**Últimos *Levelings*:
Conceitos, Propriedades, Algoritmos
e Aplicações em Processamento
e Análise de Imagens**

Wonder Alexandre Luz Alves

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Fumio Hashimoto

São Paulo, agosto de 2015

**Últimos *Levelings*:
Conceitos, Propriedades, Algoritmos
e Aplicações em Processamento
e Análise de Imagens**

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 06/08/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ronaldo Fumio Hashimoto (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Paulo André Vechiatto de Miranda - IME-USP
- Prof. Dr. Roberto de Alencar Lotufo - UNICAMP
- Prof. Dr. João Paulo Papa - UNESP
- Prof. Dr. Sidnei Alves de Araújo - PPGIGC-UNINOVE

Agradecimentos

Ao Prof. **Ronaldo F. Hashimoto**, pela paciência e incentivo com que me orientou e pelo esforço para produzirmos este trabalho.

Aos meus colaboradores (em especial, **Ronaldo**, **Beatriz**, **Alexandre** e **Edu**) que ajudaram a enriquecer esta tese.

Aos meus amigos **Maciel**, **Rafael**, **Fabiano**, **Pablo** e **Deusany** pelas nossas reuniões de autómatos.

Aos meus amigos **Sidnei**, **Maysa** e **Marta** pelas ajudas nas revisões de textos e ideias que foram importantes para refinamento deste trabalho.

A **Martinha** pelo carinho, inventivo, companheirismo e ajuda desde o início do meu doutorado.

Aos meus familiares (em especial, meus irmãos **Willy** e **Larissa**, e meus pais **França** e **Lete**) por entenderem minhas ausências e estarem sempre ao meu lado.

Aos amigos do **IME-USP**, da **UNINOVE**, a dona **Lourdes** e os meus cachorros **Snow** e **Mel** que estiveram sempre presentes e diretamente me ajudaram em diversos momentos difíceis.

E finalmente, aos membros da banca examinadora, pelas sugestões e contribuições que enriqueceram bastante esta tese.

A todos, muito obrigado!

ALVES, W. A. L., **Últimos *Levelings*: Conceitos, Propriedades, Algoritmos e Aplicações em Processamento e Análise de Imagens**. 2015, 138 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Em Morfologia Matemática diversos operadores são definidos pela diferença entre outros dois operadores, como por exemplo, o gradiente morfológico, definido como a diferença entre a dilatação e a erosão. Estes operadores são denominados operadores residuais, sendo alguns deles definidos por valores residuais extraídos de famílias indexadas de operadores, como por exemplo, o esqueleto por discos maximais e a última abertura. Neste sentido, visa-se neste trabalho investigar a extração de informações residuais em famílias indexadas de operadores. Mais precisamente, em famílias de operadores conexos conhecidos como *levelings*. Os *levelings* são operadores que não criam novas estruturas (contornos e extremos regionais) e seus valores são limitados pelos valores da imagem de referência. Assim, é apresentada nesta tese uma classe de operadores residuais denominada últimos *levelings*, a qual consiste de poderosos operadores residuais definidos a partir de resíduos gerados por operadores consecutivos de um espaço de escala baseado em *levelings*. Dessa forma, objetos contrastantes podem ser detectados se relevantes resíduos são gerados quando eles são filtrados por um desses *levelings*. Os valores residuais revelam importantes informações sobre contrastes presentes em uma imagem. Além dos valores residuais, outras informações associadas com eles podem ser obtidas no momento da extração residual, tais como os índices dos operadores que produziram os valores residuais. Com base nessas considerações, as principais contribuições originais desta pesquisa, incluem: (i) demonstrar que árvores construídas a partir de conjuntos de níveis representam espaços de escalas baseados em *levelings*; (ii) introduzir a classe dos últimos *levelings*, passando por definições, conceitos, algoritmos, propriedades e relações com outros operadores conhecidos na literatura; (iii) apresentar estratégias para construção de operadores últimos *levelings*. Por fim, são apresentadas aplicações dos últimos *levelings* em problemas de análise e processamento de imagens.

Palavras-chave: operadores residuais, operadores *levelings*, árvores morfológicas, últimos *levelings*.

Abstract

ALVES, W. A. L., **Ultimate Levelings: Concepts, Properties, Algorithms and Applications for Image Processing and Analysis**. 2015, 138 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In Mathematical Morphology several operators are defined by the difference between two operators, such as morphological gradient, defined as the difference between the dilation and erosion. These operators are called residual operators, being that some are defined by the extracted residual values from of an indexed family of operators, for example, the skeleton by maximal discs and the ultimate opening. In this sense, we intend to investigate the extraction of residual information in families of operators. More precisely, in families of connected operators known as levelings. The levelings are operators that do not create new structures (contours and regional extremes) and their values are limited by the values of the reference image. Thus, we present in this thesis a class of residual operators named ultimate levelings, which consist of powerful residual operators defined from a scale space based on levelings. With a multi-scale approach, these operators analyze an image under a series of levelings. Thus, contrasted objects can be detected if a relevant residue is generated when they are filtered out by one of these levelings. The residual values reveal important informations about contrasts present in an image. In addition of residual values, other information associated with them can be obtained at the time of extraction residual, such as the indexes of operators who produced the residual values. Based on these considerations, the main original contributions of this research include: *(i)* demonstrate that the trees constructed from level sets represent an scale space based on levelings; *(ii)* introduce the class of levelings ultimate, passing by definitions, concepts, algorithms, properties and relationships with other known operators in the literature; *(iii)* show some strategies for building levelings ultimate operators. Finally, we present applications of levelings ultimate in problem of image processing and analysis.

Keywords: residual operators, leveling operators, morphological trees, ultimate levelings.

Sumário

Lista de Abreviaturas	xi
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Algoritmos	xvii
Lista de Figuras	xix
Lista de Tabelas	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Considerações preliminares	1
1.2 Objetivos	4
1.3 Principais contribuições	5
1.4 Organização do trabalho	5
I Conceitos sobre imagens, operadores e representações	7
2 Conceitos sobre imagens e operadores morfológicos	9
2.1 Definições básicas sobre imagens	9
2.2 Operadores morfológicos	11
3 Operadores conexos e suas especializações	19
3.1 Conceitos básicos sobre operadores conexos e suas especializações	19
3.2 Operadores vistos como relações binárias	22
3.3 Propriedades com relação as extremas regionais	24
3.4 Algumas propriedades algébricas sobre os operadores conexos, <i>levelings</i> e <i>monotone planings</i>	24
3.5 Relações entre <i>levelings</i> e reconstruções por dilatações e erosões	26
3.6 Espaço de escala com base em <i>levelings</i>	27
4 Representações de imagens por meio de árvores baseadas em conjuntos de níveis	29
4.1 Conceitos de árvores construídas por conjuntos parcialmente ordenados	29
4.2 Árvores baseadas em conjuntos de níveis	32
4.2.1 Árvore de componentes	34
4.2.2 Árvore de formas	40
4.2.3 Reconstrução de árvores podadas	48

II	Últimos <i>levelings</i>: conceitos, propriedades e algoritmos	51
5	Representações de espaço de escala baseado em <i>levelings</i> através de hierarquias dos conjuntos de níveis	53
5.1	Relações entre reconstruções de árvores podadas e operadores <i>levelings</i>	53
5.2	Operadores morfológicos obtidos por meio de reconstruções de árvores podadas	59
5.2.1	Operadores baseados em imagens marcadoras	59
5.2.2	Operadores baseados em atributos	63
5.3	Espaço de escala baseado em <i>levelings</i> por meio de podas sucessivas	64
5.3.1	Espaço de escala baseado em atributos	65
5.3.2	Espaço de escala baseado em imagens marcadoras	66
6	Últimos <i>levelings</i>	69
6.1	Das últimas aberturas e últimos fechamentos para os últimos <i>levelings</i>	69
6.2	Propriedade associadas aos operadores últimos <i>levelings</i>	72
6.2.1	Propriedades sobre preservação de estruturas	72
6.2.2	Propriedade a respeito de complementação	75
6.3	Algoritmo para construção dos últimos <i>levelings</i>	76
6.4	Informações associadas aos últimos <i>levelings</i>	80
7	Estratégias para construções de últimos <i>levelings</i>	83
7.1	Estratégias para escolher a família de primitivas	83
7.1.1	Primitivas baseadas em atributos	85
7.1.2	Primitivas baseadas em imagens marcadoras	88
7.2	Estratégias para filtrar resíduos indesejáveis	90
7.2.1	Filtragem com base em vetor de atributos	91
7.2.2	Filtragem com base em regiões estáveis	94
III	Aplicações	99
8	Segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas	101
8.1	Introdução	101
8.2	Abordagem proposta	102
8.3	Experimentos e resultados	104
8.4	Conclusão	106
9	Binarização de texto em imagens de documentos históricos	107
9.1	Introdução	107
9.2	Abordagem proposta	108
9.3	Experimentos e resultados	109
9.4	Conclusão	111
10	Localização de textos em imagens de cenas	113
10.1	Introdução	113
10.2	Abordagem proposta	114

10.3 Experimentos e resultados	117
10.4 Conclusão	119
11 Conclusões	121
11.1 Trabalhos futuros	121
 IV Apêndices	 123
A Produções durante o doutorado	125
Referências Bibliográficas	127
Índice Remissivo	137

Lista de Abreviaturas

CC	Componente Conexo
DIBCO	<i>Document Image Binarization Contest</i> (em português - concurso de binarização de imagens de documentos)
DRIVE	<i>Digital Retinal Images for Vessel Extraction</i> (em português - Imagens digital retina para extração vasos sanguíneos)
EE	Elemento Estruturante
LIFO	Acrônimo para a expressão inglesa <i>Last In, First Out</i> (em português - último a entrar, primeiro a sair)
MM	Morfologia Matemática
MSER	<i>Maximally Stable Extremal Regions</i> (em português - regiões extremas maximamente estáveis)
OCR	<i>Optical Character Recognition</i> (em português - reconhecimento ótico de caracteres)
pixel	Acrônimo para a expressão inglesa <i>Picture Element</i> (em português - elemento da imagem)
poset	Acrônimo para a expressão inglesa <i>partially ordered set</i> (em português - conjunto parcialmente ordenado)
RGB	Red, Green and Blue (em português - vermelho, verde e azul)
ROC	<i>Receiver Operating Characteristic</i> (em português - característica de operação do receptor)
STARE	<i>Structured Analysis of the Retina</i> (em português - Análise da estrutura da retina)
UAC	<i>Ultimate Attribute Closing</i> (em português - último fechamento por atributo)
UAO	<i>Ultimate Attribute Opening</i> (em português - última abertura por atributo)
UGF	<i>Ultimate Grain Filter</i> (em português - último filtro por grão)

Lista de Símbolos

Conceitos básicos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\in$	É um elemento de
$\notin$	Não é um elemento de
$\cap$	Interseção entre conjuntos
$\cup$	União entre conjuntos
$\subseteq$	É um subconjunto de
$\subset$	É um subconjunto próprio de
$\{x : \star\}$	Conjunto de todos os x que satisfazem uma dada propriedade $\star$
$\min\{x : \star\}$	É o menor elemento do conjunto $\{x : \star\}$
$\max\{x : \star\}$	É o maior elemento do conjunto $\{x : \star\}$
$\operatorname{argmax}_{x \in X}\{f(x)\}$	Argumento $x \in X$ que maximiza $f(x)$
$\operatorname{argmin}_{x \in X}\{f(x)\}$	Argumento $x \in X$ que minimiza $f(x)$
$\setminus$	Subtração entre os conjuntos, ou seja, $X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$
$\mathcal{X} + b$	O conjunto $\mathcal{X}$ transladado pelo vetor b , isto é, $\mathcal{X} + b = \{x + b : x \in \mathcal{X}\}$
$\check{\mathcal{X}}$	A reflexão do conjunto $\mathcal{X}$, ou seja, $\check{\mathcal{X}} = \{-x : x \in \mathcal{X}\}$
$\mathcal{X}^c$	Complemento do conjunto $\mathcal{X}$, sendo que $\mathcal{X}^c = \{x : x \notin \mathcal{X}\}$
$\forall$	Quantificador lógico universal
$\exists$	Quantificador lógico existencial
$\neg$	Negação de uma proposição lógica
$A \Rightarrow B$	Condicional lógica, se A então B
$A \iff B$	Bicondicional lógica, A se e somente se B
$\mathcal{E}$	Variável utilizada para representar um relação binária
$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Variável utilizada para representar um grafo, de forma que $\mathcal{V}$ é o conjunto de vértice e $\mathcal{E}$ é o conjunto de arestas
$\preceq$	Símbolo que denota uma relação binária
$\sum_{i=1}^k i$	Somatória $1 + 2 + \dots + k$
$\mathcal{O}$	Notação assintótica do <i>Big O</i>

Imagens e operadores

$\mathcal{D}$	Subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$ utilizado para representar o domínio de uma imagem
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	Variável utilizada para representar subconjuntos de $\mathcal{D}$
$\mathbb{K}$	Subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que representa contradomínio da imagem
$\mathcal{P}(\mathcal{D})$	Conjunto dos subconjuntos de $\mathcal{D}$
$\mathcal{F}(\mathcal{D})$	Conjunto das imagens definidas com o domínio em $\mathcal{D}$ e o contradomínio em $\mathbb{K}$
f, g, h	Variáveis utilizadas para representar imagens.
$p, q \in \mathcal{D}$	Variáveis utilizadas para representar <i>pixels</i> de uma imagem
$(p_x, p_y) \in \mathcal{D}$	Notação utilizada para representar as coordenadas horizontal e vertical de um <i>pixel</i> p
$f(p)$	Função f aplicada no <i>pixel</i> p , ou seja, nível de cinza de f para o <i>pixel</i> p
$f \vee g$	Supremo entre duas imagens f e g , isto é, $[f \vee g](p) = f(p) \vee g(p) = \max\{f(p), g(p)\}$, para todo $p \in \mathcal{D}$
$f \wedge g$	Ínfimo entre duas imagens f e g , isto é, $[f \wedge g](p) = f(p) \wedge g(p) = \min\{f(p), g(p)\}$, para todo $p \in \mathcal{D}$
$f - g$	Imagem obtida pela subtração <i>pixel-a-pixel</i> entre as imagens f e g , ou seja, $[f - g](p) = f(p) - g(p)$, para todo $p \in \mathcal{D}$
f^c	Negativo da imagem f , isto é, $f^c(p) = K - f(p)$, para todo $p \in \mathcal{D}$
$\mathcal{A}$	Relação de adjacência sobre $\mathcal{D}$
$\mathcal{A}_{4c}$	Relação de adjacência sobre $\mathcal{D}$ que define a 4-conectividade
$\mathcal{A}_{8c}$	Relação de adjacência sobre $\mathcal{D}$ que define a 8-conectividade
$(p, q) \in \mathcal{A}$	Par de <i>pixels</i> adjacentes ou vizinhos
K	Valor máximo que pode ser atribuído a um <i>pixel</i>
$\mathcal{G}_f = (\mathcal{D}, \mathcal{A})$	Notação utilizada para representar o grafo da imagem f , de forma que os <i>pixels</i> são os vértices e as arestas são definidas por uma relação de adjacência $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{D}$
$\mathcal{CC}(\mathcal{X})$	Conjuntos dos componentes conexos de $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$
$\mathcal{ZP}(f)$	Conjuntos das zonas planas extraídas da imagem f
$\mathcal{B}$	Variável utilizada para representar um elemento estruturante
ψ e ϕ	Variáveis utilizadas para representar operadores de imagens
$\psi(f)$	Operador ψ aplicado na imagem f , isto é, a imagem de saída de ψ para a entrada f
$[\psi(f)](p)$	Função $\psi(f)$ aplicada no <i>pixel</i> p , ou seja, nível de cinza de $\psi(f)$ para o <i>pixel</i> p tal que $\psi(f)$ é a imagem de saída do operador ψ para a entrada f
$\mathbb{P}_f$	Notação utilizada para representar a partição de $\mathcal{D}$ construída pela zonas planas de f
$\mathbb{P}_f(p)$	Notação utilizada para representar uma região de $\mathbb{P}_f$ contendo o <i>pixel</i> p
$\varepsilon_{\mathcal{B}}$ e $\delta_{\mathcal{B}}$	Notações utilizadas para representar os operadores erosão $\varepsilon_{\mathcal{B}}$ e dilatação $\delta_{\mathcal{B}}$ pelo EE $\mathcal{B}$
$\gamma_{\mathcal{B}}$ e $\varphi_{\mathcal{B}}$	Notações utilizadas para representar os operadores abertura $\gamma_{\mathcal{B}}$ e fechamento $\varphi_{\mathcal{B}}$ pelo EE $\mathcal{B}$
$\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}$ e $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}$	Notações utilizadas para representar os operadores reconstrução por erosão $\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}$ e reconstrução por dilatação $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}$, onde o EE $\mathcal{B}$ define a conectividade da reconstrução
γ_i^{κ} e φ_i^{κ}	Notações utilizadas para representar os operadores abertura por atributo γ_i^{κ} e fechamento por atributo φ_i^{κ} , onde i é um limiar para o atributo κ
$\gamma_{\mathcal{B}}^{TH}$ e $\varphi_{\mathcal{B}}^{TH}$	Notações utilizadas para representar os operadores residuais abertura <i>top-hat</i> $\gamma_{\mathcal{B}}^{TH}$ e fechamento <i>top-hat</i> $\varphi_{\mathcal{B}}^{TH}$ por um EE $\mathcal{B}$
ρ	Notação utilizada para representar um operador <i>leveling self</i> -reconstrução

Representação por meio de árvores

$\mathcal{X}_\downarrow^\lambda(f)$	Conjunto de nível inferior de f de valor λ , isto é $= \mathcal{X}_\downarrow^\lambda(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) < \lambda\}$
$\mathcal{X}_\uparrow^\lambda(f)$	Conjunto de nível superior de f de valor λ , isto é $= \mathcal{X}_\uparrow^\lambda(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) \geq \lambda\}$
$\mathcal{L}(f)$	Conjunto dos CCs dos conjuntos de níveis inferiores de f
$\mathcal{U}(f)$	Conjunto dos CCs dos conjuntos de níveis superiores de f
$SC(\mathcal{L}(f), p)$	Menor CC de $\mathcal{L}(f)$ contendo p
$SC(\mathcal{U}(f), p)$	Menor CC de $\mathcal{U}(f)$ contendo p
$sat(\mathcal{X})$	Operador de preenchimento de buracos internos do CC $\mathcal{X}$
$Int(\mathcal{X})$	Conjunto dos CCs do interior de $\mathcal{X}$
$SAT(f)$	Conjunto dos CCs dos conjuntos de níveis inferiores e superiores com os buracos preenchidos
$SC(SAT(f), p)$	Menor CC saturado de $SAT(f)$ contendo p
$\mathcal{T}$	Variável utilizada para representar um árvore
$\mathcal{T}_f$	Notação utilizada para representar um árvore $\mathcal{T}$ construída a partir da imagem f
$(\mathcal{L}(f), \subseteq)$	Árvore de componentes inferiores (<i>min-tree</i>)
$(\mathcal{U}(f), \subseteq)$	Árvore de componentes superiores (<i>max-tree</i>)
$(Ext(\mathcal{L}(f)), \subseteq)$	Versão estendida da árvore de componentes inferiores (<i>min-tree</i>)
$(Ext(\mathcal{U}(f)), \subseteq)$	Versão estendida da árvore de componentes superiores (<i>max-tree</i>)
$(SAT(f), \subseteq)$	Árvore de formas
$\kappa : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$	Função que representa um atributo extraído de um CC
$level : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{K}$	Função que associa CCs em níveis de cinzas
$\mathcal{P}_{opa}(\mathcal{T})$	Versão da árvore $\mathcal{T}$ podada
$Rec(\mathcal{T}_f)$	Reconstrução da imagem f a partir da árvore $\mathcal{T}_f$
$\mathcal{T}_f^i$	Sequência de podas sucessivas da árvore $\mathcal{T}_f$
$\psi_i(f)$	Espaço de escala baseado em <i>levelings</i> construído por uma sequência de árvores podas $\mathcal{T}_f^i$

Últimos *levelings*

r^+ e r^-	Notação utilizadas para representar os operadores residual positivo e negativo
θ	Notação utilizada para representar o operador última abertura
$\mathcal{R}_\theta^+$ e $\mathcal{R}_\theta^-$	Notação utilizada para representar os operadores residuais estendidos positivo e negativo
$\mathcal{R}_\theta(f)$	Notação utilizada para representar um operador último <i>leveling</i>
$\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$	Conjunto de índices de uma família de primitivas
$q_{\mathcal{I}}$ e q_κ	Funções associadas ao índice $q_{\mathcal{I}}$ e ao atributo q_κ
$\mathcal{N}r(i)$	Conjunto de vértices removidos da árvore $\mathcal{T}_f^i$ para construir a versão podada $\mathcal{T}_f^{i+1}$
$r_{\mathcal{T}_f^i}^+(C)$	Notação utilizada para representar o valor residual dos <i>pixels</i> do CC C da árvore $\mathcal{T}_f^i$
Γ	Função booleana sobre os vértices de uma árvore utilizada para decidir se um vértice é podado ou não
Ω	Função booleana sobre os vértices de uma árvore utilizada para decidir se um vértice é filtrado ou não
T_κ	Conjunto de limiares para o atributo crescente κ
Δ	Variável utilizada para representar um parâmetro das estratégias de podas: transições graduais e msr

Lista de Algoritmos

4.1	Algoritmo genérico baseado em <i>union-find</i> para construção da árvore de componentes.	38
4.2	Ordenação dos <i>pixels</i> das zonas planas de uma imagem pelos seus níveis de cinza.	40
4.3	Construção da árvore de componentes por <i>union-find</i> .	41
4.4	Algoritmo para construção da imagem interpolada.	46
4.5	Algoritmos para construção da árvore de formas proposto por <i>Géraud et al. (2013)</i> .	47
5.1	Computação da reconstrução por dilatação a partir da <i>max-tree</i> estendida.	61
6.1	Computação do último <i>leveling</i> .	78
6.2	Computação do último <i>leveling</i> com informações associadas.	81
7.1	Computação básica de uma estratégia de escolha da família de primitivas.	85
7.2	Seleção de vértices baseadas em valores de extinção para as árvores <i>max-tree</i> , <i>min-tree</i> ou de formas.	88
7.3	Algoritmo genérico para computar descritores computáveis incrementalmente.	92
7.4	Computação incremental do atributo área.	93
7.5	Extração dos vértices MSER de uma árvore <i>max-tree</i> , <i>min-tree</i> ou árvore de formas.	95

Lista de Figuras

1.1	Exemplo do operador residual gradiente aplicado em uma imagem.	2
1.2	Exemplo da extração de resíduos com o operador esqueleto por discos maximais. . .	3
1.3	Exemplo da extração de contraste com o operador última abertura	4
2.1	Exemplos de relações de adjacências	10
2.2	Exemplo de extração de componentes conexos	10
2.3	Exemplo de extração de zonas planas	11
2.4	Exemplo de perfil de intensidade	11
2.5	Exemplo da aplicação de erosão e dilatação com EE formato de cruz	13
2.6	Exemplo da aplicação de abertura e fechamento com EE formato de cruz	14
2.7	Exemplo de reconstrução por dilatação para conjuntos	15
2.8	Exemplo de reconstrução por erosão para conjuntos	15
2.9	Exemplo de reconstrução por dilatação para imagens	15
2.10	Exemplo de reconstrução por erosão para imagens	16
2.11	Exemplos de aberturas e fechamentos por atributos.	16
2.12	Exemplos de aberturas e fechamentos por atributos.	17
3.1	Exemplo de aplicações de operadores para fins de filtragem.	19
3.2	Exemplos de partições de operadores conexos	20
3.3	Exemplos de aplicações de operadores <i>levelings</i>	21
3.4	Exemplos de aplicações de operadores <i>monotone planing</i>	22
3.5	Ilustração destacando que os operadores <i>monotone planing</i> não criam novas extremas regionais.	24
3.6	Exemplos de construções de <i>levelings</i> a partir de imagens marcadoras.	27
3.7	Exemplos de imagens de um espaço de escala baseado em <i>levelings</i>	28
4.1	Representação de uma imagem por meio de árvore.	29
4.2	Exemplo de um diagrama de Hasse	30
4.3	Exemplo de um diagrama de Hasse que não é uma árvore	30
4.4	Exemplo de um diagrama de Hasse que é uma árvore	31
4.5	Exemplo de operação de poda para uma dada árvore.	32
4.6	Exemplo de conjuntos de níveis extraídos de uma imagem	33
4.7	Exemplos de árvores de componentes.	35
4.8	Exemplos de árvores de componentes destacando os menores CCs	36
4.9	Exemplos de construções de árvores de componentes estendidas.	37

4.10	Árvore de decisão para auxiliar a escolha de um algoritmo para construção da árvore de componentes	38
4.11	Exemplo de computação da <i>min-tree</i>	39
4.12	Exemplo de árvore de formas	41
4.13	Exemplo mostrando um CC A com seu conjunto $sat(A)$ e $Ext(A)$	42
4.14	Exemplo de interpolação de imagens baseada em funções valor-conjunto	43
4.15	Exemplo de grade <i>Khalimsky</i>	44
4.16	Exemplo das operações estrela e fechamento	45
4.17	Exemplos de planos cartesiano dos conjuntos $\mathbb{Z}^2$, H^2 e $\frac{1}{2}H^2$	45
4.18	Exemplo de interpolação	46
4.19	Exemplo de construção da árvore de formas.	48
4.20	Exemplos das operações de podas e reconstruções.	49
5.1	Ilustrações das configurações de podas em uma árvore <i>max-tree</i>	55
5.2	Ilustração do enunciado da Proposição 5.6.	57
5.3	Ilustrações das configurações de podas.	58
5.4	Ilustração destacando o passo inicial da computação da reconstrução de árvores podas a partir de imagens marcadoras	60
5.5	Ilustração destacando o passo final da computação da reconstrução de árvores podas a partir de imagens marcadoras	60
5.6	Comparação dos tempos computacionais de algoritmos para reconstrução por dilatação	62
5.7	Comparação dos tempos computacionais de algoritmos para reconstrução por dilatação	62
5.8	Exemplo de um espaço de escala gerado a partir de uma <i>max-tree</i>	65
5.9	Exemplos de imagens de um espaço de escala de <i>levelings</i> obtidos por podas pelo atributo de área	66
5.10	Exemplos de imagens de espaços de escalas de <i>levelings</i> associados com famílias de marcadores.	67
6.1	Um exemplo simples de computação da última abertura por atributo	70
6.2	Exemplos de aplicações de últimos <i>levelings</i>	71
6.3	Ilustração da classe dos operadores últimos <i>levelings</i>	72
6.4	Um exemplo de computação do último fechamento por atributo	76
6.5	Exemplo de computação de último <i>leveling</i> utilizando uma árvore de componentes	79
6.6	Exemplo de computação de último <i>leveling</i> com funções associadas utilizando uma árvore de componentes	82
6.7	Exemplos de aplicações de últimos <i>levelings</i>	82
7.1	Exemplo de computação de um último <i>leveling</i> negativo onde é evidenciado que a ordem das marcações nos vértices da árvore não modifica o resultado final dos últimos <i>levelings</i>	84
7.2	Análise da evolução residual para o pixel marcado de vermelho da imagem de entrada.	86
7.3	Análise da evolução residual para o pixel marcado de vermelho da imagem de entrada.	87
7.4	Análise da evolução residual para o pixel marcado de vermelho da imagem de entrada.	89

7.5	Exemplos de entrada e saída dos processamentos baseados em transições graduais e valores de extinção.	89
7.6	Esquema para filtrar os i -ésimos resíduos r_i extraídos de regiões indesejáveis.	90
7.7	Aplicações dos últimos filtros por grãos com informação de formas circulares.	93
7.8	Aplicação da última abertura com informação de formas de estruturas finas.	93
7.9	Aplicações dos últimos filtros por grãos com filtragem de resíduos indesejáveis baseadas em MSER.	96
7.10	Aplicações dos últimos filtros por grãos com filtragem de resíduos indesejáveis baseada em uma composição de filtragens	97
8.1	Exemplo de imagem de fundo de olho e sua rede de vasos sanguíneos segmentada manualmente.	101
8.2	Exemplo de uma imagem colorida de retina.	102
8.3	Exemplo de imagem de fundo de olho e sua rede de vasos sanguíneos.	102
8.4	Exemplo de alongamento de vasos sanguíneos segmentados de imagens de fundo de olho.	103
8.5	Ilustração mostrando os passos seguidos pelo método proposto para segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas	104
8.6	Resultado de quatro segmentações de vasos sanguíneos das 20 imagens testadas do banco DRIVE	105
8.7	Resultado de quatro segmentações de vasos sanguíneos das 20 imagens testadas do banco STARE	105
9.1	Exemplos de imagens de documentos históricos extraídas dos bancos dos concursos DIBCOs.	107
9.2	Exemplos de aplicações de fechamentos <i>top-hats</i> em imagens de documentos históricos.	108
9.3	Exemplos de imagens de documentos históricos dos bancos dos concursos DIBCOs destacando em vermelho as regiões maximalmente estáveis.	109
9.4	Resultados de quatro binarizações de imagens de documentos históricos	110
10.1	Imagens de cena do banco de imagens ICDAR (Lucas <i>et al.</i> , 2003)	113
10.2	Visão geral do método proposto.	114
10.3	Extração das regiões de texto candidatas.	116
10.4	Resultados da classificação de regiões de texto usando o T-HOG.	117
10.5	Exemplos de imagens da base ICDAR.	118

Lista de Tabelas

8.1	Tabela comparativa de diferentes métodos para segmentação de vasos sanguíneos nas imagens do banco DRIVE.	106
8.2	Tabela comparativa de diferentes métodos para segmentação de vasos sanguíneos nas imagens do banco STARE.	106
9.1	Tabela comparativa com resultados obtidos com as imagens de documentos impressos.	111
9.2	Tabela comparativa com resultados obtidos com as imagens de documentos escritos à mão.	112
10.1	Tabela comparativa de diferentes métodos para localização de textos.	119

Introdução

1.1 Considerações preliminares

Nas últimas décadas, os esforços em pesquisas envolvendo imagens digitais têm sido crescente, possibilitando o desenvolvimento de inúmeras teorias e tecnologias em diversos segmentos da ciência e indústria. Neste cenário, surgiu a Morfologia Matemática (MM) entre os anos de 1960 e 1969, inicialmente desenvolvida por Georges Matheron e Jean Serra na Escola de Minas de Paris, França. A MM tornou-se, com o passar dos anos, uma importante ferramenta para análise e processamento de imagens. Seu domínio de atuação cobre um largo espectro de aplicações em análise e processamento de imagens, que vai desde o tratamento de imagens microscópicas até o processamento de imagens de satélites, passando por aplicações industriais, médicas, automação de escritório, entre outras (Dougherty e Lotufo, 2003; Najman e Talbot, 2013; Serra, 1982; Soille, 2003).

A MM é uma teoria matemática abrangente e bastante empregada em problemas de análise e processamento de imagens, onde as transformações de imagens (em MM chamadas de operadores de imagens) são vistas como mapeamentos entre reticulados completos (Banon e Barrera, 1994; Heijmans, 1994; Najman e Talbot, 2013; Serra, 1982). Em poucas palavras, um reticulado completo é uma estrutura algébrica composta por um conjunto equipado por uma relação de ordem (parcial ou total) tal que qualquer subconjunto deste conjunto possui um ínfimo e um supremo no conjunto (Heijmans, 1994; Serra, 1982). Basicamente, existem dois reticulados completos amplamente úteis para trabalhar com problema de análise e processamento de imagens, são eles: o reticulado dos subconjuntos $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, e o reticulado das imagens (ou funções) definidas com o domínio $\mathcal{D}$ e o contradomínio $\mathbb{K} = \{0, 1, \dots, K\} \subset \mathbb{N}$. Mais precisamente:

- Reticulado dos subconjuntos: é a 4-upla $(\mathcal{P}(\mathcal{D}), \subseteq, \cap, \cup)$, onde: (1) $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ é o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{D}$; (2) $\subseteq$ é a usual relação de ordem inclusão sobre $\mathcal{P}(\mathcal{D})$; (3) $\cap$ é o ínfimo definido pela usual operação de intersecção da teoria dos conjuntos; (4) $\cup$ é o supremo definido pela usual operação de união da teoria dos conjuntos.
- Reticulado das imagens: é a 4-upla $(\mathcal{F}(\mathcal{D}), \leq, \wedge, \vee)$, onde: (1) $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ é o conjunto de todas as imagens $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$; (2) $\leq$ é uma relação de ordem sobre $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ definida da seguinte forma: $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), f \leq g \iff \forall p \in \mathcal{D}, f(p) \leq g(p)$; (3) $\wedge$ é o ínfimo definido pelo operador mínimo pontual, ou seja, $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), f \wedge g \iff \forall p \in \mathcal{D}, [f \wedge g](p) = \min\{f(p), g(p)\}$; (4) $\vee$ é o supremo definido pelo operador máximo pontual, isto é, $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), f \vee g \iff \forall p \in \mathcal{D}, [f \vee g](p) = \max\{f(p), g(p)\}$.

Assim, chama-se de *operador de subconjuntos* um mapeamento sobre o reticulado dos subconjuntos, ou seja, $\Psi : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$. Analogamente, chama-se de *operador de imagens* um mapeamento

sobre o reticulado das imagens, isto é, $\psi : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Em particular, quando um operador de imagens (respectivamente, subconjuntos) satisfaz as propriedades de ser (i) crescente e (ii) idempotente, ele é chamado de *filtro morfológico* (Serra, 1988). A primeira condição é para preservar a relação de ordem do reticulado e a segunda condição corresponde ao fato de que operações crescentes não são reversíveis, e isso nos faz de fato esperar uma redução no conteúdo da informação após a aplicação do operador (Serra e Vincent, 1992). A chave para o sucesso com filtros morfológicos é entender este fato, e usando esta característica é possível destruir gradualmente o conteúdo indesejável da imagem como o ruído e a irregularidade do fundo, preservando ao mesmo tempo o conteúdo desejado o máximo possível (Najman e Talbot, 2013). Algumas vezes é necessário destruir o conteúdo indesejável em uma imagem, mas na prática não é tão fácil assim. Neste caso, uma estratégia complementar é eliminar efetivamente o conteúdo desejável da imagem, mas restaurá-lo por meio de uma diferença (ou subtração) com a imagem original. Isto dá origem à ideia dos *operadores residuais*. De uma maneira simples, os operadores residuais são transformações que envolvem combinações de operadores morfológicos com subtrações (Alves e Hashimoto, 2014; Beucher, 2007; Dougherty e Lotufo, 2003; Hernandez e Marcotegui, 2011; Leite e Guimarães, 2001; Najman e Talbot, 2013; Serra, 1982; Soille, 2003).

Mais precisamente (veja a Definição 1.1), um operador residual r é definido pela diferença (*pixel a pixel*) entre dois operadores, digamos ψ e ϕ (respectivamente, Ψ e Φ), aplicados a uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ (respectivamente, subconjunto $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$), isto é, $r(f) = \psi(f) - \phi(f)$ (respectivamente, $r(X) = \Psi(X) \setminus \Phi(X)$). Além do mais, chama-se ψ e ϕ (respectivamente, Ψ e Φ) de *primitivas* e para um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ diz-se que, se $[\psi(f)](p) > [\phi(f)](p)$ (respectivamente, $p \in \Psi(X)$ e $p \notin \Phi(X)$) então p possui um *resíduo positivo* em r , senão se $[\psi(f)](p) < [\phi(f)](p)$ (respectivamente, $p \notin \Psi(X)$ e $p \in \Phi(X)$) então p possui um *resíduo negativo* em r , caso contrário, p possui um *resíduo nulo* em r . Desta forma, diversos operadores residuais foram propostos ao longo das últimas décadas (Alves e Hashimoto, 2014; Beucher, 1994, 2007; Hernandez e Marcotegui, 2011; Marcotegui *et al.*, 2011; Serra, 1982) e são amplamente utilizados em problemas de análise e processamento de imagens, como por exemplo: o gradiente morfológico (ver exemplo na Figura 1.1), definido como os resíduos obtidos entre os operadores dilatação e erosão, ou a abertura *top-hat*, definido como os resíduos obtidos entre os operadores identidade e a abertura.

Definição 1.1 (Operador residual). Um *operador residual* r é a diferença entre dois operadores, digamos ψ e ϕ (respectivamente, Ψ e Φ) aplicados a uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ (respectivamente, subconjunto $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$), ou seja, $\forall p \in \mathcal{D}, [r(f)](p) = [\psi(f)](p) - [\phi(f)](p)$ (respectivamente, $r(X) = \Psi(X) \setminus \Phi(X)$).

Figura 1.1: Exemplo do operador residual gradiente aplicado em uma imagem.

Os operadores residuais têm sido estendidos para extrair resíduos de duas famílias de operadores de imagens $\{\psi_i : i \in \mathcal{I}\}$ e $\{\phi_i : i \in \mathcal{I}\}$ (respectivamente, subconjuntos $\{\Psi_i : i \in \mathcal{I}\}$ e $\{\Phi_i : i \in \mathcal{I}\}$)

indexados por um conjunto de índices $\mathcal{I} = \{0, 1, \dots, \mathcal{I}_{MAX}\}$, de tal modo que o i -ésimo operador residual r_i é definido pelos resíduos extraídos das i -ésimas primitivas, isto é, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), r_i(f) = \psi_i(f) - \phi_i(f)$ (respectivamente, $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), r(X) = \Psi_i(f) \setminus \Phi_i(f)$) e um operador residual estendido $\mathcal{R}_\theta$ é definido como o supremo dos operadores residuais r_i extraídos da família de primitivas, ou seja, $\mathcal{R}_\theta(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i(f)\}$ (respectivamente, $\mathcal{R}_\theta(X) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i(X)\} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i(X)\}$). Neste contexto, um operador para subconjuntos extremamente utilizado em análise de imagens é o *esqueleto por discos maximais*, ilustrado na Figura 1.2, que é definido como a união (supremo) dos resíduos extraídos de famílias de erosões $\{\varepsilon_i : i \in \mathcal{I}\}$ e aberturas de erosões $\{\gamma_B \varepsilon_i : i \in \mathcal{I}\}$, ou seja, $SK(X) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i(X) : r_i(X) = \varepsilon_i(X) \setminus \gamma_B(\varepsilon_i(X))\}$ (Beucher, 1994).

Figura 1.2: Exemplo da extração de resíduos com o operador esqueleto por discos maximais.

Também nesta direção, Beucher (2007) propôs o operador de imagens *última abertura*, onde as primitivas são aberturas consecutivas, ou seja, $\psi_i = \gamma_i$ e $\phi_i = \gamma_{i+1}$, de uma família crescente de aberturas $\{\gamma_i : i \in \mathcal{I}\}$ e assim definida por $\mathcal{R}_\theta(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i(f) : r_i(f) = \gamma_i(f) - \gamma_{i+1}(f)\}$. Na Figura 1.3 é apresentado um exemplo de aplicação da última abertura para extração de contraste.

A última abertura é um operador residual não-paramétrico e multi-escala definido sobre um espaço de escala baseado em aberturas $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\mathcal{I}_{MAX}})$ de forma que os resíduos $(r_0, r_1, \dots, r_{\mathcal{I}_{MAX}-1})$ são extraídos por primitivas consecutivas deste espaço de escala. Desta forma, objetos contrastados de uma imagem de entrada são detectados quando são filtrados por um desses operadores, gerando assim um resíduo r_i extraído da i -ésima abertura. Esta maneira de extrair resíduos proposto por Beucher (2007) também foi utilizada mais tarde em outros trabalhos (Alves e Hashimoto, 2014; Alves et al., 2013; Hernandez e Marcotegui, 2011; Meyer, 2010; Retornaz e Marcotegui, 2007) para extrair resíduos de espaços de escalas baseados em operadores conexos. Em poucas palavras, um operador conexo é uma transformação que não cria novos contornos (ou bordas) na imagem (Salembier e Serra, 1995). Primeiramente, Retornaz e Marcotegui (2007) propuseram a última abertura por atributo, uma extensão da última abertura introduzida por Beucher (2007), onde as primitivas são aberturas por atributos e mais adiante, Fabrizio e Marcotegui (2009) desenvolveram um algoritmo eficiente utilizando uma estrutura de dados chamada *max-tree* e,

Família de abertura contruída por elementos estruturantes discos com raios crescentes

Figura 1.3: Exemplo da extração de contraste com o operador última abertura.

Hernandez e Marcotegui (2011) utilizaram informações de formas no processo de extração de resíduos da última abertura por atributo. Diferentemente desses trabalhos, Meyer (2010) e depois Alves e Hashimoto (2014), propuseram extrair resíduos de primitivas consecutivas de um espaço de escala baseado em uma larga classe de operadores conexos chamada *levelings*. Os *levelings* utilizados nesses trabalhos podem gerar resíduos positivos e negativos, o que não acontece com a última abertura por atributo. Neste caso, trata-se separadamente o supremo dos resíduos positivos e dos negativos, e depois os combinam (Alves e Hashimoto, 2014; Alves *et al.*, 2013; Meyer, 2010).

1.2 Objetivos

A presente tese está centrada em um estudo sobre uma classe de operadores residuais estendidos definidos por meio de espaços de escalas baseados em *levelings*. Um operador desta classe de operadores residuais analisa a evolução dos valores residuais presentes em dois operadores consecutivos de um espaço de escala e os maiores valores residuais são considerados. Os valores residuais revelam uma importante informação sobre o contraste de uma imagem. Além dos valores residuais, outras informações associadas com eles podem ser obtidas no momento da extração residual, tais como propriedades das regiões que produziram os valores residuais. Alguns exemplos de operadores dessa classe conhecidos na literatura, incluem a última abertura (respectivamente, fechamento) por atributos (Retornaz e Marcotegui, 2007) e o último filtro por grãos (Alves e Hashimoto, 2014). Eles têm sido usados com sucesso em uma etapa de pré-processamento em diversas aplicações, como por exem-

plo, a localização de texto em imagens de cenas (Alves e Hashimoto, 2010; Retornaz e Marcotegui, 2007), a segmentação de fachadas de edifícios (Hernandez e Marcotegui, 2011), a restauração de imagens de documentos históricos (Meyer, 2010). Com base nessas considerações, apresenta-se neste trabalho a classe de operadores residuais denominada *últimos levelings*, na qual destacamos suas propriedades, relações com operadores conhecidos na literatura, definições de novos operadores residuais, algoritmos eficientes para implementação desses operadores e aplicações desta abordagem em problemas de análise e processamento de imagens.

1.3 Principais contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Os últimos *levelings* consistem em uma classe de operadores residuais definidos por meio de espaços de escalas baseados em *levelings*. Neste trabalho, um espaço de escala baseado em *levelings* é representado por meio de uma hierarquia construída por conjuntos de níveis, ou seja, árvore de componentes ou árvore de formas. Primeiramente, dada uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ constrói-se uma árvore $\mathcal{T}_f$ que representa esta imagem f . Como contribuição original, é mostrado que determinadas operações sobre esta árvore resulta em um operador *leveling* da imagem f e mais, é demonstrado ainda que esta árvore é capaz de produzir uma família de *levelings* que satisfazem propriedades de espaço de escala de *levelings*.
- A classe dos últimos *levelings* é uma outra importante contribuição deste trabalho, onde são estabelecidos: (i) propriedades, (ii) algoritmos eficientes para implementação de últimos *levelings*, (iii) estratégias para a escolha de uma família de primitivas e (iv) estratégias de filtragens de resíduos indesejáveis.
- Por fim, são apresentadas aplicações práticas dos últimos *levelings* e ainda são disponibilizados *plugins* para o popular *software* livre ImageJ¹, que dão acesso a alguns operadores últimos *levelings*. Além do acesso aos operadores, os *plugins* contêm funcionalidades que auxiliam um pesquisador na solução de um problema por meio de abordagem residual. Instruções para *download* e instalação dos *plugins* podem ser encontradas no *website* <http://www.ime.usp.br/~wonder/plugins>.

1.4 Organização do trabalho

O restante deste trabalho está organizado em três partes, compreendendo: conceitos, metodologias e aplicações. A primeira parte da tese é dedicada às apresentações de conceitos, notações, algoritmos e propriedades relacionadas com: imagens e operadores morfológicos (Capítulo 2); operadores conexos e suas especializações como os *levelings* e os *monotone planing* (Capítulo 3); representações hierárquicas de conjuntos de níveis, incluindo árvores de componentes e árvores de formas (Capítulo 4). A segunda parte é dedicada às principais contribuições originais desta pesquisa, as quais incluem: (i) uma representação compacta e eficiente de um espaço de escalas baseado em *levelings* por meio de árvores (Capítulo 5); (ii) apresentação da classe dos últimos *levelings*, isto é, definições, conceitos, algoritmos, propriedades e relações com operadores conhecidos na literatura (Capítulo 6); (iii) estratégias para construção de operadores últimos *levelings* (Capítulo 7). A terceira parte é dedicada as aplicações dos últimos *levelings* em problemas de análise e processamento

¹ImageJ é um software livre, desenvolvido em Java, para análise e processamento de imagens. Ele pode ser encontrado gratuitamente pelo *website* <http://rsb.info.nih.gov/ij/>

de imagens, incluindo: a segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas (Capítulo 8), a binarização de texto em imagens de documentos históricos (Capítulo 9) e a localização de textos em imagens de cenas (Capítulo 10). Por fim, no Capítulo 11 são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.

Parte I

Conceitos sobre imagens, operadores e representações

Resumo

Esta primeira parte da tese é dedicada a apresentações de conceitos, notações, algoritmos e propriedades relacionados com:

- 1. Imagens, como por exemplo: definições e notações de componentes conexos, zonas planas, extremas regionais, partições sobre domínio da imagem e perfis de intensidade;*
- 2. Operadores morfológicos, como por exemplo: propriedades relacionadas aos operadores morfológicos e, definições e notações sobre elemento estruturante, erosão, dilatação, abertura, fechamento, reconstrução por dilatação e reconstrução por erosão;*
- 3. Operadores conexos e suas especializações como os levelings e os monotone planing, incluindo: definições, notações, propriedades relacionados a estes operadores e construção de espaço de escala baseado em levelings;*
- 4. Representações hierarquias de conjuntos de níveis, incluindo: definições, notações, algoritmos e propriedades relacionadas as árvores construídas a partir de conjuntos parcialmente ordenados, como por exemplo: árvores de componentes e árvores de formas.*

Vale salientar, que todos os conceitos, notações, algoritmos e propriedades apresentadas nesta primeira parte da tese são úteis para o entendimento dos conceitos discutidos nas duas próximas partes desta tese e mais, também são assumidas definições usuais de conjuntos, relações, funções, grafos, conjuntos ordenados, reticulados e espaços topológicos que podem ser encontradas em um livro introdutório sobre topologia geral, como por exemplo *Lipschutz (1971)* e *Newman (1992)*. Também vale lembrar que muitas funções apresentadas ao longo do texto são representadas por meio de tabelas, como por exemplo as funções que representam imagens. Assim, em diversos algoritmos apresentados, tabelas que representam funções são construídas e a notação usada para atribuir um valor a função é a seguinte: $f(x) \leftarrow y$, onde f é a função, x um elemento do domínio da função e y é a imagem de x em f e este valor y é atribuído a tabela que representa a função f .

Conceitos sobre imagens e operadores morfológicos

Resumo do capítulo

Neste capítulo são apresentados conceitos, definições e notações relacionadas com imagens e operadores morfológicos que serão úteis ao longo do texto. Vale salientar, que neste texto, são assumidas definições usuais de conjuntos, relações, funções, grafos, reticulados e espaços topológicos que podem ser encontradas em um livro introdutório sobre topologia geral, como por exemplo [Lipschutz \(1971\)](#); [Newman \(1992\)](#).

