Teoria de Ramsey
para circuitos e caminhos

Fabricao Siqueira Benevides

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DE TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de concentração: Ciências da Computação
Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
do CNPq e da Fapesp*

São Paulo, fevereiro de 2007

Teoria de Ramsey para circuitos e caminhos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Fabricio Siqueira Benevides e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 10 de junho de 2007

Banca examinadora:

Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (presidente)

IME-USP

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

IMPA

Prof. Dr. Paulo Feofiloff

IME-USP

Agradecimentos

A Deus, por colocar as pessoas certas em meu caminho e por me emprestar todas as ferramentas necessárias ao meu desenvolvimento intelectual e moral.

Ao Professor Dr. Yoshiharu Kohayakawa, pela orientação segura, sem a qual não seria possível a realização deste trabalho.

Ao Professor Dr. Jozef Skokan, pelo incentivo na fase final deste trabalho e pelos valerosos “insights”.

Ao Professor Dr. Paulo Feofiloff e aos demais membros da banca pela cuidadosa leitura dessa dissertação e pelos valerosos conselhos que vieram a melhorar significativamente o texto.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelas concessões das bolsas de estudo para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de turma do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, pela calorosa receptividade e pelos bons momentos em que estivemos juntos. Vocês realmente me ajudaram muito nessa caminhada.

Gostaria de agradecer também a toda minha família por me proporcionar o ambiente de amor onde tive a sorte de crescer. Meus irmãos, cunhada e sobrinhos foram particularmente importantes.

Também sou grato especialmente ao meu irmão e à minha irmã por sempre terem sido exemplos de vida para mim.

Finalmente, Estarei em débito eterno com meus pais e com Juliana pela compreensão, paciência interminável e encorajamentos quando estes eram mais necessários. Para eles, eu dedico esta dissertação.

Resumo

Os principais objetos de estudo neste trabalho são os números de Ramsey para circuitos e o lema da regularidade de Szemerédi. Dados grafos $L_1, \dots, L_k$, o número de Ramsey $R(L_1, \dots, L_k)$ é o menor inteiro N tal que, para qualquer coloração com k cores das arestas do grafo completo com N vértices, existe uma cor i para a qual a classe de cor correspondente contém L_i como um subgrafo. Estaremos especialmente interessados no caso em que os grafos L_i são circuitos.

Diversos resultados sobre este tema surgiram na última década. No capítulo 1, enunciamos alguns desses resultados, incluindo um resultado original. No capítulo 2, apresentamos um breve histórico sobre teoria de Ramsey e todas as definições básicas necessárias para aqueles que não estão familiarizados com a área. Em seguida, introduzimos o lema da regularidade e exibimos uma aplicação deste lema em um problema em que temos interesse. No capítulo 4, exibimos uma prova detalhada de um recente lema de estabilidade sobre emparelhamentos grandes em 3-colorações de grafos quase completos. Este lema será necessário na prova do resultado principal do capítulo 5, que é o principal fruto deste trabalho.

Abstract

The main objects of interest in this work are the Ramsey numbers for cycles and the Szemerédi regularity lemma. For graphs $L_1, \dots, L_k$, the Ramsey number $R(L_1, \dots, L_k)$ is the minimum integer N such that for any edge-coloring of the complete graph with N vertices by k colors there exists a color i for which the corresponding color class contains L_i as a subgraph. We are specially interested in the case where the graphs L_i are cycles.

Many results about this theme were obtained in the last decade. In chapter 1, we enumerate some of these results, including an original one. In chapter 2, we state the basic definitions, specially for those who are not familiar with this subject, and give an historical overview of Ramsey theory itself. In the next chapter, we introduce the regularity lemma and we exhibit an application of this lemma in a problem of our interest. In chapter 4, we show a detailed proof of a very recent stability lemma about large matchings in a 3-coloring of an almost complete graph. This lemma will be necessary in the proof of the main result of chapter 5, which is the main product of this work.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 Conceitos básicos e histórico	5
2.1 Breve histórico da teoria de Ramsey	5
2.2 Colorindo arestas de grafos	8
2.3 Ramsey para grafos	11
2.4 Teoremas de densidade	14
3 Lema da regularidade	17
3.1 Uma aplicação do lema da regularidade	22
4 Um lema de estabilidade	25
4.1 Ferramentas e resultados do tipo Ramsey	28
4.2 Prova do lema 4.1	34
4.2.1 Caso 1 da prova: existe uma 4-partição	37
4.2.2 Caso 2 da prova: existe uma componente monocromática grande	40
4.2.3 Prova do lema 4.11: reduzindo colorações extremas fracas	51
5 Ramsey para circuitos pares	57
5.1 Prova do teorema	59
5.2 Caminhos e circuitos em grafos densos	62
5.3 Prova dos lemas 5.3 e 5.5	65
5.4 Prova do lema 5.4	72
Bibliografia	75

Capítulo 1

Introdução

Dados grafos $L_1, \dots, L_k$, o número de Ramsey $R(L_1, \dots, L_k)$ é o menor inteiro N tal que, para qualquer coloração com k cores das arestas do grafo completo com N vértices, existe uma cor i para a qual a classe de cor correspondente contém L_i como subgrafo. Começamos exibindo alguns resultados para os casos em que k é igual a 2 ou 3 e os grafos L_i são todos circuitos ou todos caminhos.

O caso em que temos apenas duas cores e os grafos L_1, L_2 são caminhos foi resolvido completamente há algum tempo em [15]. Se P_n denota um caminho com n vértices, sabe-se que, para $n \geq m \geq 2$,

$$R(P_n, P_m) = n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1.$$

Em particular, temos que $R(P_n, P_n) = \left\lfloor \frac{3n-2}{2} \right\rfloor$.

De modo semelhante, o caso em que os grafos L_1, L_2 são circuitos foi completamente solucionado por Bondy e Erdős em [4]. Recentemente, Károlyi e Rosta conseguiram refazer este trabalho de forma simples e autocontida em [20]. Este resultado pode ser resumido no teorema a seguir, onde C_n denota um circuito de tamanho n .

Teorema 1.1. *Sejam $3 \leq m \leq n$ inteiros. Então*

$$R(C_n, C_m) = \begin{cases} 6, & m = n = 3, 4, \\ n + m/2 - 1, & m, n > 4, \text{ são pares}, \\ \max\{2m - 1, n + m/2 - 1\}, & m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}, \\ 2n - 1, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Por outro lado, calcular o valor do número de Ramsey $R(C_n, C_m, C_k)$, onde n, m e k são naturais quaisquer, ainda é um problema em aberto. Contudo, existem alguns

resultados sobre situações particulares. Vejamos alguns resultados recentes. Bondy e Erdős, ainda em [4], conjecturaram que, se $n > 3$ é ímpar, então

$$R(C_n, C_n, C_n) = 4n - 3.$$

Durante um bom tempo, houve poucos avanços na direção de provar tal conjectura. Até que, em 1999, Łuczak [23] provou que se n é ímpar então

$$R(C_n, C_n, C_n) = 4n + o(n), \quad (1.1)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Recentemente, Kohayakawa, Simonovits e Skokan [19] conseguiram melhorar o teorema acima. Eles provaram o teorema a seguir.

Teorema 1.2. *Existe um inteiro n_0 tal que para todo $n > n_0$, n ímpar, temos*

$$R(C_n, C_n, C_n) = 4n - 3.$$

Contudo, o caso em que n é par é bastante diferente do caso em que n é ímpar. Recentemente, Figaj e Łuczak [10] obtiveram um resultado assintótico para este caso, mesmo quando os circuitos possuem tamanhos um pouco diferentes.

Teorema 1.3. *Dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, temos*

$$R(C_{2\lfloor \alpha_1 n \rfloor}, C_{2\lfloor \alpha_2 n \rfloor}, C_{2\lfloor \alpha_3 n \rfloor}) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + o(1))n,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Isto implica que, em particular, para n par temos

$$R(C_n, C_n, C_n) = 2n + o(n), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Pouco depois, independentemente, Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi [17] provaram um resultado semelhante, porém mais preciso, para caminhos, confirmando uma conjectura de Faudree e Schelp [9].

Teorema 1.4. *Existe um inteiro n_0 tal que, para todo $n > n_0$, temos*

$$R(P_n, P_n, P_n) = \begin{cases} 2n - 1, & n \text{ ímpar}, \\ 2n - 2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Durante este trabalho de mestrado, em conjunto com Jozef Skokan [2], conseguimos provar que o resultado justo,

$$R(C_n, C_n, C_n) = 2n,$$

vale quando n é um inteiro par suficientemente grande. Isto será enunciado como o teorema 5.1, provado em detalhes no capítulo 5 e será o foco principal desta dissertação.

A prova faz uso do lema da regularidade de Szemerédi e de um lema de estabilidade de [17] sobre emparelhamentos grandes em 3-colorações de grafos quase completos. Ao estudarmos a prova desse lema de estabilidade, achamos um pequeno deslize na análise de um dos subcasos dessa prova. Esse deslize acabou nos mostrando que havia um erro no próprio enunciado do lema. Contudo, esse erro foi facilmente corrigido, deixando o enunciado do lema um pouco mais fraco do que o original, e mesmo com esta versão mais fraca é possível provar o teorema principal de [17] e o nosso resultado para circuitos.

No capítulo 2, fazemos um breve resumo histórico sobre teoria de Ramsey em geral. Apresentamos então diversos conceitos básicos e fixamos alguma notação. Em seguida, introduzimos o lema da regularidade e ilustramos uma aplicação deste lema em um problema em que temos interesse. No capítulo 4, exibimos uma prova detalhada do lema de estabilidade mencionado acima. A motivação para tal capítulo é termos uma prova autocontida do nosso resultado original, o teorema 5.1. Contudo, o leitor ansioso em ver a prova deste teorema só precisa entender o enunciado do lema de estabilidade 4.1, tendo em vista que a prova deste último é muito técnica.

Capítulo 2

Conceitos básicos e breve histórico

2.1 Breve histórico da teoria de Ramsey

Os teoremas do tipo Ramsey têm sido extensivamente estudados durante a última década. Eles enquadram-se na classe de problemas que chamamos de extremais. Neste tipo de problema, normalmente procuram-se funções limiares para o tamanho de certas estruturas de modo que sempre seja possível encontrar nestas uma dada subestrutura. De certa forma, teoremas do tipo Ramsey afirmam que não existe o caos absoluto dentro de tais estruturas gerais, o que torna o assunto bastante motivador. Façamos um breve resumo histórico.

Em 1928, o jovem matemático britânico Frank Plumpton Ramsey escreveu um artigo intitulado “On a problem in formal logic”, publicado no “Proceedings of the London Mathematical Society” em 1930. Este artigo tratava de um problema algorítmico em lógica proposicional. Nele, Ramsey prova um resultado puramente matemático, hoje conhecido como teorema de Ramsey. Tal teorema, que a princípio era apenas mais uma ferramenta no artigo, acabou mostrando ter maior relevância do que o problema original desse artigo.

Definição 1. *Uma coloração com r cores, ou simplesmente uma r -coloração, de um conjunto S é uma função $f : S \rightarrow \{1, \dots, r\}$ qualquer. Em geral, ao exibirmos uma coloração, especificamos uma família de subconjuntos de S , $\{S_1, \dots, S_r\}$, tal que $S_i = \{s \in S : f(s) = i\}$ é o conjunto dos vértices que receberam a cor i .*

Teorema 2.1 (Ramsey). *Seja G um conjunto infinito e sejam k e r inteiros positivos. Então, para toda coloração da família dos subconjuntos com k elementos de G com r cores existe um subconjunto infinito monocromático F de G , ou seja, tal que todos os subconjuntos de F com k elementos têm a mesma cor.*

Uma outra versão do teorema acima é a seguinte.

Teorema 2.2 (Ramsey, versão finita). *Dados inteiros k , r e n , existe um inteiro N_0 tal que para todo $N \geq N_0$ e todo conjunto G com N elementos temos que: para toda coloração da família dos subconjuntos com k elementos de G com r cores existe um subconjunto monocromático F de G , ou seja, tal que todos os subconjuntos de F com k elementos têm a mesma cor, tal que $|F| = n$.*

Definição 2. *Dados k , r e n , denotamos o menor inteiro N_0 com a propriedade acima por $R_r(n; k)$.*

Observação. Às vezes, estamos interessados no caso assimétrico onde para cada cor i é dado um inteiro n_i especificando o tamanho do conjunto monocromático que queremos encontrar na cor i . Por exemplo, para duas cores, dados inteiros n_1 , n_2 e k , existe um inteiro, que tomamos menor possível, $R_2(n_1, n_2; k)$ tal que, se $|G| \geq R_2(n_1, n_2; k)$, então, em toda coloração da família dos subconjuntos com k elementos de G com duas cores, existe um conjunto monocromático F_i de cor i tal que $|F_i| = n_i$ para i igual a 1 ou 2. Isso segue diretamente do teorema anterior já que $R_2(n_1, n_2; k) \leq R_2(n; k)$ onde $n = \max\{n_1, n_2\}$. Para simplificar a notação denotamos $R(n_1, n_2; k) := R_2(n_1, n_2; k)$.

Pouco antes de Ramsey enunciar seu teorema sobre colorações de conjuntos, Issai Schur, aluno de Frobenius e influenciado bastante por este, estudava colorações de números naturais. Um dos resultados obtidos por Schur é o teorema a seguir.

Definição 3. *Denotamos o conjunto dos n primeiros inteiros positivos, $\{1, 2, \dots, n\}$, por $[n]$.*

Teorema 2.3 (Schur). *Para todo inteiro positivo r , existe um inteiro $n = S(r)$ tal que, para toda coloração $f : [n] \rightarrow [r]$, dos n primeiros inteiros positivos com r cores, existem $x, y \in [n]$ tais que $f(x) = f(y) = f(x + y)$, ou seja, x , y e $x + y$ possuem a mesma cor.*

Tal problema apareceu em uma tentativa de Schur de dar uma prova elegante para a versão modular da conjectura de Fermat: ele acabou concluindo que a equação $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ possui solução inteira para todo m e todo primo p suficientemente grande. Ele tinha interesses bastante variados na matemática. Ao tentar resolver um problema sobre a distribuição de resíduos quadráticos, deparou-se com a seguinte questão: será que para todo inteiro k existe um n tal que toda coloração de $[n]$ com duas cores possui uma progressão aritmética monocromática de tamanho k ? Schur conjecturou que sim, mas não conseguiu resolver o problema. Após algum tempo em aberto, o problema chegou aos ouvidos de Bartel Leendert van der Waerden e outros estudantes em Göttingen. Em 1927, van der Waerden deu uma resposta afirmativa para a questão, confirmando a conjectura de Schur.

Teorema 2.4 (van der Waerden). *Sejam k e r inteiros positivos. Então existe um inteiro positivo $n = W(k, r)$ tal que para toda r -coloração de $[n]$ existe uma progressão aritmética monocromática de k termos.*

Para instigar a curiosidade do leitor e mostrar como o teorema de Ramsey pode ser usado nas mais diversas áreas de matemática, exibimos aqui uma prova do teorema de Erdős-Szekeres (1935).

Teorema 2.5 (Erdős-Szekeres). *Dado um inteiro n , existe um inteiro $f(n)$ tal que todo conjunto de pelo menos $f(n)$ pontos no plano, sem três pontos colineares, contém um subconjunto de tamanho n que forma um n -ágono convexo.*

Prova. Afirmamos que é suficiente tomar $f(n) = R(n, 5; 4)$. Tome um conjunto de $f(n)$ pontos no plano onde não há três pontos colineares. Temos que mostrar que existem n deles que formam um n -ágono convexo. Vamos colorir cada conjunto de quatro desses pontos com uma de duas cores: usamos a cor 1 se esses quatro pontos formam, em alguma ordem, um quadrilátero convexo, caso contrário, usamos a cor 2. Pela escolha de $f(n)$, o teorema de Ramsey nos diz que:

1. ou existem n desses pontos tais que quaisquer 4 deles formam um quadrilátero convexo;
2. ou existem 5 desses pontos tais que quaisquer 4 deles não formam um quadrilátero convexo.

Suponha que o primeiro caso acontece e considere os tais n pontos. Afirmamos que estes pontos formam um polígono convexo. Se essa afirmação fosse falsa, então a envoltória convexa dos n pontos consistiria de t pontos, para algum $t < n$. Os pontos restantes estariam dentro do t -ágono determinado pela envoltória convexa destes t . Chamamos esses pontos de pontos internos. Agora, se fizermos uma triangularização do t -ágono então, como não há três pontos colineares, um dos pontos internos, digamos x , cairá dentro de um dos triângulos. O ponto x juntamente com os vértices desse triângulo não formam um quadrilátero convexo. Isso é uma contradição. Logo, os pontos formam o n -ágono convexo desejado.

Suponha agora que o segundo caso acontece e considere os tais 5 pontos. Como quaisquer 4 deles formam um quadrilátero côncavo e não há 3 deles colineares, a envoltória convexa desses 5 pontos deve ser um triângulo. Logo, 2 pontos estão no interior desse triângulo. A reta que passa por eles divide o plano em dois semi-planos, um dos quais deve conter exatamente dois vértices da envoltória convexa. Esses dois vértices juntamente com os dois pontos internos formam um quadrilátero convexo. Mas isto contradiz a escolha dos 5 pontos. Logo, na verdade, este segundo caso não pode acontecer. ■

Nas últimas duas décadas, teoria de Ramsey deixou de ser um emaranhado de problemas e teoremas e tornou-se uma subdisciplina coesa da análise combinatória. É possível até encontrar livros específicos sobre o assunto, por exemplo, [16]. Contudo, ainda hoje, muitos são os problemas em aberto na área, como veremos nas seções seguintes.

2.2 Colorindo arestas de grafos

Neste trabalho estudamos apenas colorações da família dos subconjuntos de dois elementos de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Note que isso equivale a estudar colorações das arestas de um grafo completo com n vértices.

Sempre que falarmos de coloração de um grafo G estaremos nos referindo a uma coloração das arestas de G . Escrevemos *ordem* para nos referirmos ao número de vértices de um grafo e *tamanho* para nos referirmos ao número de arestas. Uma clique é um subgrafo completo de um grafo. Ela é monocromática se foi atribuída a mesma cor para todas as suas arestas. Uma notação bastante comum em teoria de Ramsey é a seguinte.

Definição 4. *Escrevemos*

$$n \rightarrow (l)_r$$

se para toda r -coloração do grafo completo com n vértices podemos encontrar uma clique monocromática de ordem l . Mais geralmente, escrevemos $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ se, para qualquer r -coloração do grafo completo com n vértices, podemos encontrar uma clique monocromática de ordem l_i da cor i para algum $1 \leq i \leq r$.

