uma nova função CW $\mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ como base no resultado abaixo:

Teorema 4.3. *Seja $\epsilon = (r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})$ uma translação em $\mathbb{R}^d$, com $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, $\rho_0, \dots, \rho_{d-2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. O limite $\lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(\Omega, L)$, existe e a função-limite:*

$$\mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{W}_{\lambda\epsilon}(\Omega, L)$$

é uma função do tipo CW.

Prova. Sejam $\Omega \in \Omega^{d-1, d}$ e $L \in \Lambda^d$ dados. Escolha λ como na Proposição 4.3. Assim, $\forall 0 < \mu_1 \leq \lambda, 0 < \mu_2 \leq \lambda$, tem-se $\mathcal{W}_{\mu_1\epsilon}(\Omega, L) = \mathcal{W}_{\mu_2\epsilon}(\Omega, L)$, o que implica que o limite proposto existe.

A distribuição sob concatenações e mudanças de sinal sob alterações de orientação são imediatas para $\mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$, pois estas propriedades são verificadas imediatamente no limite. Ainda mais, como $\mathcal{W}_\epsilon$ se anula com simplexos d -dimensionais e triângulos, o mesmo ocorre no limite. Assim, $\mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ é uma função CW. $\square$

Antes de se construir efetivamente o algoritmo generalizado de pertinência, que irá implementar vários limites nos ângulos $\rho_0, \dots, \rho_{d-2}$, será estabelecida uma versão discreta generalizada no Teorema de Jordan-Bröwer d -dimensional.

Teorema 4.4. *Seja $(\rho_0, \dots, \rho_{d-2})$ uma direção em $\mathbb{R}^d$ não contida no plano definido por qualquer d -upla de pontos não-coplanares com coordenadas inteiras. Dada uma hipersuperfície discreta fechada e orientável $\Omega \in \Omega^{d-1, d}$, a função CW $\mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ separa o espaço $\mathbb{Z}^d$ em um número finito de regiões com pontos P com o mesmo número de rotação tridimensional:*

$$w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(P)).$$

Somente uma destas regiões é infinita, cujos pontos têm número de rotação 0. Além disto, para qualquer lista $L \in \Lambda_n^d$, se $w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(L_0)) \neq w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(L_n))$ então necessariamente $\varphi(\Omega) \cap \varphi(L) \neq \emptyset$.

Prova. Uma partição de $\mathbb{Z}^d$ é dada pela seguinte relação de equivalência:

$$P \equiv Q \Leftrightarrow \mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, L) = 0, \forall L \in \Lambda^d, L_0 = P \text{ e } L_{\#L} = Q.$$

O Teorema 4.1 mostra que cada uma das regiões da partição anterior possui pontos com números de rotação iguais. Seja D a maior distância, dentro da métrica discreta considerada, das 0-células da hipersuperfície Ω à origem. Se $|P| > D$, então $w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(P)) = 0$, pois P estará no exterior de Ω . Assim, tem-se um número finito de pontos com número de rotação não-nulo.

Finalmente, se $w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(L_0)) \neq w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(L_n))$, então $\mathcal{W}_\epsilon(\Omega, L) \neq 0$, pelo resultado do Teorema 4.1. Pela definição de $\mathcal{W}_\epsilon$, então $\varphi(\Omega) \cap \varphi_\epsilon(L) \neq \emptyset$. Como as imersões $\varphi_\epsilon(L)$ geram sempre conjuntos fechados para todo ϵ , no limite $r \downarrow 0$ tem-se necessariamente $\varphi(\Omega) \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ $\square$

4.3 Rasterização de objetos discretos d -dimensionais

A noção de função de rasterização é facilmente estendida para espaços discretos de qualquer dimensão:

Definição 4.5. *Uma função de rasterização d -dimensional $\mathcal{Q}(\Omega, P)$ é uma função*

$$\mathcal{Q} : \Omega^{d-1, d} \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}.$$

A partir da função CW construída no Teorema 4.3, será estabelecida uma função de rasterização específica com base numa semi-reta discreta(lista) tomada a partir do ponto a ser testado e paralela ao último eixo coordenado do espaço discreto:

Definição 4.6. *Defina-se a função de rasterização tridimensional $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}} : \Omega^{d-1, d} \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ por:*

$$\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, P) = \lim_{x_d \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, \langle (P^{x_1}, \dots, P^{x_{d-1}}, x_d), P \rangle).$$