2.1 Definições básicas sobre imagens

Como definido na Seção 1.1, neste trabalho trata-se uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ como um mapeamento de uma grade retangular e finita $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em um conjunto discreto $\mathbb{K} = \{0, \dots, K\}$ de níveis de cinza (isto é, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$), onde $K = 2^b - 1$ representa o nível de cinza máximo possível para uma imagem de $b > 0$ bits de profundidade. Uma imagem binária, quando $b = 1$, pode ter somente valores 0 ou 1, e por este motivo é frequentemente representada como um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$ contendo os elementos de $\mathcal{D}$ cujos os valores são 1, ou seja, $\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{D} : f(x) = 1\} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$. Por outro lado, uma imagem multibanda pode ser vista como um vetor de imagens $(f^A, f^B, \dots, f^Z)$, onde $f^A, f^B, \dots, f^Z$ fazem referências às bandas $A, B, \dots, Z$ da imagem multibanda. Um elemento do domínio da imagem é chamado de *pixel*, ou seja, $p = (p_x, p_y) \in \mathcal{D}$ é um *pixel* cujo os valores p_x e p_y são os valores das coordenadas horizontal e vertical de p . Também, chama-se por $f(p)$ o valor do nível de cinza da imagem no *pixel* p . Além do mais, o *pixel* p está conectado a outros *pixels* em seu entorno em $\mathcal{D}$ e esta noção de conectividade entre os *pixels* leva à definir uma relação de adjacência, denominada $\mathcal{A}$, sobre $\mathcal{D}$.

Definição 2.1 (Relação de adjacência). Uma relação de adjacência $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{D}$ é uma relação binária entre os *pixels* de $\mathcal{D}$, ou seja, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Assim, se $(p, q) \in \mathcal{A}$ então é dito que p é adjacente a q ou alternativamente, p é vizinho de q .

Em particular, neste trabalho são utilizadas somente relações de adjacências circulares e simétricas, ou seja, $(p, q) \in \mathcal{A}$ se, e somente se, $p, q \in \mathcal{D}$, $d(p, q) \leq \rho$, onde $d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$ é a distância euclidiana entre p e q , e ρ é um fator de escala. Dessa forma, se $\rho = 1$, temos a relação de adjacência, denotada por $\mathcal{A}_{4c}$, que define a conhecida *vizinhança-4* entre os *pixels* e analogamente se $\rho = \sqrt{2}$, temos o caso da *vizinhança-8*, denotada por $\mathcal{A}_{8c}$, entre os *pixels* (ver

Figura 2.1). Também, denotaremos o conjunto de *pixels* adjacentes a um dado *pixel* $p \in \mathcal{D}$ por $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(p) = \{q \in \mathcal{D} : p \text{ é adjacente a } q\}$ ou simplesmente por $\mathcal{A}(p)$ quando não existir ambiguidade.

Figura 2.1: Exemplos de relações de adjacências para um dado *pixel* p .

Note que, uma relação binária $\mathcal{E}$ sobre um conjunto $\mathcal{V}$ dá origem a um grafo direcionado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde o conjunto $\mathcal{V}$ é chamado de conjunto de vértices de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}$ é chamado de conjunto de arestas de $\mathcal{G}$. Assim, a relação de adjacência $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{D}$, dá origem ao grafo da imagem $\mathcal{G}_f = (\mathcal{D}, \mathcal{A})$, onde os vértices são os próprios *pixels* e as arestas são definidas por $\mathcal{A}$. Com base nesta noção de conectividade entre os *pixels*, define-se:

Definição 2.2 (Caminho). Sejam x e y dois *pixels* de $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$. Diz-se que existe um caminho de x até y em $\mathcal{X}$, denotado por $\pi(x, y)$ se, e somente se, existir uma n -tupla de *pixels* distintos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tal que $p_1 = x$, $p_n = y$ e $p_{i+1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}(p_i)$, para $1 \leq i \leq n - 1$.

Definição 2.3 (Componente conexo). Um componente conexo (CC) $\mathcal{C}$ é um subconjunto maximal de *pixels* de $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$, tal que para quaisquer dois *pixels* p e $q \in \mathcal{C}$, existe um caminho de p até q em $\mathcal{C}$. Denota-se por $\mathcal{CC}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ o conjunto dos CCs presentes em $\mathcal{X}$ definidos com a relação de adjacência $\mathcal{A}$ ou simplesmente por $\mathcal{CC}(\mathcal{X})$ quando $\mathcal{A}$ está bem definida. Na Figura 2.2 é apresentado um exemplo de extração de CCs para um dado conjunto $\mathcal{X}$ onde os CCs estão rotulados pelas cores: vermelho, verde e azul.

Figura 2.2: Exemplo de extração dos CCs do conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$ sobre a adjacência $\mathcal{A}_{4c}$.

Definição 2.4 (Zona plana). Uma zona plana $\mathcal{C}$ de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é um subconjunto maximal de *pixels* de $\mathcal{D}$, tal que para quaisquer dois *pixels* p e $q \in \mathcal{C}$, existe uma n -tupla de *pixels* $(p_1 = p, p_2, \dots, p_n = q)$, satisfazendo $p_{i+1} \in \mathcal{A}(p_i)$ e $f(p_i) = f(p_{i+1})$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Denota-se por $\mathcal{ZP}(f, \mathcal{A})$ o conjunto das zonas planas presentes em uma imagem f definidas com a relação de adjacência $\mathcal{A}$, ou simplesmente por $\mathcal{ZP}(f)$ quando $\mathcal{A}$ está bem definida. Na Figura 2.3 é apresentado um exemplo de extração de zonas planas para uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, onde as zonas planas estão rotuladas pelas cores: vermelha, verde, azul, amarela, laranja, ciano, violeta e cinza.

Figura 2.3: Exemplo de extração de zonas planas de uma imagem f sob a adjacência $\mathcal{A}_{4c}$.

Definição 2.5 (Extrema regional). Uma zona plana $\mathcal{C}$ é uma máxima (respectivamente, mínima) regional de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, se para todo $pixel\ p \in \mathcal{C}$, satisfaz $f(p) \geq f(p_i)$ (respectivamente, $f(p) \leq f(p_i)$) com $p_i \in \mathcal{A}(p)$. Uma zona plana é uma extrema regional se ela é uma mínima ou máxima regional. Note que, as máximas (respectivamente, mínimas) regionais apresentadas na Figura 2.3 estão rotuladas nas cores: vermelha e amarela (respectivamente, ciano, violeta, cinza e laranja).

Definição 2.6 (Partição). Uma partição do conjunto $\mathcal{D}$, denotada por $\mathbb{P}$, é um conjunto não-vazio com n regiões distintas $R_i \subseteq \mathcal{D}$, com $1 \leq i \leq n$, onde a união destas regiões é igual a $\mathcal{D}$, isto é:

1. A partição $\mathbb{P}$ é diferente de vazio, ou seja, $\mathbb{P} \neq \emptyset$;
2. Os elementos de $\mathbb{P}$ são disjuntos, isto é, se $R_i, R_j \in \mathbb{P}$ então $R_i \cap R_j = \emptyset$;
3. A união dos elementos de $\mathbb{P}$ é igual a $\mathcal{D}$, ou seja, $\cup\{R_i : R_i \in \mathbb{P}\} = \mathcal{D}$.

Denota-se por $\mathbb{P}_f$ a partição de $\mathcal{D}$ formada com as zonas planas de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, isto é, $\mathbb{P}_f = \{R : R \in \mathcal{ZP}(f)\}$. Também, é denotada por $\mathbb{P}_f(p)$ a região de $\mathbb{P}_f$ contendo o $pixel\ p \in \mathcal{D}$.

Algumas vezes neste trabalho é exemplificado o uso de aplicações de operadores por meio de imagens simples cujo domínio é composto de um retângulo de altura 1. Essas imagens, podem ser representadas por gráficos de barras conhecidos por perfis de intensidades. Na Figura 2.4 é apresentado um exemplo de perfil de intensidade para uma dada imagem.

Figura 2.4: Exemplo de perfil de intensidade para uma dada imagem.

2.2 Operadores morfológicos

Como definido na Seção 1.1, em MM, operadores são vistos como mapeamentos entre reticulados completos (Heijmans, 1994; Najman e Talbot, 2013; Serra, 1982). Neste trabalho utiliza-se, basicamente, o reticulado dos subconjuntos $(\mathcal{P}(\mathcal{D}), \subseteq, \cap, \cup)$ e o reticulado das imagens $(\mathcal{F}(\mathcal{D}), \leq, \wedge, \vee)$.

Dessa forma, um operador para subconjuntos (ou com um abuso de notação, para imagens binárias) é um mapeamento de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ em $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ e analogamente, um operador para imagens (em níveis de cinza) é um mapeamento de $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ em $\mathcal{F}(\mathcal{D})$. Eles podem ser caracterizados através de suas propriedades, as quais são fundamentais para prever os aspectos do seu comportamento. A seguir, são apresentadas brevemente algumas das propriedades elementares que podem ser associadas aos operadores (Banon e Barrera, 1994; Dougherty e Lotufo, 2003; Heijmans, 1994; Najman e Talbot, 2013; Serra, 1982; Soille, 2003).

- *Crescente*: Um operador de imagens ψ (respectivamente, operador de subconjuntos Ψ) é *crescente* se preserva a relação de ordem que pode estar presente entre duas imagens (respectivamente, subconjuntos), ou seja, $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ se $f \leq g$ então $\psi(f) \leq \psi(g)$ (respectivamente, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ se $X \subseteq Y$ então $\Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$).
- *Idempotência*: Um operador de imagens ψ (respectivamente, operador de subconjuntos Ψ) é dito *idempotente* se, ao aplicá-lo mais de uma vez na mesma imagem (respectivamente, subconjunto) o resultado permanece inalterado, ou seja, $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), \psi(\psi(f)) = \psi(f)$ (respectivamente, $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Psi(\Psi(X)) = \Psi(X)$).
- *Extensividade*: Um operador de imagens ψ (respectivamente, operador de subconjuntos Ψ) é *extensivo* se, a entrada do operador é sempre comparável com o resultado da aplicação do operador, ou seja, $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), f \leq \psi(f)$ (respectivamente, $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), X \subseteq \Psi(X)$).
- *Anti-extensividade*: Um operador de imagens ψ (respectivamente, operador de subconjuntos Ψ) é *anti-extensivo* se, o resultado da aplicação do operador é sempre comparável com a entrada do operador, isto é, $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), \psi(f) \leq f$ (respectivamente, $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Psi(X) \subseteq X$).
- *Dualidade*: Dois operadores de imagens ψ e ϕ (respectivamente, operadores de subconjuntos Ψ e Φ) são *duais* com respeito a complementação se, ao aplicar ψ (respectivamente, Ψ) em uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ (respectivamente, subconjunto $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$) é equivalente a aplicar ϕ (respectivamente, Φ) no complemento da imagem¹ f (respectivamente, X) e tomar o complemento do resultado do operador, ou seja, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), \psi(f) = [\phi(f^c)]^c$ (respectivamente, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Psi(X) = [\Phi(X^c)]^c$).
- *Auto-dualidade*: Um operador de imagens ψ (respectivamente, operador de subconjuntos Ψ) é *auto-dual* se é dual de si mesmo, isto é, $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), \psi(f) = [\psi(f^c)]^c$ (respectivamente, $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Psi(X) = [\Psi(X^c)]^c$).
- *Complementar*: Dois operadores de imagens ψ e ϕ (respectivamente, operadores de subconjuntos Ψ e Φ) são *complementares* com respeito a complementação se ao aplicar ψ (respectivamente, Ψ) em uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ (respectivamente, subconjunto $X \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$) é equivalente a aplicar ϕ (respectivamente, Φ) no complemento da imagem f (respectivamente, X), ou seja, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), \psi(f) = \phi(f^c)$ (respectivamente, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Psi(X) = \Phi(X^c)$).
- *Auto-complementar*: Um operador de imagens ψ (respectivamente, operador de subconjuntos Ψ) é *auto-complementar* se é complementar de si mesmo, isto é, $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}), \psi(f) = \psi(f^c)$ (respectivamente, $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Psi(X) = \Psi(X^c)$).

¹O complemento de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, denotado por f^c , é definido para $\forall x \in \mathcal{D}, f^c(x) = K - f(x)$.

Em MM, muitos operadores são definidos com base em um conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z}^2$ chamado *elemento estruturante* (EE). Esses operadores transformam o valor de um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ em um valor obtido utilizando informações dos *pixels* adjacentes a p . A relação de adjacência envolvida é definida por meio do conjunto $\mathcal{B}$ da seguinte forma: p é adjacente a q segundo $\mathcal{B}$ se, e somente se, $q \in (\mathcal{B} + p) = \{b + p : b \in \mathcal{B}\}$ e equivalentemente $(q - p) \in \mathcal{B}$ ou ainda $(p - q) \in \check{\mathcal{B}} = \{-b : b \in \mathcal{B}\}$. Assim, denota-se por $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ esta relação de adjacência definida pelo EE $\mathcal{B}$.

Dois operadores fundamentais baseados em EE são: *erosão* e *dilatação*. Aliás, uma grande quantidade de operadores morfológicos baseia-se numa combinação selecionada de erosão e dilatação. A erosão e a dilatação, denotadas por $\varepsilon_{\mathcal{B}}$ e $\delta_{\mathcal{B}}$, para conjuntos são definidas pela subtração e soma de Minkowski (Banon e Barrera, 1994; Dougherty e Lotufo, 2003) para todo $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ como

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \ominus \mathcal{B} = \bigcap_{b \in \mathcal{B}} \{\mathcal{X} - b\} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \oplus \mathcal{B} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \{\mathcal{X} + b\}, \quad (2.1)$$

e redefinida para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ como

$$\forall p \in \mathcal{D}, [\varepsilon_{\mathcal{B}}(f)](p) = \bigwedge_{b \in \mathcal{B}} \{f(p - b)\} \quad \text{e} \quad \forall p \in \mathcal{D}, [\delta_{\mathcal{B}}(f)](p) = \bigvee_{b \in \mathcal{B}} \{f(p + b)\}. \quad (2.2)$$

Vale salientar que alguns autores, como por exemplo Soille (2003) e Serra (1982), definem a erosão e a dilatação para cada pixel $p \in \mathcal{D}$ como o ínfimo e o supremo dos *pixels* adjacentes a p segundo $\mathcal{B}$. Neste caso, o EE $\mathcal{B}$ não é refletido na definição do operador de erosão. Mas é claro, se o EE $\mathcal{B}$ é simétrico em relação a origem, então $\mathcal{B} = \check{\mathcal{B}}$ e assim as definições ficam exatamente iguais. Na Figura 2.5 é apresentado um exemplo das aplicações de erosão e dilatação com um EE simétrico. Observe que uma das características da erosão (respectivamente, dilatação) é aumentar as regiões escuras (respectivamente, claras) e diminuir as regiões claras (respectivamente, escuras) presentes na imagem, de acordo com o formato geométrico do EE (Dougherty e Lotufo, 2003; Soille, 2003).

Figura 2.5: Exemplo da aplicação de erosão e dilatação com EE formato de cruz em uma dada imagem.

A erosão $\varepsilon_{\mathcal{B}}$ e a dilatação $\delta_{\mathcal{B}}$ são operadores duais, crescentes e se $\mathcal{B}$ é simétrico em relação a origem então a erosão é anti-extensiva e a dilatação é extensiva. A composição sequencial de erosão e dilatação levam às definições de outros dois operadores básicos chamados de *abertura* e *fechamento*, denotados por $\gamma_{\mathcal{B}}$ e $\varphi_{\mathcal{B}}$, e definidos para todo conjunto $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ como

$$\gamma_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})) \quad \text{e} \quad \varphi_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \delta_{\mathcal{B}}(\varepsilon_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})) \quad (2.3)$$

e analogamente, para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ como

$$\gamma_{\mathcal{B}}(f) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}(f)) \text{ e } \varphi_{\mathcal{B}}(f) = \delta_{\mathcal{B}}(\varepsilon_{\mathcal{B}}(f)). \quad (2.4)$$

Como o par de operadores erosão e dilatação, o par abertura e fechamento também são duais, crescentes e, se $\mathcal{B}$ é simétrico em relação a origem, então a abertura é anti-extensiva e o fechamento é extensivo. Contudo, eles têm uma propriedade a mais, a idempotência. Vale salientar que, operadores crescentes e idempotentes são conhecidos como *filtros morfológicos* (Serra e Vincent, 1992). Na Figura 2.6 é apresentado um exemplo das aplicações de abertura e fechamento com um EE simétrico com formato geométrico de cruz.

Figura 2.6: Exemplo da aplicação de abertura e fechamento com EE formato de cruz em uma dada imagem.

Os operadores morfológicos discutidos até este momento envolvem combinações de um conjunto ou imagem com um EE. Por outro lado, alguns operadores evoluem combinações de um conjunto ou imagem, denominado marcador, com um EE e um outro conjunto ou imagem chamado máscara. Por exemplo, a dilatação condicional para conjuntos, $\delta_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ é a dilatação do conjunto (marcador) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ pelo EE $\mathcal{B}$ condicionado por um outro conjunto (máscara) $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$, ou seja,

$$\delta_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{X}. \quad (2.5)$$

A dilatação condicional pode ser utilizada para reconstruir CCs do conjunto $\mathcal{X}$ marcados pelo conjunto $\mathcal{M}$. A reconstrução é obtida após n aplicações sucessivas da dilatação condicional $\delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ até atingir a idempotência, isto é, $\delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \delta_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \cap \mathcal{X}$. Este procedimento, ilustrado pela Figura 2.7, dá origem ao operador reconstrução por dilatação $\delta_{\mathcal{B}}^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ de um conjunto $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ por um EE $\mathcal{B}$ utilizando o conjunto marcador $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ e definida por

$$\delta_{\mathcal{B}}^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}), \quad (2.6)$$

em que $\delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ é a dilatação condicional com $n > 0$ iterações satisfazendo $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ e $\delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \delta_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}^{n-1}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \cap \mathcal{X}$ e definida por

$$\delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \begin{cases} \delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}, & \text{se } n = 1 \\ \delta_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}^{n-1}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \cap \mathcal{X}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Analogamente, como ilustrado na Figura 2.8, a reconstrução por erosão $\varepsilon_{\mathcal{B}}^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ de um conjunto $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ por um EE $\mathcal{B}$ utilizando o conjunto marcador $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{X}$ é definida por $\varepsilon_{\mathcal{B}}^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \varepsilon_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ onde $\varepsilon_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ é a erosão condicional com $n > 0$ iterações satisfazendo

Figura 2.7: Exemplo de reconstrução por dilatação para um conjunto $\mathcal{X}$ e um conjunto marcador $\mathcal{M}$.

$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}$ e $\varepsilon_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(\varepsilon_{\mathcal{B}}^{n-1}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \cup \mathcal{X}$ e definida por

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \begin{cases} \varepsilon_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{X}, & \text{se } n = 1, \\ \varepsilon_{\mathcal{B}}(\varepsilon_{\mathcal{B}}^{n-1}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \cup \mathcal{X}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.8)$$

Figura 2.8: Exemplo de reconstrução por erosão para um conjunto $\mathcal{X}$ e um conjunto marcador $\mathcal{M}$.

Estes operadores podem ser facilmente estendidos para imagens simplesmente utilizando os elementos: relação de ordem ($\leq$), ínfimo ($\wedge$) e supremo ($\vee$) do reticulado das imagens, ao invés dos elementos: relação de ordem ($\subseteq$), ínfimo ($\cap$) e supremo ($\cup$) do reticulado dos subconjuntos. Assim, a dilatação por reconstrução, ilustrada na Figura 2.9, para uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ por um EE $\mathcal{B}$ utilizando uma imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ com $g \leq f$ é definida da seguinte forma:

$$\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) = \delta_{\mathcal{B}}^n(f, g), \quad (2.9)$$

em que $\delta_{\mathcal{B}}^n(f, g) = \delta_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}^{n-1}(f, g)) \wedge f$.

Figura 2.9: Exemplo de reconstrução por dilatação para uma imagem f e uma imagem marcadora g .

Analogamente, a reconstrução por erosão, ilustrada na Figura 2.10, para uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ por um EE $\mathcal{B}$ utilizando uma imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ com $f \leq g$ é definida da seguinte forma:

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) = \varepsilon_{\mathcal{B}}^n(f, g), \quad (2.10)$$

em que $\varepsilon_{\mathcal{B}}^n(f, g) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(\varepsilon_{\mathcal{B}}^{n-1}(f, g)) \vee f$.

Figura 2.10: Exemplo de reconstrução por erosão para uma imagem f e uma imagem marcadora g .

A reconstrução por erosão e dilatação são duais, crescentes e idempotentes, ou seja, são filtros morfológicos, e se $\mathcal{B}$ é simétrico em relação a origem, então a abertura é anti-extensiva e o fechamento é extensivo. Aliás, uma grande quantidade de operadores morfológicos são definidos a partir da reconstrução por erosão e dilatação, como por exemplo: abertura e fechamento por reconstrução, h -bacias, h -domos, abertura e fechamento *top-hat* por reconstrução, entre outros (Dougherty e Lotufo, 2003; Soille, 2003). Não obstante, erosão e a dilatação por reconstrução fazem parte de uma classe de operadores que preservam contornos, os operadores conexos.

Outros operadores morfológicos utilizados para reconstruir regiões de uma imagem são os filtros por atributos (Breen e Jones, 1996) que também são operadores conexos. Dentre os filtros por atributos (Breen e Jones, 1996; Caselles e Monasse, 2002; Salembier e Wilkinson, 2009; Salembier *et al.*, 1998; Vincent, 1994), a abertura (respectivamente, fechamento) por atributo desempenha um papel similar à reconstrução por dilatação (respectivamente, erosão), sendo a principal diferença a forma com que é realizada a reconstrução, a qual é determinada por um critério sobre o valor de um atributo crescente, enquanto que a reconstrução por dilatação (respectivamente, erosão), é determinada por uma imagem marcadora. O atributo crescente pode ser representado por uma função $\kappa : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ com $A \subseteq B$ então $\kappa(A) \leq \kappa(B)$. Exemplos de atributos crescentes incluem: área, volume, altitude, entre outros. Dessa forma, a abertura por atributo para um conjunto $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ é um conjunto $\gamma_i^\kappa(\mathcal{X})$ contendo os CCs de $\mathcal{X}$ definidos por uma relação de adjacência $\mathcal{A}$ que satisfazem o critério definido sobre o valor do atributo κ , isto é,

$$\gamma_i^\kappa(\mathcal{X}) = \{C \in \mathcal{CC}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) : \kappa(C) > i\}, \quad (2.11)$$

e por dualidade pode-se definir o fechamento por atributos, como $\phi_i^\kappa(\mathcal{X}) = [\gamma_i^\kappa(\mathcal{X}^c)]^c$. Na Figura 2.11 são apresentados alguns exemplos de aplicações de aberturas e fechamentos por atributos.

Figura 2.11: Exemplos de aberturas e fechamentos por atributos.

O par abertura e fechamento por atributo são duais, crescentes e idempotentes, ou seja, são filtros morfológicos. Como é conhecido, qualquer operador binário crescente, pode ser estendido para imagens por meio da decomposição por limiarização (Maragos e Ziff, 1990; Wendt *et al.*, 1986) que é amplamente discutida no Capítulo 4. Pela decomposição por limiarização, a abertura e o fechamento

por atributos são definidos para imagens da seguinte forma:

$$\forall p \in \mathcal{D}, [\gamma_i^\kappa(f)](p) = \max\{\lambda \in \mathbb{K} : p \in \gamma_i^\kappa(T_\lambda(f)), i \in \mathbb{R}\}, \quad (2.12)$$

onde $T_\lambda(f)$ é o tradicional operador limiarização da imagem f pelo limiar λ , isto é, $T_\lambda(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) \geq \lambda\}$. Analogamente, o fechamento por atributo pode ser definido por dualidade $\phi_i^\kappa(f) = [\gamma_i^\kappa(f^c)]^c$. Na Figura 2.12 são apresentados alguns exemplos de aplicações de aberturas e fechamentos por atributos em imagens.

Figura 2.12: Exemplos de aberturas e fechamentos por atributos.

Operadores conexos e suas especializações

Resumo do capítulo

Neste capítulo são apresentados conceitos, definições e notações sobre operadores conexos e suas especializações como os levelings e monotone planings. São mostradas também propriedades e relações que destacam a representação do espaço de escala com base em levelings proposto por Meyer e Maragos (1999).

3.1 Conceitos básicos sobre operadores conexos e suas especializações

Neste trabalho, tem-se interesse em uma subclasse específica de operadores morfológicos, os operadores conexos. Eles agem ampliando zonas planas adjacentes por meio de um processo de fusão e, por consequência, acabam não criando, na imagem de saída, novas estruturas (como contornos) que já não estejam presentes na imagem de entrada (Salembier e Serra, 1995; Serra e Salembier, 1993). Na Figura 3.1 são apresentados alguns exemplos de aplicações de operadores de imagens em geral, para uma simples comparação, no intuito de eliminar ruídos.

Figura 3.1: Exemplo de aplicações de operadores para fins de filtragem.

Definição 3.3 (Operador *leveling* (Meyer, 1998a,b)). Um operador $\psi : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é dito *leveling*, se para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, a seguinte relação é válida para todos os pares de *pixels* adjacentes, ou seja, $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\text{se } [\psi(f)](p) > [\psi(f)](q) \text{ então } f(p) \geq [\psi(f)](p) \text{ e } [\psi(f)](q) \geq f(q). \quad (3.4)$$

ou equivalentemente (pelo significado lógico: $A \Rightarrow B$ é equivalente a $\neg B \Rightarrow \neg A$),

$$\text{se } f(p) < [\psi(f)](p) \leq [\psi(f)](q) < f(q) \text{ então } [\psi(f)](p) \leq [\psi(f)](q). \quad (3.5)$$

Pela Definição 3.3, pode-se observar que quando existe uma transição (p, q) em $\psi(f)$ então $f(p) \wedge f(q) \leq [\psi(f)](p) \wedge [\psi(f)](q) < [\psi(f)](p) \vee [\psi(f)](q) \leq f(p) \vee f(q)$, pois $f(p) \geq [\psi(f)](p) > [\psi(f)](q) \geq f(q)$. Logo, $[\psi(f)](p)$ e $[\psi(f)](q)$ têm valores entre $f(p) \wedge f(q)$ e $f(p) \vee f(q)$, quando $[\psi(f)](p) \neq [\psi(f)](q)$. Basicamente, isso significa que qualquer transição entre duas regiões conexas de $\psi(f)$ é delimitada por uma grande variação entre os níveis destas regiões em f . Este fato, pode ser observado por meio de exemplos de operadores *levelings* apresentados na Figura 3.3.

Figura 3.3: Exemplos de aplicações de operadores *levelings* em uma dada imagem.

Os *levelings*, uma subclasse de operadores conexos, estabelecem limites de valores de acordo com os valores de f , enquanto que os operadores conexos simplesmente ignoram tais limites. Uma outra subclasse dos operadores conexos, os *monotone planing*, também ignoram estes limites, mas preservam a ordem das transições de f como os *levelings*. Na Figura 3.4 pode-se observar este fato por meio dos exemplos de aplicações de operadores *monotone planing*.

Definição 3.4 (Operador *monotone planing* (Meyer, 1998a,b)). Um operador $\psi : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é dito *monotone planing*, se para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, a seguinte relação é válida para todos os pares de *pixels* adjacentes, ou seja, $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\text{se } [\psi(f)](p) > [\psi(f)](q) \text{ então } f(p) > f(q). \quad (3.6)$$

ou equivalentemente (pelo significado lógico: $A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$),

$$\text{se } f(p) \leq f(q) \text{ então } [\psi(f)](p) \leq [\psi(f)](q). \quad (3.7)$$

Figura 3.4: Exemplos de aplicações de operadores monotone planing em uma dada imagem.

Note que, os *levelings* podem ser vistos como operadores *monotone planing* que são limitados pelos valores de f .

3.2 Operadores vistos como relações binárias

Por meio das Definições 3.2, 3.3 e 3.4 das classes dos operadores conexos, *levelings* e *monotone planing* são possíveis construirmos relações binárias $\mathcal{E}_{conexo}$, $\mathcal{E}_{leveling}$ e $\mathcal{E}_{monotone planing}$ sobre $\mathcal{F}(\mathcal{D})$. Por exemplo, a relação binária $\mathcal{E}_{conexo} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{D}) \times \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é construída da seguinte forma: $(g, f) \in \mathcal{E}_{conexo}$ se, e somente se, existir um operador conexo ψ tal que $g = \psi(f)$. Neste caso, dizemos que g é *conexo* de f se, e somente se, $(g, f) \in \mathcal{E}_{conexo}$. Analogamente, define-se também as relações binárias $\mathcal{E}_{leveling} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{D}) \times \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e $\mathcal{E}_{monotone planing} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{D}) \times \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Estas relações binárias podem estar associadas a diversas propriedades, como por exemplo:

- **reflexividade:** Uma relação binária $\mathcal{E}_{\preceq}$ sobre $\mathcal{V}$ é dita reflexiva se, e somente se, para todo $x \in \mathcal{V}$ tem-se $(x, x) \in \mathcal{E}_{\preceq}$ (ou pela notação: $x \preceq x$);
- **simetria:** Uma relação binária $\mathcal{E}_{\preceq}$ sobre $\mathcal{V}$ é dita simétrica se, e somente se, para todo $x, y \in \mathcal{V}$ tal que se $(x, y) \in \mathcal{E}_{\preceq}$ então $(y, x) \in \mathcal{E}_{\preceq}$ (ou pela notação: se $x \preceq y$ então $y \preceq x$);
- **anti-simetria:** Uma relação binária $\mathcal{E}_{\preceq}$ sobre $\mathcal{V}$ é dita anti-simétrica se, e somente se, para todo $x, y \in \mathcal{V}$ tal que se $(x, y), (y, x) \in \mathcal{E}_{\preceq}$ então $x = y$ (ou pela notação: se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ então $x = y$);
- **transitividade:** Uma relação binária $\mathcal{E}_{\preceq}$ sobre $\mathcal{V}$ é dita transitiva se, e somente se, para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ tal que se $(x, y), (y, z) \in \mathcal{E}_{\preceq}$ então $(x, z) \in \mathcal{E}_{\preceq}$ (ou pela notação: se $x \preceq y$ e $y \preceq z$ então $x \preceq z$);

As relações binárias que são anti-simétricas e transitivas são chamadas de *relações de pré-ordem* e analogamente as relações binárias reflexivas, anti-simétricas e transitivas são chamadas de *relações de ordem*. Neste sentido, as Proposições 3.5, 3.6 e 3.7 respectivamente, garantem que a relação $\mathcal{E}_{conexo}$ é uma relação de pré-ordem, $\mathcal{E}_{leveling}$ é uma relação de pré-ordem, mas se ignoramos imagens constantes então $\mathcal{E}_{leveling}$ é uma relação de ordem e $\mathcal{E}_{monotone planing}$ é uma relação de pré-ordem.

Proposição 3.5. *A relação $\mathcal{E}_{conexo}$ é uma relação de pré-ordem.*

PROVA: Para mostrar que a relação $\mathcal{E}_{conexo}$ é uma relação de pré-ordem basta verificar se ela é transitiva e reflexiva.

- **transitiva:** Sejam f, g e $h \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ tais que h é *conexo* de g e g é *conexo* de f . Logo, para $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, temos que, se $h(p) \neq h(q)$ então $g(p) \neq g(q)$. Consequentemente, temos que $f(p) \neq f(q)$, pois g é *conexo* de f . Portanto, h é *conexo* de f .
- **reflexiva:** Por definição, uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é *conexa* de si mesma.

□

Proposição 3.6 (Meyer (1998b)). *A relação $\mathcal{E}_{leveling}$ é uma relação de pré-ordem. Mas, se ignorarmos imagens constantes então $\mathcal{E}_{leveling}$ é uma relação de ordem.*

PROVA: Para mostrar que $\mathcal{E}_{leveling}$ é uma relação de pré-ordem (respectivamente, ordem) basta verificar se ela é transitiva e reflexiva (respectivamente, anti-simétrica, transitiva e reflexiva).

- **anti-simétrica:** Sejam g e $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ tais que g é *leveling* de f e f é *leveling* de g . Logo, para $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\text{se } g(p) > g(q) \text{ e } f(p) > f(q), \text{ então } f(p) \geq g(p), g(q) \geq f(q), g(p) \geq f(p) \text{ e } f(q) \geq g(q).$$

Como, $f(p) \geq g(p)$ e $g(p) \geq f(p)$ então $g(p) = f(p)$ e de forma análoga, temos que $g(q) = f(q)$. Dessa forma, segue que $g(p) = f(p)$ e $g(q) = f(q)$. Portanto, como g e f não são constantes, então $g = f$ e consequentemente a relação $\mathcal{E}_{leveling}$ é anti-simétrica.

- **transitiva:** Sejam f, g e $h \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ tais que h é um *leveling* de g e g é um *leveling* de f . Logo, para $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, temos que: se $h(p) > h(q)$ então $g(p) \geq h(p) > h(q) \geq g(q)$. Como $g(p) > g(q)$ segue que $f(p) \geq g(p) > g(q) \geq f(q)$. Portanto, $h(p) > h(q) \Rightarrow g(p) \geq h(p) > h(q) \geq g(q) \Rightarrow f(p) \geq g(p) \geq h(p) > h(q) \geq g(q) \geq f(q)$ o que mostra que h é um *leveling* de f .
- **reflexiva:** Por definição, uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é *leveling* de si mesma, pois para $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, se $f(p) > f(q)$ então $f(p) \geq f(p) > f(q) \geq f(q)$.

□

Proposição 3.7 (Meyer (1998b)). *A relação $\mathcal{E}_{monotone planing}$ é uma relação de pré-ordem.*

PROVA: Para mostrar que a relação $\mathcal{E}_{monotone planing}$ é uma relação de pré-ordem basta verificar se ela é transitiva e reflexiva.

- **transitiva:** Sejam f, g e $h \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ tais que h é *monotone planing* de g e g é *monotone planing* de f . Logo, para $\forall(p, q) \in \mathcal{A}$, temos que, se $h(p) > h(q)$ então $g(p) > g(q)$. Consequentemente, temos que $f(p) > f(q)$, pois g é *monotone planing* de f . Portanto, h é *monotone planing* de f .
- **reflexiva:** Por definição, uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é *monotone planing* de si mesma.

□

3.3 Propriedades com relação as extremas regionais

Os operadores *monotone planing*, como os *levelings*, além de preservar novos contornos da imagem também não criam uma outra estrutura da imagem, as extremas regionais. Em outras palavras, se $\mathcal{X}$ é uma extrema regional de um operador *monotone planing*, então existem extremas regionais na imagem referência contidas em $\mathcal{X}$, como pode ser observado pelo exemplo apresentado na Figura 3.5. Com base neste fato, Meyer (1998b) estabeleceu a Proposição 3.8.

Figura 3.5: Ilustração destacando que os operadores *monotone planing* não criam novas extremas regionais.

Proposição 3.8 (Meyer (1998b)). *Se g é um *monotone planing* de uma imagem f possuindo uma mínima (respectivamente, máxima) regional $\mathcal{X} \in \mathcal{ZP}(g)$, então f possui uma mínima (respectivamente, máxima) regional $\mathcal{Z} \in \mathcal{ZP}(f)$ incluída em $\mathcal{X}$, ou seja, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$.*

PROVA: Seja $\mathcal{X} \in \mathcal{ZP}(g)$ uma mínima regional de g e considere $y = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \{f(x)\}$ um *pixel* de $\mathcal{X}$ de modo que y tem um valor mínimo em f . Então, existe uma zona plana $\mathcal{Z}$ em f que contém y . Claramente, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$, pois g é *conexo* de f . Vamos mostrar, por contradição, que $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ é uma mínima regional em f .

Suponha que $\mathcal{Z}$ não é uma mínima regional de f . Então, existe um *pixel* $p \notin \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ adjacente de algum *pixel* $q \in \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$, tal que $f(p) < f(q) = f(y)$. Como g é um *monotone planing* de f , segue que, se $f(p) \leq f(q)$ então $g(p) \leq g(q)$, mas como $q \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ é uma mínima regional de g , então $g(p) = g(q)$. Logo $p \in \mathcal{X}$, mas isso é uma contradição e portanto $\mathcal{Z}$ é uma mínima regional de f . $\square$

3.4 Algumas propriedades algébricas sobre os operadores conexos, *levelings* e *monotone planings*

Nesta seção, são apresentadas algumas propriedades sobre derivação de operadores conexos, *leveling* e *monotone planing*. Essas propriedades são úteis no Capítulo 6, onde são estabelecidas as propriedades da classe dos últimos *levelings*.

Os operadores conexos (respectivamente, *levelings* e *monotone planings*) podem ser derivados por meio de combinações de operadores conexos (respectivamente, *levelings* e *monotone planings*). Assim, a composição de operadores conexos (respectivamente, *levelings* e *monotone planings*) é um operador conexo (respectivamente, *levelings* e *monotone planings*), da mesma forma que o ínfimo e o supremo de operadores conexos (respectivamente, *levelings* e *monotone planings*) são operadores conexos. Estas afirmações são garantidas pelas Proposições 3.9 a 3.14.

Proposição 3.9 (Serra e Salembier (1993)). *Se ψ_1 e ψ_2 são operadores conexos então, a composição $\psi_1\psi_2$ também é conexo.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $(p, q) \in \mathcal{A}$. Então, por hipótese temos que ψ_1 e ψ_2 são operadores conexos. Logo, por definição: $[\psi_2(\psi_1(f))](p) \neq [\psi_2(\psi_1(f))](q) \Rightarrow [\psi_1(f)](p) \neq [\psi_1(f)](q)$ e

consequentemente $[\psi_1(f)](p) \neq [\psi_1(f)](q) \Rightarrow f(p) \neq f(q)$. Portanto, por transitividade, temos que $[\psi_2(\psi_1(f))](p) \neq [\psi_2(\psi_1(f))](q) \Rightarrow f(p) \neq f(q)$, o que mostra que $\psi_1\psi_2$ é um operador conexo. $\square$

Proposição 3.10 (Meyer (1998b)). *Se ψ_1 e ψ_2 são operadores levelings então, a composição $\psi_1\psi_2$ também é leveling.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $(p, q) \in \mathcal{A}$. Então, por hipótese temos que ψ_1 e ψ_2 são operadores levelings. Logo, por definição: $[\psi_2(\psi_1(f))](p) > [\psi_2(\psi_1(f))](q) \Rightarrow [\psi_1(f)](p) \geq [\psi_2(\psi_1(f))](p) > [\psi_2(\psi_1(f))](q) \geq [\psi_1(f)](q)$ e consequentemente $[\psi_1(f)](p) > [\psi_1(f)](q) \Rightarrow f(p) \geq [\psi_1(f)](p) > [\psi_1(f)](q) \geq f(q)$. Portanto, por transitividade, temos que $[\psi_2(\psi_1(f))](p) > [\psi_2(\psi_1(f))](q) \Rightarrow f(p) \geq [\psi_2(\psi_1(f))](p) > [\psi_2(\psi_1(f))](q) \geq f(q)$, o que mostra que $\psi_1\psi_2$ é um operador leveling. $\square$

Proposição 3.11. *Se ψ_1 e ψ_2 são operadores monotone planing então, a composição $\psi_1\psi_2$ também é monotone planing.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $(p, q) \in \mathcal{A}$. Então, por hipótese temos que ψ_1 e ψ_2 são operadores monotone planings. Logo, por definição: $[\psi_2(\psi_1(f))](p) > [\psi_2(\psi_1(f))](q) \Rightarrow [\psi_1(f)](p) > [\psi_1(f)](q)$ e consequentemente $[\psi_1(f)](p) > [\psi_1(f)](q) \Rightarrow f(p) > f(q)$. Portanto, por transitividade, temos que $[\psi_2(\psi_1(f))](p) > [\psi_2(\psi_1(f))](q) \Rightarrow f(p) > f(q)$, o que mostra que $\psi_1\psi_2$ é um operador monotone planing. $\square$

Proposição 3.12 (Serra e Salembier (1993)). *Se $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ é uma família de operadores conexos então, o supremo $\bigvee_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ e o ínfimo $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ são operadores conexos.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $(p, q) \in \mathcal{A}$. Então, por hipótese temos que:

$$f(p) = f(q) \Rightarrow [\psi_0(f)](p) = [\psi_0(f)](q), [\psi_1(f)](p) = [\psi_1(f)](q), \dots, [\psi_n(f)](p) = [\psi_n(f)](q).$$

Claramente, $f(p) = f(q) \Rightarrow \bigvee_{0 \leq i \leq n} \psi_i(p) = \bigvee_{0 \leq i \leq n} \psi_i(q)$ e $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \psi_i(p) = \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \psi_i(q)$. Portanto, o supremo $\bigvee_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ e o ínfimo $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ são operadores conexos. $\square$

Proposição 3.13 (Meyer (1998b)). *Se $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ é uma família de operadores levelings então, o supremo $\bigvee_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ e o ínfimo $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ são operadores levelings.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $(p, q) \in \mathcal{A}$. Por definição, se ψ_i é um operador leveling então a seguinte relação é válida para todo $(p, q) \in \mathcal{A}$,

$$f(p) < [\psi_i(f)](p) \leq [\psi_i(f)](q) < f(q) \Rightarrow [\psi_i(f)](p) \leq [\psi_i(f)](q).$$

Esta definição mostra que os valores de p e q em ψ_i estão delimitados pelos valores de f . Assim, o ínfimo e o supremo da família $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ também estão delimitados pelos valores de f , pois esta família é de operadores leveling. Da mesma forma, a relação $[\psi_i(f)](p) \leq [\psi_i(f)](q)$ também é válida para o supremo e ínfimo desta família. Portanto, o ínfimo e o supremo de uma família de operadores levelings também é um operador leveling. $\square$

Proposição 3.14. *Se $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ é uma família de operadores monotone planing então o supremo $\bigvee_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ e o ínfimo $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \psi_i$ são operadores monotone planings.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $(p, q) \in \mathcal{A}$. Por definição, se ψ_i é um operador *monotone planing* então a seguinte relação é válida para todo $(p, q) \in \mathcal{A}$,

$$f(p) \leq f(q) \Rightarrow [\psi_i(f)](p) \leq [\psi_i(f)](q)$$

Logo, como $[\psi_0(f)](p) \leq [\psi_0(f)](q)$, $[\psi_1(f)](p) \leq [\psi_1(f)](q)$, $\dots$, $[\psi_n(f)](p) \leq [\psi_n(f)](q)$ e os operadores máximo e mínimo preservam esta ordem então $\bigvee_{0 \leq i \leq n} [\psi_i(f)](p) \leq \bigvee_{0 \leq i \leq n} [\psi_i(f)](q)$ e $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} [\psi_i(f)](p) \leq \bigvee_{0 \leq i \leq n} [\psi_i(f)](q)$. Portanto, o ínfimo e o supremo de uma família de operadores *monotone planings* também são operadores *monotone planings*. $\square$

3.5 Relações entre *levelings* e reconstruções por dilatações e erosões

Por definição, um operador *leveling* ψ aplicado em uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ satisfaz duas inequações para cada par de transições entre *pixels* adjacentes $(p, q) \in \mathcal{A}$, isto é, quando houver uma transição entre p e q em ψ então $f(p) \geq [\psi(f)](p)$ e $[\psi(f)](q) \geq f(q)$. Mais precisamente, um operador que satisfaz uma destas duas inequações é chamado de *upper-leveling* e *lower-leveling* e são apresentados pelas Definições 3.15 e 3.16.

Definição 3.15 (Operador *upper-leveling* (Meyer, 1998a)). Um operador $\psi : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é dito *upper-leveling*, se para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, a seguinte relação é válida para todos os pares de *pixels* adjacentes, ou seja, $\forall (p, q) \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\text{se } [\psi(f)](p) > [\psi(f)](q) \text{ então } f(p) \geq [\psi(f)](p) \quad (3.8)$$

Definição 3.16 (Operador *lower-leveling* (Meyer, 1998a)). Um operador $\psi : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é dito *lower-leveling*, se para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, a seguinte relação é válida para todos os pares de *pixels* adjacentes, ou seja, $\forall (p, q) \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\text{se } [\psi(f)](p) > [\psi(f)](q) \text{ então } [\psi(f)](q) \geq f(q). \quad (3.9)$$

A reconstrução por dilatação $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g)$ de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ por um EE $\mathcal{B}$ e uma imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, satisfaz a seguinte propriedade: $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) \leq f$ e $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) = \delta_{\mathcal{B}}(\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g)) \wedge f$. Esta propriedade também é verificada pelos *lower-levelings* que são anti-extensivos, como observado por Meyer (1998a) na Proposição 3.17.

Proposição 3.17 (Meyer (1998a)). Um operador ψ é *lower-leveling* (respectivamente, *upper-leveling*) e anti-extensivo (respectivamente, extensivo) se, e somente se, ψ é uma reconstrução por dilatação (respectivamente, erosão).

PROVA: Considere $g = \psi(f)$ para uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Como ψ é *lower-leveling* e anti-extensivo, segue que: $g \leq f$ e g é *lower-leveling* de f .

$$\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, g(p) > g(q) \Rightarrow g(q) \geq f(q).$$

$$\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, g(p) \leq g(q) \text{ ou } g(q) \geq f(q). \quad [\text{pelo argumento lógico: } A \Rightarrow B \iff B \text{ ou } \neg A]$$

$$\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, g(q) \geq g(p) \wedge f(q).$$

$$\iff g \leq f \text{ e } \forall q \in \mathcal{D}, p \in \mathcal{A}(q), g(q) \geq g(p) \wedge f(q).$$

$$\iff g \leq f \text{ e } \forall q \in \mathcal{D}, g(q) \geq \bigvee_{p \in \mathcal{A}(q)} \{g(p)\} \wedge f(q).$$

$$\iff g \leq f \text{ e } \forall q \in \mathcal{D}, g(q) \geq [\delta_{\mathcal{B}}(g)](q) \wedge f(q), \text{ onde } (p, q) \in \mathcal{A} \iff q \in (\mathcal{B} + p).$$

$$\iff g \leq f \text{ e } g = \delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) \text{ é uma reconstrução por dilatação de uma imagem } f \text{ por EE simétrico e}$$

isotrópico $\mathcal{B}$ e alguma imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$.

Analogamente, pode-se provar que *upper-levelings* são reconstruções por erosões. $\square$

Além dessas relações entre *lower-levelings* e *upper-levelings* com reconstruções por dilatações e erosões, é possível, seguindo Meyer (1998b) na Equação 3.10, construir um operador *leveling* auto-dual ρ combinando as reconstruções por dilatação e erosão.

$$\forall p \in \mathcal{D}, [\rho(f, g)](p) = \begin{cases} [\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g \wedge f)](p) & , \text{ se } g(p) < f(p), \\ [\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g \vee f)](p) & , \text{ se } g(p) > f(p), \\ f(p) & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Também é muito comum construir operadores *levelings* por meio de composição, por exemplo: $\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}(\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g \wedge f), g \vee f)$ e $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g \vee f), g \wedge f)$. Na Figura 3.6 são apresentados exemplos de construções de *levelings* a partir de imagens marcadoras.

Figura 3.6: Exemplos de construções de *levelings* a partir de imagens marcadoras.