Definição 5. A **função de Ramsey** $R(l_1, \dots, l_r) : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ denota o menor inteiro n tal que

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r).$$

Ademais, dados $l_1, \dots, l_r$, dizemos que $R(l_1, \dots, l_r)$ é o **número de Ramsey** de $l_1, \dots, l_r$.

Usamos também $n \rightarrow (l)$ para denotar a mesma coisa que $n \rightarrow (l, l)$ e $n \rightarrow (l)_2$. Do mesmo modo $R(l)$ é usado para denotar $R(l, l)$. É importante observar que o papel das cores no grafo não é simétrico. Por exemplo, suponha que queremos provar que $R(l_1, l_2) = n$, para certos inteiros $l_1 < l_2$ e n . Em particular, temos que provar que dada uma 2-coloração do grafo completo com n vértices, com as cores 1 e 2, conseguimos achar uma clique de ordem l_1 da cor 1 ou uma clique monocromática de ordem l_2 da cor 2. Contudo, se acharmos uma clique monocromática de ordem l_1 na cor 2 ainda não resolvemos o problema. Por outro lado, é fácil verificar que $R(l_1, l_2) = R(l_2, l_1)$.

Como ilustração, vamos exibir uma prova de uma versão do teorema de Ramsey, a saber a versão para coloração de arestas de um grafo completo. As provas das outras versões que enunciamos são semelhantes a esta.

Teorema 2.6 (Ramsey). *A função R de Ramsey está bem definida, isto é, para toda r -upla $(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{N}^r$ existe n tal que*

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r).$$

Prova. Façamos primeiro o caso em que $r = 2$. Para tanto, faremos indução sobre $l_1 + l_2$. Note que podemos assumir que $R(1, l) = R(l, 1) = 1$ para todo l , por vacuidade. Ademais, é trivial verificar que $R(l, 2) = R(2, l) = l$ para todo l . Isto é mais do que suficiente para a base da indução. Agora tome $l_1, l_2 > 1$ e suponha, como hipótese de indução, que $R(l_1, l_2 - 1)$ e $R(l_1 - 1, l_2)$ existem. Afirmamos que

$$R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \rightarrow (l_1, l_2).$$

Seja G o grafo completo com n vértices, $n = R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2)$. Fixe uma 2-coloração χ de G . Escolha um vértice $x \in V(G)$ qualquer e defina

$$V_1 = \{y \in V(G) : \chi(x, y) = 1\},$$

$$V_2 = \{y \in V(G) : \chi(x, y) = 2\} = V(G) - V_1 - \{x\}.$$

Então $|V_1| + |V_2| = n - 1$, de modo que

1. $|V_1| \geq R(l_1 - 1, l_2)$ ou
2. $|V_2| \geq R(l_1, l_2 - 1)$.

Suponha que (1) ocorre. Pela definição de R , o conjunto V_1 possui uma clique monocromática da cor 2 de ordem l_2 ou possui uma clique monocromática da cor 1 de ordem $l_1 - 1$. No primeiro caso, já encontramos o que queríamos. No segundo caso, podemos acrescentar x à clique de ordem $l_1 - 1$ e obter uma clique de ordem l_1 da cor 1 donde também encontramos o que queríamos. O caso em que (2) ocorre é análogo.

Finalmente, o caso em que $r > 2$ também é tratado de maneira análoga. Basta fazermos a indução sobre $l_1 + \dots + l_r$ após verificar a base e que

$$2 + \sum_{i=1}^r (R(l_1, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_r) - 1) \rightarrow (l_1, \dots, l_r).$$

■

A partir desta prova concluímos também que

$$R(l, k) \leq R(l, k - 1) + R(l - 1, k).$$

E a partir desta equação e do fato de que $R(1, l) = R(l, 1) = 1 = \binom{l-1}{0}$ é fácil provar por indução que

$$R(l, k) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Em particular, no caso em que $l = k$, temos

$$R(l) \leq \binom{2l-2}{l-1}.$$

Teorema 2.7. *Vale que $2^{l/2} \leq R(l) \leq 2^{2l-2}$.*

Prova. O lado direito da inequação é uma consequência da observação acima, já que

$$\binom{2l-2}{l-1} \leq \frac{2^{2l-2}}{\sqrt{l}} \leq 2^{2l-2}.$$

Para a segunda parte, usamos o método probabilístico de maneira bastante simples. Considere um grafo completo G com n vértices e pinte cada aresta de G com uma entre duas cores com probabilidade igual a $1/2$ para cada cor e independente para cada aresta. Para $W \subset G$, $|W| = l$, considere a variável aleatória indicadora X_W tal que $X_W = 1$ se $G[W]$ é monocromático e $X_W = 0$ caso contrário. Seja também $X = \sum_W X_W$.

Se $n < 2^{l/2}$ temos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_W X_W\right) = \sum_W \mathbb{E}(X_W) = \sum_W \mathbb{P}(X_W = 1) \\ &= \sum_W 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{2}} = \binom{n}{l} 2^{1-\binom{l}{2}} \leq \frac{n^l}{l!} \cdot 2^{1+\frac{l}{2}} \cdot \frac{1}{2^{l^2/2}} \\ &\leq \left(2^{l/2}\right)^l \cdot \frac{2^{1+\frac{l}{2}}}{l!} \cdot \frac{1}{2^{l^2/2}} = \frac{2^{1+\frac{l}{2}}}{l!} < 1. \end{aligned}$$

Logo, existe uma coloração do grafo completo com n vértices, $n = \lfloor 2^{l/2} \rfloor$, que não possui clique monocromática de ordem l . ■

Como consequência do teorema acima temos que

$$\sqrt{2} \leq \liminf R(s)^{1/s} \leq \limsup R(s)^{1/s} \leq 4.$$

Calcular o valor de $\lim R(s)^{1/s}$ é um problema em aberto. Na verdade nem sequer sabemos se este limite existe. Entre os problemas que envolvem o comportamento assintótico da função de Ramsey este é um dos mais célebres.

Sobre o problema de calcular o valor exato de $R(s)$, ainda que para valores pequenos de s , sugerimos a ótima resenha [24]. Encerramos esta seção com um texto de Paul Erdős que expressa o quão difícil é computacionalmente encontrar estes valores exatos:

Suponha que um espírito maligno nos diga: “A menos que vocês descubram o valor de $R(5)$, eu exterminarei a raça humana”. Nossa melhor estratégia seria talvez fazer com que todos os computadores do mundo e cientistas da computação trabalhem juntos nisto. Por outro lado, se ele perguntasse pelo valor de $R(6)$ então nossa melhor estratégia seria tentar destruí-lo antes que ele nos destruísse.

2.3 Teorema de Ramsey para grafos

Uma generalização natural dos números de Ramsey é a seguinte.

Definição 6. *Dados r grafos $G_1, \dots, G_r$, definimos o **número de Ramsey generalizado** $R(G_1, \dots, G_r)$ como o menor inteiro N tal que se as arestas do grafo completo com N vértices são coloridas com r cores, existe um subgrafo monocromático da cor i isomorfo a G_i para algum $1 \leq i \leq r$. Para simplificar a notação também definimos, para um grafo G , $R(G) := R(G, G)$.*

Veja que estamos interessados em encontrar o grafo G_i simplesmente como subgrafo do grafo induzido pelas arestas da cor i , mas não exigimos que G_i seja um subgrafo induzido deste. Assim, a existência de $R(G_1, \dots, G_r)$ é uma consequência imediata do teorema de Ramsey original. Este, por sua vez, é equivalente a tomar cada G_i como um grafo completo. O leitor que estiver curioso em saber mais sobre o caso induzido pode consultar, por exemplo, a seção 5.3 de [16].

É trivial verificar então que $R(G_1, \dots, G_r) \leq R(|G_1|, \dots, |G_r|)$, onde $|G_i|$ é a ordem de G_i . O interessante é que para certos grafos G_i o número à esquerda é muito menor do que o número à direita. De fato, vários dos teoremas que veremos à frente mostram que $R(G_1, \dots, G_r)$ é da ordem de uma função linear para algumas classes de grafos enquanto que $R(l_1, \dots, l_r)$ é pelo menos uma exponencial em $\min\{l_1, \dots, l_r\}$, como é fácil concluir a partir do teorema 2.7.

Notação 7. *Em geral, quando não estamos enumerando uma seqüência de grafos, usamos o índice subscrito n para indicar que a ordem de um grafo G_n é n . Ademais faremos as seguintes convenções: C_n é um circuito, P_n é um caminho, e K_n é um grafo completo, todos com n vértices. Assim os tamanhos de C_n e P_n são n e $n - 1$ respectivamente. Além disso, com certo abuso de notação, usaremos T_n sempre que quisermos falar sobre uma árvore genérica de ordem n . O tamanho de T_n é $n - 1$.*

Para encerrar esta seção mostraremos alguns resultados simples em teoria de Ramsey para grafos.

Um fato interessante, mas de fácil verificação, é que

$$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(c(H) - 1) + 1,$$

onde $\chi(G)$ é o número cromático de G e $c(H)$ é a ordem da maior componente conexa de H . Para ver isto basta exibir uma 2-coloração de um grafo completo de ordem $(c(H) - 1)(\chi(G) - 1)$ que não possui uma cópia de G na cor 1 nem uma cópia de H na cor 2. Para tanto, basta particionar os vértices de $K_{(c(H)-1)(\chi(G)-1)}$ em $(\chi(G) - 1)$ conjuntos $V_1, \dots, V_{\chi(G)-1}$ de ordem $(c(H) - 1)$. E então pintar todas as arestas com as duas extremidades em conjuntos distintos da partição com a cor 1 e as demais arestas com a cor 2.

Uma aplicação desse resultado é o teorema a seguir.

Teorema 2.8. *Para todos $s, t \geq 2$ temos $R(K_s, T_t) = (s-1)(t-1) + 1$.*

Prova. O fato de que $R(K_s, T_t) \geq (s-1)(t-1) + 1$ é uma aplicação direta do fato anterior. Para provar a desigualdade contrária, considere uma 2-coloração de um grafo completo com $n = (s-1)(t-1) + 1$ vértices. Seja G^1 o subgrafo induzido pelas arestas da cor 1 e G^2 o subgrafo induzido pelas arestas da cor 2 (G^2 é o complemento de G^1). Suponha que G^1 não contém K_s como subgrafo. Então um conjunto independente de G^2 tem ordem no máximo $s-1$. Logo, $\chi(G^2) \geq \lceil n/(s-1) \rceil = t$. Afirmamos que G^2 possui um subgrafo H^2 de grau mínimo pelo menos $t-1$. Admitindo isto, é fácil ver que H^2 contém uma cópia de T_t . De fato, podemos assumir indutivamente que achamos $T_{t-1} \subset H^2$, onde $T_{t-1} = T_t - x$ e x é uma folha qualquer de T_t . Seja y o vizinho de x em T_t . Como y tem pelo menos $t-1$ vizinhos em H^2 , pelo menos um desses vizinhos, digamos z , não pertence a T_{t-1} . Logo, o subgrafo de H^2 induzido por $T_{t-1} \cup z$ claramente contém uma cópia de T_t .

Resta provar a existência de H^2 . Suponha o contrário, ou seja, que G^2 não possui um subgrafo de grau mínimo pelo menos $t-1$. Então todo subgrafo H de G^2 tem grau mínimo no máximo $t-2$, ou seja, possui um vértice de grau menor ou igual a $t-2$. Em particular, o grafo $H_n = G^2$ tem um vértice x_n de grau no máximo $t-2$. Seja $H_{n-1} = H_n \setminus \{x_n\}$. Novamente H_{n-1} possui um vértice x_{n-1} de grau no máximo $t-2$. Faça então $H_{n-2} = H_{n-1} \setminus \{x_{n-1}\}$. Continue fazendo isto até que todos os vértices de G^2 tenham sido enumerados. Agora, a sequência $x_1, \dots, x_n$ é tal que cada x_i é adjacente a no máximo $t-2$ vértices anteriores a ele. Então um algoritmo guloso para colorir os vértices de G^2 usaria no máximo $t-1$ cores, uma contradição. ■

Notação 8. *Dados dois grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$, tais que $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, o grafo **união** $G \cup H$ é definido simplesmente como*

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)).$$

Ademais, para um inteiro k , definimos kG como a união de k cópias disjuntas de G .

Outro resultado simples que também pode ter bastante utilidade é o que segue abaixo.

Teorema 2.9. *Para quaisquer grafos G, H^1, H^2 , onde $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$,*

$$R(G, H^1 \cup H^2) \leq \max\{R(G, H^1) + |H^2|, R(G, H^2)\}.$$

Em particular, $R(G, sH) \leq R(G, H) + (s-1)|H|$.

Prova. Seja $n = \max\{R(G, H^1) + |H^2|, R(G, H^2)\}$ e suponha que o grafo K_n seja 2-colorido sem que exista um subgrafo G contido no grafo induzido pelas arestas de

cor 1. Então, como $n \geq R(G, H^2)$, deve existir um grafo H^2 na cor 2. Removendo-se este grafo de K_n ainda sobram pelo menos $R(G, H^1)$ vértices. Logo, o grafo resultante deve conter um H^1 da cor 2. Assim, o K_n contém um $H^1 \cup H^2$ na cor 2. Isto completa a prova da primeira desigualdade.

Agora, dados grafos G e H , fazendo $H^1 = (s-1)H$ e $H^2 = H$, temos que

$$R(G, sH) \leq \max\{R(G, (s-1)H) + |H|, R(G, H)\} = R(G, (s-1)H) + |H|,$$

já que $R(G, (s-1)H) \leq R(G, H)$. Agora, é trivial provar a segunda desigualdade do enunciado usando indução. ■

Usando o teorema acima é possível calcular $R(sK_2, tK_2)$.

Teorema 2.10. *Se $s \geq t \geq 1$ então $R(sK_2, tK_2) = 2s + t - 1$.*

Prova. O grafo $G_{2s+t-2} = K_{2s-1} \cup (t-1)K_1$ não contém s arestas independentes, ou seja, não contém sK_2 . Ademais, seu complemento não contém tK_2 . Com isto, é trivial concluir que $R(sK_2, tK_2) \geq 2s + t - 1$.

É trivial verificar também que $R(sK_2, K_2) = 2s$. Assim, para completar a prova é suficiente verificar que

$$R(sK_2, tK_2) \leq R((s-1)K_2, (t-1)K_2) + 3$$

e usar indução sobre $\min\{s, t\}$. Como de costume, seja $n = R((s-1)K_2, (t-1)K_2) + 3$, considere uma 2-coloração de K_n e denote por G^i o grafo induzido pelas arestas da cor i , para $i = 1, 2$. Se $G^1 = K_n$ então $sK_2 \subset G^1$, e se $G^2 = K_n$ então $tK_2 \subset G^1$, pois $n \geq 2s \geq 2t$. Caso contrário, existem três vértices, digamos x, y e z , tais que $xy \in G^1$, $xz \in G^2$. Agora, $K_n \setminus \{x, y, z\}$ contém ou um $(s-1)K_2$ da cor 1 ou um $(t-1)K_2$ da cor 2. No primeiro caso, adicionamos a aresta xy para encontrar o nosso sK_2 . No segundo, adicionamos a aresta xz e encontramos o tK_2 . ■

Finalmente, uma generalização do teorema anterior ([6]) foi usada em um trecho da prova do lema 4.1 no capítulo 4, um dos focos principais neste trabalho, estudado no artigo [17].

Teorema 2.11 (Cockayne e Lorimer, 1975). *Dados $n_1, \dots, n_t \geq 1$ inteiros tais que $n_1 = \max\{n_1, \dots, n_t\}$ então*

$$R(n_1K_2, \dots, n_tK_2) = n_1 + 1 + \sum_{i=1}^t (n_i - 1).$$

Corolário 2.12. *Dado um inteiro positivo n vale que*

$$R(nK_2, nK_2, nK_2) = 4n - 2.$$

2.4 Teoremas de Ramsey *versus* teoremas de densidade

Em geral, um problema do tipo Ramsey pode ser formulado da seguinte maneira: dada uma quantidade r de cores, queremos determinar se em toda r -coloração de um conjunto de objetos podemos encontrar um subconjunto monocromático desses objetos com uma dada propriedade. Esta questão pode ser formulada em termos de hipergrafos. Se V é o conjunto dos objetos que iremos colorir e E é a família dos subconjuntos de V que satisfazem uma certa propriedade então podemos formalizar a pergunta como: dado o hipergrafo $H = (V, E)$, é verdade que, em toda r -coloração de V , existe uma hiperaresta monocromática, ou seja, um conjunto $e \in E$ tal que os vértices pertencentes a $e \subset V$ possuem todos a mesma cor? Isso nos motiva a fazer a definição a seguir.

Definição 9. Dado um **hipergrafo** H , seu **número cromático** $\chi(H)$ é o menor inteiro tal que existe uma coloração dos vértices de H onde nenhuma das hiperarestas de H é monocromática. Veja que isto é uma generalização natural do número cromático para grafos.

Um outro tipo de problema é relacionado à próxima definição.

Definição 10. Dado um hipergrafo $H = (V, E)$, definimos a função de Turán $T(H)$ como o menor inteiro T_0 tal que para todo subconjunto V' de V com pelo menos T_0 vértices existe $e \in E$ tal que $e \subset V'$. Defina $\tau(H) = T(H)/|V(H)|$.

Notação 11. Para um conjunto S e um inteiro l denotamos $\binom{S}{l} := \{F \subset S; |F| = l\}$.

Em geral, não sabemos como calcular $T(H)$. Mas o valor de $T(H)$ é conhecido para certas famílias de hipergrafos. Por exemplo, considere o hipergrafo $H_n = (V_n, E_n)$, onde $V_n = \binom{[n]}{2}$ e $E_n = \{\binom{S}{2} : S \in \binom{[n]}{l}\}$, para algum l . Veja que calcular $T(H_n)$ é equivalente a encontrar o menor número de arestas t tal que todo grafo com n vértices e pelo menos t arestas possui uma clique de ordem l . Um importante teorema de densidade é o teorema de Turán [30] que nos dá o valor exato de $T(H_n)$. Veja também o livro de Bollobás [3].

Teorema 2.13. Dados n e l , o menor inteiro t tal que todo grafo com n vértices e t arestas possui uma clique de ordem l é dado por

$$t = t(n, l) = 1 + \binom{n}{2} - k \binom{m+1}{2} - (l-1-k) \binom{m}{2},$$

onde m e k são tais que $n = (l-1)m + k$ e $0 \leq k < l-1$ (de modo que m e k estão unicamente determinados a partir de n e l). Ademais, o único grafo (a menos de isomorfismos) com n vértices e $(t-1)$ arestas que não possui uma clique de ordem l é obtido particionando os n vértices em $(l-1)$ conjuntos de ordem m ou $m+1$ e colocando arestas entre pares de vértices que pertencem a conjuntos distintos dessa partição.