Este limite não só existe como também calcula o número de rotação estabelecido no Teorema Discreto de Jordan-Bröwer d -dimensional, conforme mostra o próximo resultado:

Proposição 4.4. *Se $\Omega \in \Omega^{d-1, d}$, então $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, P) = w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(P))$.*

Prova. Pelo Teorema 4.1, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, \langle (P^{x_1}, \dots, P^{x_{d-1}}, x_d), P \rangle) &= w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(P)) \\ &\quad - w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}((P^{x_1}, \dots, P^{x_{d-1}}, x_d))). \end{aligned}$$

Aplicando-se o Teorema 4.5, vale o limite abaixo:

$$\lim_{x_d \rightarrow -\infty} w(\varphi(\Omega), \varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}((P^{x_1}, \dots, P^{x_{d-1}}, x_d))) = 0,$$

e o resultado segue imediatamente. $\square$

As propriedades de distribuição sob uniões de células e invariância sob mudanças de escala são facilmente estendidas para as funções $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ conforme mostra o resultado a seguir.

Proposição 4.5. • $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ distribui sobre as células τ_i de $\Omega = \bigcup_{i=0}^{n-1} \tau_i$:

$$\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \tau_i, P\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\tau_i, P).$$

• $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ é invariante sob mudanças de escala:

$$\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\} : \mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(a\Omega, aP) = \mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, P).$$

Prova. Seguem imediatamente da definição de $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ e propriedades operatórias de limites. $\square$

Direções para $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ que tendam, no limite, a um determinado eixo coordenado podem ser facilmente computadas. A próxima definição constrói uma instância específica de $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ com $\rho_i \uparrow 0$.

Definição 4.7. Defina-se a função de rasterização $\mathcal{F} : \Omega^{d-1, d} \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\mathcal{F}(\Omega, P) = \lim_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2} \uparrow 0} \mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, P).$$

Informalmente, a função $\mathcal{F}(\Omega, P)$ realiza uma perturbação infinitesimal nas semi-retas paralelas ao último eixo coordenado de $\mathbb{Z}^d$ cujas orientações são dadas pelo vetor $\underbrace{(0, \dots, -1)}_{d \text{ vezes}}$.

4.4 Algoritmo de Pertinência

A função de rasterização $\mathcal{F}(\Omega, P)$ é invariante sob translações inteiras. Assim, os casos de computação para tal função serão feitos para a origem de $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Z}^d$ e os outros pontos podem ser reduzidos estes casos via normalização $\mathcal{F}(\Omega, P) = \mathcal{F}(\Omega - P, \mathcal{O})$. Ainda mais, como $\mathcal{F}(\Omega, P)$ distribui-se sobre uniões de células, as computações são definidas definidas somente para células e fazem uso de hiperplanos discretos:

Definição 4.8. *Dados $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, (d+1)$, um hiperplano discreto d -dimensional $\mathcal{H}$, ou simplesmente um plano d -dimensional, é o conjunto:*

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : \left(\sum_{i=1}^d a_i x_i \right) + a_{d+1} = 0\}.$$

A computação de $\mathcal{F}(\Omega, P)$ utiliza as posições relativas de um hiperplano $\mathcal{H}$, que contém uma determinada célula da hipersuperfície, e o último eixo coordenado do espaço discreto d -dimensional. O primeiro deles analisa o caso em que uma célula está contida num hiperplano d -dimensional paralelo ao eixo $\underbrace{(0, \dots, 1)}_{d \text{ vezes}}$:

Proposição 4.6. *Seja $\Omega \in \Omega_1^{d-1,d}$ contida num hiperplano $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ é paralelo ao eixo $(0, \dots, 1)$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.*

Prova. Se $\mathcal{H}$ é paralelo ao eixo z , então $\varphi(\Omega)$ não intersecta o eixo z . Para (r, ρ_0, ρ_1) pequenos o suficiente e $(0, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, $x_d < 0$ e $|x_d|$ grande o suficiente, as imersões $\varphi(\Omega)$ e $\varphi_{(r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})}(\langle (0, \dots, x_d), \mathcal{O} \rangle)$ não têm intersecção. Isto segue diretamente da definição de $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{P})$. $\square$

Se o hiperplano $\mathcal{H}$ não é paralelo ao eixo $(0, \dots, 1)$, então existem novamente duas situações: $\mathcal{H}$ intercepta o eixo $(0, \dots, 1)$ segundo numa coordenada inteira ou $\mathcal{H}$ contém os pontos inteiros de tal eixo.

