Densidade local em grafos

Luis Eduardo Zambrano Fernández

TESE DE DOUTORADO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Programa: Pós-Graduação em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, dezembro de 2018.

Densidade local em grafos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 14/11/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Carlos Hoppen UFRGS
- Prof. Dr. Daniel Morgato Martin UFABC
- Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides UFC
- Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota UFABC
- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (presidente) IME-USP

Agradecimentos

O autor agradece ao Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota pela sugestão de considerar o problema da densidade local em grafos com cintura ímpar grande.

Resumo

Fernández, L. E. Z. **Densidade local em grafos** 2018. 45 f. Tese de doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Nós consideramos o seguinte problema. Fixado um grafo H e um número real $\alpha \in (0, 1]$, determine o menor $\beta = \beta(\alpha, H)$ que satisfaz a seguinte propriedade: *se G é um grafo de ordem n no qual cada subconjunto de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices induz mais que βn^2 arestas então G contém H como subgrafo*. Este problema foi iniciado e motivado por Erdős ao conjecturar que todo grafo livre de triângulo de ordem n contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2/50$ arestas.

Nosso resultado principal mostra que *i)* todo grafo de ordem n livre de triângulos e pentágonos contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2/64$ arestas, e *ii)* se G é um grafo regular de ordem n livre de triângulo, com grau excedendo $n/3$, então G contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2/50$ arestas. Se além disso G não é 3-cromático então G contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz menos de $n^2/54$ arestas. Como subproduto e confirmando uma conjectura de Erdős assintoticamente, temos que todo grafo regular de ordem n livre de triângulo com grau excedendo $n/3$ pode ser tornado bipartido pela omissão de no máximo $(1/25 + o(1))n^2$ arestas. Nós também fornecemos um contraexemplo a uma conjectura de Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp.

Palavras-chave: Densidade local, teorema de Turán, metades esparsas, biseções de grafos.

Abstract

Fernández, L. E. Z. **Local density in graphs** 2018. 45 f. Tese de doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

We consider the following problem. Fixed a graph H and a real number $\alpha \in (0, 1]$, determine the smallest $\beta = \beta(\alpha, H)$ satisfying the following property: *if G is a graph of order n such that every subset of $\lfloor \alpha n \rfloor$ vertices spans more than βn^2 edges then G contains H as a subgraph*. This problem was initiated and motivated by Erdős who conjectured that every triangle-free graph of order n contains a subset of $\lfloor n/2 \rfloor$ vertices that spans at most $n^2/50$ edges.

Our main result shows that *i)* every triangle- and pentagon-free graph of order n contains a subset of $\lfloor n/2 \rfloor$ vertices inducing at most $n^2/64$ edges and, *ii)* if G is a triangle-free regular graph of order n with degree exceeding $n/3$ then G contains a subset of $\lfloor n/2 \rfloor$ vertices inducing at most $n^2/50$ edges. Furthermore, if G is not 3-chromatic then G contains a subset of $\lfloor n/2 \rfloor$ vertices inducing less than $n^2/54$ edges. As a by-product and confirming a conjecture of Erdős asymptotically, we obtain that every n -vertex triangle-free regular graph with degree exceeding $n/3$ can be made bipartite by removing at most $(1/25 + o(1))n^2$ edges. We also provide a counterexample to a conjecture of Erdős, Faudree, Rousseau and Schelp.

Keywords: Local density, Turán's theorem, sparse-halves, bisections of graphs.

Sumário

Agradecimientos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Sumário	viii
Lista de Símbolos	ix
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Principais resultados	2
1.2 Notação	6
1.3 Extensões e problemas relacionados	7
1.3.1 Problemas tipo Turán-Ramsey	7
1.3.2 O Teorema de Turán	8
1.3.3 Número de pentágonos e diferença com o subgrafo bipartido máximo	9
1.3.4 Max-Cut e partições judiciosas	11
2 Grafos livres de triângulos e pentágonos	13
2.1 Corte em grafos (α, β) -densos	15
2.2 Prova do Teorema 1.3	16
2.3 Grafos livres de triângulo com grau médio acotado	17
3 Grafos densos livres de triângulo	21

3.1 Prova do Teorema 1.5	25
4 Uma conjectura de Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp	29
4.1 Grafos de Ramsey	29
4.2 Um contraexemplo para a Conjectura 1.7	30
5 Conclusões e considerações finais	33
A Prova computacional do Teorema 1.8	35
Referências Bibliográficas	39

Lista de Símbolos

Parâmetros de um grafo

$\alpha(\mathbb{G})$	Número de independência
$\chi(\mathbb{G})$	Número cromático
$\delta(\mathbb{G})$	Grau mínimo
$\Delta(\mathbb{G})$	Grau máximo
$\bar{d}(\mathbb{G})$	Grau médio
$diam(\mathbb{G})$	Diâmetro
$e(\mathbb{G})$	Número de arestas
$girth(\mathbb{G})$	Cintura
$ogirth(\mathbb{G})$	Cintura ímpar
$\kappa(\mathbb{G})$	Conectividade
$maxCut(\mathbb{G})$	Tamanho máximo de um subgrafo bipartido
$\omega(\mathbb{G})$	Número de clique
$ \mathbb{G} $	Número de vértices

Família de Grafos

C_n	Ciclo de n vértices
G^c	Grafo complemento de G
$\mathfrak{cCle}$	Grafo de Clebsch
$\mathfrak{cGew}$	Grafo de Gewirtz
$\mathfrak{cGrö}$	Grafo de Grötzsch
$\mathfrak{cHiSi}$	Grafo de Higman-Sims
$\mathfrak{cHoSi}$	Grafo de Hoffman-Singleton
$\mathfrak{cKne}_{n,k}$	Grafo de Kneser de $\binom{n}{k}$ vértices
$\mathfrak{cMöb}_n$	Grafo escada de Möbius de ordem n
$\mathfrak{cWag}$	Grafo de Wagner
Γ_i	Grafo de Andrásfai i -regular
$\Gamma_{i,k}$	(i, k) -grafo de Andrásfai generalizado
$H^{[n]}$	Blow-up balanceado de n vértices do grafo H
K_r	Grafo completo de r vértices
$K_{r,s}$	Grafo bipartido completo com partições de tamanho r e s
$\mathfrak{cPet}$	Grafo de Petersen
$\mathfrak{cPet}/e$	Grafo de Petersen com uma aresta contraída
$srg(n, k, \lambda, \mu)$	Grafos fortemente regulares com parâmetros (n, k, λ, μ)
$T_{n,r}$	Grafo de Turán de n vértices com r partições
T_i	Grafo Vega de $3i + 7$ vértices

Outros símbolos

$A(\mathbf{G})$	Matriz de adjacência do grafo $\mathbf{G}$
$d(v)$	Grau do vértice v
$e(U, W)$	Número de arestas com um extremo em U e outro em W
$E(\mathbf{G})$	Conjunto de arestas de $\mathbf{G}$
$\mathbb{E}[X]$	Valor esperado da variável aleatória X
$\mathbf{G} _U$	Subgrafo de $\mathbf{G}$ induzido pelo conjunto U
$(\mathbf{H}, \boldsymbol{w})$	Grafo ponderado $\mathbf{H}$ com função peso $\boldsymbol{w}$
$\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$	$\mathbf{H}$ é subgrafo de $\mathbf{G}$
$[k]$	Conjunto de inteiros $\{1, \dots, k\}$
$\lambda_i(A)$	i -ésimo maior autovetor da matriz A
$L(\mathbf{G})$	Matriz Laplaciana do grafo $\mathbf{G}$
$\ \phi\ $	Norma Euclidiana do vetor ϕ
$\ M\ _{op}$	Operador norma de uma matriz M
$\mathbb{P}[E]$	Probabilidade do evento E
$\langle \phi, \psi \rangle$	Produto interior de ϕ e ψ
$Q(\mathbf{G})$	Matriz Laplaciana sem sinal de $\mathbf{G}$
$\mathcal{S}(v)$	Classe de similaridade do vértice v
$s(v)$	Tamanho da classe de similaridade do vértice v
$V(\mathbf{G})$	Conjunto de vértices de $\mathbf{G}$
$\{X_k\}$	Família de subconjuntos de X de tamanho k

Lista de Figuras

1	Blow-up balanceado do pentágono e do grafo de Petersen sobre $n = 10k$ vértices . .	2
2	Melhor cota inferior para $\beta(\alpha, K_3)$ conhecida nesta data	6
3	Exemplos de grafos livres de triângulo não bipartidos	10
4	Grafos de Andrásfai Γ_i , ($i = 1 \dots 4$)	14
5	Estrutura global de um grafo Vega	23
6	Grafos Vega para $i=2$	24
7	Blow-up do grafo de Grötzsch de 29 vértices	25

Capítulo 1

Introdução

Matemática Discreta é a disciplina que lida com objetos matemáticos enumeráveis (como conjuntos, vetores, matrizes, funções, grafos, etc.), suas propriedades e as relações entre essas propriedades. A *teoria de grafos extremais*, um recente subtópico da matemática discreta, tem experimentado um significativo crescimento nas últimas décadas devido principalmente a sua rica família de conjecturas, problemas, técnicas e aplicações em ciência da computação, otimização combinatória, física, química, entre outras.¹ Enquanto isso, o estudo de grandes grafos, espaços vetoriais e análise espectral estão consideradas como *teorias fundamentais no suporte para o futuro da ciência da computação* (cf. Hopcroft, Soundarajan e Wang [HSW11]).

No presente trabalho, estudamos o *problema da densidade local em grafos*, um problema da teoria de grafos extremais que, fixado um real $0 < \alpha \leq 1$ e um grafo H , pergunta pelo menor real $\beta = \beta(\alpha, H)$ que satisfaz a seguinte propriedade: se G é um grafo de n vértices no qual cada subconjunto de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices induz mais que βn^2 arestas então G contém H como subgrafo. Por exemplo, o teorema de Mantel [Man07] garante que $\beta(1/2, K_3) = 1/4$, onde K_3 é o triângulo (o grafo completo de três vértices). Este problema foi iniciado e motivado em 1976 pelo célebre matemático húngaro Paul Erdős [Erd76], que para o caso particular $\alpha = 1/2$, $H = K_3$, perguntou se vale a igualdade $\beta = 1/50$.

Problema 1.1. (Erdős [Erd76]).

25. Let $\mathcal{G}(n)$ be a graph of n vertices. Is it true that if every induced (or spanned) subgraph of $\mathcal{G}(n)$ having $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vertices has more than $\frac{n^2}{50}$ edges then $\mathcal{G}$ contains a triangle?

A cota inferior $\beta(1/2, K_3) \geq 1/50$ é fornecida, por exemplo, pelo grafo de Petersen $\mathfrak{cPet}$, um grafo livre de triângulo com dez vértices no qual o mínimo sobre o número de arestas de subgrafos induzidos sobre cinco vértices é igual a dois. De fato, blow-ups balanceados de $\mathfrak{cPet}$ e do pentágono $\mathfrak{C}_5$ sobre $n = 10k$ vértices, com k um inteiro positivo, são famílias infinitas de grafos que fornecem $\beta(1/2, K_3) \geq 1/50$, (veja Figura 1). Um *blow-up sobre n vértices* de um grafo H é o grafo que resulta de substituir cada vértice v em H por um conjunto independente $I(v)$ satisfazendo $n = \sum_{v \in V(H)} |I(v)|$, e cada aresta uv de H por um grafo bipartido completo com partições $I(u)$ e $I(v)$. O blow-up é *balanceado* se as partições tem tamanhos tão iguais como seja possível. Neste caso escrevemos $H^{[n]}$.

¹A *teoria de grafos* foi outrora considerada como “*tipos de problemas combinatórios de natureza estrutural*” e portanto, parte da *combinatória* (tópico da matemática discreta que surgiu no século XVII com os trabalhos de Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Jakob Bernoulli e Gottfried Leibniz). No entanto, os primórdios da *teoria de grafos* podem ser situados no trabalho de Leonard Euler “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” apresentado em 1735 na Academia de Ciências de São Petersburgo. Este é um dos artigos fundacionais da matemática moderna; contém, por exemplo, a primeira prova de que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao duplo do número de arestas e registra o descobrimento da primeira propriedade topológica: a *característica de Euler*. Para uma breve revisão histórica veja Baranov e Stechkin [BS95, p. 1] e Shields [Shi12].

Figura 1: *Blow-up balanceado do pentágono e do grafo de Petersen sobre $n = 10k$ vértices*

Para um número real $\alpha \in (0, 1]$ e um grafo G com n vértices, o inteiro $e_\alpha(G)$ é o mínimo sobre o número de arestas induzidas por subconjuntos de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices de G , i.e.

$$e_\alpha(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{ e(U) : U \subseteq V(G), |U| = \lfloor \alpha n \rfloor \}.$$

O quociente $e_\alpha(G)/n^2$ é a α -densidade local de G . Assim, a questão no Problema 1.1 é, se para $\alpha = 1/2$, existem grafos livres de triângulo com α -densidade local estritamente maior aos blow-ups balanceados (sobre $10k$ vértices) de C_5 e $gPet$? Erdős conjecturou que a resposta a esta pergunta é negativa, i.e. que, de fato, vale a igualdade $\beta(1/2, K_3) = 1/50$.

Conjectura 1.2 (Erdős, 1976 [Erd76, Problem 25]). *Todo grafo G de ordem n livre de triângulo contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2/50$ arestas.*

Nesta data, a Conjectura 1.2 permanece aberta.²

1.1 Principais resultados

Neste documento estamos especialmente interessados em determinar condições para as quais um grafo G livre de triângulo de ordem n contém um subgrafo induzido de ordem $\lfloor n/2 \rfloor$ com no máximo $n^2/50$ arestas. Tipicamente, considera-se uma propriedade adicional no grafo G de importância combinatória (enfraquecendo assim a Conjectura 1.2), e provamos que, nestas condições, G satisfaz a relação

$$e_{1/2}(G) \leq n^2/50. \quad (1.1)$$

Primeiro, nós consideramos grafos cujas propriedades estruturais “se afastam” das propriedades estruturais dos grafos $C_5^{[n]}$ e $gPet^{[n]}$. Os grafos $C_5^{[n]}$ e $gPet^{[n]}$ são densos com cintura ímpar cinco.³ Para tanto, considera-se grafos com cintura ímpar estritamente maior que cinco, como também grafos livres de triângulo com grau médio acotado. Prova-se que, em ambos os casos, a relação (1.1) vale.

Grafos livres de triângulos e pentágonos

Claramente, um grafo G é livre de triângulo se e só se $ogirth(G) \geq 5$. Nós mostramos que se a desigualdade é estrita então $e_{1/2}(G) \leq n^2/64$.

Teorema 1.3. *Se G é um grafo de n vértices e cintura ímpar $ogirth(G) > 5$. Então, G contém $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induzem no máximo $n^2/64$ arestas.*

²Num artigo de publicação póstuma, Erdős [Erd97, Problem 1] encorajou a comunidade acadêmica a não esquecer várias de suas conjecturas e, como costumava, ofereceu uma simbólica recompensa monetária de US\$ 250 pela prova ou refutação da Conjectura 1.2. Para alguns autores, isto é uma indicação sólida que esta conjectura é altamente não trivial (cf. e.g. [Sud11, §5.1]).

³O tamanho do menor ciclo ímpar num grafo G é a sua *cintura ímpar* $ogirth(G)$, definida ∞ se G não contém ciclos ímpares. Uma sequência de grafos (G_n) é *densa* se $|G_n| \rightarrow \infty$ e $e(G_n) = \Omega(|G_n|^2)$.

O [Teorema 1.3](#) complementa um recente resultado de Bedenknecht, Mota, Reiher e Schacht [\[BMRS17\]](#) que provam que se $\mathbf{G}$ é homomorfo a algum grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,k}$ então $e_{1/2}(\mathbf{G}) \leq n^2 / (2(2k+1)^2)$. O grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,k}$, com $i, k \geq 2$ inteiros, é um grafo i -regular livre de triângulo de cintura ímpar $2k+1$ (cf. [Definição 2.6](#)).

A constante $1/64$ no [Teorema 1.3](#) poderia não ser justa. Em particular, é mais fraca que $1/98$, o valor que segue do resultado em [\[BMRS17\]](#) antes mencionado, para $k = 3$. Contudo, e em contraste com o resultado em [\[BMRS17\]](#), a cota $e_{1/2}(\mathbf{G}) \leq n^2/64$ que garante o [Teorema 1.3](#) independe do homomorfismo de $\mathbf{G}$.

Grafos com grau médio acotado

Para grafos livres de triângulo de ordem n com grau médio acotado, prova-se em particular que a condição $\bar{d}(\mathbf{G}) \leq \frac{7}{40}n$ implica [\(1.1\)](#). Por causa da relação $\bar{d}(\mathbf{G}) = 2e(\mathbf{G})/n$, resultados sobre o número de arestas $e(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ tem seus equivalentes enunciados para o grau médio $\bar{d}(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$.

Proposição 1.4. *Seja $\mathbf{G}$ um grafo livre de triângulos de ordem n com no máximo $\frac{7}{80}n^2$ arestas. Então $\mathbf{G}$ contém um subgrafo induzido de ordem $\lfloor n/2 \rfloor$ com no máximo $n^2/50$ arestas.*

A [Proposição 1.4](#) melhora um resultado em Keevash e Sudakov [\[KS06\]](#) onde mostra-se que a relação [\(1.1\)](#) vale para grafos livres de triângulo com $e(\mathbf{G}) \leq \frac{1}{12}n^2$ ou $e(\mathbf{G}) \geq \frac{1}{5}n$.

Grafos densos livres de triângulos

Em segundo lugar, considera-se grafos livres de triângulo com grau mínimo $\delta(\mathbf{G}) > n/3$. Como usual, $n = |\mathbf{G}|$ é o número de vértices de $\mathbf{G}$. Devido a um resultado de Brandt e Thomassé [\[BT10\]](#) sabe-se que grafos com $\delta(\mathbf{G}) > n/3$ admitem uma partição de seus vértices em no máximo quatro conjuntos independentes, i.e. $\chi(\mathbf{G}) \leq 4$. Este importante resultado resolve um problema de Erdős e Simonovits [\[ES73\]](#).

Como todo grafo bipartido de ordem n contém um conjunto independente de cardinalidade pelo menos $n/2$, o caso $\chi(\mathbf{G}) \leq 2$ satisfaz [\(1.1\)](#) trivialmente. O caso $\chi(\mathbf{G}) = 3$ segue dos resultados de Jin [\[Jin93\]](#), Chen, Jin e Koh [\[CJK97\]](#) e do resultado principal em Bedenknecht, Mota, Reiher e Schacht [\[BMRS17\]](#). Isto é, se $\mathbf{G}$ é livre de triângulo com grau mínimo $\delta(\mathbf{G}) > n/3$ e número cromático $\chi(\mathbf{G}) = 3$ então $e_{1/2}(\mathbf{G}) \leq n^2/50$.

Jin [\[Jin93\]](#) mostrou que, se $\mathbf{G}$ é um grafo de ordem n livre de triângulo com $\delta(\mathbf{G}) > \frac{i+1}{3i+2}n$, para algum $1 \leq i \leq 9$, então $\mathbf{G} \rightarrow \Gamma_i$, i.e. $\mathbf{G}$ é homomorfo ao grafo de Andrásfai Γ_i (cf. [Definição 2.2](#)). Chen, Jin e Koh [\[CJK97\]](#) provaram que um grafo $\mathbf{G}$ de ordem n livre de triângulo com $\delta(\mathbf{G}) > n/3$ é homomorfo a algum grafo de Andrásfai Γ_i , e portanto $\chi(\mathbf{G}) \leq 3$, ou contém o grafo de Grötzsch $\mathfrak{cGr}_3$ como subgrafo, e portanto $\chi(\mathbf{G}) \geq 4$ (veja Brandt [\[Bra99\]](#) para uma prova mais simples deste resultado). O grafo de Grötzsch $\mathfrak{cGr}_3$ (v. [Figura 3](#)) é o único grafo livre de triângulo com número cromático quatro de menor ordem possível (cf. Chvátal [\[Chv74\]](#)). Assim, destes resultados temos que, se $\mathbf{G}$ é livre de triângulo com $\delta(\mathbf{G}) > n/3$ e $\chi(\mathbf{G}) = 3$ então $\mathbf{G} \rightarrow \Gamma_i$. Por outro lado, o resultado em [\[BMRS17\]](#) garante que, se $\mathbf{G} \rightarrow \Gamma_i$ então $\mathbf{G}$ satisfaz [\(1.1\)](#).