Vamos agora fazer uma breve comparação entre propriedades do tipo Ramsey e propriedades de densidade. Dado um hipergrafo H e um inteiro r , considere as seguintes afirmações:

$$\begin{aligned} A : \quad & \chi(H) > r; \\ B : \quad & \tau(H) \leq 1/r. \end{aligned}$$

E, para uma seqüência de hipergrafos $H_n = (V_n, E_n)$, considere as afirmações análogas:

$$\begin{aligned} A^* : \quad & \chi(H_n) > r, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty; \\ B^* : \quad & \tau(H_n) \leq 1/r \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

As afirmações A e A^* são afirmações do tipo Ramsey. Enquanto que as afirmações B e B^* são afirmações de densidade. A afirmação A diz que, se as hiperarestas de H forem coloridas com r cores, então encontraremos uma hiperaresta monocromática. A afirmação B diz que, se um conjunto de vértices não é muito pequeno, então ele contém uma hiperaresta de H . É muito fácil verificar a validade do seguinte teorema.

Teorema 2.14. *Valem as seguintes implicações: (i) B implica A ; (ii) B^* implica A^* .*

Contudo, as implicações recíprocas, “ A implica B ” e “ A^* implica B^* ” são *falsas*. Considere, por exemplo, suas interpretações para teoria de Ramsey clássica (como na seção 2.2), onde o conjunto das arestas de um grafo é r -colorido e queremos achar uma clique monocromática de ordem l . Precisamente, se olharmos novamente para os hipergrafos $H_n = (V_n, E_n)$, onde $V_n = \binom{[n]}{2}$ e $E_n = \left\{ \binom{S}{2} : S \in \binom{[n]}{l} \right\}$, temos uma seqüência (H_n) para a qual vale A^* e não vale B^* .

De fato, veja que a afirmação $\chi(H_n) > r$ é idêntica a $n \rightarrow (l)_r$. Assim, pelo teorema 2.6 (Ramsey), a seqüência $\{H_n\}$ satisfaz A^* . Por outro lado, o teorema 2.13 nos diz que se escrevermos $n = (l-1)m + k$ com $0 \leq k < l-1$, então

$$T(H_n) = 1 + \binom{n}{2} - k \binom{m+1}{2} - (l-1-k) \binom{m}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(H_n) = 1 - \frac{1}{l-1}.$$

Para $r \geq 2$ e $l \geq 4$ temos que $1 - \frac{1}{l-1} > 1/r$ de modo que B^* é falsa. Esta mesma construção nos dá exemplos de hipergrafos para os quais “ A implica B ” não vale.

Um dos mais famosos teoremas de densidade é o teorema de Szemerédi, que generaliza o teorema 2.4 (van der Waerden).

Teorema 2.15 (Szemerédi [28]). *Para todo inteiro l e real $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $n_0(\varepsilon, l)$ tal que se $n > n_0(\varepsilon, l)$ e $S \subseteq [n]$ tem densidade maior que ε , ou seja, $|S| > \varepsilon n$, então S contém uma progressão aritmética de tamanho l .*

O teorema de van der Waerden foi provado em 1927. Em 1936, Erdős e Turán conjecturaram o teorema acima. Para $l = 2$ o teorema é trivial. O caso particular em que $l = 3$ foi provado em 1953 por Roth [25]. Em 1969, o caso particular em que $l = 4$ foi provado por Szemerédi [27] e ele mesmo provou o teorema geral acima em 1973. A prova completa desse teorema é extremamente complexa.

Capítulo 3

Lema da regularidade de Szemerédi

Alguns problemas em teoria extremal dos conjuntos podem ser resolvidos usando apenas técnicas de matemática elementar. Em outros faz-se necessário o uso de técnicas sofisticadas, como o lema da regularidade de Szemerédi e lemas de estabilidade. Em Teoria de Ramsey para grafos, este é o caso dos problemas nos artigos [5, 19, 23], que tratam de números de Ramsey para circuitos ou caminhos envolvendo mais de três cores, para os quais até agora não existem provas elementares. Nas seções seguintes falaremos sobre os resultados obtidos nestes artigos. Agora nos concentraremos na principal ferramenta usada nestes artigos.

O lema da regularidade tem se mostrado uma das mais poderosas ferramentas para lidar com problemas extremais. Daí a motivação em estudá-lo. Este lema foi concebido originalmente como um lema auxiliar na prova do teorema 2.15. Basicamente, ele nos diz que qualquer grafo pode ser, de certo modo, aproximado por uma união de grafos bipartidos pseudo-aleatórios. Assim, o lema da regularidade nos ajuda a carregar certos resultados, que são triviais na classe dos grafos aleatórios, para a classe de grafos em geral, onde provavelmente seria mais difícil provar que essas propriedades valem. As seguintes definições tornam preciso o que acabamos de dizer.

Definição 12. *Dados um grafo $G = (V, E)$ e conjuntos $X, Y \subset V$ disjuntos, definimos $e(X, Y) = e_G(X, Y) = |\{xy \in E : x \in X, y \in Y\}|$. E para X, Y não vazios também definimos a **densidade do par** (X, Y) em G como*

$$d(X, Y) = d_G(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X| \cdot |Y|}.$$

Definição 13. *Seja $\varepsilon > 0$. Dado um grafo G e dois conjuntos de vértices disjuntos $A, B \subset V(G)$, dizemos que o par (A, B) é **ε -regular** se para todos $X \subset A$ e $Y \subset B$ satisfazendo*

$$|X| > \varepsilon|A| \quad e \quad |Y| > \varepsilon|B|,$$

temos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Definição 14. Dizemos que um par (A, B) é ε -regular com densidade d se (A, B) é ε -regular e $d(A, B) = d$.

Isto nos diz, essencialmente, que as arestas entre os conjuntos A e B se comportam como as de um grafo bipartido aleatório, onde cada aresta tem probabilidade $d(A, B)$ de pertencer a tal grafo.

Proposição 3.1. O par (A, B) é ε -regular no grafo G se e somente se é ε -regular em $\overline{G}$, o complemento de G .

Prova. Basta observar que $d_{\overline{G}}(A, B) = 1 - d_G(A, B)$, para todos $A \subset V(G)$, $B \subset V(G)$ disjuntos. Assim, na equação (3.1) temos

$$|d_{\overline{G}}(X, Y) - d_{\overline{G}}(A, B)| = |(1 - d_G(X, Y)) - (1 - d_G(A, B))| = |d_G(X, Y) - d_G(A, B)|.$$

■

Definição 15. Dado um vértice x e um conjunto de vértices Y , definimos $\deg(x, Y)$ como o número de vizinhos de x em Y , ou seja, $\deg(x, Y) = |\{y \in Y : (x, y) \in E(G)\}|$.

Proposição 3.2 (A maioria dos vértices possui grau alto). Seja (A, B) um par ε -regular com densidade d , sobre um grafo G qualquer. Dado $Y \subset B$ tal que $|Y| > \varepsilon|B|$, temos que

$$|\{x \in A : \deg(x, Y) \leq (d - \varepsilon)|Y|\}| \leq \varepsilon|A|.$$

Prova. Suponha por absurdo que existe $Y \subset B$, $|Y| > \varepsilon|B|$ tal que

$$|\{x \in A : \deg(x, Y) \leq (d - \varepsilon)|Y|\}| > \varepsilon|A|.$$

Seja $X = \{x \in A : \deg(x, Y) \leq (d - \varepsilon)|Y|\}$. Temos que

$$e(X, Y) = \sum_{x \in X} \deg(x, Y) \leq (d - \varepsilon)|X| \cdot |Y|,$$

e portanto

$$d(X, Y) \leq d - \varepsilon,$$

o que contraria o fato de (A, B) ser ε -regular. ■

O lema a seguir sobre pares regulares, além de interessante por si só, será particularmente importante na prova do teorema principal do capítulo 5. Informalmente, ele nos diz que um grafo bipartido suficientemente grande com bipartição $V_1 \cup V_2$ onde (V_1, V_2) é um par ε -regular possui caminhos de quase todos os tamanhos possíveis entre quase todos os pares de vértices $v' \in V_1$, $v'' \in V_2$ (mesmo que a densidade entre V_1 e V_2 seja pequena).

Observação. Ao definirmos constantes durante o enunciado de um teorema/lema, como no seguinte, usaremos como índice subscrito da constante o número desse teorema/lema (no lugar do tradicional índice 0). Isto facilita futuras referências a tais constantes.

Lema 3.3. *Seja G um grafo bipartido com bipartição $V_1 \cup V_2$ tal que $|V_1| = |V_2| = n$. Suponha que (V_1, V_2) é ε -regular com densidade pelo menos $\alpha/4$, para algum $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \varepsilon < 0.01\alpha$. Então existe $n_{3.3}$ tal que se $n > n_{3.3}$, então para todo par de vértices $v' \in V_1$, $v'' \in V_2$, onde $\deg(v'), \deg(v'') \geq \alpha n/5$, e todo l , onde $1 \leq l \leq n - 5\varepsilon n/\alpha$, temos que G contém um caminho de comprimento $2l + 1$ conectando v' e v'' .*

Prova. Tome v' e v'' como acima. Considere primeiro o caso em que $1 \leq l \leq \alpha n/6$. Seja

$$V_i^- = \{v \in V_i : \deg(v) < \alpha n/5\}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Como $\alpha n/5 < (\alpha/4 - \varepsilon)n$, pela proposição 3.2, $|V_i^-| \leq \varepsilon n$. Assim, se definirmos

$$V_i^+ = V_i \setminus V_i^-,$$

temos que $|V_i^+| \geq (1 - \varepsilon)n$. Jogando fora alguns vértices de V_1^+ e V_2^+ , podemos obter $\hat{V}_1 \subseteq V_1^+$ e $\hat{V}_2 \subseteq V_2^+$, tais que $|\hat{V}_1| = |\hat{V}_2| \geq (1 - \varepsilon)n$ e $v' \in \hat{V}_1$, $v'' \in \hat{V}_2$. É fácil ver que o subgrafo H induzido por $\hat{V}_1 \cup \hat{V}_2$ tem grau mínimo pelo menos $\alpha n/5 - \varepsilon n$. Construa gulosamente um caminho de comprimento $2l - 2$, digamos $P_{2l-2} = v_0 v_1 \dots v_{2l-2}$, tal que $v_0 = v'$ e $V(P_{2l-2}) \subseteq \hat{V}_1 \cup \hat{V}_2 \setminus \{v''\}$. Ou seja, comece escolhendo $v_0 = v'$ e dado que foram escolhidos $v_0, \dots, v_{i-1}$, escolha v_i como qualquer vértice da vizinhança de v_{i-1} em H que não pertença a $\{v_0, \dots, v_{i-1}\} \cup \{v''\}$. Tal vértice v_i existe pois $l \leq \alpha n/6$ e $\deg(v_{i-1}) \geq \alpha n/5 - \varepsilon n$, e portanto $\deg(v_{i-1}) - l \geq 1$. Para estender P_{2l-2} de modo a obter um caminho que termine em v'' e tenha comprimento $2l + 1$, basta mostrar que G contém uma aresta $\{v_{2l-1}, v_{2l}\}$ de $N_H(v_{2l-2}) \setminus (V(P_{2l-2}) \cup \{v''\})$ para $N_H(v'') \setminus V(P_{2l-2})$. Neste caso, $P_{2l+1} = P_{2l-2} v_{2l-1} v_{2l} v'' = v_0 \dots v_{2l} v''$ será o caminho que procuramos. De fato, tal aresta existe já que,

$$|N_H(v_{2l-2}) \setminus (V(P_{2l-2}) \cup \{v''\})| \geq \alpha n/5 - \varepsilon n - \alpha n/6 - 1 > \varepsilon n$$

e analogamente

$$|N_H(v'') \setminus V(P_{2l-2})| > \varepsilon n.$$

Assim, pela ε -regularidade de (V_1, V_2) , a densidade entre esses dois conjuntos não pode ser nula.

Agora suponha que $\alpha n/6 \leq l \leq n - 5\varepsilon n/\alpha$ e já construímos um caminho de comprimento $2l - 1$, digamos $P_{2l-1} = v_0 v_1 \dots v_{2l-1}$, onde $v_0 = v'$ e $v_{2l-1} = v''$. Neste caso a estratégia é diferente: queremos aumentar este caminho substituindo uma de suas arestas por um caminho de tamanho 3. Diremos que um vértice $v \in V(P_{2l-1})$ é bom se ele possui pelo menos εn vizinhos fora de $V(P_{2l-1})$, ou seja, $|N(v) \setminus V(P_{2l-1})| \geq \varepsilon n$, e diremos que ele é ruim caso contrário.

Se existe i , com $0 \leq i \leq 2l-2$, tal que $v_i \in V(P_{2l-1}) \cap V_1$ e $v_{i+1} \in V(P_{2l-1}) \cap V_2$ são bons, como no primeiro caso, novamente pela ε -regularidade de (V_1, V_2) , a densidade entre $N(v_i) \setminus V(P_{2l-1})$ e $N(v_{i+1}) \setminus V(P_{2l-1})$ não pode ser nula. Concluimos então que existem $w', w'' \notin V(P_{2l-1})$ tais que $\{v_i, w'\}$, $\{w', w''\}$ e $\{w'', v_{i+1}\}$ são arestas de G . Consequentemente, o caminho $v_0 v_1 \dots v_i w' w'' v_{i+1} \dots v_{2l-1}$ tem comprimentos $2l+1$ e conecta v' a v'' . Resta então provar que existe tal i .

Seja $Y = V_2 \setminus V(P_{2l-1})$. Lembre que $|Y| \geq \frac{5}{\alpha} \varepsilon n > \varepsilon n$. E seja X o conjunto dos vértices de V_1 que possuem grau menor ou igual a $(\alpha/4 - \varepsilon)|Y|$ em Y . Pela proposição 3.2, $|X| \leq \varepsilon n$. Como

$$(\alpha/4 - \varepsilon)|Y| > \alpha/5 |Y| \geq \varepsilon n,$$

todos os vértices ruins de V_1 pertencem a X e portanto existem no máximo εn vértices ruins em V_1 . De modo análogo existem no máximo εn vértices ruins em V_2 . Como existem l arestas independente em P_{2l-1} e no máximo $2\varepsilon n < \frac{\alpha}{6} \varepsilon n \leq l$ vértices ruins, então os vértices ruins não cobrem todas as arestas de P_{2l-1} e portanto existe o índice i procurado. ■

Observação. O lema acima é uma versão ligeiramente mais forte do “claim 3” de [23]. O “claim 3” de [23] não era forte o suficiente para ser usado na prova do teorema do capítulo 5. Contudo, a idéia da prova fizemos acima é basicamente a mesma da prova da versão original do lema.

A seguir, enunciaremos formalmente o Lema de Szemerédi. Não iremos exibir a prova deste lema, mas recomendamos a leitura do artigo original ([29]) e da seção 7.4 do livro de Diestel [7].

Teorema 3.4 (Lema da regularidade, Szemerédi 1978 [29]). *Para todo $\varepsilon > 0$ e m inteiro existem inteiros $M(\varepsilon, m)$ e $N(\varepsilon, m)$ com a seguinte propriedade: para todo grafo G com $n \geq N(\varepsilon, m)$ vértices existe uma partição do conjunto dos vértices em $t+1$ classes $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$ tal que*

- $m \leq t \leq M(\varepsilon, m)$;
- $|V_0| < \varepsilon n$;
- $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_t|$;
- todos exceto no máximo εt^2 dos pares (V_i, V_j) com $i, j > 0$ e $i \neq j$ são ε -regulares.

Observação. A existência da classe V_0 é puramente técnica: ela permite que seja possível que as demais classes tenham o mesmo número de elementos. Poderíamos supor que $V_0 = \emptyset$ se relaxássemos a condição $|V_i| = |V_j|$ para $||V_i| - |V_j|| \leq 1$.

Isto quer dizer que o conjunto de vértices de todo grafo suficientemente grande pode ser particionado em um número *limitado* de conjuntos, de modo que, para quase todo

par desses conjuntos vale que as arestas entre eles induzem um grafo bipartido que é pseudo-aleatório. Observe que o lema é interessante quando o grafo em questão tem densidade positiva de arestas. Caso contrário, ele pode ser trivialmente aproximado pela união de grafos bipartidos vazios.

Definição 16. *Dado um grafo $G = (V, E)$, uma partição P do conjunto de vértices V em $V_1, \dots, V_t$, e dois parâmetros ε, d , definimos o **grafo reduzido** $R = R(d, \varepsilon)$ como segue: os vértices de R são os conjuntos $V_1, \dots, V_t$ e V_i é adjacente a V_j se e só se (V_i, V_j) é ε -regular com densidade maior ou igual a d .*

A maioria das aplicações do lema da regularidade usa o grafo reduzido e depende do fato de que muitas propriedades deste grafo são herdadas por G . Por exemplo, se estamos interessados em achar subgrafos do grafo original G , então a proposição 3.5 a seguir é bastante interessante.

Precisamos primeiro da seguinte definição. Dado um grafo R o grafo R^s é obtido através da substituição de cada vértice v de R por um conjunto de s vértices e cada aresta de R por um grafo bipartido completo entre os conjuntos de s vértices correspondentes.

Proposição 3.5. *Para todo $d \in (0; 1]$, $\Delta > 1$ e $s \geq 1$ existe $\varepsilon_0 > 0$ e n_0 com a seguinte propriedade. Dado um grafo G_n tal que $n \geq n_0$, um grafo H tal que $\Delta(H) \leq \Delta$ e R um grafo reduzido de G_n com parâmetros $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e d temos que se H é subgrafo de R^s então H é subgrafo de G_n .*

Em problemas de coloração, é comum trabalharmos com os subgrafos induzidos pelas arestas de cada uma das cores. É possível enunciar o lema da regularidade de modo que seja possível encontrar uma partição que satisfaça as condições do lema para todos esses subgrafos simultaneamente. Não é difícil adaptar a prova original do teorema 3.4 de modo a obtermos o teorema seguinte.

Teorema 3.6 (Lema da regularidade para várias cores). *Para todo $\varepsilon > 0$, m e s inteiros existem inteiros $M_{3.6} = M(\varepsilon, m, s)$ e $N_{3.6} = N(\varepsilon, m, s)$ com a seguinte propriedade: para todos os grafos $G_1, G_2, \dots, G_s$ sobre o mesmo conjunto de vértices V de ordem $n \geq N_{3.6}$ existe uma partição de V em $t + 1$ classes $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$ tal que*

- $m \leq t \leq M_{3.6}$;
- $|V_0| < \varepsilon n$;
- $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_t|$;
- todos exceto no máximo εt^2 dos pares (V_i, V_j) , com $i, j > 0$, $i \neq j$, são ε -regulares em relação a cada G_k , $1 \leq k \leq s$.