Proposição 4.7. *Seja $\Omega \in \Omega_1^{d-1,d}$ cujas 0-células estejam contidas num hiperplano discreto $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{H} \cap \{(0, \dots, z) : z \in \mathbb{Z}\} = \{Q\}$, então:*

- se $Q^{x_d} > 0$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.

- se $Q^{x_d} \leq 0$, então considere-se $\Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}$ como a projeção ortogonal de Ω no espaço discreto $X_1 \dots X_{d-1}$:
 - se $(Q^{x_1}, \dots, Q^{x_{d-1}}) \in \Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = s(\vec{\Omega} \cdot (0, \dots, -1))$;
 - se $(Q^{x_1}, \dots, Q^{x_{d-1}}) \notin \Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.

Prova. Se $Q^{x_d} > 0$, então para $(r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})$ pequenos o suficiente e $(0, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, $x_d < 0$ e $|x_d|$ grande o suficiente, as imersões $\varphi(\Omega)$ e $\varphi_{(r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})}(\langle (0, \dots, x_d), \mathcal{O} \rangle)$ não têm intersecção. Logo, $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.

Considere-se, agora, $Q^{x_d} \leq 0$. Se $(Q^{x_1}, \dots, Q^{x_{d-1}}) \in \Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) \neq 0$ e pode-se afirmar ainda mais: $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = +1$ ou $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = -1$, pois ocorre apenas uma intersecção. Como $\vec{\Omega}$ não é paralela ao último eixo coordenado, tem-se que $s(\vec{\Omega} \cdot (0, \dots, -1)) = +1$ ou $s(\vec{\Omega} \cdot (0, \dots, -1)) = -1$. Porém, pela Definição 4.5, segue imediatamente que $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = s(\vec{\Omega} \cdot (0, \dots, -1))$. Por outro lado, se $(Q^{x_1}, \dots, Q^{x_{d-1}}) \notin \Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$, pois não ocorre intersecção. $\square$

O teste $(Q^{x_1}, \dots, Q^{x_{d-1}}) \in \Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}$ define uma sequência recursiva de computações de pertinência, cada uma reduzindo o grau do espaço exatamente de uma unidade. Finalmente, na segunda situação, o resultado, apesar de simples, não é tão imediato:

Proposição 4.8. *Seja $\Omega \in \Omega_1^{d-1, d}$ contida num hiperplano $\mathcal{H}$. Se $\{(0, \dots, x_d) : x_d \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{H}$, então $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.*

Prova. As projeções de $\varphi(\Omega)$ e $\varphi_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\{(0, \dots, x_d) : x_d \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_-\})$ no espaço discreto $X_1 \dots X_{d-1}$ geram, respectivamente, um hiperplano que passa pela origem e um ponto que não está sobre este hiperplano. Logo, a perturbação do semi-eixo negativo x_d não gera intersecções e $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$. $\square$

Os resultados apresentados anteriormente contemplam todos os casos possíveis e, o algoritmo de pertinência consiste na verificação de cada uma deles para cada célula τ_i da superfície discreta. O primeiro passo é definir uma função de contribuição para cada célula, conforme mostrado na página a seguir.

CONTRIBUICAO(*Celula* Ω)

```

1   $\mathcal{H} \leftarrow \text{HIPERPLANO}(\Omega)$ 
2  if  $\mathcal{H} \cap \{(0, \dots, x_d) : x_d \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$   $\triangleright$  Proposição 4.6
3    then return 0
4  else if  $(0, \dots, 0) \in \mathcal{H}$  and  $(0, \dots, 1) \in \mathcal{H}$   $\triangleright$  Proposição 4.8
5    then return 0
6  else  $Q \leftarrow \mathcal{H} \cap \{(0, \dots, x_d) : x_d \in \mathbb{Z}\}$   $\triangleright$  Proposição 4.7
7    if  $Q^{x_d} \leq 0$ 
8      then  $\Omega_{X_1 \dots X_{d-1}} \leftarrow \text{PROJECAO}_{X_1 \dots X_{d-1}}(\Omega)$ 
9      if  $\text{NUMEROROTACAO}(\text{N-1})\text{D}(\Omega_{X_1 \dots X_{d-1}}, (Q^{x_1}, \dots, Q^{x_{d-1}})) \neq 0$ 
10         then return  $s(\vec{\Omega} \cdot (0, \dots, -1))$ 
11         else return 0
12    else return 0
```

A função HIPERPLANO calcula o hiperplano d -dimensional $\mathcal{H}$ que contém a célula Ω , enquanto que a função PROJECAO $_{X_1 \dots X_{d-1}}$ realiza uma projeção ortogonal da célula no espaço discreto $\mathbb{Z}^{d-1}$. A verificação se o eixo $(0, \dots, 1)$ discreto está contido num hiperplano $\mathcal{H}$ pode ser realizada de maneira muito eficiente determinando se $\mathcal{H}$ contém dois pontos distintos do eixo, $(0, \dots, 0)$ e $(0, \dots, 1)$ por exemplo.