Para grafos livres de triângulo com $\delta(\mathbf{G}) > n/3$ e $\chi(\mathbf{G}) = 4$ nós mostramos que a relação $e_{1/2}(\mathbf{G}) < n^2/54$ é satisfeita sempre que $\mathbf{G}$ é regular. Isso permite enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.5. *Seja $\mathbf{G}$ um grafo regular de ordem n livre de triângulo. Se o grau de $\mathbf{G}$ excede $n/3$ então $e_{1/2}(\mathbf{G}) \leq n^2/50$. Se além disso, $\mathbf{G}$ não é 3-cromático, então $e_{1/2}(\mathbf{G}) < n^2/54$.*

Observe que no [Teorema 1.5](#) a desigualdade é estrita se $\chi(\mathbf{G}) \neq 3$. Nós conjecturamos que o enunciado do [Teorema 1.5](#) continua valendo quando a condição de regularidade de $\mathbf{G}$ é suprimida

(cf. [Conjectura 5.1](#)). Além disso, conjecturamos que a constante $1/54$ neste teorema é o melhor possível (cf. [Conjectura 5.2](#)).

Em 1971, Erdős [[Erd71](#)] conjecturou que todo grafo livre de triângulo com n vértices pode ser tornado bipartido ao remover no máximo $n^2/25$ arestas. Nesta data, esta conjectura permanece aberta. Como no grafo $C_5^{[5k]}$ precisamos remover k^2 arestas para virar-lhe bipartido, a constante $1/25$ nesta conjectura não pode ser decrementada. Nós verificamos esta conjectura assintoticamente para grafos que satisfazem as condições do [Teorema 1.5](#).

Corolário 1.6. *Seja G um grafo regular de ordem n livre de triângulo. Se o grau de G excede $n/3$ então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $(\frac{1}{25} + o(1))n^2$ arestas.*

Uma conjectura de Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp

Em 1994, Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [[EFRS94](#)] estudaram o [Problema 1.1](#) ao substituir $\lfloor n/2 \rfloor$ por $\lfloor \alpha n \rfloor$, com $\alpha \in (0, 1]$, e $n^2/50$ por βn^2 , com $\beta = \beta(\alpha, K_3)$ um valor ótimo conjecturado. Para tanto, foram considerados os blow-ups balanceados dos grafos K_2 , o pentágono C_5 e o *grafo de Wagner* $gWag$ (o grafo de Wagner é o grafo $gWag$ que resulta de adicionar as quatro arestas entre vértices opostos no octógono C_8). Estes grafos fornecem as seguintes cotas inferiores para $\beta(\alpha, K_3)$:

(i) No grafo $K_2^{[n]}$, se $1/2 < \alpha \leq 1$ então

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\alpha - 1}{4}. \quad (1.2)$$

(ii) No grafo $C_5^{[n]}$, se $2/5 < \alpha \leq 3/5$ então

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \frac{1}{5} \left(\alpha - \frac{2}{5} \right) = \frac{5\alpha - 2}{25}. \quad (1.3)$$

(iii) No grafo $gWag^{[n]}$, se $3/8 < \alpha \leq 1/2$ então

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \frac{1}{8} \left(\alpha - \frac{3}{8} \right) = \frac{8\alpha - 3}{64}. \quad (1.4)$$

Claramente, $\frac{2\alpha-1}{4} \geq \frac{5\alpha-2}{25}$ se $\frac{17}{30} \leq \alpha \leq 1$, e $\frac{5\alpha-2}{25} \geq \frac{8\alpha-3}{64}$ se $\frac{53}{120} \leq \alpha \leq \frac{17}{30}$. Os autores em [[EFRS94](#)] conjecturaram que o grafo $K_2^{[n]}$ fornece o valor ótimo para $\beta(\alpha, K_3)$ se $\alpha \in [\frac{17}{30}, 1]$ e o grafo $C_5^{[n]}$ fornece o valor ótimo para $\beta(\alpha, K_3)$ se $\alpha \in [\frac{53}{120}, \frac{17}{30}]$.⁴

Conjectura 1.7 (Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp, 1994 [[EFRS94](#)]).

$$\beta(\alpha, K_3) = \begin{cases} \frac{2\alpha-1}{4} & \text{se } 17/30 \leq \alpha \leq 1 \\ \frac{5\alpha-2}{25} & \text{se } 53/120 \leq \alpha < 17/30. \end{cases} \quad (1.5)$$

A [Conjectura 1.2](#) é uma instância da [Conjectura 1.7](#) para $\alpha = 1/2$. Esta é, de fato, a instância mais motivada por Erdős (cf. Erdős [[Erd97](#), Problem 1], Brandt [[Bra98](#), p. 18] ou Sudakov [[Sud11](#), p. 2595]).

Devido ao Teorema de Mantel [[Man07](#)], que estabelece que todo grafo livre de triângulo com n vértices contém no máximo $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas, sendo o grafo bipartido $K_2^{[n]}$ o único grafo extremal, temos que $\beta(1, K_3) = 1/4$, verificando assim a [Conjectura 1.7](#) para $\alpha = 1$.

⁴ $53/120 \approx 0.4417$ e $17/30 \approx 0.5667$.

Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [EFRS94] mostraram que a [Conjectura 1.7](#) verifica-se para todo $0.648 \leq \alpha \leq 1$. Além disso, que $\beta(1/2, K_3) < \frac{\sqrt{65}-7}{32} (< 1/30)$. Estes resultados foram melhorados por Krivelevich [Kri95], que provou que a [Conjectura 1.7](#) vale para todo $0.6 \leq \alpha \leq 1$ como também que $\beta(1/2, K_3) < 1/36$. Krivelevich mostra além disso que, se G é um grafo d -regular de ordem n livre de triângulo, com grau $d \geq 2n/5$, então $e_{1/2}(G) \leq n^2/50$ (cf. [Kri95, Theorem 3]). Observe que o [Teorema 1.5](#) melhora este resultado ao substituir a condição $d \geq 2n/5$ por $d > n/3$.

Em [Bra98], Brandt provou que para todo $\alpha \in (0, 1]$, temos

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \frac{1000\alpha - 326}{10000}. \quad (1.6)$$

Como $\frac{1000\alpha - 326}{10000} > \frac{5\alpha - 2}{25}$ se $0 < \alpha < 474/1000$, este resultado é um contraexemplo para a [Conjectura 1.7](#) no intervalo $53/120 \leq \alpha < 474/1000$. A cota (1.6) em [Bra98] é fornecida pelo grafo de Higman-Sims $\mathfrak{cHiSi}$, o único grafo fortemente regular com parâmetros $(100, 22, 0, 6)$.⁵ Um grafo *fortemente regular com parâmetros* (n, d, λ, μ) é um grafo d -regular de ordem n no qual pares de vértices adjacentes tem λ vizinhos comuns e pares de vértices não adjacentes tem μ vizinhos comuns. Assim, $\lambda = 0$ em grafos livres de triângulo fortemente regulares.

Numa prova computacional, Brandt, Brinkmann e Harmuth [BBH00] mostraram que todo grafo G aresta maximal livre de triângulo de ordem $|G| \leq 24$ satisfaz $e_{1/2}(G) \leq |G|^2/50$.⁶ Um grafo *livre de triângulo aresta maximal* é um grafo livre de triângulo para o qual a adição de uma aresta entre qualquer par de vértices não adjacentes cria um triângulo. Estes são precisamente grafos K_3 -livres com diâmetro dois. Todo grafo K_3 -livre H com n vértices é subgrafo de um grafo K_3 -livre G , com $\text{diam}(G) = 2$, da mesma ordem (e.g. adicionando arestas em H consecutivamente entre pares de vértices a distância pelo menos três. Observe que o supergrafo G não é único em geral). Além disso, se $e_\alpha(G) \leq \beta n^2$ então $e_\alpha(H) \leq \beta n^2$ para $\alpha \in (0, 1]$. Portanto, o resultado em [BBH00] implica que a [Conjectura 1.7](#) verifica-se para a instância $\alpha = 1/2$ em grafos livres de triângulo (não necessariamente aresta maximal) de ordem $n \leq 24$. Porém, nós observamos que blow-ups balanceados do grafo de Clebsch $\mathfrak{cCle}$, o único grafo fortemente regular com parâmetros $(16, 5, 0, 2)$, fornecem um contraexemplo à [Conjectura 1.7](#) para determinados valores de $\alpha < 1/2$. Nossa prova é assistida por um programa de computador.

Em contraste com a relação (1.6) (provada em Brandt [Bra98]), que fornece um contraexemplo para a [Conjectura 1.7](#), nós enfatizamos o seguinte fato: existe $\varepsilon > 0$ tal que para valores de $\alpha \leq \frac{53}{120} + \varepsilon$ temos

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \frac{4\alpha - 1}{64} > \frac{1000\alpha - 326}{10000}.$$

Por outro lado, e, em contraste com a [Conjectura 1.7](#), existe um $\varepsilon' > \varepsilon$ tal que para valores $\alpha \leq \frac{53}{120} + \varepsilon'$, temos que $\frac{4\alpha - 1}{64} > \frac{5\alpha - 2}{25}$. Este resultado fornece a melhor cota inferior para $\beta(\alpha, K_3)$, conhecida nesta data, para pequenos valores de α (veja [Figura 2](#)).

Teorema 1.8.

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \begin{cases} 0, & 0 < \alpha \leq \frac{5}{16} \\ \frac{1}{8}(\alpha - \frac{5}{16}), & \frac{5}{16} < \alpha \leq \frac{3}{8} \\ \frac{1}{64}(4\alpha - 1), & \frac{3}{8} < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{64}(16\alpha - 7), & \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{5}{8} \\ \frac{3}{128}(8\alpha - 3), & \frac{5}{8} < \alpha \leq \frac{11}{16} \\ \frac{5}{32}(2\alpha - 1), & \frac{11}{16} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

⁵O grafo $\mathfrak{cHiSi}$ foi introduzido em 1956 por Mesner [Mes56] na sua tese de doutorado (não publicada). A unicidade para os parâmetros $(100, 22, 0, 6)$ foi mostrada pelo mesmo autor em [Mes64]. Este grafo foi redescoberto (posterior e independentemente) por Higman e Sims [HS68] (veja [KW17] para uma detalhada revisão histórica).

⁶Cf. Brinkmann [Bri98] ou Brandt, Brinkmann e Harmuth [BBH98] onde também é usado o programa de computador `mtf` para a geração de grafos livres de triângulo aresta maximais.

Figura 2: Melhor cota inferior para $\beta(\alpha, K_3)$ conhecida nesta data

As constantes ε e ε' são absolutas e facilmente calculáveis. Ao comparar a relação (4.1) no Teorema 1.8 com a relação (1.5) na Conjectura 1.7 temos que $\frac{1}{64}(4\alpha - 1) > \frac{5\alpha-2}{25}$ para valores de $3/8 < \alpha < 103/220 \approx 0.468$, portanto, segue o seguinte corolário ao Teorema 1.8.

Corolário 1.9. A Conjectura 1.7 é falsa no intervalo $\alpha \in [\frac{53}{120}, \frac{103}{220})$.

1.2 Notação

Um *grafo* é um par ordenado (V, E) , onde V é um conjunto de *vértices* e E é um multiconjunto de *arestas*, cada uma sendo um par não ordenado de vértices em V (não necessariamente distintos). Neste documento tenta-se uma exposição autocontida, no entanto, para uma ampla introdução à teoria de grafos, remetemos o leitor a qualquer um dos livros: Bollobás [Bol98], Bondy e Murty [BM11], Diestel [Die10] ou West [Wes05].

Nós seguimos a notação comumente usada na teoria de grafos (como em [Bol98, BM11, Die10, Wes05]) com poucas exceções. Se A e B são conjuntos e k é um inteiro não negativo. Então $A \setminus B$ é a usual *diferença de conjuntos* entre A e B . O inteiro $|A|$ é a cardinalidade de A . A família de subconjuntos de A de cardinalidade k é denotada $\binom{A}{k}$. Um k -subconjunto é um conjunto de cardinalidade k . O conjunto dos k primeiros inteiros positivos é denotado $[k] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, k\}$. Para um grafo G , denotamos respectivamente $V(G)$ e $E(G)$ ao conjunto de vértices e o conjunto de arestas de G . O número de vértices $|G| \stackrel{\text{def}}{=} |V(G)|$ do grafo G é a *ordem* de G . O número de arestas $e(G) \stackrel{\text{def}}{=} |E(G)|$ é o *tamanho* de G . Por simplicidade, escrevemos uv para denotar o par não ordenado $\{u, v\}$. Dizemos que uv é uma *não aresta* em G se $uv \notin E(G)$. Vértices $u, v \in V(G)$ são *adjacentes* se $uv \in E(G)$. Para um subconjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices de G e um vértice $v \in V(G)$, a *vizinhança de v em S* , denotada $N(v, S)$, é o conjunto de vértices *adjacentes* a $v \in V$ contidos em S , i.e.

$$N(v, S) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in S : uv \in E(G)\}$$

O inteiro $d(v, S) \stackrel{\text{def}}{=} |N(v, S)|$ é o *grau* de v em S . Se $S = V(\mathbf{G})$ então escrevemos $N_{\mathbf{G}}(v)$ e $d_{\mathbf{G}}(v)$, ou simplesmente $N(v)$ e $d(v)$ se o grafo $\mathbf{G}$ é claro pelo contexto, em vez de $N(v, V(\mathbf{G}))$ e $d(v, V(\mathbf{G}))$. Neste caso, $N(v)$ e $d(v)$ são a *vizinhança* e o *grau* de v em $\mathbf{G}$ respectivamente. O grau mínimo e máximo em $\mathbf{G}$ são denotados, como usual e respectivamente, $\delta(\mathbf{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d(v) : v \in V(\mathbf{G})\}$ e $\Delta(\mathbf{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{d(v) : v \in V(\mathbf{G})\}$.

Os ciclos com três e cinco vértices são chamados, *triângulo* e *pentágono*, respectivamente.

Seja $\mathbf{G} = (V, E)$ um grafo. O *grafo complemento* de $\mathbf{G}$ é o grafo $\mathbf{G}^c \stackrel{\text{def}}{=} (V, \{V\} \setminus E)$. Um grafo $\mathbf{H}$ é um *subgrafo* de $\mathbf{G}$ se $V(\mathbf{H}) \subseteq V(\mathbf{G})$ e $E(\mathbf{H}) \subseteq E(\mathbf{G})$; neste caso escrevemos $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ ou $\mathbf{G} \supseteq \mathbf{H}$. Um *conjunto independente* em $\mathbf{G}$ é um conjunto de vértices de $\mathbf{G}$ no qual não existem dois vértices adjacentes. Como usual, $\alpha(\mathbf{G})$ é o *número de independência* de $\mathbf{G}$, i.e., o maior tamanho de um conjunto independente em $\mathbf{G}$. Uma k -coloração própria dos vértices de $\mathbf{G}$ é uma partição de $V(\mathbf{G})$ em k conjuntos independentes. O menor inteiro k para o qual $\mathbf{G}$ admite uma k -coloração própria é o *número cromático* $\chi(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$. Um grafo $\mathbf{G} = (V, E)$ é *finito* se $V = V(\mathbf{G})$ é um conjunto finito, e $\mathbf{G}$ é *simples* se $E = E(\mathbf{G})$ é um conjunto de arestas cada uma sendo um par não ordenado de vértices distintos. Assim, grafos simples não contêm arestas múltiplas nem laços. A menos que especifiquemos o contrário, todo grafo considerado neste documento é finito e simples.

Seja $\mathbf{H}$ um grafo. Para um vetor de inteiros positivos $\eta \in \mathbb{Z}_+^{V(\mathbf{H})}$ o η -blow-up de $\mathbf{H}$, é o grafo $\mathbf{H}^{[\eta]}$ obtido ao substituir cada vértice v em $\mathbf{H}$ por um conjunto independente $I(v)$ de tamanho $\eta(v)$, e cada aresta $uv \in E(\mathbf{H})$ por um grafo bipartido completo com partições $I(u)$ e $I(v)$. Se $|\eta(u) - \eta(v)| \leq 1$ para cada $u, v \in V(\mathbf{H})$, o η -blow-up $\mathbf{H}^{[\eta]}$ é *balanceado*. Observe que para uma permutação η' de η , os grafos $\mathbf{H}^{[\eta']}$ e $\mathbf{H}^{[\eta]}$ não são em geral isomorfos (e.g. com $\eta = (2, 2, 2, 1, 1)$ e $\eta' = (2, 2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{C}_5^{[\eta']}$ $\not\approx$ $\mathbf{C}_5^{[\eta]}$), porém, nós escrevemos $\mathbf{H}^{[n]}$ com $n = \sum_{v \in V(\mathbf{H})} \eta(v)$ sempre que $\mathbf{H}$ é completo ou $\eta(u) = \eta(v)$ para todo $u, v \in V(\mathbf{H})$. Por exemplo, o grafo de Turán $\mathbf{T}_{n,r}$ é isomorfo a $\mathbf{K}_r^{[n]}$ para todo $n \geq r$.

1.3 Extensões e problemas relacionados

1.3.1 Problemas tipo Turán-Ramsey

O problema da densidade local em grafos pertence a uma categoria de problemas extremais conhecidos como problemas tipo Turán-Ramsey. Apesar da nossa definição de grafo em termos de conjuntos, na prática, no entanto, não é conveniente reduzir a teoria de grafos ao estudo clássico da teoria de conjuntos ou relações binárias.⁷ Isto é porque a teoria de grafos (e em particular a teoria de grafos extremais) está “cheia” de conjecturas e problemas onde tipicamente estamos interessados nas *propriedades estruturais* e *extremais* de uma família de grafos que satisfazem certa propriedade invariante por isomorfismos (dois grafos são isomorfos se existe uma rotulagem dos vértices tais que seus respectivos conjuntos de vértices e arestas são idênticos). Por exemplo, fixado um grafo $\mathbf{H}$, determinar para cada inteiro n o máximo número de arestas $\text{ex}(n, \mathbf{H})$ em grafos de n vértices que não contêm uma cópia de $\mathbf{H}$. Nós chamamos estes grafos *H-livre*. Grafos *H-livre* de ordem n com exatamente $\text{ex}(n, \mathbf{H})$ arestas são os *grafos extremais* para este problema.

Um célebre resultado da *teoria de grafos extremais* é o teorema de Turán [Tur41] o qual estabelece que $\text{ex}(n, \mathbf{K}_{r+1})$ é igual ao número de arestas do grafo $\mathbf{T}_{n,r}$ (o *grafo de Turán* $\mathbf{T}_{n,r}$ é o grafo r -partido completo de ordem n com partições que diferem em tamanho no máximo um vértice), sendo este grafo o único extremal a menos de isomorfismos. O caso particular para triângulos foi

⁷Este enfoque pragmático é análogo a como a *teoria da probabilidade* é considerada, num sentido informal, “mais que” o estudo de um *espaço de medida* com medida total 1 (para uma discussão, v. e.g. Tao [Tao12, p. 2]). No entanto, todo resultado sobre grafos fornece um resultado sobre conjuntos: um teorema de Szpilrajn-Marczewski [SM45] garante que a cada grafo $\mathbf{G}$ (finito ou infinito) corresponde-lhe uma família de conjuntos $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ com um e só um conjunto por cada vértice em $\mathbf{G}$, tais que dois vértices estão conectados por uma aresta em $\mathbf{G}$ se e só se os correspondentes conjuntos em $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ são disjuntos.

estabelecido previamente por Mantel em [Man07], i.e. $\text{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$, com o grafo bipartido completo de n vértices de partições balanceadas o único extremal. Para algumas instancias deste e outros problemas, no entanto, não sempre é possível determinar os grafos extremais; nestes casos, resultados assintóticos são de interesse.