3.1 Uma aplicação do lema da regularidade

Para ilustrar como o lema de regularidade (teorema 3.4) pode ser utilizado, exibiremos a prova do seguinte teorema retirado do artigo [5].

Teorema 3.7. *Para cada inteiro positivo d , existe uma constante c , tal que se G é um grafo com n vértices com grau máximo menor ou igual a d então o número de Ramsey do grafo G , $R(G) = R(G, G)$, é menor ou igual a cn .*

Prova. Seja d um inteiro positivo qualquer. Escolha um inteiro m (grande) tal que

$$\frac{1}{2} \log(m/3) \geq d + 1.$$

Então, escolha $\varepsilon = 1/m$. Observe que, com isso, também temos que $1/3^d > 2d\varepsilon$. De fato

$$m = \frac{1}{\varepsilon} \geq 3 \exp(2(d+1)) \Rightarrow 2d\varepsilon \leq \frac{2d}{3 \exp(2(d+1))} < \frac{1}{3^d}.$$

Sejam $M = M(\varepsilon, m)$ e $N = N(\varepsilon, m)$ as constantes obtidas ao aplicarmos o lema da regularidade, ou seja, o teorema 3.4. Afirmamos que $c = \max\{N, M/d\varepsilon\}$ é a constante procurada. Note que, de fato, c é determinada apenas em função de d .

Seja então G um grafo com n vértices e grau máximo menor ou igual a d . Mostremos que $R(G) \leq cn$. Considere uma coloração arbitrária de K_{cn} , o grafo completo com cn vértices, usando duas cores, digamos **azul** e **vermelha**. Seja H o grafo sobre cn vértices determinado pelas arestas **vermelhas**, e $\tilde{H}$ o grafo determinado pelas arestas **azuis**.

Como H tem cn vértices e $cn > N$, podemos aplicar o lema da regularidade, teorema 3.4, e a observação que segue tal lema, ao grafo H e encontrar uma partição $V_1 \cup \dots \cup V_t$ de $V(H)$ com as propriedades garantidas pelo lema. Seja então H^* o grafo reduzido de H obtido a partir desta partição. O grafo H^* tem pelo menos $(1 - \varepsilon) \binom{t}{2}$ arestas. Daí, pelo teorema 2.13 (Turán), ele possui um subgrafo completo H^{**} de ordem (sendo generoso) pelo menos $1/2\varepsilon$. Agora, vamos colorir as arestas de H^{**} usando as cores **verde** e **laranja**. Colorimos (V_i, V_j) de **verde** se $d_H(V_i, V_j) \geq 1/2$ e de **laranja** se $d_H(V_i, V_j) < 1/2$. Daí pelo teorema 2.7, já que $\frac{1}{2} \log(1/2\varepsilon) \geq d + 1$, existe um subgrafo completo H^{***} de H^{**} monocromático com $d + 1$ vértices. Podemos assumir sem perda da generalidade que $V(H^{***}) = \{V_1, \dots, V_{d+1}\}$.

Suponha que H^{***} tem todas as suas arestas coloridas de **verde**. Neste caso, temos que

- (V_i, V_j) é ε -regular e
- $d_H(V_i, V_j) \geq 1/2$

para todos i, j com $1 \leq i < j \leq d+1$. Neste caso, vamos mostrar que o grafo H das arestas **vermelhas** contém uma cópia de G . O caso em que as arestas de H^{***} são todas **laranjas** é análogo: a segunda condição acima valeria com $\tilde{H}$ no lugar de H e poderíamos então encontrar uma cópia de G em $\tilde{H}$, ou seja, no grafo formado pelas arestas **azuis**.

Como o número cromático de G , $\chi(G)$, é no máximo $\Delta(G) + 1 \leq d+1$, existe uma partição $X_1 \cup \dots \cup X_{d+1}$ de $V(G)$, onde cada X_i é um conjunto independente. Considere uma enumeração dos vértices de G , $x_1, \dots, x_n$, tal que para $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ se $x_{i_1} \in X_{\beta_1}$ e $x_{i_2} \in X_{\beta_2}$ então $\beta_1 \leq \beta_2$. Vamos agora encontrar uma imersão de G em H , ou seja, escolheremos indutivamente vértices $y_1, \dots, y_n$ de H de modo que

$$\{x_i, x_j\} \in E(G) \Rightarrow \{y_i, y_j\} \in E(H). \quad (3.2)$$

Suponha que para algum i , $0 \leq i < n$, os vértices y_α tais que $1 \leq \alpha \leq i$ já foram escolhidos satisfazendo as condições a seguir.

1. se $1 \leq \alpha \leq i$ e $x_\alpha \in X_\beta$, então $y_\alpha \in V_\beta$.
2. se $i < \alpha' \leq n$ e $x_{\alpha'} \in X_\beta$, sendo $N(\alpha', i) := \{y_\alpha : 1 \leq \alpha \leq i, \{x_\alpha, x_{\alpha'}\} \in E(G)\}$ e $v := |N(\alpha', i)|$, então existe $V'_\beta \subseteq V_\beta$ tal que $|V'_\beta| \geq |V_\beta|/3^v$ e todo vértice de V'_β é adjacente (em H) a todos $y_\alpha \in N(\alpha', i)$.

Mostremos como escolher y_{i+1} . Note que, em particular, a construção abaixo vale para $i = 0$ e podemos utilizá-la para escolher y_1 . A hipótese (2) acima, apesar de parecer um pouco complicada, é o que se faz necessário para conseguirmos escolher y_{i+1} facilmente. De fato, se $x_{i+1} \in X_{\beta_0}$, bastaria escolher $y_{i+1} \in V'_{\beta_0}$, onde V'_{β_0} é subconjunto de V_{β_0} dos vértices adjacentes a todos os vértices de $N(i+1, i)$, para que a implicação (3.2) seja válida para os y'_i s definidos até então e a hipótese (1) acima continuem valendo. Basta então tomar cuidado para garantir que V'_{β_0} não seja vazio e que possamos escolher $y_{i+1} \in V'_{\beta_0}$ de modo que a hipótese (2) também continue valendo.

Basta olhar apenas para os valores α' tais que $\alpha' > i+1$ e para os quais $x_{\alpha'}$ é adjacente a x_{i+1} . É claro que existem no máximo d destes valores. Escolha um deles arbitrariamente, digamos α' . Seja β tal que $x_{\alpha'} \in X_\beta$. É claro que $\beta > \beta_0$. Veja também que $N(\alpha', i+1) = N(\alpha', i) \cup x_{i+1}$. Seja então $v' = |N(\alpha', i+1)| = |N(\alpha', i)| + 1$. Pela hipótese de indução (2), já sabemos que V_β contém um subconjunto V'_β , de ordem pelo menos $|V_\beta|/3^{v'-1} \geq |V_\beta|/3^d > \varepsilon|V_\beta|$, tal que todo vértice de V'_β é adjacente a todo vértice de $N(\alpha', i)$. Aplicando a proposição 3.2, concluímos que no máximo $\varepsilon|V_\beta|$ dos pontos de V'_{β_0} são adjacentes a menos de um terço dos pontos em V'_β (e não seriam uma escolha viável para y_{i+1}). Agora, se olharmos para todos os possíveis valores de α' , no máximo $d\varepsilon|V_{\beta_0}|$ pontos de V'_{β_0} não seriam uma escolha viável para y_{i+1} . Contudo também temos de escolher y_{i+1} diferente dos y'_i s previamente selecionados em V'_{β_0} .

Com isto, eliminamos mais, no máximo, n pontos de V'_{β_0} . Assim, para garantir que podemos escolher y_{i+1} , basta ver que $|V'_{\beta_0}| > d\varepsilon|V_{\beta_0}| + n$. Como $t \leq M$ e $c \geq M/d\varepsilon$, temos $|V_{\beta_0}| \geq cn/t \geq cn/M$, donde $n \leq d\varepsilon|V_{\beta_0}|$. Dessa forma, basta mostrar que $|V'_{\beta_0}| > 2d\varepsilon|V_{\beta_0}|$. Mas isto é verdade, já que

$$|V'_{\beta_0}| \geq |V_{\beta_0}|/3^v \geq |V_{\beta_0}|/3^d > 2d\varepsilon|V_{\beta_0}|,$$

onde $v = |N(i+1, i)|$.

■

O teorema acima pode ser facilmente adaptado para o caso assimétrico, isto é, dados G_1 e G_2 ambos com grau máximo menor ou igual a certo d , então

$$R(G_1, G_2) \leq c \max\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\},$$

onde c depende apenas de d . De fato, na prova do teorema, a reconstrução do grafo G a partir do subgrafo completo monocromático do grafo reduzido, depende apenas do fato de que o grau máximo de G é menor ou igual a d .

Ainda em [5], comenta-se uma outra possível modificação do teorema acima: permitir mais de duas cores. Especificamente, para cada par (d, r) existe uma constante c , em função apenas de d e r , tal que se G é um grafo com grau máximo d e n vértices então toda r -coloração das arestas de um grafo completo com cn vértices possui uma cópia monocromática de G . Para tanto é necessário usar a versão do lema da regularidade para mais de uma cor.

Finalmente, podemos considerar as duas generalizações acima ao mesmo tempo, obtendo a seguinte versão do teorema.

Teorema 3.8. *Para inteiros positivos d e r , existe c , função apenas de d e r , tal que se $G_1, \dots, G_r$ são grafos com grau máximo d então $R(G) \leq c \max\{|V(G_1)|, \dots, |V(G_r)|\}$.*

Capítulo 4

Um lema de estabilidade

Começaremos este capítulo de modo bastante informal. Considere o problema de, dados três grafos G_1 , G_2 e G_3 , determinar o número de Ramsey $R(G_1, G_2, G_3)$. Suponha que conjecturamos que $R(G_1, G_2, G_3) = N$, para certo natural N . Há duas coisas que precisamos mostrar. Primeiro, que existe uma 3-coloração de K_{N-1} tal que G_i não é subgrafo do grafo induzido pelas arestas da cor i para todo $1 \leq i \leq 3$. Segundo, que toda 3-coloração de K_N contém uma cópia monocromática de G_i na cor i para algum i . No primeiro passo, ao buscarmos colorações adequadas de K_{N-1} , é muito comum que todas as colorações que conseguimos encontrar sejam parecidas umas com as outras ou que apresentem um mesmo tipo de estrutura. Suponha que conseguimos provar que nenhuma das colorações encontradas para K_{N-1} pode ser estendida a uma 3-coloração de K_N que também não contenha uma cópia monocromática de G_i na cor i para todo $1 \leq i \leq 3$. Isto é de se esperar, já que tal extensão iria contra a nossa conjectura. Mas é óbvio que isto está longe de ser uma prova de que $R(G_1, G_2, G_3) = N$, já que poderia existir uma coloração de K_N totalmente diferente das que encontramos para K_{N-1} e que não possui uma cópia monocromática de G_i .

Um lema de estabilidade nos ajudaria a finalizar a prova de nossa conjectura. Ou seja, ele nos diz que, caso exista uma coloração de K_N que não possui cópias monocromáticas de G_i nas cores adequadas, então tal coloração deve ter o mesmo tipo de estrutura das colorações encontradas para K_{N-1} . Para finalizar a prova, bastaria então usar o lema de estabilidade e provar que mesmo as colorações de K_N com este tipo de estrutura possuem uma cópia monocromática de G_i para algum i .

A idéia de usar teoremas de estabilidade em teoria dos grafos não se aplica apenas a problemas em teoria de Ramsey. Ela foi iniciada por Simonovits, ainda nos anos 60 e 70, por exemplo, veja Simonovits [26], Erdős e Simonovits [8], Lovász e Simonovits [21, 22].

Desde então, esse método tem se mostrado bem sucedido em muitos problemas de teoria extremal, por exemplo, no de encontrar subgrafos maximais livres de triângulos

em grafos aleatórios [1] e em alguns trabalhos recentes em teoremas extremais exatos para hipergrafos de Füredi e Simonovits [14], Keevash e Sudakov [18], e Füredi, Pikhurko e Simonovits [12, 13].

Este capítulo será inteiramente dedicado à exposição da prova de um lema de estabilidade (para emparelhamentos em 3-colorações) de Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi [17]. Este lema será utilizado na prova do teorema 5.1, que é o resultado principal do capítulo 5 e desta dissertação. Apesar do lema de estabilidade ser interessante por si só, sua prova é extensa e técnica e não é necessário conhecê-la para entender a prova do teorema 5.1.

Começamos com algumas definições centrais.

Definição 17. *Uma 3-multicoloração de um grafo G é uma família de três conjuntos de arestas de G , $\{E_1, E_2, E_3\}$, tal que $E(G) \subseteq E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Dizemos que as arestas de E_i receberam a cor i .*

A diferença entre uma 3-multicoloração de um grafo G e uma 3-coloração de G é que na segunda exigimos também que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq 3$. Já em uma multicoloração algumas arestas podem ter recebido mais de uma cor. Em todo caso, todas as arestas devem receber *pelo menos* uma das cores. Em geral, chamaremos as cores de 1, 2 e 3 (para enumerá-las com facilidade), mas em alguns casos é mais agradável chamá-las de **vermelho**, **verde** e **azul**.

Definição 18. *Dizemos que uma aresta é c -exclusiva ou exclusiva da cor c se ela recebeu apenas a cor c . Denotamos respectivamente por G^R , G^G e G^B os subgrafos induzidos pelas arestas que receberam cor **vermelha**, **verde** e **azul** e por G^{R*} , G^{G*} e G^{B*} os subgrafos induzidos pelas arestas exclusivas dessas cores.*

Definição 19. *Em uma 3-multicoloração, um subconjunto A de arestas é **monocromático** se existe uma cor i tal que todas as arestas de A receberam a cor i . Veja que as arestas de A não precisam ser exclusivas da cor i .*

Definição 20. *Um **emparelhamento conectado** em um grafo G é um emparelhamento M cujas arestas estão todas em uma mesma componente conexa de G .*

Definição 21. *Dada uma coloração de um grafo G , dizemos que M é um **emparelhamento monocromático conectado** se existe uma cor i tal que $M \subseteq E(G^i)$ e M é conectado em G^i .*

Também usaremos a seguinte convenção.

Definição 22. *Dizemos que um grafo G sobre n vértices é $(1 - \varepsilon)$ -**denso** se ele possui pelo menos $(1 - \varepsilon)\binom{n}{2}$ arestas. Um grafo bipartido com classes de vértices de ordens k e l é $(1 - \varepsilon)$ -**denso** se ele possui pelo menos $(1 - \varepsilon)kl$ arestas.*

O lema de estabilidade nos diz que todas as 3-multicolorações de um grafo quase

completo, ou seja, com densidade de arestas alta, que não possuem um emparelhamento monocromático conectado grande são do tipo EC_1 , EC_2 ou EC_3 , definidas abaixo.

Coloração 1 ($EC_1(\alpha, \delta)$). Uma coloração de G é do tipo $EC_1(\alpha, \delta)$, com $\alpha, \delta < 1$, se existe uma partição $V(G) = A \cup B \cup C \cup D$ tal que

- $|A|, |B|, |C|, |D| \geq (1 - \alpha) \frac{|V(G)|}{4}$;
- os grafos bipartidos $(A \times B) \cap G^{R^*}$, $(C \times D) \cap G^{R^*}$, $(A \times D) \cap G^{G^*}$, $(B \times C) \cap G^{G^*}$, $(A \times C) \cap G^{B^*}$, $(B \times D) \cap G^{B^*}$ são todos $(1 - \delta)$ -densos.

Coloração 2 ($EC_2(\alpha, \delta)$). Uma coloração de G é do tipo $EC_2(\alpha, \delta)$, com $\alpha, \delta < 1$, se existe uma partição $V(G) = A \cup B \cup C \cup D$ tal que

- $|A|, |B|, |C|, |D| \geq (1 - \alpha) \frac{|V(G)|}{4}$;
- os grafos bipartidos $(A \times B) \cap G^{R^*}$, $((A \cup B) \times C) \cap G^{G^*}$, $((A \cup B) \times D) \cap G^{B^*}$ são todos $(1 - \delta)$ -densos.

Coloração 3 ($EC_3(\mu, c_1, c_2, \delta)$). Uma coloração de G é do tipo $EC_3(\mu, c_1, c_2, \delta)$, com $\mu, c_1, c_2, \delta < 1$, se existe uma partição $V(G) = A \cup B \cup C \cup D$ tal que

- $|A|, |B|, |C| \geq (1 - c_1\mu) \frac{|V(G)|}{4}$; $|D| \geq \mu \frac{|V(G)|}{4}$;
- $|A| \geq \max\{|B|, |C|, |D|\} + \mu \frac{|V(G)|}{4}$; $|A \cup D| \leq (1 + c_2\mu) \frac{|V(G)|}{2}$;
- os grafos bipartidos $(A \times B) \cap G^{R^*}$, $(C \times D) \cap G^{R^*}$, $(A \times D) \cap G^{G^*}$, $(B \times C) \cap G^{G^*}$, $(A \times C) \cap G^{B^*}$, $(B \times D) \cap G^{B^*}$ são todos $(1 - \delta)$ -densos.

Observação. Quando omitirmos o parâmetro δ das colorações EC_1 e EC_2 é porque estamos supondo que $\delta = \alpha$. Note também que em cada definição exigimos que certas arestas sejam exclusivas de certas cor e não apenas que os conjuntos sejam monocromáticos.

Agora, podemos enunciar o lema.

Lema 4.1 (Lema 1 em [17], versão corrigida). *Dados quaisquer $\alpha_1 > 0$ e $\mu_1 > 0$, existem reais positivos $\eta_{4.1}$, $\varepsilon_{4.1}$ e $\mu_{4.1} < \mu_1$ tais que para todo $\varepsilon < \varepsilon_{4.1}$ existe um inteiro positivo $n_{4.1}$ para o qual vale que: se um grafo $(1 - \varepsilon)$ -denso G_n , com $n \geq n_{4.1}$, é 3-multicolorido, então um dos seguintes casos acontece.*

Caso 1: G_n contém um emparelhamento monocromático conectado com pelo menos $(\frac{1}{4} + \eta_{4.1})n$ arestas.

Caso 2: a coloração é do tipo $EC_1(\alpha_1/2, \alpha_1/2)$.

Caso 3: a coloração é do tipo $EC_2(\alpha_1/2, \alpha_1/2)$.