3.6 Espaço de escala com base em *levelings*

Como mostrado na Seção 3.2, a relação binária $\mathcal{E}_{\text{leveling}}$ é reflexiva e transitiva e, se ignoramos as imagens constantes, então a relação também é anti-simétrica, ou seja, $\mathcal{E}_{\text{leveling}}$ é uma relação de ordem quando ignoram-se as imagens constantes. Com a ajuda desta relação, os *levelings* podem ser aninhados para criar um espaço de escala de uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ em forma de uma sequência de *levelings* ($g_0 = f, g_1, \dots, g_n$), onde g_k é *leveling* de g_{k-1} e, por consequência da transitividade, g_k também é *leveling* de cada imagem g_j , para todo $j < k$. Neste sentido, o tradicional algoritmo para construir *levelings*, descrito pela Equação 3.10, toma como argumento duas imagens, uma imagem de entrada $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e uma imagem marcadora $h \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Ele reconstrói a imagem marcadora h de tal maneira a torná-la *leveling* da imagem f . Assim, dizemos que $g = \rho(f, h)$ é *leveling* de f , obtida a partir do marcador h . Com este operador é possível construir um espaço

de escala baseado em *levelings* a partir de qualquer família $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ de imagens marcadoras com o seguinte encadeamento: $g_0 = f$, $g_1 = \rho(g_0, h_1)$, $g_2 = \rho(g_1, h_2)$, $\dots$, $g_n = \rho(g_{n-1}, h_n)$. Esta sequência de *levelings* simplificam mais e mais a imagem f e, como mostrado por Meyer e Maragos (2000), constitui um espaço de escala com as seguintes características:

1. **Simplificação:** A partir de uma escala para a outra, uma simplificação real acontece, ou seja, se g_{i+1} é *leveling* de g_i então todos os contornos e todas as extremas regionais de g_{i+1} estão presentes em g_i .
2. **Princípio do máximo:** Uma forma particular de simplificação é expressa pelo princípio do máximo: qualquer mudança de escala, a intensidade máxima em escalas grosseiras é sempre menor do que a intensidade máxima das escalas finas, isto é, se g_{i+1} é um *leveling* de g_i então qualquer transição entre duas regiões conexas de g_{i+1} é delimitada por uma grande variação entre os níveis de cinza destas regiões em g_i .
3. **Princípio da causalidade:** O que acontece em escalas mais grosseiras só pode ser causado pelo que aconteceu em escalas mais finas, ou melhor, se g_{i+1} é *leveling* de g_i então todos os contornos presentes em g_{i+1} correspondem a contornos mais fortes em g_i nos mesmos lugares e também as extremas regionais em g_{i+1} estão presentes em g_i .
4. **Fidelidade:** Não criar novas estruturas em escalas mais grosseiras: cada mínima (respectivamente, máxima) regional do *leveling* contém uma mínima (respectivamente, máxima) regional da imagem de referência. Além das estruturas que são reprimidas, todos os outros contornos são preservados sem qualquer deslocamento ou desfocagem (ver Definição 3.2 e Proposição 3.8).
5. **Invariâncias:** Os *levelings* são invariantes às transformações de rotação (isotropia), translação espacial e mudança de iluminação, isto é, como a relação de adjacência é simétrica têm-se as invariâncias por rotação e translação, e no caso da invariância a iluminação, é sabido que se g_{i+1} é *leveling* de g_i e g_i e g_{i+1} são submetidos a uma transformação linear ψ então $\psi(g_{i+1})$ ainda é *leveling* de $\psi(g_i)$.

Na Figura 3.7 são apresentados exemplos de imagens de um espaço de escala baseado em *levelings* construídos a partir de uma família de marcadores compostos por filtros medianos.

Figura 3.7: Exemplos de imagens de um espaço de escala baseado em *levelings* construído a partir de uma família de marcadores compostos por filtros medianos.

Representações de imagens por meio de árvores baseadas em conjuntos de níveis

Resumo do capítulo

Representações de imagens por meio de árvores têm sido propostas nos últimos anos para realizar tarefas de análise e processamento de imagens, como por exemplo: filtragem, segmentação, reconhecimento de padrões, extração de contraste, registro, compactação e outras. Neste cenário, como ilustrado na Figura 4.1, o primeiro passo para realização da tarefa é construir uma representação da imagem por meio de uma árvore, depois a tarefa de processamento e análise de imagens é realizada através de modificações ou extrações de informações na própria árvore e finalmente uma imagem é reconstruída a partir da árvore modificada ou das informações extraídas da árvore. Neste capítulo

Figura 4.1: Representação de uma imagem por meio de árvore.

são apresentados algoritmos e modelos de árvores construídas a partir dos conjuntos de níveis de uma decomposição da imagem por limiarização. Estes modelos incluem as árvores de componentes e as árvores de formas. Essas árvores, como mostrado no Capítulo 5, têm uma forte relação com operadores levelings.

4.1 Conceitos de árvores construídas por conjuntos parcialmente ordenados

Como apresentado na Seção 3.2, uma relação binária $\mathcal{E}_{\preceq}$ sobre um conjunto $\mathcal{V}$ é chamada de relação de ordem se, e somente se, ela é transitiva, reflexiva e anti-simétrica. Neste caso, o par $(\mathcal{V}, \preceq)$ é conhecido por *conjunto ordenado*, ou seja, $\mathcal{V}$ é um conjunto ordenado pela relação $\preceq$. Mais especificamente, se quaisquer dois elementos de $a, b \in \mathcal{V}$ sempre são comparáveis ($a \preceq b$ ou $b \preceq a$), então o par $(\mathcal{V}, \preceq)$ é chamado de *conjunto totalmente ordenado*, caso contrário, chama-se o par $(\mathcal{V}, \preceq)$ de *conjunto parcialmente ordenado* (poset - do inglês, *partially ordered set*).

Um poset $(\mathcal{V}, \preceq)$ pode ser representado por um grafo não-direcionado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E_{\preceq})$ conhecido

por *Diagrama de Hasse*, onde seus vértices são os elementos do conjunto $\mathcal{V}$ e suas arestas $E_{\preceq}$ são definidas pela seguinte propriedade: $\{v, w\}$ é uma aresta em $E_{\preceq}$ se, e somente se, $v, w \in \mathcal{V}$, $v \neq w$, v e w são comparáveis e não existe $x \in \mathcal{V}$ diferente de v e w tal que ou $v \preceq x \preceq w$, ou $w \preceq x \preceq v$. Assim, posets finitos podem ser desenhados (diagrama de Hasse) da seguinte forma: os vértices de $\mathcal{V}$ são representados por pequenos círculos dispostos de tal forma que um círculo v está acima de um círculo w , se $\{v, w\}$ é uma aresta em $E_{\preceq}$ satisfazendo $w \preceq v$ e neste caso, desenha-se um segmento de reta de v para w . Na Figura 4.2 é apresentado um diagrama de Hasse para um dado poset.

Figura 4.2: Exemplo do diagrama de Hasse do poset $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}, \subseteq)$.

Como é conhecido, uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos. Neste sentido, o grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E_{\preceq})$ do diagrama de Hasse é uma árvore se, e somente se, o poset $(\mathcal{V}, \preceq)$ satisfaz as duas condições da Definição 4.1.

Definição 4.1 (Árvore). Um grafo do diagrama de Hasse de um poset $(\mathcal{V}, \preceq)$ é uma árvore se, e somente se, as duas condições a seguir são verificadas e, neste caso, o poset $(\mathcal{V}, \preceq)$ é chamado simplesmente por árvore.

1. $\exists R \in \mathcal{V}$ tal que $\forall N \in \mathcal{V}, N \preceq R$. Neste caso, é dito que R é a *raiz* da árvore.
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{V}$, se $A \preceq B$ e $A \preceq C$ então ou $B \preceq C$, ou $C \preceq B$. Assim, é dito que B e C estão aninhados (ou são comparáveis).

A primeira condição expressa a conexidade do poset, sendo R a raiz da árvore, e a segunda condição implica que não há ciclo, pois sejam $A, B, C, D \in \mathcal{V}$, a seguinte situação nunca acontece: $A \preceq B \preceq D$ e $A \preceq C \preceq D$ e B e C não comparáveis, como pode ser facilmente observado no diagrama de Hasse da Figura 4.3.

Figura 4.3: Exemplo do diagrama de Hasse do poset $(\{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}, \subseteq)$ que não satisfaz a Definição 4.1.

Na Figura 4.4 é apresentado um diagrama de Hasse para um dado poset que satisfaz a Definição 4.1 e, em seguida, são apresentadas algumas definições usuais sobre uma árvore $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \preceq)$.

Figura 4.4: Exemplo do diagrama de Hasse do poset $\mathcal{T} = (\{\{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}, \subseteq)$ que satisfaz a Definição 4.1.

Definição 4.2 (Raiz). O vértice $R \in \mathcal{V}$ é chamado por *raiz* da árvore $\mathcal{T}$ se, e somente se, $\forall A \in \mathcal{V}, A \preccurlyeq R$. Neste caso, denota-se por $\text{Raiz}(\mathcal{T})$ o vértice R raiz da árvore $\mathcal{T}$.

Definição 4.3 (Pai). O vértice $B \in \mathcal{V}$ é chamado de *pai* do vértice $A \in \mathcal{V}$ se, e somente se, $A \preccurlyeq B$ e não existir um vértice $C \in \mathcal{V}$ diferente de A e B tal que $A \preccurlyeq C \preccurlyeq B$. Neste caso, denota-se por $\text{Pai}(A)$ o vértice B pai do vértice A .

Definição 4.4 (Filhos). Os vértices da árvore $\mathcal{T}$ que tem como pai um vértice $A \in \mathcal{V}$ são chamados de *filhos* do vértice A e definido pelo conjunto $\text{Filhos}(A) = \{B \in \mathcal{V} : \text{Pai}(B) = A\}$.

Definição 4.5 (Folha). Um vértice $A \in \mathcal{V}$ é chamado de *folha* se, e somente se, o vértice A não possui filhos, ou seja, $\text{Filhos}(A) = \emptyset$. Assim, o conjunto das folhas da árvore $\mathcal{T}$ é definido pelo conjunto $\text{Folhas}(\mathcal{T}) = \{A \in \mathcal{V} : \text{Filhos}(A) = \emptyset\}$.

Definição 4.6 (Ascendente e Descendente). Sejam $A, B \in \mathcal{V}$ tal que $A \preccurlyeq B$. Neste caso, é dito que B é *ascendente* de A , ou ainda, que A é *descendentes* de B .

Definição 4.7 (Intervalo). Sejam $A, B \in \mathcal{V}$ tal que $A \preccurlyeq B$. Então, chama-se $[A, B]_{\mathcal{T}}$ o intervalo entre A e B se, e somente se, $[A, B]_{\mathcal{T}} = \{S \in \mathcal{V} : A \preccurlyeq S \preccurlyeq B\}$.

Definição 4.8 (Bifurcação). Sejam $A, B \in \mathcal{V}$ tal que $A \preccurlyeq B$. Então, diz-se que existe uma bifurcação entre A e B , se existir um $S \in \mathcal{V}$ tal que $S \preccurlyeq B$ e S não é comparável a A .

Definição 4.9 (Ramo). Sejam $A, B \in \mathcal{V}$ tal que $A \preccurlyeq B$. Então, diz-se que $[A, B]_{\mathcal{T}}$ é um ramo da árvore $\mathcal{T}$, se não existir uma bifurcação entre A e B .

A seguir são apresentados exemplos simples de aplicações das Definições 4.3 a 4.9 no poset $\mathcal{T}$ ilustrado na Figura 4.4.

1. A raiz da árvore $\mathcal{T}$ é o vértice $\text{Raiz}(\mathcal{T}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. As folhas da árvore $\mathcal{T}$ são os vértices do conjunto $\text{Folhas}(\mathcal{T}) = \{\{1\}, \{2\}, \{5\}\}$;
3. O pai do vértice $\{2\}$ é o conjunto $\text{Pai}(\{2\}) = \{1, 2, 3\}$;
4. Os filhos do vértice $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\text{Filhos}(\{1, 2, 3\}) = \{\{1\}, \{2\}\}$;
5. O intervalo entre os vértices $\{1\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ é o conjunto $[\{1\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}]_{\mathcal{T}} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$;
6. Existe uma bifurcação no intervalo $[\{1\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}]_{\mathcal{T}}$;

7. O intervalo $[\{5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}]_{\mathcal{T}}$ é um ramo.

A partir de uma árvore $\mathcal{T}$, pode-se definir uma operação essencial neste trabalho denominada *poda*. Esta operação produz uma árvore por meio de eliminações de vértices e arestas da árvore $\mathcal{T}$. Assim, é dito que uma árvore $\mathcal{T}'$ é obtida por uma operação de poda sobre a árvore $\mathcal{T}$ se a Definição 4.10 é verdadeira.

Definição 4.10 (Poda). Diz-se que um árvore $\mathcal{T}' = (\mathcal{V}', \preceq)$ é obtida por uma operação de *poda* sobre a árvore $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \preceq)$ se, e somente se, $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ e qualquer $A \in \mathcal{V}'$, $\nexists B \in (\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}')$ tal que $A \preceq B$. Neste caso, a operação de poda é denotada por $\mathcal{T}' = \text{Poda}(\mathcal{T})$.

Vale salientar $\mathcal{T}'$ é uma árvore, isto é, satisfaz a Definição 4.1. Na Figura 4.5 é apresentado um exemplo de operação de poda na árvore ilustrada na Figura 4.4.

Figura 4.5: Exemplo de operação de poda para uma dada árvore.

4.2 Árvores baseadas em conjuntos de níveis

O conjunto de *pixels* de f que estão estritamente abaixo (respectivamente, acima) de um determinado nível de cinza $h \in \mathbb{K}$ é denominado de conjunto de nível inferior de valor h (respectivamente, conjunto de nível superior de valor h). Este conjunto também é conhecido como *cross-section* de f de valor h (Serra, 1982)). Mais precisamente, os conjuntos de níveis inferiores e superiores são definidos da seguinte forma:

Definição 4.11 (Conjunto de nível). O conjunto de nível inferior $\mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f)$ e o conjunto de nível superior $\mathcal{X}_{\uparrow}^{\lambda}(f)$ de valor $\lambda \in \mathbb{K}$ para uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, são definidos por:

$$\mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) < \lambda\} \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_{\uparrow}^{\lambda}(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) \geq \lambda\}. \quad (4.1)$$

A convenção por tomar a desigualdade estrita para conjuntos de nível inferior e não-estrita para conjuntos de nível superior é para obter resultados de consistência entre eles, como por exemplo, $\mathcal{D} \setminus \mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f) = \mathcal{X}_{\uparrow}^{\lambda}(f)$. Além de não misturá-los quando lidarmos com ambos simultaneamente.

Estes conjuntos são aninhados pela relação de inclusão. Mais precisamente, o conjunto de nível inferior é crescente, isto é

$$\mathcal{X}_{\downarrow}^1(f) \subseteq \mathcal{X}_{\downarrow}^2(f) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_{\downarrow}^K(f), \quad (4.2)$$

e o conjunto de nível superior é decrescente, ou seja

$$\mathcal{X}_{\uparrow}^K(f) \subseteq \mathcal{X}_{\uparrow}^{K-1}(f) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_{\uparrow}^0(f). \quad (4.3)$$

Consequentemente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tal que $\alpha < \beta$ segue que $\mathcal{X}_{\downarrow}^{\alpha}(f) \subseteq \mathcal{X}_{\downarrow}^{\beta}(f)$ e $\mathcal{X}_{\uparrow}^{\alpha}(f) \supseteq \mathcal{X}_{\uparrow}^{\beta}(f)$. Outro fato interessante é que se $q \in \mathcal{D}$, então $\mathcal{X}_{\downarrow}^{f(q)+1}(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) < f(q) + 1\}$ é o conjunto de nível

inferior de menor valor que contém q , pois $\mathcal{X}_{\downarrow}^{f(q)+1}(f) \subseteq \mathcal{X}_{\downarrow}^{f(q)+2}(f) \subseteq \dots \mathcal{X}_{\downarrow}^K(f)$. Logo, o nível de cinza $f(q) = \min\{\lambda - 1 : q \in \mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f), \lambda \in \mathbb{K}\}$. Analogamente, $\mathcal{X}_{f(q)}^{\uparrow}(f) = \{p \in \mathcal{D} : f(p) \geq f(q)\}$ é o conjunto de nível superior de maior valor que contém q . Assim, o nível de cinza $f(q) = \max\{\lambda : q \in \mathcal{X}_{\lambda}^{\uparrow}(f), \lambda \in \mathbb{K}\}$. Portanto, isso mostra que basta uma família de conjuntos de níveis inferiores ou superiores extraídos de uma imagem f , para reconstruir esta imagem f , isto é,

$$\forall p \in \mathcal{D}, f(p) = \min\{\lambda - 1 : p \in \mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f), \lambda \in \mathbb{K}\} = \max\{\lambda : p \in \mathcal{X}_{\lambda}^{\uparrow}(f), \lambda \in \mathbb{K}\}. \quad (4.4)$$

Na Figura 4.6 é apresentada uma imagem de entrada com seus respectivos conjuntos de níveis superiores e inferiores.

Figura 4.6: Exemplo de conjuntos de níveis extraídos de uma imagem. Na parte de cima central está a imagem de entrada f e as colunas da esquerda e da direita, respectivamente, estão os conjuntos de níveis $\mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f)$ e $\mathcal{X}_{\lambda}^{\uparrow}(f)$.

4.2.1 Árvore de componentes

Uma árvore de componentes é uma estrutura hierárquica de CCs dos conjuntos de níveis extraídos de uma imagem. Ela pode ser obtida pelos conjuntos de níveis superiores ou inferiores e tem sido usada, sob diversas variações, em um grande número de aplicações entre as quais pode-se citar: filtragem (Jones, 1999; Najman e Couprie, 2006), segmentação (Couprie e Bertrand, 1997; Silva e de Alencar Lotufo, 2011), extração de resíduos (Alves e Hashimoto, 2014; Alves *et al.*, 2013; Fabrizio e Marcotegui, 2009), registro (Mattes *et al.*, 1999) e compressão (Salembier *et al.*, 1998). Além disso, a estrutura desta árvore é fundamental para a computação eficiente de outros métodos, como por exemplo, o *watershed* topológico (Couprie e Bertrand, 1997; Couprie *et al.*, 2005), a árvore de zonas quasi-planas (Soille e Najman, 2012) e regiões extremas maximamente estáveis (Matas *et al.*, 2004).

Para definirmos a árvore de componentes, considere $\mathcal{L}(f)$ a família dos CCs dos conjuntos de níveis inferiores de f , ou seja, $\mathcal{L}(f) = \{C : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\downarrow^\lambda(f), \mathcal{A}), \lambda \in \mathbb{K}\}$ e considere também $\mathcal{U}(f)$ a família de CCs dos conjunto de níveis superiores de f , isto é, $\mathcal{U}(f) = \{C : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\uparrow^\lambda(f), \mathcal{A}), \lambda \in \mathbb{K}\}$. Observe que, por definição dos conjunto de níveis, se $\alpha \geq \beta$ e $A \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\alpha^\uparrow(f), \mathcal{A})$, $B \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\beta^\uparrow(f), \mathcal{A})$, então ou $A \cap B = \emptyset$ ou $A \subseteq B$, pois se existir intersecção entre A e B , então existem caminhos de A para B em B , já que B é uma CC e com isso $A \subseteq B$. De maneira similar, se $A \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\downarrow^\alpha(f), \mathcal{A})$, $B \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\downarrow^\beta(f), \mathcal{A})$ então ou $A \cap B = \emptyset$ ou $B \subseteq A$. Então, o poset consistindo da família das CCs dos conjuntos dos níveis inferiores (respectivamente, superiores) e a usual relação de inclusão leva à árvore de componentes dos conjuntos de níveis inferiores (respectivamente, superiores). Assim, a Proposição 4.12 garante que os posets $(\mathcal{L}(f), \subseteq)$ e $(\mathcal{U}(f), \subseteq)$ são árvores.

Proposição 4.12. *Ambos os posets $(\mathcal{L}(f), \subseteq)$ e $(\mathcal{U}(f), \subseteq)$ são árvores.*

PROVA: Para mostrar que $(\mathcal{L}(f), \subseteq)$ e $(\mathcal{U}(f), \subseteq)$ são árvores basta verificar se a Definição 4.1 é satisfeita. Na sequência, é mostrado que $(\mathcal{L}(f), \subseteq)$ satisfaz as duas condições da Definição 4.1.

1. Seja λ um nível a mais do que o maior nível de cinza de f . Por definição, $\mathcal{X}_\downarrow^\lambda(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) < \lambda\}$. Logo, todos os *pixels* $x \in \mathcal{D}$ satisfazem $f(x) < \lambda$, pois λ é maior do que todos os níveis de cinzas de f . Como $\mathcal{D}$ é um subconjunto retangular e compacto de $\mathbb{Z}^2$ então $\mathcal{D}$ é uma CC e consequentemente $\mathcal{D} \in \mathcal{U}(f)$. Portanto, $\forall A \in \mathcal{U}(f)$ temos que $A \subseteq \mathcal{D}$.
2. Sejam $A, B, C \in \mathcal{L}(f)$ tais que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$. Então, existem inteiros a, b e c tais que $A \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\downarrow^a(f))$, $B \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\downarrow^b(f))$ e $C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\downarrow^c(f))$. Considere $p \in A$. Então, como $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ seguem:
 - (a) $p \in B$ e $a \leq b$, pois $A \subseteq \mathcal{X}_\downarrow^a(f) = \{q \in \mathcal{D} : f(q) < a \leq b\} \subseteq \mathcal{X}_\downarrow^b(f) = \{q \in \mathcal{D} : f(q) < b\}$;
 - (b) $p \in C$ e $a \leq c$, pois $A \subseteq \mathcal{X}_\downarrow^a(f) = \{q \in \mathcal{D} : f(q) < a \leq c\} \subseteq \mathcal{X}_\downarrow^c(f) = \{q \in \mathcal{D} : f(q) < c\}$;
 - (c) Portanto, por (a) e (b) temos $p \in B \cap C$.

Logo, como $B \cap C \neq \emptyset$ então, ou $c \leq b$, ou $b \leq c$.

- Se $c \leq b$, então $C \subseteq \mathcal{X}_\downarrow^c(f) = \{q \in \mathcal{D} : f(q) < c \leq b\} \subseteq \mathcal{X}_\downarrow^b(f)$. Logo, como B é uma CC, então existem caminhos em B para todos os *pixels* de C , pois $B \cap C \neq \emptyset$. Portanto, $C \subseteq B$.

- Se $b \leq c$, então $B \subseteq \mathcal{X}_{\downarrow}^b(f) = \{q \in \mathcal{D} : f(q) < b \leq c\} \subseteq \mathcal{X}_{\downarrow}^c(f)$. Logo, como C é uma CC, então existem caminhos em C para todos os *pixels* de B , pois $B \cap C \neq \emptyset$. Portanto, $B \subseteq C$.

Assim concluímos que o poset $(\mathcal{L}(f), \subseteq)$ é uma árvore. A prova para o poset $(\mathcal{U}(f), \subseteq)$ segue de forma análoga. $\square$

Por meio dos argumentos da prova da Proposição 4.12 pode-se derivar o Corolário 4.13.

Corolário 4.13. *Se $A, B \in \mathcal{L}(f)$ (respectivamente, $A, B \in \mathcal{U}(f)$) então ou $A \subseteq B$, ou $B \subseteq A$, ou $A \cap B = \emptyset$.*

Na Figura 4.7 são apresentadas as árvores de componentes construídas com os conjuntos de níveis apresentados na Figura 4.6.

Figura 4.7: Exemplos de árvores de componentes.

A árvore de componentes dos conjuntos de níveis inferiores (respectivamente, superiores) é uma representação completa de uma imagem que pode ser representada por uma estrutura de dados compacta e não redundante conhecida por *min-tree* (respectivamente, *max-tree*) (Salembier et al., 1998). Nesta estrutura, um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ é associado ao menor CC que o contém e pelo uso da relação de parentesco entre os vértices da árvore, ele também está associado a todos os outros CCs ancestrais na árvore.

Definição 4.14 (Menor componente). Chama-se de *menor componente* um vértice A contendo um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ de uma árvore $\mathcal{T}$ tal que não exista descendentes de A em $\mathcal{T}$ contendo p . Assim, é denotado por $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p)$ o menor CC contendo p na árvore $\mathcal{T}$.

Na Figura 4.8 são apresentadas as árvores da Figura 4.7 destacando em vermelho os *pixels* que estão posicionados nos seus respectivos menores componentes.

Árvore de componentes estendida

Neste trabalho também é considerado as versões estendidas das árvores de componentes, ou seja, as árvores contendo CCs extraídos de todos os conjuntos de níveis de uma imagem (Jones

Figura 4.8: Exemplos de árvores de componentes nos quais são destacados em vermelho a associação entre os pixels e os menores CCs.

, 1999). Assim, considere

$$Ext(\mathcal{L}(f)) = \{(C, \lambda) \in \mathcal{L}(f) \times \mathbb{K} : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f))\} \quad (4.5)$$

e

$$Ext(\mathcal{U}(f)) = \{(C, \lambda) \in \mathcal{U}(f) \times \mathbb{K} : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{\uparrow}^{\lambda}(f))\} \quad (4.6)$$

os conjuntos dos pares CCs e limiares extraídos de todos os conjuntos de níveis inferiores e superiores, respectivamente. Embora, também pode-se construir similarmente $Ext(\mathcal{SAT}(f))$, neste trabalho, são utilizados somente as versões estendidas das árvores componentes, *max-tree* e *min-tree*.

Em adição, considere uma relação denotada por $\sqsubseteq$, sobre o conjunto $Ext(\mathcal{L}(f))$, tal que dois elementos $(A, i), (B, j) \in Ext(\mathcal{L}(f))$ estão relacionados por $\sqsubseteq$ e escritos como $(A, i) \sqsubseteq (B, j)$ se, e somente se, $A, B \subseteq \mathcal{D}$, $i, j \in \mathbb{K}$, $A \subseteq B$ e $i \leq j$. Analogamente, define-se esta relação também sobre o conjunto $Ext(\mathcal{U}(f))$, ou seja, $(A, i), (B, j) \in Ext(\mathcal{U}(f))$ se, e somente se, $A, B \subseteq \mathcal{D}$, $i, j \in \mathbb{K}$, $A \subseteq B$ e $i \geq j$. Portanto, os posets $(Ext(\mathcal{L}(f)), \sqsubseteq)$, $(Ext(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq)$ e $(Ext(\mathcal{SAT}(f)), \sqsubseteq)$ são as versões estendidas das árvores $(\mathcal{L}(f), \subseteq)$, $(\mathcal{U}(f), \subseteq)$ e $(\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$, respectivamente.

Observe que, se $\mathcal{T}$ é uma árvore (*max-tree* ou *min-tree*) construída a partir de uma imagem $f \in \mathcal{D}$, então o menor CC contendo um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ é o vértice $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p)$ e na versão estendida de $\mathcal{T}$ é o vértice $(\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p), f(p))$. Na Figura 4.9 são apresentadas as versões estendidas das árvores da Figura 4.7 destacando em vermelho os *pixels* que estão posicionados nos seus respectivos menores componentes.

Algoritmo para construção de árvore de componentes

Diversos algoritmos foram propostos para criar uma árvore de componentes de uma imagem, os quais podem ser classificados em duas categorias: (1) algoritmos com base em inundação (em inglês, *flooding*), como proposto por Nistér e Stewénus (2008); Salembier *et al.* (1998) e Wilkinson *et al.* (2011). Nesses algoritmos, a construção da árvore inicia-se partindo da raiz para as folhas por meio de um processo de crescimento de região e propagação de nível de cinza para zonas planas

Figura 4.9: Exemplos de construções de árvores de componentes estendidas.

adjacentes até atingir as extremas (máximas para *max-tree* e mínimas para *min-tree*) regionais e (2) algoritmos com base em imersão (em inglês, *immersion*), como proposto por Najman e Couprie (2006) e Berger *et al.* (2007). Nesses algoritmos, a computação inicia ordenando os *pixels* das zonas planas da imagem pelo seu nível de cinza. Em seguida, os *pixels* vão sendo processado de forma ordenada em que cada *pixel* inicialmente é considerado um conjunto isolado. Neste processamento ordenado, os conjuntos disjuntos vão sendo fundidos e formando uma árvore por meio do tradicional algoritmo de *union-find* proposto por Tarjan (1975).

Em Carlinet e Géraud (2014) foi realizado um amplo estudo sobre os principais algoritmos para construção da árvore de componentes, onde eles apresentam uma árvore de decisão, mostrada na Figura 4.10, enfatizando os melhores algoritmos com base em critérios de limitação de memória,

profundidade da imagem e tempo de execução. Percebe-se que quase todos os caminhos da árvore de decisão proposta por Carlinet e Géraud (2014) levam ao algoritmo de Berger *et al.* (2007) e suas otimizações por *union-find* (Tarjan, 1975).

Figura 4.10: Árvore de decisão para auxiliar a escolha de um algoritmo para obter árvore de componentes para uma determinada aplicação.

Os algoritmos baseados em *union-find*, consistem em rastrear CCs disjuntos e fundi-los por meio de um processamento *bottom-up*. Primeiramente, os *pixels* das zonas planas da imagem são ordenados pelo nível de cinza em uma função $f_{\text{sort}} : I_{\text{sort}} \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $\forall i, j \in I_{\text{sort}}, i < j \Rightarrow f(f_{\text{sort}}(i)) \leq f(f_{\text{sort}}(j))$. Então, cada *pixel* $p \in \mathcal{D}$ é representado por um conjunto contendo um único elemento (função *make-set*), ou seja, $\{p\}$. Em seguida, os *pixels* são processados em ordem decrescente da função f_{sort} , isto é, na ordem $(f_{\text{sort}}(|I_{\text{sort}}|), f_{\text{sort}}(|I_{\text{sort}}| - 1), \dots, f_{\text{sort}}(0))$ que significa o processamento partindo das folhas para raiz da árvore. Quando um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ é processado, é procurado (função *find-root*) por representantes $q \in \mathcal{D}$ de conjuntos disjuntos adjacentes já processados e se funde (função *merge-set*) formando um novo conjunto representado por p . Este processo de fusão consiste em atualizar os representantes de p e q em uma função chamada *parent* de tal forma que p seja o pai dos representantes fundidos com p . Assim, o algoritmo de *union-find* baseia-se em três funções: (i) *make-set*(*parent*, x) que constrói um conjunto com um único elemento $\{x\}$; (ii) *find-root*(*parent*, x) que localiza o representante do conjunto contendo x ; (iii) *merge-set*(*parent*, x, y) que funde os conjuntos representados por x e y e define x como o representante do novo conjunto. Com base nessas funções, o Algoritmo 4.1 realiza a construção genérica da relação de parentesco entre os CCs de uma árvore de componentes.

Algoritmo 4.1: Algoritmo genérico baseado em *union-find* para construção da árvore de componentes.

```

1 função union-find(Imagem f)
2    $(f_{\text{sort}} : I_{\text{sort}} \rightarrow \mathcal{D}) \leftarrow \text{ordene-pixels-das-zonas-planas}(f)$ 
3   para  $i \in I_{\text{sort}}$  em ordem decrescente faça
4      $p \leftarrow f_{\text{sort}}(i)$ 
5     make-set(parent,  $p$ )
6     para cada  $q \in \mathcal{A}(p)$  tal que  $q$  já foi processado faça
7        $r = \text{find-root}(\text{parent}, q)$ 
8       se  $p \neq r$  então
9         merge-set(parent,  $p, r$ )
10  retorne parent

```

Este algoritmo codifica uma árvore de componentes $\mathcal{T}$ usando uma função (ou computacionalmente vetor) *parent* : $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ que armazena a relação de parentesco que existe entre os CCs de $\mathcal{T}$.

Neste caso, a função *parent* representa cada CC por um *pixel* chamado por elemento canônico, cujo seu nível de cinza é o mesmo usado para obter o menor conjunto de nível que contém o CC. Assim, seja $p_r \in \mathcal{D}$ o *pixel* canônico que representa o CC da raiz da árvore $\mathcal{T}$, e então, um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ é canônico se, e somente se, $p = p_r$ ou se $\mathcal{T}$ é a *max-tree* então $f(\text{parent}(p)) < f(p)$, ou se $\mathcal{T}$ é a *min-tree* então $f(\text{parent}(p)) > f(p)$. Além disso, como mostrado por Berger *et al.* (2007), a função *parent* após um processo de canonização (isto é, fazer com que os pais dos elemento não-canônicos sejam os representantes dos CCs) satisfaz a seguinte propriedade: se $p \in \mathcal{D}$, então *parent*(p) é canônico. Assim, se p é um *pixel* canônico, então o pai do menor CC contendo $p \in \mathcal{D}$ é dado por $SC(\mathcal{T}, \text{parent}(p))$, caso contrário, é $SC(\mathcal{T}, \text{parent}(\text{parent}(p)))$, isto é

$$p \in \mathcal{D}, \text{Pai}(SC(\mathcal{T}, p)) = \begin{cases} SC(\mathcal{T}, \text{parent}(p)), & \text{se } p \text{ é um elemento canônico,} \\ SC(\mathcal{T}, \text{parent}(\text{parent}(p))), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Note que, se $p \in \mathcal{D}$ é canônico, então $SC(\mathcal{T}, p)$ é o mesmo CC para todos os outros *pixels* $q \in \mathcal{D}$ não-canônico que tem como *parent* o *pixel* p , isto é, $SC(\mathcal{T}, p) = SC(\mathcal{T}, q)$ tal que $\text{parent}(q) = p$. Com isso, pode-se construir uma estrutura de dados mais simples, mas ainda assim compacta e não redundante, para manipular a árvore de componentes. Na Figura 4.11 é apresentado um exemplo de computação para árvores de componentes (*min-tree*) apresentada na Figura 4.7, onde é fácil perceber estas propriedades sobre a função *parent*.

Figura 4.11: Exemplo de computação da *min-tree*. Note que, os *pixels* em azul são canônicos e em vermelho os não-canônicos.

Os algoritmos baseados em *union-find* requerem que os *pixels* das zonas planas da imagem estejam ordenados pelos níveis de cinza (ordem crescente para *min-tree* e ordem decrescente para a

max-tree). Para esta ordenação, é proposto neste trabalho o Algoritmo 4.2 que utiliza uma fila de prioridade proposta por Falcão *et al.* (2000) no qual suas operações de consulta, inserção e remoção são realizadas em tempo constante. A ideia central do algoritmo de ordenação é inserir todos os *pixels* na fila de prioridade com política LIFO (último a entrar, primeiro a sair) e depois, consumir os *pixels* da fila de prioridade na ordem de prioridade. Para cada *pixel* consumido são retirados os *pixels* adjacentes na zona plana do *pixel* em questão e inseri-los novamente na fila de prioridade para que os mesmos sejam os próximos elementos a serem consumidos. Assim, uma zona plana é processada por vez. Este algoritmo analisa cada *pixel* exatamente uma única vez e para cada *pixel* analisado, é visitado seus vizinhos. Logo, a complexidade do algoritmos é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}| \times |\mathcal{A}|)$, onde $|\mathcal{D}|$ denota a cardinalidade de $\mathcal{D}$ e $|\mathcal{A}|$ a quantidade máxima de *pixel* na vizinhança $\mathcal{A}$.

Algoritmo 4.2: Ordenação dos *pixels* das zonas planas de uma imagem pelos seus níveis de cinza.

```

1 função ordene-pixels-das-zonas-planas(Imagem f)
  // Q é uma fila de prioridade proposta em Falcão et al. (2000)
2  Inicialize a fila de prioridade Q com politica LIFO (último a entrar, primeiro a sair)
3  para cada  $p \in \mathcal{D}$  faça
4    └─ adicione(Q, p, f(p)) // adicione o pixel p na fila Q com prioridade f(p)
5  Inicialize a função  $f_{sort}$  // função que leva índices aos pixels, ou seja,  $f_{sort} : I_{sort} \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}$ 
6   $i \leftarrow 0$  // índice da ordenação. Note que:  $i \in I_{sort}$ 
7  enquanto a fila Q não estiver vazia faça
8    └─  $p \leftarrow \text{remove-pixel-de-menor-prioridade}(Q)$ 
9    └─  $f_{sort}(i) \leftarrow p$ 
      /* Se existir pixels na fila Q na mesma zona plana que o pixel p então é reorganizado a fila Q de tal
      forma que o próximo pixel a ser retirado de Q pertence a mesma zona plana de p. */
10   para cada  $q \in \mathcal{A}(p)$  faça
11     └─ se  $f(p) = f(q)$  tal que contém(Q, q) então
12       └─ // reposicione o pixel q na fila Q de tal forma que q é o próximo a ser retirado
13         └─ remove(Q, q)
14         └─ adicione(Q, q, f(p))
15   └─  $i \leftarrow i + 1$ 
16  retorne  $f_{sort}$ 

```

O Algoritmo 4.1 tem complexidade de espaço $\mathcal{O}(|\mathcal{D}|)$ e tempo $\mathcal{O}(|\mathcal{D}|^2)$, pois a função *find-root*, tem complexidade $\mathcal{O}(|\mathcal{D}|)$ e cada *pixel* p é processado uma única vez. Em, Tarjan (1975) são discutidas duas otimizações para evitar a complexidade de tempo quadrática: compactação de caminho e união por ranque. Se adicionar a otimização de compactação de caminho, a complexidade de espaço é $\mathcal{O}(2|\mathcal{D}|)$ e a complexidade de tempo é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}| \times \log(|\mathcal{D}|))$ e, se adicionar também a otimização de união por ranque, a complexidade de espaço é $\mathcal{O}(4|\mathcal{D}|)$ e a complexidade de tempo é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}| \times \log(\log(|\mathcal{D}|)))$. Um estudo completo sobre comparações de complexidade computacional e tempo de execução dos algoritmos para construção de árvore de componentes pode ser encontrado em Carlinet e Géraud (2014). Por fim, uma implementação completa para construção da árvore de componentes usando o algoritmo de Berger *et al.* (2007) é apresentada no Algoritmo 4.3.

4.2.2 Árvore de formas

A árvore de formas, proposta por Monasse e Guichard (2000), é uma importante estrutura morfológica que representa uma imagem de uma maneira auto-dual. Ela pode ser vista como o resultado da fusão das árvores de componentes, *min-tree* e *max-tree*, em uma única árvore. Diversos trabalhos encontrados na literatura utilizam árvores de formas, por exemplo, em problemas de filtragem (Caselles e Monasse, 2002; Keshet, 2007), segmentação (Cardelino *et al.*, 2006; Desolneux *et al.*, 2001; Xu *et al.*, 2012), extração de resíduos (Alves e Hashimoto, 2014; Alves *et al.*, 2013), registro (Monasse, 2000), entre outros.

Algoritmo 4.3: Construção da árvore de componentes por *union-find*.

```

// função para localizar o representante do conjunto com compressão de caminho
1 função find-root(função zpar, pixel p)
2   se zpar(p) ≠ p então
3     | zpar(p) ← find-root(zpar, zpar(p))
4   retorne zpar(p)

// função para construção da árvore do union-find
1 função union-find(função fsort)
2   para cada p ∈ Isort faça
3     | parent(p) ← NÃO-PROCESSADO;
4   para i ∈ Isort em ordem decrescente faça
5     | p ← fsort(i)
6     | parent(p) ← zpar(p) ← p                                /* make-set */
7     | para cada q ∈ A(p) tal que parent(q) ≠ NÃO-PROCESSADO faça
8       | r ← find-root(zpar, q)
9       | se p ≠ r então
10        | | parent(r) ← zpar(r) ← p                                /* merge-set */
11   retorne parent

// função para canonização da árvore
1 função canonize(Imagem f, função fsort, função parent)
2   para i ∈ Isort em ordem crescente faça
3     | p ← fsort(i)
4     | q ← parent(q)
5     | se f(parent(q)) = f(q) então
6       | | parent(p) ← parent(q)

// função principal para construção da árvore de componentes
1 função construir-árvore-de-componentes(Imagem f)
2   fsort ← ordene-pixels-das-zonas-planas(f)
3   parent ← union-find(fsort)
4   canonize(f, fsort, parent)
5   retorne parent

```

Essa árvore pode ser vista em uma representação hierárquica dos CCs dos conjuntos de níveis inferiores e superiores sem buracos (ou melhor, com os buracos preenchidos). A fusão entre estas duas árvores ocorre pela noção de buracos internos dos CCs de $\mathcal{L}(f)$ e $\mathcal{U}(f)$, e isso pode ser visualizado na Figura 4.7, na qual pode-se perceber que os buracos dos CCs da *max-tree* podem ser preenchidos por CCs da *min-tree*. Da mesma forma, os buracos dos CCs da *min-tree* podem ser preenchidos pelos CCs da *max-tree*. A fusão destas duas árvores nos permite unificar, em uma única árvore, objetos presentes na *max-tree* e na *min-tree*, conforme pode ser observado na Figura 4.12.

Figura 4.12: Um exemplo de árvore de formas da imagem da Figura 4.6.

Mas esta hierarquia só é possível, se consideramos conectividades complementares para os CCs dos conjuntos de níveis inferiores e superiores, como por exemplo, 4-conectividade para os CCs dos conjuntos de níveis inferiores, isto é, $\mathcal{L}(f) = \{C : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f), \mathcal{A}_{4c}), \lambda \in \mathbb{K}\}$, e 8-conectividade para os CCs dos conjuntos de níveis superiores, ou seja, $\mathcal{U}(f) = \{C : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{\uparrow}^{\lambda}(f), \mathcal{A}_{8c}), \lambda \in \mathbb{K}\}$. Assim, evita-se possíveis problemas topológicos como mencionado por Caselles e Monasse (2010); Monasse (2000); Monasse e Guichard (2000); Najman e Géraud (2013) e Géraud *et al.* (2013).

Para definir a árvore de formas, primeiramente, considere $sat : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$ um operador de preenchimento de buracos internos de um CC (Caselles *et al.*, 2008).

Definição 4.15 (Buracos). Denomina-se de *buracos internos* de $A \in \mathcal{L}(f) \cup \mathcal{U}(f)$, denotado por $Int(A)$, os CCs de $\mathcal{D} \setminus A$ incluídas em $sat(A)$. Também, denomina-se de *exterior* de A , denotado por $Ext(A)$, o conjunto $\mathcal{D} \setminus sat(A)$. Note que

$$sat(A) = A \cup \bigcup_{H \in Int(A)} H,$$

onde as uniões são disjuntas. Na Figura 4.13 é apresentado um exemplo de um CC A com seu conjunto $sat(A)$ e $Ext(A)$.

Figura 4.13: Exemplo mostrando um CC A com seu conjunto $sat(A)$ e $Ext(A)$.

Observe que, o complemento de um CC A é $Ext(A) \cup Int(A)$ e se $H \in Int(A)$ então $sat(H) \subseteq sat(A)$. Além do mais, se A é um CC de $\mathcal{U}(f)$ com buracos internos, então $Int(A)$ são CCs de $\mathcal{L}(f)$, pois $Int(A) = (\mathcal{D} \setminus A) \cap sat(A) \subseteq \mathcal{D} \setminus \mathcal{X}_\downarrow^\lambda = \mathcal{X}_\downarrow^\uparrow$. Agora, sejam $\mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f) = \{sat(C) : C \in \mathcal{L}(f)\}$ e $\mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f) = \{sat(C) : C \in \mathcal{U}(f)\}$ as famílias de CCs dos conjuntos de níveis inferiores e superiores sem buracos, respectivamente, e considere $\mathcal{SAT}(f) = \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f) \cup \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$. Os elementos de $\mathcal{SAT}(f)$ são denominados de *formas*. Para mostrarmos que o poset $(\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$ é uma árvore precisa-se ter uma garantia que quaisquer duas formas de $\mathcal{SAT}(f)$ são disjuntas ou comparáveis. Neste sentido, o Teorema 4.16 proposto por Monasse (2000) garante este fato. Portanto, o par $(\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$, é uma árvore conhecida por *árvore de formas* (Caselles e Monasse, 2010; Caselles *et al.*, 2008; Géraud *et al.*, 2013; Monasse e Guichard, 2000).

Teorema 4.16 (Caselles e Monasse (2010)). *Se $A, B \in \mathcal{SAT}(f)$. Então, ou $A \subseteq B$, ou $B \subseteq A$, ou $A \cap B = \emptyset$.*

PROVA: A prova deste teorema pode ser encontrada em Caselles e Monasse (2010) na Pag. 19, Teorema 2.16. $\square$

Proposição 4.17. *O poset $(\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$ é uma árvore.*

PROVA: Para mostrar que $(\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$ é uma árvore basta verificar se a Definição 4.1 é satisfeita.

1. Seja α o menor nível de cinza de f . Por definição, $\mathcal{X}_\alpha^\uparrow(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq \alpha\}$. Logo, todos os *pixels* $x \in \mathcal{D}$ satisfazem $f(x) \geq \alpha$, pois α é o menor nível de cinza de f . Como $\mathcal{D}$ é um subconjunto retangular e compacto de $\mathbb{Z}^2$ então $sat(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ e assim temos que $sat(\mathcal{D}) \in \mathcal{SAT}(f)$. Portanto, $\forall A \in \mathcal{SAT}(f)$ temos que $A \subseteq sat(\mathcal{D})$.

2. Sejam $A, B, C \in \mathcal{SAT}(f)$ tais que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$. Então, como $B \cap C \neq \emptyset$ segue, pelo Teorema 4.16, que ou $B \subseteq C$, ou $C \subseteq B$.

Assim, concluímos que $(\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$ é uma árvore. $\square$

A árvore de formas $\mathcal{T} = (\mathcal{SAT}(f), \subseteq)$ pode ser armazenada de forma compacta e sem redundância. Desta forma, um pixel p é associado somente a menor forma $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p)$ que contém p e pela relação de parentesco da árvore, este *pixel* está associado também a todas as formas ancestrais.

Algoritmo para construção de árvore de formas

O primeiro algoritmo conhecido para construir uma árvore de formas, o *Fast Line Level Transform (FLLT)*, proposto por Monasse e Guichard (2000), onde a árvore de formas é construída por meio de uma fusão das árvores *min-tree* e *max-tree*. Neste algoritmo precisa-se conhecer um *pixel* de cada buraco dos CCs dos conjuntos de níveis e isso pode ser computado localmente e eficientemente, em imagens 2D, enquanto se constroem as árvores de componentes, *min-tree* e *max-tree*, por meio da característica de Euler¹. Um segundo algoritmo, o *Fast Level Set Transform (FLST)*, também foi proposto por Monasse (2000) e é baseado na abordagem de crescimento de regiões. Este algoritmo extrai cada ramo da árvore partindo das folhas até a raiz, mas este processo faz com que muitos *pixels* sejam revisitados e por isso sua complexidade no pior caso é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}|^2)$. Recentemente, Géraud *et al.* (2013) e Najman e Géraud (2013) mostram que o algoritmo de Berger *et al.* (2007) para construir uma árvore de componentes é surpreendentemente capaz de construir uma árvore de formas. Basicamente, o algoritmo de Berger *et al.* (2007) é composto por três etapas: (i) ordenação dos *pixels*; (ii) computação da *union-find*; (iii) canonização da árvore. Então, Géraud *et al.* (2013) propôs uma nova ordenação dos *pixels* e aplicou os passos (ii) e (iii) do algoritmo de Berger *et al.* (2007) como apresentado no Algoritmo 4.5. Por exemplo, considere na Figura 4.14, a imagem de entrada, os conjuntos de níveis, a árvore de formas e a nova representação da imagem proposta por Géraud *et al.* (2013) e Najman e Géraud (2013). Note que, para manter a propriedade da

Figura 4.14: A Figura adaptada de Géraud *et al.* (2013). Ela apresenta um exemplo contendo a imagem de entrada, os conjuntos de níveis, a árvore de formas e a representação da imagem, respectivamente, da esquerda para direita.

ordenação em uma computação de um CC saturado usando um algoritmo baseado em crescimento de região), é preciso ter caminhos para alcançar as regiões A e A' para assim ordená-las antes das

¹A característica de Euler de um conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$ é $E = N_C - N_H$, onde N_C é o número de CCs de $\mathcal{X}$ e N_H é de buracos de $\mathcal{X}$. Logo, se $\mathcal{X}$ é uma CC então $N_C = 1$ e assim o número de buracos de $\mathcal{X}$ é $N_H = 1 - E$.

regiões B e C na computação da função f_{sort} . Mas isto só é possível se houver condições de passar entre os *pixels* e ainda, segundo [Géraud et al. \(2013\)](#), é necessário passar entre os *pixels* com mais de um valor. Em outras palavras, é necessário uma nova representação da imagem tanto em termos espaciais (domínio) quando em termos de valores (contradomínio), e para este objetivo, duas ferramentas matemáticas são essenciais ([Géraud et al., 2013](#); [Najman e Géraud, 2013](#)): (1) grade *Khalimsky* e (2) funções valor-conjunto. A ideia central é (1) usar grade *Khalimsky* para criar espaços entre os *pixels* (domínio da imagem) e (2) usar funções valor-conjunto para modelar diversos valores entre os *pixels* (contradomínio da imagem). A seguir, é apresentada uma breve descrição sobre esses métodos para depois apresentar o algoritmo proposto por [Géraud et al. \(2013\)](#). Mais detalhes sobre estas teorias podem ser encontrados em [Najman e Géraud \(2013\)](#).