Utilizando-se a distribuição de $\mathcal{F}$ sobre uniões de células, o número de rotação pode ser obtido através de um simples somatório:

NUMEROROTACAO ND(*Complexo* Ω , *Ponto* P)

```

1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\tau_i$  in  $\Omega$ 
3    do  $w \leftarrow w + \text{CONTRIBUICAO}(\tau_i - P)$ 
4  return  $w$ 
```

Se Ω é formado por n células $(d-1)$ -dimensionais, o número de chamadas à função CONTRIBUICAO é $O(n)$. Apesar de ter sido proposta apenas uma implementação segundo a direção último eixo coordenado, pode-se determinar uma direção ótima para rasterização e redução ao procedimento de contribuição descrito acima, de maneira análoga aos casos bidimensional e tridimensional, o que permite reduzir a constante de complexidade envolvida na análise assintótica anterior.

4.5 Comentários para implementação dos testes generalizados

O algoritmo generalizado de pertinência sugere uma estrutura hierárquica baseada em três elementos de cada dimensão: células, hiperplanos e complexos(hipersuperfícies).

Cada complexo é um conjunto de hiperplanos. Esta organização facilita a determinação da direção ótima para rasterização e eliminação das células que não contribuem efetivamente para o número de rotação de um ponto.

Cada hiperplano é um conjunto de células k -dimensionais, que já poderiam ser armazenadas de forma projetada, gerando complexos $(k-1)$ -dimensionais. Estes complexos, por sua vez, gerariam um processo recursivo para formação da estrutura de dados.

É importante ressaltar que a determinação da direção ótima de rasterização é efetuada em cada hiperplano e pode configurar como uma etapa de pré-processamento de hipersuperfície.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Predicados de pertinência de pontos constituem uma ferramenta essencial para algoritmos *rendering* baseados na imagem. Tais algoritmos constituem a base de vários processos em computação gráfica e, assim, o desenvolvimento e implementação de predicados robustos e eficientes para uma vasta classe de objetos gráficos é de grande interesse computacional.

Dentre os trabalhos prévios, foram apresentadas duas abordagens para construção de predicados de pertinência. A primeira, de âmbito teórico, discute a construção de um ambiente topológico e geométrico para que tal construção seja realizada. A segunda, de cunho mais prático, propõe a efetiva implementação dos predicados. Em várias abordagens são evidentes a falta ou prova de robustez dos algoritmos, limitação quanto à geometria, tratamento extensivo de casos especiais ou mesmo dificuldade para implementação ou extensão para objetos de dimensão mais alta. Ainda mais, poucos trabalhos têm sido publicados mesmo para o ambiente tridimensional.

Esta tese propôs uma abordagem generalizada e unificada para o desenvolvimento de testes de pertinência para objetos discretos de dimensão arbitrária. Tendo como inspiração a teoria e implementação de predicados de pertinência bidimensionais propostas por Pol e Corthout, foi desenvolvido um ambiente topológico e geométrico para objetos discretos de dimensão arbitrária e, para cada dimensão, têm-se um algoritmo de pertinência. A classe de objetos alcançável pela teoria desenvolvida é bastante extensa, incluindo objetos com auto-intersecção.

As características mais importantes dos algoritmos propostos incluem baixa complexidade computacional, estruturas de dados simples, independência da resolução do ambiente discretos e robustez provada *a priori*. Estas características os tornam altamente viáveis

para serem implementados em *hardware* e facilmente adaptáveis processos mais complexos em computação gráfica. Principalmente pelo tratamento discreto proposto pelos algoritmos, uma classe importante destes processos encontra-se na área denominada *point based graphics*, que tem recebido várias contribuições relevantes nos últimos anos. Dadas as facilidades tecnológicas de programação das placas gráficas atuais, o teste de pertinência poderia dar suporte, por exemplo, a uma implementação robusta e eficiente de algoritmos do tipo *ray-tracing* diretamente em *hardware*, o que aumentaria muito a qualidade gráfica de aplicações como jogos ou visualização científica.