O número de Ramsey $R_r(s_1, s_2, \dots, s_k)$ é o menor inteiro n tal que para toda k -partição $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ dos r -subconjuntos de $[n]$, existe um índice $1 \leq i \leq k$ para o qual E_i contém os r -subconjuntos de um conjunto $S \subset [n]$ de tamanho $|S| = s_i$. Se $r = 2$ (números de Ramsey para grafos), nós omitimos o subíndice. Ramsey [Ram29] mostrou que estes números existem para todos os valores dos parâmetros.

O teorema de Turán (1940) junto com o estudo dos números de Ramsey (1929) motivou o início de uma copiosa linha de pesquisa em combinatória extremal.⁸ O paradigma comum que subjaz na teoria Turán-Ramsey (*cf. teoria Turán-Ramsey* [SS01]) vem do mais básico princípio de Dirichlet o qual “captura” o conceito geral de *saturação* num tipo particular de estrutura discreta. O princípio de Dirichlet (1834) estabelece que toda k partição de um conjunto de $kn + 1$ elementos (k e n inteiros), contém uma classe de cardinalidade pelo menos $n + 1$. O resultado de Ramsey é de natureza análoga; fixados um inteiro k e um grafo H , o teorema de Ramsey garante que toda k -partição das $\binom{n}{2}$ arestas do grafo completo K_n contém pelo menos uma classe “saturada” se n é suficientemente grande. Com “saturada” queremos dizer que não consegue evitar uma copia de H . Um problema de interesse em combinatória extremal é determinar o menor inteiro n para o qual o sistema *sempre* satura-se. Em contraste, em problemas tipo Turán fixa-se o número de vértices n e um grafo H e procura-se o menor número de arestas para o qual todo grafo de n vértices é necessariamente saturado. O teorema de Turán estabelece em particular que este valor é $e(T_{n,r}) + 1$ para $H = K_{r+1}$.

1.3.2 O Teorema de Turán

O problema da densidade local em grafos visa estender o teorema de Turán. Como mencionado antes, em [Tur41], Turán mostrou que o único grafo que maximiza o número de arestas na família de grafos de n vértices que não contém K_{r+1} como subgrafo, é o grafo r -partido completo de n vértices $T_{n,r}$ com partições de tamanho $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor, \lfloor \frac{n+1}{r} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n+r-1}{r} \rfloor$. Para grafos livres de triângulo, este resultado foi estabelecido previamente por Mantel [Man07]. Em particular, todo grafo G de n vértices com mais de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ arestas contém um triângulo. Erdős perguntou qual é o menor número de arestas em subgrafos induzidos de G de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices que implique a existência de um triângulo em G . Considerando o blow-up balanceado do pentágono, Erdős [Erd76] conjecturou que todo grafo G , no qual os subconjuntos de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices induzem mais de $n^2/50$ arestas, contém necessariamente um triângulo.

A seguinte questão é uma extensão natural à pergunta de Erdős. Fixado um real $\alpha \in (0, 1]$ e um grafo H , quais são as condições sobre o número de arestas induzidas por subconjuntos de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices num grafo G de ordem n que impliquem a existência de H como subgrafo de G ? Nós chamamos ao problema de determinar estas condições o *Problema da Densidade Local em Grafos*.

Problema 1.10 (O problema da densidade local em grafos). Para um real $\alpha \in (0, 1]$ e um grafo H , determine o menor real $\beta = \beta(\alpha, H)$ que satisfaz a seguinte propriedade: *Se G é um grafo de n vértices no qual cada subconjunto de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices induz mais que βn^2 arestas então G contém H como subgrafo.*

⁸Uma exposição de problemas e conjecturas em teoria de grafos extremais são dadas em Bollobás [Bol04] e Chung e Graham [CG99]. Para problemas e resultados tipo Ramsey veja Graham, Rothschild e Spencer [GRS13] e Xu, Liang e Luo [XLL18], ou Sudakov [Sud11] para um resumo de métodos e resultados. Importantes técnicas de solução de problemas em combinatória extremal estão baseados em ideias da teoria da probabilidade (v. e.g. [AS92, Spe94]), álgebra linear e análise espectral (v. e.g. [BF92, CDS95, GR01]), topologia e análise harmônica, entre outros (cf. [Sud11]).

Em particular, a [Conjectura 1.2](#) visa estabelecer $\beta(1/2, K_3) = 1/50$, e de ser verdade, $\mathcal{C}_5^{[n]}$ e $\mathcal{CPet}^{[n]}$ são famílias de grafos extremais. Por outro lado, como $e(T_{n,r}) = (1 - \frac{1}{r} + o(1))\binom{n}{2}$ (cf. [\[Tur54\]](#)) o teorema de Turán implica $\beta(1, K_{r+1}) = \frac{r-1}{2r}$ com $T_{n,r}$ o único grafo extremal. É fácil notar que se $1 - \frac{1}{r} < \alpha \leq 1$ então o grafo $T_{n,r}$ fornece a cota inferior

$$\beta(1, K_{r+1}) \geq \frac{(r-1)(2\alpha-1)}{2r}. \quad (1.8)$$

Keevash e Sudakov [\[KS03\]](#) mostraram que a igualdade na relação (1.8) vale sempre que $1 - \frac{1}{2r^2} \leq \alpha \leq 1$, sendo o grafo de Turán $T_{n,r}$ o único extremal. Eles conjecturaram que este resultado continua valendo ainda para $1 - \frac{1}{r} \leq \alpha \leq 1$. Chung e Graham [\[CG90\]](#) conjecturaram que, exceto no caso $r = 2$, o grafo de Turán $T_{n,r}$ é extremal para $\beta(\alpha, K_{r+1})$ para todo $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Isto é, que a cota inferior para $\beta(\alpha, K_{r+1})$ fornecida pelo grafo $T_{n,r}$ é também cota superior para todo $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e $r \geq 3$. Esta conjectura visa estabelecer, em particular, a igualdade

$$\beta(1/2, K_{r+1}) = \begin{cases} \frac{r-2}{8r}, & r \geq 3 \text{ é par} \\ \frac{(r-1)^2}{8r^2}, & r \geq 3 \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Uma formulação mais geral do problema da densidade local para grafos (ou hipergrafos) é possível. Fixados um real $\alpha \in (0, 1]$ e uma família de grafos proibidos $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$, determine ou estime para cada $n \in \mathbb{N}$ o menor inteiro $m(n; \alpha, \mathcal{H})$ com a seguinte propriedade: *se G é um grafo de n vértices tal que todo subconjunto de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices induz mais de $m(n; \alpha, \mathcal{H})$ arestas, então G contém como subgrafo algum grafo na família $\mathcal{H}$.* Por exemplo, do teorema de Turán segue $m(n; 1, K_{r+1}) = e(T_{n,r})$. O inteiro $m(n; \alpha, \mathcal{H})$ tem a propriedade que todo grafo de n vértices $\mathcal{H}$ -livre contém um subconjunto de $\lfloor \alpha n \rfloor$ vértices que induz no máximo $m(n; \alpha, \mathcal{H})$ arestas. A determinação de $m(n; \alpha, \mathcal{H})$ é em geral um problema mais difícil que o Problema 1.10; em contraste, observe que no Problema 1.10 nós estamos apenas procurando um resultado assintótico para o quociente $m(n; \alpha, \mathcal{H})/n^2$, i.e. buscamos estimar a função

$$\beta(\alpha, \mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{G_n \not\supset \mathcal{H}} \left\{ \frac{e_\alpha(G_n)}{n^2} \right\}, \quad (1.9)$$

onde o máximo na equação (1.9) é tomado sobre grafos G_n de ordem n livres de $\mathcal{H}$. Este documento foca-se no caso $(\alpha, \mathcal{H}) = (\frac{1}{2}, K_3)$ e os resultados principais mostram estimativas da função $\beta(\frac{1}{2}, K_3)$ quando enfraquecemos a [Conjectura 1.2](#) impondo sobre o grafo livre de triângulo G alguma propriedade adicional (veja [Seção 1.1](#) para um resumo de resultados).

1.3.3 Número de pentágonos e diferença com o subgrafo bipartido máximo

Erdős, Kleitman e Rothschild [\[EKR76\]](#) mostraram que quase todos os grafos livres de triângulo são bipartidos, i.e., se $\mathcal{T}_n$ e $\mathcal{B}_n$ são, respectivamente, o número de grafos livres de triângulo e o número de grafos bipartidos de n vértices, então

$$\mathcal{T}_n = (1 + o(1))\mathcal{B}_n.$$

Por outro lado, a existência de grafos livres de triângulo não bipartidos é bem conhecida. O pentágono, o grafo de Petersen e o grafo de Wagner, são exemplos de grafos livres de triângulo 3-cromáticos. O grafo de Grötzsch e o grafo de Clebsch são grafos livres de triângulo 4-cromáticos (estes grafos são referenciados com muita frequência em todo o documento, cf. [Figura 3](#)).

Zykov [\[Zyk49\]](#) e Tutte [\[Des48\]](#) (cf. [\[Erd62\]](#)) mostraram a existência de grafos livres de triângulo k -cromáticos para todo inteiro positivo k e Mycielski [\[Myc55\]](#) achou uma construção explícita de grafos com esta propriedade. Em [\[KK54\]](#) (cf. [\[Erd64\]](#)) Kelly e Kelly provaram que para todo inteiro

Figura 3: Exemplos de grafos livres de triângulo não bipartidos

positivo k existem grafos $\{C_3, C_4\}$ -livres k -cromáticos, e mais tarde, num célebre teorema usando métodos probabilísticos, Erdős [Erd59] estendeu este resultado ao mostrar a existência de grafos com cintura e número cromático arbitrários, i.e., para qualquer inteiro k existe um grafo G com $\text{girth}(G) > k$ e $\chi(G) > k$. A *cintura* $\text{girth}(G)$ de um grafo G é o tamanho do menor circuito em G (definida $\text{girth}(G) = \infty$ se G não contém circuitos).

Algumas conjecturas de Erdős sugerem⁹ que o blow-up balanceado do pentágono $C_5^{[n]}$ tem propriedades que fazem dele um grafo livre de triângulo “longe” de ser bipartido. Erdős conjecturou (cf. e.g. [Erd71, Problem 2], [Erd76, Problems 5, 25] ou [Erd84, Problems 1, 2]) que, na família de grafos livres de triângulo, o grafo $G = C_5^{[n]}$ maximiza o valor de β_i , ($i = 1, 2, 3$), em cada uma das seguintes propriedades

- P1** Um grafo G de ordem n livre de triângulo pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\beta_1 n^2$ arestas.
- P2** Um grafo G de ordem n livre de triângulo contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $\beta_2 n^2$ arestas.
- P3** Um grafo G de ordem n livre de triângulo contém no máximo $\beta_3 n^5$ pentágonos.

É fácil ver que se G é bipartido então cada propriedade é satisfeita com $\beta_i = 0$. Assim, procurar grafos extremais em cada propriedade (i.e. grafos G livres de triângulo que maximizem β_i) está relacionado com determinar “uma medida” de quão longe um grafo livre de triângulo está de ser bipartido. Se $5|n$ então $C_5^{[n]}$ contém exatamente $(\frac{n}{5})^5$ pentágonos e o menor número de arestas que precisamos remover para virar-lhe bipartido é exatamente $n^2/25$. Se $10|n$ então o menor número de arestas induzidas por subconjuntos de $n/2$ vértices em $C_5^{[n]}$ é exatamente $n^2/50$.

Conjectura 1.11 (Erdős, 1971 [Erd71, Problem 2]). *Todo grafo livre de triângulo de ordem n pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $n^2/25$ arestas.*

Na data, a [Conjectura 1.11](#) permanece aberta.

Para o número de pentágonos, o menor valor possível para β_3 que satisfaz a propriedade **P3** foi estabelecido assintoticamente por Grzesik [Grz12] e independentemente por Hatami, Hladký, Král’ e Razborov [HHK⁺13]. Eles provaram que todo grafo livre de triângulo de ordem n contém no máximo $\frac{5!}{5^5} \binom{n}{5} (1 + o(1))$ pentágonos. O resultado de Hatami et al. [HHK⁺13] prova além que se $5|n$ ou n é suficientemente grande, então $C_5^{[n]}$ é o único grafo extremal. Michael [Mic13] observou que o grafo de Wagner (isomorfo à escada de Möbius de ordem 8 $\mathfrak{Möb}_8$ ou ao grafo de Andrásfai Γ_3) contém o mesmo número de pentágonos que qualquer blow-up balanceado do C_5 sobre 8 vértices. Recentemente, Lidický e Pfender [LP17] resolveram o problema para todo n .

⁹Altamente subjectivo

Teorema 1.12 (Lidický e Pfender [LP17]). *Para todo n , o número máximo de pentágonos em qualquer grafo livre de triângulo de ordem n é*

$$\prod_{i=0}^4 \left\lfloor \frac{n+i}{5} \right\rfloor.$$

Além disso, para todo $n \geq 5$ os únicos grafos extremais são blow-ups balanceados de C_5 de ordem n , exceto no caso $n = 8$ onde também $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{b}_8$ é extremal.

Erdős, Győri e Simonovits [EGS92] mostraram que grafos livres de triângulo com pelo menos $n^2/5$ arestas satisfazem a Conjectura 1.11. Em [EFPS88] Erdős, Faudree, Pach e Spencer forneceram o melhor resultado conhecido na data para o caso geral.

Teorema 1.13 (Erdős, Faudree, Pach e Spencer [EFPS88]). *Todo grafo livre de triângulo pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $n^2/18 + n/2$ arestas.*

Teorema 1.14 (Erdős, Faudree, Pach e Spencer [EFPS88]). *Existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que todo grafo livre de triângulo de ordem n pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $(\frac{1}{18} - \varepsilon + o(1))n^2$ arestas.*

O problema da densidade local para grafos livres de triângulo tem sido estudado por vários autores [EFRS94, Kri95, Bra98, KS03, KS06, NY13, BMRS17] e importantes contribuições foram feitas. Referenciamos estes resultados ao longo do documento.

1.3.4 Max-Cut e partições judiciosas

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *Problema do Subgrafo Bipartido Máximo* pergunta por uma partição $V = V_1 \cup V_2$ dos vértices de G que maximize o número de arestas de cruzamento $e(V_1, V_2)$. Este problema é **NP**-difícil [Kar72] ainda em grafos com grau máximo $\Delta(G) \leq 3$ [Yan78]. Para um grafo G , nós definimos

$$\maxCut(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{e(U, V \setminus U) : U \subset V(G)\},$$

como o máximo número de arestas num subgrafo bipartido de G . Certamente, maximizar $e(V_1, V_2)$ sobre partições $V_1 \cup V_2$ é equivalente a minimizar $e(V_1) + e(V_2)$, assim

$$\maxCut(G) = e(G) - \min\{e(U) + e(V \setminus U) : U \subset V(G)\}.$$

Para um inteiro $m > 0$ nós definimos $\maxCut(m)$ como o menor valor de $\maxCut(G)$ para grafos G com m arestas. Erdős observou que a cota $\maxCut(m) \geq m/2$ pode ser obtida facilmente ao considerar uma bipartição aleatória de $V(G)$. Para notar isto, escolha cada vértice em $V(G)$ com probabilidade $1/2$. Se $U \subset V(G)$ é o subconjunto de vértices escolhidos, então a probabilidade de que cada aresta tenha um extremo em U e o outro em $V \setminus U$ é $1/2$; portanto, o valor esperado da variável aleatória $e(U, V \setminus U)$ é $m/2$, assim, existe uma partição com a propriedade requerida.

Edwards [Edw73, Edw75] mostrou que todo grafo G com m arestas admite uma bipartição com

$$\maxCut(G) \geq \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right).$$

Este resultado é justo para grafos completos de ordem ímpar. Provas mais simples do resultado de Edwards foram dadas por Erdős, Gyárfás e Kohayakawa [EGK97], Hofmeister e Lefmann [HL98], Lehel e Tuza [LT82] e Locke [Loc82].

Uma generalização do resultado de Edwards para k -partições, para todo $k \geq 2$, foi dada por Bollobás e Scott [BS02]. Eles provaram que todo grafo G com m arestas admite uma k -partição

$V_1 \cup \dots \cup V_k$ que satisfaz

$$m - \sum_{i=1}^k e(V_i) \geq \frac{k-1}{k}m + \frac{k-1}{2k}(\sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}) + O(k).$$

Nos *problemas de partições judiciosas* tenta-se otimizar várias quantidades simultaneamente. Para um inteiro k , nós chamamos uma k -partição de $V(\mathbf{G}) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ *judiciosa* se minimiza o inteiro $\max\{e(V_i) : 1 \leq i \leq k\}$ entre todas as k -partições possíveis de $V(\mathbf{G})$. O caso $k = 2$ é conhecido como o *Problema da Bipartição do Gargalo da Garrafa*¹⁰ (cf. *Bottleneck Bipartition Problem*). Shahrokhi e Székely [SS94] mostraram que este problema é **NP**-difícil.

Erdős (1988) conjecturou que todo grafo $\mathbf{G}$ com m arestas admite uma bipartição $V(\mathbf{G}) = V_1 \cup V_2$ tal que

$$\max\{e(V_1), e(V_2)\} \leq m/4 + o(\sqrt{m}).$$

Porter [Por92] mostrou que $\mathbf{G}$ admite uma bipartição $V(\mathbf{G}) = V_1 \cup V_2$ tal que

$$\max\{e(V_1), e(V_2)\} \leq \frac{1}{4}m + \frac{1}{4}\sqrt{2m}.$$

Bollobás e Scott [BS99] melhoraram e estenderam o resultado de Porter ao provar que para todo $k \geq 2$, $\mathbf{G}$ admite uma k -partição $V_1 \cup \dots \cup V_k$ tal que

$$\max_{1 \leq i \leq k} \{e(V_i)\} \leq \frac{1}{k^2}m + \frac{k-1}{2k^2}(\sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}), \quad (1.10)$$

esta cota é justa para todo k e infinitos valores de m , e o grafo completo K_{k+1} é o único grafo extremal sem vértices isolados (n um inteiro positivo). Além disso, para $k = 2$ eles provaram que $\mathbf{G}$ admite uma bipartição $V(\mathbf{G}) = V_1 \cup V_2$ que satisfaz simultaneamente a cota (1.10) e também a cota de Edwards.

Alon [Alo96] mostrou que se $\mathbf{G}$ é livre de triângulo então $\max Cut(\mathbf{G}) \geq \frac{m}{2} + cm^{4/5}$, para alguma constante $c > 0$ e este resultado é justo salvo pelo fator constante. Alon, Bollobás, Krivelevich e Sudakov [ABKS03] estenderam este resultado para grafos com cintura $r \geq 3$ e forneceram, entre outros, dois resultados para bipartições judiciosas em função do corte bipartido máximo. Eles mostraram que se $\mathbf{G} = (V, E)$ é um grafo com m arestas com corte bipartido máximo $\max Cut(\mathbf{G}) = \frac{m}{2} + \theta$. Então, se $\theta \leq m/30$, então existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$ dos vértices de $\mathbf{G}$ tal que

$$e(V_i) \leq \frac{m}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{10\theta^2}{m} + 3\sqrt{m}, \quad i = 1, 2,$$

e se $\theta \geq m/30$ e m é suficientemente grande, então existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$ dos vértices de $\mathbf{G}$ tal que

$$e(V_i) \leq \frac{m}{4} - \frac{m}{100} = \frac{6m}{25}, \quad i = 1, 2.$$

¹⁰ Tradução livre

Capítulo 2

Grafos livres de triângulos e pentágonos

Erdős, Faudree, Rousseau & Schelp [EFRS94] provaram que a [Conjectura 1.2](#) vale se a constante $\frac{1}{50}$ é substituída por $\frac{\sqrt{65}-7}{32}$ ($< 1/30$) e Krivelevich [Kri95] verificou a sua validade ao substituir $1/50$ por $1/36$ fornecendo até agora o melhor resultado nesta direção.