Grde *Khalimsky*

A partir dos conjuntos $H_0^1 = \{\{a\} : a \in \mathbb{Z}\}$ e $H_1^1 = \{\{a, a+1\} : a \in \mathbb{Z}\}$, pode-se definir $H^1 = H_0^1 \cup H_1^1$ e o conjunto $H^2 = H^1 \times H^1$ como o produto cartesiano de H^1 por H^1 . Se um elemento $h \subset \mathbb{Z}^2$ é o produto cartesiano de d elementos de H_1^1 e $2-d$ elementos de H_0^1 então é dito que h é uma d -face, onde d é a dimensão da face h . Assim, se $d = 0$ então $h \in H_0^1 \times H_0^1$. Analogamente, $d = 1 \Rightarrow h \in (H_0^1 \times H_1^1) \cup (H_1^1 \times H_0^1)$ e $d = 2 \Rightarrow h \in H_1^1 \times H_1^1$. O conjunto de todas as faces de H^2 é chamado de espaço $2D$ cubos complexos e o conjunto de faces de H^2 dispostas dentro de uma grade é chamado de grade *Khalimsky* ([Géraud et al., 2013](#); [Najman e Géraud, 2013](#)). Na Figura 4.15 é apresentado um subconjunto de faces de H^2 com dimensões 0, 1 e 2 dispostas em uma grade *Khalimsky*, de tal forma que as dimensões das faces estão representadas por círculos, retângulos e quadrados, respectivamente.

Figura 4.15: Figura Adaptada de [Najman e Géraud \(2013\)](#) contendo um plano cartesiano (grade *Khalimsky*) $H^2 = H^1 \times H^1$.

Considere os conjuntos $h^\uparrow = \{h' \in H^2 : h \subseteq h'\}$ e $h^\downarrow = \{h' \in H^2 : h' \subseteq h\}$ e definem-se duas transformações para um subconjunto $E \subseteq H^2$, a estrela $st(E)$ e o fechamento $cl(E)$, ou seja

$$st(E) = \bigcup_{h \in E} h^\uparrow \quad \text{e} \quad cl(E) = \bigcup_{h \in E} h^\downarrow \quad (4.8)$$

Os operadores estrela e fechamento resultam respectivamente, no menor subconjunto de H_1^2 e no menor subconjunto de H_0^2 contendo E ([Géraud et al., 2013](#); [Najman e Géraud, 2013](#)). Na Figura 4.16 é apresentado um exemplo de estrela e fechamento de um subconjunto de $E \subseteq H^2$.

Figura 4.16: Figura adaptada de *Géraud et al. (2013)* contendo um exemplo de um subconjunto de $E \subset H^2$ e respectivamente a estrela e o fechamento de E . Note que os elementos de E estão em negrito, os elementos de $st(E)$ estão em verde, e os elementos de $cl(E)$ estão em vermelho.

Função valor-conjunto e interpolação

Seja F uma função de X em Y . Dizemos que F é uma função valor-conjunto, denotada por $F : X \rightsquigarrow Y$, se para todo $x \in X$, F associa x ao conjunto $F(x) \subseteq Y$ chamado de imagem de F em x (*Géraud et al., 2013; Najman e Géraud, 2013*). Por meio de uma função F , pode-se representar uma imagem $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{K} \subseteq \mathbb{Z}$ com espaços maiores, a fim de obter algumas propriedades de continuidade.

Para o espaço do domínio X , usa-se subdivisões de H^2 , ou seja, $X = \frac{1}{2}H^2 = \{\frac{1}{2}h : h \in H^2\}$. Dessa forma, mapeá-se por $m : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \rightarrow \frac{1}{2}H_1^2$ cada *pixel* $p \in \mathcal{D}$ para um elemento de $\frac{1}{2}H_1^2$ tal que $m(p) = \{p_x, p_x + \frac{1}{2}\} \times \{p_y, p_y + \frac{1}{2}\}$. Note que assim um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ é uma 2-face de X . Na Figura 4.17 são apresentados os planos cartesianos dos conjuntos $\mathbb{Z}^2$, H^2 e $\frac{1}{2}H^2$.

Figura 4.17: Exemplos de planos cartesianos dos conjuntos $\mathbb{Z}^2$, H^2 e $\frac{1}{2}H^2$. Note que, o domínio da função F é uma grade retangular $X \subseteq \frac{1}{2}H^2$.

Para o espaço de valores (contradomínio) da imagem, usa-se subdivisões $Y = \frac{1}{2}H^1$, onde cada inteiro torna-se um único valor de H_1^0 . Então, pode-se representar (interpoler) f por meio de uma função valor-conjunto $F : X \rightsquigarrow Y$, definida por:

$$\forall h \in X, F(h) = \begin{cases} f(m^{-1}(h)), & \text{se } f(m^{-1}(h)) \in \mathcal{D}, \\ \max\{F(h') : h' \in st(cl(h)) \cap \mathcal{D}\}, & \text{se } h \in \frac{1}{2}H_1^2 \setminus \mathcal{D}, \\ span\{F(h') : h' \in st(h) \cap \mathcal{D}\}, & \text{se } h \in X \setminus \frac{1}{2}H_1^2, \end{cases} \quad (4.9)$$

onde o operador *span* devolve um par de elementos contendo o menor e o maior elemento do

(a) (b) (c) (d) (e)

Algoritmo 4.4: Algoritmo para construção da imagem interpolada.

```

// função de interpolação: implementação da Equação 4.9
1  função interpolação(Imagem f)
2      Inicialize a função  $F : \{0, 1, \dots, |D| \times 4 - 6\} \rightarrow Y$ , onde os elementos de  $Y$  contêm 1 ou 2 inteiros
3      Considere  $W$  e  $H$  as dimensões horizontal e vertical de  $f$ , ou seja,  $W \times H = |D|$ 
4      // 2-face
5      para cada  $h \leftarrow (0, 0), (0, 1), \dots, (W \times 4 - 3, H \times 4 - 3)$  faça
6          se  $(h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0)$  então
7              // Inicialização das 2-faces que estão em  $\mathcal{D}$ 
8               $F(h) \leftarrow \{f(h_x \div 4, h_y \div 4)\}$ 
9          senão se  $(h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0)$  então
10             // Note que,  $h \in \frac{1}{2}H_1^2 \setminus \mathcal{D}$ 
11             se  $(h_x - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x + 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y + 2 \bmod 4 = 0)$  então
12                  $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x - 2, h_y - 2), (h_x - 2, h_y + 2), (h_x + 2, h_y - 2), (h_x + 2, h_y + 2)\}\}$ 
13             senão se  $(h_x - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x + 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0)$  então
14                  $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x - 2, h_y), (h_x + 2, h_y)\}\}$ 
15             senão se  $(h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y + 2 \bmod 4 = 0)$  então
16                  $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x, h_y - 2), (h_x, h_y + 2)\}\}$ 
17             // 1-face e 0-face
18             para cada  $h \leftarrow (0, 0), (0, 1), \dots, (W \times 4 - 3, H \times 4 - 3)$  faça
19                 se  $((h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 1)) \text{ OU } ((h_x \bmod 2 = 1) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0))$  então
20                     // Note que,  $h \in X \setminus \frac{1}{2}H_1^2$ 
21                     se  $(h_x - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_x + 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y + 1 \bmod 2 = 0)$  então
22                         // 0-face
23                          $v_1 \leftarrow \max\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y - 1), (h_x + 1, h_y + 1), (h_x - 1, h_y + 1), (h_x + 1, h_y - 1)\}\}$ 
24                          $v_2 \leftarrow \min\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y - 1), (h_x + 1, h_y + 1), (h_x - 1, h_y + 1), (h_x + 1, h_y - 1)\}\}$ 
25                          $F(h) \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
26                     senão
27                         // 1-face
28                         se  $(h_x - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_x + 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0)$  então
29                              $v_1 \leftarrow \max\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y), (h_x + 1, h_y)\}\}$ 
30                              $v_2 \leftarrow \min\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y), (h_x + 1, h_y)\}\}$ 
31                              $F(h) \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
32                         se  $(h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y + 1 \bmod 2 = 0)$  então
33                              $v_1 \leftarrow \max\{F(z) : z \in \{(h_x, h_y - 1), (h_x, h_y + 1)\}\}$ 
34                              $v_2 \leftarrow \min\{F(z) : z \in \{(h_x, h_y - 1), (h_x, h_y + 1)\}\}$ 
35                              $F(h) \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
36                 // 2-face
37                 para cada  $h \leftarrow (0, 0), (0, 1), \dots, (W \times 4 - 3, H \times 4 - 3)$  faça
38                     se  $(h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0)$  então
39                         // Inicialização das 2-faces que estão em  $\mathcal{D}$ 
40                          $F(h) \leftarrow \{f(h_x \div 4, h_y \div 4)\}$ 
41                     senão se  $(h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0)$  então
42                         // Note que,  $h \in \frac{1}{2}H_1^2 \setminus \mathcal{D}$ 
43                         se  $(h_x - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x + 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y + 2 \bmod 4 = 0)$  então
44                              $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x - 2, h_y - 2), (h_x - 2, h_y + 2), (h_x + 2, h_y - 2), (h_x + 2, h_y + 2)\}\}$ 
45                         senão se  $(h_x - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x + 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0)$  então
46                              $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x - 2, h_y), (h_x + 2, h_y)\}\}$ 
47                         senão se  $(h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y + 2 \bmod 4 = 0)$  então
48                              $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x, h_y - 2), (h_x, h_y + 2)\}\}$ 
49                     // 1-face e 0-face
50                     para cada  $h \leftarrow (0, 0), (0, 1), \dots, (W \times 4 - 3, H \times 4 - 3)$  faça
51                         se  $((h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 1)) \text{ OU } ((h_x \bmod 2 = 1) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0))$  então
52                             // Note que,  $h \in X \setminus \frac{1}{2}H_1^2$ 
53                             se  $(h_x - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_x + 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y + 1 \bmod 2 = 0)$  então
54                                 // 0-face
55                                  $v_1 \leftarrow \max\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y - 1), (h_x + 1, h_y + 1), (h_x - 1, h_y + 1), (h_x + 1, h_y - 1)\}\}$ 
56                                  $v_2 \leftarrow \min\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y - 1), (h_x + 1, h_y + 1), (h_x - 1, h_y + 1), (h_x + 1, h_y - 1)\}\}$ 
57                                  $F(h) \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
58                             senão
59                                 // 1-face
60                                 se  $(h_x - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_x + 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0)$  então
61                                      $v_1 \leftarrow \max\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y), (h_x + 1, h_y)\}\}$ 
62                                      $v_2 \leftarrow \min\{F(z) : z \in \{(h_x - 1, h_y), (h_x + 1, h_y)\}\}$ 
63                                      $F(h) \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
64                                 se  $(h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y - 1 \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y + 1 \bmod 2 = 0)$  então
65                                      $v_1 \leftarrow \max\{F(z) : z \in \{(h_x, h_y - 1), (h_x, h_y + 1)\}\}$ 
66                                      $v_2 \leftarrow \min\{F(z) : z \in \{(h_x, h_y - 1), (h_x, h_y + 1)\}\}$ 
67                                      $F(h) \leftarrow \{v_1, v_2\}$ 
68                             // 2-face
69                             para cada  $h \leftarrow (0, 0), (0, 1), \dots, (W \times 4 - 3, H \times 4 - 3)$  faça
70                                 se  $(h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0)$  então
71                                     // Inicialização das 2-faces que estão em  $\mathcal{D}$ 
72                                      $F(h) \leftarrow \{f(h_x \div 4, h_y \div 4)\}$ 
73                                 senão se  $(h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 0)$  então
74                                     // Note que,  $h \in \frac{1}{2}H_1^2 \setminus \mathcal{D}$ 
75                                     se  $(h_x - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x + 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y + 2 \bmod 4 = 0)$  então
76                                          $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x - 2, h_y - 2), (h_x - 2, h_y + 2), (h_x + 2, h_y - 2), (h_x + 2, h_y + 2)\}\}$ 
77                                     senão se  $(h_x - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x + 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 4 = 0)$  então
78                                          $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x - 2, h_y), (h_x + 2, h_y)\}\}$ 
79                                     senão se  $(h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y - 2 \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_x \bmod 4 = 0) \text{ E } (h_y + 2 \bmod 4 = 0)$  então
80                                          $F(h) \leftarrow \max\{f(z_x \div 4, z_y \div 4) : z \in \{(h_x, h_y - 2), (h_x, h_y + 2)\}\}$ 
81                                 // 1-face e 0-face
82                                 para cada  $h \leftarrow (0, 0), (0, 1), \dots, (W \times 4 - 3, H \times 4 - 3)$  faça
83                                    se  $((h_x \bmod 2 = 0) \text{ E } (h_y \bmod 2 = 1)) \text{ OU } ((h$ 
```

Com base na função F pode-se definir noções de conjuntos de níveis saturados como feito por Najman e Géraud (2013). Aliás, Najman e Géraud (2013) mostra que $SAT(f) = SAT(F) \cap \mathbb{Z}^2$. Com base neste fato, Géraud *et al.* (2013) propôs um algoritmo, ver função ordenação-das-faces no Algoritmo 4.5, baseado em um processo de crescimento de regiões, para ordenar as faces de F para em seguida construir a árvore de formas com algoritmo de Berger *et al.* (2007).

Algoritmo 4.5: Algoritmos para construção da árvore de formas proposto por Géraud *et al.* (2013).

```

// função para ordenação das faces
1 função ordenação-das-faces(função  $F$ )
2   Inicialize um vetor de filas  $Q[0...K]$ 
3   Inicialize a função  $F_{sort}$  // função que leva índices as faces, ou seja,  $F_{sort} : I_{sort} \subseteq \mathbb{N} \rightarrow X$ 
4   Inicialize a função  $F_{values}$  // função que leva faces aos níveis de cinzas, ou seja,  $F_{values} : X \rightarrow \mathbb{K}$ 
5   Escolha um pixel  $p_\infty$  pertencente borda externa de  $F$ 
6    $\lambda \leftarrow F_{values}(p_\infty) \leftarrow F(p_\infty)$ 
7    $adicione(Q[\lambda], p_\infty)$ 
8    $i \leftarrow 0$ 
9   enquanto existir fila em  $Q$  não vazia faça
10    enquanto a fila  $Q[\lambda]$  não estiver vazia faça
11       $p \leftarrow remove(Q[\lambda])$ 
12       $F_{sort}(i) \leftarrow p$ 
13       $i \leftarrow i + 1$ 
14      para cada  $q \in \mathcal{A}_{4c}(p)$  tal que  $q$  não foi processado faça
15        se  $\lambda \in F(q)$  então
16           $F_{values}(q) \leftarrow \lambda$ 
17        senão se  $\lambda < \min\{F(q)\}$  então
18           $F_{values}(q) \leftarrow \min\{F(q)\}$ 
19        senão
20           $F_{values}(q) \leftarrow \max\{F(q)\}$ 
21       $adicione(Q[F_{values}(q)], q)$ 
22   retorne  $(F_{sort}, F_{values})$ 

// função principal para construção da árvore de formas
1 função construir-árvore-de-formas(Imagem  $f$ )
2    $F \leftarrow interpolação(f)$ 
3    $(F_{sort}, F_{values}) \leftarrow ordenação-das-faces(F)$ 
4    $parent_F \leftarrow union-find(F_{sort})$ 
5    $canonize(F_{values}, F_{sort}, parent_F)$ 
6    $parent_f \leftarrow desinterpolação(F_{sort}, parent_F)$ 
7   retorne  $parent_f$ 

```

A função ordenação-das-faces utiliza um vetor de filas Q para simular uma fila de prioridades. O algoritmo inicia a propagação em um *pixel* p_∞ escolhido para representar a raiz da árvore. Geralmente este *pixel* pertence ao maior CC que intersecta a borda da imagem (ver sobre a escolha de p_∞ em Monasse (2000)). No processo de crescimento de região, cada vez que uma face p é visitada em uma prioridade (nível de cinza) λ , as faces q da vizinhança de p são inseridas na fila de prioridade Q com uma prioridade determinada pela posição do seu valor em relação a λ . Se $\lambda \in F(q)$ então q pertence a um conjunto de nível de valor λ que também contém p e assim q é inserido em Q com prioridade λ . Se $\forall k \in F(q), \lambda < k$ então o próximo nível (prioridade) a ser processado após λ é $m = \min\{\lambda : \lambda \in F(q)\}$ e assim q é inserido na fila com prioridade m . Analogamente, se $\forall k \in F(q), \lambda > k$ então o próximo nível a ser processado após λ é $m = \max\{\lambda : \lambda \in F(q)\}$ e assim q é inserido na fila com prioridade m . Esta função ordenação-das-faces desempenha dois papéis, a ordenação F_{sort} das faces e a criação de uma imagem da interpolação F_{values} contendo um único valor por *pixel*. Mais detalhes sobre este algoritmo podem ser encontrados em Géraud *et al.* (2013) e Crozet e Géraud (2014). Então, para construir a árvore de formas, basta considerar a função construir-árvore-de-formas do Algoritmo 4.5, onde (1) é interpolada e ordenada a imagem de entrada. Depois, (2) é construída a árvore por *union-find* e finalmente são removidos os *pixels*

desnecessários da árvore de formas. Note que as funções interpolação e ordenação-das-faces têm a mesma complexidade computacional, isto é, $\mathcal{O}(16D)$. Na Figura 4.19 é apresentado um exemplo de uma computação (entrada e saída) do Algoritmo 4.5.

Figura 4.19: Exemplo de construção da árvore de formas.

4.2.3 Reconstrução de árvores podadas

Como apresentado na Equação 4.4, uma imagem pode ser reconstruída a partir dos seus conjuntos de níveis. Agora, pretende-se reconstruir uma imagem a partir de sua árvore. Isto leva à definir funções $level_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(f) \rightarrow \mathbb{K}$, $level_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}(f) \rightarrow \mathbb{K}$ e $level_{SAT} : SAT(f) \rightarrow \mathbb{K}$ derivadas da Equação 4.4 que mapeiam vértices em níveis de cinzas, como a seguir:

$$\begin{aligned} level_{\mathcal{L}}(C) &= \min\{\lambda - 1 : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{\downarrow}^{\lambda}(f)), \lambda \in \mathbb{K}\}, \\ level_{\mathcal{U}}(C) &= \max\{\lambda : C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{\uparrow}^{\lambda}(f)), \lambda \in \mathbb{K}\} \text{ e} \\ level_{SAT}(C) &= f(y) \text{ tal que } y \in \arg \max\{|\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, x)| : x \in C\}. \end{aligned}$$

Obviamente, a função $level$ para as versões estendidas da *min-tree* e *max-tree* é simplesmente $level_{Ext(\mathcal{L})}(C) = \lambda$ tal que $(A, \lambda) = C \in Ext(\mathcal{L}(f))$ e $level_{Ext(\mathcal{U})}(C) = \lambda$ tal que $(A, \lambda) = C \in$

$Ext(\mathcal{U}(f))$, respectivamente. Por simplicidade de notação, a partir de agora adota-se a nomenclatura *level* para todas essas funções. Também, é denotado por $\mathcal{T}_f$ uma árvore construída a partir de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Dessa forma, partindo da árvore $\mathcal{T}_f$ pode-se reconstruir a imagem f por:

$$\forall p \in \mathcal{D}, f(p) = level(SC(\mathcal{T}_f, p)). \quad (4.10)$$

Neste caso, esta operação é escrita como: $f = Rec(\mathcal{T}_f)$. Em particular, se $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é uma imagem obtida por $Rec((\mathcal{L}(f), \subseteq))$ (respectivamente, $Rec((\mathcal{U}(f), \subseteq))$ e $Rec((\mathcal{SAT}(f), \subseteq))$), então chama-se esta operação por reconstrução inferior (respectivamente, superior e por formas).

Portanto, seguindo estas definições, se $\mathcal{T}_f$ é a árvore de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, então dizemos que $\mathcal{T}_g$ é a versão podada da árvore $\mathcal{T}_f$ se, e somente se, $\mathcal{T}_g = \mathcal{Poda}(\mathcal{T}_f)$ e $g = Rec(\mathcal{T}_g)$. Assim, g é a imagem de referência para aplicação da função *level* para os vértices de $\mathcal{T}_g$. Na Figura 4.20 são apresentados exemplos das operações de podas e reconstruções para uma dada imagem.

Figura 4.20: Exemplos das operações de podas e reconstruções.

Parte II

Últimos *levelings*: conceitos, propriedades e algoritmos

Resumo

Esta parte da tese é dedicada à apresentação da classe de operadores residuais denominada últimos levelings, a qual consiste de poderosos operadores residuais estendidos, definidos a partir de espaços de escalas baseados em levelings. Um operador desta classe analisa a evolução dos valores residuais presentes em dois operadores consecutivos de um espaço de escala e os maiores valores residuais são considerados. Os valores residuais revelam uma importante informação sobre o contraste de uma imagem. Além dos valores residuais, outras informações associadas com eles podem ser obtidas no momento da extração residual, tais como propriedades das regiões que produziram os valores residuais. Alguns exemplos de operadores desta classe conhecidos na literatura incluem a última abertura (resp. fechamento) por atributo (Retornaz e Marcotegui, 2007) e o último filtro por grão (Alves e Hashimoto, 2014). Eles têm sido usados com sucesso em uma etapa de pré-processamento em diversas aplicações, como por exemplo, a localização de texto em imagens de cenas (Alves e Hashimoto, 2010; Retornaz e Marcotegui, 2007), a segmentação de fachadas de edifícios (Hernandez e Marcotegui, 2011), a restauração de imagens de documentos históricos (Meyer, 2010), entre outras.

Ainda, nesta parte da tese são apresentadas as principais contribuições originais desta pesquisa, as quais incluem: (i) uma representação compacta e eficiente de um espaço de escala baseado em levelings por meio de uma árvore (Capítulo 5); (ii) definições, conceitos, algoritmos, propriedades e relações de operadores conhecidos na literatura com os últimos levelings (Capítulo 6); (iii) estratégias para construções de operadores últimos levelings (Capítulo 7).

Representações de espaço de escala baseado em *levelings* através de hierarquias dos conjuntos de níveis

Resumo do capítulo

Em muitas aplicações no campo de análise e processamento de imagens, os objetos de interesse precisam ser detectados, mensurados, segmentados ou reconhecidos em uma imagem, em geral, não pertencem a uma escala fixa, mas sim a muitas escalas. Nesta situação, diversas representações de espaço de escala têm sido desenvolvidas nas últimas décadas, como por exemplo, o espaço de escala por meio encadeamento de levelings mostrado na Seção 3.6. Neste sentido, é apresentada nesta tese um espaço de escala baseado em levelings por meio de uma hierarquia dos conjuntos de níveis, mais especificamente, por meio das árvores de componentes e das árvores de formas. Primeiramente, é demonstrado que reconstruções de árvores podadas são levelings, depois são associadas reconstruções de árvores podadas com duas categorias de operadores: os baseados em imagens marcadoras e os baseados em atributos crescentes. Por fim, é mostrado que uma árvore representa um espaço de escala que pode ser construído por meio de podas sucessivas na árvore.

Vale salientar que neste capítulo são apresentadas as primeiras contribuições originais desta tese (Alves et al., 2015), onde são mostrados que: (i) reconstruções superiores, inferiores e por formas são operadores levelings; (ii) filtros conexos baseados em imagens marcadoras podem ser obtidos por podas em árvores; (iii) Por fim, é mostrado que um espaço de escala (extensivo, anti-extensivo ou auto-dual) baseado em levelings pode ser representado por uma árvore (de componentes ou de formas) e construído por meio de podas sucessivas baseadas em imagens marcadoras ou atributos.

5.1 Relações entre reconstruções de árvores podadas e operadores *levelings*

No Capítulo 3 foram apresentados conceitos sobre operadores *levelings* e no Capítulo 4 foram apresentados conceitos sobre representação de imagens por meio de árvores de componentes e de formas. Além disso, foram estabelecidas as operações de podas e reconstruções de árvores podadas. Nesta seção, são apresentadas relações entre reconstruções de árvores podadas (ou seja, reconstruções inferiores, superiores e por formas) com os operadores *levelings*. Primeiramente, são mostradas

as relações entre árvores de componentes e depois árvores de formas, com os operadores *levelings*.

Relações entre reconstruções superiores (respectivamente, inferiores) e operadores *levelings*

Seja $\mathcal{T}_f$ uma árvore *max-tree* (respectivamente, *min-tree*) construída a partir de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e considere $\mathcal{T}_g$ a árvore obtida por uma operação de poda em $\mathcal{T}_f$, ou seja, $\mathcal{T}_g = \text{Poda}(\mathcal{T}_f)$. Logo, por meio das definições de poda e menores componentes (ver Definições 4.10 e 4.14) pode-se concluir que $\forall p \in \mathcal{D}$, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p)$ e pela definição de reconstrução de árvore podada (ver Seção 4.2.3) temos ainda que $\text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)) \geq \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p))$ (respectivamente, $\text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)) \leq \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p))$), graças à ordem bem definida dos conjuntos de níveis. Dessa forma, temos que $\text{Rec}(\mathcal{T}_f) \geq \text{Rec}(\mathcal{T}_g)$ (respectivamente, $\text{Rec}(\mathcal{T}_f) \leq \text{Rec}(\mathcal{T}_g)$) o que mostra que reconstruções superiores (respectivamente, inferiores) são anti-extensivas (respectivamente, extensivas). Estas colocações dão origem à Proposição 5.1.

Proposição 5.1. *Sejam $\mathcal{T} = (\mathcal{U}(f), \subseteq)$ a árvore *max-tree* (respectivamente, *min-tree* $\mathcal{T} = (\mathcal{L}(f), \subseteq)$) de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e $(p, q) \in \mathcal{A}$. Então, $f(p) > f(q)$ (respectivamente, $f(p) < f(q)$) se, e somente se, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}, q)$.*

PROVA:

$\Rightarrow$ Como $f(p) > f(q)$, então por definição de conjunto de níveis, tem-se: $\mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq f(p) > f(q)\} \subset \mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq f(q)\}$. Logo, $p \in \mathcal{SC}(\mathcal{T}, p) \subseteq \mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f) \subset \mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f)$. Também temos que, $q \in \mathcal{SC}(\mathcal{T}, q) \subseteq \mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f)$. Dessa forma, temos: (i) $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p)$ é um CC de $\mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f)$ contendo p ; (ii) $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, q)$ é um CC de $\mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f)$ contendo q ; (iii) (p, q) são adjacentes, ou seja, $(p, q) \in \mathcal{A}$; e (iv) $f(p) > f(q)$. Então, $p \in \mathcal{SC}(\mathcal{T}, q)$ e consequentemente $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}, q)$, pois existem caminhos em $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, q)$ para todos os *pixels* de $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p)$ passando por p .

$\Leftarrow$ Por definição de conjuntos de níveis, temos que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p) \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f)) \subseteq \mathcal{U}(f)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, q) \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f)) \subseteq \mathcal{U}(f)$ pois $\mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f)$ e $\mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f)$ são os menores conjuntos de níveis contendo os *pixels* p e q , respectivamente. Assim, como $\mathcal{SC}(\mathcal{T}, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}, q)$ segue que $\mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f) \subset \mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f)$, pois os conjuntos de níveis são aninhados pela relação de inclusão (ver Equação 4.3). Logo, por definição dos conjuntos de níveis, temos que $\mathcal{X}_{f(p)}^\uparrow(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq f(p) > f(q)\} \subset \mathcal{X}_{f(q)}^\uparrow(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq f(q)\}$. Portanto, $f(p) > f(q)$.

A prova para os conjuntos de níveis inferiores segue de forma similar. $\square$

Estes fatos mostram que, se $\mathcal{T}_g$ é obtida por uma operação de poda de uma árvore *max-tree* (respectivamente, *min-tree*) $\mathcal{T}_f$, então a imagem $g = \text{Rec}(\mathcal{T}_g)$ é um *leveling* da imagem $f = \text{Rec}(\mathcal{T}_f)$, pois para todo $(p, q) \in \mathcal{A}$, a seguinte condição é sempre verdadeira: $g(p) > g(q) \Rightarrow f(p) \geq g(p) > g(q) = f(q)$ (respectivamente, $g(p) > g(q) \Rightarrow f(p) = g(p) > g(q) \geq f(q)$). Isso, pode ser constatado pelos casos mostrados na Figura 5.1 ou ainda pela prova mostrada na Proposição 5.2.

Proposição 5.2. *Reconstruções superiores (respectivamente, inferiores) são *levelings*.*

PROVA: Sejam $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ uma imagem e $\mathcal{T}_f$ a árvore *max-tree* de f . Então, $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é uma reconstrução superior de f se, e somente se, $g = \text{Rec}(\mathcal{T}_g)$ tal que $\mathcal{T}_g = \text{Poda}(\mathcal{T}_f)$. Para mostrar que g é um *leveling* de f , basta verificar se para todo $(p, q) \in \mathcal{A}$, a definição de *levelings* é verdadeira.

Então, considere dois casos, quando $f(p) = f(q)$ e $f(p) \neq f(q)$. No primeiro caso, g satisfaz a definição de *levelings* por vacuidade, pois (p, q) pertence a uma mesma zona plana de f e consequentemente no mesmo vértice em $\mathcal{T}_f$ e portanto $g(p) = g(q)$. No segundo caso, temos que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são comparáveis, pois $(p, q) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \cap \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) \neq \emptyset$ e graças ao Corolário 4.13, dois vértices são disjuntos ou comparáveis. Logo, a operação de poda que gera $\mathcal{T}_g$ a partir de $\mathcal{T}_f$ pode: (1) ou um dos dois vértices é podado (como ilustrado na Figura 5.1 - casos 1a e 1b); (2) ou ambos $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são podados ou preservados (como ilustrado na Figura 5.1 - casos 2a e 2b). Analisando estes casos, temos:

1. Se podar um dos dois vértices, então sem perda de generalidade suponha que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ é podado e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ é preservado. Assim, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$. Logo, ou $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ (ver Fig. 5.1 - caso 1a), ou $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ (ver Fig. 5.1 - caso 1b). Portanto, pela Proposição 5.1, segue que: ou $f(p) \geq g(p) > g(q) = f(q)$, ou $f(p) = g(p) = g(q) = f(q)$ o que satisfaz a Definição 3.3 de *levelings*.
2. Se ambos $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são preservados ou podados. Então, ou $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q)$ e por consequência segue que: ou $f(p) = g(p) > g(q) = f(q)$ (ver Fig. 5.1 - caso 2a), ou $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q)$ e consequentemente $g(p) = g(q)$ (ver Fig. 5.1 - casos 2a e 2b) o que satisfaz a Definição 3.3 de *levelings*.

Portanto, reconstruções superiores são *levelings*. A prova para reconstruções inferiores segue de forma análoga. $\square$

Figura 5.1: Ilustrações das configurações de podas em uma árvore *max-tree*.

De fato, este resultado não é novo e já foi mencionado por muito autores, como por exemplo: Salembier e Wilkinson (2009), Garrido (2002) e Xu (2013). No entanto, temos um novo resultado quando consideramos a versão estendida da *max-tree* (respectivamente, *min-tree*). Assim, como

é garantido pelo Teorema 5.3, reconstruções superiores (respectivamente, inferiores) por meio da versão estendida da *max-tree* (respectivamente, *min-tree*) são equivalentes aos operadores *levelings* anti-extensivos (respectivamente, extensivos).

Teorema 5.3. *Reconstruções superiores (respectivamente, inferiores) e levelings anti-extensivos (respectivamente, extensivos) são equivalentes.*

PROVA: Sejam $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ uma imagem e $\mathcal{T}_f = (\text{Ext}(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq)$ a versão estendida da *max-tree* da imagem f . Assim, temos que: $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é uma reconstrução superior de f

$$\begin{aligned}
 &\iff g = \text{Rec}(\mathcal{T}_g) \text{ tal que } \mathcal{T}_g = \text{Poda}(\mathcal{T}_f) \\
 &\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, \\
 &\quad \begin{cases} \text{ou } \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \sqsubseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) \sqsubseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) \\ \text{ou } \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \sqsubseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) \sqsubseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) \end{cases} \\
 &\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) \sqsubset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) \\
 &\quad \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \sqsubseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) \\ \text{e} \\ \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) \end{cases} \\
 &\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p)) > \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q)) \\
 &\quad \Rightarrow \begin{cases} \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)) \geq \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p)) \\ \text{e} \\ \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) = \text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)) \end{cases} \\
 &\iff g \leq f \text{ e } \forall (p, q) \in \mathcal{A}, g(p) > g(q) \Rightarrow f(p) \geq g(p) \text{ e } g(q) = f(q) \\
 &\iff g \text{ é um leveling anti-extensivo de } f.
 \end{aligned}$$

A prova para a equivalência de *levelings* extensivos e reconstruções inferiores segue de maneira similar. $\square$

Relações entre reconstruções de formas e operadores *levelings*

Para estabelecer relações entre reconstruções por formas e operadores *levelings* é necessário conhecer as relações entre os *pixels* adjacentes e os vértices da árvore de formas. Neste sentido, as Proposições 5.4, 5.5, 5.6 e 5.8 ajudam a entender como os *pixels* adjacentes estão relacionados na árvore. Assim, a Proposição 5.4 é um corolário do Teorema 2.16 apresentado por Caselles e Monasse (2010), a Proposição 5.5 é uma consequência direta da Proposição 5.1 e a Proposição 5.8 é uma consequência direta da Proposição 5.6.

Proposição 5.4. *Seja $\mathcal{T}_f$ a árvore de formas construída a partir de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Se $(p, q) \in \mathcal{A}$ tal que $f(p) \neq f(q)$ então duas formas $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são comparáveis ou disjuntas.*

PROVA: Por definição, $\text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)) = f(p)$ e $\text{level}(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)) = f(q)$. Portanto, como $f(p) \neq f(q)$ então segue que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \neq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$. Assim, o Teorema 2.16 de Caselles e Monasse (2010) garantem que duas formas em $\mathcal{T}_f$ são comparáveis ou disjuntas. $\square$

Proposição 5.5. *Seja $\mathcal{T}_f$ a árvore de formas construída a partir de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Se $(p, q) \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ e ambos $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ pertencem a $\mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$ (respectivamente, $\mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$), então $f(p) > f(q)$ (respectivamente, $f(p) < f(q)$).*

PROVA: Por definição do conjunto $\mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$, segue que existem conjuntos P e Q pertencentes a $\mathcal{U}(f)$ tal que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) = \text{sat}(P)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) = \text{sat}(Q)$, pois $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p), \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$. Então,

seguindo a definição do operador de saturação temos:

$$\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) = \text{sat}(P) = P \cup \bigcup_{H \in \text{Int}(P)} H.$$

Assim, se $h \in H \in \text{Int}(P)$, então $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, h) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e consequentemente $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ não é a menor forma contendo o pixel h . Logo, como $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ é a menor forma contendo p , então $p \notin \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, h)$. Portanto, $p \in P$ e analogamente $q \in Q$.

Agora, queremos mostrar que $p \in Q$ e assim concluir que $P \subset Q$, pois $(p, q) \in \mathcal{A}$ e P e Q são CCs de $\mathcal{U}(f)$. Então, suponha por contradição que $p \notin Q$. Logo, temos que $Q \subset P$ pelos mesmos argumentos anteriores. Então, como sat é um operador crescente (ver Lema 2.8 em Caselles *et al.* (2008)), segue que, se $Q \subseteq P$ então $\text{sat}(Q) \subseteq \text{sat}(P)$ o que é uma contradição. Portanto, $p \in Q$ e consequentemente $P \subset Q$. Portanto, graças à Proposição 5.1, segue que $f(p) > f(q)$. $\square$

Proposição 5.6. *Seja $A \in \mathcal{L}(f) \cup \mathcal{U}(f)$ tal que $\text{sat}(A) \in \mathcal{SAT}(f)$. Se $B \in \text{Int}(A)$ e $(p, q) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in B$ e $q \notin B$, então $q \in \text{sat}(A)$ (Veja uma ilustração do enunciado na Figura 5.2).*

Figura 5.2: Ilustração do enunciado da Proposição 5.6.

PROVA: Vamos mostrar que $q \in \text{sat}(A)$ por contradição. Suponha, por contradição que $q \notin \text{sat}(A)$.

Como $q \notin \text{sat}(A)$ então q pertence ao complemento de $\text{sat}(A)$, ou seja, $q \in (\mathcal{D} \setminus \text{sat}(A)) = \text{Ext}(A) \subseteq (\mathcal{D} \setminus A)$. Como $\text{Int}(A)$ contém os CCs de $(\mathcal{D} \setminus A)$ incluídas em $\text{sat}(A)$ e $B \in \text{Int}(A)$, então temos que ambos B e $\text{Ext}(A)$ são CCs de $(\mathcal{D} \setminus A)$. Com este resultado em mente e pelo fato que $(p, q) \in \mathcal{A}$ com $p \in B$ e $q \in \text{Ext}(A)$ conclui-se que $\text{Ext}(A) = B$. Mas isso é uma contradição, pois $q \notin B$. Portanto, $q \in \text{sat}(A)$. $\square$

O Corolário 5.7 a seguir é uma consequência direta da Proposição 5.6.

Corolário 5.7. *Sejam $A, B \in \mathcal{SAT}(f)$ tal que $B \subset A$, $A \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$ e $B \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$ (respectivamente, $A \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$ e $B \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$). Se $(p, q) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in B$ e $q \notin B$, então ou $q \in A$, ou $\exists B' \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$ (respectivamente, $\exists B' \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$) tal que $B \subseteq B' \subseteq A$ e $q \in B'$*

Proposição 5.8. *Sejam $(p, q) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ duas menores formas de $\mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$ (respectivamente, $\mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$) contendo os pixels p e q . Se $X \in \mathcal{SAT}(f)$ tal que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset X \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$, então $X \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$ (respectivamente, $X \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$).*

PROVA: Suponha, por contradição, que $X \notin \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$. Assim, $X \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$ pois $X \in \mathcal{SAT}(f)$. Então, graças ao Corolário 5.7, segue que $q \in X$, pois $(p, q) \in \mathcal{A}$, $SC(\mathcal{T}_f, p) \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$, $X \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$ e $SC(\mathcal{T}_f, p) \subset X$. Mas isso é uma contradição, pois $SC(\mathcal{T}_f, q)$ é a menor forma contendo q . Portanto, $X \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$. $\square$

Teorema 5.9. *Reconstruções por formas são levelings.*

PROVA: Seja $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ uma imagem e $\mathcal{T}_f$ a árvore de formas construída a partir da imagem f . Então, $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é uma reconstrução por formas de f se, e somente se, $g = \text{Rec}(\mathcal{T}_g)$ tal que $\mathcal{T}_g = \text{Poda}(\mathcal{T}_f)$. Para provar que g é um *leveling* de f , é preciso verificar se para todo $(p, q) \in \mathcal{A}$, a definição de *leveling* é satisfeita, isto é, que $g(p) > g(q) \Rightarrow f(p) \geq g(p)$ e $g(q) \geq f(q)$.

Inicialmente, considere dois casos, quando $f(p) = f(q)$ e $f(p) \neq f(q)$. No primeiro caso, g satisfaz a definição de *levelings* por vacuidade, pois (p, q) pertence a uma mesma zona plana de f e conseqüentemente no mesmo vértice de $\mathcal{T}_f$ e portanto $g(p) = g(q)$. No segundo caso, temos pelo Teorema 4.16, que duas formas $SC(\mathcal{T}_f, p)$ e $SC(\mathcal{T}_f, q)$ são disjuntas ou comparáveis. Logo, na operação de poda que gera $\mathcal{T}_g$ a partir de $\mathcal{T}_f$ pode-se: (1) ou preservar ambos os vértices; (2) ou eliminar ambos os vértices; (3) ou eliminar um dos dois vértices. Veja na Figura 5.3 as ilustrações sobre as configurações de podas.

Figura 5.3: Ilustrações das configurações de podas.

1. Se ambos os vértices são preservados, então $f(p) = g(p)$ e $f(q) = g(q)$ o que satisfaz a condição da definição de *leveling*;
2. Se ambos os vértices são eliminados, então $g(p) = g(q)$ caso eles sejam comparáveis e assim a definição de *leveling* é verdadeira por vacuidade, caso contrário, veja o caso 3(b);

3. Se um dos dois vértices é eliminado, então graças à Proposição 5.4, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são disjuntas ou comparáveis.

(a) Se $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são comparáveis, então sem perda de generalidade, suponha que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$. Assim, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q)$ e consequentemente $g(q) = f(q)$.

- Se $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ pertencem $\mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$ (respectivamente, $\mathcal{SAT}_{\mathcal{L}}(f)$) então graças à Proposição 5.8, segue que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) \in \mathcal{SAT}_{\mathcal{U}}(f)$. Assim, graças à Proposição 5.5, segue que $f(p) \geq g(p) \geq g(q) = f(q)$ (respectivamente, $f(p) \leq g(p) \leq g(q) = f(q)$) satisfazendo a condição da definição de *leveling*;
- Se $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são de tipos diferentes, então graças ao Corolário 5.7, segue que $\forall (r, s) \in \mathcal{A}$ tal que $r \in \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $s \notin \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ segue que $s \in \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$. Assim, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, s) \subseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ e consequentemente ou $f(p) < f(s) \leq f(q) \Rightarrow f(p) \leq g(p) \leq g(q) = f(q)$, ou $f(p) > f(s) \geq f(q) \Rightarrow f(p) \geq g(p) \geq g(q) = f(q)$, o que satisfaz a condição da definição de *leveling*.

(b) Se $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ são disjuntos, então eles são de tipos diferentes (ver Proposição 5.5). Além do mais, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ não pertencem ao mesmo ramo em $\mathcal{T}_f$. Neste caso, certamente existe um vértice $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, r)$ que é ancestral comum a ambos os vértices $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$. Assim, $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, r)$ é do mesmo tipo que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ ou $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$. Então, ou $f(p) > f(r) > f(q)$, ou $f(p) < f(r) < f(q)$. Sem perda de generalidade, assume-se que $f(p) > f(r) > f(q)$. Dessa forma, se $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ é removido e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ é preservado, então temos que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) \subseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, r)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ e consequentemente $f(p) > g(p) \geq f(r)$ e $g(q) = f(q)$. Portanto, $f(p) > g(p) \geq f(r) > g(q) = f(q) \Rightarrow f(p) > g(p) > g(q) = f(q)$, satisfazendo a condição da definição de *leveling*. Mas, se $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ é preservado e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q)$ é removido, então temos que $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, p) = \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ e $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, q) \subset \mathcal{SC}(\mathcal{T}_g, q) \subseteq \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, r)$ e consequentemente $f(p) = g(p)$ e $f(r) \geq g(q) > f(q)$. Portanto, $f(p) = g(p) > g(q) > f(q)$, o que satisfaz a condição da definição de *leveling*.

□

5.2 Operadores morfológicos obtidos por meio de reconstruções de árvores podadas

Nesta seção são estabelecidas relações de diversos operadores conhecidos na literatura de MM com reconstruções de árvores podadas e por consequência, com os *levelings*. Pode-se citar, por exemplo: reconstrução por dilatação e erosão, abertura e fechamento por atributos, filtros por grãos, entre outros. Basicamente, na construção destes operadores cada vértice passa por uma decisão que opta em preservar ou eliminar o vértice e esta decisão pode ser classificada em duas categorias: (1) baseada em uma imagem marcadora ou (2) baseada no valor de um atributo crescente.

5.2.1 Operadores baseados em imagens marcadoras

Os *levelings* são operadores intimamente relacionados com operadores baseados em imagens marcadoras, como mostrado na Seção 3.5. Conforme apresentado, na Seção 2.2 uma imagem binária $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ pode ser reconstruída a partir de uma imagem marcadora $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ por meio do operador

dilatação condicional δ_B^n até atingir a idempotência e quando atinge, chama-se de reconstrução por dilatação δ_B^∞ . Este operador, também pode ser definido simplesmente pela união dos CCs do conjunto $\mathcal{X}$ que contém pelo menos um *pixel* do marcador $\mathcal{M}$ (Vincent, 1993), isto é, $\delta_B^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \{C \in \mathcal{CC}(X, \mathcal{A}_B) : C \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}$. Assim, como é conhecido há diversas décadas, qualquer operador crescente, como a reconstrução por dilatação, definido para imagens binárias pode ser estendido para imagens em níveis de cinza por meio de decomposição por limiarização (Maragos e Ziff, 1990; Wendt *et al.*, 1986). Logo, aplicando a decomposição por limiarização em uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e uma imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ tal que $g \leq f$, temos que:

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{D}, [\delta_B^\infty(f, g)](p) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{K} : p \in \delta_B^\infty(\mathcal{X}_\lambda^\uparrow(f), \mathcal{X}_\lambda^\uparrow(g))\} \\ \iff [\delta_B^\infty(f, g)](p) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{K} : p \in \{C \in \mathcal{CC}(\mathcal{X}_\lambda^\uparrow(f), \mathcal{A}_B) \text{ tal que } C \cap \mathcal{X}_\lambda^\uparrow(g) \neq \emptyset\}\} \\ \iff [\delta_B^\infty(f, g)](p) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{K} : p \in C \cap \mathcal{X}_\lambda^\uparrow(g) \neq \emptyset \text{ tal que } (C, \lambda) \in \text{Ext}(\mathcal{U}(f))\}. \end{aligned}$$

Note que, para construir $\delta_B^\infty(f, g)$ para um *pixel* $p \in \mathcal{D}$, é preciso encontrar o menor conjunto $\mathcal{X}_\lambda^\uparrow(g)$ tal que $\mathcal{X}_\lambda^\uparrow(g) \cap C \neq \emptyset$ e isto pode ser expresso como uma operação de poda na versão estendida da *max-tree* $(\mathcal{U}(f), \sqsubseteq)$, por meio do seguinte procedimento: na construção de $\delta_B^\infty(f, g)$ cada vértice (C, μ) de $(\text{Ext}(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq)$ passa por uma decisão que opta em eliminá-lo (respectivamente, preservá-lo) se, e somente se, existir um *pixel* $p \in C$ tal que $\mu > g(p)$ (respectivamente, $g(p) \geq \mu$), pois $\mu > g(p)$ implica em $\mathcal{X}_\lambda^\uparrow(g) \cap C \neq \emptyset$ e como pode ser observado, por exemplo, nas Figuras 5.4 e 5.5. Portanto,

$$\delta_B^\infty(f, g) = \text{Rec}((\mathcal{T}_U^g, \sqsubseteq)) \quad (5.1)$$

tal que $\mathcal{T}_U^g = \{(C, \mu) \in \text{Ext}(\mathcal{U}(f)) : \bigvee_{p \in C} g(p) \geq \mu\}$.