Caso 4: a coloração é do tipo $EC_3(\mu_{4.1}, 0, 7, 0, 2, \varepsilon^{1/3})$.

Observação. Na versão original do lema, o “caso 4” acima não existe. Contudo, este caso é necessário já que, se α é pequeno, então existem colorações que são do tipo EC_3 e não se enquadram nos casos 1, 2 e 3. Por exemplo, tome uma coloração do tipo EC_3 onde $|B| = |C| = |V(G)|/4$, $|A| = 3|V(G)|/8$ e $|D| = |V(G)|/8$, tal que todas as arestas dentro de A são verdes e $\delta = 0$.

A prova original do lema em [17] comete um pequeno descuido no final de seu subcaso 1.2. Ao tentar corrigir esse erro, percebemos que o máximo que podíamos concluir neste subcaso era que a coloração deveria ser do tipo EC_3 . Por outro lado, a existência do caso 4 acima não afeta a veracidade do resultado principal de [17], já que, ao aplicar o lema, este caso pode ser tratado de maneira semelhante ao caso 2, em que temos uma coloração do tipo EC_1 .

4.1 Ferramentas, outros resultados do tipo Ramsey e suas versões aproximadas

Como o título sugere, nesta seção enunciaremos e provaremos alguns resultados básicos, diversos resultados do tipo Ramsey e versões aproximadas destes. Usaremos todos estes resultados na prova do lema 4.1, exceto um ou dois que foram colocados por caráter ilustrativo.

Definição 23. Denotamos por $\nu = \nu(G)$ o **tamanho** (número de arestas) de um **emparelhamento máximo** em um grafo G . Denotamos por $c(G)$ o **número de componentes** de G e por $c_o(G)$ o **número de componentes ímpares** de G .

O resultado a seguir é bem conhecido pelo nome de Fórmula de Tutte–Berge.

Lema 4.2. Para todo grafo G ,

$$|V(G)| - 2\nu(G) = \max\{c_o(G \setminus S) - |S|\},$$

onde o máximo é tomado sobre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$.

Também precisamos da seguinte observação trivial sobre emparelhamentos.

Lema 4.3. Suponha que $M = \{e_1, \dots, e_k\}$ é um emparelhamento máximo em um grafo G . Então $V(G) \setminus V(M)$ é um conjunto independente de G e podemos selecionar para cada $i, 1 \leq i \leq k$, uma extremidade x_i da aresta e_i de modo que exista no máximo uma aresta de x_i para $V(G) \setminus V(M)$ em G . Dizemos que x_i é uma **extremidade forte** de e_i .

Os próximos lemas são sobre propriedades simples de grafos com densidade alta.

Lema 4.4. Seja G_n um grafo $(1 - \varepsilon)$ -denso (com n vértices). Então G_n possui um subgrafo H com pelo menos $(1 - \sqrt{\varepsilon})n$ vértices tal que: (A) $\Delta(\overline{H}) < \sqrt{\varepsilon}n$; (B) $\delta(H) \geq (1 - 2\sqrt{\varepsilon})n$; (C) H é $(1 - 2\sqrt{\varepsilon})$ -denso.

Prova. Se $\overline{G_n}$ possui p vértices com grau pelo menos $\sqrt{\varepsilon}n$, então $\overline{G_n}$ tem pelo menos $p\sqrt{\varepsilon}n/2$ arestas. Então

$$\frac{p\sqrt{\varepsilon}n}{2} \leq \varepsilon \binom{n}{2},$$

o que implica $p < \sqrt{\varepsilon}n$. Afirmamos que o grafo H obtido após a remoção destes p vértices de G é como o desejado. De fato, as propriedades (A) e (B) valem trivialmente e a propriedade (C) segue facilmente de (B), pois

$$\begin{aligned} |E(H)| &\geq \frac{|V(H)|\delta(H)}{2} \geq \frac{|V(H)|(1 - 2\sqrt{\varepsilon})n}{2} \geq (1 - 2\sqrt{\varepsilon}) \frac{|V(H)|^2}{2} \\ &> (1 - 2\sqrt{\varepsilon}) \binom{|V(H)|}{2}. \end{aligned}$$

■

Notação 24. Dado um grafo G e subconjuntos disjuntos A e B de $V(G)$, o grafo bipartido formado pelo conjunto de vértices $A \cup B$ e cujas arestas possuem uma extremidade em A e a outra em B será denotado por $G[A, B]$ ou simplesmente por $[A, B]$, quando não houver perigo de confusão.

Lema 4.5. Seja $H = [A, B]$ um grafo bipartido tal que $|B| \geq |A|$ e que todo vértice de A é não adjacente a no máximo k vértices (em B) e que todo vértice de B é não adjacente a no máximo k vértices (em A). Se $k < |B|/2$ então H possui uma única componente conexa não trivial, ou seja, todas as arestas de H estão em uma mesma componente conexa. Se também temos que $|A| > k$ então H é conexo e contém um emparelhamento de tamanho pelo menos $|A| - k$.

Prova. Suponha que $k < |B|/2$. Neste caso, todo vértice de A é adjacente a mais da metade dos vértices de B . Logo, quaisquer dois vértices de A possuem um vizinho comum em B , donde todos os vértices de A pertencem a uma mesma componente conexa. É claro que qualquer vértice de B que possui grau não nulo também pertence a esta componente. Logo, existe uma única componente não trivial.

Suponha agora que $|A| > k$. Então B não tem vértices de grau nulo e portanto H é conexo. Finalmente, qualquer emparelhamento máximo M em H cobre todos exceto no máximo k vértices de A . De fato, se M deixa de cobrir mais do que k vértices de A , então também deixa de cobrir mais do que k vértices em B . Tome $v \in A \setminus V(M)$. Pela maximalidade de M , v não é adjacente a todos os vértices de $B \setminus V(M)$, ou seja, não é adjacente a mais do que k vértices de B . Uma contradição. ■

Observação. O lema acima será frequentemente aplicado a subgrafos bipartidos de um grafo G onde $\Delta(\overline{G}) < \sqrt{\varepsilon}n$. Assim tomando $k = \sqrt{\varepsilon}n$, temos que se A e B são conjuntos disjuntos de vértices de G tais que $|B| > 2\sqrt{\varepsilon}n$ e $A \neq \emptyset$ então $H = [A, B]$ possui uma única componente conexa. Se adicionalmente $|A| > \sqrt{\varepsilon}n$, então H é conexo e contém um emparelhamento de tamanho pelo menos $|A| - \sqrt{\varepsilon}n$.

Como vimos no capítulo 2, o número de Ramsey para emparelhamentos é completamente descrito pelo teorema 2.11. Contudo, este teorema ainda não é forte o bastante para podermos aplicá-lo em uma prova do lema 4.1, pois este lema trata de 3-colorações de grafos densos e não de grafos completos. Pelo que vimos no lema 4.4, um grafo denso G possui um subgrafo grande H tal que $\Delta(\overline{H})$ é pequeno. Pensando em uma 3-coloração de G como uma 4-coloração de um grafo completo (onde a quarta cor equivale às arestas ausentes em G), o teorema a seguir será bastante útil.

Teorema 4.6 (Theorem 3 in [17]). *Para $n_1, n_2, n_3 \geq 1$ inteiros com $n_1 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ e para todo inteiro não-negativo s ,*

$$R(n_1 K_2, n_2 K_2, n_3 K_2, K_{1,s}) \leq s + n_1 + 1 + \sum_{i=1}^3 (n_i - 1).$$

Prova. Fixe $s \geq 1$. A prova é por indução sobre $n_1 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. O resultado é óbvio para $n_1 = 1$. Neste caso, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, ou seja, basta observar que $R(K_2, K_2, K_2, K_{1,s}) \leq s + 2$. Suponha então que $n_1 > 1$ e que o resultado foi provado para $n_1 - 1$. Deixamos a prova de que o resultado equivalente para menos de 4 cores vale, ou seja, o caso em que $n_i = 1$ para algum i , a cargo do leitor. Suponha então que $n_i > 1$ para todo i . Seja $N = s + n_1 + 1 + \sum_{i=1}^3 (n_i - 1)$ e considere uma 4-coloração de K_N . Pensaremos na quarta cor como o complemento do grafo G formado pelos N vértices e pelas arestas das cores 1, 2 e 3. Suponha que existe em G uma árvore T , não necessariamente induzida, formada por exatamente 3 arestas (sendo portanto um caminho ou uma estrela) de cores distintas. Como $|G \setminus V(T)| = N - 4 =$

$s + (n_1 - 1) + 1 + \sum_{i=1}^3 ((n_i - 1) - 1)$, por hipótese de indução, podemos achar em $G \setminus V(T)$ um emparelhamento de tamanho $n_i - 1$ na cor i ou podemos achar no complemento de $G \setminus V(T)$ um $K_{1,s}$. No primeiro caso, podemos adicionar a aresta de cor i de T ao emparelhamento encontrado, no segundo, não há o que fazer.

Podemos supor então que G não possui tal árvore, não possui um emparelhamento monocromático de tamanho n_i na cor i , para $i = 1, 2$ e 3 , e que cada vértice de G tem grau no mínimo $N - s$. Tome um emparelhamento máximo no grafo G^1 das arestas de cor 1 , digamos $M_1 = \{e_1, \dots, e_{k_1}\}$. Usando o lema 4.3, aplicado ao subgrafo induzido pelas arestas da cor 1 , selecione vértices fortes $X = \{x_1, \dots, x_{k_1}\}$, um de cada aresta de M_1 . Seja H o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus V(M_1)$.

Sejam ainda M_2 e M_3 emparelhamentos tais que M_i é máximo no subgrafo de G induzido por $V(H) \cup X$ e pelas arestas de cor i e que $V(M_i) \cap X$ seja máximo. Sejam $k_2 = |M_2|$ e $k_3 = |M_3|$.

Suponha que existe um vértice $x_1 \in X$ que não pertence a $V(M_2) \cup V(M_3)$. Isto implica que x_1 é adjacente a no máximo um vértice de H na cor 1 (de acordo com a escolha de x_1 pelo lema 4.3) e a no máximo k_i vértices de H na cor i (devido à maximalidade de $|M_i|$ e de $|V(M_i) \cap X|$), para $i = 2$ e $i = 3$. Além disso, há no máximo $s - 1$ vértices de H não adjacentes a x_1 . Assim,

$$N \leq 2k_1 + 1 + k_2 + k_3 + (s - 1) \leq 2(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + s < N,$$

o que é uma contradição.

Logo, todo vértice de X é coberto por uma aresta de M_2 ou M_3 . Assuma, sem perda da generalidade, que $k_2 \geq k_3$. Suponha que um vértice, digamos x_1 , é coberto por uma aresta $\{x_1, y_1\}$ de M_3 . Pelo lema 4.3, aplicado ao subgrafo induzido pelas arestas de cor 3 em $V(H) \cup X$, selecione um vértice forte de cada aresta de M_3 , em particular um vértice z de $\{x_1, y_1\}$. Observe que em G não há arestas da cor 2 incidentes a z , caso contrário teríamos uma árvore com 3 arestas de cores distintas. Assim, pela escolha de z , o vértice z é adjacente em H a no máximo um vértice na cor 1 , nenhum na cor 2 e no máximo $2k_3 + 1$ vértices na cor 3 . Ademais, z não é adjacente a no máximo $s - 1$ vértices de H . Então

$$\begin{aligned} N &\leq 2k_1 + 1 + (2k_3 + 1) + (s - 1) \leq 2k_1 + k_2 + k_3 + s + 1 \\ &\leq 2(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + s + 1 < N, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Concluimos então que nenhum vértice de X é coberto por uma aresta de M_3 e portanto todos são cobertos por M_2 . Agora, aplicamos o mesmo argumento de antes. Usamos o lema 4.3 para o subgrafo induzido pelas arestas de cor 2 em $V(H) \cup X$, e selecionamos, em particular, um vértice z de uma aresta $\{x_1, y_1\}$ de M_2 . Como antes, nenhuma aresta de G da cor 3 é incidente a z . E, de acordo com a escolha de z ,

temos que z é adjacente em H a no máximo um vértice na cor 1, no máximo $2k_2 - k_1 + 1$ vértices na cor 2 (pois todos os vértices de X são cobertos por M_2 e logo $|X| = k_1$ vértices de M_2 estão fora de H), nenhum vértice na cor 3 e no máximo $s - 1$ vértices de H não são adjacentes a z . Assim,

$$\begin{aligned} N &\leq 2k_1 + 1 + 2k_2 - k_1 + 1 + s - 1 = k_1 + 2k_2 + s + 1 \\ &\leq (n_1 - 1) + 2(n_2 - 1) + s + 1 = \\ &= n_1 + 2n_2 - 2 + s < N, \end{aligned}$$

já que $n_3 > 0$, o que é uma contradição mais uma vez. ■

Observação. O resultado análogo a esse para mais cores também vale. Precisamente, se $n_1 = \max\{n_1, \dots, n_t\}$, então $R(n_1 K_2, \dots, n_t K_2, K_{1,s}) \leq s + n_1 + 1 + \sum_{i=1}^t (n_i - 1)$. Mas apenas o caso em que $t = 3$ será necessário para nós.

Outra observação trivial é que o tamanho de um emparelhamento monocromático *conectado* máximo em uma coloração pode ser menor do que o tamanho de um emparelhamento monocromático máximo na mesma. Por exemplo, se o K_4 é 3-colorido de modo que cada classe de cor é formada por duas arestas independentes, então o maior emparelhamento monocromático tem tamanho 2, enquanto que o maior emparelhamento monocromático *conectado* tem tamanho 1. Agora, vamos olhar para resultados que garantem componentes conexas monocromáticas grandes em certas colorações, para depois usar esses resultados em conjunto com os anteriores.

O número de Ramsey para componentes conexas é bem conhecido. Alguns resultados mais gerais sobre isto podem ser encontrados em [11]. Apenas para ilustrar, citamos um resultado que, de certa forma, motivou a conjectura de Faudree e Schelp que veio a se tornar o teorema 1.4.

Teorema 4.7. *O menor m para o qual toda 3-coloração do K_m contém uma componente conexa monocromática com pelo menos n vértices é $2n - 1$ para n ímpar e $2n - 2$ para n par.*

Uma observação de Erdős bastante conhecida é que em toda 2-coloração do K_n existe uma componente conexa monocromática que contém todos os vértices do K_n . Em outras palavras, para qualquer grafo G , vale que G ou $\overline{G}$ é conexo. O resultado a seguir é uma versão aproximada dessa observação.

Lema 4.8. *Dado um grafo G_n de ordem n tal que $\Delta(\overline{G_n}) < k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e uma 2-coloração de suas arestas, então G_n contém uma componente conexa monocromática de ordem pelo menos $n - 2k$.*

Prova. Suponha que $|V(G_n) \setminus C| > 2k$ para uma componente conexa monocromática máxima C , digamos de cor 1. Então, todas as arestas do grafo bipartido induzido pelas arestas com uma ponta em C e a outra em $V(G_n) \setminus C$ possui cor 2. Logo, o

lema 4.5 implica que este grafo bipartido possui uma componente que cobre todos os vértices de C e todos exceto no máximo k vértices de $V(G_n) \setminus C$, mas isto contraria a maximalidade de C . ■

Finalmente, o último resultado desta seção é um resultado de estabilidade relacionado a componentes em 2-colorações de um grafo tripartido.

Lema 4.9. *Sejam $\sqrt{\varepsilon} < 1/24$ e G_n um grafo (de ordem n) tal que $\Delta(\overline{G_n}) < \sqrt{\varepsilon}n$, e considere uma partição $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ de $V(G_n)$ tal que $|V_i| > 4\sqrt{\varepsilon}n$, para $i = 1, 2, 3$. Seja H o grafo tripartido induzido pelas arestas em $[V_i, V_j]$, $i \neq j$. Então, para toda 2-coloração de H , ou encontramos uma componente conexa monocromática C que contém todos exceto no máximo $6\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de H , ou a coloração é formada apenas por duas componentes C_1, C_2 de cores distintas, tais que $V(C_1)$ contém todos os vértices de duas das classes da partição e $V(C_2)$ também contém todos os vértices dessas duas classes. Veja que, neste caso, a união $V(C_1) \cup V(C_2)$ contém todos os vértices da terceira classe.*

Prova. Seja C_1 a maior componente conexa monocromática de H e suponha sem perda da generalidade que C_1 é da cor 1. Note que $|C_1| > n/3 - \sqrt{\varepsilon}n/2 > n/4$, pois é fácil encontrar uma estrela monocromática com esta quantidade de vértices. De fato, um vértice que está na menor das classes V_i tem pelo menos $2n/3 - \sqrt{\varepsilon}n$ vizinhos nas outras classes, dos quais pelo menos metade são ligados a ele por arestas de mesma cor. Sejam $R_i = V_i \cap V(C_1)$ e $S_i = V_i \setminus V(C_1)$. Para $i \neq j$, pela maximalidade de C_1 , não há arestas da cor 1 entre R_i e S_j . Se $V(C_1)$ contém todos os vértices de duas das classes V_i , digamos $R_1 = V_1$ e $R_2 = V_2$, então, ou $|S_3| \leq 2\sqrt{\varepsilon}n$ e C_1 é a componente C procurada, ou $|S_3| > 2\sqrt{\varepsilon}n$ e a segunda condição do lema é satisfeita com $C_2 = S_3 \cup R_1 \cup R_2$. De fato, quando $|S_3| > 2\sqrt{\varepsilon}n$, como $[S_3, R_1]$ e $[S_3, R_2]$ só possui arestas de cor 2, temos que C_2 é conexo pelo lema 4.5. Agora, podemos assumir que pelo menos dois dos conjuntos S_i são não vazios, digamos S_1 e S_2 .

Chame um conjunto de pequeno se ele possui menos que $2\sqrt{\varepsilon}n$ vértices, e de grande caso contrário. Como $|V_i| \geq 4\sqrt{\varepsilon}n$, pelo menos um dos conjuntos R_i ou S_i é grande. Aplicando o lema 4.5, temos que se S_i e R_j ($i \neq j$) são grandes, então o grafo induzido

pelas arestas da cor 2 entre eles é conexo; se apenas um deles é grande, então existe uma componente conexa na cor 2 que cobre todos seus vértices exceto $\sqrt{\varepsilon}n$ do maior. Com esta observação em mente, vamos analisar casos de acordo com as ordens dos conjuntos S_i .