Teorema 2.1 (Krivelevich [Kri95]). *Se, em um grafo G de ordem n , cada $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices induzem pelo menos $n^2/36$ arestas, então G contém um triângulo.*

Como notamos antes, a constante $1/50$ na [Conjectura 1.2](#) não pode ser substituída por uma constante menor uma vez que, para infinitos valores de n , existe um grafo G de n vértices e livre de triângulo no qual, o mínimo sobre o número de arestas dos subgrafos induzidos por conjuntos de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices é exatamente $n^2/50$. Além do grafo $C_5^{[10n]}$, foi observado por Simonovits (cf. e.g. [Erd84] ou [Erd97]) que o grafo $\text{cPet}^{[10n]}$ também atinge a constante $1/50$ (veja [Figura 1](#)).

Além dos blow-ups do pentágono e do grafo de Petersen, nós não sabemos se existe outra família de grafos livres de triângulo que atinjam o valor conjecturado. Estes grafos tem *cintura ímpar* $\text{ogirth}(G) = 5$. Claramente, um grafo G é livre de triângulo se e só se $\text{ogirth}(G) \geq 5$. Nós provamos que se a desigualdade é estrita, não só a [Conjectura 1.2](#) verifica-se como também a constante $1/50$ pode ser decrementada.

Teorema 1.3. *Se G é um grafo de n vértices e cintura ímpar $\text{ogirth}(G) > 5$. Então, G contém $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induzem no máximo $n^2/64$ arestas.*

Nós provamos este resultado na [Seção 2.2](#).

Um *homomorfismo de grafos* $G \rightarrow H$ é um mapeamento $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ implica $f(u)f(v) \in E(H)$. Assim, um homomorfismo $G \rightarrow H$ é um mapeamento de vértices de G em vértices de H que preserva as arestas. Por exemplo, G é k -colorível se e só se $G \rightarrow K_k$. Necessariamente, pré-imagens por homomorfismos de grafos K_k -livres são grafos K_k -livres.

Uma importante família de grafos livres de triângulo são os *grafos de Andrásfai* descritos em [And62].¹

Definição 2.2 (Grafos de Andrásfai). Para cada inteiro $i \geq 1$, o *grafo de Andrásfai* Γ_i é o grafo com conjunto de vértices $V(\Gamma_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, 3i-1\}$, com dois vértices $u, v \in V(\Gamma_i)$ sendo adjacentes se e só se $|u-v| \equiv 1 \pmod{3}$.

Por exemplo, $\Gamma_1 = K_2$, $\Gamma_2 = C_5$, Γ_3 é a escada de Möbius de 4 degraus, etc. (v. [Figura 4](#)).

¹A descrição em [And62] é provavelmente a primeira conhecida, porém estes grafos foram redescobertos várias vezes (cf. [Bra02, p. 36]). Para a definição original de Andrásfai em [And62, (em alemão)] veja por exemplo [GR01, §6. Exercise 39, p. 130].

Figura 4: Grafos de Andrásfai Γ_i , ($i = 1 \dots 4$)

O grafo Γ_i é i -regular, não contém vértices similares (i.e., as vizinhanças de pares vértices são distintas), tem diâmetro 2 e é livre de triângulo (cf. e.g. [GR01, Lemma 6.10.1]). Desde que a adjacência de um vértice j em Γ_i é $N(j) = \{j+i, \dots, j+2i-1\}$ (tomando módulo $3i-1$ em cada elemento), temos que Γ_i é 3-colorível e

$$V(\Gamma_i) = \{1, \dots, i\} \cup \{i+1, \dots, 2i\} \cup \{2i+1, \dots, 3i-1\}$$

é uma 3-coloração de Γ_i para todo $i \geq 2$.

Andrásfai, Erdős e Sós [AES74] provaram que em grafos livres de triângulo, a condição $\delta(G) > 2n/5$ implica $G \rightarrow \Gamma_1$; Häggkvist [Häg82] mostrou que $\delta(G) > 3n/8$ implica $G \rightarrow \Gamma_2$, e finalmente Jin [Jin93] mostrou que $\delta(G) > \frac{i+1}{3i+2}n$ implica $G \rightarrow \Gamma_i$, ($1 \leq i \leq 9$). Assim, estes resultados garantem que grafos de Andrásfai são imagens por homomorfismos de grafos livres de triângulo com grau mínimo suficientemente grande. Em particular, $\delta(G) > 10n/29$ implica $G \rightarrow \Gamma_9$ (sempre que G seja livre de triângulo).

Teorema 2.3 (Jin [Jin93]). *Para $1 \leq i \leq 9$, todo grafo G livre de triângulo de ordem n com grau mínimo $\delta(G) > \frac{i+1}{3i+2}n$ é homomorfo a Γ_i .*

O blow-up não balanceado do grafo de Grötzsch $\mathfrak{cGr}_0$ da Figura 7, um grafo 4-colorível 10-regular de ordem 29, mostra que para $i = 10$ a declaração do Teorema 2.3 falha.

Norine e Yepremyan [NY13] mostraram que grafos homomorfos ao grafo de Andrásfai Γ_i , para algum $2 \leq i \leq 4$ (o caso $i = 1$ é trivial), satisfazem a Conjectura 1.2. Como corolário deste resultado e do Teorema 2.3, a condição $\delta(G) > 5n/14$ implica que a Conjectura 1.2 se satisfaz.

Teorema 2.4 (Norine e Yepremyan [NY13]). *Se G é homomorfo a algum grafo de Andrásfai Γ_i , com $2 \leq i \leq 4$. Então G contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2/50$ arestas.*

Corolário 2.5 (Norine e Yepremyan [NY13]). *Se G é um grafo livre de triângulo de ordem n com grau mínimo $\delta(G) > 5n/14$ então G contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2/50$ arestas.*

Recentemente, Bedenknecht, Mota, Reiher e Schacht [BMRS17] estenderam o Teorema 2.4. Eles provam que grafos homomorfos ao grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,k}$ contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2 / (2(2k+1)^2)$ arestas.

Definição 2.6 (Grafo de Andrásfai generalizado). Para inteiros $i \geq 1$ e $k \geq 2$, o grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,k}$ é o grafo sobre o conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, (2k-1)(i-1) + 2\}$ tal que a vizinhança de cada vértice $u \in V(\Gamma_{i,k})$ é

$$N(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{v : (k-1)(i-1) + 1 \leq |u-v| \leq k(i-1) + 1\}.$$

A k -ésima potência de um grafo H é o grafo H^k que resulta ao adicionar arestas em H entre pares de vértices (distintos) a distância no máximo k . Para $i \geq 2$, o grafo de Andrásfai Γ_i é isomorfo ao grafo complemento da $(i-1)$ -ésima potência do $(3i-1)$ -ciclo, i.e. $\Gamma_i = \mathfrak{c}(\mathbb{C}_{3i-1}^{i-1})^c$. Por outro lado, o grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,k}$ é isomorfo ao grafo complemento da $(k-1)(i-1)$ -ésima potência do $((2k-1)(i-1)+2)$ -ciclo, i.e. $\Gamma_{i,k} = \mathfrak{c}(\mathbb{C}_{(2k-1)(i-1)+2}^{(k-1)(i-1)})^c$ (cf. [BRB09]²).

Assim temos, $\Gamma_{1,k} = K_2$, $\Gamma_{2,k} = \mathbb{C}_{2k+1}$, $\Gamma_{3,k} = \mathfrak{c}\mathbb{M}\ddot{o}\mathfrak{b}_{4k}$, e para $k = 2$ temos os grafos de Andrásfai $\Gamma_{i,2} = \Gamma_i$, etc. O grafo $\Gamma_{i,k}$ é i -regular e tem cintura ímpar $\mathfrak{ogirth}(\Gamma_{i,k}) = 2k+1$.

Teorema 2.7 (Bedenknecht, Mota, Reiher e Schacht [BMRS17]). *Se G é homomorfo ao grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,k}$, ($i \geq 2$, $k \geq 1$). Então G contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2 / (2(2k+1)^2)$ arestas.*

Albertson, Chan e Haas [ACH93] e Häggkvist e Jin [HJ98] mostraram que se G é um grafo de ordem n com $\mathfrak{ogirth}(G) = 7$ e $\delta(G) > n/4$ então $G \rightarrow \mathbb{C}_7$. Messuti e Schacht [MS14] e Brandt e Ribe-Baumann [BRB09, Theorem 2.4] provaram que grafos com cintura ímpar $\mathfrak{ogirth}(G) = 2k+1$, ($k \geq 2$), e grau mínimo $\delta(G) > \frac{3}{4k}n$ (veja [BRB09] para uma melhor cota no caso $k = 3$) são homomorfos a $\mathbb{C}_{2k+1}$. Recentemente, Letzter e Snyder [LS18], resolvendo um problema de Messuti e Schacht [MS14], mostraram que grafos com cintura ímpar $\mathfrak{ogirth}(G) > 5$ e grau mínimo $\delta(G) > n/5$ são homomorfos ao grafo de Andrásfai generalizado $\Gamma_{i,3}$ para algum $i \geq 1$. Este resultado junto com o Teorema 2.7 implicam que se $\mathfrak{ogirth}(G) = 2k+1$, com $k \geq 3$, e $\delta(G) > n/5$ então G contém um subconjunto de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que induz no máximo $n^2 / (2(2k+1)^2)$ arestas. Em particular, para $k = 3$, este resultado permite substituir a constante $1/64$ por $1/98$ no Teorema 1.3 sempre que a condição $\delta(G) > n/5$ seja adicionada, ou equivalentemente, sempre que G seja um subgrafo de um blow-up (não necessariamente balanceado) de $\Gamma_{i,3}$. Assim, embora nossa cota no Teorema 1.3 é mais fraca, esta é mais geral no sentido de que independe do homomorfismo ou da cota no grau mínimo.

2.1 Corte em grafos (α, β) -densos

Definição 2.8. Para $\alpha, \beta \in (0, 1]$, nós dizemos que um grafo G de ordem n é (α, β) -denso se

$$e_\alpha(G) > \beta n^2.$$

Lema 2.9. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices (α, β) -denso. Sejam X e Y subconjuntos de vértices de G disjuntos e não vazios que satisfazem $|Y| \leq \lfloor \alpha n \rfloor - 1$ e $|X| + |Y| \geq \lfloor \alpha n \rfloor$. Então*

$$e(X, Y) > \frac{|X|}{\lfloor \alpha n \rfloor - |Y|} (\beta n^2 - e(Y)) - \frac{(\lfloor \alpha n \rfloor - |Y|)}{|X|} e(X). \quad (2.1)$$

Em particular, se X e Y são conjuntos independentes então $e(X, Y) > \beta |X| n^2 / (\alpha n - |Y|)$.

Prova. Sejam $x = |X|$, $y = |Y|$ e $k = \lfloor \alpha n \rfloor - y$. Como X e Y são disjuntos, na soma $\sum_{W \in \binom{X}{k}} e(W \cup Y)$ cada aresta em $E(X)$ é contada $\binom{x-2}{k-2}$ vezes e cada aresta em $E(X, Y)$ é contada

²Existe um pequeno erro tipográfico em [BRB09] no final da pág. 90, onde diz “ $M_{j,k}$ is a j -regular graph of odd girth k ” deveria dizer “ $M_{j,k}$ is a j -regular graph of odd girth $2k+1$ ”.

$\binom{x-1}{k-1}$ vezes. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{W \in \binom{X}{k}} e(W \cup Y) &= \binom{x-2}{k-2} e(X) + \binom{x-1}{k-1} e(X, Y) + \binom{x}{k} e(Y) \\ &= \binom{x}{k} \left[\frac{k(k-1)}{x(x-1)} e(X) + \frac{k}{x} e(X, Y) + e(Y) \right] \\ &\leq \binom{x}{k} \left(\frac{k^2}{x^2} e(X) + \frac{k}{x} e(X, Y) + e(Y) \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por outro lado, como $|W \cup Y| = \lfloor \alpha n \rfloor$ para cada $W \in \binom{X}{k}$, da (α, β) -densidade de $\mathbf{G}$ segue

$$\sum_{W \in \binom{X}{k}} e(W \cup Y) > \binom{x}{k} \beta n^2. \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3) temos

$$\frac{k^2}{x^2} e(X) + \frac{k}{x} e(X, Y) + e(Y) > \beta n^2,$$

ou

$$e(X, Y) > \frac{x}{k} (\beta n^2 - e(Y)) - \frac{k}{x} e(X). \quad (2.4)$$

A desigualdade (2.1) segue ao substituir os valores de x, y e k em (2.4). ■

Nós também fazemos uso dos seguintes lemas.

Lema 2.10 (Krivelevich [Kri95, Lemma 2]). *Se $\mathbf{G}$ é um grafo livre de triângulos de n vértices e m arestas, então existem em $\mathbf{G}$ dois subconjuntos independentes disjuntos e não vazios A e B tais que $|A| + |B| \geq 4m/n$.*

Lema 2.11 ([Kri95, Lemma 1]). *Seja $\mathbf{G}$ um grafo de n vértices (α, β) -denso. Suponha que γ é um real tal que $\alpha \leq \gamma \leq 1$. Então, Todo subconjunto de $\lfloor \gamma n \rfloor$ vértices induz mais de $\frac{\beta \gamma^2}{\alpha^2} n^2$ arestas.*

2.2 Prova do Teorema 1.3

Seja $\mathbf{G} = (V, E)$ um grafo de n vértices com cintura ímpar $\text{ogirth}(\mathbf{G}) > 5$. Suponha pelo contrário que $\mathbf{G}$ é $(1/2, 1/64)$ -denso. Seja $\rho = e(\mathbf{G})/n^2$. Então, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\sum_{u \in V} \sum_{w \in N(u)} d(w) = \sum_{u \in V} d^2(u) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 = 4\rho^2 n^3,$$

portanto, existe um vértice $u_0 \in V$ tal que

$$\sum_{w \in N(u_0)} d(w) \geq 4\rho^2 n^2. \quad (2.5)$$

Seja w_0 um vértice em $N(u_0)$ e sejam

$$U = \bigcup_{v \in N(u_0)} N(v)$$

e

$$W = \bigcup_{v \in N(w_0)} N(v).$$

Afirmção. Afirmamos que U e W são conjuntos independentes disjuntos e não vazios tais que

$$e(U, W) \geq 4\rho^2 n^2. \quad (2.6)$$

Prova da Afirmção. Como $u_0 \in N(w_0) \subseteq U$ e $w_0 \in N(u_0) \subseteq W$ temos $U \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$. Se existir $v \in U \cap W$ então existem vértices $x \in N(u_0)$ e $y \in N(w_0)$ adjacentes a v . Como $\mathbf{G}$ é livre de triângulo temos $N(u_0) \cap N(w_0) = \emptyset$ e assim $x \neq y$, mas agora, $xv y w_0 u_0$ é um pentágono em $\mathbf{G}$ o que contradiz a condição $\text{ogirth}(\mathbf{G}) > 5$, logo tal v não existe e assim U e W são disjuntos. Analogamente, suponha que $u_1 u_2$ é uma aresta em $\mathbf{G}$ com ambos extremos em U . Da definição de U , existem vértices $w_1, w_2 \in N(u_0)$ tais que $u_1 w_1$ e $u_2 w_2$ são arestas de $\mathbf{G}$, mas se $w_1 = w_2$ (ou $u_1 = u_0$ ou $u_2 = u_0$) então $u_1 w_1 u_2 w_2$ é um triângulo em $\mathbf{G}$, e se $w_1 \neq w_2$ então $u_0 w_1 u_1 u_2 w_2$ é um pentágono em $\mathbf{G}$, uma contradição a $\text{ogirth}(\mathbf{G}) > 5$. Isto implica que U é um conjunto independente. Similarmente temos que W é um conjunto independente. Agora como $W \supseteq N(u_0)$ de (2.5) segue

$$e(U, W) \geq e(U, N(u_0)) = \sum_{w \in N(u_0)} d(w) \geq 4\rho^2 n^2,$$

o que completa a prova da afirmação. ■

Seja T o complemento de $U \cup W$ em $V(\mathbf{G})$. Sejam $x = |U|/n$ e $y = |W|/n$, assim $1 - x - y = |T|/n$. Sejam $\rho_1 = e(U, W)/n^2$, $\rho_2 = e(U, T)/n^2$, $\rho_3 = e(W, T)/n^2$ e $\rho_4 = e(T)/n^2$. A $(1/2, 1/64)$ -densidade de $\mathbf{G}$ implica que $x < 1/2$ e $y < 1/2$, assim, podemos aplicar o [Lema 2.9](#) aos conjuntos U e T como também aos conjuntos W e T para obter de (2.1) respectivamente

$$\rho_2 > \frac{1 - x - y}{64(1/2 - x)} - \frac{(1/2 - x)}{1 - x - y} \rho_4 \quad (2.7)$$

$$\rho_3 > \frac{1 - x - y}{64(1/2 - y)} - \frac{(1/2 - y)}{1 - x - y} \rho_4. \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8) obtemos

$$\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 > \frac{1}{64} \left(\frac{1 - x - y}{1/2 - x} + \frac{1 - x - y}{1/2 - y} \right). \quad (2.9)$$

Por outro lado, na região $0 < x < 1/2$, $0 < y < 1/2$, a função $h(x, y) = \frac{1-x-y}{1/2-x} + \frac{1-x-y}{1/2-y}$ é minimizada nos pontos da reta $y = x$, portanto $h(x, y) \geq 4$. Como $\rho = \sum_{i=1}^4 \rho_i$, então de (2.9) segue

$$\rho - \rho_1 > \frac{1}{16} \quad (2.10)$$

Por (2.6) temos $\rho_1 \geq 4\rho^2$, logo de (2.10) segue $\rho > \frac{1}{16} + 4\rho^2$ ou

$$(8\rho - 1)^2 < 0$$

uma contradição, assim $\mathbf{G}$ não é $(1/2, 1/64)$ -denso como suposto, o que completa a prova. □

2.3 Grafos livres de triângulo com grau médio acotado

Keevash e Sudakov [KS06] consideraram o inteiro $e(\mathbf{G}) := |E(\mathbf{G})|$, o número de arestas de $\mathbf{G}$. É fácil ver que a [Conjectura 1.2](#) vale se $e(\mathbf{G}) \leq 2n^2/25$. Se escolhermos uniformemente ao acaso um subconjunto $U \subset V(\mathbf{G})$ de tamanho $|U| = \lfloor n/2 \rfloor$ então para cada aresta $\{u, v\} \in E(\mathbf{G})$, a

probabilidade de que ambos dos seus extremos pertençam a U é

$$\mathbb{P}[\{u, v\} \subset U] = \frac{\binom{n-2}{\lfloor n/2 \rfloor - 2}}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{n(n-1)} < \frac{1}{4}.$$

A linearidade do valor esperado fornece um U de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$ tal que $e(U) < e(\mathcal{G})/4$, assim se $e(\mathcal{G}) \leq 2n^2/25$ então $e(U) < n^2/50$.

Keevash e Sudakov [KS06] provaram que a [Conjectura 1.2](#) vale sempre que $e(\mathcal{G}) \geq n^2/5$ ou $e(\mathcal{G}) \leq n^2/12$. Nosso resultado melhora modestamente a cota superior no resultado de Keevash e Sudakov [KS06]. Nossos cálculos permitem trocar a constante $\frac{1}{12}$ pela constante $c_1 = \frac{33-\sqrt{161}}{232} \approx \frac{1}{11.422}$, no entanto, apresentamos o resultado com $c_2 = \frac{7}{80} \approx \frac{1}{11.429}$.

Proposição 1.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grafo livre de triângulos de ordem n com no máximo $\frac{7}{80}n^2$ arestas. Então $\mathcal{G}$ contém um subgrafo induzido de ordem $\lfloor n/2 \rfloor$ com no máximo $n^2/50$ arestas.*

Prova. Seja $c = (33 - \sqrt{161})/232$. Vamos mostrar que todo grafo $\mathcal{G}$ de ordem n livre de triângulos com $e(\mathcal{G}) \leq cn^2$ arestas satisfaz $e_{1/2}(\mathcal{G}) \leq n^2/50$. Como $c > \frac{7}{80}$, o resultado segue.