Figura 5.4: Ilustração destacando a imagem f em vermelho, a imagem marcadora g em azul e a versão estendida da *max-tree* $(\text{Ext}(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq)$ em verde. Note que, a imagem g está sobreposta a imagem f e os vértices em verde escuro não estão presentes no conjunto $\mathcal{T}_U^g$.

Figura 5.5: Ilustração destacando a imagem f em vermelho, a imagem resultante da reconstrução por dilatação $\delta_B^\infty(f, g)$ em azul e a versão estendida da *max-tree* $(\text{Ext}(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq)$ em verde.

Seguindo estas ideias, é proposto o Algoritmo 5.1 (semelhante ao algoritmo de Wilkinson *et al.* (2011)) para computar a reconstrução por dilatação. Este algoritmo, inicialmente marca todos os vértices da *max-tree* estendida $\mathcal{T}_f$ para serem podados, depois faz uso de uma fila de prioridade Q para desmarcar os vértices que não serão podados. Dessa forma, primeiramente todos os *pixels* são

adicionados em Q (linhas 5 e 6) e assim, quando um *pixel* p é retirado da fila de prioridade Q para ser processado (linhas 8 e 9), é encontrado o menor componente $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ contendo este *pixel* p . Então (linhas 10 a 15), se o vértice $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ não foi processado, é encontrado o primeiro ancestral (C, μ) de $\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ tal que $\mu \geq g(p)$ e assim todo o intervalo partindo deste vértice (C, μ) até a raiz da árvore (ou melhor ainda, até o primeiro vértice já desmarcado) é desmarcado, ou seja, não serão podados. Após processar todos os *pixels* de $\mathcal{D}$, temos marcados quais vértices serão podados de $\mathcal{T}_f$ para construir a versão podada na qual sua reconstrução coincide com a reconstrução por dilatação. Note que, o intervalo de vértice de (C, μ) até a raiz da árvore é sempre menor, pois se existir no caminho um vértice já desmarcado então não é necessário reprocessá-lo. Por fim, na linha 16 é reconstruída a imagem da árvore podada.

Algoritmo 5.1: Computação da reconstrução por dilatação a partir da *max-tree* estendida.

```

1 função reconstrução-por-dilatação(Max-tree estendida  $\mathcal{T}_f$ , Imagem  $g$ )
2   Inicialize a fila de prioridade  $Q$ 
3   para cada  $(C, \mu) \in \mathcal{T}_f$  faça
4     marque o vértice  $(C, \mu)$  // vértice marcado para ser podado
5   para cada  $p \in \mathcal{D}$  tal que  $g(p) \leq f(p)$  faça
6     adicione  $(Q, p, g(p))$  // adicione na fila  $Q$  o pixel  $p$  com prioridade  $g(p)$ 
7   enquanto a fila  $Q$  não estiver vazia faça
8      $p \leftarrow \text{remove-pixel-de-maior-prioridade}(Q)$ ;
9      $(C, \mu) \leftarrow \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p)$ 
10    se o vértice  $(C, \mu)$  ainda não foi processado então
11      enquanto  $\mu > g(p)$  E o vértice  $(C, \mu)$  foi marcado faça
12         $(C, \mu) \leftarrow \text{Pai}((C, \mu))$ 
13      desmarque o vértice  $(C, \mu)$  // vértice não será podado
14      se  $\text{Pai}((C, \mu))$  foi marcado então
15        desmarque todo intervalo de vértice partindo de  $\text{Pai}((C, \mu))$  até  $\text{Raiz}(\mathcal{T}_f)$ 
16  /* reconstrução da árvore podada, isto é,  $\delta_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) = \text{Rec}((\mathcal{T}_{\mathcal{U}}^g, \sqsubseteq)$  tal que
     $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}^g = \{(C, \mu) \in \mathcal{T}_f : (C, \mu) \text{ não está marcado}\}$  */
    retorne  $\text{Rec}(\{(C, \mu) \in \mathcal{T}_f : (C, \mu) \text{ não está marcado}\}, \sqsubseteq)$ 

```

O Algoritmo 5.1 é rápido e sua complexidade computacional é linear na quantidade de *pixels*. Isso pode ser visto nos gráficos apresentados nas Figuras 5.6 e 5.7 comparando os tempos computacionais do Algoritmo 5.1 e dos algoritmos propostos por Vincent (1993) e Falcao *et al.* (2001), para computação da reconstrução por dilatação usando um computador com processador *i7* e 8GB de memória RAM.

Assim, por dualidade pode-se ter a reconstrução por erosão ou similarmente pode ser definida ainda usando os conjuntos de níveis inferiores. Então, dado uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e um imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ tal que $g \geq f$, temos:

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}^{\infty}(f, g) = \text{Rec}((\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^g, \sqsubseteq)) \quad (5.2)$$

tal que $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^g = \{(C, \mu) \in \mathcal{T}_f : \bigwedge_{p \in C} g(p) \leq \mu\}$.

As reconstruções por erosão e dilatação dão origem a um grande número de operadores morfológicos, tais como: abertura e fechamento por reconstrução, *top-hat* por reconstrução, *h*-bacia, *h*-domos, entre outros (Dougherty e Lotufo, 2003; Soille, 2003; Vincent, 1993). Além disso, seguindo Meyer (1998b), pode-se definir o operador auto-dual *self*-reconstrução combinando a reconstrução por dilatação com a reconstrução por erosão. Neste caso, ambas as árvores precisam ser definidas com a

Figura 5.6: Comparação dos tempos computacionais do Algoritmo 5.1 e dos algoritmos propostos por Vincent (1993) e Falcao et al. (2001). Nesta comparação, cada imagem do dataset ICDAR (Lucas et al., 2003) é avaliada com 10 diferentes imagens marcadoras e a média destas avaliações é plotada neste gráfico.

Figura 5.7: Comparação dos tempos computacionais do Algoritmo 5.1 e dos algoritmos propostos por Vincent (1993) e Falcao et al. (2001). Nesta comparação, cada imagem do dataset ICDAR (Lucas et al., 2003) é avaliada com 10 diferentes imagens marcadoras e a média destas avaliações é plotada neste gráfico para cada resolução analisada (de 128×98 até 2560×1960 aumentando de 10 em 10 por cento).

mesma relação de adjacência.

$$p \in \mathcal{D}, [\rho(f, g)](p) = \begin{cases} \delta_B^\infty(f, g \wedge f), & \text{se } g(p) < f(p), \\ \varepsilon_B^\infty(f, g \vee f), & \text{se } g(p) > f(p), \\ f(p), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Como verificado na Seção 5.1 estes operadores baseados em reconstrução da árvore estendida *max-tree* e *min-tree* são todos *levelings* e pela Proposição 5.10 proposta por Meyer (1998b) garante que o operador *self-reconstrução* também é *leveling*.

Proposição 5.10 (Meyer (1998b)). *O operador $\rho(f, g)$ é um leveling da imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, para qualquer imagem marcadora $g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$.*

5.2.2 Operadores baseados em atributos

Tradicionalmente, a árvore de componentes e a árvore de formas são utilizadas para construir operadores conexos por meio de uma operação de podas ou eliminação de vértices da árvore segundo algum critério sobre atributos extraídos dos vértices. Neste sentido, cada vértice da árvore passa por uma decisão que resulta em preservar ou eliminar o vértice de acordo com o critério de decisão sobre atributos extraídos dos vértices. Assim, como vértices representam CCs dos conjuntos de níveis, então pode-se extrair diversos atributos (e representá-los por meio de uma função $\kappa : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$) destes CCs, como por exemplo: área, volume, altura e largura do retângulo envolvente sobre o CC, perímetro, circularidade, momentos, entre outros. Estes atributos podem ainda ser classificados como crescentes e não-crescentes. Dessa forma, um atributo κ é crescente se, e somente se, para quais dois vértices A e B tal que $A \subseteq B$ implica que $\kappa(A) \leq \kappa(B)$, caso contrário, o atributo κ é não-crescente. Por exemplo a área, volume, altitude, altura e largura da caixa envolvente são exemplos de atributos crescentes extraídos de um vértice. Enquanto que o perímetro, momentos, circularidade, atributos de textura são exemplos de atributos não-crescentes (Salembier e Wilkinson, 2009; Salembier *et al.*, 1998; Urbach e Wilkinson, 2002; Urbach *et al.*, 2004; Xu, 2013).

Se os atributos extraídos forem crescentes, os valores dos atributos também seguirão uma ordem bem definida na árvore devido à hierarquia de inclusão dos conjuntos de níveis. Graças a esta propriedade, pode-se obter os operadores conexos, abertura por atributo, fechamento por atributo e filtro por grão, simplesmente podando os vértices da *max-tree*, *min-tree* e árvore de formas, respectivamente, cujo valor do atributo crescente κ é menor que um dado limiar α , seguido da reconstrução da árvore podada (Caselles e Monasse, 2002; Salembier *et al.*, 1998).

Dessa forma, define-se a abertura por atributo γ_α^κ , o fechamento por atributo ϕ_α^κ e o filtro por grão ν_α^κ para toda imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ por meio de reconstruções das árvores podadas *max-tree* ($\mathcal{U}(f), \subseteq$), *min-tree* ($\mathcal{L}(f), \subseteq$) e árvore de formas ($\mathcal{SAT}(f), \subseteq$), da seguinte forma:

$$\gamma_\alpha^\kappa(f) = \text{Rec}(\{C \in \mathcal{L}(f) : \kappa(C) > \alpha\}, \subseteq), \quad (5.4)$$

$$\phi_\alpha^\kappa(f) = \text{Rec}(\{C \in \mathcal{U}(f) : \kappa(C) > \alpha\}, \subseteq) \text{ e} \quad (5.5)$$

$$\nu_\alpha^\kappa(f) = \text{Rec}(\{C \in \mathcal{SAT}(f) : \kappa(C) > \alpha\}, \subseteq). \quad (5.6)$$

De uma forma geral, a filtragem utilizando atributo crescente é algo simples, ou seja, descarta os vértices que não satisfazem o critério e reconstrói a imagem com os vértices restantes. Para os atributos não-crescentes, a decisão sobre a remoção dos vértices é menos direta. Exemplos de estratégias para eliminação de vértice (o que não satisfaz necessariamente a Definição 4.10 de poda) utilizando atributos não-crescentes podem ser encontrados em Salembier *et al.* (1998) e Urbach e Wilkinson (2002), onde são apresentadas três estratégias de podas:

- Min: um vértice N_k é removido, ou se $\kappa(N_k) < \alpha$, ou se existe um vértice ascendente N_a , tal que $\kappa(N_a) < \alpha$.
- Max: um vértice N_k é removido, se $\kappa(N_k) < \alpha$ e todos os seus descendentes N_d satisfazem $\kappa(N_d) < \alpha$.

- Viterbi: As remoções ou preservações dos vértices são determinadas por um processo de otimização de custos em um grafo. Neste sentido, cada vértice N recebe dois estados, remoção e preservação, e quatro novas arestas que conectam estes estados, ou seja, os estados remoção e preservação de N conectam (cada um) os estados de remoção e preservação de um outro vértice. Estas arestas recebem custos e o problema consiste em determinar os caminhos de menores custos saindo das folhas até a raiz. Assim, são removidos os vértices com estado de remoção destes caminhos de menores custos.

Vale salientar que operadores conexos obtidos por atributos não-crescentes não necessariamente são *levelings*. Nesta tese, temos interesse somente em operadores obtidos por podas, ou seja, por meio de atributos crescentes.

5.3 Espaço de escala baseado em *levelings* por meio de podas sucessivas

Como já conhecido por diversos anos que operadores conexos podem ser obtidos por reconstrução de árvore podada (Caselles e Monasse, 2002; Salembier *et al.*, 1998), como por exemplo: a abertura (respectivamente, fechamento) por atributo e filtro por grãos. A partir da Seção 5.2.1, mostrou-se que operadores baseados em imagens marcadoras também podem ser obtidos por meio de podas nas versões estendidas da *max-tree* e *min-tree*, como por exemplo: reconstrução por dilatação, reconstrução por erosão, *self*-reconstrução, entre outros. Aproveitando-se dessa propriedade, nesta seção é mostrada uma maneira de construir uma representação de espaço de escala por meio de uma sequência de podas sucessivas.

Definição 5.11 (Sequência de podas sucessivas). Seja $\mathcal{T}_f$ a árvore (*max-tree*, *min-tree* ou árvore de formas) construída a partir de uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, a sequência de podas sucessivas da árvore $\mathcal{T}_f$ é dada pela seguinte relação de recorrência:

$$\mathcal{T}_f^i = \begin{cases} \mathcal{T}_f & , \text{ se } i = 0, \\ \mathcal{Poda}(\mathcal{T}_f^{i-1}) & , \text{ se } i > 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $\mathcal{T}_f$ uma árvore (*max-tree*, *min-tree* ou árvore de formas) construída a partir de uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Então, uma vez que os operadores *levelings* podem ser aninhados para criar um espaço de escala de uma imagem, como apresentado na Seção 3.6, e pelos Teoremas 5.3 e 5.9, temos que a sequência de reconstruções de podas sucessivas:

$$(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f)) \text{ com } \psi_i(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^i), \text{ para } i \in \mathcal{I} = \{0, 1, \dots, \mathcal{I}_{MAX}\}$$

constitui um espaço de escala da imagem f baseado em *levelings* e isto nos leva ao Teorema 5.12. Na Figura 5.8 é apresentado um exemplo simples de espaço de escala gerado por uma *max-tree*.

Teorema 5.12. *A sequência de reconstruções de podas sucessivas de uma árvore (*max-tree*, *min-tree* ou árvore de formas) é um espaço de escala com base em *levelings*.*

PROVA: Considere $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$ a sequência de reconstruções de podas sucessivas derivada da árvore $\mathcal{T}_f$ construída a partir de uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, ou seja, para cada $i \in \mathcal{I}, \psi_i(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^i)$. Assim, pela Definição 5.11 temos que a árvore $\mathcal{T}_f^0 = \mathcal{T}_f$ e $\mathcal{T}_f^i$ é obtida por uma operação de poda da árvore $\mathcal{T}_f^{i-1}$ para $1 \leq i \leq \mathcal{I}_{MAX}$. Logo, graças aos Teoremas 5.3 e

Figura 5.8: Exemplo de um espaço de escala gerado a partir de uma max-tree.

5.9, temos que $\psi_i(f)$ é um *leveling* de $\psi_{i-1}(f)$ e por transitividade temos que $\psi_i(f)$ é um *leveling* $\psi_j(f)$ para qualquer $0 \leq j \leq i \leq \mathcal{I}_{MAX}$ o que mostra que os *levelings* estão encadeados. Portanto, como apresentado na Seção 5.2.1, o encadeamento de *levelings* constitui um espaço de escala como mostrado em Meyer e Maragos (1999). $\square$

Com base nestas considerações, pode-se construir um espaço de escala a partir de uma árvore $\mathcal{T}_f$ por meio de reconstruções de podas sucessivas obtidas por uma estratégia baseada em atributos ou imagens marcadoras. Estes espaços de escalas são usados no Capítulo 6 para definir operadores da classe dos últimos *levelings*. Também, vale lembrar que muitos trabalhos sobre operadores residuais estendidos (Alves e Hashimoto, 2014; Alves *et al.*, 2013; Beucher, 2007; Marcotegui *et al.*, 2011; Meyer, 2010; Retornaz e Marcotegui, 2007), representam um espaço de escala por meio de uma família de operadores $\{\psi_i : i \in \mathcal{I}\}$ indexada pelo conjunto de índices $\mathcal{I}$. Assim, no caso de espaço de escala baseado em *levelings*, temos que para quaisquer $i, j \in \mathcal{I}$, $i \leq j \Leftrightarrow \psi_j$ é um *leveling* de ψ_i . Dessa forma, esta família de *levelings* indexada por $\mathcal{I}$ aplicada em uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ dá origem ao espaço de escala $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$.

5.3.1 Espaço de escala baseado em atributos

Um espaço de escala de aberturas (respectivamente, fechamentos) por atributo e filtros por grãos pode ser construído a partir de uma sequência crescente de limiares $(t_1, t_2, \dots, t_{\mathcal{I}_{MAX}})$ para um atributo crescente κ . Por exemplo, a sequência crescente de limiares pode ser derivada da própria árvore $\mathcal{T}_f$ da seguinte forma: $t_i \in T_\kappa = \{\kappa(A) : A \text{ é um vértice de } \mathcal{T}_f\}$ tal que $t_{i-1} < t_i$ para $1 < i \leq |T_\kappa| = \mathcal{I}_{MAX}$. Dessa forma, considerando $\mathcal{T}_f$ o poset $(\mathcal{V}, \subseteq)$, a sequência de podas sucessivas é dada por

$$\mathcal{T}_f^i = \begin{cases} \mathcal{T}_f & , \text{ se } i = 0, \\ \text{Poda}(\mathcal{T}_f^{i-1}) = (\{A \in \mathcal{V} : \kappa(A) > t_i\}, \subseteq) & , \text{ se } i > 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

para $i = 0, 1, \dots, \mathcal{I}_{MAX}$. Assim,

$$(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f)) \text{ com } \psi_i(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^i), \text{ para } i \in \mathcal{I}$$

é um espaço de escala derivado de uma sequência crescente de limiares para um atributo κ . Na Figura 5.9 são apresentadas algumas imagens obtidas dos espaços de escalas baseados no atributo de área, usando as árvores *max-tree*, *min-tree* e de formas, respectivamente.

Figura 5.9: Exemplos de imagens de um espaço de escala de levelings obtidos por podas pelo atributo de área das árvores *max-tree*, *min-tree* e de formas.

5.3.2 Espaço de escala baseado em imagens marcadoras

Um espaço de escala de operadores baseados em reconstruções pode ser construído a partir de uma família de imagens marcadoras $(g_1, g_2, \dots, g_{I_{MAX}})$. Neste sentido, como mostra o trabalho de Meyer e Maragos (1999), diferentes famílias de marcadores podem ser utilizadas, como por exemplo, as seguintes famílias: extensivas de dilatações ou fechamentos, anti-extensivas de erosões ou aberturas, filtros sequenciais alternados, entre outras. Assim, se $\mathcal{T}_f$ é uma *max-tree* tal que a versão estendida de $\mathcal{T}_f$ é o poset $(Ext(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq)$ então a sequência de podas sucessivas é dada por

$$\mathcal{T}_f^i = \begin{cases} (Ext(\mathcal{U}(f)), \sqsubseteq) & , \text{ se } i = 0, \\ \mathcal{Poda}(\mathcal{T}_f^{i-1}) = (\{(C, \mu) \in \mathcal{T}_f^{i-1} : \bigvee_{p \in C} g_i(p) \geq \mu\}, \sqsubseteq) & , \text{ se } i > 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

para $i = 0, 1, \dots, I_{MAX}$. Assim,

$$(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{I_{MAX}}(f)) \text{ com } \psi_i(f) = Rec(\mathcal{T}_f^i), \text{ para } i \in \mathcal{I}$$

é um espaço de escala de *levelings* anti-extensivos derivado de uma família de imagens marcadoras. Analogamente, um espaço de escala de *levelings* extensivos pode ser construído por meio de uma *min-tree*. Também, pode-se construir um espaço de escala de *levelings* auto-duais combinando os resultados da reconstrução usando *max-tree* e , como definido na Equação 5.3. Na Figura 5.10 são apresentados alguns exemplos de imagens de espaços de escalas de *levelings* associados com famílias de marcadores.

família de marcadores produzida por aberturas

espaço de escala associado a família de aberturas

família de marcadores produzida por fechamentos

espaço de escala associado a família de fechamentos

família de marcadores produzida por filtros de médias

espaço de escala associado a família de filtros de médias

família de marcadores produzida por filtros sequenciais alternados

espaço de escala associado a família de filtros sequenciais alternados

Figura 5.10: Exemplos de imagens de espaços de escalas de levelings associados com famílias de marcadores.

Últimos levelings

Resumo do capítulo

Neste capítulo é apresentada a classe de operadores residuais últimos levelings, a qual consiste de poderosos operadores residuais estendidos definidos a partir de um espaço de escala baseado em levelings. Um operador desta classe analisa a evolução dos valores residuais presentes em dois operadores consecutivos de um espaço de escala e os maiores valores residuais são considerados. Os valores residuais revelam uma importante informação sobre o contraste de uma imagem. Além dos valores residuais, outras informações associadas com eles podem ser obtidas no momento da extração residual, tais como propriedades das regiões que produziram os valores residuais. Com base nestas considerações, apresenta-se neste capítulo a classe de operadores residuais últimos levelings, na qual é destacado suas propriedades, relações com operadores conhecidos na literatura, definições de novos operadores residuais e algoritmos eficientes para implementação destes operadores.

6.1 Das últimas aberturas e últimos fechamentos para os últimos levelings

Como mencionado no Capítulo 1, um operador residual r é definido como a diferença (*pixel a pixel*) entre dois operadores, digamos ψ e ϕ , aplicados em uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, ou seja, $r = \psi(f) - \phi(f)$. Assim, ψ e ϕ são chamados de primitivas e para um *pixel* $p \in \mathcal{D}$, $[\psi(f)](p) > [\phi(f)](p)$ implica em um resíduo positivo $r(p) > 0$; $[\psi(f)](p) < [\phi(f)](p)$ implica em um resíduo negativo $r(p) < 0$; $[\psi(f)](p) = [\phi(f)](p)$ implica em um resíduo nulo $r(p) = 0$. Esses operadores tem sido estendidos para extraírem valores residuais de duas famílias de operadores $\{\psi_i : i \in \mathcal{I}_{\preccurlyeq}\}$ e $\{\phi_i : i \in \mathcal{I}_{\preccurlyeq}\}$ indexadas pelo conjunto de índices $\mathcal{I}_{\preccurlyeq} = \{0, 1, \dots, \mathcal{I}_{MAX}\}$ tal que para quaisquer $i, j \in \mathcal{I}_{\preccurlyeq}$, se $i \leq j$ então $\psi_i \preccurlyeq \psi_j$ e $\phi_i \preccurlyeq \phi_j$, onde $\preccurlyeq$ é uma relação de ordem sobre $\mathcal{F}(\mathcal{D})$. Assim, o i -ésimo operador residual aplicado em uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é definido como $r_i(f) = \psi_i(f) - \phi_i(f)$ e o operador residual estendido θ aplicado na imagem f é definido como o supremo dos operadores residuais r_i , isto é

$$\theta(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}_{\preccurlyeq}} \{r_i(f) : \psi_i(f) - \phi_i(f)\}. \quad (6.1)$$

Seguindo nesta direção, [Beucher \(2007\)](#) propôs o operador última abertura (por dualidade, o último fechamento), onde as primitivas são aberturas consecutivas, ou seja, $\psi_i = \gamma_i$ e $\phi_i = \gamma_{i+1}$, de

uma família de aberturas $\{\gamma_i : i \in I_{\leq}\}$ indexadas pelo conjunto $I_{\leq}$. Portanto,

$$\theta(f) = \sup_{i \in I_{\leq}} \{r_i(f) : \gamma_i(f) - \gamma_{i+1}(f)\}. \quad (6.2)$$

Esta maneira de extrair valores residuais proposta por [Beucher \(2007\)](#) foi usada mais tarde por outros autores para extrair resíduos de famílias de operadores conexos ([Alves e Hashimoto, 2014](#); [Alves et al., 2013](#); [Hernandez e Marcotegui, 2011](#); [Marcotegui et al., 2011](#); [Meyer, 2010](#); [Retornaz e Marcotegui, 2007](#)). Assim, objetos contrastados são detectados quando são filtrados por operadores conexos gerando valores residuais conexos. Primeiramente, [Retornaz e Marcotegui \(2007\)](#) propuseram a última abertura por atributo (UAO - do inglês, *ultimate attribute opening*) $\mathcal{R}_{\theta}^+$ e por dualidade o último fechamento por atributo (UAC - do inglês, *ultimate attribute closing*), $\mathcal{R}_{\theta}^-$ (veja exemplo ilustrado na Figura 6.1) para extrair contraste de objetos presentes em imagens de cenas, ou seja,

$$\theta(f) = \sup_{i \in I_{\leq}} \{r_i(f) : r_i(f) = \gamma_i^{\kappa}(f) - \gamma_{i+1}^{\kappa}(f)\}. \quad (6.3)$$

Figura 6.1: Um exemplo simples de computação da última abertura por atributo, onde são mostrados: (no topo) a família de primitivas $\{\gamma_0^{\kappa}(f), \gamma_1^{\kappa}(f), \dots, \gamma_7^{\kappa}(f)\}$; (no centro) os operadores residuais $\{r_0(f), r_1(f), \dots, r_{7-1}(f)\}$ e o resultado da última abertura por atributo $\sup\{r_i(f)\}$; (em baixo) os operadores residuais rotulados para facilitar a visualização dos valores residuais.

Sabendo que a abertura por atributo pode ser obtida eficientemente usando uma *max-tree*, [Fabrizio e Marcotegui \(2009\)](#) propuseram um algoritmo eficiente para computar a UAO usando sua estrutura. Depois, [Hernandez e Marcotegui \(2011\)](#) adicionaram um fator de similaridade (função $\Omega : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{D})) \rightarrow [0, 1]$) as zonas planas dos operadores residuais $r_i(f)$ para enfatizar as regiões de contraste com base em uma informação de forma. Assim, o i -ésimo operador residual com informação de forma é dado por $r_i^{\Omega}(f) = r_i(f) \times \Omega(\mathcal{ZP}(r_i(f)))$ e a última abertura com informação de forma (SUAO - do inglês, *shape ultimate attribute opening*) é definida por

$$\mathcal{R}_{\theta}^{+\Omega}(f) = \sup_{i \in I_{\leq}} \{r_i^{\Omega}(f) : r_i^{\Omega}(f) = r_i(f) \times \Omega(\mathcal{ZP}(r_i(f))) \text{ e } r_i(f) = \gamma_i^{\kappa}(f) - \gamma_{i+1}^{\kappa}(f)\}. \quad (6.4)$$

Diferentemente dessas pesquisas ([Fabrizio e Marcotegui, 2009](#); [Hernandez e Marcotegui, 2011](#);

Retornaz e Marcotegui, 2007), em Meyer (2010) e depois Alves e Hashimoto (2014), propuseram os últimos *levelings* por marcadores (ULM - do inglês, *ultimate levelings by marked*) e os últimos filtros por grãos (UGF - do inglês, *ultimate grain filters*) para extrair valores residuais de famílias de *levelings* $\{\psi_i : i \in \mathcal{I}\}$ indexadas pelo conjunto de índices $\mathcal{I}$. Os valores residuais extraídos dessas famílias de primitivas podem produzir valores residuais positivos e negativos em $r_i(f) = \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)$. Neste caso, são tratados separadamente os valores residuais positivos e negativos, isto é, $r_i^+(f) = [\psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0]$ e $r_i^-(f) = [\psi_{i+1}(f) - \psi_i(f) \vee 0]$. Dessa forma, o operador residual é definido por

$$\mathcal{R}_\theta(f) = \mathcal{R}_\theta^+(f) \vee \mathcal{R}_\theta^-(f), \quad (6.5)$$

onde $\mathcal{R}_\theta^+(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i^+(f) : i \in \mathcal{I}\}$ e $\mathcal{R}_\theta^-(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i^-(f) : i \in \mathcal{I}\}$.

As pesquisas de Meyer (2010) e Alves e Hashimoto (2014) são diferentes da abordagem de Beucher (2007) a qual somente lida com operadores residuais positivos ou negativos. Embora tenham algumas diferenças, estes operadores residuais expostos tem uma importante característica em comum, ou seja, as famílias de primitivas usadas para obtê-los são compostas por *levelings* consecutivos de espaços de escalas, como apresentado no Capítulo 5. Estes operadores pertencem a uma classe denominada de últimos *levelings* e definida por primitivas consecutivas de um espaço de escala com base em *levelings*.

Definição 6.1 (Últimos *levelings*). Um operador *último leveling positivo* $\mathcal{R}_\theta^+$ (respectivamente, *negativo* $\mathcal{R}_\theta^-$) é o supremo dos resíduos positivos r_i^+ (respectivamente, negativos r_i^-) extraído de uma família $\{\psi_i : i \in \mathcal{I}\}$ indexada pelo conjunto de índices $\mathcal{I} = \{0, 1, \dots, \mathcal{I}_{MAX}\}$, tal que para quaisquer $i, j \in \mathcal{I}$, $i \leq j \Leftrightarrow \psi_j$ é um *leveling* de ψ_i . Assim, o operador *último leveling* $\mathcal{R}_\theta$ é o supremo entre $\mathcal{R}_\theta^+$ e $\mathcal{R}_\theta^-$, isto é

$$\mathcal{R}_\theta^+(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i^+(f) : r_i^+(f) = [\psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0]\}, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{R}_\theta^-(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i^-(f) : r_i^-(f) = [\psi_{i+1}(f) - \psi_i(f) \vee 0]\}, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{R}_\theta(f) = \mathcal{R}_\theta^+(f) \vee \mathcal{R}_\theta^-(f). \quad (6.8)$$

Na Figura 6.2 são apresentados alguns exemplos de aplicações de operadores últimos *levelings* para uma comparação e na Figura 6.3 é apresentado uma ilustração dos operadores da classe dos últimos *levelings*.

Figura 6.2: Exemplos de aplicações de últimos *levelings*: (da esquerda para direita) UAO (Retornaz e Marcotegui, 2007), rotulação da UAO, UAC (Retornaz e Marcotegui, 2007), rotulação da UAC, SUA0 com uma função de forma circular (Hernandez e Marcotegui, 2011), rotulação de SUA0, último filtro por grão (UGF - do inglês, *ultimate grain filter*) (Alves e Hashimoto, 2014), rotulação do UGF.

Figura 6.3: Ilustração da classe dos operadores últimos levelings.

6.2 Propriedade associadas aos operadores últimos levelings

Os últimos levelings não são filtros morfológicos, ou seja, não são crescentes e também não são idempotente, apesar do i -ésimo resíduo r_i^+ (respectivamente, r_i^-) ser idempotente, isto é,

$$\begin{aligned}
 r_i^+(r_i^+(f)) &= \psi_i(r_i^+(f)) - \psi_{i+1}(r_i^+(f)) \vee 0 \\
 &= \psi_i([\psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0]) - \psi_{i+1}([\psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0]) \vee 0 \\
 &= \psi_i([\psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0]) - 0 \\
 &= \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0 \\
 &= r_i^+(f)
 \end{aligned}$$

Apesar disso, os últimos levelings têm propriedades interessantes sobre preservação de estruturas (contornos e extremas regionais) e complementação. Além do mais, os últimos levelings positivos $\mathcal{R}_\theta^+$ são anti-extensivos, ou seja, $\mathcal{R}_\theta^+(f) \leq f$. Ademais, a decomposição residual $(r_0(f), r_1(f), \dots, r_{I_{MAX}}(f))$ de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ pode ser usado para construir hierarquias residuais e também permite reconstruir a imagem f , pois $r_i^+(f) = \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f) \vee 0$ e $r_i^-(f) = \psi_{i+1}(f) - \psi_i(f) \vee 0$ implica em $\psi_i(f) = \psi_{i+1}(f) + r_i^+(f) - r_i^-(f)$. Assim, pode-se reconstruir a imagem f a partir da decomposição residual da seguinte maneira:

$$f = \psi_{I_{MAX}}(f) + \sum_{i \in \mathcal{I}} r_i^+(f) - \sum_{i \in \mathcal{I}} r_i^-(f). \quad (6.9)$$

A seguir são apresentadas propriedades dos últimos levelings sobre preservação de estruturas e complementação.

6.2.1 Propriedades sobre preservação de estruturas

Se a primitiva $\psi_{i+1}(f)$ é um leveling de uma primitiva $\psi_i(f)$ e $(p, q) \in \mathcal{A}$, então $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q) \Rightarrow [\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$ o que implica em $[0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)](p) = [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)](q)$ (respectivamente, $[0 \vee \psi_{i+1}(f) - \psi_i(f)](p) = [0 \vee \psi_{i+1}(f) - \psi_i(f)](q)$) mostrando que $r_i^+(f)$ (respectivamente, $r_i^-(f)$) é conexo de $\psi_i(f)$ o que leva ao Lema 6.2.

Lema 6.2. *Se $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$ é um espaço de escala baseado em levelings, então $r_i^+(f) = [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)]$ (respectivamente, $r_i^-(f)$) é um operador conexo para todo $i \in \mathcal{I}$.*

PROVA: Seja $(p, q) \in \mathcal{A}$ dois *pixels* adjacentes. Como os operadores *levelings* são conexos (pois satisfazem a Definição 3.2 de conexo), então segue que $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q) \Rightarrow [\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$ implicando ainda em $[0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)](p) = [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)](q)$. Logo, $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q) \Rightarrow [r_i^+(f)](p) = [r_i^+(f)](q)$, mostrando que r_i é um operador conexo de $\psi_i(f)$ e por transitividade de f , pois $f(p) = f(q) \Rightarrow [\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q) \Rightarrow [r_i^+(f)](p) = [r_i^+(f)](q)$. $\square$

Além disso, se $[\psi_{i+1}(f)](p) > [\psi_{i+1}(f)](q)$, então $[\psi_i(f)](p) \geq [\psi_{i+1}(f)](p) > [\psi_{i+1}(f)](q) \geq [\psi_i(f)](q)$, pois $\psi_{i+1}(f)$ é um *leveling* de $\psi_i(f)$. Logo, pode-se derivar duas afirmações:

- (i) $[0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)](p) \geq [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)](q)$ (ou seja, $[r_i^+(f)](p) \geq [r_i^+(f)](q)$);
- (ii) $[\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$.

Portanto, isto mostra que quando existe uma transição em $\psi_{i+1}(f)$, então pode-se gerar uma transição no resíduo positivo $r_i^+(f)$, implicando também em uma transição em $\psi_i(f)$ no mesmo lugar e com a mesma ordem. Pode-se chegar a mesma conclusão, se considerarmos $[\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$. Portanto,

$$\forall (p, q) \in \mathcal{A}, [r_i^+(f)](p) > [r_i^+(f)](q) \Rightarrow [\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$$

o que mostra também que $r_i^+(f)$ (respectivamente, $r_i^-(f)$) é um operador *monotone planing* de $\psi_i(f)$. Isto leva ao Lema 6.3.

Lema 6.3. *Se $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$ é um espaço de escala baseado em levelings, então $r_i^+(f) = [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)]$ (respectivamente, $r_i^-(f)$) é um operador *monotone planing* para todo $i \in \mathcal{I}$.*

PROVA: Seja $(p, q) \in \mathcal{A}$ dois *pixels* vizinhos. Vamos analisar os casos quando: $[\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$ e $[\psi_{i+1}(f)](p) \neq [\psi_{i+1}(f)](q)$.

- Se $[\psi_{i+1}(f)](p) \neq [\psi_{i+1}(f)](q)$.

Então, sem perda de generalidade, suponha $[\psi_{i+1}(f)](p) > [\psi_{i+1}(f)](q)$. Logo, como $\psi_{i+1}(f)$ é um *leveling* de $\psi_i(f)$, segue que $[\psi_i(f)](p) \geq [\psi_{i+1}(f)](p) > [\psi_{i+1}(f)](q) \geq [\psi_i(f)](q)$. Consequentemente, temos:

- $[\psi_i(f)](p) - [\psi_{i+1}(f)](p) \geq 0$, implicando em $[r_i^+(f)](p) \geq 0$.
- $[\psi_i(f)](q) - [\psi_{i+1}(f)](q) \leq 0$, implicando em $[r_i^+(f)](q) = 0$.

Portanto, se $[r_i^+(f)](p) > [r_i^+(f)](q)$ então $[\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$, o que mostra que $r_i^+(f)$ é um *monotone planing* de $\psi_i(f)$.

- Se $[\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$.

Então, teremos dois casos para analisar: ou $[\psi_i(f)](p) \neq [\psi_i(f)](q)$, ou $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q)$.

- Se $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q)$ então $[\psi_i(f)](p) - [\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_i(f)](q) - [\psi_{i+1}(f)](q)$, pois $[\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$ e $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q)$. Logo, $[r_i^+(f)](p) = [r_i^+(f)](q)$ e $[\psi_i(f)](p) = [\psi_i(f)](q)$, o que mostra que $r_i^+(f)$ é um *monotone planing* de $\psi_i(f)$ por vacuidade.

- Se $[\psi_i(f)](p) \neq [\psi_i(f)](q)$. Então, suponha sem perda de generalidade que $[\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$. Logo, ou $[\psi_i(f)](p) > [\psi_{i+1}(f)](p)$, ou $[\psi_i(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](p)$, ou $[\psi_i(f)](p) < [\psi_{i+1}(f)](p)$.
 - * Se $[\psi_i(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](p)$ então $[\psi_i(f)](p) - [\psi_{i+1}(f)](p) = 0$ e $[\psi_i(f)](q) - [\psi_{i+1}(f)](q) < 0$, pois $[\psi_i(f)](q) < [\psi_i(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$. Logo, $[r_i^+(f)](p) = [r_i^+(f)](q)$ e $[\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$ o que mostra que $r_i^+(f)$ é um *monotone planing* de $\psi_i(f)$ por vacuidade.
 - * Se $[\psi_i(f)](p) > [\psi_{i+1}(f)](p)$ então $[\psi_i(f)](p) - [\psi_{i+1}(f)](p) > 0$ e $[\psi_i(f)](q) - [\psi_{i+1}(f)](q)$, pode ser maior, menor ou igual a zero. Logo, mesmo assim, temos que $[\psi_i(f)](p) - [\psi_{i+1}(f)](p) > [\psi_i(f)](q) - [\psi_{i+1}(f)](q)$, pois $[\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$ e $[\psi_{i+1}(f)](p) = [\psi_{i+1}(f)](q)$, o que mostra que $r_i^+(f)$ é um *monotone planing* de $\psi_i(f)$.
 - * Se $[\psi_i(f)](p) < [\psi_{i+1}(f)](p)$ então $[\psi_i(f)](p) - [\psi_{i+1}(f)](p) < 0$ e $[\psi_i(f)](q) - [\psi_{i+1}(f)](q) < 0$, pois $[\psi_{i+1}(f)](q) = [\psi_{i+1}(f)](p) > [\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$. Logo, $[r_i^+(f)](p) = [r_i^+(f)](q)$ e $[\psi_i(f)](p) > [\psi_i(f)](q)$, o que mostra que $r_i^+(f)$ é um *monotone planing* de $\psi_i(f)$.

E assim concluímos que $\forall (p, q) \in \mathcal{A}$ vizinhos, se $r_i^+(p) > r_i^+(q)$ então $\psi_i(p) > \psi_i(q)$ o que mostra que r_i^+ é um *monotone planing* de ψ_i e por transitividade r_i^+ também é um *monotone planing* de f , pois $r_i^+(p) > r_i^+(q) \Rightarrow \psi_i(p) > \psi_i(q) \Rightarrow f(p) > f(q)$. $\square$

Como mostrado nas Proposições 3.12, 3.14 e 3.13, os operadores conexos, *monotone planings* e *levelings* são fechados sobre a operação de supremo. Logo, o supremo dos i -ésimos resíduos positivos r_i^+ e negativos r_i^- são operadores conexos. Mais ainda, o supremo dos i -ésimos resíduos positivos r_i^+ (respectivamente, negativos r_i^-) são operadores *monotone planings*. Isso leva às Proposições 6.4 e 6.5.

Proposição 6.4. *Os últimos levelings são operadores conexos.*

PROVA: Seguindo a Definição 6.1, um último *leveling* de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ é dado por $\mathcal{R}_\theta(f) = \mathcal{R}_\theta^+(f) \vee \mathcal{R}_\theta^-(f)$, onde $\mathcal{R}_\theta^+(f)$ e $\mathcal{R}_\theta^-(f)$ são os supremos dos i -ésimos resíduos $r_i^+(f)$ e $r_i^-(f)$. Então, pela Proposição 6.2 os i -ésimos resíduos $r_i^+(f)$ e $r_i^-(f)$ são operadores conexos e pela Proposição 3.12 o supremo de operadores conexos é um operador conexo. Portanto, $\mathcal{R}_\theta^+(f)$ e $\mathcal{R}_\theta^-(f)$ são operadores conexos e consequentemente $\mathcal{R}_\theta(f)$ é um operador conexo. $\square$

Proposição 6.5. *Os últimos levelings positivos (respectivamente, negativos) são operadores monotone planing.*

PROVA: Seguindo a Definição 6.1, um último *leveling* positivo $\mathcal{R}_\theta^+(f)$ é dado pelo supremo dos i -ésimos resíduos $r_i^+(f)$. Então, graças a Proposição 6.3, os operadores r_i^+ são operadores *monotone planings* e pela Proposição 3.14 o supremo de operadores *monotone planings* é um operador *monotone planing*. Portanto, os últimos *levelings* positivos são *monotone planings*. $\square$

Consequentemente, as Proposições 6.4 e 6.5 levam aos Corolários 6.6 e 6.7.

Corolário 6.6. *Os últimos filtros por grãos são operadores conexos.*

Corolário 6.7. *As últimas aberturas (respectivamente, fechamentos) por atributos são operadores monotone planings.*

Como os últimos *levelings* positivos (respectivamente, negativos) são operadores *monotone plannings* e portanto herdam a propriedade de não criarem máximos regionais (respectivamente, mínimos), e isso leva à Proposição 6.8 e consequentemente ao Corolário 6.9.

Proposição 6.8. *Se $\mathcal{R}_\theta^+(f)$ (respectivamente, $\mathcal{R}_\theta^-(f)$) é um último leveling positivo (respectivamente, negativo) contendo uma máxima regional $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$, então f possui uma máxima (respectivamente, mínima) regional $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$.*

PROVA: Esta Proposição é análoga a Proposição 3.8, sendo que a única diferença é que as máximas regionais $\mathcal{X}$ dos últimos *levelings* negativos implicam em uma mínima regional $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ da imagem f . Tendo em mente esta consideração, a prova é a mesma. $\square$

Corolário 6.9. *Se $\mathcal{R}_\theta^+(f)$ (respectivamente, $\mathcal{R}_\theta^-(f)$) é uma abertura (respectivamente, fechamento) por atributo de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ contendo uma máxima (respectivamente, mínima) regional $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$, então f possui uma máxima (respectivamente, mínima) regional $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$.*

6.2.2 Propriedade a respeito de complementação

Relembrando, dois operadores ψ e φ são duais com respeito à complementação se ao aplicar ψ em uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ equivale em aplicar φ no complemento de f e tomar o complemento de φ , isto é, $\psi(f) = [\varphi(f^c)]^c$. Similarmente, ψ e φ são complementares se ao aplicar ψ na imagem f equivale a aplicar φ no complemento de f , isto é, $\psi(f) = \varphi(f^c)$. Neste sentido, os últimos *levelings* respeitam a complementariedade das primitivas e isso leva à Proposição 6.10 e consequentemente ao Corolário 6.11.

Proposição 6.10. *Se $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$ e $(\varphi_0(f), \varphi_1(f), \dots, \varphi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$ são dois espaços de escalas baseados em levelings satisfazendo $\psi_i(f)$ é dual de $\varphi_i(f)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $r_i^+(f)$ e $r_i^-(f)$ são complementares, onde $r_i^+(f) = [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)]$ e $r_i^-(f) = [0 \vee \varphi_{i+1}(f) - \varphi_i(f)]$.*

PROVA:

$$\begin{aligned} r_i^+(f) &= [0 \vee \psi_i(f) - \psi_{i+1}(f)] \\ &= [0 \vee (\varphi_i(f^c))^c - (\varphi_{i+1}(f^c))^c] \\ &= [0 \vee (K - \varphi_i(f^c)) - (K - \varphi_{i+1}(f^c))] \\ &= [0 \vee \varphi_{i+1}(f^c) - \varphi_i(f^c)] \\ &= r_i^-(f^c). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 6.11. *A última abertura por atributo e o último fechamento por atributo são complementares.*

Analogamente, um operador ψ é auto-dual com respeito a complementação se o seu operador dual é si mesmo, ou seja, $\psi(f) = [\psi(f^c)]^c$. Similarmente, ψ é auto-complementar se $\psi(f) = \psi(f^c)$. Neste sentido, deriva-se as Proposições 6.12 e consequentemente os Corolários 6.13 e 6.14.

Proposição 6.12. *Se $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{\mathcal{I}_{MAX}}(f))$ é um espaço de escala baseado em levelings tal que $\psi_i(f)$ é auto-dual, então $r_i(f) = r_i^+(f) \vee r_i^-(f)$ é auto-complementar.*

PROVA:

$$\begin{aligned} r_i(f) &= r_i^+(f) \vee r_i^-(f) \\ &= r_i^-(f^c) \vee r_i^+(f^c) \quad (\text{Proposição 6.10}) \\ &= r_i(f^c). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 6.13. *Os últimos filtros por grãos são auto-complementares.*

Corolário 6.14. *Se $\mathcal{R}_\theta^+(f)$ é uma última abertura por atributo de uma imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ e $\mathcal{R}_\theta^-(f)$ é um último fechamento por atributo de f , então $[\mathcal{R}_\theta^+(f) \vee \mathcal{R}_\theta^-(f)]$ é auto-complementar.*

6.3 Algoritmo para construção dos últimos *levelings*

Graças ao Teorema 5.12 sabemos que uma sequência $(\psi_0(f), \psi_1(f), \dots, \psi_{I_{MAX}}(f))$ de reconstruções de uma sequência de árvores $(\mathcal{T}_f^0, \mathcal{T}_f^1, \dots, \mathcal{T}_f^{I_{MAX}})$ obtidas por podas sucessivas (ver Definição 5.11) de uma árvore $\mathcal{T}_f$ é um espaço de escala baseado em *levelings*. A Figura 6.4 ilustra para uma árvore $\mathcal{T}_f$, a obtenção dos operadores $\psi_i(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^i)$, e das sucessivas operações de podas $\mathcal{T}_f^0 = \mathcal{T}_f$ e $\mathcal{T}_f^i = \text{Poda}(\mathcal{T}_f^{i-1})$, para todo $i \in \mathcal{I}$. Assim, pode-se usar os vértices de $\mathcal{T}_f^i$ que não estão

Figura 6.4: Um exemplo de computação do último fechamento por atributo onde são mostrados: (no topo) as árvore derivadas por podas sucessivas; (no centro) as família de primitivas $\{\psi_i(f) : \psi_i(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^i), i = 0, 1, \dots, 6\}$; (em baixo) os i -ésimos operadores residuais $\{r_0^-(f), r_1^-(f), \dots, r_{6-1}^-(f)\}$ extraídos da família de primitivas e o resultado do último fechamento por atributo $\sup\{r_i^-(f)\}$.

em $\mathcal{T}_f^{i+1}$ para calcular os valores residuais entre $\psi_i(f)$ e $\psi_{i+1}(f)$. Note que, $\forall p \in \mathcal{D}$,

$$[r_i^+(f)](p) = \text{level}(\text{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)) - \text{level}(\text{SC}(\mathcal{T}_f^{i+1}, p)) \vee 0,$$

$$[r_i^-(f)](p) = \text{level}(\text{SC}(\mathcal{T}_f^{i+1}, p)) - \text{level}(\text{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)) \vee 0.$$

Então, considere $\mathcal{N}r(i)$ o conjunto de vértices removidos da árvore $\mathcal{T}_f^i$ para construir a versão podada $\mathcal{T}_f^{i+1}$, ou seja, $\mathcal{N}r(i) = \mathcal{T}_f^i \setminus \mathcal{T}_f^{i+1}$. Dessa forma, como as árvores são derivadas por podas sucessivas, pode-se estabelecer à Proposição 6.15, que garante que os i -ésimos operadores residuais r_i podem ser computados paralelamente.