Se S_1 , S_2 e S_3 são pequenos, então C_1 já possui a ordem desejada. De fato

$$|C_1| = |V(H) \setminus S_1 \cup S_2 \cup S_3| \geq (1 - 6\sqrt{\varepsilon})n.$$

Se exatamente um desses conjuntos, digamos S_1 , é grande, então R_2 e R_3 são grandes. O lema 4.5 implica que $C_2 = S_1 \cup R_2 \cup R_3$ é conexo na cor 2. Se R_1 for pequeno, então C_2 é a componente C procurada, já que a mesma estimativa feita acima para C_1 vale para C_2 . Por outro lado, se R_1 é grande, lembre que S_2 ou S_3 é não vazio, digamos S_2 . Um vértice de S_2 é vizinho na cor 2 de todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de R_1 e todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de R_3 . Assim, todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de R_1 são conectados a C_2 . Temos então uma componente da cor 2 que cobre todos os vértices de H , exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de V_1 e dos vértices em S_2 ou S_3 . Logo, tal componente tem pelo menos $(1 - 3\sqrt{\varepsilon})n$ vértices.

Se exatamente dois dos conjuntos S_i , digamos S_1 e S_2 , são grandes, então R_3 é grande. Novamente pelo lema 4.5, $C_3 = S_1 \cup S_2 \cup R_3$ é conexo na cor 2. Agora, todo vértice de R_2 é vizinho na cor 2 de todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de S_1 . Em particular, como S_1 é grande, todo vértice de R_2 é vizinho de algum vértice de S_1 na cor 2. O mesmo vale para o par R_1, S_2 . Logo, R_1, R_2 estão na mesma componente que C_3 . Assim, $C = C_3 \cup R_1 \cup R_2$ é conexo na cor 2 e contém todos os vértices de H , exceto os de S_3 , que é pequeno.

Por último, temos o caso em que S_1 , S_2 e S_3 são todos grandes. Usamos então o fato de que o maior dos R_i , digamos R_1 , é grande, já que

$$|R_1| \geq \frac{1}{3}|C_1| \geq \frac{n}{12} \geq 2\sqrt{\varepsilon}n,$$

pois $\sqrt{\varepsilon} < 1/24$. Então $R_1 \cup S_2 \cup S_3$ é conexo na cor 2. Seja C a componente de cor 2 que contém $R_1 \cup S_2 \cup S_3$. Como no caso anterior, todo vértice de $R_2 \cup R_3$ é, em particular, adjacente a algum vértice de $S_2 \cup S_3$ e portanto pertence a C . Ademais, um vértice $v \in R_2 \cup R_3 \neq \emptyset$ é adjacente a todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de S_1 . Neste caso, C contém todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de H e o lema está provado. ■

4.2 Prova do lema 4.1

Prova. Comece escolhendo $\eta = \eta_{4.1}$ suficientemente pequeno em relação a α_1 e μ_1 . E, em seguida, escolha ε suficientemente pequeno em relação a η .

Considere uma 3-multicoloração de um grafo $(1 - \varepsilon)$ -denso G_n , com n grande. Usando o lema 4.4, encontramos um subgrafo $G = G_N$ de G_n , onde $N \geq (1 - \sqrt{\varepsilon})n$ e $\Delta(\overline{G_N}) < \sqrt{\varepsilon}n$. Note que, para provar que a coloração de G_n é uma EC_1 ou EC_2 , basta mostrar que a coloração restrita a G_N é respectivamente uma EC_1 ou EC_2 (com parâmetro α um pouco menor), já que os demais $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices podem ser distribuídos facilmente. Do mesmo modo, quando provarmos que a coloração restrita a G_N é uma EC_3 , também conseguiremos mostrar que a coloração original é uma EC_3 de G_n (isso será feito explicitamente após encontrarmos a uma EC_3 em G_N). Durante toda esta seção, ε, η, n, N estarão fixados assim como G_n, G_N e a 3-multicoloração.

O objetivo então é mostrar que a coloração de G_N é do tipo EC_1 ou EC_2 ou EC_3 no caso em que G_N não possui um emparelhamento monocromático conectado de tamanho $(1/4 + \eta)n$. No decorrer da prova, serão definidos dois tipos de estruturas intermediárias que nos ajudarão a alcançar nosso objetivo. A saber, a 4-partição e a coloração extremal fraca, WEC_2 . Começamos definindo as 4-partições. Depois, provaremos um lema que nos permitirá dividir a prova em dois casos, que serão tratados nas duas subseções seguintes. Apenas no segundo caso precisaremos definir a WEC_2 . Em cada caso, precisaremos analisar alguns subcasos.

Definição 25. Dizemos que uma 3-multicoloração de G_N tem uma 4-partição se $V(G_N)$ pode ser particionado em conjuntos $S, X_1, \dots, X_4$ tais que: $|S| \leq 4\sqrt{\varepsilon}n$, todas as arestas de $[X_1, X_2]$ e $[X_3, X_4]$ são exclusivas da cor 1, todas as arestas de $[X_1, X_3]$ e $[X_2, X_4]$ são exclusivas da cor 2 e todas as arestas de $[X_1, X_4]$ e $[X_2, X_3]$ são exclusivas da cor 3. Além disso, exigimos que todos os grafos bipartidos acima sejam conexos. Finalmente, exigimos também que todos os X_i sejam não vazios e todos exceto no máximo um deles satisfaçam $|X_i| > 2\sqrt{\varepsilon}n$.

O esquema de cores de uma 4-partição é semelhante ao da EC_1 e da EC_3 , porém relaxamos substancialmente as restrições sobre as ordens dos conjuntos envolvidos. O lema a seguir mostra que sempre é possível encontrar uma 4-partição ou um emparelhamento monocromático conectado grande se a coloração não possuir uma componente conexa monocromática grande.

Afirmção 4.10. Se todas as componentes conexas monocromáticas de G_N têm menos do que $(\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon})n$ vértices, então, ou existe um emparelhamento monocromático conectado de tamanho $(\frac{1}{4} + \eta)n$, ou a 3-multicoloração de G_N possui uma 4-partição.

Prova. Suponha que toda componente conexa monocromática de G_N tenha ordem menor que $(\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon})n$. Sejam C_1 e C_2 componentes conexas monocromáticas de cores distintas, digamos C_i da cor i ($i = 1, 2$), tais que $V(C_1) \cap V(C_2)$ é não vazio e $|V(C_1) \cup V(C_2)|$ é máximo. Sejam $X_1 = V(C_1) \cap V(C_2)$, $X_2 = V(C_1) \setminus V(C_2)$, $X_3 = V(C_2) \setminus V(C_1)$ e $X_4 = V(G_N) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$ (veja a figura seguinte). Observe que, pela escolha de C_1 e C_2 , todas as arestas em $[X_1, X_4]$ e em $[X_2, X_3]$ são exclusivas da cor 3.

A idéia da prova é que, se X_4 for pequeno, então X_2 e X_3 serão grandes e conseguiremos achar o emparelhamento conectado entre eles usando o lema 4.5. E, se X_4 não for pequeno, conseguimos achar uma 4-partição aplicando algumas vezes o lema 4.5. Sejam mais precisos agora.

Se $|X_4| \leq 4\sqrt{\varepsilon}n$, então, como $|C_1| < (\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon})n$, temos que $|X_3| = |V(G_N)| - |C_1| - |X_4| \geq (\frac{1}{4} + \eta + \sqrt{\varepsilon})n$. Analogamente, $|X_2| \geq (\frac{1}{4} + \eta + \sqrt{\varepsilon})n$. Logo, o lema 4.5 nos dá um emparelhamento monocromático conectado na cor 3 do tamanho desejado no grafo bipartido $[X_2, X_3]$.

Então, podemos supor que $|X_4| > 4\sqrt{\varepsilon}n$. Novamente, aplicando o lema 4.5, dessa vez para o subgrafo induzido pelas arestas entre X_1 e X_4 , mesmo não tendo uma cota inferior para $|X_1|$, achamos um subgrafo conexo (monocromático de cor 3) $[X_1, X_4^*]$, onde $X_4^* \subset X_4$ e $|X_4| - |X_4^*| < \sqrt{\varepsilon}n$. Como $|V(C_1)|, |V(C_2)| \geq |V([X_1, X_4^*])|$, segue que $|X_2|, |X_3| \geq |X_4^*| \geq 3\sqrt{\varepsilon}n$. Assim, pelo lema 4.5, $[X_2, X_3]$ também é conexo na cor 3. Se existir uma aresta da cor 3 em $[X_1 \cup X_4^*, X_2 \cup X_3]$, temos uma componente de cor 3 que contém quase todos os vértices de G_N . Logo, tal aresta não pode existir e, novamente pela escolha de C_1 e C_2 , todas as arestas de $[X_1, X_3]$ e de $[X_2, X_4^*]$ são exclusivas da cor 2 e todas as arestas de $[X_1, X_2]$ e $[X_3, X_4^*]$ são exclusivas da cor 1. Aplicando o lema 4.5 para estes subgrafos bipartidos de cor 1 e cor 2 e removendo no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de X_2 e de X_3 (já que não temos cota inferior para $|X_1|$), o que encontramos é um subgrafo de G_N induzido pela união de conjuntos $X_1 = X_1^*$, X_2^* , X_3^* e X_4^* tais que cada grafo $[X_i^*, X_j^*]$ ($i \neq j$) é conexo e suas arestas são exclusivas da cor desejada. Ademais, $|X_i^*| > 2\sqrt{\varepsilon}n$ para $i = 2, 3, 4$, $X_1^* \neq \emptyset$ e $S = V(G_N) \setminus \bigcup_{i=1}^4 X_i^*$ satisfaz $|S| \leq 4\sqrt{\varepsilon}n$. ■

Já que se não existe uma componente conexa monocromática grande então encontramos um emparelhamento conexo monocromático do tamanho desejado em G_N (e encerramos a prova) ou encontramos uma 4-partição, podemos tratar dois casos: ou existe uma 4-partição de G_N , ou G_N possui uma componente conexa monocromática grande. Estes casos são tratados nas subseções seguintes.

4.2.1 Caso 1 da prova: existe uma 4-partição

Caso 1: existe uma 4-partição $S \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ de $V(G_N)$.

Tratamos alguns subcasos em função da ordem dos conjuntos X_i . O objetivo é encontrar um emparelhamento monocromático conectado ou provar que a coloração é do tipo EC_1 , EC_2 ou EC_3 . Para esses subcasos seja

$$S^* = V(G_n) \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4) = S \cup (V(G_n) \setminus V(G_N)).$$

É claro que $|S^*| \leq 5\sqrt{\varepsilon}n$.

Subcaso 1.1: $|X_i| \geq (\frac{1}{4} - 10\eta)n$ para todo $i = 1, \dots, 4$, ou seja, os conjuntos X_i possuem basicamente o mesmo tamanho.

Este caso é fácil. Adicionando os vértices de S^* a um dos conjuntos X_i , digamos X_1 , obtemos uma EC_1 com parâmetro $\alpha = 40\eta < \alpha_1/2$ e $A = X_1 \cup S^*$, $B = X_2$, $C = X_3$, $D = X_4$. É fácil verificar que as condições de densidade são satisfeitas, já que $\varepsilon < \alpha$.

Subcaso 1.2: existe i tal que $|X_i| < (\frac{1}{4} - 10\eta)n$ e, para todo i , $|X_i| \geq 10\eta n$.

Seja $m_i = |X_i|$ para todo i . Suponha sem perda da generalidade que m_4 é o maior e m_1 é o menor dentre $m_1, \dots, m_4$. Como

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \geq (1 - 5\sqrt{\varepsilon})n \geq (1 - \eta/2)n \quad \text{e} \quad m_1 < \left(\frac{1}{4} - 10\eta\right)n,$$

segue que

$$m_4 \geq \left(\frac{1}{4} + 3\eta\right)n.$$

Agora, se $m_3 \geq (\frac{1}{4} + 2\eta)n$ então podemos usar o lema 4.5 e achar um emparelhamento conexo monocromático entre X_3 e X_4 de tamanho pelo menos

$$(m_3 - \sqrt{\varepsilon}n) \geq \left(\frac{1}{4} + 2\eta - \sqrt{\varepsilon}\right)n > \left(\frac{1}{4} + \eta\right)n.$$

Podemos então supor que

$$m_2 \leq m_3 < \left(\frac{1}{4} + 2\eta\right)n.$$

Aplique agora o teorema 4.6 com $n_i = \left(\frac{1}{4} + 2\eta\right)n - m_i > 0$, para $i = 1, 2, 3$, e $s = \sqrt{\varepsilon}n$. Veja que

$$\begin{aligned}
 R(n_1K_2, n_2K_2, n_3K_2, K_{1,s}) &< s + n_1 + \sum_{i=1}^3 n_i = \\
 &= \sqrt{\varepsilon}n + 2 \left(\left(\frac{1}{4} + 2\eta \right) n - m_1 \right) \\
 &\quad + \left(\left(\frac{1}{4} + 2\eta \right) n - m_2 \right) + \left(\left(\frac{1}{4} + 2\eta \right) n - m_3 \right) \\
 &\leq \sqrt{\varepsilon}n + n - 2m_1 - m_2 - m_3 + 8\eta n \\
 &\leq m_4 + 6\sqrt{\varepsilon}n - m_1 + 8\eta n \\
 &< m_4.
 \end{aligned}$$

Logo, como $\Delta(\overline{G_N}) < s$, podemos encontrar dentro de X_4 um emparelhamento monocromático N_i de tamanho n_i na cor i para algum i . Se $|X_4 \setminus V(N_i)| \geq |X_i|$, ou seja, $m_4 - 2n_i \geq m_i$, aplicando o lema 4.5 para $[X_4 \setminus V(N_i), X_i]$, podemos achar um emparelhamento M_i de tamanho pelo menos $m_i - \sqrt{\varepsilon}n$. Claramente, o emparelhamento $M_i \cup N_i$ é monocromático. Para mostrar que ele é o emparelhamento que procuramos, basta ver que ele de fato é conectado, pois $[X_4, X_i]$ é conexo e todas as arestas de X_4 para X_i possuem a mesma cor, e que

$$|M_i \cup N_i| \geq \left(\left(\frac{1}{4} + 2\eta \right) n - m_i \right) + (m_i - \sqrt{\varepsilon}n) > \left(\frac{1}{4} + \eta \right) n.$$

Logo, resta o caso em que $m_4 - 2n_i < m_i$. Isto equivale a

$$m_4 + m_i < \left(\frac{1}{2} + 4\eta \right) n.$$

Temos então que, se $1 \leq i, j, k \leq 3$ são distintos, então

$$m_j + m_k \geq (1 - 5\sqrt{\varepsilon})n - (m_4 + m_i) \geq \left(\frac{1}{2} - 5\eta \right) n.$$

Segue que

$$m_j, m_k \geq \left(\frac{1}{4} - 7\eta \right) n.$$

Se $j = 1$ ou $k = 1$ então caímos no caso 1.1. Logo, podemos assumir que $i = 1$, $j = 2$ e $k = 3$. Se $m_4 \leq \left(\frac{1}{4} + 13\eta \right) n$, então $m_1 \geq \left(\frac{1}{4} - 18\eta \right) n$ e novamente podemos achar uma EC_1 , de modo análogo ao caso 1.1. Senão, então $m_4 > \left(\frac{1}{4} + 13\eta \right) n$.

Neste caso, temos uma EC_3 com $\mu = \mu_{4,1} := 40\eta$, $c_1 = 0,7$, $c_2 = 0,2$, e $\delta = \varepsilon^{1/3}$ e $A = X_4$, $B = X_2 \cup S^*$, $C = X_3$ e $D = X_1$. De fato, as condições sobre as ordens dos conjuntos A , B , C e D são triviais e as condições sobre as densidades também são fáceis

de verificar. Por exemplo, para obter a cota da densidade das arestas **vermelhas** em $[A, B]$, veja que todas as arestas em $[X_4, X_2]$ são exclusivas da cor 2, que representará a cor **vermelha** da EC_3 , e que há no máximo $|X_4|\sqrt{\varepsilon}n$ pares de vértices não adjacentes neste grafo. Assim, mesmo que não existam arestas da cor 2 em $[X_4, S^*]$, a densidade de arestas exclusivas da cor 2 em $[A, B]$ é pelo menos

$$\frac{|X_4|(|B| - |S^*| - \sqrt{\varepsilon}n)}{|X_4||B|} \geq \frac{|B| - 6\sqrt{\varepsilon}n}{|B|} = 1 - \frac{6\sqrt{\varepsilon}n}{|B|} \geq (1 - 30\sqrt{\varepsilon}),$$

já que $|B| \geq |X_2| \geq n/5$, pois η é pequeno. Finalmente, $(1 - 30\sqrt{\varepsilon}) > (1 - \varepsilon^{1/3})$, já que ε é pequeno. As cotas para as demais densidades seguem de maneira semelhante.

Subcaso 1.3: existe i tal que $|X_i| < 10\eta n$.

Lembre-se que também podemos assumir que toda componente conexa monocromática tem ordem menor que $(\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon})n$. Remova os vértices do conjunto X_i de menor cardinalidade, digamos X_1 . Claramente,

$$|X_2| + |X_3| + |X_4| > n - 5\sqrt{\varepsilon}n - 10\eta n \geq n - 11\eta n.$$

Assuma que $|X_2| \leq |X_3| \leq |X_4|$.

Note que se $|X_2| < (\frac{1}{4} - 11\eta)n$, então $V([X_3, X_4]) > 3n/4$, mas daí usando o lema 4.5 concluímos que $[X_3, X_4]$ possui uma componente monocromática maior que $(\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon})n$, contrariando a hipótese do caso 1. Além disso, se $|X_3| \geq (\frac{1}{4} + 2\eta)n$, como no subcaso anterior, conseguimos encontrar um emparelhamento monocromático conectado de tamanho pelo menos $(\frac{1}{4} + \eta)n$ em $[X_3, X_4]$. Assim,

$$\left(\frac{1}{4} - 11\eta\right)n \leq |X_2| \leq |X_3| \leq \left(\frac{1}{4} + 2\eta\right)n.$$

Como $|X_4| = |V(G_N)| - |X_1| - |X_2| - |X_3|$, segue também que

$$\left(\frac{1}{2} - 15\eta\right)n \leq |X_4| \leq \left(\frac{1}{2} + 22\eta\right)n.$$

Neste caso, conseguiremos ou encontrar um emparelhamento como o desejado, ou mostrar que a coloração é do tipo EC_2 . Sabemos que, por se tratar de uma 4-partição, todas as arestas de $[X_2, X_4]$ são exclusivas da cor 2, todas as de $[X_3, X_4]$ são exclusivas da cor 1 e todas as de $[X_2, X_3]$ são exclusivas da cor 3.