Para tanto, seja $\mathcal{G}$ um grafo livre de triângulos com n vértices e ρn^2 arestas para algum $\rho \leq c$. Suponha pelo contrário que $\mathcal{G}$ é $(1/2, 1/50)$ -denso. O [Lema 2.10](#) garante que existem dois conjuntos independentes disjuntos e não vazios A e B tais que $|A| + |B| = 4\rho n$. Seja $C = V(\mathcal{G}) \setminus A \cup B$ o complemento em $V(\mathcal{G})$ de $A \cup B$. Como A e B são independentes, da $(1/2, 1/50)$ -densidade de $\mathcal{G}$ segue que $|A| < n/2$ e $|B| < n/2$. Dado que $\rho < 1/8$ temos ainda que $|A \cup B| < n/2$ e portanto $|A \cup C| > n/2$ e $|B \cup C| > n/2$. Assim, os conjuntos A e C satisfazem as condições do [Lema 2.9](#) (com $X = C$ e $Y = A$). De igual modo, os conjuntos B e C (com $X = C$ e $Y = B$). Denotando $a = |A|/n$, $\rho_1 = e(C)/n^2$, $\rho_2 = e(A, C)/n^2$, $\rho_3 = e(B, C)/n^2$, $\rho_4 = e(A \cup B)/n^2$ e lembrando que A e B são conjuntos independentes, então do [Lema 2.9](#) nós obtemos

$$\left(\frac{1/2 - a}{1 - 4\rho}\right)^2 \rho_1 + \left(\frac{1/2 - a}{1 - 4\rho}\right) \rho_2 > 1/50, \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{1/2 - 4\rho + a}{1 - 4\rho}\right)^2 \rho_1 + \left(\frac{1/2 - 4\rho + a}{1 - 4\rho}\right) \rho_3 > 1/50, \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{1/2 - 4\rho}{1 - 4\rho}\right)^2 \rho_1 + \left(\frac{1/2 - 4\rho}{1 - 4\rho}\right) (\rho_2 + \rho_3) + \rho_4 > 1/50. \quad (2.13)$$

Multiplicando (2.11) por $\frac{1-4\rho}{1/2-a}$ e (2.12) por $\frac{1-4\rho}{1/2-4\rho+a}$ e somando obtemos

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 > \frac{1}{50} \left(\frac{1-4\rho}{1/2-a} + \frac{1-4\rho}{1/2-4\rho+a} \right) \quad (2.14)$$

Lembrando que $\rho < 1/4$ temos que a função

$$f(x) = \frac{1-4\rho}{1/2-x} + \frac{1-4\rho}{1/2-4\rho+x}$$

é minimizada em $x = 2\rho$, e claramente, $f(2\rho) = 4$. De isto e da igualdade $\rho = \sum_{i=1}^4 \rho_i$, obtemos de (2.14) que

$$\rho_4 < \rho - \frac{2}{25}. \quad (2.15)$$

Por outro lado, como $(1-4\rho)n = |C| > n/2$, do [Lema 2.11](#) obtemos

$$\rho_1 > \frac{2}{25}(1-4\rho)^2. \quad (2.16)$$

Fazendo $s = \frac{1/2-4\rho}{1-4\rho}$, podemos reescrever (2.13) como

$$s^2 \rho_1 + s(\rho_2 + \rho_3) + \rho_4 > 1/50$$

ou equivalentemente

$$s \sum_{i=1}^4 \rho_i > \frac{1}{50} + (s\rho_1 - \rho_4)(1-s), \quad (2.17)$$

de (2.15) e (2.16) obtemos

$$s\rho_1 - \rho_4 > \frac{1}{25} (32\rho^2 - 37\rho + 3). \quad (2.18)$$

De (2.18) e (2.17) segue

$$s\rho > \frac{1}{50} + \frac{1}{25} (32\rho^2 - 37\rho + 3)(1-s). \quad (2.19)$$

Ao substituir $s = \frac{1/2-4\rho}{1-4\rho}$ e $1-s = \frac{1/2}{1-4\rho}$ em (2.19) e multiplicar pelo real positivo $1-4\rho$ obtemos

$$33\rho > 116\rho^2 + 2$$

o qual é uma contradição para todo $\rho \leq \frac{33-\sqrt{161}}{232} = c$, isto implica que G não é $(1/2, 1/50)$ -denso como foi suposto, o que finaliza a prova da [Proposição 1.4](#). ■

Capítulo 3

Grafos densos livres de triângulo

Como observado no [Capítulo 1](#), os resultados de Zykov [[Zyk49](#)], Tutte [[Des48](#)] (cf. [[Erd62](#)]) e Mycielski [[Myc55](#)] garantem que, para todo k existe um grafo G livre de triângulo com número cromático $\chi(G) > k$. Observe que, fixado um grafo livre de triângulo G com $\chi(G) > k$, para cada $\varepsilon > 0$, podemos escolher um grafo bipartido completo G' de ordem suficientemente grande tal que a união disjunta de G e G' produz um grafo de ordem n com $(\frac{1}{4} - \varepsilon)n^2$ arestas, número cromático maior que k e grau mínimo $o(n)$. Erdős e Simonovits [[ES73](#)] perguntaram quão grande pode ser o grau mínimo de um grafo livre de triângulo de número cromático k ? Eles acreditavam que em grafos H -livres, grau mínimo grande força número cromático acotado. Eles conjecturaram em particular que para grafos livres de triângulo, $\delta(G) > n/3$ deveria implicar $\chi(G) \leq 3$. Häggkvist [[Häg82](#)] achou um contraexemplo a esta conjectura. O grafo da [Figura 7](#) corresponde-se a um blow-up não balanceado do grafo de Grötzsch, um grafo 4-cromático livre de triângulo de ordem n ($= 29$) com $\delta(G) > \frac{n}{3}$. No entanto, Thomassen [[Tho02](#)] mostrou que para todo $\varepsilon > 0$, se $\delta(G) > (\frac{1}{3} + \varepsilon)n$ então $\chi(G) < c$ para alguma constante $c = c(\varepsilon)$. Finalmente, Brandt e Thomassé [[BT10](#)] mostraram que, de fato, $\delta(G) > n/3$ implica $\chi(G) \leq 4$.

Goddard e Lyle [[GL11](#)] e Nikiforov [[Nik10](#)] estenderam este resultado para grafos K_r -livres, para todo $r \geq 3$. Em [[GL11](#)] e [[Nik10](#)] prova-se que $\delta(G) > \frac{2r-5}{2r-3}n$ implica $\chi(G) \leq r + 1$.

Allen, Böttcher, Griffiths, Kohayakawa e Morris [[ABG⁺13](#)] provaram um resultado análogo ao resultado de Thomassen quando proibimos qualquer grafo H , com $\chi(H) \geq 3$, i.e. eles determinaram o *limiar cromático* $\delta_\chi(H)$ para todo grafo H . O limiar cromático $\delta_\chi(H)$ tem a propriedade que para $d < \delta_\chi(H)$, o número cromático de grafos G com n vértices H -livres e mínimo grau dn , pode ser arbitrariamente grande, enquanto que para $d > \delta_\chi(H)$, $\chi(G)$ é acotado.

Hajnal (cf. i.b. [[ES73](#)]) mostrou exemplos de grafos livres de triângulo de ordem n com grau mínimo maior que $(1/3 - \varepsilon)n$ e número cromático arbitrariamente grande. A construção é como segue: Fixe inteiros $k \ll m \ll l$, onde $2m + k$ divide l . Inicie com a união disjunta do grafo bipartido completo $K_{l,2l}$ e o grafo de Kneser $\text{gKne}_{2m+k,k}$. Divida a partição de tamanho $2l$ do grafo $K_{l,2l}$ em $2m + k$ classes de igual tamanho e enumere estas classes como $X_1, \dots, X_{2m+k}$. Para cada vértice v no grafo de Kneser, adicione todas as arestas de v a todos os vértices da classe X_i sempre que $i \in U_v$, onde U_v é o k -subconjunto de $\binom{[2m+k]}{k}$ que representa v no grafo de Kneser (observe que isto evita triângulos). Pelo célebre resultado de Lovász (1976), $\chi(\text{gKne}_{n,k}) = n - 2k + 2$, assim, este grafo tem número cromático $k + 2$, é livre de triângulos e não é difícil ver que seu grau mínimo pode fazer-se tão perto a $n/3$ como se quiser.

Jin [[Jin93](#)] mostrou que, se G é um grafo de ordem n livre de triângulo com $\delta(G) > \frac{i+1}{3i+2}n$, para algum $1 \leq i \leq 9$, então $G \rightarrow \Gamma_i$, i.e. G é homomorfo ao grafo de Andrásfai Γ_i (cf. [Definição 2.2](#)). Chen, Jin e Koh [[CJK97](#)] provaram que um grafo G de ordem n livre de triângulo com $\delta(G) > n/3$ é homomorfo a algum grafo de Andrásfai Γ_i , e portanto $\chi(G) \leq 3$, ou contém o grafo de Grötzsch gGrö como subgrafo, e portanto $\chi(G) \geq 4$ (veja Brandt [[Bra99](#)] para uma prova mais simples deste resultado). Segue que se G é livre de triângulo com $\delta(G) > n/3$ e $\chi(G) \leq 3$ então $G \rightarrow \Gamma_i$. Por outro

lado, o resultado em [BMRS17] garante que, se $G \rightarrow \Gamma_i$ então $e_{1/2}(G) \leq n^2/50$.

Para grafos livres de triângulo com $\delta(G) > n/3$ e $\chi(G) = 4$ nós mostramos que $e_{1/2}(G) < n^2/54$ se G é regular. Para comodidade do leitor, apresentamos novamente o enunciado do Teorema 1.5.

Teorema 1.5. *Seja G um grafo regular de ordem n livre de triângulo. Se o grau de G excede $n/3$ então $e_{1/2}(G) \leq n^2/50$. Se além disso, G não é 3-cromático, então $e_{1/2}(G) < n^2/54$.*

O Teorema 1.5 é provado na Seção 3.1. Sua prova está fortemente baseada nas propriedades estruturais dos, assim chamados, *grafos Vega* descritos por Brandt e Thomassé em [BT10]. Isto melhora um resultado em Krivelevich [Kri95, Theorem 3] quem verificou a Conjectura 1.2 se G é d -regular com grau $d \geq 2n/5$.

Lembramos que um *homomorfismo de grafos* $G \rightarrow H$ é um mapeamento $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que se $uv \in E(G)$ então $f(u)f(v) \in E(H)$. Se existir $G \rightarrow H$ nós dizemos que G é *homomorfo* a H ou que G é H -*tipo*. Um *automorfismo* é um homomorfismo sobrejetivo de um grafo em se mesmo. Um homomorfismo bijetivo é um *isomorfismo*. Um subgrafo H de G é um *núcleo* de G se existir $G \rightarrow H$ mas não $G \rightarrow H'$ para qualquer subgrafo próprio H' de H . Assim, H é o mais pequeno subgrafo (induzido) de G que é sua imagem homomorfa. A família de subgrafos H de G para os quais $G \rightarrow H$ é não vazia. Um elemento minimal (com respeito à relação de ordem parcial “é subgrafo de”) nesta família é um núcleo. Portanto, todo grafo tem um núcleo. Este núcleo é único a menos de isomorfismos: se H_1 e H_2 são núcleos de G com mapeamentos $f_1 : V(G) \rightarrow V(H_1)$ e $f_2 : V(G) \rightarrow V(H_2)$ respectivamente, então as restrições de f_1 a H_2 e de f_2 a H_1 são mapeamentos sobrejetivos e portanto H_1 e H_2 são isomorfos. Um grafo G que é seu próprio núcleo é chamado simplesmente de *núcleo*. Neste caso, todo homomorfismo $G \rightarrow G$ é sobrejetivo, i.e. um automorfismo. Um grafo bipartido (não vazio) é seu próprio núcleo se e só se é isomorfo a K_2 . Decidir se um grafo é seu próprio núcleo é um problema **NP**-completo (ainda entre grafos 3-coloríveis [HN92]).

Dois vértices são *similares* se as suas vizinhanças coincidem. Para um vértice $v \in V(G)$, nós denotamos $\mathcal{S}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in V : N(u) = N(v)\}$ a *classe de similaridade* de v e $s(v) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathcal{S}(v)|$ o tamanho desta classe. Observe que o núcleo de um grafo G pode ser obtido por eliminação sucessiva de vértices similares.

Brandt [Bra99] mostrou que todo grafo livre de triângulo com $\delta(G) \geq |G|/3$ não homomorfo a Γ_i contém $\mathfrak{cPet}/e$ como subgrafo. $\mathfrak{cPet}/e$ é o grafo de 9 vértices que resulta de contrair uma aresta ao grafo de Petersen.

Teorema 3.1 (Brandt [Bra99]). *Seja G um grafo livre de triângulo de ordem n com grau mínimo $\delta(G) \geq n/3$. Então G não é homomorfo a Γ_i se e só se G contém $\mathfrak{cPet}/e$ como subgrafo.*

O grafo $\mathfrak{cPet}/e$ é um grafo núcleo e contém um C_6 induzido. O seguinte lema é um corolário ao Teorema 3.1.

Lema 3.2 (Brandt [Bra99]). *Se G é um grafo livre de triângulo de grau mínimo $\delta(G) > n/3$ não homomorfo a um grafo de Andrásfai, então G contém um C_6 induzido e um vértice dominando três vértices deste C_6 .*

A existência de um vértice que domina três vértices neste C_6 é garantida porque, caso contrário, a relação

$$6\delta(G) \leq \sum_{v \in V(C_6)} d(v) \leq 2n$$

é verificada, contradizendo a condição do grau mínimo para G .

Chen, Jin e Koh [CJK97] provaram que se $\delta(G) > n/3$ então G é homomorfo a um grafo de Andrásfai Γ_i (e portanto é 3-colorível) ou contém o grafo de Grötzsch como subgrafo (e portanto $\chi(G) \geq 4$).

Figura 5: Estrutura global de um grafo Vega

Teorema 3.3 (Chen, Jin e Koh [CJK97]). *Seja G um grafo livre de triângulo de ordem n com grau mínimo $\delta(G) > n/3$. Então G não é homomorfo com algum grafo de Andrásfai Γ_i se e só se G contém o grafo de Grötzsch como subgrafo.*

Finalmente, Brandt e Thomassé [BT10] provam que $\delta(G) > n/3$ implica $G \rightarrow T_i$. O grafo T_i é um membro de uma família infinita de grafos núcleos 4-cromáticos conhecidos como *grafos Vega* e introduzidos por Brandt e Pisanski [BP98] com ajuda do programa de computador VEGA [Pis95].¹

Definição 3.4 (Grafos Vega). Para cada $i \geq 2$, definimos os quatro grafos Vega $T_i, T_i - \{y\}, T_i - \{2i\}$ e $T_i - \{y, 2i\}$ como segue. Inicie com a união disjunta do grafo de Andrásfai Γ_i , uma aresta xy e o 6-ciclo $avcubw$. Adicione arestas unindo x a cada vértice em $\{a, b, c\}$ e y a cada vértice em $\{u, v, w\}$. Adicione as $2i$ arestas possíveis desde o conjunto $\{a, u\}$ ao conjunto $\{1, \dots, i\} \subset V(\Gamma_i)$; as $2i$ arestas desde $\{b, v\}$ a $\{i+1, \dots, 2i\} \subset V(\Gamma_i)$; e finalmente as $2(i-1)$ arestas desde $\{c, w\}$ a $\{2i+1, \dots, 3i-1\} \subset V(\Gamma_i)$. O grafo formado é o grafo Vega T_i de $3i+7$ vértices. Os outros três grafos Vega são formados a partir de T_i por eliminação de vértices: os dois grafos Vega de $3i+6$ vértices $T_i - \{y\}$ e $T_i - \{2i\}$, e o grafo Vega de $3i+5$ vértices $T_i - \{y, 2i\}$.

A Figura 5 mostra a estrutura geral de um grafo Vega.

É rotina verificar que os grafos Vega são núcleos (cf. [BT10]). Da Definição 3.4 segue que para todo $i \geq 2$ temos $T_i - \{y, 2i\} \rightarrow T_i - \{y\} \rightarrow T_i$ e $T_i - \{y, 2i\} \rightarrow T_i - \{2i\} \rightarrow T_i$. Além disso, para todo $j > i$ temos $T_i - \{y, 2i\} \rightarrow T_j - \{y, 2j\}$, $T_i - \{y\} \rightarrow T_j - \{y\}$, $T_i - \{2i\} \rightarrow T_j - \{2j\}$ e $T_i \rightarrow T_j$. Em particular, $T_2 - \{y, 4\}$ (o grafo de Grötzsch) é homomorfo a todos os outros grafos Vega. Também temos que $\Gamma_i \rightarrow T_i$, onde Γ_i é o i -ésimo grafo de Andrásfai.

Teorema 3.5 (Brandt e Thomassé [BT10]). *Seja G um grafo livre de triângulo de ordem n e grau mínimo $\delta(G) > n/3$. Então, $G \rightarrow T_i$ para algum inteiro $i \geq 2$. Além disso, se G não é 3-colorível, então existe um homomorfismo sobrejetivo $f: V(G) \rightarrow V(H)$, onde H é um dos grafos Vega $T_i - \{y, 2i\}, T_i - \{y\}, T_i - \{2i\}$ ou T_i , para algum inteiro $i \geq 2$.*

¹Pisanski é um dos desenvolvedores principais de VEGA, cf. [FG05, p. x]

Figura 6: Grafos Vega para $i=2$

Corolário 3.6. *Seja G um grafo livre de triângulo de ordem n e grau mínimo $\delta(G) > n/3$. Então, G é 4-colorível.*

Um *grafo ponderado* é um par (H, w) onde H é um grafo e $w : V(H) \rightarrow [0, 1]$ é a *função peso* que satisfaz

$$w(V(H)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V(H)} w(v) = 1$$

O *conjunto de vértices* do grafo ponderado (H, w) é o conjunto $V(H)$. O *grau* de cada vértice v num grafo ponderado é $\sum_{u \in N_H(v)} w(u)$ e o *mínimo grau* é denotado $\delta((H, w))$. O *peso* de um subconjunto de vértices $S \subset V(H)$ é $w(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in S} w(v)$. Se $w(N_H(v))$ é constante para todo vértice v de (H, w) então dizemos que w é *regular*. A função de peso é *positiva* se $w(v) > 0$ para todo vértice de H . Nós definimos o *número de arestas* do grafo ponderado (H, w) como

$$e((H, w)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{v \in V(H)} w(v) w(N_H(v)).$$

Se a função de peso w toma valores racionais então (H, w) corresponde-se ao grafo simples G que resulta de fazer o correspondente blow-up não balanceado de H , i.e., de substituir cada vértice $v_i \in V(H)$ por um conjunto independente V_i de tamanho $|V_i| = w(v_i)n$ onde n é o mínimo comum múltiplo dos denominadores nos pesos $w(v_i)$, $v_i \in V(G)$; e cada aresta $v_i v_j \in E(H)$ pelo grafo bipartido completo com partições V_i e V_j . Reciprocamente, todo grafo simples G de ordem n corresponde-se com o grafo ponderado (H, w) onde H é o núcleo de G e o peso de cada vértice $v \in V(H)$ é $w(v) = s(v)/n$, onde $s(v)$ é o tamanho em G da classe de similaridade de v .

Resolvendo um problema de programação inteira, é possível notar que cada grafo Vega admite uma função de peso regular, positiva e de valores racionais com grau mínimo maior que $1/3$. Esta função de peso é única (cf. Brandt e Thomassé [BT10, Theorem 3]).

Lema 3.7 ([BT10, Theorem 3]). *Todo grafo Vega H admite uma única função de peso regular positiva w tal que o grau δ do grafo ponderado (H, w) excede $1/3$.*

Prova. Para cada $i \geq 2$ defina w como segue:

No grafo T_i , atribuir os seguintes pesos: $\frac{1}{27i-19}$ nos vértices $x, y, 1$ e $2i$; $\frac{3i-3}{27i-19}$ a c e w ; $\frac{3i-2}{27i-19}$ a a, b, u e v ; e peso $\frac{3}{27i-19}$ para os outros vértices.