Proposição 6.15. *Se $i, j \in \mathcal{I}$ tal que $i \neq j$, então $\mathcal{N}r(i) \cap \mathcal{N}r(j) = \emptyset$.*

PROVA: Prova por contradição.

Suponha que $\mathcal{N}r(i) \cap \mathcal{N}r(j) \neq \emptyset$. Então, por definição de $\mathcal{N}r(i)$ e $\mathcal{N}r(j)$, segue que:

$$\mathcal{N}r(i) = \mathcal{T}_f^i \setminus \mathcal{T}_f^{i+1} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}r(j) = \mathcal{T}_f^j \setminus \mathcal{T}_f^{j+1}.$$

Como a sequência de árvores $(\mathcal{T}_f^0, \mathcal{T}_f^1, \dots, \mathcal{T}_f^{\mathcal{I}MAX})$ são obtidas por podas sucessivas de $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_f^0$, então $\mathcal{T}_f^{i+1} \subset \mathcal{T}_f^i$ e $\mathcal{T}_f^{j+1} \subset \mathcal{T}_f^j$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}r(i) &\subseteq \mathcal{T}_f^i \quad \text{e} \quad \mathcal{N}r(i) \cap \mathcal{T}_f^{i+1} = \emptyset \\ \mathcal{N}r(j) &\subseteq \mathcal{T}_f^j \quad \text{e} \quad \mathcal{N}r(j) \cap \mathcal{T}_f^{j+1} = \emptyset \end{aligned}$$

Portanto, sem perda de generalidade, suponha $i > j$, e como todas as árvores são derivadas por podas sucessivas, segue que $\mathcal{T}_f^i \subset \mathcal{T}_f^j$ e consequentemente $\mathcal{N}r(i) \subseteq \mathcal{T}_f^i$ e $\mathcal{N}r(i) \cap \mathcal{T}_f^j = \emptyset$, o que é uma contradição, pois $\mathcal{N}r(i) \cap \mathcal{N}r(j) \neq \emptyset$ e $\mathcal{N}r(j) \subseteq \mathcal{T}_f^j$. $\square$

Portanto, pode-se calcular os valores residuais positivos (respectivamente, negativos) de todos os *pixels* de um dado vértice $C_1 \in \mathcal{N}r(i)$ subtraindo o seu nível com o nível do primeiro vértice ancestral C_k de C_1 que não está presente em $\mathcal{N}r(i)$, isto é, $[level(C_1) - level(C_k) \vee 0]$. Mas é claro, se existirem vértices $C_2, C_3, \dots, C_{k-1}$ entre C_1 e C_k dentro de $\mathcal{N}r(i)$, ou seja, $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_{k-1} \subset C_k$ então pela Proposição 6.16 vale que: $[level(C_1) - level(C_k)] = [level(C_1) - level(C_2)] + \dots + [level(C_{k-1}) - level(C_k)]$.

Proposição 6.16. *As somas das diferenças consecutivas de uma sequência $(level(C_1), level(C_2), \dots, level(C_k))$ é dada pela diferença do primeiro com o último termo da sequência. Em outras palavras, $level(C_1) - level(C_k) = (\sum_{i=1}^{k-1} level(C_i) - level(C_{i+1}))$.*

PROVA: Prova por indução em k .

A base da indução é para $k = 2$ e assim: $level(C_1) - level(C_2) = (\sum_{i=1}^{2-1} level(C_i) - level(C_{i+1}))$.

Suponha por hipótese de indução (HI) que:

$$k > 2 \quad \text{e} \quad level(C_1) - level(C_k) = \sum_{i=1}^{k-1} level(C_i) - level(C_{i+1})$$

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} level(C_1) - level(C_{k+1}) &= (\sum_{i=1}^k level(C_i) - level(C_{i+1})) + (level(C_k) - level(C_{k+1})) \\ &= (level(C_1) - level(C_k)) + (level(C_k) - level(C_{k+1})) \quad (\text{por HI}) \\ &= level(C_1) - level(C_{k+1}) \end{aligned}$$

$\square$

Assim, pode-se derivar as seguintes recorrências para calcular os valores residuais presentes em cada vértice $C \in \mathcal{N}r(i)$, isto é:

$$r_{\mathcal{T}_f^i}^+(C) = \begin{cases} [level(C) - level(\text{Pai}(C)) \vee 0], & \text{se } \text{Pai}(C) \notin \mathcal{N}r(i), \\ [level(C) - level(\text{Pai}(C)) \vee 0] + r_{\mathcal{T}_f^i}^+(\text{Pai}(C)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.10)$$

$$r_{\mathcal{T}_f^i}^-(C) = \begin{cases} [level(\text{Pai}(C)) - level(C) \vee 0], & \text{se } \text{Pai}(C) \notin \mathcal{N}r(i), \\ [level(\text{Pai}(C)) - level(C) \vee 0] + r_{\mathcal{T}_f^i}^-(\text{Pai}(C)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.11)$$

e assim os i -ésimos resíduos $r_i^+(f)$ e $r_i^-(f)$ podem ser computados pelas Equações 6.10 e 6.11 usando

os menores componentes (ou formas) de $\mathcal{T}_f^i$ quando eles estão em $\mathcal{Nr}(i)$, isto é:

$$\forall p \in \mathcal{D}, [r_i^+(f)](p) = \begin{cases} r_{\mathcal{T}_f^i}^+(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)), & \text{se } \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p) \in \mathcal{Nr}(i), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\forall p \in \mathcal{D}, [r_i^-(f)](p) = \begin{cases} r_{\mathcal{T}_f^i}^-(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)), & \text{se } \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p) \in \mathcal{Nr}(i), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.13)$$

Consequentemente, isto leva ao Algoritmo 6.1 para computar o último *leveling* por meio de uma abordagem *top-down*, semelhante ao algoritmo proposto por Fabrizio e Marcotegui (2009) para computar a última abertura por atributo, isto é: (i) o resíduo do vértice pai é calculado e, (ii) propaga-se para os vértices filhos, (iii) para cada vértice filho calcula-se seu resíduo e o compara com o resíduo do vértice pai, e mantém atualizados os máximos resíduos em $\mathcal{R}_\theta$. Depois, (iv) cada vértice filho se torna pai e o processo se repete.

Algoritmo 6.1: Computação do último *leveling*.

```

/* função para computação do último leveling por vértice (Equação 6.10) */
1 computação-do-último-leveling-por-vértice(Vértice C)
2   se  $\exists i \in \mathcal{I}$  tal que  $C \in \mathcal{Nr}(i)$  então
3      $r_i^+(C) \leftarrow [\text{level}(C) - \text{level}(\text{Pai}(C)) \vee 0]$ 
4      $r_i^-(C) \leftarrow [\text{level}(\text{Pai}(C)) - \text{level}(C) \vee 0]$ 
5     se  $\text{Pai}(C) \in \mathcal{Nr}(i)$  então
6        $r_i^+(C) \leftarrow r_i^+(C) + r_i^+(\text{Pai}(C))$ 
7        $r_i^-(C) \leftarrow r_i^-(C) + r_i^-(\text{Pai}(C))$ 
8       // Manter atualizados os máximos resíduos
9        $\mathcal{R}_\theta^+(C) \leftarrow \mathcal{R}_\theta^+(\text{Pai}(C)) \vee r_i^+(C)$ 
10       $\mathcal{R}_\theta^-(C) \leftarrow \mathcal{R}_\theta^-(\text{Pai}(C)) \vee r_i^-(C)$ 
11   para cada  $S \in \text{Filhos}(C)$  faça
12     computação-do-último-leveling-por-vértice(S)

/* função para computação do último leveling */
1 computação-do-último-leveling-por-árvore(Árvore  $\mathcal{T}_f$ )
2   para cada  $C \in \text{Filhos}(\text{Raiz}(\mathcal{T}_f))$  faça
3     computação-do-último-leveling-por-vértice(C)
4   para cada  $p \in \mathcal{D}$  faça
5      $[\mathcal{R}_\theta(f)](p) \leftarrow [\mathcal{R}_\theta^+(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p))](p) \vee [\mathcal{R}_\theta^-(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f, p))](p)$ 
6   retorne  $\mathcal{R}_\theta(f)$ 

/* função principal para computar um último leveling */
1 computação-do-último-leveling(Imagem f)
2    $\mathcal{T}_f \leftarrow \text{construa-a-árvore}(f)$ 
3   retorne computação-do-último-leveling-por-árvore( $\mathcal{T}_f$ )

```

O Algoritmo 6.1 requer uma árvore (*max-tree*, *min-tree* ou de formas) de entrada. Então, como apresentado no Capítulo 4, esta árvore pode ser construída por algoritmos baseados em *union-find* cuja complexidade computacional é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}| \log(|\mathcal{D}|))$. Uma vez que a árvore é construída, a função *computação-do-último-leveling-por-árvore* do Algoritmo 6.1 pode ser executada, iniciando sua computação da raiz para folhas da árvore (ver linhas 2 e 3). Logo, é executada a função *computação-do-último-leveling-por-vértice* para cada vértice C da árvore onde é feita a computação dos resíduos no vértice (ver Equação 6.10). Nesta função, é feito um teste na linha 2 para saber se o vértice C está em $\mathcal{Nr}(i)$ e este teste é sempre verdadeiro para todos os pontos de podas que resultam em uma primitiva presente na família de primitivas (e pode ser feito em tempo constante), como é discutido no Capítulo 7. Então, quando o teste da linha 2

é verdadeiro são calculadas (entre as linhas 3 a 7) as Equações 6.10 e Equação 6.11, e nas linhas 8 e 9 são mantidos os máximos resíduos atualizados em $\mathcal{R}_\theta^+$ e $\mathcal{R}_\theta^-$. Depois, entre as linhas 10 e 11, é propagada a computação para os filhos do vértice C e o processo se repete até as folhas da árvore. Esta função *computação-do-último-leveling-por-vértice* visita cada vértice somente uma vez e o número de vértice no pior caso é o número de *pixels* da imagem, portanto sua complexidade computacional é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}|)$. Por fim, é reconstruída (nas linhas 4 e 5 da função *computação-do-último-leveling-por-árvore*) a saída do último *leveling*. Portanto, como cada vértice é visitado somente uma vez e todas as operações são feitas em tempo constante, então concluímos que a complexidade computacional para construção do último *leveling* (construção da árvore e do Algoritmo 6.1) é $\mathcal{O}(|\mathcal{D}| \log(|\mathcal{D}|))$.

Na Figura 6.5 é apresentado um exemplo de entrada e saída do Algoritmo 6.1, onde do lado esquerdo está a árvore de entrada *min-tree* (e também do lado esquerdo, a imagem que produziu a árvore). Note que, a árvore de entrada (do lado esquerdo) está com os respectivos níveis de cinza associados aos vértices, no lado direito está a árvore com os resíduos r_i^- associados aos vértices (calculados pela Equação 6.10). Note ainda que, a família de primitivas utilizada para construir este último *leveling* está apresentada na Figura 6.4). Além do mais, se um vértice C está colorido em verde, então o teste $\text{Pai}(C) \notin \mathcal{Nr}(i)$ é verdadeiro e a aresta que conecta C ao vértice $\text{Pai}(C)$ é um ponto de poda gerando assim uma primitiva apresentada na Figura 6.4. O resultado final do Algoritmo 6.1 é apresentado na parte inferior do lado direito da Figura 6.5.

Figura 6.5: Exemplo de computação do Algoritmo 6.1 utilizando a árvore da Figura 6.4 como entrada para o algoritmo. Note que, do lado esquerdo está a árvore de entrada com os respectivos níveis de cinza associados aos vértice e do lado direito a árvore com os resíduos associados aos vértices (calculados pela Equação 6.10). Observe também que, se um vértice C está colorido em verde então o teste $\text{Pai}(C) \notin \mathcal{Nr}(i)$ é verdadeiro.

6.4 Informações associadas aos últimos *levelings*

Os últimos *levelings* são operadores residuais definidos a partir de uma espaço de escala com base em *levelings*. Na computação de um último *leveling* analisa-se a evolução do valor residual extraído de duas primitivas consecutivas do espaço de escala e mantém-se os máximos valores residuais (positivo e negativo) para cada *pixel*. Nesta computação, pode-se associar para cada *pixel* $p \in \mathcal{D}$, o máximo valor residual a outras informações, na qual podem ser de grande utilidade para realizar uma análise do processo de extração de resíduos ou até mesmo para guiar ou supervisionar o processo de extração de resíduos. Vejamos alguns exemplos de funções associadas:

- A função $q_{\mathcal{I}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{I}$, denominada função associada ao índice, que leva um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ ao índice $i \in \mathcal{I}$ do i -ésimo resíduo r_i que produziu o máximo resíduo não nulo contendo p em $\mathcal{R}_{\theta}(f)$ (mais precisamente, $q(p)$ é o índice $i + 1$, assim a função é diferente de zero para r_0 (Beucher, 2007)), isto é,

$$\forall p \in \mathcal{D}, q_{\mathcal{I}}(p) = \begin{cases} q_{\mathcal{I}}^+(p) & , \text{ if } [\mathcal{R}_{\theta}^+(f)](p) > [\mathcal{R}_{\theta}^-(f)](p), \\ q_{\mathcal{I}}^-(p) & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (6.14)$$

onde $q_{\mathcal{I}}^+(p) = \max\{i + 1 : [r_i^+(f)](p) > 0 \text{ e } [r_i^+(f)](p) = [\mathcal{R}_{\theta}^+(f)](p)\}$ e $q_{\mathcal{I}}^-(p) = \max\{i + 1 : [r_i^-(f)](p) > 0 \text{ e } [r_i^-(f)](p) = [\mathcal{R}_{\theta}^-(f)](p)\}$.

- A função $q_{\kappa} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, denominada função associada ao atributo, que leva um *pixel* $p \in \mathcal{D}$ ao atributo $\kappa(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p))$ extraído da CC que deu origem ao i -ésimo resíduo r_i que produziu o máximo resíduo não nulo contendo p em $\mathcal{R}_{\theta}(f)$, ou seja,

$$\forall p \in \mathcal{D}, q_{\kappa}(p) = \begin{cases} q_{\kappa}^+(p) & , \text{ if } [\mathcal{R}_{\theta}^+(f)](p) > [\mathcal{R}_{\theta}^-(f)](p), \\ q_{\kappa}^-(p) & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (6.15)$$

onde $q_{\kappa}^+(p) = \max\{\kappa(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)) : [r_i^+(f)](p) > 0 \text{ e } [r_i^+(f)](p) = [\mathcal{R}_{\theta}^+(f)](p)\}$ e $q_{\kappa}^-(p) = \max\{\kappa(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)) : [r_i^-(f)](p) > 0 \text{ e } [r_i^-(f)](p) = [\mathcal{R}_{\theta}^-(f)](p)\}$.

As computações dessas funções associadas podem ser realizadas modificando o Algoritmo 6.1 nos pontos onde são calculados os resíduos r_i^+ e r_i^- para incluir, logo após os cálculos dos resíduos r_i^+ e r_i^- , a implementação das funções associadas, como pode-se observar a partir das linhas em azul do Algoritmo 6.2. Assim, no teste da linha 5, da função *computação-do-último-leveling-por-vértice*, é verificado se o pai do vértice C pertence a mesma primitiva que C e, se for verdadeiro, é feita a soma da diferença com o vértice pai, neste caso (ver linhas entre 8 e 11), a primitiva que produziram os máximos resíduos para os *pixels* de C é a mesma do vértice $\text{Pai}(C)$. Mas, se o teste da linha 5 for falso, então os resíduos r_i^+ e r_i^- são de uma nova primitiva e, neste caso, é verificado entre as linhas 13 e 24 se a nova primitiva produziu máximos resíduos e assim atualiza o índice e o atributo que geraram máximos resíduos. Por fim, é reconstruída (entre as linhas 4 e 13 da função *computação-do-último-leveling-por-árvore*) a saída do último *leveling* e as imagens associadas aos índices e os atributos que produziram os máximos resíduos não nulos. Na Figura 7.1 é apresentado um exemplo de entrada e saída do Algoritmo 6.2, onde da esquerda para direita está a imagem de entrada e a árvore *min-tree* com os respectivos níveis de cinza associados aos vértices, a imagem do último *levelings* e a árvore *min-tree* com os máximos resíduos associados aos vértices, a imagem

rotulada dos índices que produziram os máximos resíduos e a árvore *min-tree* com os índices associados aos vértices, a imagem do atributo (altitude) obtida a partir dos vértices que produziram os máximos resíduos e a árvore *min-tree* com os valores da altitude associadas aos vértices.

Algoritmo 6.2: Computação do último *leveling* com informações associadas.

```

/* função para computação do último leveling por vértice (Equação 6.10) e das funções associadas */
1 computação-do-último-leveling-por-vértice(Vértice C)
2   se  $\exists i \in \mathcal{I}$  tal que  $C \in \mathcal{Nr}(i)$  então
3      $r_i^+(C) \leftarrow [\text{level}(C) - \text{level}(\text{Pai}(C)) \vee 0]$ 
4      $r_i^-(C) \leftarrow [\text{level}(\text{Pai}(C)) - \text{level}(C) \vee 0]$ 
5     se  $\text{Pai}(C) \in \mathcal{Nr}(i)$  então
6        $r_i^+(C) \leftarrow r_i^+(C) + r_i^+(\text{Pai}(C))$ 
7        $r_i^-(C) \leftarrow r_i^-(C) + r_i^-(\text{Pai}(C))$ 
8       // Atualização das funções associadas
9        $q_{\mathcal{I}}^+(C) \leftarrow q_{\mathcal{I}}^+(\text{Pai}(C))$ 
10       $q_{\mathcal{I}}^-(C) \leftarrow q_{\mathcal{I}}^-(\text{Pai}(C))$ 
11       $q_{\kappa}^+(C) \leftarrow q_{\kappa}^+(\text{Pai}(C))$ 
12       $q_{\kappa}^-(C) \leftarrow q_{\kappa}^-(\text{Pai}(C))$ 
13   senão
14     // Computação de  $q_{\mathcal{I}}^+$ ,  $q_{\mathcal{I}}^-$ ,  $q_{\kappa}^+$  e  $q_{\kappa}^-$ 
15     se  $r^+(C) > \mathcal{R}^+(\text{Pai}(C))$  então
16        $q_{\mathcal{I}}^+(C) \leftarrow i + 1$ 
17        $q_{\kappa}^+(C) \leftarrow \kappa(C)$  // A  $i$ -ésima primitiva gerou máximos resíduos positivos
18     senão
19        $q_{\mathcal{I}}^+(C) \leftarrow q_{\mathcal{I}}^+(\text{Pai}(C))$ 
20        $q_{\kappa}^+(C) \leftarrow q_{\kappa}^+(\text{Pai}(C))$  // Atualização das funções associadas
21     se  $r_i^-(C) > \mathcal{R}^-(C)$  então
22        $q_{\mathcal{I}}^-(C) \leftarrow i + 1$ 
23        $q_{\kappa}^-(C) \leftarrow \kappa(C)$  // A  $i$ -ésima primitiva gerou máximos resíduos negativos
24     senão
25        $q_{\mathcal{I}}^-(C) \leftarrow q_{\mathcal{I}}^-(\text{Pai}(C))$ 
26        $q_{\kappa}^-(C) \leftarrow q_{\kappa}^-(\text{Pai}(C))$  // Atualização das funções associadas
27   // Manter atualizados os máximos resíduos
28    $\mathcal{R}_{\theta}^+(C) \leftarrow \mathcal{R}_{\theta}^+(\text{Pai}(C)) \vee r_i^+(C)$ 
29    $\mathcal{R}_{\theta}^-(C) \leftarrow \mathcal{R}_{\theta}^-(\text{Pai}(C)) \vee r_i^-(C)$ 
30   para cada  $S \in \text{Filhos}(C)$  faça
31     computação-do-último-leveling-por-vértice(S)
32
33 /* função para computação do último leveling e das funções associadas */
34 computação-do-último-leveling-por-árvore(Árvore  $\mathcal{T}_f$ )
35   para cada  $C \in \text{Filhos}(\text{Raiz}(\mathcal{T}_f))$  faça
36     computação-do-último-leveling-por-vértice(C)
37   para cada  $p \in \mathcal{D}$  faça
38      $[\mathcal{R}_{\theta}(f)](p) \leftarrow [\mathcal{R}_{\theta}^+(SC(\mathcal{T}_f, p))](p) \vee [\mathcal{R}_{\theta}^-(SC(\mathcal{T}_f, p))](p)$ 
39     se  $q_{\mathcal{I}}^+(SC(\mathcal{T}_f, p)) > q_{\mathcal{I}}^-(SC(\mathcal{T}_f, p))$  então
40        $q_{\mathcal{I}}(p) \leftarrow q_{\mathcal{I}}^+(SC(\mathcal{T}_f, p))$ 
41     senão
42        $q_{\mathcal{I}}(p) \leftarrow q_{\mathcal{I}}^-(SC(\mathcal{T}_f, p))$ 
43     se  $q_{\kappa}^+(SC(\mathcal{T}_f, p)) > q_{\kappa}^-(SC(\mathcal{T}_f, p))$  então
44        $q_{\kappa}(p) \leftarrow q_{\kappa}^+(SC(\mathcal{T}_f, p))$ 
45     senão
46        $q_{\kappa}(p) \leftarrow q_{\kappa}^-(SC(\mathcal{T}_f, p))$ 
47   retorne  $(\mathcal{R}_{\theta}(f), q_{\mathcal{I}}, q_{\kappa})$ 
48
49 /* função principal para computar um último leveling */
50 computação-do-último-leveling(Imagem f)
51    $\mathcal{T}_f \leftarrow \text{construa-a-árvore}(f)$ 
52    $(\mathcal{R}_{\theta}(f), q_{\mathcal{I}}, q_{\kappa}) \leftarrow \text{computação-do-último-leveling-por-árvore}(\mathcal{T}_f)$ 
53   retorne  $(\mathcal{R}_{\theta}(f), q_{\mathcal{I}}, q_{\kappa})$ 

```

Na Figura 6.7 são apresentados exemplos de operadores últimos *levelings* onde a família de primitivas são: aberturas por atributo de altura, fechamento por atributo de altura e últimos filtros

por grãos utilizando atributo de altura.

Figura 6.6: Exemplo de computação de último leveling com funções associadas utilizando uma árvore min-tree.

Figura 6.7: Exemplos de aplicações de últimos levelings: (da esquerda para direita) imagem de entrada, UAO, UAC e UGF.

Estratégias para construções de últimos *levelings*

Resumo do capítulo

Neste capítulo são apresentadas estratégias para construções de últimos levelings. Em particular, são apresentadas estratégias para escolha de famílias de primitivas. Dessa forma, um último leveling é o supremo dos i -ésimos resíduos r_i extraídos ao longo da família de primitiva escolhida. Neste processo de extração dos i -ésimos resíduos r_i podem existir resíduos extraídos de regiões indesejáveis. Assim, são apresentados neste capítulo estratégias para filtrar resíduos r_i indesejáveis extraídos ao longo da família de primitivas, e assim o último leveling é definido como supremo dos resíduos r_i desejáveis.

7.1 Estratégias para escolher a família de primitivas

A escolha da família de primitivas leva em consideração hipóteses sobre as regiões que se pretende extrair os valores residuais de uma imagem e sobre essas hipóteses, constrói-se um espaço de escala contendo as primitivas mais significativas para construção do último *leveling*. Neste sentido, um ponto de partida para a escolha da família de primitivas é a questão da polaridade dos objetos de interesses, ou seja, se os objetos são claros ou escuros em relação ao seu *background*. Neste caso, as primitivas podem ser obtidas por reconstruções inferiores ou superiores o que fazem produzirem resíduos positivos $\mathcal{R}^+$ (objetos claros) ou negativos $\mathcal{R}^-$ (objetos escuros). Mas, se os objetos de interesses estiverem em ambas polaridades então as primitivas podem ser obtidas por reconstruções de formas ou alternativamente, pode-se considerar simultaneamente duas famílias de primitivas obtidas por reconstruções inferiores e superiores e depois combinar seus resultados.

O resultado de um operador último *leveling* é diretamente influenciado pela escolha da família de primitivas as quais são obtidas, como já mencionado, por reconstruções de podas sucessivas de uma árvore. Embora no Algoritmo 6.1, aparece somente o conjunto $\mathcal{Nr}(i)$ que contém vértices obtidos pela diferenças entre duas podas consecutivas. Assim, para cada índice $i \in \mathcal{I}$ de uma família de primitivas, precisa-se determinar o conjunto $\mathcal{Nr}(i)$. Esta tarefa é simples, mas depende das primitivas incluídas na família de primitivas.

A ideia para determinar a família de primitivas (ver Algoritmo 7.1) consiste em fazer marcações dos vértices C da árvore, por meio de um critério $\Gamma : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \{\text{verdadeiro, falso}\}$, de tal forma que a remoção da aresta que conecta um vértice C ao vértice $\text{Pai}(C)$ resulta na árvore podada. Assim, estas marcações em uma árvore $\mathcal{T}_f$ dão origem as árvores $(\mathcal{T}_f^0, \mathcal{T}_f^1, \dots, \mathcal{T}_f^{\mathcal{I}^{MAX}})$ obtidas por

podas sucessivas e conseqüentemente os conjuntos $\mathcal{N}r(i)$ de vértices removidos entre duas árvores consecutivas. Estas marcações podem ser obtidas (e consecutivamente, cada árvore $\mathcal{T}_f^i$ e seu conjunto $\mathcal{N}r(i)$), por exemplo, através de um percurso em pós-ordem em $\mathcal{T}_f$. Mas é claro, podem ser usados outros tipos de ordenação para visitar os vértices de $\mathcal{T}_f$, entretanto isto não modifica o resultado dos últimos *levelings* graças à Proposição 6.15. Na Figura 7.1 são mostrados dois exemplos de construção da família de primitivas usando o mesmo critério Γ , um pelo Algoritmo 7.1 onde as primitivas são produzidas de acordo com o percurso em pós-ordem e a outra família de primitivas estão ordenadas pelo atributo de altura.

Figura 7.1: Exemplo de computação de um último leveling negativo onde é evidenciado que a ordem das marcações nos vértices da árvore não modifica o resultado final dos últimos levelings.

Por exemplo, o conjunto com maior número de primitivas que podem ser derivadas de uma árvore $\mathcal{T}_f$ é dado pelo seguinte critério: um vértice C de uma árvore $\mathcal{T}_f$ satisfaz a condição do

Algoritmo 7.1: Computação básica de uma estratégia de escolha da família de primitivas.

```

1  escolha-da-familia-de-primitivas(Árvore  $\mathcal{T}_f$ )
2   $i \leftarrow 0$ 
3   $\mathcal{T}_f^0 = \mathcal{T}_f$ 
4  para cada vértice  $C$  de um percurso em pós-ordem em  $\mathcal{T}_f$  faça
5      se  $\Gamma(C)$  é verdadeiro então
6           $\mathcal{N}r(i)$  é a subárvore de  $\mathcal{T}_i$  enraizada em  $C$ 
7           $\mathcal{T}_f^{i+1} \leftarrow \mathcal{T}_f^i \setminus \mathcal{N}r(i)$ 
8           $i \leftarrow i + 1$ 

```

critério Γ se, e somente se, C não é a raiz de $\mathcal{T}_f$, ou seja,

$$\Gamma(C) \text{ é verdadeiro} \iff C \neq \text{Raiz}(\mathcal{T}_f).$$

Assim, pode-se extrair todas as possíveis árvores $(\mathcal{T}_f^0, \mathcal{T}_f^1, \dots, \mathcal{T}_f^{\mathcal{I}_{MAX}})$ de $\mathcal{T}_f$ e consequentemente a família de primitivas $(\psi_0(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^0), \psi_1(f) = \text{Rec}(\mathcal{T}_f^1), \dots, \psi_f^{\mathcal{I}_{MAX}} = \text{Rec}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}_{MAX}}))$ e então extrair os i -ésimos resíduos positivos e negativos. Mas isso não parece ser uma boa ideia se o propósito é extrair o contraste de uma imagem, pois os valores residuais gerados entre duas primitivas consecutivas são próximos de zero. Isso ocorre por causa da grande quantidade de níveis de cinza presente em uma imagem e também pela hierarquia dos conjuntos de níveis. Por outro lado, se o propósito envolve reconhecimento de objetos pode ser uma boa ideia usar todas as primitivas possíveis. Isto leva às seções seguintes onde são definidas algumas estratégias para construir famílias de primitivas que podem gerar valores residuais mais significativos para os últimos *levelings*.

7.1.1 Primitivas baseadas em atributos

Como apresentado no Capítulo 5, filtrar uma imagem usando um atributo pode ser feito simplesmente podando os vértices da árvore que satisfaz um certo critério, como por exemplo, os vértices cujo o valor do atributo é menor que um dado limiar. Assim, muitos diferentes tipos de informações podem ser armazenadas em cada vértice da árvore. Estas informações são chamadas de atributos, mais precisamente, um atributo é uma função κ que representa uma informação armazenada no vértice da árvore como: área, volume, diâmetro, circularidade, entre outros. Então, reconstruções de árvores podadas com atributos crescentes são *levelings*. Assim, um conjunto crescente de limiares $(t_1, t_2, \dots, t_{\mathcal{I}_{MAX}})$ com $t_1 < t_2 < \dots < t_{\mathcal{I}_{MAX}}$ dá origem a um espaço de escala baseado em *levelings*.

Então, famílias de primitivas baseadas em aberturas por atributos, fechamentos por atributos e filtros por grãos podem ser determinadas de um conjunto de limiares derivados da própria árvore $\mathcal{T}_f$, isto é, $T_\kappa = \{\kappa(C) : C \text{ é um vértice de } \mathcal{T}_f \text{ e } \kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}\}$. Então, a partir do conjunto de limiares T_κ pode-se estabelecer o critério Γ para todo vértice C de $\mathcal{T}_f$ seguinte forma:

$$\Gamma(C) \text{ é verdadeiro} \iff \exists t_j \in T_\kappa \text{ satisfazendo } \kappa(C) = t_j \text{ e } \kappa(\text{Pai}(C)) > t_j.$$

Note que, quando $\Gamma(C)$ é verdadeiro, então C está em $\mathcal{T}_f^{j-1}$ mas não está em $\mathcal{T}_f^j$, pois os vértices da j -ésima árvore podada tem atributos maiores que t_j (ver Seção 5.3.1). Logo, $C \in \mathcal{N}r(j-1)$. Note também que, para este conjunto de limiares T_κ , o critério: $\Gamma(C)$ é verdadeiro, é equivalente a,

$\kappa(C) \neq \kappa(\text{Pai}(C))$ e $\kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}$ pois,

$\Gamma(C)$ é verdadeiro

$$\iff \exists t_j \in T_\kappa \text{ satisfazendo } \kappa(C) = t_j \text{ e } \kappa(\text{Pai}(C)) > t_j$$

$$\iff \kappa(C) \neq \kappa(\text{Pai}(C)) \text{ e } \kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}.$$

Os valores residuais de um último *leveling* negativo (respectivamente, positivo) $\mathcal{R}_\theta^-$ (respectivamente, $\mathcal{R}_\theta^+$) são as maiores diferenças entre duas primitivas consecutivas de uma família de primitivas. Neste sentido, na Figura 7.2 é mostrado um exemplo com duas aplicações de últimos *levelings* negativos $\mathcal{R}^-$ em uma dada imagem $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ onde se analisa a evolução do valor residual para um dado *pixel* ao longo da computação de $\mathcal{R}^-(f)$, usando duas famílias de primitivas diferentes: (1) fechamento por atributo de área e (2) fechamento por atributo de altura do retângulo envolvente. Observe que, o contraste de um objeto é dividido em diversas transições e a maior destas transições é o valor residual obtido por $\mathcal{R}^-(f)$, que inevitavelmente é menor do que o verdadeiro contraste existente entre o objeto e o seu plano de fundo. Assim, as famílias de primitivas por atributos de área e volume tendem a simplificar a imagem muito lentamente, uma vez que existem muitas primitivas distintas que podem ser extraídas com estes atributos. Por um outro lado, este efeito pode ser reduzido utilizando tipos de atributos que resultam em um mesmo valor para diferentes vértices, como por exemplo: altura, largura e diâmetro do retângulo envolvente. Mesmo assim, o contraste real ainda é subestimado.

Figura 7.2: Análise da evolução residual para o pixel marcado de vermelho da imagem de entrada.

Com base nestas considerações, Marcotegui *et al.* (2011), propôs uma solução chamada transição gradual que precisa de um limiar para ajustar o contraste. Neste sentido, é proposta uma segunda solução baseada em valores de extinção que não faz uso de limiares.

- *Primitivas baseadas em transições graduais*

Como mostrado anteriormente, as famílias de aberturas por atributos, fechamentos por atributos e filtros por grãos podem ser determinadas a partir de um conjunto crescente de limiares $(t_1, t_2, \dots, t_{\mathcal{I}_{MAX}})$ para um atributo crescente κ . Assim, um vértice $C \in \mathcal{Nr}(i) \subseteq \mathcal{T}_i$ satisfaz as

condições do critério Γ , se

$$\begin{aligned} \Gamma(C) \text{ é verdadeiro} \\ \iff \exists t_j \in T_\kappa \text{ satisfazendo } \kappa(C) = t_j \text{ e } \kappa(\text{Pai}(C)) > t_j \\ \iff \kappa(C) \neq \kappa(\text{Pai}(C)) \text{ e } \kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}} \\ \iff \kappa(\text{Pai}(C)) - \kappa(C) > 0 \text{ e } \kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}. \end{aligned}$$

Então, uma maneira de reduzir o desconforto de subestimar o contraste é selecionar os vértices (para serem as referências das podas) que tenham uma grande variação Δ do valor do atributo em relação ao seu vértice pai, isto é,

$$\Gamma(C) \text{ é verdadeiro} \iff \kappa(\text{Pai}(C)) - \kappa(C) > \Delta \text{ e } \kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}.$$

Assim, quando $\Delta = 0$, tem-se as tradicionais famílias de primitivas utilizando os limiares do conjunto T_κ ; $\Delta = 1$ é acumulada uma série de resíduos não nulos; $\Delta = 2$ é acumulada uma série de resíduos separados por pelo menos dois resíduos não nulos e assim por diante. Assim, inclui-se em $\mathcal{N}r(i)$, vértices com pequenas variações Δ nos valores dos seus atributos.

O inconveniente dessa abordagem é encontrar o valor para Δ , uma vez que esta informação é global para todos os vértices da árvore e muitas vezes não é possível estimar o real contraste para todas as regiões da imagem como pode ser observado na Figura 7.3.

Figura 7.3: Análise da evolução residual para o pixel marcado de vermelho da imagem de entrada.

- *Primitivas baseadas em valores de extinção*

Uma outra maneira de reduzir o desconforto de subestimar o contraste dos objetos é por meio do uso de valores de extinção (Grimaud, 1992; Vachier e Meyer, 1995). Os valores de extinções são medidas de persistências extraídas das extremas (mínimas ou máximas) regionais. Em poucas palavras, o valor de extinção de uma extrema regional $\mathcal{M}$ para um atributo crescente κ é o valor máximo de um filtro por atributos, tal que esta extrema regional ainda exista após a filtragem. Assim, são marcados somente vértices nos quais os valores dos seus atributos correspondem a valores de extinções para a extrema regional presente no vértice (Grimaud, 1992; Vachier e Meyer, 1995).

Este procedimento pode ser computado por um algoritmo com base em árvore de componentes (Silva e de Alencar Lotufo, 2011) e adaptado no Algoritmo 7.2 para selecionar vértices baseada no valor de extinção, da seguinte forma: para cada vértice folha L da árvore $\mathcal{T}_f$ (isto é, regional extrema), um caminho em direção ao vértice raiz é iniciado (entre as linhas 2 e 3). Quando um vértice N_L com mais de um filho aparece (ou seja, uma bifurcação), no caminho, uma verificação é feita em cada filho C_L de N_L . Se o vértice C_L tem um irmão $C \in \text{Filhos}(N_L)$ tal que $\kappa(C) > \kappa(C_L)$, tem-se que o valor do atributo do vértice C_L no caminho desta folha é definido como o valor de extinção para folha L (entre as linhas 4 a 6). Neste caso,

$$\Gamma(C) \text{ é verdadeiro} \iff C \in \text{Filhos}(N_L) \text{ e } \kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}$$

onde $t_{\mathcal{I}_{MAX}}$ é o valor máximo para um atributo da família de primitiva, em seguida, a próxima folha é analisada. Caso contrário, continua-se no caminho até encontrar a próxima bifurcação. Finalmente, se o caminho atingir a raiz, então o valor de extinção para folha L é o valor do primeiro vértice antes de chegar com maior valor de atributo.

Algoritmo 7.2: Seleção de vértices baseadas em valores de extinção para as árvores *max-tree*, *min-tree* ou de formas.

```

1 seleção-de-vértices-baseada-valores-de-extinção (Árvore  $\mathcal{T}_f$ , Parâmetro  $t_{\mathcal{I}_{MAX}}$ )
2   para cada vértice  $L \in \text{Folhas}(\mathcal{T}_f)$  faça
3     para cada vértice  $N_L$  do caminho ( $C_1 = \text{Pai}(L), C_2, \dots, C_n = \text{Raiz}(\mathcal{T}_f)$ ) faça
4       se  $|\text{Filhos}(N_L)| > 1$  então
5         para cada vértice  $C_L \in \text{Filhos}(N_L)$  faça
6           se  $C \in \text{Filhos}(N_L)$  tal que  $\kappa(C) > \kappa(C_L)$  então
7             //  $\kappa(C)$  é o valor de extinção da folha  $L$ 
               $\forall C \in \text{Filhos}(N_L)$  tal que  $\kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}$  define-se:  $\Gamma(C) \leftarrow$  é verdadeiro
1 seleção-de-vértices-baseada-transições-graduais (Árvore  $\mathcal{T}_f$ , Parâmetro  $\Delta$ , Parâmetro  $t_{\mathcal{I}_{MAX}}$ )
2   para cada vértice  $C$  de  $\mathcal{T}_f$  faça
3     se  $\kappa(\text{Pai}(C)) - \kappa(C) > \Delta$  e  $\kappa(C) \leq t_{\mathcal{I}_{MAX}}$  então
4        $\Gamma(C) \leftarrow$  é verdadeiro

```

Note que os vértices que correspondem as pequenas transições graduais de níveis de cinza ao longo da borda não são selecionados. Na Figura 7.4 é rerepresentada a evolução residual usando duas famílias de primitivas baseada em valores de extinções.

Na Figura 7.5 são apresentados exemplos de entrada e saída para as seleções dos vértices a serem podados por estratégias de escolha de famílias de primitivas com base em (1) atributo de área, (2) transições graduais com parâmetro $\Delta = 90$ para o atributo de área e (3) valores de extinção usando o atributo de área.

7.1.2 Primitivas baseadas em imagens marcadoras

Como apresentado na Seção 5.3.2, um espaço de escala pode ser derivado a partir de uma família de imagens marcadoras $(g_1, g_2, \dots, g_{\mathcal{I}_{MAX}})$. Dessa forma, conforme apresentado na Seção 5.3.2, deriva-se da versão estendida de uma árvore $\mathcal{T}_f$ uma sequência de árvores podadas sucessivamente $(\mathcal{T}_f^0, \mathcal{T}_f^1, \dots, \mathcal{T}_f^{\mathcal{I}_{MAX}})$ por meio da família de marcadores. Assim, um vértice C da versão estendida

Figura 7.4: Análise da evolução residual para o pixel marcado de vermelho da imagem de entrada.

Figura 7.5: Exemplos de entrada e saída dos processamentos baseados em transições graduais e valores de extinção.

de $\mathcal{T}_f$ é selecionado pelo critério Γ se,

$$\Gamma(C) \text{ é verdadeiro} \iff \exists j \text{ tal que o vértice } C \text{ foi removido e } \text{Pai}(C) \text{ foi preservado na operação de poda que produziu } \mathcal{T}_f^j.$$

O uso de família de primitivas construídas usando imagens marcadoras pode prover mais liberdade ao operador, pois é possível adicionar informações a priori na construção da família de marcadores. Mas o uso dessas primitivas aumenta substancialmente o custo computacional dos últimos *levelings*. Por este motivo, sempre recomendamos o uso de primitivas baseadas em atributos e, se houver informações à priori, então pode-se aplicá-las através de estratégias de filtragens dos valores residuais indesejáveis (ver Seção 7.2).

7.2 Estratégias para filtrar resíduos indesejáveis

Os últimos *levelings* são operadores definidos como o supremo de resíduos consecutivos extraídos ao longo de uma família de primitivas. Durante este processo de extração residual é comum a extração de valores residuais de regiões indesejáveis da imagem. Por conta disso, muitas vezes esses valores residuais indesejáveis se sobrepõem aos valores residuais extraídos de regiões desejáveis, devido a própria concepção dos últimos *levelings* que consideram sempre os máximos valores residuais extraídos ao longo da família de primitivas. Esse problema de concepção dos últimos *levelings*, é chamado por Retornaz (2007) como miopia, que é normalmente produzido por estruturas aninhadas ou por transições graduais. Nesta direção, Hernandez e Marcotegui (2011) propuseram uma solução para este problema usando informação de formas no processo de extração residual, mas o inconveniente dessa abordagem é que os valores residuais podem ser modificados devido uma função de similaridade que multiplica com os valores residuais e com isso as propriedade dos últimos *levelings* acabam sendo anuladas.

Por outro lado, nesta tese propõe-se preservar os valores residuais extraídos ao longo da família de primitivas e informações sobre regiões indesejáveis são adicionadas por meio de um processo de filtragem. Assim, o resultado do último *leveling* é melhorado quando se filtram os resíduos r_i extraídos de regiões indesejáveis, como pode ser observado na Figura 7.6, a qual exemplifica o cálculo do último *leveling* somente dos i -ésimos resíduos r_i que satisfazem um critério de filtragem $\Omega : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \{\text{verdadeiro, falso}\}$.

Figura 7.6: Esquema para filtrar os i -ésimos resíduos r_i extraídos de regiões indesejáveis.

Este procedimento de filtragem pode ser implementado de diversas maneiras, mas todas elas partem do mesmo princípio. Para decidir se um resíduo $r_i^+(f)$ (respectivamente, $r_i^-(f)$) é filtrado ou não filtrado, basta verificar se algum vértice $C \in \mathcal{N}r(i)$ satisfaz o critério de filtragem e assim os i -ésimos resíduos $r_i^{\Omega+}(f)$ e $r_i^{\Omega-}(f)$ podem ser redefinidos com o critério de filtragem Ω por

$$[r_i^{\Omega+}(f)](p) = \begin{cases} r_{\mathcal{T}_f^i}^+(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)), & \text{se } \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p) \in \mathcal{N}r(i) \text{ e } \exists C \in \mathcal{N}r(i), \Omega(C) \text{ é falso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$[r_i^{\Omega-}(f)](p) = \begin{cases} r_{\mathcal{T}_f^i}^-(\mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p)), & \text{se } \mathcal{SC}(\mathcal{T}_f^i, p) \in \mathcal{Nr}(i) \text{ e } \exists C \in \mathcal{Nr}(i), \Omega(C) \text{ é falso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (7.2)$$

e conseqüentemente, os últimos *levelings* com critério de filtragem Ω podem ser redefinidos como

$$\mathcal{R}_\Omega^+(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i^{\Omega+}(f)\}, \quad \mathcal{R}_\Omega^-(f) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i^{\Omega-}(f)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_\Omega(f) = \mathcal{R}_\Omega^+(f) \vee \mathcal{R}_\Omega^-(f). \quad (7.3)$$

A seguir, são apresentadas duas estratégias de filtragens de resíduos indesejáveis. Uma com base em um vetor de atributos (Urbach *et al.*, 2007, 2005) similar ao trabalho de Hernandez e Marcotegui (2011) e a outra baseada em regiões estáveis (Matas *et al.*, 2004).

7.2.1 Filtragem com base em vetor de atributos

O reconhecimento de formas é um dos problemas fundamentais na área de análise de imagens e diversas abordagens têm sido propostas ao longo dos últimos anos. Um dos subproblemas de reconhecimento de formas, denominado problema de decisão (Veltkamp e Hagedoorn, 2000), consiste em comparar dois padrões A e B com uma medida de similaridade d por meio de um dado limiar α , ou seja, decidir se similaridade é maior do que o limiar. No contexto desta tese, os padrões são vetores de atributos extraídos dos vértices das árvores ou dos CCs dos conjunto de níveis (que podem estar saturados). Então, a medida de similaridade d é uma função definida como segue:

Definição 7.1 (Medida de similaridade (Veltkamp, 2001)). Uma medida de similaridade entre os padrões A e B em $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, é definida por uma função $d : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \times \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow [0, 1] \in \mathbb{R}$ verificando as seguinte condições:

1. Identidade: $d(A, A) = 1$;
2. Unicidade: $d(A, B) = 1$ implica em $A = B$;
3. Simétrica: $d(A, B) = d(B, A)$.

Assim, pretende-se construir um classificador Ω para decidir os rótulos (filtrar ou não filtrar) para os vértice de $\mathcal{Nr}(i)$, de acordo com um determinado critério construído por uma medida de similaridade entre a forma representada por um vértice e uma forma de um padrão de referência $\Omega_{ref} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$. Desse modo, o classificador é construído para todo vértice $C \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ da seguinte forma:

$$\Omega(C) = \begin{cases} \text{filtrar,} & \text{se } d(C, \Omega_{ref}) \leq \alpha, \\ \text{não filtrar,} & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (7.4)$$

Uma forma simples de construir Ω é por meio dos tradicionais descritores sobre a geometria do CC (área, largura, altura, perímetro, etc) e as suas relações (circularidade, retangularidade, momentos, etc). Por exemplo:

- Classificar vértices com formatos retangulares

$$\Omega_{\text{retangularidade}}(C) = \begin{cases} \text{não filtrar,} & \text{se } \frac{\text{Área}(C)}{\text{Largura}_\theta(C) \times \text{Altura}_\theta(C)} \leq \alpha, \\ \text{filtrar,} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\text{Área}(C)$ é a área de C , $\text{Largura}_\theta(C)$ e $\text{Altura}_\theta(C)$ são as medidas de largura e a altura do retângulo envolvente sobre C rotacionado na direção do maior eixo.

- Classificar vértices com formatos circulares

$$\Omega_{\text{circularidade}}(C) = \begin{cases} \text{não filtrar,} & \text{se } 4\pi \frac{\text{Área}(C)}{\text{Perímetro}(C)^2} \leq \alpha, \\ \text{filtrar,} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\text{Área}(C)$ é a área do CC C e $\text{Perímetro}(C)$ é o perímetro do CC C .

- Classificar vértices com formatos de estruturas alongadas.

$$\Omega_{\text{alongamento}}(C) = \begin{cases} \text{não filtrar,} & \text{se } \frac{\text{Área}(C)}{\pi \times \text{Maior eixo}(C)^2} \leq \alpha, \\ \text{filtrar,} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $\text{Área}(C)$ é a área do CC C e $\text{Maior eixo}(C)$ é o comprimento do maior eixo de C (Xu *et al.*, 2013).

Além disso, outros descritores de formas mais complexos, tais como *shape context*, casamento de *template*, modelos deformáveis, entre outros podem ser utilizados. Apesar de todas estas possibilidades para filtrar resíduos indesejáveis durante o processo de extração de resíduos. No entanto, é necessário ter cuidado com a escolha destes descritores para preservar as propriedades de invariâncias (translação, rotação e escala) dos últimos *levelings*. Além disso, dependendo da aplicação pode ser que o tempo computacional seja relevante, neste caso, é melhor dar preferência aos descritores computáveis incrementalmente na árvore (Matas e Zimmermann, 2005). Estes descritores referem-se aos atributos que podem ser computados por meio dos atributos dos seus filhos e o conjunto de *pixels* canônicos presentes nos vértices. Em outras palavras, não é necessário reconstruir o CC representado pelo vértice para fazer a computação do atributo. Um procedimento simples (ver Algoritmo 7.3), para fazer esta computação é por meio de um percurso em profundidade, em que ao visitar um vértice em pré-ordem pode-se inicializar o seu atributo e em uma visita em pós-ordem pode-se atualizar o seu atributo com os atributos dos seus filhos já computados anteriormente.