A estratégia agora é semelhante à do final do subcaso anterior. Se X_4 contém mais que $13\eta n^2$ arestas na cor 1, então ele contém um emparelhamento M_1 (não necessariamente conectado) de tamanho $13\eta n$ na cor 1. Agora, pelo lema 4.5, existe um emparelhamento monocromático conectado M_2 em $[X_4 \setminus V(M_1), X_3]$ de tamanho $(|X_3| - \sqrt{\varepsilon}n) \geq (\frac{1}{4} - 11\eta - \sqrt{\varepsilon})n \geq (\frac{1}{4} - 12\eta)n$. Daí, $M_1 \cup M_2$ é o emparelhamento que estamos procurando.

Assim, podemos assumir que X_4 possui no máximo $13\eta n^2$ arestas da cor 1. Do mesmo modo, podemos assumir que X_4 possui no máximo $13\eta n^2$ arestas da cor 2. Mas daí todas exceto no máximo $26\eta n^2$ arestas de X_4 são exclusivas da cor 3. O número de vértices fora de $X_2 \cup X_3 \cup X_4$ é no máximo $|X_1| + 5\sqrt{\varepsilon}n < 11\eta n$. Redistribuindo esses vértices para X_2 , X_3 e X_4 , e escolhendo $\alpha = 40\eta < \alpha_1/2$ (com folga) obtemos uma coloração EC_2 de G_n com parâmetro α . Aqui, X_4 faz o papel de $A \cup B$, X_3 faz o papel de C e X_2 faz o papel de D .

4.2.2 Caso 2 da prova: existe uma componente monocromática grande

Caso 2: G_N possui uma componente monocromática de ordem pelo menos

$$\left(\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon}\right)n.$$

Para tratar deste caso, definimos um novo tipo de coloração, a WEC_2 , obtida através de uma relaxação da coloração EC_2 . Esta coloração terá um papel semelhante ao das 4-partições do caso anterior. O lema 4.11 abaixo nos diz que achar uma coloração WEC_2 é suficiente para terminar a prova do lema de estabilidade.

Coloração 4 (WEC_2 (com parâmetro β)). *Uma coloração de G_N é do tipo WEC_2 se existem subconjuntos disjuntos A , B e C de $V(G_N)$, um conjunto $Q \subset A \cup B$ e duas cores i, j tais que*

- $|A|, |B|, |C| \geq (1 - \beta)\frac{n}{4}$ e $|Q| < (1 + \beta)\frac{n}{4}$ (onde $N > (1 - \sqrt{\varepsilon})n$);
- o grafo bipartido $G[A \cup B, C]$ é colorido apenas com as cores i e j ;
- o grafo bipartido $G[A, B]$ é colorido apenas com a cor i , exceto pelas arestas dentro de Q , que são coloridas com a cor i ou com a cor j .

Lema 4.11. *Dados $\beta, \eta, \varepsilon > 0$ tais que ε é suficientemente menor que η , existe α que é combinação linear de β, η e ε com coeficientes constantes, tal que o seguinte é verdadeiro. Se uma 3-multicoloração de um grafo G_N , onde $\Delta(\overline{G_N}) < \sqrt{\varepsilon}n$ é do tipo WEC_2 com parâmetro β , então G_N possui um emparelhamento monocromático conectado de tamanho $(\frac{1}{4} + \eta)n$ ou esta é uma coloração do tipo EC_2 com parâmetro α .*

A prova deste lema será postergada para a próxima subseção.

Começamos a análise do caso 2 definindo componentes conexas maximais C_1, C_2 e alguns emparelhamentos maximais nestas componentes. Sabemos que a maior componente de G_N tem ordem pelo menos

$$\left(\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon}\right)n > \left(\frac{3}{4} - 2\eta\right)n.$$

Seja C_1 a maior componente monocromática de G_N e seja $|C_1| = (\frac{3}{4} - 2\eta + \gamma)n$ (com $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{4} + 2\eta$). Digamos que C_1 é da cor **verde**. Seja M_1 o maior emparelhamento de C_1 . Note que M_1 é conectado por definição, então podemos assumir que $|M_1| = k_1 = (\frac{1}{4} + \eta - \rho_1)n$, onde $0 < \rho_1 \leq \frac{1}{4} + \eta$. Usando o lema 4.3, selecione uma extremidade forte de cada aresta de M_1 e considere o conjunto $V_1 = \{x_1, \dots, x_{k_1}\}$ dessas extremidades. Sejam $V_0 = V(M_1) \setminus V_1$, $V_2 = V(C_1) \setminus V(M_1)$ e $V_3 = V(G_N) \setminus V(C_1)$, como na figura abaixo. Seja H o subgrafo definido pela união do subgrafo tripartido quase completo induzido pelas classes V_i , para $i = 1, 2, 3$, com as arestas internas à classe V_2 . Note que, após removermos no máximo uma aresta da cor **verde** incidente a cada vértice de V_1 , todas as arestas restantes em H são da cor **vermelha** ou **azul**. Para manter a notação simples, continuamos a chamar de H o grafo obtido após a remoção dessas arestas. Temos agora que

$$|V_0| = |V_1| = k_1 = (\frac{1}{4} + \eta - \rho_1)n, \quad (4.1)$$

$$|V_2| = (\frac{1}{4} + \gamma - 4\eta + 2\rho_1)n, \quad (4.2)$$

$$(\frac{1}{4} + 2\eta - \gamma - \sqrt{\varepsilon})n \leq |V_3| \leq (\frac{1}{4} + 2\eta - \gamma)n. \quad (4.3)$$

Iremos agora definir uma componente monocromática C'_2 , mas o modo como C'_2 será definida dependerá da ordem dos conjuntos V_i . Se $|V_3| \leq 4\sqrt{\varepsilon}n$, então aplicamos o lema 4.8 ao subgrafo de H induzido por V_2 e selecionamos uma componente C'_2 monocromática que contém todos exceto no máximo $\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de V_2 . Caso contrário, quando $|V_3| > 4\sqrt{\varepsilon}n$, temos ainda duas possibilidades. Se

$$|V_1| = \frac{1}{4} + \eta - \rho_1 \geq 4\sqrt{\varepsilon} \quad \text{e} \quad |V_2| = (\frac{1}{4} + \gamma - 4\eta + 2\rho_1) \geq 4\sqrt{\varepsilon}, \quad (4.4)$$

então podemos aplicar o lema 4.9 para definir C'_2 , ou como a componente que cobre todos exceto no máximo $6\sqrt{\varepsilon}n$ vértices de H , ou como a maior das componentes que cobre dois dos V_i . Caso contrário defina C'_2 simplesmente como uma componente de máximo em H . Em todos os casos, podemos supor sem perda da generalidade, que C'_2 é da cor **azul**. Feito isso, estenda C'_2 a uma componente azul maximal C_2 do grafo inteiro.

Iremos nos referir de agora em diante a C_2 como a “componente azul”. O que provaremos a seguir, depende apenas da maximalidade de C_2 . Definiremos um grafo H^* no qual queremos achar um emparelhamento máximo **vermelho**. Iremos obter algumas propriedades estruturais de H^* e só então analisaremos alguns subcasos em função de como C_2 foi construída.

Comece tomando um emparelhamento máximo azul M_2 em $C_2 \cap H$. O emparelhamento M_2 é conectado por definição, então podemos assumir que

$$|M_2| = k_2 = \left(\frac{1}{4} + \eta - \rho_2\right)n, \quad (4.5)$$

para algum real positivo ρ_2 . Usamos mais uma vez o lema 4.3, agora para selecionar as extremidades fortes das arestas de M_2 . Denote o conjunto das extremidades fortes de M_2 por U e seus demais vértices ($V(M_2) \setminus U$) por T . Ademais, para $i = 1, 2, 3$, sejam $U_i = U \cap V_i$, $T_i = T \cap V_i$ e $W_i = V_i \setminus V(M_2)$. Finalmente, para $1 \leq i, j \leq 3$, seja M_{ij} o conjunto das arestas de M_2 que vão de V_i para V_j e denote $|M_{ij}|$ por m_{ij} .

É trivial que, como o grafo H não contém arestas internas a V_1 nem a V_3 ,

$$\sum_{i=1}^3 |T_i| = \sum_{i=1}^3 |U_i| = m_{12} + m_{13} + m_{23} + m_{22} = k_2. \quad (4.6)$$

O lema 4.3 e a maximalidade dos emparelhamentos **verde** e **azul**, M_1 e M_2 , implicam, com a convenção de que cada aresta azul excepcional de cada vértice $u \in U$ para W seja removida, que os seguintes subgrafos bipartidos de H , veja também a figura seguinte, possuem apenas arestas exclusivas da cor **vermelha**:

$$\begin{aligned} &[U_1, W_2], [U_1, W_3], [U_2, W_1], [U_2, W_3], [U_3, W_1], [U_3, W_2], \\ &[U_2, W_2], [W_1, W_2], [W_1, W_3], [W_2, W_3]. \end{aligned}$$

Seja H^* o subgrafo de H definido pela união dos subgrafos bipartidos acima. Note que todas as arestas de H^* são **vermelhas**. A seguir, estabeleceremos inequações a fim de encontrar o tamanho do maior emparelhamento **vermelho** de H^* , que será então chamado de “emparelhamento **vermelho**” por simplicidade. É fácil checar que o emparelhamento **vermelho** é conectado. De fato, como $|W_1| + |W_2| + |W_3| = (1 - \sqrt{\varepsilon})n - k_1 - 2k_2$,

então para algum i , $|W_i| > 4\sqrt{\varepsilon}n$ (dado que ε é pequeno). Então, o lema 4.5 nos garante até que todas as arestas de H^* pertencem a uma mesma componente. Note que H^* ainda pode ter, sendo generoso, $3\sqrt{\varepsilon}n$ vértices isolados. Mas esses vértices podem ser removidos de H^* sem prejudicar as cotas futuras. Por isso, assumimos que H^* é conexo. Como fizemos para as outras cores, consideramos uma componente maximal **vermelha** de G_N que contém H^* e denotamos tal componente por C_3 ou como a “componente vermelha”.

Cortes críticos de H^*

O objetivo agora é usar a fórmula de Tutte–Berge (lema 4.2) para encontrar um emparelhamento máximo em H^* . Contudo, note que

$$|V(H^*)| = n - k_1 - k_2 = \left(\frac{1}{2} - 2\eta + \rho_1 + \rho_2\right)n.$$

Assim, mesmo um emparelhamento perfeito em H^* pode não ser grande o bastante. Teríamos que cobrir mais $4\eta n - (\rho_1 + \rho_2)n$ vértices a fim de conseguir um emparelhamento **vermelho** de tamanho $(\frac{1}{4} + \eta)n$. A estratégia é tentar estender um emparelhamento máximo de H^* a um emparelhamento do tamanho desejado em G_N .

Para começar, precisamos estimar o máximo de $c_o(H^* \setminus S) - |S|$ da fórmula de Tutte–Berge. Na verdade, estimaremos o valor máximo de $\text{cr}(S) = c(H^* \setminus S) - |S|$, onde $c(H^* \setminus S)$ é o número de componente conexas de $H^* \setminus S$. Fazendo isto, não estamos perdendo muito, já que, como veremos, em $H^* \setminus S$ quase todas as componentes são pontos isolados e portanto são de ordem ímpar. Chamaremos um conjunto $S \subseteq V(H^*)$ de crítico se ele maximiza $\text{cr}(S)$. Abaixo, calculamos o valor de cr para uma coleção de cinco conjuntos específicos. Depois, mostraremos que, exceto pelo conjunto vazio, os conjuntos críticos possuem valor de cr próximo ao valor de cr desses conjuntos.

Afirmção 4.12. *Seja $S_1 = W_1 \cup W_2 \cup W_3$, $S_2 = W_2 \cup W_3$, $S_3 = W_1 \cup W_2$, $S_4 = U_2 \cup U_3 \cup W_2 \cup W_3$ e $S_5 = U_1 \cup U_2 \cup W_1 \cup W_2$. Então, as componentes de $V(H^*) \setminus S_i$, para $i = 1, 4, 5$, são respectivamente os vértices isolados de $U_1 \cup U_2 \cup U_3$, $U_1 \cup W_1$ e $U_3 \cup W_3$. As componentes de $V(H^*) \setminus S_2$ são os vértices isolados de U_1 , possivelmente um componente própria de $W_1 \cup U_2 \cup U_3$ além de no máximo $6\sqrt{\varepsilon}n$ vértices isolados*

neste mesmo conjunto. As componentes de $V(H^*) \setminus S_3$ são obtidas de maneira análoga às de $V(H^*) \setminus S_2$.

Ademais,

$$\begin{aligned} \text{cr}(S_1) &= (|U_1| + |U_2| + |U_3|) - (|W_1| + |W_2| + |W_3|) \leq (5\eta - (\rho_1 + 3\rho_2))n \\ \text{cr}(S_2) &\leq 6\sqrt{\varepsilon}n + 1 + |U_1| - (|W_2| + |W_3|) \leq (5\eta - 2(\rho_1 + \rho_2))n - |T_1| \\ \text{cr}(S_3) &\leq 6\sqrt{\varepsilon}n + 1 + |U_3| - (|W_1| + |W_2|) \leq (5\eta - (\gamma + \rho_1 + 2\rho_2))n - |T_3| \\ \text{cr}(S_4) &= (|U_1| + |W_1|) - (|U_2| + |U_3| + |W_2| + |W_3|) \leq (5\eta - (3\rho_1 + \rho_2))n - 2|T_1| \\ \text{cr}(S_5) &= (|U_3| + |W_3|) - (|U_1| + |U_2| + |W_1| + |W_2|) \leq (5\eta - (2\gamma + \rho_1 + 2\rho_2))n - 2|T_3| \end{aligned}$$

Em particular, $\text{cr}(S_i) \leq 5\eta n$ para todo i .

Prova. A afirmação sobre quais são as componentes de $V(H^*) \setminus S_i$ é imediata da definição de H^* . A cota superior para $\text{cr}(S_1)$ vem do fato de que $|U_1| + |U_2| + |U_3| = k_2$ e $W_1 \cup W_2 \cup W_3 = V(G_N) \setminus (V_0 \cup V(M_2))$. Assim, $|W_1| + |W_2| + |W_3| = N - k_1 - 2k_2$. Observando isso, basta substituir os valores de k_1 e k_2 pelos valores indicados nas equações (4.1) e (4.5).

A cota para $\text{cr}(S_2)$ segue de que

$$|U_1| + |T_1| - (|W_2| + |W_3|) = |V_0 \cup V_1| + |V(M_2)| - |V(G_N)| = 2(k_1 + k_2) - N.$$

E, como antes, agora basta substituir os valores de k_1 e k_2 . A cota para $\text{cr}(S_3)$ é obtida de maneira análoga.

Como $|U_1| + |W_1| = k_1 - |T_1|$ e $|U_2| + |U_3| + |W_2| + |W_3| = |U| + |W| - (|U_1| + |W_1|)$, conseguimos a cota para $\text{cr}(S_4)$ da maneira a seguir.

$$\begin{aligned} (|U_3| + |W_3|) - (|U_1| + |U_2| + |W_1| + |W_2|) &= 2(k_1 - |T_1|) - (|U| + |W|) \\ &= 2(k_1 - |T_1|) - (N - k_1 - k_2) \\ &= 3k_1 + k_2 - N - 2|T_1|. \end{aligned}$$

Novamente, basta substituir os valores de k_1 e k_2 . A cota para $\text{cr}(S_5)$ segue de maneira análoga. ■

Afirmção 4.13. Para todo $S \subseteq V(H^*)$, vale que

$$\text{cr}(S) \leq \max_{0 \leq i \leq 5} \{\text{cr}(S_i)\} + 24\sqrt{\varepsilon}n,$$

onde $S_0 = \emptyset$ (e então $\text{cr}(S_0) \leq 1$).

Prova. Seja S um subconjunto qualquer de $V(H^*)$. Particione S em seis partes: $S \cap U_i$, $S \cap W_i$, para $i = 1, 2, 3$. Seja $S^* = S \cup M$, onde M é a união dos conjuntos U_i 's e W_i 's que satisfazem $|U_i \setminus S| < 2\sqrt{\varepsilon}n$ ou $|W_i \setminus S| < 2\sqrt{\varepsilon}n$. Então, temos que

$$|S^*| \leq |S| + 12\sqrt{\varepsilon}n. \quad (4.7)$$

Afirmção 4.14. *Vale que $\text{cr}(S^*) < \max_{0 \leq i \leq 5} \{\text{cr}(S_i)\}$.*

Provemos primeiro a afirmação. Chame o conjunto U_i (resp., W_i) de cheio, se $S^* \cap U_i = U_i$ (resp., $S^* \cap W_i = W_i$). Observe que, se $i \neq j$ ou $i = j = 2$ e nem U_i nem W_j é cheio, então $|U_i \setminus S^*| \geq 2\sqrt{\varepsilon}n$ e $|W_j \setminus S^*| \geq 2\sqrt{\varepsilon}n$ (de acordo com a definição de S^* a partir de S). Então, pelo lema 4.5, o grafo bipartido $[U_i \setminus S^*, W_j \setminus S^*]$ é conexo. O mesmo argumento mostra que $[W_i \setminus S^*, W_j \setminus S^*]$ é conexo no caso em que $i \neq j$ e ambos W_i e W_j não são cheios. Este argumento mostra que $H^* \setminus S^*$ possui no máximo uma componente não trivial, ou seja, todas as demais componentes são pontos isolados. É óbvio que remover vértices de S^* pertencentes a componentes não cheias não reduz o número de componentes de $H^* \setminus S^*$. Assim, podemos assumir que os conjuntos W_i e U_i ou são cheios ou são vazios (i.e., $U_i \cap S^*$ e $W_i \cap S^*$ são vazios). Isto se reduz a checar o valor de $\text{cr}(S)$ para o grafo ponderado formado por seis vértices, o esqueleto de H^* , definido sobre o conjunto de vértices u_i, w_i para $1 \leq i \leq 3$ e arestas $\{u_i, w_j\}$, $\{w_i, w_j\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$ e $\{u_2, w_2\}$, com pesos $|U_i|$ nos vértices u_i e $|W_i|$ nos vértices w_i . Um momento de reflexão mostra que os valores não negativos de $\text{cr}(S)$ são dados apenas pelos cinco conjuntos S_i da afirmação 4.12 e por S_0 . Isto completa a prova da afirmação.

Observe que, para $X \subseteq X^*$,

$$c(G \setminus X) - |X| \leq c(G \setminus X^*) - |X^*| + 2(|X^*| - |X|).$$

Usando esta observação, a afirmação 4.14 e a equação (4.7), temos que

$$\begin{aligned} \text{cr}(S) &= c(H^* \setminus S) - |S| \leq c(H^* \setminus S^*) - |S^*| + 2(|S^*| - |S|) = \\ &= \text{cr}(S^*) + 2(|S^*| - |S|) \leq \max_{0 \leq i \leq 5} \{\text{cr}(S_i)\} + 2 \times 12\sqrt{\varepsilon}n, \end{aligned}$$

para qualquer $S \subseteq V(H^*)$, finalizando a prova do lema. ■

Do lema 4.2 e da afirmação 4.13, segue o seguinte corolário.