Em $T_i - \{y\}$, atribuir os seguintes pesos: $\frac{1}{27i-22}$ a 1 e $2i$; $\frac{2}{27i-22}$ a x ; $\frac{3i-4}{27i-22}$ a w ; $\frac{3i-3}{27i-22}$ a u, v, c ; $\frac{3i-2}{27i-22}$ a a, b , e $\frac{3}{27i-22}$ a os outros vértices.

Em $T_i - \{2i\}$, peso $\frac{1}{27i-22}$ nos vértices x e y ; $\frac{2}{27i-22}$ a 1 e i ; $\frac{3i-3}{27i-22}$ a b, c, v e w ; $\frac{3i-2}{27i-22}$ a a e u ; e $\frac{3}{27i-22}$ a os outros vértices.

Figura 7: *Blow-up do grafo de Grötzsch de 29 vértices*

Em $\mathcal{T}_i - \{y, 2i\}$, peso $\frac{1}{27i-25}$ a 1 e $2i$; $\frac{2}{27i-25}$ a x ; $\frac{3i-4}{27i-25}$ a w ; $\frac{3i-3}{27i-25}$ a c, u e v ; $\frac{3i-2}{27i-25}$ a a e b ; e peso $\frac{3}{27i-25}$ a os outros vértices. ■

Denotando $X = N(a) \cap N(u)$, $Y = N(b) \cap N(v)$, e $Z = N(c) \cap N(w)$, a Tabela 3 resume a função de peso regular do Lema 3.7.

	x	y	a	b	c	u	v	w	$X \setminus \{1, i\}$	1	i	$Y \setminus \{2i\}$	$2i$	Z	δ	$w(V)$
$\mathcal{T}_i$	1	1	$3i-2$	$3i-2$	$3i-3$	$3i-2$	$3i-2$	$3i-3$	$3i-6$	1	3	$3i-2$	1	$3i-3$	$9i-6$	$27i-19$
$\mathcal{T}_i - \{y\}$	2	–	$3i-2$	$3i-2$	$3i-3$	$3i-3$	$3i-3$	$3i-4$	$3i-6$	1	3	$3i-2$	1	$3i-3$	$9i-7$	$27i-22$
$\mathcal{T}_i - \{2i\}$	1	1	$3i-2$	$3i-3$	$3i-3$	$3i-2$	$3i-3$	$3i-3$	$3i-6$	2	2	$3i-3$	–	$3i-3$	$9i-7$	$27i-22$
$\mathcal{T}_i - \{y, 2i\}$	2	–	$3i-2$	$3i-3$	$3i-3$	$3i-3$	$3i-4$	$3i-4$	$3i-6$	2	2	$3i-3$	–	$3i-3$	$9i-8$	$27i-25$

Tabela 3.1: *Função de peso regular para grafos Vega. Cada celda contém o numerador do peso racional do respectivo vértice. Nas columnas indexadas por conjuntos, a celda contém a soma (dos numeradores) dos pesos dos vértices no conjunto*

3.1 Prova do Teorema 1.5

Teorema 1.5. *Seja G um grafo regular de ordem n livre de triângulo. Se o grau de G excede $n/3$ então $e_{1/2}(G) \leq n^2/50$. Se além disso, G não é 3-cromático, então $e_{1/2}(G) < n^2/54$.*

Prova. Seja G um grafo d -regular de ordem n livre de triângulo, com $d > n/3$. Pelo Corolário 3.6 temos $\chi(G) \leq 4$. Se G é bipartido então $e_{1/2}(G) = 0$. Se $\chi(G) = 3$ então pelo Teorema 3.3 temos que $G \rightarrow \Gamma_j$ para algum grafo de Andrásfai Γ_j , e pelo Teorema 2.7 temos $e_{1/2}(G) \leq n^2/50$. Assim, podemos assumir que $\chi(G) = 4$. Substituindo cada classe de vértices similares $\mathcal{S}(v)$ em G por um vértice com peso $s(v)/n$, nós construímos um grafo ponderado (H, w) . O Teorema 3.5 garante que H é um grafo Vega. Pela construção de (H, w) , temos que w é uma função peso positiva, e desde que G é regular, w é regular. O Lema 3.7 garante a unicidade de w . Dividimos a prova por casos dependendo de qual grafo Vega é H .

Caso 1. $H = \mathcal{T}_i - \{y, 2i\}$. Para o caso particular $i = 2$ (lembramos que o grafo $\mathcal{T}_2 - \{y, 4\}$ é isomorfo a $\mathfrak{cGr}_6$), a Figura 7 mostra o grafo 10-regular de ordem 29 obtido de um blow-up não balanceado do grafo $\mathfrak{cGr}_6$. Neste grafo, um subconjunto de $\lfloor 29/2 \rfloor = 14$ vértices induz $12 < 29^2/54$ arestas.

Considere $i \geq 3$. Em $\mathcal{T}_i - \{y, 2i\}$ o 6-ciclo (a, v, c, u, b, w) é induzido e x domina $\{a, b, c\}$.

Considere o conjunto

$$X = (N_{\mathbb{H}}(a) \setminus \{x\}) \cup \{b, c\},$$

Da definição de w para $\mathbb{T}_i - \{y, 2i\}$ no [Lema 3.7](#) segue que, para cada $i \geq 3$,

$$\begin{aligned} w(X) &= \sum_{v \in X} w(v) = \frac{15i - 16}{27i - 25} > \frac{1}{2}, \text{ e} \\ w(X \setminus \{b\}) &= \frac{12i - 13}{27i - 25} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para provar o resultado basta mostrar que existe uma função peso w' com peso total $w'(V(\mathbb{H})) = \frac{1}{2}$, tal que $e((\mathbb{H}, w')) < \frac{1}{54}$. Definimos w' como segue

$$w'(z) = \begin{cases} 0 & z \in V(\mathbb{H}) \setminus X \\ w(z) & z \in X \setminus \{b\} \\ \frac{1}{2} - w(X \setminus \{b\}) & z = b \end{cases}$$

Portanto, da definição de $\mathbb{T}_i - \{y, 2i\}$ obtemos

$$e((\mathbb{H}, w')) = vc + w\left(\frac{1}{2} - v - w - c - \Phi\right), \quad (3.1)$$

onde $\Phi = w(N(a) \setminus \{x, v, w\}) = w(\{1, \dots, i\}) = \frac{3i-2}{27i-25}$ e por simplicidade temos denotado, para cada vértice $z \in V(\mathbb{H})$, o peso $w(z)$ simplesmente como z . Por um simples cálculo, do [Lema 3.7](#) obtemos

$$e((\mathbb{H}, w')) = vc + w\left(\frac{1}{2} - v - w - c - \Phi\right) = \frac{(3i-4)(9i-5)}{2(27i-25)^2} < \frac{1}{54}$$

para todo $i \geq 3$.

Caso 2. $\mathbb{H} = \mathbb{T}_i - \{2i\}$. Similarmente, no grafo $\mathbb{T}_i - \{2i\}$ considere o conjunto

$$X = (N_{\mathbb{H}}(a) \setminus \{x\}) \cup \{b, c\}.$$

Da definição de w dada para $\mathbb{T}_i - \{2i\}$ pelo [Lema 3.7](#), nós obtemos para todo $i \geq 2$

$$\begin{aligned} w(X) &= \frac{15i - 14}{27i - 22} > \frac{1}{2}, \\ w(X \setminus \{b\}) &= \frac{12i - 11}{27i - 22} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definimos a função de peso w' como

$$w'(z) = \begin{cases} 0 & z \in V(\mathbb{H}) \setminus X \\ w(z) & z \in X \setminus \{b\} \\ \frac{1}{2} - w(X \setminus \{b\}) & z = b \end{cases}$$

Portanto, $w'(V(\mathbb{H})) = 1/2$ e da definição de $\mathbb{T}_i - \{2i\}$, temos

$$e((\mathbb{H}, w')) = vc + w\left(\frac{1}{2} - v - w - c - \Phi\right), \quad (3.2)$$

onde $\Phi = w(N(a) \setminus \{x, v, w\}) = \frac{3i-2}{27i-22}$ e por simplicidade temos denotado novamente o peso

$w(z)$ simplesmente como z . Do Lema 3.7 obtemos

$$e((H, w')) = vc + w\left(\frac{1}{2} - v - w - c - \Phi\right) = \frac{9(i-1)(3i-2)}{2(27i-22)^2} < \frac{1}{54}$$

para todo $i \geq 2$.

Caso 3. $H = T_i - \{y\}$. Similarmente aos casos anteriores, mas nós excluimos de X o vértice w em vez de b , i.e. com $X = (N_H(a) \setminus \{x\}) \cup \{b, c\}$, do Lema 3.7 obtemos para todo $i \geq 2$

$$\begin{aligned} w(X) &= \frac{15i-14}{22-27i} > \frac{1}{2}, \\ w(X \setminus \{w\}) &= \frac{2(6i-5)}{27i-22} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definimos a função de peso w' como

$$w'(z) = \begin{cases} 0 & z \in V(H) \setminus X \\ w(z) & z \in X \setminus \{w\} \\ \frac{1}{2} - w(X \setminus \{w\}) & z = w \end{cases},$$

assim, $w'(V(H)) = 1/2$ e da definição de $T_i - \{y\}$ segue

$$e((H, w')) = vc + b\left(\frac{1}{2} - v - b - c - \Phi\right), \quad (3.3)$$

onde $\Phi = w(N(a) \setminus \{x, v, w\}) = \frac{3i-2}{27i-22}$ e temos denotado $w(z)$ como z para todo $z \in V(H)$. Do Lema 3.7 obtemos

$$e((H, w')) = vc + b\left(\frac{1}{2} - v - b - c - \Phi\right) = \frac{27i^2 - 48i + 22}{2(27i-22)^2} < \frac{1}{54}$$

para todo $i \geq 2$.

Caso 4. $H = T_i$. Neste caso excluimos de X o vértice c . Com $X = (N_H(a) \setminus \{x\}) \cup \{b, c\}$, do Lema 3.7 obtemos, para todo $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} w(X) &= \frac{3(5i-4)}{27i-19} > \frac{1}{2}, \\ w(X \setminus \{c\}) &= \frac{9-12i}{19-27i} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definimos w' como

$$w'(z) = \begin{cases} 0 & z \in V(H) \setminus X \\ w(z) & z \in X \setminus \{c\} \\ \frac{1}{2} - w(X \setminus \{c\}) & z = c \end{cases}$$

Assim, $w'(V(H)) = 1/2$. Da definição de T_i temos

$$e((H, w')) = wb + v\left(\frac{1}{2} - v - w - b - \Phi\right), \quad (3.4)$$

onde $\Phi = w(N(a) \setminus \{x, v, w\}) = \frac{3i-2}{27i-19}$ e por simplicidade temos denotado o peso $w(z)$ simplesmente como z . Finalmente, do Lema 3.7 obtemos

$$e((H, w')) = wb + v\left(\frac{1}{2} - v - w - b - \Phi\right) = \frac{(3i-2)(9i-7)}{2(27i-19)^2} < \frac{1}{54}$$

para todo $i \geq 2$. Isto completa a prova do [Teorema 1.5](#).

■

Como corolário ao [Teorema 1.5](#), nós verificamos a [Conjectura 1.11](#) assintoticamente em grafos d -regulares de ordem n livres de triângulo com $d > n/3$.

Corolário 1.6. *Seja $\mathbf{G}$ um grafo regular de ordem n livre de triângulo. Se o grau de $\mathbf{G}$ excede $n/3$ então $\mathbf{G}$ pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $(\frac{1}{25} + o(1))n^2$ arestas.*

Prova. Seja $U \subset V(\mathbf{G})$ um subconjunto de vértices de $\mathbf{G}$ de tamanho $|U| = \lfloor n/2 \rfloor$ tal que $e(U) = e_{1/2}(\mathbf{G})$. Denote $U^c = V(\mathbf{G}) \setminus U$. Contando em duas formas as arestas de cruzamento $E(U, U^c)$, obtemos

$$e(U, U^c) = \sum_{u \in U} d(u, U^c) = \sum_{u \in U} (d - d(u, U)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor d - 2e(U) \quad (3.5)$$

e analogamente

$$e(U, U^c) = \sum_{u \in U^c} d(u, U) = \lceil \frac{n}{2} \rceil d - 2e(U^c). \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6) segue que

$$e(U^c) - e(U) = \frac{d}{2} (\lceil \frac{n}{2} \rceil - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{d}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Ao eliminar as arestas em $\mathbf{G}|_U$ e $\mathbf{G}|_{U^c}$ nós obtemos um grafo bipartido e temos eliminado no máximo

$$e(U) + e(U^c) = 2e(U) + \frac{d}{2} \mathbb{1}_{[n \text{ é ímpar}]} \quad (3.7)$$

arestas.

Pelo [Corolário 3.6](#) temos $\chi(\mathbf{G}) \leq 4$. Se $\mathbf{G}$ é bipartido então claramente $e(U) = 0$ e o resultado segue de (3.7) uma vez que $d/2 \leq (1/25 + o(1))n^2$. Se $\chi(\mathbf{G}) = 3$ então o [Teorema 2.7](#) garante que $e(U) \leq n^2/50$ e de (3.7) concluímos que temos eliminado no máximo

$$\left(\frac{1}{25} + \frac{d}{2n^2} \right) n^2 = \left(\frac{1}{25} + o(1) \right) n^2$$

arestas. Analogamente, se $\chi(\mathbf{G}) = 4$, o [Teorema 1.5](#) garante que $e(U) \leq n^2/54$ e pela relação (3.7) temos eliminado no máximo

$$\left(\frac{1}{27} + \frac{d}{2n^2} \right) n^2 \leq \left(\frac{1}{25} + o(1) \right) n^2$$

arestas.

■

Capítulo 4

Uma conjectura de Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp

Um *grafo fortemente regular* (em diante *srg*) com parâmetros (n, d, λ, μ) , é um grafo d -regular de ordem n tal que cada par de vértices adjacentes tem λ vizinhos comuns e cada par de vértices não adjacentes tem μ vizinhos comuns. Claramente, *srg* livres de triângulo satisfazem $\lambda = 0$. O principal resultado neste capítulo é mostrar um contraexemplo a uma conjectura de Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [EFRS94, Conjectura 1.1] para certos valores do parâmetro α . O contraexemplo é dado pela família infinita de grafos $\mathfrak{cCle}^{[16n]}$, os blow-ups balanceados do grafo de Clebsch [Cle68], o único *srg* com parâmetros $(16, 5, 0, 2)$.

Nós observamos que, em contraste com grafos $(3, t)$ -Ramsey considerados em [EFRS94] para estabelecer a Conjectura 1.7 p. 4; blow-ups balanceados de *srg* livres de triângulo mostram densidade local maior para pequenos valores de α . De fato, ao relaxar a nossa definição de *srg* a fim de permitir exemplos triviais (como grafos bipartidos completos de ordem par), a melhor cota inferior conhecida para a função $\beta(\alpha, K_3)$ é fornecida por blow-ups balanceados de *srg* livres de triângulo para todo valor de $\alpha \in (0, 1]$.

4.1 Grafos de Ramsey

Lembramos que uma k -coloração de um conjunto S é uma função $c : [k] \rightarrow S$ que atribui k cores a os elementos de S .

Definição 4.1. O número de Ramsey $R_r(s_1, s_2, \dots, s_k)$ é o menor inteiro n tal que toda k -coloração dos r -subconjuntos de $[n]$ contém um conjunto monocromático de tamanho s_i para algum $1 \leq i \leq k$, onde um conjunto $S \subset [n]$ é chamado *monocromático* se todos os r -subconjuntos de S são da mesma cor.

Se $r = 2$ (grafos), nós omitimos o subíndice. Em 1929 Ramsey [Ram29] mostrou que estes números existem para todos os valores dos parâmetros. Determinar os números de Ramsey é um problema altamente não trivial e é um dos problemas fundamentais em matemáticas discretas (veja [GRS13] ou a recente monografia [XLL18] para uma exposição de problemas, novas conjecturas, e resultados parciais em teoria de grafos extremos, teoria de números, geometria discreta, análise funcional, desenho de algoritmos, entre outras áreas).

Os números de Ramsey da forma $R(3, t)$ tem recebido considerável atenção. De um resultado de Erdős e Szekeres [ES35] segue que $R(3, t) \leq \binom{t+1}{2}$. Graver e Yackel [GY68], Ajtai, Komlós e Szemerédi [AKS80] provaram $R(3, t) \leq c \cdot \frac{t^2}{\ln t}$ para alguma constante $c > 0$. Griggs (1983) mostrou que $R(3, t) \leq \frac{5t^2}{12 \ln t}$. Erdős [Erd61] mostrou que $R(3, t) = \Omega(t^2 / \log^2 t)$. Finalmente, em 1995, Kim [Kim95] mostrou que $R(3, t) = \Theta(t^2 / \log t)$ i.e. existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \cdot \frac{t^2}{\log t} \leq R(3, t) \leq c_2 \cdot \frac{t^2}{\log t}.$$

O melhor valor conhecido para c_1 é $1/4$ (em [BK13]). Em Shearer [She83, She91, She92, She95] implicitamente se mostra $c_2 = 1$.

Um grafo G de ordem n e seu complemento G^c podem ser considerados de forma natural como os subgrafos monocromáticos induzidos por uma 2-coloração apropriada das arestas de K_n . Nós lembramos que um grafo G é (s, t) -Ramsey se $|G| = R(s, t) - 1$ e G não contém um grafo completo de s vértices nem um conjunto independente de t vértices. Assim, para pequenos valores de t , parece intuitivamente razoável que blow-ups de grafos $(3, t)$ -Ramsey sejam grafos livres de triângulo com alta densidade local num intervalo apropriado de α . Desde que $R(3, 2) = 3$, $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, etc (cf. [Rad94]), segue que K_2 é $(3, 2)$ -Ramsey, C_5 é $(3, 3)$ -Ramsey e o grafo de Wagner wag (isomorfo a $\mathfrak{Möb}_8$) é $(3, 4)$ -Ramsey, etc.

4.2 Um contraexemplo para a Conjectura 1.7

Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [EFRS94, Theorem 2.4] provaram que para n suficientemente grande, o grafo de Mantel $K_2^{[2n]}$ é extremal para o problema da densidade local em grafos livres de triângulo em todo o intervalo $[0.648, 1]$, i.e. $\beta(\alpha, K_3) = (2\alpha - 1)/4$ para todo $0.648 \leq \alpha \leq 1$. Observe que este resultado generaliza o teorema de Mantel.

Krivelevich [Kri95] mostrou que $K_2^{[2n]}$ é ainda extremal para $\alpha \geq 0.6$.

Teorema 4.2 (Krivelevich [Kri95, Theorem 4]). *Seja G um grafo de ordem n e $\alpha \geq 0.6$ fixo. Seja $\beta = (2\alpha - 1)/4$. Se cada conjunto de αn vértices de G induz mais que βn^2 arestas, então G contém um triângulo.*

Nós observamos que blow-ups balanceados do grafo de Clebsch $\mathfrak{C}1e$ fornecem um contraexemplo à Conjectura 1.7.