Algoritmo 7.3: Algoritmo genérico para computar descritores computáveis incrementalmente.

```

1 Seja  $\mathcal{T}_f$  uma árvore construída a partir de uma imagem  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ 
2  $\kappa(\text{Raiz}(\mathcal{T}_f)) \leftarrow \text{computação-do-atributo}(\text{Raiz}(\mathcal{T}_f))$ 
3  $\text{computação-do-atributo}(\text{Vértice } A)$ 
4    $\kappa(A) \leftarrow \text{inicialização-do-atributo}(A)$ 
5   para cada vértice  $B \in \text{Filhos}(A)$  faça
6      $\kappa(B) \leftarrow \text{computação-do-atributo}(B)$ 
7      $\kappa(A) \leftarrow \text{atualização-do-atributo}(A, B)$ 
8   retorne pós-processamento-atributo( $A$ )
```

Assim, atributo como área, volume, altura, largura, perímetro, variância, momentos, entre outros, podem ser computados incrementalmente por meio do Algoritmo 7.3. Um exemplo simples de implementação das funções *inicialização-do-atributo* e *atualização-do-atributo* para o atributo área é apresentado no Algoritmo 7.4 e, de maneira semelhante, podem ser construídas as funções para os outros atributos (Najman e Couprie, 2006; Neumann e Matas, 2012; Silva, 2009; Urbach e Wilkinson, 2002; Urbach *et al.*, 2007, 2005; Xu, 2013).

Algoritmo 7.4: Computação incremental do atributo área.

```

1 inicialização-do-atributo (Vértice  $A$ )
2   └─ retorne (quantidade de pixels canônicos em  $A$ )
1 atualização-do-atributo (Vértice  $A$ , Vértice  $B$ )
2   └─ retorne  $\kappa(A) + \kappa(B)$ 
1 pós-processamento-atributo (Vértice  $A$ )
2   └─ retorne  $\kappa(A)$ 
  
```

Nas Figuras 7.7 e 7.8 são mostrados exemplos de aplicações dos últimos *levelings* com intuito de segmentar objetos circulares e com estruturas finas por meio de filtragem dos resíduos indesejáveis.

Figura 7.7: Aplicações dos últimos filtros por grãos utilizando famílias de primitivas baseadas em valores de extinções com atributo de área e filtragens baseadas em circularidades.

No exemplo apresentado na Figura 7.7 foram utilizadas famílias de primitivas baseadas em valores de extinções com atributo de área e filtragens baseadas em circularidades.

Figura 7.8: Aplicação da última abertura com informação de formas de estruturas finas.

Neste segundo exemplo apresentado na Figura 7.8 também foi utilizada uma família de primitivas baseada em valor de extinção com atributo de área e utilizando filtragem com base no afinamento.

7.2.2 Filtragem com base em regiões estáveis

Nesta seção apresentamos um outro modelo de filtragem de resíduos indesejáveis por meio de um detector de regiões chamado Regiões Extremais Maximamente Estáveis (MSER - do inglês, *Maximally Stable Extremal Regions*) introduzido por Matas *et al.* (2004). Eles são amplamente utilizados em uma grande variedade de aplicações em visão computacional, incluindo correspondência entre imagens (Kimmel *et al.*, 2011; Matas *et al.*, 2004), recuperação de imagens (Nister e Stewenius, 2006; Sivic e Zisserman, 2003), reconhecimento de objetos (Obdrzalek e Matas, 2005), rastreamento de objetos (Donoser e Bischof, 2006), entre outros. As regiões detectadas por este método são CCs dos conjuntos de níveis de estabilidade máxima e, como mostrado por Kimmel *et al.* (2011), são invariante as transformações afins o que é uma vantagem quando comparados com os detectores SIFT (Kimmel *et al.*, 2011).

A estabilidade é uma função que associa os CCs C_λ extraídos de um conjunto de nível de limiar λ com um valor de estabilidade definido por uma relação entre intensidade (limiar do conjunto de nível) e os limites exteriores do CC. Mais precisamente, a estabilidade de um CC C_λ é a razão entre a diferença das áreas de dois CCs comparáveis a C_λ de uma certa intensidade, com a área de C_λ , ou seja,

$$Estabilidade(C_\lambda, \Delta) = \frac{\text{Área}(C_\lambda - \Delta) - \text{Área}(C_\lambda + \Delta)}{\text{Área}(C_\lambda)} \quad (7.5)$$

onde $\Delta \in \mathbb{K}$ é um parâmetro de estabilidade e $C_{\lambda-\Delta}$, C_λ e $C_{\lambda+\Delta}$ são CCs obtidos por conjuntos de níveis de limiares $\lambda - \Delta$, $\lambda + \Delta$ e λ satisfazendo ou $C_{\lambda-\Delta} \subset C_\lambda \subset C_{\lambda+\Delta}$, ou $C_{\lambda-\Delta} \supset C_\lambda \supset C_{\lambda+\Delta}$.

Considere uma sequência de CCs $(C_0, C_1, \dots, C_K)$ extraídos de conjuntos de níveis de limiares de valores $0, 1, \dots, K$ de tal forma que $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_K$. As regiões de estabilidades máximas são os pontos de mínimos locais para função *Estabilidade* definida para uma sequência de CCs $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ e são chamadas de MSER. No trabalho de Matas *et al.* (2004), são definidos outros dois conjuntos de CCs MSER mais específicos, os MSER+ definidos usando somente CCs dos conjuntos de níveis superiores e os MSER- definidos usando somente CCs dos conjunto de níveis inferiores. As detecções dessas regiões podem ser computadas eficientemente por meio de uma árvore, por exemplo, com a *max-tree* extraí as regiões MSER+, com a *min-tree* as regiões MSER-, com a árvore de formas as regiões MSER.

A computação dos vértices MSER pode ser feita para cada sequência de vértices $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ definida por um intervalo $[F, \text{Raiz}(\mathcal{T}_f)]_{\mathcal{T}_f}$ de uma folha $F \in \text{Folhas}(\mathcal{T}_f)$ para a raiz da árvore. Assim, pode-se visitar os vértices $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ nesta ordem por meio de um caminho partindo da folha F em direção a raiz da árvore. A cada vértice C_i visto do caminho pode-se calcular a função de estabilidade. Quando fazemos este procedimento para todos os possíveis intervalos da folha a raiz, muitos vértices acabam sendo revisitados. Então, uma outra abordagem é armazenar para cada vértice C da árvore, um ancestral A e um descendente de maior área D de C tal que

$$\text{ou } level(D) = level(C) - \Delta \text{ e } level(A) = level(C) + \Delta$$

se C é um CC originado de um conjunto de nível superior,

$$\text{ou } level(D) = level(C) + \Delta \text{ e } level(A) = level(C) - \Delta$$

se C é um CC originado de um conjunto de nível inferior. Assim,

$$Estabilidade(C, \Delta) = \frac{\text{Área}(D) - \text{Área}(A)}{\text{Área}(C)}$$

e conseqüentemente C é um vértice MSER se, e somente se,

$$Estabilidade(D, \Delta) < Estabilidade(C, \Delta) < Estabilidade(A, \Delta).$$

Essa ideia leva ao Algoritmo 7.5 para computação dos vértices MSER de uma árvore *max-tree*, *min-tree* ou de formas. Primeiramente, são armazenados em duas funções *Ascendente* e *Descendente* os vértices ascendentes e descendentes para cada vértice C da árvore $\mathcal{T}_f$. Durante esta computação (ver linhas 2 a 7 da função *extração-dos-vértices-MSER*) armazena-se o ancestral do vértice C que só existe um e mantém-se atualizado o descendente de maior área do vértice C . Note que, se um vértice A é ancestral de C , então o vértice C é descendente do vértice A . Uma vez computadas as funções *Ascendente* e *Descendente*, então calcula-se a função de estabilidade para todos os vértices (entre as linhas 8 a 10). Em seguida, para cada vértice C da árvore é verificado se ele é um vértice MSER (linhas 11 e 12). Esse algoritmo, no pior caso, visita para cada vértice Δ vezes para produzir as funções *Ascendente* e *Descendente*. Depois, são visitados mais duas vezes os vértices da árvore para computar a função de estabilidade e a máxima estabilidade. Portanto, a complexidade do algoritmo no pior caso é $\mathcal{O}(|\mathcal{T}_f| \times \Delta)$, onde $|\mathcal{T}_f|$ é a quantidade de vértices da árvore $\mathcal{T}_f$ que normalmente é inferior a quantidade de *pixels* de f .

Algoritmo 7.5: Extração dos vértices MSER de uma árvore *max-tree*, *min-tree* ou árvore de formas.

```

1 extração-dos-vértices-MSER (Árvore  $\mathcal{T}_f$ , Parâmetro  $\Delta$ )
2   para cada vértice  $C$  da árvore  $\mathcal{T}_f$  faça
3      $A \leftarrow$  encontre-vértice-ascendente( $C, \Delta$ )
4     se encontrou o vértice ascendente  $A$  então
5        $\text{Ascendente}(C) \leftarrow A$ 
6       se  $\text{Área}(\text{Descendente}(A)) > \text{Área}(C)$  então
7          $\text{Descendente}(A) \leftarrow C$ 
8   para cada vértice  $C$  da árvore  $\mathcal{T}_f$  faça
9     se existem  $\text{Ascendente}(C)$  E  $\text{Descendente}(C)$  então
10       $\text{Estabilidade}(C, \Delta) \leftarrow \frac{\text{Área}(\text{Descendente}(C)) - \text{Área}(\text{Ascendente}(C))}{\text{Área}(C)}$ 
11  para cada vértice  $C$  da árvore  $\mathcal{T}_f$  faça
12    se  $\text{Estabilidade}(\text{Descendente}(C), \Delta) < \text{Estabilidade}(C, \Delta) < \text{Estabilidade}(\text{Ascendente}(C), \Delta)$  então
13       $C$  é um vértice MSER

1 encontre-vértice-ascendente (Vértice  $C$ , Parâmetro  $\Delta$ )
2    $A \leftarrow C$ 
3   para  $i \leftarrow 0, 1, \dots, \Delta$  faça
4     se  $C$  é um vértice originado de um conjunto de nível superior então
5       se  $\text{level}(A) + i \leq \text{level}(C)$  então
6         retorne  $A$ 
7     senão
8       se  $\text{level}(A) - i \geq \text{level}(C)$  então
9         retorne  $A$ 
10   $A \leftarrow \text{Pai}(C)$ 

```

Com base nestas considerações, o classificador Ω_{mser} é construído para todo vértice $C \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$

da seguinte forma:

$$\Omega_{mser}(C) = \begin{cases} \text{n\~ao filtrar,} & \text{se } C \text{ \text{\'e} um v\~ertice MSER,} \\ \text{filtrar,} & \text{caso contr\~ario,} \end{cases} \quad (7.6)$$

Diversas variantes de MSER t\~em sido propostas na literatura, como por exemplo, [Kimmel *et al.* \(2011\)](#) e [Perd'och \(2011\)](#) que definem novas fun\~c\~oes de estabilidade que levam em considera\~ao informa\~c\~oes de outros atributos geom\~etricos extra\~idos dos CCs. J\~a [Xu *et al.* \(2014\)](#) prop\~os uma nova abordagem para selecionar v\~ertice baseada na teoria de Morse. Todas essas abordagens, podem ser consideradas para definir filtros de res\~duos indesej\~aveis. Nas Figuras 7.9 e 7.10 s\~ao mostrados exemplos de aplica\~c\~oes dos \~ultimos *levelings* por meio de filtragem dos res\~duos indesej\~aveis baseadas em MSER. No exemplo apresentado na Figura 7.9 foi utilizada uma fam\~ilia de primitivas baseada

Figura 7.9: Aplica\~c\~oes dos \~ultimos filtros por gr\~aos com filtragem de res\~duos indesej\~aveis baseadas em MSER.

em valor de extin\~c\~ao com atributo de \~area e utilizando filtragem por meio de MSER-.

No segundo exemplo apresentado na Figura 7.10 tamb\~em foi utilizada uma fam\~ilia de primitivas baseada em valor de extin\~c\~ao com atributo de \~area e utilizando filtragem de res\~duos indesej\~aveis com base em uma composi\~c\~ao de filtros: MSER seguido de filtros baseadas em informa\~c\~ao de formas (\~area, n\~umero de buracos, retangularidade, vari\~ancia).

imagem de entrada (Colorida)

imagem de entrada (Níveis de cinza)

UGF com família de primitivas baseada em valores de extinção

rotulação da imagem associada ao UGF

UGF com família de primitivas baseada em valores de extinção e composições de filtragens de resíduos indesejáveis

rotulação da imagem associada ao UGF

Figura 7.10: Aplicações dos últimos filtros por grãos com filtragem de resíduos indesejáveis baseada em uma composição de filtragens: MSER seguido de filtragens baseadas em informação de formas (área, número de buracos, retangularidade, variância).

Parte III

Aplicações

Resumo

Esta última parte da tese é dedicada à aplicações dos últimos levelings em problemas de processamento e análise de imagens. São apresentados três problemas: (1) segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retina; (2) binarização de documentos históricos e (3) localização de texto em imagens de cenas. O primeiro problema consiste em segmentar vasos sanguíneos em imagens de retinas. A abordagem proposta analisa todo o espaço de resíduos gerados por uma imagem filtrada da retina e, sobre esse espaço é projetado um filtro, com base em um descritor de alongamento, para eliminar resíduos extraídos de regiões não alongadas. Dessa forma, os pixels desse último leveling contendo resíduos não nulos, são classificados como pertencentes aos vasos sanguíneos, caso contrário, são classificados como pixels do plano de fundo. O segundo problema consiste em binarizar imagens de documentos históricos por meio dos últimos levelings. A abordagem proposta analisa o espaço de resíduos e classifica como objeto da imagem os pixels com valores residuais não nulos extraídos de regiões maximalmente estáveis. O terceiro problema consiste em localizar regiões de texto em imagens de cenas. O método proposto consiste de duas grandes etapas, sendo que na primeira etapa, é empregado o uso dos últimos levelings para extrair regiões de caracteres da imagem de referência e, em seguida, esses caracteres são agrupados formando assim um conjunto de regiões de textos candidatas. Assim, na segunda etapa, um conjunto de atributos é obtido a partir de cada região de texto candidata e é usado mais tarde como entrada para um classificador, a fim de rotular essas regiões em texto ou não-texto. Resultados experimentais utilizando imagens de bancos públicos mostram que os métodos propostos por meio dos últimos levelings são comparáveis aos outros métodos encontrados na literatura.

Segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas

Resumo do capítulo

Neste capítulo descreve-se o uso dos últimos levelings para a segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas. A abordagem proposta analisa todo o espaço de resíduos gerados por uma imagem filtrada da retina e, sobre esse espaço é projetado um filtro, com base em um descritor de alongamento, para eliminar resíduos extraídos de regiões não alongadas. Dessa forma, os pixels desse último leveling contendo resíduos não nulos, são classificados como pertencentes aos vasos sanguíneos, caso contrário, são classificados como pixels do plano de fundo. Resultados experimentais utilizando imagens dos bancos públicos DRIVE e STARE mostram que a abordagem proposta, apesar de simples, é comparável aos outros métodos encontrados na literatura.

8.1 Introdução

A segmentação da rede de vasos sanguíneos é uma tarefa inicial e importante no processo de análise de imagens de retinas, pois por meio dela é possível identificar sinais de hipertensão, diabetes, arteriosclerose e doenças cardiovasculares (Hoover *et al.*, 2000; Staal *et al.*, 2004). Na Figura 8.1 é apresentada uma imagem de fundo de olho e a rede de vasos sanguíneos segmentada manualmente.

Imagem de fundo de olho

Rede de vasos sanguíneos segmentada

Figura 8.1: Exemplo de imagem de fundo de olho e sua rede de vasos sanguíneos segmentada manualmente.

Nas últimas décadas, têm surgido diversos métodos para segmentação automática de vasos sanguíneos (Al-Diri *et al.*, 2009; Hoover *et al.*, 2000; Jiang e Mojon, 2003; Mendonça e Campilho, 2006; Niemeijer *et al.*, 2004; Staal *et al.*, 2004; Xu *et al.*, 2013). Estes métodos vêm sendo testados em bancos públicos de imagens e avaliados quantitativamente através da comparação com segmentações manuais através da análise ROC (*receiver operating characteristic*, ou característica de operação do receptor). Por conseguinte, é apresentado neste capítulo um método baseado nos últimos *levelings* para segmentar a rede de vasos sanguíneos.

8.2 Abordagem proposta

A grande maioria dos métodos propostos para segmentação automática de vasos sanguíneos faz uso da imagem do canal verde $f_g \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ de uma dada imagem colorida (RGB) da retina por revelar um maior contraste na rede de vasos sanguíneos (Hoover *et al.*, 2000; Staal *et al.*, 2004; Xu *et al.*, 2013), como pode ser observado na Figura 8.2.

Figura 8.2: Exemplo de uma imagem colorida de retina.

Esta imagem f_g contém muitas regiões contrastantes que não coincidem com regiões de vasos sanguíneos, então para eliminar estes artefatos indesejáveis da imagem f_g e, ao mesmo tempo, preservar as regiões de vasos sanguíneos, é aplicado o operador residual fechamento *top-hat* φ_B^{TH} por um EE $\mathcal{B}$ no formato de disco cujo o raio corresponde a pelo menos a metade (mais um) da espessura máxima dos vasos, ou seja, aproximadamente 7 *pixels* para as imagens dos bancos públicos DRIVE (Hoover *et al.*, 2000) e STARE (Staal *et al.*, 2004). Dessa forma, são eliminadas as regiões de vasos sanguíneos por meio de um fechamento $\varphi_B(f_g)$ e, em seguida, elas são recuperadas por uma subtração com a imagem de referência f_g , como mostrado na Figura 8.3.

Figura 8.3: Exemplo de imagem de fundo de olho e sua rede de vasos sanguíneos.

Nesta imagem $\varphi_B^{TH}(f_g)$ aplica-se um último *leveling* construído com base nas seguintes observações: (i) pelo fato que os objetos (vasos sanguíneos) da imagem $\varphi_B^{TH}(f_g)$ são claros e seus planos de fundos serem escuros, nós usamos primitivas anti-extensivas obtidas por reconstruções superiores; (ii) como pretende-se segmentar os vasos sanguíneos é importante considerar todo o espaço de primitivas possíveis (ver Seção 7.1); (iii) assim, sobre o espaço dos resíduos $\{r_i(\varphi_B^{TH}(f_g)) : i \in \mathcal{I}\}$ (ou melhor, dos conjuntos $\{\mathcal{N}r(i) : i \in \mathcal{I}\}$) pode-se projetar filtros que preservem as estruturas finas e alongadas que podem estar presentes nos vértices dos conjuntos $\mathcal{N}r(i), i \in \mathcal{I}$, como por exemplo, o filtro de alongamento descrito na Seção 7.2.1. Dessa forma, sabendo que os vértices representam CCs dos conjuntos de níveis superiores podem-se produzir amostras a partir de algumas imagens de um conjunto de treinamento e assim estimar um limiar de separação dos objetos alongados dos não alongados. Esse limiar pode ser empiricamente determinado por meio da observação do valor de alongamento para algumas formas binárias, como mostrado na Figura 8.4. Note que, os vértices do conjuntos $\mathcal{N}r(i)$ contém CCs que se assemelham a estas imagens binárias apresentadas na Figura 8.4. Assim, por meio de uma análise estatística pode-se chegar a um limiar α e assim utilizá-lo

Figura 8.4: Exemplo de alongamento de vasos sanguíneos segmentados de imagens de fundo de olho.

no filtro $\Omega_{\text{alongamento}}$ para preservar os resíduos $r_i(\varphi_B^{TH})$ contendo vértices que satisfaçam o critério de alongamento. Além disso, é incluído no filtro a seguinte heurística (descartar os vértices com áreas menores ou igual a ϵ) para diminuir a quantidade de falsos positivos. Mais precisamente, o filtro para classificar vértices com formato de estruturas alongadas é dado por

$$\Omega_{\text{alongamento}}(C) = \begin{cases} \text{não filtrar,} & \text{se } \frac{\text{Área}(C)}{\pi \times \text{Maior eixo}(C)^2} \leq \alpha \text{ e } \text{Área}(C) > \epsilon, \\ \text{filtrar,} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $\text{Área}(C)$ é a área da CC C e $\text{Maior eixo}(C)$ é o comprimento do maior eixo da elipse envolvente sobre o CC C que pode ser computado incrementalmente (ver Seção 7.2.1) por meio de momentos centrais.

Dessa forma, considere $\mathcal{R}_{\Omega}^{+}$ o último *leveling* com filtragem $\Omega_{\text{alongamento}}$ e seja q a função associada ao último *leveling* $\mathcal{R}_{\Omega}^{+}$ contendo os índices das primitivas que produziram os máximos resíduos não nulos. Assim, o resultado final da segmentação é determinado da seguinte forma: $\forall p \in \mathcal{D}$, se $q(p) > 0$ então p é um *pixel* que pertence a rede de vasos sanguíneos, caso contrário, p pertence ao plano de fundo da imagem. Na Figura 8.5 é apresentado um exemplo da aplicação do método proposto.

Figura 8.5: Ilustração mostrando os passos seguidos pelo método proposto para segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas, onde (a) a partir de uma imagem de entrada RGB, (b) é extraída a imagem do canal verde, e em seguida, (c) é aplicado o fechamento *top-hat*, e depois, (d) é aplicado o último *leveling* com filtro de alongamento. Por fim, (e) é feita uma sobreposição da imagem de entrada com a imagem resultante para auxiliar a visualização dos vasos sanguíneos segmentados.

8.3 Experimentos e resultados

Para avaliar o desempenho do método proposto foram utilizadas as imagens dos bancos públicos *Digital Retinal Images for Vessel Extraction* (DRIVE) e *Structured Analysis of the Retina* (STARE). O banco DRIVE consiste de 40 imagens, sendo sete com patologia. As imagens foram escolhidas aleatoriamente de um programa de triagem para detecção de retinopatia diabética na Holanda e foram capturadas por uma câmera Canon CR5 3CCD com um campo de vista de 45° e digitalizada para uma resolução de 768×584 *pixels*, 8 *bits* de profundidade por canal do modelo de cores RGB. As 40 imagens são divididas em dois conjuntos, um para treinamento e outro para teste, ambos com 20 imagens. Para cada imagem do conjunto de treinamento é fornecida uma imagem segmentada manualmente e para o conjunto de teste são fornecidas duas imagens segmentadas manualmente (Hoover *et al.*, 2000). Já o banco STARE consiste de 20 imagens entre as quais dez apresentam patologias. Estas imagens foram capturadas por uma câmera TopCon TRV-50 com um campo de vista de 35° e digitalizada para uma resolução 700×605 , 8 *bits* de profundidade por canal do modelo de cores RGB. Também são fornecidas duas imagens segmentadas manualmente para cada imagem do banco (Staal *et al.*, 2004).

Para avaliação do método proposto são empregadas as medidas de desempenho sensibilidade (também chamada de taxa de acerto), especificidade e acurácia (Staal *et al.*, 2004). A sensibilidade mensura a taxa de verdadeiros positivos, a especificidade mensura a taxa de verdadeiros negativos e a acurácia mensura a taxa dos *pixels* classificados corretamente. Mais precisamente,

$$\text{sensibilidade} = \frac{VP}{VP + FN}, \quad (8.1)$$

$$\text{especificidade} = \frac{VN}{VN + FP}, \quad (8.2)$$

$$\text{acurácia} = \frac{VP + VN}{VP + VN + FP + FN}, \quad (8.3)$$

onde VP e VN são as quantidades de verdadeiros positivos e negativos, respectivamente e FP e FN são as quantidades de falsos positivos e negativos, respectivamente.

Nas Figuras 8.6 e 8.7 são apresentadas quatro resultados de segmentações de vasos sanguíneos em imagens de retinas (com e sem patologias) extraídas dos bancos DRIVE e STARE, respectivamente. Percebe-se que a maioria dos vasos sanguíneos foram extraídos corretamente, embora haja presenças de pequenos ruídos e os vasos sanguíneos extremamente finos são perdidos. Vale salientar, que todas as imagens foram segmentadas utilizando os mesmos parâmetros.

Figura 8.6: Resultado de quatro segmentações de vasos sanguíneos das 20 imagens testadas do banco DRIVE. No topo estão as imagens coloridas de entrada e em baixo as segmentações correspondentes. Note que, os pixels em preto são verdadeiros positivos, em branco os verdadeiros negativos, em azul os falsos positivos, e em vermelho os falsos negativos.

Figura 8.7: Resultado de quatro segmentações de vasos sanguíneos das 20 imagens testadas do banco STARE. No topo estão as imagens de entrada coloridas e em baixo as segmentações correspondentes. Note que, os pixels em preto são verdadeiros positivos, em branco os verdadeiros negativos, em azul os falsos positivos, e em vermelho os falsos negativos.

Resultados comparativos de diferentes abordagens, incluindo o método proposto, são apresentadas nas Tabelas 8.1 e 8.2. Pode-se perceber, analisando os resultados que o método proposto é comparável a outras abordagens apesar de usarmos um único atributo para descrever os vasos sanguíneos. Contudo, é importante ressaltar que, se consideramos um conjunto de atributos extraídos dos vértices presentes em $\mathcal{N}r(i)$, pode-se construir classificadores cujo os resultados tendem a ser bem melhores.

Tabela 8.1: Tabela comparativa de diferentes métodos para segmentação de vasos sanguíneos nas imagens do banco DRIVE.

Método	Sensibilidade	Especificidade	Acurácia
Segundo especialista	0,7761	0,9725	0,9473
Mendonça e Campilho (2006)	0,7344	0,9764	0,9452
Staal <i>et al.</i> (2004)	0,7193	0,9773	0,9441
Método proposto	0,6902	0,9800	0,9429
Niemeijer <i>et al.</i> (2004)	0,6793	0,9801	0,9416
Xu <i>et al.</i> (2013)	0,6924	0,9779	0,9413
Al-Diri <i>et al.</i> (2009)	—	—	0,9258
Jiang e Mojon (2003)	0,6478	0,9625	0,9222

Tabela 8.2: Tabela comparativa de diferentes métodos para segmentação de vasos sanguíneos nas imagens do banco STARE.

Método	Sensibilidade	Especificidade	Acurácia
Segundo especialista	0,8949	0,9390	0,9354
Jiang e Mojon (2003)	—	—	0,9513
Xu <i>et al.</i> (2013)	0,7149	0,9749	0,9471
Método proposto	0,6835	0,9739	0,9460
Mendonça e Campilho (2006)	0,6996	0,9730	0,9440
Hoover <i>et al.</i> (2000)	0,6751	0,9567	0,9267

8.4 Conclusão

Neste capítulo apresentou-se a aplicação dos últimos *levelings* em um problema de segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retinas. O método proposto, apesar de usar um único atributo, seus resultados são comparáveis a outras abordagens. O tempo médio para processar uma imagem dos bancos STARE ou DRIVE é em torno de 0,95 segundos em um computador com processador *i7* e 8GB de memória RAM. Futuramente, pretende-se melhorar a acurácia do método proposto por meio do uso de um classificador mais robusto.

Binarização de texto em imagens de documentos históricos

Resumo do capítulo

Neste capítulo é apresentada uma aplicação para binarização de documentos históricos por meio dos últimos levelings. A abordagem proposta analisa todo o espaço de resíduos e classifica como objeto da imagem os pixels com valores residuais não nulos extraídos de regiões maximalmente estáveis. Resultados experimentais utilizando os bancos de imagens dos concursos DIBCOs evidenciam que a abordagem proposta apresenta resultados semelhantes aos métodos vencedores do concursos DIBCOs.

9.1 Introdução

Nos últimos anos tem surgido a necessidade de armazenar e indexar imagens de documentos históricos produzidos há muitas décadas ou mesmo séculos. Estes documentos costumam possuir imperfeições como manchas, dobras, sinais de envelhecimento, entre outras. Consequentemente, *softwares* de reconhecimento ótico de caracteres (OCR - do inglês, *Optical Character Recognition*) acabam tendo desempenho insatisfatório devido à essas imperfeições, como pode ser percebido nas imagens ilustradas na Figura 9.1.

Figura 9.1: Exemplos de imagens de documentos históricos extraídas dos bancos dos concursos DIBCOs.

Neste cenário, a binarização de textos em imagens de documentos históricos tem ganhado cada vez mais a atenção, dando origem, inclusive, a concursos para binarização dessas imagens (Gatos *et al.*, 2009; Pratikakis *et al.*, 2013, 2010, 2011, 2012), uma vez que seu resultado é crucial para etapas posteriores do processo de reconhecimento de textos. Dadas essas considerações, é apresentado neste capítulo um método para binarização de textos em imagens de documentos históricos por meio dos últimos *levelings*.

9.2 Abordagem proposta

O operador de binarização proposto é projetado levando em consideração as características das imagens dos concursos DIBCOs (do inglês - *Document Image Binarization Contest*), as quais consistem em digitalizações de documentos impressos e escritos à mão, sendo que os textos dos documentos são escuros e o seu plano de fundo é mais claro em relação ao texto. Também, os documentos digitalizados contêm uma série de imperfeições, como manchas, amassados, dobras, entre outras. Neste sentido, é importante simplificar uma imagem o máximo possível, preservando ao mesmo tempo os textos nela contidos, antes de segmentá-la. Para este fim, é aplicado um fechamento *top-hat* φ_B^{TH} por um EE $\mathcal{B}$ no formato de disco cujo o raio corresponde a pelo menos a metade (mais um) da espessura máxima dos caracteres, ou seja, aproximadamente 9 *pixels* para imagens de documentos escritos à mão e 21 para imagens de documentos impressos. Na Figura 9.2 são apresentados dois exemplos de fechamentos *top-hats* em imagens dos concursos DIBCOs.

Figura 9.2: Exemplos de aplicações de fechamentos *top-hats* em imagens de documentos históricos.

Nesta imagem $\varphi_B^{TH}(f)$ aplica-se um último *leveling* construído com base nas seguintes obser-

vações: (i) como os objetos (textos) da imagem $\varphi_B^{TH}(f)$ são claros e seus planos de fundos se-rem escuros, nós usamos primitivas anti-extensivas obtidas por reconstruções superiores; (ii) como pretende-se segmentar os caracteres, é importante considerar todo o espaço de primitivas possíveis; (iii) como as regiões dos caracteres estão compostas por máximas regionais e existem nessas imagens dos concursos DIBCOs pelo menos 30 níveis de contraste entre os caracteres do seu plano de fundo, então é esperado que regiões dos caracteres com uma diferença em torno de 10 a 15 níveis sejam maximalmente estáveis, como pode-se perceber na Figura 9.3.

Figura 9.3: Exemplos de imagens de documentos históricos dos bancos dos concursos DIBCOs destacando em vermelho as regiões maximalmente estáveis.

Assim, sobre o espaço dos resíduos $\{r_i(\varphi_B^{TH}(f)) : i \in \mathcal{I}\}$ (ou melhor, dos conjuntos $\{\mathcal{N}r(i) : i \in \mathcal{I}\}$) podem ser projetados filtros que preservem vértices maximamente estáveis que podem estar presentes nos conjuntos $\mathcal{N}r(i), i \in \mathcal{I}$. Além disso, são incluídos no filtro heurísticas relacionadas à geometria dos caracteres a fim de filtrar regiões que não correspondem aos caracteres. Mais precisamente:

$$\Omega_{\text{binarização}}(C) = \begin{cases} \text{não filtrar,} & \text{se } C \text{ é MSER e } H_1(C) \text{ e } H_2(C) \text{ são verdadeiros,} \\ \text{filtrar,} & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (9.1)$$

onde H_1 e H_2 são tradicionais heurísticas empregadas em problemas de localização de texto, isto é,

$$H_1(C) = \frac{\max\{\text{Largura}(C), \text{Altura}(C)\}}{\min\{\text{Largura}(C), \text{Altura}(C)\}} \leq 8 \quad \text{e} \quad H_2(C) = 0,2 \leq \frac{\text{Área}(C)}{\text{Largura}(C) \times \text{Altura}(C)} \leq 0,8$$

tal que a $\text{Área}(C)$, a $\text{Largura}(C)$ e a $\text{Altura}(C)$ são respectivamente, a área, a largura e a altura do retângulo envolvente sobre o CC C .

Dessa forma, considere $\mathcal{R}_\Omega^+$ o último *leveling* com filtragem $\Omega_{\text{binarização}}$, e seja q a função associada ao último *leveling* $\mathcal{R}_\Omega^+$ que contém os índices das primitivas que produziram os máximos resíduos não nulos. Assim, o resultado final da binarização é determinado da seguinte forma: $\forall p \in \mathcal{D}$, se $q(p) > 0$ então p é um *pixel* que pertence ao objeto, caso contrário, p pertence ao plano de fundo da imagem.

9.3 Experimentos e resultados

Para avaliar o desempenho do método proposto foram utilizadas as imagens dos concursos DIBCOs dos anos entre 2009 a 2013 (Gatos *et al.*, 2009; Pratikakis *et al.*, 2013, 2010, 2011, 2012). O banco DIBCO-2009 consiste de 10 imagens, sendo 5 de documentos impressos e 5 de documentos

escritos à mão; o banco DIBCO-2010 é composto por 10 imagens de documentos escritos à mão; o banco DIBCO-2011 consiste de 16 imagens, sendo 8 de documentos impressos e 8 de documentos escritos à mão; o banco DIBCO-2012 contém 14 imagens de documentos escritos à mão; o banco DIBCO-2013 consiste de 16 imagens, sendo 8 de documentos impressos e 8 de documentos escritos à mão. Todos os bancos de imagens DIBCOs fornecem, para cada imagem de documento, uma imagem segmentada manualmente para avaliar o resultado da segmentação. Para avaliação, foram empregadas as medidas de desempenho utilizadas pelos concursos DIBCOs, isto é, sensibilidade (ver Equação 8.1), especificidade (ver Equação 8.2), além de *F-Measure* e PSNR (Gatos *et al.*, 2009; Pratikakis *et al.*, 2013, 2010, 2011, 2012), definidas a seguir.

$$F\text{-measure} = \frac{2 \times \text{sensibilidade} \times \text{especificidade}}{\text{sensibilidade} + \text{especificidade}}, \quad (9.2)$$

$$\text{PSNR} = 10 \times \log\left(\frac{D^2}{\text{MSE}}\right) = 10 \times \log\left(\frac{FP + FN + VP + VN}{FP + FN}\right), \quad (9.3)$$

onde a medida *F-measure* é uma média ponderada das medidas sensibilidade e especificidade, PSNR é uma medida de proximidade entre o resultado e a saída esperada, ou seja, a razão entre os sinais de picos e os ruídos. O PSNR (que pode ser simplificado para dados binários) utiliza o cálculo do erro quadrático médio (MSE, do inglês - *mean square error*) e D^2 que é a diferença ao quadrado entre o resultado e a saída esperada. Na Figura 9.4 são apresentados quatro resultados de binarizações de imagens de documentos históricos.

Figura 9.4: Resultados de quatro binarizações de imagens de documentos históricos. No topo estão as imagens de entrada coloridas e abaixo delas as segmentações correspondentes. Note que os pixels em preto são verdadeiros positivos, em branco os verdadeiros negativos, em azul os falsos positivos, e em vermelho os falsos negativos.

Os resultados de diferentes abordagens, incluindo o método proposto, são apresentados nas

Tabelas 9.1 e 9.2.

Tabela 9.1: Tabela comparativa com resultados obtidos com as imagens de documentos impressos.

Método	F-measure	Sensibilidade	Especificidade	PSNR
Banco de imagens do concurso DIBCO-2009				
Método proposto	0,9180	0,9540	0,8857	16,68
Método vencedor do DIBCO-2009	0,9124	—	—	18,66
Otsu (1979)	0,9120	0,9347	0,8927	16,67
Su <i>et al.</i> (2010)	0,8905	0,8355	0,9602	15,75
White e Rohrer (1983)	0,8100	0,7135	0,9491	14,67
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,6220	0,4694	0,9959	11,26
Niblack (1985)	0,5125	0,8569	0,3705	6,26
Banco de imagens do concurso DIBCO-2011				
Método proposto	0,8635	0,9028	0,8438	15,99
Su <i>et al.</i> (2010)	0,8121	0,8410	0,8462	15,04
Método vencedor do DIBCO-2011	0,8086	—	—	—
White e Rohrer (1983)	0,7799	0,7362	0,8624	14,06
Otsu (1979)	0,7776	0,9095	0,7627	14,15
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,6073	0,4642	0,9973	12,96
Niblack (1985)	0,4154	0,8567	0,2923	5,78
Banco de imagens do concurso DIBCO-2013				
Método vencedor do DIBCO-2013	0,9212	—	—	20,68
Su <i>et al.</i> (2010)	0,8962	0,9074	0,8936	17,21
Método proposto	0,8906	0,9359	0,8638	17,02
Otsu (1979)	0,8145	0,9167	0,7730	14,60
White e Rohrer (1983)	0,8115	0,7380	0,9216	14,59
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,5670	0,4392	0,9871	12,57
Niblack (1985)	0,4262	0,8752	0,2974	5,93

9.4 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma aplicação dos últimos *levelings* em um problema de binarização de documentos históricos. Resultados experimentais utilizando as imagens e métricas dos concursos DIBCOs evidenciam que a abordagem proposta tem bons resultados para binarização de documentos históricos, principalmente em documentos impressos. O tempo médio para o processamento de uma imagem ficou em torno de 1,4 segundos em um computador com processador *i7* e 8GB de memória RAM. Vale lembrar que as imagens têm resoluções bem variadas, estando aproximadamente entre 469×597 a 3297×1097 *pixels*. Futuramente, pretende-se combinar a abordagem proposta com métodos de binarizações locais, onde os *pixels* presentes nos vértices contendo resíduos não nulos podem ser classificados por uma outra técnica de binarização local. Assim, pode-se parametrizar o método para aumentar a sensibilidade e, por meio de uma binarização local, eliminar os *pixels* classificados erroneamente.

Tabela 9.2: Tabela comparativa com resultados obtidos com as imagens de documentos escritos à mão.

Método	F-measure	Sensibilidade	Especificidade	PSNR
Banco de imagens do concurso DIBCO-2009				
Método vencedor do DIBCO-2009	0,9124	—	—	18,66
<i>Su et al.</i> (2010)	0,8789	0,8263	0,9496	19,61
Método proposto	0,8048	0,9304	0,7385	16,94
Otsu (1979)	0,6760	0,8895	0,6454	14,50
White e Rohrer (1983)	0,4927	0,3723	0,9733	14,95
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,2375	0,1849	0,9819	14,08
Niblack (1985)	0,2544	0,8609	0,1548	5,29
Banco de imagens do concurso DIBCO-2010				
Método vencedor do DIBCO-2010	0,9150	—	—	19,78
Método proposto	0,8459	0,8841	0,8377	17,23
Otsu (1979)	0,8379	0,7650	0,9372	11,96
<i>Su et al.</i> (2010)	0,8233	0,7696	0,9268	17,33
White e Rohrer (1983)	0,4803	0,3667	0,9902	14,08
Sauvola e Pietikäinen (2000)	—	—	—	—
Niblack (1985)	0,2845	0,8574	0,1726	5,35
Banco de imagens do concurso DIBCO-2011				
Método proposto	0,8707	0,8544	0,8956	17,69
<i>Su et al.</i> (2010)	0,8499	0,8483	0,8614	17,08
Método vencedor do DIBCO-2011	0,8086	—	—	—
Otsu (1979)	0,7682	0,8522	0,7452	15,07
White e Rohrer (1983)	0,7944	0,7621	0,8590	15,80
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,6393	0,5271	0,9774	15,06
Niblack (1985)	0,3065	0,8924	0,1901	5,22
Banco de imagens do concurso DIBCO-2012				
Método vencedor do DIBCO-2012	0,8947	—	—	21,80
Método proposto	0,8620	0,8486	0,8919	17,75
<i>Su et al.</i> (2010)	0,8560	0,8402	0,8975	17,76
Otsu (1979)	0,7459	0,8828	0,7297	14,95
White e Rohrer (1983)	0,7472	0,6448	0,9513	16,27
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,4938	0,3971	0,9868	14,67
Niblack (1985)	0,2922	0,8851	0,1770	5,36
Banco de imagens do concurso DIBCO-2013				
Método vencedor do DIBCO-2013	0,9212	—	—	20,68
Método proposto	0,8008	0,8064	0,8760	18,86
Otsu (1979)	0,7985	0,7181	0,9668	19,04
<i>Su et al.</i> (2010)	0,7681	0,6737	0,9729	18,52
White e Rohrer (1983)	0,7312	0,6237	0,9623	17,56
Sauvola e Pietikäinen (2000)	0,5826	0,4563	0,9983	16,44
Niblack (1985)	0,2178	0,8542	0,1270	5,09

Localização de textos em imagens de cenas

Resumo do capítulo

Neste capítulo é proposto um método para localizar regiões de texto em imagens de cenas, o qual consiste de duas grandes etapas. Na primeira etapa, é empregado o uso dos últimos levelings para extrair regiões de caracteres da imagem de referência e, em seguida, esses caracteres são agrupados formando assim um conjunto de regiões de textos candidatas. Na segunda etapa, um conjunto de atributos é obtido a partir de cada região de texto candidata e é usado mais tarde como entrada para um classificador, a fim de rotular essas regiões em texto ou não-texto. Experimentos realizados com imagens da base pública ICDAR mostram que este método é uma boa alternativa para os problemas envolvendo a localização de textos em imagens.

10.1 Introdução

Nos últimos anos, diversos algoritmos para extração de informações textuais (TIE - do inglês, *text information extraction*) em imagens e vídeos têm sido propostos na literatura para propósitos gerais, a extração de textos em cenas urbanas e indexação baseada em conteúdo em imagens e vídeos, e para propósitos específicos como, por exemplo, extração do número do licenciamento em placa veicular e extração de endereço em cartão postal. Apesar de tais estudos, ainda não é fácil projetar um método geral de TIE para imagens de cenas, uma vez que a ocorrência de texto nessas imagens pode diferir significativamente quanto a sua inclinação, seu tamanho, seu estilo de fonte, sua iluminação e também a ocorrência de oclusões parciais. Na Figura 10.1 são apresentadas algumas imagens que fazem parte dessa categoria.

Figura 10.1: Imagens de cena do banco de imagens ICDAR (Lucas et al., 2003)

De acordo com Jung et al. (2004), o problema de TIE pode ser subdividido em cinco subproblemas, sendo eles: (i) detecção; (ii) localização; (iii) rastreamento; (iv) extração e realce; e (v)

reconhecimento. O método apresentado neste capítulo, baseado nos últimos *levelings*, está voltado para o subproblema de localização de texto, cujo desafio central é localizar regiões textuais na imagem de referência.

10.2 Abordagem proposta

O método proposto consiste de duas etapas principais (ver a Figura 10.2): *extração e localização de regiões de texto candidatas* e *classificação de regiões de texto*. Na primeira etapa, o objetivo é extrair um conjunto de regiões de texto candidatas a partir da imagem de referência usando um operador último *leveling* com filtragem que preserva regiões de caracteres e, depois, esses caracteres são agrupados formando assim um conjunto de regiões de textos candidatas. Já a segunda etapa emprega o método T-HOG, proposto por Minetto *et al.* (2013), para extrair um conjunto de características das regiões de texto candidatas com base no descritor HOG (do inglês, *histogram of oriented gradients*), para depois, classificá-las em regiões de texto ou não-texto por meio de um classificador baseado em SVM (do inglês, *support vector machine*).

Figura 10.2: Visão geral do método proposto.

Extração de regiões candidatas

Para extrair um conjunto de regiões de texto candidatas é construído um último *leveling* com base nas seguintes considerações: (i) os objetos (caracteres) das imagens de cenas podem estar nas duas polaridades da imagem, então as primitivas utilizadas são reconstruções por formas; (ii) como pretende-se segmentar os caracteres, é importante considerar todo o espaço de primitivas possíveis, e sobre o espaço dos resíduos $\{r_i(\varphi_B^{TH}(f)) : i \in \mathcal{I}\}$ (ou melhor, dos conjuntos $\{\mathcal{N}r(i) : i \in \mathcal{I}\}$) é projetado um filtro que preserve vértices maximamente estáveis que podem estar presentes nos conjuntos $\mathcal{N}r(i), i \in \mathcal{I}$. Além disso, são incluídos no filtro heurísticas relacionadas à geometria dos

caracteres a fim de filtrar regiões que não correspondem aos caracteres. Mais precisamente:

$$\Omega_{\text{text}}(C) = \begin{cases} \text{n\~ao filtrar,} & \text{se } C \text{ \textit{\'e} MSER e } H_1(C), H_2(C), \dots, H_7(C) \text{ s\~ao verdadeiros,} \\ \text{filtrar,} & \text{caso contr\~ario,} \end{cases} \quad (10.1)$$

onde $H_1, H_2, \dots, H_7$ s\~ao tradicionais heur\~asticas empregadas em problemas de localiza\~ao de texto (Alves e Hashimoto, 2010; Neumann e Matas, 2011; Retornaz e Marcotegui, 2007; Wu *et al.*, 2008), isto \text{\'e},

$$\begin{aligned} H_1(C) &= 100 \leq \text{\c{A}rea}(C) \leq \frac{|\mathcal{D}|}{3} \\ H_2(C) &= 20 \leq \text{Altura}(C) \leq \frac{\text{Altura}(\mathcal{D})}{3} \\ H_3(C) &= 10 \leq \text{Largura}(C) \leq \frac{\text{Largura}(\mathcal{D})}{3} \\ H_4(C) &= 0 \leq \text{Holes}(C) \leq 10 \\ H_5(C) &= 0 \leq \frac{\max\{\text{Largura}(C), \text{Altura}(C)\}}{\min\{\text{Largura}(C), \text{Altura}(C)\}} \leq 8 \\ H_6(C) &= 0,3 \leq \frac{\text{\c{A}rea}(C)}{\text{Largura}(C) \times \text{Altura}(C)} \leq 0,95 \\ H_7(C) &= 0 \leq \text{Vari\~ancia}(C) \leq 60 \end{aligned} \quad (10.2)$$

tal que a $\text{\c{A}rea}(C)$, a $\text{Largura}(C)$ e a $\text{Altura}(C)$ s\~ao respectivamente, a \c{a}rea, a largura e a altura do ret\~angulo envolvente sobre o CC C , e $\text{Holes}(C)$ e $\text{Vari\~ancia}(C)$ denotam os n\~umeros de buracos e a vari\~ancia dos n\~iveis de cinza sobre o CC C .

Dessa forma, considere $\mathcal{R}_\Omega$ o \c{u}ltimo *leveling* com filtragem Ω_{text} e seja q a fun\~cao associada ao \c{u}ltimo *leveling* $\mathcal{R}_\Omega$, que cont\~em os \c{ı}ndices das primitivas que produziram os m\c{a}ximos res\~iduos n\~ao nulos. Assim, os caracteres segmentados s\~ao dados da seguinte forma: $\forall p \in \mathcal{D}$, se $q(p) > 0$ ent\~ao p \text{\'e} um *pixel* que pertence ao objeto, caso contr\~ario, p pertence ao plano de fundo da imagem. Em seguida, os v\~ertices s\~ao agrupados em regi\~oes de texto da seguinte forma: considere $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ o conjunto dos ret\~angulos envolventes sobre os v\~ertices (com res\~iduos n\~ao nulos) que deu origem a $\mathcal{R}_\Omega$. Ent\~ao, dois ret\~angulos R_i e R_j pertencem a mesma regi\~ao de texto, se seus posicionamentos, alturas e alinhamentos s\~ao similares (Alves e Hashimoto, 2010; Wu *et al.*, 2008), ou seja:

1. Os centroides de R_i e R_j s\~ao pr\~oximos, isto \text{\'e},

$$d_{\text{centr\~oide}}(R_i, R_j) = \text{dist}(\text{Centr\~oide}(R_i), \text{Centr\~oide}(R_j)) < \max\{\text{Largura}(R_i), \text{Largura}(R_j)\},$$

onde dist \text{\'e} a dist\~ancia euclidiana das coordenadas dos centroides de R_i e R_j , respectivamente.