A abordagem desenvolvida nesta tese pode ser estendida tanto âmbito teórico quanto no prático. Para que os algoritmos propostos funcionem de maneira adequada, existe uma dependência quanto à orientação global dos objetos discretos justamente pelo uso da integral complexa ou de Kronecker na definição de número de rotação. Isto exclui, por exemplo, o teste de pertinência para modelos tridimensionais da Garrafa de Klein. Embora existam orientações locais, não é possível orientar globalmente tal objeto no espaço tridimensional. Além deste modelo simples, a orientação global exclui várias outras classes objetos importantes em sistemas CAD, por exemplo. Assim, o desenvolvimento teórico de noções de interior e exterior que não dependam de uma orientação global do objeto poderiam aumentar ainda mais a classe de objetos atingíveis pelos predicados de pertinência. Isto permitiria, em particular, trabalhar com modelos *non-manifold* mais sofisticados e permitiriam aumentar bastante o poder de modelagem e *rendering* de vários processos em computação gráfica.

Mesmo ainda com a dependência da orientação, os algoritmos propostos poderiam ser estendidos para contemplar objetos com bordos curvos como, por exemplo, hipersuperfícies de Bézier ou NURBS. Dados *patches* de controle em espaços discretos, o algoritmo de pertinência poderia, concomitantemente ao processo de discretização da superfície, decidir a pertinência de pontos. Isto permitiria uma flexibilidade muito grande para modelagem, pois não seria necessário definir todas as células que compõe o bordo do objeto e, ainda, tal bordo poderia ser gerado dentro uma precisão inteira arbitrária.

Referências Bibliográficas

- [ADFQ00] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, e A. Quintero. A digital index theorem. In *7th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCIA '00*, pp. 103–115, 2000.
- [AFH81] E. Artzy, G. Frieder, e G.T. Herman. The theory, design, implementation e evaluation of a three-dimensional boudary detection algorithm. *Computer Graphics Image Processing*, 15:1–24, 1981.
- [AFQR95] R. Ayala, A.R. Francés, A. Quintero, e R. Rubio. On surfaces in digital topology. In *5th Colloquium on Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'95*, pp. 271–276, 1995.
- [AFQR96] R. Ayala, A.R. Francés, A. Quintero, e R. Rubio. Determining the components of the complement of a digital $(n - 1)$ -manifold in $\mathbb{Z}^n$. In *6th Colloquium on Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'96*, pp. 163–176, 1996.
- [Ale56] P.S. Alexandrov. *Combinatorial Topology*. Graylock Press, 1956.
- [BZ85] G. Burde e H. Zieschang. *Knots*. Walter de Gruyter, Berlin, 1985.
- [CB81] M. Couprie e G. Bertrand. Simplicity surfaces: a new definition of surfaces in $\mathbb{Z}^3$. *SPIE Vision Geometry VII*, 3454:40–51, 1981.
- [CP92] M.E.A. Corthout e E.J.D. Pol. *Point Containment and the Pharos Chip*. Tese de Doutorado, Leiden University, the Netherlands, 1992.
- [DF01] E. Domínguez e A.R. Francés. *An Axiomatic Approach to Digital Topology*, pp. 3–16. Digital and Image Geometry: Advanced Lectures. Springer–Verlag, 2001.

- [Ede87] H. Edelsbruner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.
- [FC91] L.H. Figueiredo e P.C.P. Carvalho. *Introdução à Geometria Computacional*. IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [FOF00] A.E. Fabris, M.M. Ottani, e A.R. Forrest. Parallelization of filling algorithms via point containment paradigm. In *SIBGRAPI'00 Conference Proceedings*, pp. 224–232, 2000.
- [Fra95] J. Françon. Discrete combinatorial surfaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 57(1):20–26, 1995.
- [FS00] A.E. Fabris e L. Silva. Métodos discretos em computação gráfica. In *52th Seminário Brasileiro de Análise*, pp. 25–103, 2000.
- [FS04] A.E. Fabris e L. Silva. Robust framework to topological operators in geographic information systems via point containment paradigm. *Submetido para ACM Transactions on Database Systems*, 2004.
- [FSF97] A.E. Fabris, L. Silva, e A.R. Forrest. An efficient filling algorithm for non-simple closed curves using the point containment paradigm. In *SIBGRAPI'97 Conference Proceedings*, pp. 2–9, 1997.
- [FSF98] A.E. Fabris, L. Silva, e A.R. Forrest. Stroking polynomial discrete Bézier curves via point containment paradigm. In *SIBGRAPI'98 Conference Proceedings*, pp. 110–118, 1998.
- [FSF04] A.E. Fabris, L. Silva, e A.R. Forrest. A generalized point containment algorithm for arbitrary dimension discrete objects. *Submetido para IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2004.
- [FT97] F.R. Feito e J.C. Torres. Inclusion test for general polyedra. *Computer and Graphics*, 21(1):23–30, 1997.
- [FTU95] F.R. Feito, J.C. Torres, e A. Ureña. Orientation, simplicity and inclusion test for planar polygons. *Computer and Graphics*, 21(1):595–600, 1995.
- [GP74] V. Guillemin e A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