Teorema 1.8.

$$\beta(\alpha, K_3) \geq \begin{cases} 0, & 0 < \alpha \leq \frac{5}{16} \\ \frac{1}{8}(\alpha - \frac{5}{16}), & \frac{5}{16} < \alpha \leq \frac{3}{8} \\ \frac{1}{64}(4\alpha - 1), & \frac{3}{8} < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{64}(16\alpha - 7), & \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{5}{8} \\ \frac{3}{128}(8\alpha - 3), & \frac{5}{8} < \alpha \leq \frac{11}{16} \\ \frac{5}{32}(2\alpha - 1), & \frac{11}{16} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Como $\frac{4\alpha-1}{64} > \frac{5\alpha-2}{25}$ para todo $\frac{53}{120} \leq \alpha < \frac{103}{220}$, nós obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.9. *A Conjectura 1.7 é falsa no intervalo $\alpha \in [\frac{53}{120}, \frac{103}{220})$.*

Observe que analogamente a como a equação (1.5) da Conjectura 1.7 foi obtida, nós podemos obter a equação (4.1) no Teorema 1.8 para a instância $k = 1$, i.e para o grafo $\mathfrak{C}1e$. Nós podemos fazer isto sempre que o grafo seja computacionalmente tratável (de ordem pequeno), no entanto, para provar o Teorema 1.8 para todo inteiro k , precisa-se o seguinte lema, o qual garante que entre os conjuntos U de tamanho $\lfloor \alpha n \rfloor$ que minimizam a densidade $e(U)/n^2$ num blow-up (não necessariamente balanceado) de um grafo H , sempre podemos escolher um conjunto de vértices que contém no máximo uma classe do blow-up parcialmente. A prova do lema é simples e está implicitamente contida numa observação de Sudakov [KS03, p. 141]. Uma prova na terminologia de grafos fracionários é dada em Brandt [Bra98, Proposition 2.1]. Nós trasladamos o equivalente da prova em [Bra98] na terminologia de η -blow-ups.

Lema 4.3. *Sejam H um grafo de ordem h sobre o conjunto de vértices $[h] = \{1, \dots, h\}$ e $\eta \in \mathbb{Z}_+^h$ um vetor de inteiros positivos. Seja $G = H^{[\eta]}$ o η -blow-up de H e $V(G) = I_1 \cup \dots \cup I_h$ a partição de*

$V(\mathbf{G})$ em conjuntos independentes induzida por η . Sejam além $n = |\mathbf{G}|$ e $\alpha \in (0, 1]$ um real. Se

$$\beta = \min\left\{\frac{e(U)}{n^2} : U \subseteq V(G), |U| = \lfloor \alpha n \rfloor\right\},$$

então existe um subconjunto $U \subseteq V(G)$, com $|U| = \lfloor \alpha n \rfloor$ e $e(U) = \beta n^2$, tal que U contém ou é disjunto de cada I_k , para cada índice $k \in [h]$ exceto no máximo um.

Prova. Seja $U \subseteq V(G)$ um subconjunto de tamanho $|U| = \lfloor \alpha n \rfloor$ com $e(U) = \beta n^2$ que intersecta parcialmente a menor quantidade possível de classes I_k . Se U intersecta parcialmente apenas uma classe então o lema verifica-se. Suponha pelo contrário que U intersecta parcialmente pelo menos duas classes I_j e I_k . Sem perda de generalidade, suponha que $\sum_{v \in I_j} d(v) \leq \sum_{v \in I_k} d(v)$. Seja $s = \min\{|I_j \setminus U|, |I_k \cap U|\}$ e $S_1 \subseteq I_j \setminus U$ e $S_2 \subseteq I_k \cap U$ de tamanhos $|S_1| = |S_2| = s$. Definimos $U' = (U \setminus S_2) \cup S_1$. Claramente, $|U'| = |U|$. Consideramos dois casos dependendo se jk é uma aresta em $\mathbf{H}$.

(i) Se $jk \notin E(\mathbf{H})$, então

$$e(U') = e(U) + s\left(\sum_{v \in I_j} d(v) - \sum_{v \in I_k} d(v)\right) \leq e(U),$$

(ii) Se $jk \in E(\mathbf{H})$, então

$$e(U') = e(U) + s\left(\sum_{v \in I_j} d(v) - \sum_{v \in I_k} d(v)\right) - s^2 \leq e(U).$$

Desde que $e(U) = \beta n^2$ é minimal e $|U'| = \lfloor \alpha n \rfloor$, temos $e(U') = \beta n^2$. Mas agora, U' ou contém completamente I_j ou é disjunta de I_k , em qualquer caso, U' intersecta parcialmente uma classe menos que U , isto contradiz a escolha U , o que completa a prova. ■

Desde que o número de classes em $\mathbf{GCle}^{[16k]}$ permanece constante para todo k , o Lema 4.3 implica o Teorema 1.8 indutivamente dado que a densidade $e(U)/n^2$ também permanece constante. Para o caso base $k = 1$ nós usamos um programa de computador que computa exaustivamente os $\binom{16}{\lfloor \alpha 16 \rfloor}$ subconjuntos de vértices de $\mathbf{GCle}$ de tamanho $\lfloor \alpha 16 \rfloor$ para todo $\alpha \in (0, 1]$ (cf. Anexo A).

Capítulo 5

Conclusões e considerações finais

O problema de determinar o subgrafo bipartido máximo é **NP**-completo ainda em grafos de grau máximo 3 [Yan78]. O problema de partições judiciosas é **NP**-difícil [SS94] ainda no caso de bipartições. Krivelevich [Kri95] observou que para grafos regulares, o problema da densidade local é pelo menos tão difícil como o problema da remoção de arestas para tornar grafos bipartidos, i.e., se G é um grafo regular de n vértices que contém um subconjunto U de $\lfloor n/2 \rfloor$ vértices que expande no máximo m arestas, então G pode ser tornado bipartido pela omissão de no máximo $2m$ arestas. O Corolário 1.6 é equivalente a esta observação. Consequentemente, a Conjectura 1.2 é pelo menos tão difícil como a Conjectura 1.11 para grafos regulares. O grafo de Petersen mostra que a recíproca não vale, i.e. o grafo de Petersen não é extremal para a Conjectura 1.11.

O problema da densidade local em grafos visa estender o teorema de Turán, mas em contraste com este, onde o grafo extremal $T_{n,r}$ é único, o fato que existem pelo menos duas famílias de possíveis grafos extremais para a Conjectura 1.2 com propriedades estruturais tão diferentes, permite intuir que a Conjectura 1.2 poderia estar ainda longe de nosso alcance. Enfatizamos, por exemplo, que $\chi(C_5^{[n]}) = 3$ e $\chi(\text{cPet}^{[n]}) = 3$ mas, enquanto $\delta(C_5^{[n]}) > n/3$ contudo $\delta(\text{cPet}^{[n]}) < n/3$ e enquanto $C_5^{[n]} \rightarrow \Gamma_2$ contudo $\text{cPet}^{[n]}$ não é homomorfo a algum grafo de Andrásfai Γ_i . Sudakov, quem tem estudado o problema, sugere que é possível que novas técnicas sejam necessárias para resolvê-la (cf. [Sud11, §5.1]).

Nossas provas usam argumentos padrões como a desigualdade de Cauchy-Schwarz, contagem dupla, álgebra linear, etc. Nosso resultado principal no Capítulo 2 usa uma aproximação análoga a aquela em Krivelevich [Kri95]. A menos de poucas exceções, várias das melhores cotas conhecidas para $\beta(\alpha, K_3)$ nesta data, não revelam provas altamente técnicas. O Teorema 4.2 que melhora o resultado de Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [EFRS94, Theorem 2.4] é um exemplo. No entanto, nossos resultados conseguem melhoras apenas modestas, exceto nos casos onde estudamos propriedades estruturais para uma subclasse específica de grafos como no Capítulo 3.

No Capítulo 2, nós mostramos com o Teorema 1.3 que um grafo G de ordem n com $\text{ogirth}(G) > 5$ satisfaz $e_{1/2}(G) \leq n^2/64$. Para infinitos valores de n , nós achamos grafos livres de triângulo de ordem n que satisfazem $e_{1/2}(G) = n^2/64$, cf. e.g. o grafo $\text{cWag}^{[n]}$ e a relação (1.4) na página 4 ou o grafo $\text{cCle}^{[n]}$ e a relação (4.1) na página 30. Porém, nós falhamos em achar grafos livres de triângulos e pentágonos que atinjam esta igualdade. De fato, a constante $1/64$ no Teorema 1.3 poderia não ser justa devido a um comentário de Erdős no parágrafo final do Problema 1 em [Erd84]. Erdős perguntou se $\text{ogirth}(G) = 2k + 1$ implica $e_{1/2}(G) \leq n^2 / (2(2k + 1)^2)$? De ser verdade, isto é o melhor possível como mostra $C_{2k+1}^{[n]}$ com $2(2k + 1)|n$.

Por outro lado, é razoável conjecturar que a constante $1/54$ no Teorema 1.5 é o melhor possível ainda em grafos não regulares, i.e. nós conjecturamos que a declaração do Teorema 1.5 (provado no Capítulo 3) continua valendo ao remover a condição de regularidade de G .

Conjectura 5.1. *Seja G um grafo de ordem n livre de triângulo com grau mínimo $\delta(G) > n/3$. Se*

$\chi(\mathbf{G}) \neq 3$ então $e_{1/2}(\mathbf{G}) < n^2/54$.

Conjectura 5.2. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe um grafo $\mathbf{G}$ de ordem $n = n(\varepsilon)$ livre de triângulo com grau mínimo $\delta(\mathbf{G}) > n/3$ e número cromático $\chi(\mathbf{G}) = 4$ satisfazendo*

$$e_{1/2}(\mathbf{G}) \geq \left(\frac{1}{54} - \varepsilon\right) n^2.$$

Experimentações com bases de dados de grafos K_3 -livres sugerem que, fixado um núcleo H , blow-ups que minimizam o grau máximo fornecem densidade local maior. Um resultado nesta direção é desejável. É razoável supor que os grafos Vega atingem a maior densidade local justamente nos blow-ups desbalanceados que minimizam o grau máximo, e como observado em [BT10], estes blow-up correspondem a funções de probabilidade sobre os vértices que maximizam o grau mínimo e tornam o grafo pesado regular com uma função de peso única.

No problema da densidade local em grafos, estivemos principalmente focados no caso particular $\beta(1/2, K_3)$ e relativamente poucas variantes deste caso foram consideradas. A sugestão de considerar grafos com cintura ímpar grande foi dada ao autor pelo Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota e o resultado principal no Capítulo 2 consegue responder uma primeira pergunta dele. Em grafos densos, o resultado de Kövári, Sós e Turán [KST54] e Bondy e Simonovits [BS74] impedem proibir grafos bipartidos ou ciclos pares. Grafos esparsos poderiam revelar dificuldades ainda maiores. Desde que $R(3, t) = \Theta(t^2/\log t)$ (cf. [Kim95]), grafos livres de triângulo de ordem n tem número independente $\alpha(\mathbf{G}) = \Omega(\sqrt{n \log n})$, isto implica que para alguma constante $c > 0$ grafos nos quais subconjuntos de $\lfloor c\sqrt{n \log n} \rfloor$ vértices induzem pelo menos uma aresta contêm triângulos, assim, não podemos substituir $\lfloor \alpha n \rfloor$ por uma expressão sublinear arbitrária, no entanto, substituir $\lfloor \alpha n \rfloor$ por $\lfloor n^{1-\varepsilon} \rfloor$ poderia ser de interesse. Em vista dos resultados de de Caen e Füredi [dCF00], Füredi e Simonovits [FS05] e Keevash e Sudakov [KS05], para hipergrafos, proibir o plano de Fano é um razoável ponto de partida.

Apêndice A

Prova computacional do Teorema 1.8

In[694]:=

```
(*Primeiro bloco de código: Executa-se apenas uma vez*)
(*Função: A conjectura de Erdős, Faudree,
Rousseau e Schelp (1994) apenas é definida para o intervalo [53/120, 1]*)
conjecturaErdos[x_] := Piecewise[{
  {(2 x - 1) / 4, 17 / 30 <= x <= 1}, (*Mantel*)
  {(5 x - 2) / 25, 53 / 120 <= x <= 17 / 30} (*Pentágono*)
}];

(*Função: melhor cota inferior conhecida para  $\beta(\alpha, K_3)$  antes deste
trabalho (2014)*)
bestKnownBeta[x_] := Max[
  (* GWagner *) Piecewise[{
    {0, 0 <= x <= 3 / 8}, (*  $\alpha(\text{GWagner}) = 3$ ,
      com  $\alpha(H)$ : número independente do grafo H*)
    {(1 / 8) (- (3 / 8) + x), 3 / 8 <= x <= 1 / 2}, (*Função no artigo de Erdős,
      Faudree, Rousseau e Schelp*)
    {-(7 / 64) + x / 4, 1 / 2 <= x <= 5 / 8}, (*Função precalculada*)
    {3 / 16 (-1 + 2 x), 5 / 8 <= x <= 1} (*Função precalculada*)
  }],
  (* GHigmanSims *) Piecewise[{
    (* {0, 0 <= x <= 22/100},  $\alpha(\text{GHigmanSims}) = 22$ 
    {0, 22/100 <= x <= 326/1000}, Desconhecido*)
    {(1000 x - 326) / 10000, (* 326/1000*) 0 <= x <= 1}
      (* Cota no artigo de Brandt(1998). Dado o Teorema de Brandt,
      observe que pega-se todo o intervalo (0,1] para esta função*)
  }],
  (* GMantel = Grafo bipartido*) Piecewise[{
    {0, 0 <= x <= 1 / 2},
    {(2 x - 1) / 4, 1 / 2 <= x <= 1}
  }],
  (* GPentágono *) Piecewise[{
    {0, 0 <= x <= 2 / 5}, (* $\alpha(\text{Pentagono}) = 2$  *)
    {(5 x - 2) / 25, 2 / 5 <= x <= 3 / 5}, (*Função no artigo de Erdős,
      Faudree, Rousseau e Schelp*)
    {(2 x - 1) / 5, 3 / 5 <= x <= 1} (*Função precalculada*)
  }],
  {}];
```

```

(*Segundo bloco de código: pode ser executado qualquer número de vezes.
Este bloco constrói a função construyeBeta para o grafo de entrada
(neste caso, GClebsch) definida como segue*)
(*A função construyeBeta[α] = β'(G) = Min [eα(U)/n2 : U subset V(G), |U|= αn] *)
(*Precisa-se limpar dados da execução anterior
(utíl depois da primeira execução do código)*)
ClearAll[β, construyeBeta, α];

(*Nome do grafo na base de dados GraphData[] da Wolfram*)
graphName = "ClebschGraph";
(*Obtemos o grafo*)
G = GraphData[graphName];
(*Número independente ou uma boa cota inferior*)
ind = GraphData[graphName, "IndependenceNumber"]; (* Se desconocido,
use Max@VertexDegree[G]; como cota inferior para número independente*)
(*Ordem do grafo*)
n = VertexCount[G];
(*Análise do grafo
fracionário: precisa-se os intervalos da forma [a/n, (a+1)/n] onde a =
Floor[αn] para todo 0 < α ≤ 1. Salvo o caso a < ind/n,
onde o mínimo número de arestas de subgrafos induzidos é zero. *)
intervalos = Table[{(ind + 1) / n, (ind + 1 + 1) / n}, {1, 0, n - ind - 1}];

(*Garante que apagamos valores, definição, atributos, etc.*)
Remove[β, construyeBeta, α];
(*Unprotect[β, construyeBeta, α];*)
(*SetAttributes[construyeBeta, HoldFirst];*)

(*A função β'(G) avalia zero se αn ≤ número independente de G *)
β[s_ /; 0 ≤ s ≤ Evaluate[ind / n]] := 0;
(*Nós gostaríamos ver os intervalos*)
Print[{{0, ind / n}, 0}];
(*A função β'(G) definida para αn >
número independente de G (veja execução de ParallelMap enseguida) *)
construyeBeta[interv_] :=
Module[{inicioIntervalo, finIntervalo, u, s, minAristas, subGrafoEsparso,
maxGradoSubGrafo},
inicioIntervalo = interv[[1]];
finIntervalo = interv[[2]];
u = finIntervalo n;
s = Subsets[VertexList[G], {u}];
minAristas = Min[EdgeCount[#] & /@ (Subgraph[G, #] & /@ s)];
maxGradoSubGrafo =
Max[VertexDegree[#] & /@ Select[Subgraph[G, #] & /@ s,
EdgeCount[#] == minAristas &]];
subGrafoEsparso = SelectFirst[Subgraph[G, #] & /@ s,
EdgeCount[#] == minAristas && Max[VertexDegree[#]] == maxGradoSubGrafo &];
(*HighlightGraph[G, subGrafoEsparso] *)
(* Print[{{inicioIntervalo, finIntervalo},
(minAristas - maxGradoSubGrafo) (1/n)^2 +
(α - inicioIntervalo) (1/n) maxGradoSubGrafo} // Simplify]; *)
β[s_ /; inicioIntervalo ≤ s ≤ finIntervalo] :=
Simplify[(minAristas - maxGradoSubGrafo) (1/n)^2 +
(α - inicioIntervalo) (1/n) maxGradoSubGrafo];
Return[
{{inicioIntervalo, finIntervalo},
(minAristas - maxGradoSubGrafo) (1/n)^2 +
(α - inicioIntervalo) (1/n) maxGradoSubGrafo} // Simplify];
];

```

```

(*Análise dos intervalos em paralelo *)
ParallelMap[construyeBeta[#] &, intervalos];
(*Precisamos dar formato à saída para construir uma Piecewise*)
With[{int = First[#], f = Last[#]},
    {f, First[int] ≤ α ≤ Last[int]}
] & /@ %;
Block[{f},
    (*Nós gostaríamos ver a função construída e dar um nome para ela: f[α]*)
    Print[TableForm[%]];
    f[α_] := Piecewise[%];
    (*Fazemos um Plot e comparamos com a Conjectura de Erdős et. al. como
    também com a função de Brandt*)
    {Block[{plot, point},
        point = Graphics[{Text[53/120, {53/120, 0.04}], Text[1/2, {1/2, 0.04}]}];
        plot = Plot[{bestKnownBeta[α], conjecturaErdos[α], f[α]}, {α, 1/3, 3/5},
            PlotLegends → "Expressions",
            Ticks → ({({#, N[#, 2]} & /@ Range[1/3, 3/5, (2/75)]) ~ Union ~
                {{53/120, ""}, {0.4, 0.03}, Directive[Dashed]}},
                {1/2, "", {0.4, 0.03}, Directive[Dashed]}}, Automatic)}
    ];
    Show[plot, point]
},
    {"f[α] > conjecturaErdos[α]",
        Reduce[{f[α] > conjecturaErdos[α] && 53/120 < α ≤ 1}, {α}]},
    {"f[α] > bestKnownBeta[α] (Brandt)",
        Reduce[{f[α] > bestKnownBeta[α] && 5/16 < α ≤ 1}, {α}]}
}
]

```

$$\left\{ \left\{ 0, \frac{5}{16} \right\}, 0 \right\}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{8} \left(-\frac{5}{16} + \alpha \right) & \frac{5}{16} \leq \alpha \leq \frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} (-1 + 4\alpha) & \frac{3}{8} \leq \alpha \leq \frac{7}{16} \\ \frac{1}{64} (-1 + 4\alpha) & \frac{7}{16} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{64} + \frac{\alpha}{4} & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{9}{16} \\ -\frac{7}{64} + \frac{\alpha}{4} & \frac{9}{16} \leq \alpha \leq \frac{5}{8} \\ \frac{3}{128} (-3 + 8\alpha) & \frac{5}{8} \leq \alpha \leq \frac{11}{16} \\ \frac{5}{32} (-1 + 2\alpha) & \frac{11}{16} \leq \alpha \leq \frac{3}{4} \\ \frac{5}{32} (-1 + 2\alpha) & \frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{13}{16} \\ \frac{5}{32} (-1 + 2\alpha) & \frac{13}{16} \leq \alpha \leq \frac{7}{8} \\ \frac{5}{32} (-1 + 2\alpha) & \frac{7}{8} \leq \alpha \leq \frac{15}{16} \\ \frac{5}{32} (-1 + 2\alpha) & \frac{15}{16} \leq \alpha \leq 1 \end{array}$$

$$\left\{ f[\alpha] > conjecturaErdos[\alpha], \frac{53}{120} < \alpha < \frac{103}{220} \right\}, \left\{ f[\alpha] > bestKnownBeta[\alpha] \text{ (Brandt)}, \frac{5}{16} < \alpha < \frac{679}{1500} \right\}$$