2. As alturas de R_i e R_j s\~ao semelhantes, ou seja,

$$d_{\text{altura}}(R_i, R_j) = |\text{Altura}(R_i) - \text{Altura}(R_j)| < \min\{\text{Altura}(R_i), \text{Altura}(R_j)\},$$

onde $\text{Altura}(R_i)$ e $\text{Altura}(R_j)$ s\~ao as alturas dos ret\~angulos envolventes sobre os CCs C_i e C_j , respectivamente.

3. Os centroides de R_i e R_j est\~ao alinhados horizontalmente, isto \text{\'e},

$$d_{\text{linearidade}}(R_i, R_j) = |y_i - y_j| < \min\{\text{Altura}(R_i), \text{Altura}(R_j)\},$$

onde (x_i, y_i) e (x_j, y_j) s\~ao as coordenadas dos centroides de R_i e R_j , respectivamente.

Baseados nesses três critérios é possível decidir se R_i e R_j serão fundidos ou não. Na Figura 10.3 são apresentados alguns exemplos de retângulos extraídos do últimos *leveling* $\mathcal{R}_\Omega$.

Figura 10.3: Extração das regiões de texto candidatas.

Classificação de regiões de texto

Para classificar as regiões de textos é utilizado o método T-HOG (Minetto *et al.*, 2013), o qual consiste de um classificador de regiões de textos, originalmente proposto como um método de pós-processamento para extratores de textos, como o último *levelings* proposto neste capítulo. Primeiramente, o T-HOG extrai um vetor de características $z \in \mathbb{R}^n$ de cada região de texto candidata R por meio do descritor HOG, da seguinte forma: (i) o retângulo da região de texto candidata é particionado em 7 células distintas; (ii) para cada célula é calculado o HOG composto por 9 *bins*; (iii) o conjunto dos HOGs constitui o vetor de características $z \in \mathbb{R}^{63}$ para região de texto candidata R . Este vetor de características z extraído pelo T-HOG é submetido para um classificador

SVM que devolve um *score* (valor real), de tal forma que os *scores* positivos indicam a classe texto e os *scores* negativos indicam a classe não-texto. O classificador SVM é visto como uma função $f_{\text{svm}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{\text{svm}}(z) = \sum_{i=1}^M \alpha_i k(z_i, z) - b, \quad (10.3)$$

onde k é uma função *kernel* gaussiana (ou seja, $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), M é a quantidade de vetores de suporte, α_i são os pesos dos vetores de suporte z_i e b é um limiar (bias). Os vetores de suporte e seus pesos são determinado pelo algoritmo de treinamento SMO (Platt, 1998), utilizando 2445 amostras, sendo que 897 é da classe texto e 1548 é não-texto, extraídas das imagens de treinamento do concurso ICDAR. A tradicional técnica de validação cruzada tem sido usada para validar a performance do classificador construído (Duda *et al.*, 2000). Após o treinamento, a taxa de acerto do classificador foi de 98.43%. Para mais detalhes sobre T-HOG e a construção do classificador podem ser encontradas em Minetto *et al.* (2013). Na Figura 10.4 são apresentados os resultados do classificador (classe região de texto) para os retângulos da Figura 10.3.

Figura 10.4: Resultados da classificação de regiões de texto usando o T-HOG.

10.3 Experimentos e resultados

Para avaliar o desempenho do método proposto foram utilizadas as imagens do concurso ICDAR. A base de imagens ICDAR foi originalmente criada para uma competição de localização de textos conhecida como ICDAR- 2003 (Lucas *et al.*, 2003) e posteriormente foi utilizada em uma outra versão da mesma competição denominada ICDAR- 2005 (Lucas, 2005). Apesar de vários trabalhos de localização de texto terem sido publicados após o término da competição, muitos deles ainda

utilizam o conjunto de imagens de ICDAR para divulgar a eficiência dos seus métodos. A base de imagens ICDAR é composta por dois conjuntos de imagens denominadas *TrialTrain* e *TrialTest*. O conjunto *TrialTrain*, composto por 258 imagens, é usado para ajustar ou treinar o método a ser avaliado com o conjunto *TrialTest*, o qual contém 251 imagens. Vale salientar, que o classificador T-HOG foi treinado com as regiões de texto das imagens do conjunto *TrialTrain*. As imagens de cenas contidas em ICDAR variam entre 307×93 a 1280×960 pixels, e as regiões de texto presentes em tais imagens apresentam diferentes características em relação a escala, orientação, cores, iluminação e oclusão. Na Figura 10.5 são apresentadas algumas imagens dos conjuntos *TrialTrain* e *TrialTest*.

Figura 10.5: Exemplos de imagens da base ICDAR. (a–c) imagens do conjunto *TrialTrain*; (d–f) imagens do conjunto *TrialTest*.

Para avaliar o método proposto, é utilizada a mesma metodologia empregada na competição ICDAR-2003 e ICDAR-2005. Nessas competições, cada método reproduz como saída um conjunto de retângulos E , onde cada retângulo $r_e \in E$ delimita uma cadeia de caracteres localizada pelo método. Esse conjunto E de retângulos de saídas é denominado *estimate*. Um outro conjunto T de retângulos verdadeiros, denominados *targets* foi fornecido pelo ICDAR. A partir desses dois conjuntos de retângulos calcula-se a correspondência m_p entre dois retângulos $r_e \in E$ e $r_t \in T$ como sendo

$$m_p(r_e, r_t) = \frac{2 \times |r_e \cap r_t|}{|r_e| + |r_t|}, \quad (10.4)$$

onde $|r|$ é a área do retângulo r . O resultado da correspondência $m_p(r_e, r_t)$ é igual a 1, quando os dois retângulos são idênticos e, 0 quando os retângulos não têm intersecção. Para cada retângulo $r_e \in E$, é encontrada uma correspondência mais próxima no conjunto T , e vice-versa. Portanto, a melhor correspondência $m(r, R)$ para um retângulo r em um conjunto de retângulos R é definido como sendo

$$m(r, R) = \max_{r_i \in R} \{m_p(r, r_i)\}. \quad (10.5)$$

Então, a taxa de acerto r e taxa de precisão p são definidas como sendo:

$$r = \frac{\sum_{r_t \in T} m(r_t, E)}{|T|}, \quad (10.6)$$

$$p = \frac{\sum_{r_e \in E} m(r_e, T)}{|E|}. \quad (10.7)$$

É também adotada uma média harmônica f_m para combinar os valores de taxa de acerto e taxa de precisão em uma única medida de qualidade. O peso relativo dessa medida é controlado pelo parâmetro α , cujo valor é igual a 0,5, o que significa que a taxa de acerto e a taxa de precisão tem pesos iguais. A média harmônica f_m é definida como sendo

$$f_m = \frac{1}{\frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r}}. \quad (10.8)$$

Na Tabela 10.1 apresenta-se uma comparação dos métodos encontrados na literatura, incluindo o método proposto, que foram avaliados com as imagens de ICDAR e sua métrica.

Tabela 10.1: Tabela comparativa de diferentes métodos para localização de textos.

Método	Precisão	Acerto	Média harmônica
Pan ⁷	67%	71%	69%
SnooperText ⁹	74%	63%	68%
Epshtein ⁵	73%	60%	66%
Hinnerk Becker ⁴	62%	67%	64%
Alex Chen ⁴	60%	60%	60%
Método proposto	54%	60%	57%
Alves ⁸	55%	51%	53%
Ashida ³	55%	46%	50%
Retornaz ⁶	41%	57%	48%
HWDavid ³	44%	46%	45%
Wolf ³	30%	44%	36%
Qiang Zhu ⁴	33%	40%	36%
Jisoo Kim ⁴	22%	28%	25%
Nobuo Ezaki ⁴	18%	36%	24%
Todoran ³	19%	18%	18%
Full ³	10%	6%	8%

10.4 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma aplicação dos últimos *levelings* em um problema de localização de texto em imagens de cenas. Resultados experimentais utilizando as imagens e métricas do concurso ICDAR evidenciam que a abordagem proposta tem resultados comparáveis a outras abordagens para localização de texto. O tempo médio para o processamento de uma imagem ficou em torno de 4.3 segundos em um computador com processador *i7* e 8GB de memória RAM.

³Resultado reportado em Lucas *et al.* (2003)

⁴Resultado reportado em Lucas (2005)

⁵Resultado reportado em Epshtein *et al.* (2010)

⁶Resultado reportado em Retornaz e Marcotegui (2007)

⁷Resultado reportado em Pan *et al.* (2009)

⁸Resultado reportado em Alves e Hashimoto (2010)

⁹Resultado reportado em Minetto *et al.* (2014)

Conclusões

Nesta tese foi apresentada a classe dos operadores residuais, últimos *levelings*, os quais consistem de poderosos operadores residuais definidos a partir de resíduos gerados por operadores *levelings* consecutivos de um espaço de escala baseado em *levelings*. Assim, objetos contrastantes podem ser detectados se relevantes resíduos são gerados quando eles são filtrados por um desses *levelings*. Com base nessas considerações, as principais contribuições originais desta tese, foram: (i) mostrar que árvores construídas a partir de conjuntos de níveis representam espaços de escalas baseados em *levelings*; (ii) introduzir a classe dos últimos *levelings*, passando por definições, conceitos, algoritmos, propriedades e relações com outros operadores conhecidos na literatura; (iii) apresentar algumas estratégias para construção de operadores últimos *levelings*; (iv) desenvolver aplicações baseadas em últimos *levelings* para problemas de análise e processamento de imagens. Além disso, foram desenvolvidos *plugins* para o popular *software* livre ImageJ que dão acesso a alguns operadores últimos *levelings* apresentados nesta tese.

11.1 Trabalhos futuros

A partir deste trabalho, novas pesquisas podem ser desenvolvidas. Neste sentido é apontada a seguir uma lista de sugestões para continuação deste trabalho:

- Estender os últimos *levelings* para imagens coloridas e, em especial, verificar a possibilidade de mudança do espaço das cores, como o proposto por [Chong et al. \(2008\)](#).
- Estender o conceito dos últimos *levelings*. Os últimos *levelings* extraem os máximos resíduos presentes na imagem para cada *pixels*. Este resíduo é calculado com base nas diferenças entre níveis de cinza. Neste sentido, podemos utilizar outras informações, além do nível de cinza do *pixel*, para calcular o valor do resíduo, como por exemplo, uma informação de similaridade da CC contendo o *pixel*.
- Relacionar teorias baseadas em decomposição de conjuntos de níveis para extração de objetos (como por exemplo: *attribute profiles* ([Mura et al., 2010](#)), filtros baseados em vetor de atributos ([Urbach et al., 2005](#)) e espaço de formas baseado em árvores ([Xu, 2013](#))) com os últimos *levelings*.

Parte IV

Apêndices

Produções durante o doutorado

Publicações

- Alves, W. A. L., Morimitsu, A. e Hashimoto, R. F., *Extraction of numerical residues in families of levelings by tree of shapes*. IX Workshop de visão computacional, Rio de Janeiro-RJ, 2013.
- Alves, W. A. L., Morimitsu, A., Castro, J. S. e Hashimoto, R. F., *Extraction of numerical residues in families of levelings*. XXVI Conference on Graphics, Patterns and Images, (SIB-GRAPI), Arequipa-Peru, 2013.
- Alves, W.A.L., Hashimoto, R., *Ultimate grain filter*. IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), Paris, France, pp. 2953-2957, 2014.
- Alves, W.A.L., Morimitsu, A., Hashimoto, R.F., *Scale-space representation based on levelings through hierarchies of level sets*. ISMM 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9082, pp. 265-276. Springer, Heidelberg (2015).
- Morimitsu, A., Alves, W.A.L., Hashimoto, R.F.: *Incremental and Efficient Computation of Families of Component Trees*. ISMM 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9082, pp. 681-692. Springer, Heidelberg (2015).

Referências Bibliográficas

- Al-Diri et al. (2009)** B. Al-Diri, A. Hunter e D. Steel. An active contour model for segmenting and measuring retinal vessels. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 28(9):1488–1497. ISSN 0278-0062. doi: 10.1109/TMI.2009.2017941. Citado na pág. [102](#), [106](#)
- Alves e Hashimoto (2014)** Wonder A. L. Alves e Ronaldo Hashimoto. Ultimate grain filter. Em *2014 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) (ICIP 2014)*, páginas 2953–2957, Paris, France. Citado na pág. [2](#), [3](#), [4](#), [34](#), [40](#), [51](#), [65](#), [70](#), [71](#)
- Alves et al. (2015)** Wonder A. L. Alves, Alexandre Morimitsu e Ronaldo F. Hashimoto. Scale-space representation based on levelings through hierarchies of level sets. Em *Proceedings of the 12th International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, ISMM '15. Citado na pág. [53](#)
- Alves e Hashimoto (2010)** Wonder Alexandre Luz Alves e Ronaldo Fumio Hashimoto. Text regions extracted from scene images by ultimate attribute opening and decision tree classification. Em *Proceedings of the 23rd SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images*, páginas 360–367. Citado na pág. [5](#), [51](#), [115](#), [119](#)
- Alves et al. (2013)** Wonder Alexandre Luz Alves, Alexandre Morimitsu, Joel Sánchez Castro e Ronaldo Fumio Hashimoto. Extraction of numerical residues in families of levelings. Em Kim Boyer, Nina Hirata, Luciana Nedel e Claudio Silva, editors, *Proceedings...*, Los Alamitos. Conference on Graphics, Patterns and Images, 26. (SIBGRAPI), IEEE Computer Society's Conference Publishing Services. URL <http://urlib.net/sid.inpe.br/sibgrapi/2013/07.14.21.20>. Citado na pág. [3](#), [4](#), [34](#), [40](#), [65](#), [70](#)
- Banon e Barrera (1994)** G. J. F. Banon e J. Barrera. *Bases da morfologia matemática para análise de imagens binárias*. Escola de Computação, Recife. Citado na pág. [1](#), [12](#), [13](#)
- Berger et al. (2007)** Ch Berger, T. Géraud, R. Levillain, N. Widynski, A. Baillard e E. Bertin. Effective component tree computation with application to pattern recognition in astronomical imaging. Em *Image Processing, 2007. ICIP 2007. IEEE International Conference on*, volume 4, páginas IV – 41–IV – 44. doi: 10.1109/ICIP.2007.4379949. Citado na pág. [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [43](#), [47](#)
- Beucher (1994)** Serge Beucher. Digital skeletons in euclidean and geodesic spaces. *Signal Processing*, 38(1):127 – 141. ISSN 0165-1684. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0165-1684\(94\)90061-2](http://dx.doi.org/10.1016/0165-1684(94)90061-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165168494900612>. Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing. Citado na pág. [2](#), [3](#)
- Beucher (2007)** Serge Beucher. Numerical residues. *Image Vision Comput.*, 25(4):405–415. ISSN 0262-8856. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.imavis.2006.07.020>. Citado na pág. [2](#), [3](#), [65](#), [69](#), [70](#), [71](#), [80](#)
- Breen e Jones (1996)** Edmond J. Breen e Ronald Jones. Attribute openings, thinnings, and granulometries. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3):377 – 389. ISSN 1077-3142. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/cviu.1996.0066>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077314296900661>. Citado na pág. [16](#)

- Cardelino et al. (2006)** J. Cardelino, G. Randall, M. Bertalmio e V. Caselles. Region based segmentation using the tree of shapes. Em *Image Processing, 2006 IEEE International Conference on*, páginas 2421–2424. doi: 10.1109/ICIP.2006.312951. Citado na pág. 40
- Carlinet e Géraud (2014)** E. Carlinet e T. Géraud. A comparative review of component tree computation algorithms. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 23(9):3885–3895. ISSN 1057-7149. doi: 10.1109/TIP.2014.2336551. Citado na pág. 37, 38, 40
- Caselles e Monasse (2002)** Vicent Caselles e Pascal Monasse. Grain filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 17(3):249–270. Citado na pág. 16, 40, 63, 64
- Caselles e Monasse (2010)** Vicent Caselles e Pascal Monasse. Geometric description of images as topographic maps. *Lecture Notes in Mathematics*. Citado na pág. 41, 42, 56
- Caselles et al. (2008)** Vicent Caselles, Enric Meinhardt e Pascal Monasse. Constructing the tree of shapes of an image by fusion of the trees of connected components of upper and lower level sets. *Positivity*, 12(1):55–73. ISSN 1385-1292. doi: 10.1007/s11117-007-2150-2. Citado na pág. 42, 57
- Chong et al. (2008)** Hamilton Y. Chong, Steven J. Gortler e Todd Zickler. A perception-based color space for illumination-invariant image processing. *ACM Trans. Graph.*, 27(3):61:1–61:7. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1360612.1360660. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1360612.1360660>. Citado na pág. 121
- Couprie e Bertrand (1997)** Michel Couprie e Gilles Bertrand. Topological grayscale watershed transformation. Em *IN SPIE VISION GEOMETRY V PROCEEDINGS*, 3168, páginas 136–146. Citado na pág. 34
- Couprie et al. (2005)** Michel Couprie, Laurent Najman e Gilles Bertrand. Quasi-linear algorithms for the topological watershed. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2-3): 231–249. ISSN 0924-9907. doi: 10.1007/s10851-005-4892-4. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-005-4892-4>. Citado na pág. 34
- Crozet e Géraud (2014)** S. Crozet e T. Géraud. A first parallel algorithm to compute the morphological tree of shapes of nd images. Em *Image Processing (ICIP), 2014 IEEE International Conference on*, páginas 2933–2937. doi: 10.1109/ICIP.2014.7025593. Citado na pág. 47
- Desolneux et al. (2001)** Agnès Desolneux, Lionel Moisan e Jean-Michel Morel. Edge detection by helmholtz principle. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3):271–284. ISSN 0924-9907. doi: 10.1023/A:1011290230196. URL <http://dx.doi.org/10.1023/ACitadonapág>. 40
- Donoser e Bischof (2006)** M. Donoser e H. Bischof. Efficient maximally stable extremal region (mser) tracking. Em *Computer Vision and Pattern Recognition, 2006 IEEE Computer Society Conference on*, volume 1, páginas 553–560. doi: 10.1109/CVPR.2006.107. Citado na pág. 94
- Dougherty e Lotufo (2003)** Edward R. Dougherty e Roberto A. Lotufo. *Hands-on Morphological Image Processing*. SPIE Press, Bellingham, WA. ISBN 0-8194-4720-X. Citado na pág. 1, 2, 12, 13, 16, 61
- Duda et al. (2000)** Richard O. Duda, Peter E. Hart e David G. Stork. *Pattern Classification*. Wiley-Interscience, second edition ed. Citado na pág. 117
- Epshtein et al. (2010)** Boris Epshtein, Eyal Ofek e Yonatan Wexler. Detecting text in natural scenes with stroke width transform. *The Twenty-Third IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Citado na pág. 119

- Fabrizio e Marcotegui (2009)** Jonathan Fabrizio e Beatriz Marcotegui. Fast implementation of the ultimate opening. Em *Proceedings of the 9th International Symposium on Mathematical Morphology*, ISMM '09, páginas 272–281. ISBN 978-3-642-03612-5. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03613-2_25. Citado na pág. 3, 34, 70, 78
- Falcao et al. (2001)** A. X. Falcao, Bruno S. Cunha e Roberto A. Lotufo. Design of connected operators using the image foresting transform, 2001. URL <http://dx.doi.org/10.1117/12.431120>. Citado na pág. 61, 62
- Falcão et al. (2000)** A.X. Falcão, J.K. Udupa e F.K. Miyazawa. An ultra-fast user-steered image segmentation paradigm: live wire on the fly. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 19(1): 55–62. ISSN 0278-0062. doi: 10.1109/42.832960. Citado na pág. 40
- Garrido (2002)** L. Garrido. *Hierarchical Region Based Processing of Images and Video Sequences: Application to Filtering, Segmentation and Information Retrieval*. phd, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). URL <http://hdl.handle.net/10803/6878>. Citado na pág. 55
- Gatos et al. (2009)** B. Gatos, K. Ntirogiannis e I. Pratikakis. Icdar 2009 document image binarization contest (dibco 2009). Em *Document Analysis and Recognition, 2009. ICDAR '09. 10th International Conference on*. doi: 10.1109/ICDAR.2009.246. Citado na pág. 108, 109, 110
- Grimaud (1992)** Michel Grimaud. New measure of contrast: the dynamics. volume 1769, páginas 292–305. doi: 10.1117/12.60650. URL <http://dx.doi.org/10.1117/12.60650>. Citado na pág. 87
- Géraud et al. (2013)** Thierry Géraud, Edwin Carlinet, Sébastien Crozet e Laurent Najman. A quasi-linear algorithm to compute the tree of shapes of nd images. Em CrisL.Luengo Hendriks, Gunilla Borgefors e Robin Strand, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, volume 7883 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 98–110. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-38293-2. doi: 10.1007/978-3-642-38294-9_9. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-38294-9_9. Citado na pág. xvii, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47
- Heijmans (1994)** H. J. A. M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston. Citado na pág. 1, 11, 12
- Hernandez e Marcotegui (2011)** Jorge Hernandez e Beatriz Marcotegui. Shape ultimate attribute opening. *Image and Vision Computing*, 29(8):533 – 545. ISSN 0262-8856. doi: DOI:10.1016/j.imavis.2011.05.001. Citado na pág. 2, 3, 4, 5, 51, 70, 71, 90, 91
- Hoover et al. (2000)** A. Hoover, V. Kouznetsova e M. Goldbaum. Locating blood vessels in retinal images by piecewise threshold probing of a matched filter response. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 19(3):203–210. ISSN 0278-0062. doi: 10.1109/42.845178. Citado na pág. 101, 102, 104, 106
- Jiang e Mojon (2003)** Xiaoyi Jiang e D. Mojon. Adaptive local thresholding by verification-based multithreshold probing with application to vessel detection in retinal images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 25(1):131–137. ISSN 0162-8828. Citado na pág. 102, 106
- Jones (1999)** Ronald Jones. Connected filtering and segmentation using component trees. *Computer Vision and Image Understanding*, 75(3):215 – 228. ISSN 1077-3142. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/cviu.1999.0777>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077314299907774>. Citado na pág. 34, 35
- Jung et al. (2004)** Keechul Jung, Kwang In Kim e Anil K. Jain. Text information extraction in images and video: a survey. *Pattern Recognition*, 37(5):977–997. Citado na pág. 113

- Keshet (2007)** Renato Keshet. Adjacency lattices and shape-tree semilattices. *Image and Vision Computing*, 25(4):436–446. ISSN 02628856. doi: 10.1016/j.imavis.2006.04.016. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0262885606001752>. Citado na pág. 40
- Kimmel et al. (2011)** R. Kimmel, Cuiping Zhang, AM. Bronstein e M.M. Bronstein. Are mser features really interesting? *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 33(11):2316–2320. ISSN 0162-8828. doi: 10.1109/TPAMI.2011.133. Citado na pág. 94, 96
- Leite e Guimarães (2001)** Neucimar J. Leite e Sílvia J. F. Guimarães. Morphological residues and a general framework for image filtering and segmentation. *EURASIP J. Appl. Signal Process.*, 2001(1):219–229. ISSN 1110-8657. Citado na pág. 2
- Lipschutz (1971)** Seymour Lipschutz. *Topologia geral*. McGraw-Hill do Brasil. Citado na pág. 7, 9
- Lucas et al. (2003)** S. M. Lucas, A. Panaretos, L. Sosa, A. Tang, S. Wong e R. Young. Icdar 2003 robust reading competitions. *ICDAR03*, 2:682. Citado na pág. xxi, 62, 113, 117, 119
- Lucas (2005)** S.M. Lucas. Icdar 2005 text locating competition results. Em *Document Analysis and Recognition, 2005. Proceedings. Eighth International Conference on*, páginas 80–84 Vol. 1. doi: 10.1109/ICDAR.2005.231. Citado na pág. 117, 119
- Maragos e Ziff (1990)** P. Maragos e R.D. Ziff. Threshold superposition in morphological image analysis systems. *Pattern Analysis and Machine Intel., IEEE Trans. on*, 12:498–504. ISSN 0162-8828. Citado na pág. 16, 60
- Marcotegui et al. (2011)** Beatriz Marcotegui, Jorge Hernandez e Thomas Retornaz. Ultimate opening and gradual transitions. Em *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, volume 6671, páginas 166–177. ISBN 978-3-642-21568-1. doi: 10.1007/978-3-642-21569-8_15. Citado na pág. 2, 65, 70, 86
- Matas et al. (2004)** J. Matas, O. Chum, M. Urban e T. Pajdla. Robust wide-baseline stereo from maximally stable extremal regions. *Image and Vision Computing*, 22(10):761 – 767. ISSN 0262-8856. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.imavis.2004.02.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0262885604000435>. British Machine Vision Computing 2002. Citado na pág. 34, 91, 94
- Matas e Zimmermann (2005)** Jiri Matas e Karel Zimmermann. A new class of learnable detectors for categorisation. Em Heikki Kalviainen, Jussi Parkkinen e Arto Kaarna, editors, *Image Analysis*, volume 3540 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 541–550. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-26320-3. doi: 10.1007/11499145_55. URL http://dx.doi.org/10.1007/11499145_55. Citado na pág. 92
- Mattes et al. (1999)** Julian Mattes, Mathieu Richard e Jacques Demongeot. Tree representation for image matching and object recognition. Em Gilles Bertrand, Michel Couprie e Laurent Perroton, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 298–309. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-65685-2. doi: 10.1007/3-540-49126-0_23. URL http://dx.doi.org/10.1007/3-540-49126-0_23. Citado na pág. 34
- Mendonça e Campilho (2006)** A.M. Mendonça e A. Campilho. Segmentation of retinal blood vessels by combining the detection of centerlines and morphological reconstruction. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 25(9):1200–1213. ISSN 0278-0062. doi: 10.1109/TMI.2006.879955. Citado na pág. 102, 106
- Meyer (1998a)** Fernand Meyer. The levelings. Em *Proceedings of the 4th International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, ISMM '98, páginas 199–206. ISBN 0-7923-5133-9. Citado na pág. 20, 21, 26

- Meyer (1998b)** Fernand Meyer. From connected operators to levelings. Em *Proceedings of the 4th International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, páginas 191–198. ISBN 0-7923-5133-9. Citado na pág. 20, 21, 23, 24, 25, 27, 61, 62, 63
- Meyer (2010)** Fernand Meyer. Levelings and flat zone morphology. *Pattern Recognition, International Conference on*, 0:1570–1573. ISSN 1051-4651. doi: <http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/ICPR.2010.388>. Citado na pág. 3, 4, 5, 51, 65, 70, 71
- Meyer e Maragos (2000)** Fernand Meyer e Petros Maragos. Nonlinear scale-space representation with morphological levelings. *J. of Visual Comm. and Image Representation*, 11:200–0. Citado na pág. 28
- Meyer e Maragos (1999)** Fernand Meyer e Petros Maragos. Morphological scale-space representation with levelings. Em *in Scale-Space'99, ser. Lecture Notes in Computer Science*, páginas 187–198. Springer-Verlag. Citado na pág. 19, 65, 66
- Minetto et al. (2013)** Rodrigo Minetto, Nicolas Thome, Matthieu Cord, Neucimar J. Leite e Jorge Stolfi. T-hog: An effective gradient-based descriptor for single line text regions. *Pattern Recognition*, 46(3):1078 – 1090. ISSN 0031-3203. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.patcog.2012.10.009>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320312004438>. Citado na pág. 114, 116, 117
- Minetto et al. (2014)** Rodrigo Minetto, Nicolas Thome, Matthieu Cord, Neucimar J. Leite e Jorge Stolfi. Snoopertext: A text detection system for automatic indexing of urban scenes. *Computer Vision and Image Understanding*, 122(0):92 – 104. ISSN 1077-3142. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cviu.2013.10.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077314213001914>. Citado na pág. 119
- Monasse (2000)** Pascal Monasse. Morphological representation of digital images and application to registration. *Tese de doutorado, Universidade de Paris-Dauphine*. Citado na pág. 40, 41, 42, 43, 47
- Monasse e Guichard (2000)** Pascal Monasse e Frederic Guichard. Fast computation of a contrast-invariant image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(5):860–872. Citado na pág. 40, 41, 42, 43
- Mura et al. (2010)** Mauro Dalla Mura, Jon Atli Benediktsson, Björn Waske e Lorenzo Bruzzone. Morphological attribute profiles for the analysis of very high resolution images. *IEEE T. Geoscience and Remote Sensing*, 48(10):3747–3762. doi: 10.1109/TGRS.2010.2048116. URL <http://dx.doi.org/10.1109/TGRS.2010.2048116>. Citado na pág. 121
- Najman e Couprie (2006)** Laurent Najman e Michel Couprie. Building the component tree in quasi-linear time. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 15(11):3531–3539. ISSN 1057-7149. doi: 10.1109/TIP.2006.877518. Citado na pág. 34, 37, 92
- Najman e Géraud (2013)** Laurent Najman e Thierry Géraud. Discrete set-valued continuity and interpolation. Em CrisL.Luengo Hendriks, Gunilla Borgefors e Robin Strand, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, volume 7883 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 37–48. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-38293-2. doi: 10.1007/978-3-642-38294-9_4. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-38294-9_4. Citado na pág. 41, 43, 44, 45, 47
- Najman e Talbot (2013)** Laurent Najman e Hugues Talbot. *Mathematical Morphology*. John Wiley & Sons. Citado na pág. 1, 2, 11, 12
- Neumann e Matas (2012)** L. Neumann e J. Matas. Real-time scene text localization and recognition. Em *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2012 IEEE Conference on*, páginas 3538–3545. doi: 10.1109/CVPR.2012.6248097. Citado na pág. 92

- Neumann e Matas (2011)** Lukas Neumann e Jiri Matas. A method for text localization and recognition in real-world images. Em Ron Kimmel, Reinhard Klette e Akihiro Sugimoto, editors, *Computer Vision ? ACCV 2010*, volume 6494 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 770–783. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-19317-0. doi: 10.1007/978-3-642-19318-7_60. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-19318-7_60. Citado na pág. 115
- Newman (1992)** Maxwell Herman Alexander Newman. *Elements of the topology of plane sets of points*. Dover Publications. Citado na pág. 7, 9
- Niblack (1985)** Wayne Niblack. *An Introduction to Digital Image Processing*. Strandberg Publishing Company, Birkeroed, Denmark, Denmark. ISBN 87-872-0055-4. Citado na pág. 111, 112
- Niemeijer et al. (2004)** Meindert Niemeijer, Joes Staal, Bram van Ginneken, Marco Loog e Michael D. Abramoff. Comparative study of retinal vessel segmentation methods on a new publicly available database, 2004. URL <http://dx.doi.org/10.1117/12.535349>. Citado na pág. 102, 106
- Nister e Stewenius (2006)** David Nister e Henrik Stewenius. Scalable recognition with a vocabulary tree. Em *Proceedings of the 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition - Volume 2*, CVPR '06, páginas 2161–2168, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 0-7695-2597-0. doi: 10.1109/CVPR.2006.264. URL <http://dx.doi.org/10.1109/CVPR.2006.264>. Citado na pág. 94
- Nistér e Stewénius (2008)** David Nistér e Henrik Stewénius. Linear time maximally stable extremal regions. Em David Forsyth, Philip Torr e Andrew Zisserman, editors, *Computer Vision ? ECCV 2008*, volume 5303 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 183–196. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-88685-3. doi: 10.1007/978-3-540-88688-4_14. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-88688-4_14. Citado na pág. 36, 38
- Obdrzalek e Matas (2005)** Stepan Obdrzalek e Jiri Matas. Sub-linear indexing for large scale object recognition. Em *BMVC*, páginas 1–10. Citado na pág. 94
- Otsu (1979)** N. Otsu. A threshold selection method from graylevel histograms. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 9. Citado na pág. 111, 112
- Pan et al. (2009)** Yi-Feng Pan, Xinwen Hou e Cheng-Lin Liu. Text localization in natural scene images based on conditional random field. Em *ICDAR '09: Proceedings of the 2009 10th International Conference on Document Analysis and Recognition*, páginas 6–10, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 978-0-7695-3725-2. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/ICDAR.2009.97>. Citado na pág. 119
- Perd'och (2011)** Michal Perd'och. *Maximally Stable Extremal Regions and Local Geometry for Visual Correspondences*. Tese de Doutorado, Czech Technical University in Prague. Citado na pág. 96
- Platt (1998)** J. Platt. Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization. Em B. Schoelkopf, C. Burges e A. Smola, editors, *Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning*. MIT Press. URL <http://research.microsoft.com/~jplatt/smo.html>. Citado na pág. 117
- Pratikakis et al. (2013)** I. Pratikakis, B. Gatos e K. Ntirogiannis. Icdar 2013 document image binarization contest (dibco 2013). Em *Document Analysis and Recognition (ICDAR), 2013 12th International Conference on*, páginas 1471–1476. doi: 10.1109/ICDAR.2013.219. Citado na pág. 108, 109, 110

- Pratikakis et al. (2010)** Ioannis Pratikakis, Basilis Gatos e Konstantinos Ntirogiannis. H-dibco 2010 - handwritten document image binarization competition. Em *Proceedings of the 2010 12th International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*, ICFHR '10, páginas 727–732, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 978-0-7695-4221-8. doi: 10.1109/ICFHR.2010.118. URL <http://dx.doi.org/10.1109/ICFHR.2010.118>. Citado na pág. 108, 109, 110
- Pratikakis et al. (2011)** Ioannis Pratikakis, Basilis Gatos e Konstantinos Ntirogiannis. Icdar 2011 document image binarization contest (dibco 2011). Em *Proceedings of the 2011 International Conference on Document Analysis and Recognition*, ICDAR '11, páginas 1506–1510. IEEE Computer Society. ISBN 978-0-7695-4520-2. doi: 10.1109/ICDAR.2011.299. Citado na pág. 108, 109, 110
- Pratikakis et al. (2012)** Ioannis Pratikakis, Basilis Gatos e Konstantinos Ntirogiannis. Icfhr 2012 competition on handwritten document image binarization (h-dibco 2012). Em *Proceedings of the 2012 International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*, ICFHR '12, páginas 817–822, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 978-0-7695-4774-9. doi: 10.1109/ICFHR.2012.216. URL <http://dx.doi.org/10.1109/ICFHR.2012.216>. Citado na pág. 108, 109, 110
- Retornaz (2007)** Thomas Retornaz. *Automatic detection of text from natural scenes: a semantic descriptor for content based image retrieval*. Theses, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. URL <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00003782>. Citado na pág. 90
- Retornaz e Marcotegui (2007)** Thomas Retornaz e Beatriz Marcotegui. Scene text localization based on the ultimate opening. Em *Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, volume 1 of ISMM '08, páginas 177–188. ISBN 978-85-17-00035-5. Citado na pág. 3, 4, 5, 51, 65, 70, 71, 115, 119
- Salembier e Serra (1995)** P. Salembier e J. Serra. Flat zones filtering, connected operators, and filters by reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4:1153–1160. Citado na pág. 3, 19, 20
- Salembier e Wilkinson (2009)** P. Salembier e M.H.F. Wilkinson. Connected operators. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 26(6):136–157. ISSN 1053-5888. doi: 10.1109/MSP.2009.934154. Citado na pág. 16, 55, 63
- Salembier et al. (1998)** Philippe Salembier, Albert Oliveras e Luis Garrido. Anti-extensive connected operators for image and sequence processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(4):555–570. ISSN 1057-7149. doi: 10.1109/83.663500. Citado na pág. 16, 34, 35, 36, 38, 63, 64
- Sauvola e Pietikäinen (2000)** J. Sauvola e M. Pietikäinen. Adaptive document image binarization. *PATTERN RECOGNITION*, 33:225–236. Citado na pág. 111, 112
- Serra (1982)** Jean Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., New York, USA. Citado na pág. 1, 2, 11, 12, 13, 32
- Serra (1988)** Jean Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 2: Theoretical Advances. Academic Press, London. Citado na pág. 2
- Serra e Vincent (1992)** Jean Serra e Luc Vincent. An overview of morphological filtering. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 11(1):47–108. ISSN 0278-081X. doi: 10.1007/BF01189221. Citado na pág. 2, 14
- Serra e Salembier (1993)** Jean C. Serra e Philippe Salembier. Connected operators and pyramids. Em *Image Algebra and Morphological Image Processing IV*, volume 2030, páginas 65–76. Citado na pág. 19, 20, 24, 25

- Silva (2009)** Alexandre Gonçalves Silva. Uso de árvore de componentes para filtragem, segmentação e detecção de padrões em imagens digitais. *Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas*. Citado na pág. 92
- Silva e de Alencar Lotufo (2011)** Alexandre Gonçalves Silva e Roberto de Alencar Lotufo. Efficient computation of new extinction values from extended component tree. *Pattern Recognition Letters*, 32(1):79 – 90. ISSN 0167-8655. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.patrec.2010.07.019>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167865510002436>. Citado na pág. 34, 88
- Sivic e Zisserman (2003)** Josef Sivic e Andrew Zisserman. Video google: A text retrieval approach to object matching in videos. Em *Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision - Volume 2, ICCV '03*, páginas 1470–, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 0-7695-1950-4. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=946247.946751>. Citado na pág. 94
- Soille (2003)** Pierre Soille. *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA. ISBN 3540429883. Citado na pág. 1, 2, 12, 13, 16, 61
- Soille e Najman (2012)** Pierre Soille e Laurent Najman. On morphological hierarchical representations for image processing and spatial data clustering. Em Ullrich Köthe, Annick Montanvert e Pierre Soille, editors, *Applications of Discrete Geometry and Mathematical Morphology*, volume 7346 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 43–67. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-32312-6. doi: 10.1007/978-3-642-32313-3_4. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-32313-3_4. Citado na pág. 34
- Staal et al. (2004)** J.J. Staal, M.D. Abramoff, M. Niemeijer, M.A. Viergever e B. van Ginneken. Ridge based vessel segmentation in color images of the retina. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(4):501–509. Citado na pág. 101, 102, 104, 106
- Su et al. (2010)** Bolan Su, Shijian Lu e Chew Lim Tan. Binarization of historical document images using the local maximum and minimum. Em *Proceedings of the 9th IAPR International Workshop on Document Analysis Systems, DAS '10*, páginas 159–166, New York, NY, USA. ACM. ISBN 978-1-60558-773-8. doi: 10.1145/1815330.1815351. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1815330.1815351>. Citado na pág. 111, 112
- Tarjan (1975)** Robert Endre Tarjan. Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *J. ACM*, 22(2):215–225. ISSN 0004-5411. doi: 10.1145/321879.321884. URL <http://doi.acm.org/10.1145/321879.321884>. Citado na pág. 37, 38, 40
- Urbach e Wilkinson (2002)** E. R. Urbach e M. H. F. Wilkinson. Shape-only granulometries and grey-scale shape filters. Em *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, volume 2002, páginas 305–314. Citado na pág. 63, 92
- Urbach et al. (2007)** E.R. Urbach, J.B.T.M. Roerdink e M.H.F. Wilkinson. Connected shape-size pattern spectra for rotation and scale-invariant classification of gray-scale images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 29(2):272–285. ISSN 0162-8828. doi: 10.1109/TPAMI.2007.28. Citado na pág. 91, 92
- Urbach et al. (2004)** Erik R. Urbach, Jos B. T. M. Roerdink e Michael H. F. Wilkinson. Connected rotation-invariant size-shape granulometries. Em *Proc. 17th Intl Conf. Pattern Recognition*, páginas 688–691. Citado na pág. 63
- Urbach et al. (2005)** Erik R. Urbach, Niek J. Boersma e Michael H. F. Wilkinson. Vector-attribute filters. Em Christian Ronse, Laurent Najman e Etienne Decencière, editors, *Mathematical Morphology: 40 Years On*, volume 30 of *Computational Imaging and Vision*, páginas

- 95–104. Springer Netherlands. ISBN 978-1-4020-3442-8. doi: 10.1007/1-4020-3443-1_10. URL http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-3443-1_10. Citado na pág. 91, 92, 121
- Vachier e Meyer (1995)** C. Vachier e F. Meyer. Extinction value: a new measurement of persistence. Em *In IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, páginas 254–257. Citado na pág. 87
- Veltkamp (2001)** R.C. Veltkamp. Shape matching: similarity measures and algorithms. Em *Shape Modeling and Applications, SMI 2001 International Conference on.*, páginas 188–197. doi: 10.1109/SMA.2001.923389. Citado na pág. 91
- Veltkamp e Hagedoorn (2000)** Remco C. Veltkamp e Michiel Hagedoorn. Shape similarity measures, properties, and constructions. Em *In Advances in Visual Information Systems, 4th International Conference*, páginas 467–476. Springer. Citado na pág. 91
- Vincent (1994)** Luc Vincent. Morphological area openings and closings for grey-scale images. Em Ying-Lie O, Alexander Toet, David Foster, Henk J.A.M. Heijmans e Peter Meer, editors, *Shape in Picture*, volume 126 of *NATO ASI Series*, páginas 197–208. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-08188-0. doi: 10.1007/978-3-662-03039-4_13. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-03039-4_13. Citado na pág. 16
- Vincent (1993)** Luc Vincent. Morphological grayscale reconstruction in image analysis: applications and efficient algorithms. *Image Processing, IEEE Trans. on*, 2(2):176–201. ISSN 1057-7149. Citado na pág. 60, 61, 62
- Wendt et al. (1986)** P. Wendt, E.J. Coyle e Jr. Gallagher, N.C. Stack filters. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 34(4):898–911. ISSN 0096-3518. doi: 10.1109/TASSP.1986.1164871. Citado na pág. 16, 60
- White e Rohrer (1983)** J. M. White e G. D. Rohrer. Image thresholding for optical character recognition and other applications requiring character image extraction. *IBM J. Res. Dev.*, 27: 400–411. Citado na pág. 111, 112
- Wilkinson et al. (2011)** Michael H.F. Wilkinson, Pierre Soille, Martino Pesaresi e Georgios K. Ouzounis. Concurrent computation of differential morphological profiles on giga-pixel images. Em Pierre Soille, Martino Pesaresi e Georgios K. Ouzounis, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, volume 6671 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 331–342. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-21568-1. doi: 10.1007/978-3-642-21569-8_29. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-21569-8_29. Citado na pág. 36, 38, 60
- Wu et al. (2008)** Jui-Chen Wu, Jun-Wei Hsieh e Yung-Sheng Chen. Morphology-based text line extraction. *Machine Vision Application*, 19(3):195–207. ISSN 0932-8092. Citado na pág. 115
- Xu (2013)** Yongchao Xu. *Tree-based shape spaces: Definition and applications in image processing and computer vision*. Tese de Doutorado, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France. Citado na pág. 55, 63, 92, 121
- Xu et al. (2012)** Yongchao Xu, T. Géraud e L. Najman. Context-based energy estimator: Application to object segmentation on the tree of shapes. Em *Image Processing (ICIP), 2012 19th IEEE International Conference on*, páginas 1577–1580. doi: 10.1109/ICIP.2012.6467175. Citado na pág. 40
- Xu et al. (2013)** Yongchao Xu, Thierry Géraud e Laurent Najman. Two applications of shape-based morphology: Blood vessels segmentation and a generalization of constrained connectivity. Em Cris L. Luengo Hendriks, Gunilla Borgefors e Robin Strand, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, volume 7883 of *Lecture Notes in Computer*

Science, páginas 390–401. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-38293-2. doi: 10.1007/978-3-642-38294-9_33. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-38294-9_33. Citado na pág. 92, 102, 106

Xu et al. (2014) Yongchao Xu, P. Monasse, T. Geraud e L. Najman. Tree-based morse regions: A topological approach to local feature detection. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 23 (12):5612–5625. ISSN 1057-7149. doi: 10.1109/TIP.2014.2364127. Citado na pág. 96

Índice Remissivo

- Árvore de componentes, 34
- Árvore de componentes estendida, 35
- Árvores por meio de posets, 29, 30
- Última abertura, 3
- Última abertura por atributo, 3, 4
- Último filtro por grão, 4
- Último fechamento por atributo, 4
- Pixel*, 9
- Algoritmo para construção de árvore de componentes, 36
- Anti-extensividade, 12
- Auto-complementar, 12
- Auto-dualidade, 12
- Binarização de texto em imagens de documentos históricos, 107
- Caminho, 10
- Complementar, 12
- Componente conexo, 10
- Conjunto de níveis, 32
- Crescente, 12
- Descritores computáveis incrementalmente, 92
- Diagrama de Hasse, 30
- Dualidade, 12
- Elemento estruturante, 13
- Espaço de escala, 3, 4
- espaço de escala, 51, 69
- Espaço de escala com base em *levelings*, 27
- Extensividade, 12
- Extrema regional, 11
- Filtragem com base em regiões estáveis, 94
- Filtragem com base em vetor de atributos, 91
- Filtro morfológico, 1
- Filtros morfológicos, 14, 15
- Filtros por atributos, 16
- Grafo da imagem, 10
- Idempotência, 12
- ImageJ, 5
- Imagem, 9
- Imagem binária, 9
- Imagem de retina, 101
- Imagem em níveis de cinza, 9
- Imagem multibanda, 9
- Localização de textos, 113
- Máxima regional, 11
- Mínima regional, 11
- max-tree, 35
- Medida de desempenho acurácia, 104
- Medida de desempenho especificidade, 104
- Medida de desempenho sensibilidade, 104
- Menor componente, 35
- min-tree, 35
- Morfologia Matemática, 1
- MSER, 94
- MSER+, 94
- MSER-, 94
- Operador, 1
- operador, 51, 69
- Operador *leveling*, 21
- Operador *monotone planing*, 21, 22
- Operador abertura, 13
- Operador abertura por atributo, 16
- Operador conexo, 3, 19, 20
- Operador de imagens, 1
- Operador de subconjuntos, 1
- Operador dilatação, 13
- Operador dilatação condicional, 14
- Operador erosão, 13
- Operador erosão condicional, 14
- Operador fechamento, 13
- Operador fechamento por atributo, 16
- Operador leveling, 4, 21
- Operador limiarização, 16
- Operador reconstrução por dilatação, 14
- Operador reconstrução por erosão, 14
- Operador residual, 2, 3, 5
- Operador residual estendido, 2
- Operadores de imagens, 11
- Operadores de subconjuntos, 11

- Operadores morfológicos, [11](#)
- Operadores visto como relações binárias, [22](#)

- Partição, [11](#)
- Partição das zonas planas, [11](#)
- Perfil de intensidade, [11](#)
- plugins, [5](#)
- poset, [30](#)
- Primitivas, [2](#)

- Relação de adjacência, [9](#)
- Resíduo negativo, [2](#), [4](#)
- Resíduo nulo, [2](#)
- Resíduo positivo, [2](#), [4](#)
- Reticulado completo, [1](#)

- Segmentação de vasos sanguíneos, [101](#)
- Seleção de primitivas baseadas em atributos, [85](#)
- Seleção de primitivas baseadas em imagens marcadoras, [88](#)
- Seleção de primitivas baseadas em transições graduais, [86](#)
- Seleção de primitivas baseadas em valores de extinção, [87](#)

- Zona plana, [10](#)