- [Gra70] S.B. Gray. *Local Properties of Binary Images in Two and Three Dimensions*. Information International Inc., Boston, 1970.
- [GRS83] L.J. Guibas, L.H. Ramshaw, e J. Stolfi. A kinetic framework for computational geometry. In *24th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*, pp. 100–111, 1983.
- [Kau87] L.H. Kauffam. *On Knots*. Princeton University Press, Princeton, 1987.
- [KI01] Y. Kenmochi e A. Imiya. *Discrete Polyedrization of a Lattice Point Set*, pp. 150–162. Digital and Image Geometry: Advanced Lectures. Springer–Verlag, 2001.
- [KII98] Y. Kenmochi, A. Imiya, e A. Ichikawa. Boundary extraction of discrete objects. *Computer Vision and Image Understanding*, 71(3):281–293, 1998.
- [KMW91] R. Kopperman, P.R. Meyer, e R.G. Wilson. A Jordan surface theorem for three-dimensional digital spaces. *Discrete and Computational Geometry*, 6:155–161, 1991.
- [KOS⁺97] M. Van Kreveld, M. Overmars, M. de Berg, e O. Schwartzkopf. *Computational Geometry*. Springer Verlag, 1997.
- [Kov89] V. Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 45:141–161, 1989.
- [Kov01] V. Kovalesvsky. *Algorithms and Data Structures for Computer Topology*, pp. 38–58. Digital and Image Geometry: Advanced Lectures. Springer–Verlag, 2001.
- [Mal00] R. Malgouyres. Computing the fundamental group in digital spaces. In *7th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCIA '00*, pp. 103–115, 2000.
- [Man88] M. Mantyla. *Introduction to Solid Modeling*. W.H. Freeman and Co., New York, 1988.
- [Mas91] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [MP71] J.P. Mylopoulos e T. Pavlidis. On the topological properties of quantized spaces (i and ii). *J. Assoc. Comput. Mach.*, 18:239–254, 1971.

- [MR81] D.G. Morgenthaler e A. Rosenfeld. Surfaces in three-dimensional images. *Information and Control*, 51:227–247, 1981.
- [MVT03] V. Mello, L. Velho, e G. Taubin. Estimating the in/out function of a surface represented by points. In *Proceedings of the 8th ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*, pp. 108–114. ACM Press, 2003.
- [Pal91] B.P. Palka. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [PR71] C.M. Park e A. Rosenfeld. Connectivity and genus in three dimensions. Technical Report TR-156, Computer Science Center, University of Maryland, College Park, May 1971.
- [Pri84] G.B. Price. *Multivariable Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [Ros79] A. Rosenfeld. Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86(8):621–630, October 1979.
- [Ros81] A. Rosenfeld. Three-dimensional digital topology. *Information and Control*, 50:119–127, 1981.
- [Sei98] R. Seidel. The nature and meaning of perturbations in geometric computing. *Discrete Computational Geometry*, 19(1):1–17, 1998.
- [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press Inc., London, 1982.
- [Sil98] L. Silva. Algoritmos geométricos discretos: complexidade e aplicações. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Agosto 1998.
- [SNT01] L. Silva, E. R. Neto, e R. M. L. Tarcia. Modeling and development of geographic information systems: Proximity analysis based search - GISPROX. In *7th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics Conference Proceedings*, pp. 115–122, 2001.
- [Sti93] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Tan88] G.Y. Tang. Region filling with the use of the discrete green theorem. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 42:297–305, 1988.

- [TM73] G. Turlakis e J. P. Mylopoulos. Some results on computational topology. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 20:439–455, 1973.
- [Vos93] K. Voss. *Discrete images, objects and functions in $\mathbb{Z}^3$* . Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Wil70] S. Willard. *General Topology*. Academic Press, New York, 1970.