Referências Bibliográficas

- [ABG⁺13] Peter Allen, Julia Böttcher, Simon Griffiths, Yoshiharu Kohayakawa e Robert Morris. The chromatic thresholds of graphs. *Advances in Mathematics*, 235:261–295, 2013. 21
- [ABKS03] Noga Alon, Béla Bollobás, Michael Krivelevich e Benny Sudakov. Maximum cuts and judicious partitions in graphs without short cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 88(2):329–346, jul 2003. 12
- [ACH93] Michael O. Albertson, Lily Chan e Ruth Haas. Independence and graph homomorphisms. *Journal of Graph Theory*, 17(5):581–588, nov 1993. 15
- [AES74] Béla Andrásfai, Paul Erdős e Vera Sós. On the connection between chromatic number, maximal clique and minimal degree of a graph. *Discrete Mathematics*, 8(3):205–218, may 1974. 14
- [AKS80] Miklós Ajtai, János Komlós e Endre Szemerédi. A note on Ramsey numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 29(3):354–360, nov 1980. 29
- [Alo96] Noga Alon. Bipartite subgraphs. *Combinatorica*, 16(3):301–311, sep 1996. 12
- [And62] Béla Andrásfai. Über ein extremalproblem der graphentheorie. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 13:443–455, 1962. 13
- [AS92] Noga Alon e Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. With an appendix by Paul Erdős, A Wiley-Interscience Publication. 8
- [BBH98] Stephan Brandt, Gunnar Brinkmann e Thomas Harmuth. All Ramsey numbers $r(K_3, G)$ for connected graphs of order 9. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 5(1):research paper r7, 20, 1998. 5
- [BBH00] Stephan Brandt, Gunnar Brinkmann e Thomas Harmuth. The generation of maximal triangle-free graphs. *Graphs and Combinatorics*, 16(2):149–157, 2000. 5
- [BF92] László Babai e Péter Frankl. Linear algebra methods in combinatorics, with applications to geometry and computer science (Preliminary version 2 2). University of Chicago, 09 1992. 8
- [BK13] Tom Bohman e Peter Keevash. Dynamic concentration of the triangle-free process. Em *The seventh European conference on combinatorics, graph theory and applications. Extended abstracts of EuroComb 2013, Pisa, Italy, September 9–13, 2013*, páginas 489–495. Pisa: Edizioni della Normale, 2013. 30
- [BM11] John Adrian Bondy e Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph Theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer London Ltd, 2011. 6
- [BMRS17] Wiebke Bedenknecht, Guilherme Oliveira Mota, Christian Reiher e Mathias Schacht. On the local density problem for graphs of given odd-girth. Em *LAGOS 2017. Selected papers of the 9th Latin-American algorithms, graphs, and optimization symposium*,

- Marseille, France, September 11–15, 2017*, páginas 39–44. Amsterdam: Elsevier, 2017. [3](#), [11](#), [14](#), [15](#), [22](#)
- [Bol98] Béla Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184. New York, NY: Springer, 1998. [6](#)
- [Bol04] Béla Bollobás. *Extremal graph theory*. Mineola, NY: Dover Publications, reprint of the 1978 original edição, 2004. Reprint of the 1978 original. [8](#)
- [BP98] Stephan Brandt e Tomaž Pisanski. Another infinite sequence of dense triangle-free graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 5(1):research paper r43, 5, 1998. [23](#)
- [Bra98] Stephan Brandt. The local density of triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, 183(1-3):17–25, mar 1998. [4](#), [5](#), [11](#), [30](#)
- [Bra99] Stephan Brandt. On the structure of dense triangle-free graphs. *Combinatorics Probability and Computing*, 8(3):237–245, 1999. [3](#), [21](#), [22](#)
- [Bra02] Stephan Brandt. A 4-colour problem for dense triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, 251(1-3):33–46, may 2002. [13](#)
- [BRB09] Stephan Brandt e Elizabeth Ribe-Baumann. Graphs of odd girth 7 with large degree. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34:89–93, aug 2009. [15](#)
- [Bri98] Gunnar Brinkmann. All Ramsey numbers $r(K_3, G)$ for connected graphs of order 7 and 8. *Combinatorics, Probability and Computing*, 7(2):129–140, 1998. [5](#)
- [BS74] John Adrian Bondy e Miklós Simonovits. Cycles of even length in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(2):97–105, apr 1974. [34](#)
- [BS95] V.I. Baranov e B. S. Stechkin. *Extremal combinatorial problems and their applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. (Transl. from the Russian). [1](#)
- [BS99] Béla Bollobás e Alexander Scott. Exact bounds for judicious partitions of graphs. *Combinatorica*, 19(4):473–486, 1999. [12](#)
- [BS02] Béla Bollobás e Alexander Scott. Better bounds for Max Cut. Em *Contemporary combinatorics. Collection of survey papers in combinatorics based on lectures given in the workshop on probabilistic combinatorics at the Paul Erdős Summer Research Center in Mathematics, Budapest, Hungary*, páginas 185–246. Berlin: Springer; Budapest: János Bolyai Mathematical Society, 2002. [11](#)
- [BT10] Stephan Brandt e Stéphan Thomassé. Dense triangle-free graphs are four-colorable: A solution to the Erdős-Simonovits problem. *preprint*, 2010. [3](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [34](#)
- [CDS95] Dragoš M. Cvetković, Michael Doob e Horst Sachs. *Spectra of graphs: theory and applications*. Leipzig: J. A. Barth Verlag, 3rd rev. a. enl. ed. edição, 1995. [8](#)
- [CG90] Fan R. K. Chung e Ronald L. Graham. On graphs not containing prescribed induced subgraphs. Em *Generating expanders from two permutations*, páginas 111–120. 1990. [9](#)
- [CG99] Fan R. K. Chung e Ronald L. Graham. *Erdős on graphs. His legacy of unsolved problems*. Wellesley, MA: A K Peters, 1999. [8](#)
- [Chv74] Vašek Chvátal. The minimality of the Mycielski graph. Em *Lecture Notes in Mathematics*, páginas 243–246. Springer Nature, 1974. [3](#)
- [CJK97] Chuan-Chong Chen, Guoping P. Jin e Khee Meng Koh. Triangle-free graphs with large degree. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(4):381–396, dec 1997. [3](#), [21](#), [22](#), [23](#)

- [Cle68] Alfred Clebsch. Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. *J. Reine Angew. Math.*, 69:142–147, 1868. 29
- [dCF00] Dominique de Caen e Zoltán Füredi. The maximum size of 3-uniform hypergraphs not containing a Fano plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 78(2):274–276, mar 2000. 34
- [Des48] Blanche Descartes. A three color problem. *Eureka* (April 1947); *Solution* (March 1948)., 1948. 9, 21
- [Die10] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Heidelberg, fourth edição, 2010. 6
- [Edw73] C. Scott Edwards. Some extremal properties of bipartite subgraphs. *Journal canadien de mathématiques*, 25(0):475–485, jan 1973. 11
- [Edw75] C. Scott Edwards. An improved lower bound for the number of edges in a largest bipartite subgraph. *Recent Adv. Graph Theory, Proc. Symp. Prague 1974*, 167–181 (1975)., 1975. 11
- [EFPS88] Paul Erdős, Ralph Jill Faudree, János Pach e Joel H. Spencer. How to make a graph bipartite. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 45(1):86–98, aug 1988. 11
- [EFRS94] Paul Erdős, Ralph Jill Faudree, Cecil C. Rousseau e Richard H. Schelp. A local density condition for triangles. *Discrete Mathematics*, 127(1-3):153–161, mar 1994. 4, 5, 11, 13, 29, 30, 33
- [EGK97] Paul Erdős, András Gyárfás e Yoshiharu Kohayakawa. The size of the largest bipartite subgraphs. *Discrete Math.*, 177(1-3):267–271, 1997. 11
- [EGS92] Paul Erdős, Ervin Győri e Miklós Simonovits. How many edges should be deleted to make a triangle-free graph bipartite? Em *Sets, graphs and numbers. A birthday salute to Vera T. Sós and András Hajnal*, páginas 239–263. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1992. 11
- [EKR76] Paul Erdős, Daniel J. Kleitman e Bruce L. Rothschild. Asymptotic enumeration of K_n -free graphs. Em *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Rome, 1973), Tomo II*, páginas 19–27. Accad. Naz. Lincei, 1976. Atti dei Convegni Lincei, No. 17. 9
- [Erd59] Paul Erdős. Graph theory and probability. *Journal canadien de mathématiques*, 11(0):34–38, jan 1959. Available at: https://users.renyi.hu/~p_erdos/1959-06.pdf. 10
- [Erd61] Paul Erdős. Graph theory and probability II. *Canadian Journal of Mathematics*, 13:346–352, 1961. 29
- [Erd62] Paul Erdős. Applications of probability to combinatorial problems. *Colloq. Comb. Methods Probab. Theor.*, Aarhus 1962, 90–92 (1962), 1962. Available at: https://users.renyi.hu/~p_erdos/1962-02.pdf. 9, 21
- [Erd64] Paul Erdős. Some applications of probability to graph theory and combinatorial problems. *Theory Graphs Appl.*, Proc. Symp. Smolenice 1963, 133–136 (1964), 1964. URL: https://users.renyi.hu/~p_erdos/1964-26.pdf. 9
- [Erd71] Paul Erdős. Some unsolved problems in graph theory and combinatorial analysis. Em *Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969)*, páginas 97–109. Academic Press, London, 1971. Available at: https://users.renyi.hu/~p_erdos/1971-25.pdf. 4, 10

- [Erd76] Paul Erdős. Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. Em *5th British Combinatorial Conference Aberdeen (Scotland, 1975)*, number XV in Congressus Numeratum, páginas 169–192. Utilitas Math. Winnipeg, Man., 1976. 1, 2, 8, 10
- [Erd84] Paul Erdős. On some problems in graph theory, combinatorial analysis and combinatorial number theory. Em B. Bollobás, editor, *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983)*, páginas 1–17, London, New York, 1984. Academic Press. Available at: https://users.renyi.hu/~p_erdos/1984-11.pdf. 10, 13, 33
- [Erd97] Paul Erdős. Some old and new problems in various branches of combinatorics. *Discrete Mathematics*, 165-166(15):227–231, mar 1997. 2, 4, 13
- [ES35] Paul Erdős e George Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, 2:463–470, 1935. 29
- [ES73] Paul Erdős e Miklós Simonovits. On a valence problem in extremal graph theory. *Discrete Mathematics*, 5(4):323–334, aug 1973. 3, 21
- [FG05] S. Fajtlowicz e DIMACS (Group). *Graphs and Discovery*, volume 69 of *DIMACS series in discrete mathematics and theoretical computer science*. American Mathematical Society, 2005. 23
- [FS05] Zoltán Füredi e Miklós Simonovits. Triple systems not containing a Fano configuration. *Combinatorics, Probability and Computing*, 14(4):467–484, jul 2005. 34
- [GL11] Wayne Goddard e Jeremy Lyle. Dense graphs with small clique number. *Journal of Graph Theory*, 66(4):319–331, 2011. 21
- [GR01] Chris Godsil e Gordon F. Royle. *Algebraic Graph Theory*, volume 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, 2001, 2001. 8, 13, 14
- [GRS13] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild e Joel H. Spencer. *Ramsey theory. With a new foreword. Reprint of the 1990 original 2nd edition*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, reprint of the 1990 original 2nd edition edição, 2013. 8, 29
- [Grz12] Andrzej Grzesik. On the maximum number of five-cycles in a triangle-free graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(5):1061–1066, sep 2012. 10
- [GY68] Jack E. Graver e James Yackel. Some graph theoretic results associated with Ramsey’s theorem. *Journal of Combinatorial Theory*, 4:125–175, mar 1968. 29
- [Häg82] Roland Häggkvist. ODD cycles of specified length in non-bipartite graphs. Em *Graph Theory, Proceedings of the Conference on Graph Theory*, volume 62 of *North-Holland Mathematics Studies*, páginas 89–99. North-Holland, 1982. 14, 21
- [HHK⁺13] Hamed Hatami, Jan Hladký, Daniel Král’, Seguei Norine e Alexander A. Razborov. On the number of pentagons in triangle-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120(3):722–732, apr 2013. 10
- [HJ98] Roland Häggkvist e Guoping P. Jin. Graphs with odd girth at least seven and high minimum degree. *Graphs and Combinatorics*, 14(4):351–362, nov 1998. 15
- [HL98] Thomas Hofmeister e Hanno Lefmann. On k -partite subgraphs. *Ars Comb.*, 50:303–308, 1998. 11
- [HN92] Pavol Hell e Jaroslav Nešetřil. The core of a graph. *Discrete Mathematics*, 109(1-3):117–126, 1992. 22

- [HS68] Donald G. Higman e Charles C. Sims. A simple group of order 44,352,000. *Mathematische Zeitschrift*, 105(2):110–113, 1968. [5](#)
- [HSW11] John Edward Hopcroft, Sucheta Soundarajan e Liaoruo Wang. The future of computer science. *International Journal of Software and Informatics*, 5(4):549–565, 2011. [1](#)
- [Jin93] Guoping P. Jin. Triangle-free graphs with high minimal degrees. *Combinatorics, Probability and Computing*, 2(04):479–490, dec 1993. [3](#), [14](#), [21](#)
- [Kar72] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. Em *Complexity of Computer Computations*, páginas 85–103. Springer US, 1972. [11](#)
- [Kim95] Jeong Han Kim. The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$. *Random Structures & Algorithms*, 7(3):173–207, 1995. [29](#), [34](#)
- [KK54] John B. Kelly e L. M. Kelly. Paths and circuits in critical graphs. *American Journal of Mathematics*, 76:786–792, 1954. [9](#)
- [Kri95] Michael Krivelevich. On the edge distribution in triangle-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(2):245–260, mar 1995. [5](#), [11](#), [13](#), [16](#), [22](#), [30](#), [33](#)
- [KS03] Peter Keevash e Benny Sudakov. Local density in graphs with forbidden subgraphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 12(02):139–153, mar 2003. [9](#), [11](#), [30](#)
- [KS05] Peter Keevash e Benny Sudakov. The Turán number of the Fano plane. *Combinatorica*, 25(5):561–574, sep 2005. [34](#)
- [KS06] Peter Keevash e Benny Sudakov. Sparse halves in triangle-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(4):614–620, jul 2006. [3](#), [11](#), [17](#), [18](#)
- [KST54] Tamás Kövári, Vera Sós e Paul Turán. On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium Mathematicum*, 3:50–57, 1954. [34](#)
- [KW17] Mikhail H. Klin e Andrew J. Woldar. The strongly regular graph with parameters (100,22,0,6): Hidden history and beyond. *Acta Universitatis Matthiae Belii. Series Mathematics*, 25:5–62, 2017. [5](#)
- [Loc82] S.C. Locke. Maximum k -colorable subgraphs. *Journal of Graph Theory*, 6:123–132, 1982. [11](#)
- [LP17] Bernard Lidický e Florian Pfender. Pentagons in triangle-free graphs. *ArXiv e-prints*, página arXiv:1712.08869, Dezembro 2017. [10](#), [11](#)
- [LS18] Shoham Letzter e Richard Snyder. The homomorphism threshold of $\{C_3, C_5\}$ -free graphs. *Journal of Graph Theory*, jun 2018. [15](#)
- [LT82] Jenő Lehel e Zsolt Tuza. Triangle-free partial graphs and edge covering theorems. *Discrete Math.*, 39:59–65, 1982. [11](#)
- [Man07] Willem Mantel. Vraagstuk XXVIII. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907. [1](#), [4](#), [8](#)
- [Mes56] Dale Marsh Mesner. *An investigation of certain combinatorial properties of partially balanced incomplete block experimental designs and association schemes, with a detailed study of designs of Latin square and related types*. Tese de Doutorado, Michigan State University, 1956. [5](#)
- [Mes64] Dale Marsh Mesner. Negative Latin square designs. *Mimeo Series, Institute of Statistics*, 40, 1964. [5](#)

- [Mic13] T. S. Michael. Cycles of length 5 in triangle-free graphs: a sporadic counterexample to a characterization of equality. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 67:6–8, 2013. [10](#)
- [MS14] Silvia Messuti e Mathias Schacht. On the structure of graphs with given odd girth and large minimum degree. *Journal of Graph Theory*, 80(1):69–81, nov 2014. [15](#)
- [Myc55] Jan Mycielski. Sur le coloriage des graphes. Em *Colloq. Math*, volume 3, página 9, 1955. [9](#), [21](#)
- [Nik10] Vladimir Nikiforov. Chromatic number and minimum degree of K_r -free graphs. *ArXiv e-prints*, Janeiro 2010. [21](#)
- [NY13] Seguei Norine e Liana E. Yepremyan. Sparse halves in dense triangle-free graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 43:271–278, sep 2013. [11](#), [14](#)
- [Pis95] Tomaž Pisanski. Vega Version 0.2; Quick Reference Manual and Vega graph gallery, Ljubljana. 1995. [vega.ijp.si](#). [23](#)
- [Por92] T.D. Porter. On a bottleneck bipartition conjecture of Erdős. *Combinatorica*, 12(3):317–321, 1992. [12](#)
- [Rad94] Stanisław P. Radziszowski. Small Ramsey numbers. *Electron. J. Combin*, 1(7), 1994. [30](#)
- [Ram29] Frank Plumpton Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series*, 30:264–286, 1929. [8](#), [29](#)
- [She83] James B. Shearer. A note on the independence number of triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, 46(1):83–87, 1983. [30](#)
- [She91] James B. Shearer. A note on the independence number of triangle-free graphs, II. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 53(2):300–307, nov 1991. [30](#)
- [She92] James B. Shearer. A note on bipartite subgraphs of triangle-free graphs. *Random Structures & Algorithms*, 3(2):223–226, 1992. [30](#)
- [She95] James B. Shearer. The independence number of dense graphs with large odd girth. *Electron. J. Combin*, 2(2), 1995. [30](#)
- [Shi12] Rob Shields. Cultural topology: the seven bridges of Königsburg, 1736. *Theory, Culture and Society*, 29(4-5):43–57, jul 2012. [1](#)
- [SM45] Edward Szpilrajn-Marczewski. Sur deux propriétés des classes d'ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 33:303–307, 1945. [7](#)
- [Spe94] Joel H. Spencer. *Ten lectures on the probabilistic method*, volume 64. Philadelphia, PA: SIAM, 2nd ed. edição, 1994. [8](#)
- [SS94] Farhad Shahrokhi e László A. Székely. The complexity of the bottleneck graph bipartition problem. *J. Combin. Math. Combin. Comp*, 15(94):221–226, 1994. [12](#), [33](#)
- [SS01] Miklós Simonovits e Vera Sós. Ramsey-Turán theory. *Discrete Mathematics*, 229(1-3):293–340, 2001. [8](#)
- [Sud11] Benny Sudakov. Recent developments in extremal combinatorics: Ramsey and Turán type problems. Em *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (ICM 2010)*, páginas 2579–2606. World Scientific Pub Co Pte Lt, jun 2011. [2](#), [4](#), [8](#), [33](#)

- [Tao12] Terence Tao. *Topics in random matrix theory*, volume 132. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2012. [7](#)
- [Tho02] Carsten Thomassen. On the chromatic number of triangle-free graphs of large minimum degree. *Combinatorica*, 22(4):591–596, oct 2002. [21](#)
- [Tur41] Paul Turán. Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941. (Hungarian. German summary). [7](#), [8](#)
- [Tur54] Paul Turán. On the theory of graphs. *Colloquium Mathematicum*, 3:19–30, 1954. [9](#)
- [Wes05] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*. New Delhi: Prentice-Hall of India, 2nd ed. edição, 2005. [6](#)
- [XLL18] Xiaodong Xu, Meilian Liang e Haipeng Luo. *Ramsey theory. Unsolved problems and results*. Berlin: De Gruyter, 2018. [8](#), [29](#)
- [Yan78] Mihalis Yannakakis. Node-and edge-deletion NP-complete problems. Em *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '78, páginas 253–264, New York, NY, USA, 1978. ACM. [11](#), [33](#)
- [Zyk49] Alexander Aleksandrovich Zykov. On some properties of linear complexes. *Matematicheskii sbornik*, 66(2):163–188, 1949. [9](#), [21](#)