Corolário 4.15. *Vale que $2\nu(H^*) \geq |V(H^*)| - \max_{0 \leq i \leq 5} \{\text{cr}(S_i)\} - 24\sqrt{\varepsilon}n$.*

Agora, precisamos saber qual $\text{cr}(S_i)$ é máximo, mas é claro que isto depende de vários fatores. Um caso simples é se $\rho_1 + \rho_2 \geq 5\eta$. Neste caso, $\text{cr}(S_i)$ é negativo para todo $1 \leq i \leq 5$ e portanto $\text{cr}(S_0)$ é máximo. Daí, o corolário anterior assegura que H^* possui um emparelhamento **vermelho** cobrindo pelo menos

$$|V(H^*)| - 1 - 24\sqrt{\varepsilon}n = \left(\frac{1}{2} - 2\eta + \rho_1 + \rho_2 - 24\sqrt{\varepsilon}\right)n - 1 > \left(\frac{1}{2} + 2\eta\right)n$$

vértices. Ou seja, achamos um emparelhamento **vermelho** de tamanho pelo menos $(\frac{1}{4} + \eta)n$. Então, podemos assumir que

$$\rho_1 + \rho_2 < 5\eta. \tag{4.8}$$

Agora, queremos encontrar um emparelhamento em $[V(H^*), V(G_N) \setminus V(H^*)]$ que estenda o emparelhamento **vermelho** a um emparelhamento do tamanho desejado. Uma maneira de tentar fazer isso é usando o fato a seguir.

Afirmção 4.16. *Suponha que existe Z , subconjunto de U_i ou subconjunto de W_i , tal que $|Z| = \Delta$ e que existe um conjunto de Δ arestas vermelhas independentes em $[Z, V(G_N) \setminus V(H^*)]$. Se todo $\text{cr}(S_i)$, $1 \leq i \leq 5$, é negativo ou não aumenta no grafo $H^* \setminus Z$ então podemos achar o emparelhamento do tamanho desejado. Veja, por exemplo, que se $|T_1| \geq 2\Delta$, então os valores de $\text{cr}(S_i)$, para $i = 2, 4$, em relação ao grafo $H^* \setminus Z$ são negativos. E, se $\gamma n \geq 2\Delta$ ou $|T_3| \geq 2\Delta$, então os valores de $\text{cr}(S_i)$, para $i = 3, 5$, em relação ao grafo $H^* \setminus Z$ são negativos.*

Prova. Como originalmente $\text{cr}(S_i) \leq 5\eta n$, para todo i , e o valor de $\text{cr}(S_i)$ não aumenta quando o grafo $H^* \setminus Z$ é tomado como universo, então, pela formula de Tutte–Berge,

$$2\nu(H^* \setminus Z) \geq |V(H^* \setminus Z)| - 5\eta n - 24\sqrt{\varepsilon}n \geq \left(\frac{1}{2} - 2\eta - 10\eta\right)n - 5\eta n - 24\sqrt{\varepsilon}n > \left(\frac{1}{2} - 18\eta\right)n.$$

Adicionando as $\Delta = 10\eta n$ arestas de $[Z, V(G_N) \setminus V(H^*)]$, ficamos então com um emparelhamento com $(\frac{1}{2} + 2\eta)n$ vértices. As demais afirmações são triviais a partir da inspeção das fórmulas da afirmação 4.12. ■

Feito tudo isto, podemos começar a analisar os subcasos do caso 2. Aqui, precisamos lembrar como C_2 foi construída. Veja que, pela equação (4.8), em particular, podemos assumir que $\rho_1 < 5\eta$. Assim, as cotas em (4.4) são válidas. Logo, precisamos considerar apenas os casos em que $|V_3| < 4\sqrt{\varepsilon}n$ ou C_2 foi obtida através uma aplicação do lema 4.9 ao grafo tripartido das arestas **vermelhas** de $V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Sendo assim, a análise de casos feita a seguir cobre todas as possíveis situações.

Subcasos do Caso 2

Subcaso 2.1: $|U_3| + |W_3| \leq 2\Delta$ ou $|V_3| \leq 9\Delta$.

Se $|T_1| \leq \Delta$, então usando (4.8) temos

$$\begin{aligned} |T_2 \cup T_3| &\geq k_2 - |T_1| \geq \left(\frac{1}{4} + \eta - \rho_2\right)n - \Delta \geq \left(\frac{1}{4} - 14\eta\right)n; \\ |U_1 \cup W_1| &= |V_1| - |T_1| \geq \left(\frac{1}{4} + \eta - \rho_1\right)n - \Delta \geq \left(\frac{1}{4} - 14\eta\right)n; \\ |U_2 \cup W_2| &= |V_2| - |T_2| = (N - 2k_1 - |V_3|) - |T_2| \geq \\ &\geq N - (2k_1 + |T_3| + 2\Delta + |T_2|) \geq \\ &\geq N - (2k_1 + k_2 + 2\Delta) \geq \left(\frac{1}{4} - 24\eta\right)n; \\ |U_1 \cup U_2| &\leq k_2 = \left(\frac{1}{4} + \eta - \rho_2\right)n. \end{aligned}$$

Logo, achamos uma WEC_2 com $C = T_2 \cup T_3$, $A = U_1 \cup W_1$, $B = U_2 \cup W_2$ e $Q = U_1 \cup U_2$, e cores **vermelha** e **azul** (com $\beta = 24\eta$). Veja que, para obter a cota inferior para $|U_2 \cup W_2|$, usamos a condição $|U_3| + |W_3| \leq 2\Delta$ para concluir que $|V_3| \leq |T_3| + 2\Delta$; uma cota semelhante, mas com erro um pouco maior, poderia ser obtida diretamente no caso em que sabemos apenas que $|V_3| \leq 9\Delta$.

Agora, $|T_1| > \Delta$. Veja também que, $|T_3| > 2\Delta$ ou $\gamma n > 2\Delta$. De fato, se $|T_3| \leq 2\Delta$, então da equação (4.3) segue que

$$\left(\frac{1}{4} + 2\eta - \gamma - \sqrt{\varepsilon}\right)n \leq |V_3| = |T_3| + |U_3| + |W_3| \leq 9\Delta,$$

que vale tanto no caso em que $|U_3| + |W_3| \leq 2\Delta$, como no caso em que temos a cota direta $|V_3| \leq 9\Delta$. Isto implica $\gamma n \geq \left(\frac{1}{4} + 2\eta\right)n - 9\Delta - \sqrt{\varepsilon}n > 2\Delta$ (dado que ε e η são pequenos o suficiente). Assim, a afirmação 4.16 nos garante que $\text{cr}(S_i)$, para $i = 2, 3, 4, 5$, continua negativo mesmo após a remoção de Δ vértices de um dos conjuntos U_i ou W_i . Teremos então que nos preocupar apenas com $\text{cr}(S_1)$.

Note que, se removermos um conjunto de Δ vértices de U_2 , então o valor de $\text{cr}(S_1)$ diminui. Assim, a afirmação 4.16 nos garante que, se existem Δ arestas **vermelhas** independentes em $[U_2, V(G) \setminus V(H^*)]$, conseguimos encontrar um emparelhamento **vermelho** conectado cobrindo pelo menos $(\frac{1}{2} + 2\eta)n$ vértices e a prova acaba aqui. Logo, podemos assumir que não conseguimos encontrar as Δ arestas independentes. Em particular, as arestas **vermelhas** de $[U_2, T_1]$ e $[U_2, T_2]$ podem ser cobertas por no máximo Δ vértices, de modo que se removermos tais vértices eliminamos todas as arestas **vermelhas** desses grafos. Neste caso, dizemos que os grafos bipartidos $[U_2, T_1]$ e $[U_2, T_2]$ são *quase exclusivos* da cor **azul**. Do mesmo modo, $[U_1, T_2]$ é quase exclusivo **azul** e $[U_2, V_0]$, $[U_1, V_0]$ são quase exclusivos das cores **azul** ou **verde**.

A seguir, olhamos para $I = [U_1, U_2]$. Assuma primeiro que I possui um conjunto F de $\Delta/2$ arestas independentes **vermelhas**. Faremos algo um pouco diferente aqui. Se existem Δ arestas **vermelhas** independentes em $[W_1, V(G) \setminus V(H^*)]$, então removemos, além dos Δ vértices de W_1 , os vértices de $V(F) \subseteq U_1 \cup U_2$. Isso faz com que $\text{cr}(S_1)$ não aumente e ainda assim os valores de $\text{cr}(S_i)$, para $i \neq 1$, continuam negativos. Dessa forma conseguimos encontrar o emparelhamento desejado. Podemos fazer o mesmo, se existem Δ arestas **vermelhas** independentes em $[W_2, V(G) \setminus V(H^*)]$. Podemos assumir então que, em particular, os grafos $[W_1, T_2]$, $[W_1, T_3]$, $[W_2, T_1]$, $[W_2, T_2]$, $[W_2, T_3]$ são quase exclusivos da cor **azul**, e que $[W_1, V_0]$, $[W_2, V_0]$ são quase exclusivos das cores **azul** ou **verde**. Com isso, concluímos também que as arestas **azuis** de $[W_1, V_0] \cup [W_2, V_0]$ pertencem à componente C_2 , ou seja, estão na mesma componente de M_2 . Assim, $(\frac{1}{4} + \eta) - k_2 = \rho_2 n < \Delta$ arestas independentes **azuis** em $[W_1, V_0] \cup [W_2, V_0]$ seriam suficiente para estender M_2 a um emparelhamento **azul** conectado de tamanho $(\frac{1}{4} + \eta)n$, e terminar a prova. Então $[W_1, V_0]$, $[W_2, V_0]$ são quase exclusivos da cor **verde**. Também $[U_1, V_0]$, $[U_2, V_0]$ são quase exclusivos da cor **verde**, caso contrário M_2 poderia ser estendido através das arestas **azuis** de $[W_2, T_1]$, $[W_1, T_2]$, $[W_2, T_2]$, $[W_1, T_3]$, $[W_2, T_3]$. É claro que removendo no máximo 4Δ vértices de cada conjunto envolvido (o

que eventualmente deixará alguns desses conjuntos vazios), conseguimos obter grafos bipartidos com arestas exclusivas de uma ou duas cores apropriadas, ao invés de apenas quase exclusivos. Então, conseguimos uma WEC_2 com $A = U_1 \cup U_2$, $B = W_1 \cup W_2$, $C = V_0$, $Q = U_1 \cup W_1$, nas cores **vermelha** e **verde**, e estamos satisfeitos.

Finalmente, se I for quase exclusivo da cor **azul**, o papel das cores **azul** e **vermelha** poderia ser invertido. Mais precisamente, note que removendo no máximo 4Δ vértices de cada U_i , T_i os grafos bipartidos quase exclusivos da cor **azul**,

$$[T_1, U_2], [T_2, U_1], [T_3, U_1], [T_3, U_2], [T_2, U_2],$$

se tornariam exclusivos da cor **azul**. Denotando por H^{**} a união destes grafos, notamos que

$$|V(H^{**})| \geq 2k_2 - 24\Delta \geq \left(\frac{1}{2} - 252\eta\right)n.$$

Os conjuntos críticos de H^{**} poderiam ser analisados da mesma maneira que os de H^* a fim de formalizarmos precisamente o argumento do parágrafo a seguir. Mas esta análise será omitida.

Escolhendo Δ^* grande, digamos $\Delta^* = 600\eta$, ou o emparelhamento **azul** de H^{**} pode ser aumentado em Δ^* para um emparelhamento **azul** conectado de tamanho $(\frac{1}{4} + \eta)n$, ou $[T_2, W_1], [T_2, W_2], [T_1, W_2], [T_3, W_1], [T_3, W_2]$ são quase exclusivos da cor **vermelha** e isto implica que $[V_0, T_1], [V_0, T_2], [V_0, T_3]$ são quase exclusivos da cor **verde**. Neste caso encontramos uma coloração WEC_2 com $A = U_1 \cup U_2$, $B = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, $C = V_0$, $Q = U_1 \cup T_1$, e cores **azul** e **vermelha**.

Para os próximos subcasos, defina $F = V_0 \setminus V(C_2)$ e $P = V_0 \setminus V(C_3)$.

Subcaso 2.2: C_2 cobre todos exceto no máximo 4Δ vértices de H .

Podemos assumir que $|U_3| + |W_3| > 2\Delta$ e $|V_3| > 9\Delta$, caso contrário o subcaso anterior se aplica. Como $9\Delta < |V_3| \leq (\frac{1}{4} + 2\eta - \gamma)n$, temos que $\gamma n < (\frac{1}{4} + 2\eta)n - 9\Delta$. Como C_1 é uma componente de ordem máxima, $n - |F| - 4\Delta < |C_2| \leq |C_1| = (\frac{3}{4} - \eta - 6\sqrt{\varepsilon} + \gamma)n$ e temos

$$|F| > \left(\frac{1}{4} + 2\eta - \gamma\right)n - 4\Delta > 2\Delta \quad (4.9)$$

(dado que η, ε são pequenos o suficiente). Note que (4.9) implica $|T_3| \leq \Delta + \sqrt{\varepsilon}n$ caso contrário, como F pertence a C_3 (componente **vermelha**) devido às arestas de $[F, U_3 \cup W_3]$, usando o lema 4.5 para as arestas **vermelhas** de $[F, T_3]$ conseguimos aumentar o emparelhamento **vermelho** em Δ . Disto concluímos que

$$|U_3| + |W_3| > 8\Delta - \sqrt{\varepsilon}n. \quad (4.10)$$

Se $|T_1| \leq \Delta$, então encontramos uma WEC_2 com

$$A = U_1 \cup W_1, B = U_2 \cup U_3 \cup W_2 \cup W_3, C = T_2, Q = U_1 \cup U_2 \cup U_3$$

e terminamos a prova usando o lema 4.11.

Portanto, podemos assumir que $|T_1| > \Delta$. Observe que (4.10) e a escolha de C_2 implicam que, ou $I := V(C_2) \cap U_3$, ou $J := V(C_2) \cap W_3$ tem ordem pelo menos $2\Delta - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$. Lembre-se que as arestas de $[F, I]$, $[F, J]$ devem ser **vermelhas**. Suponha primeiro que $|I| \geq 2\Delta - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$. Então temos Δ arestas **vermelhas** independentes em $[F, I]$, que podemos usar para estender o emparelhamento **vermelho** a um do tamanho desejado usando a afirmação 4.16, já que apenas $\text{cr}(S_4)$ poderia aumentar após a remoção das extremidades dessas arestas, mas $\text{cr}(S_4)$ é negativo ($|T_1| > \Delta$). Logo, podemos assumir $|I| < 2\Delta - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$ e $|J| \geq 2\Delta - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$.

Agora, uma versão mais simples do argumento usado no subcaso 2.1 será aplicado. Podemos estender o emparelhamento **vermelho** adicionando $\frac{\Delta}{2}$ arestas independentes de $[U_1, V(G) \setminus V(H^*)]$ e simultaneamente $\frac{\Delta}{2}$ arestas independentes de $[F, J]$. A remoção das extremidades dessas arestas não afeta o valor de nenhum dos $\text{cr}(S_i)$, pois estamos decrementando o mesmo valor de $|U_1|$ e $|W_3|$ ao mesmo tempo. Assim, podemos alcançar o tamanho de emparelhamento desejado. Concluimos que $[U_1, T_2]$ é quase exclusivo da cor **azul** e $[U_1, V_0]$, $[U_1, T_1]$ são quase exclusivos das cores **azul** e **verde**. O mesmo argumento pode ser aplicado para mostrar $[U_2, T_1]$, $[U_2, T_2]$ são quase exclusivos da cor **azul** e $[U_2, V_0]$ é quase exclusivo das cores **azul** e **verde**. Contudo, aqui temos que tomar um pouco mais de cuidado já que decrementar simultaneamente U_2 e W_3 pode aumentar os valores de $\text{cr}(S_2)$ e $\text{cr}(S_4)$, mas não há problema pois $|T_1| > \Delta$. Se $|P| \geq 2\Delta$, então, pelo lema 4.5, o subgrafo **azul** $[P, J]$ tem um emparelhamento de tamanho $\Delta/2$ que estende M_2 ao tamanho que precisamos. Portanto, podemos assumir que $|P| < 2\Delta$. Se os subgrafos **vermelhos** $[T_1, V_0 \setminus P]$ e $[T_2, V_0 \setminus P]$ possuem Δ arestas independentes, então podemos estender o emparelhamento **vermelho** a um emparelhamento **vermelho** conectado do tamanho adequado. Caso contrário, estes grafos são quase exclusivos das cores **azul** e **verde** e então temos uma WEC₂ com

$$A = T_1 \cup T_2, B = U_1 \cup U_2, C = V_0, Q = T_1 \cup U_1,$$

o que finaliza este subcaso.

Subcaso 2.3: C_2 cobre $V_2 \cup V_3$ (e parte de V_1).

Seja $Y = V_1 \setminus V(C_2)$. Claramente, $Y \subseteq W_1$, pois C_2 contém $U_1 \cup T_1$ por definição. Seja C'_3 uma extensão maximal da componente **vermelha** que cobre $V_2 \cup V_3$ e $X = V_1 \setminus V(C'_3)$. Também é claro que $X \subseteq T_1$. Podemos assumir que $|Y| > 4\Delta$, caso contrário teríamos aplicado o caso 2.2, e também que $|X| > 4\Delta$, já que definimos C_2 como a maior das duas componentes cobrindo parte de V_1 . Observe que, se $v \in V_0 \setminus (V(C_2) \cup V(C'_3))$, então nenhuma das cores poderia ser atribuída a uma aresta vt com $t \in V_3$. Assim, $|V_3| \leq \sqrt{\varepsilon}n$ e isto já foi tratado no caso 2.1. Logo, $C_2 \cup C'_3$ cobre todos os vértices de V_0 .

Suponha primeiro que $|F| \geq 2\Delta$. Aqui, um argumento idêntico do caso anterior funciona. Como antes, $|T_3| \leq \Delta + \sqrt{\varepsilon}n$, caso contrário, as arestas de $[F, T_3]$ seriam

vermelhas e, pelo lema 4.5, poderíamos aumentar o emparelhamento **vermelho** em Δ . Isto implica que $|U_3| + |W_3| > 5\Delta$. Se $|U_3| \geq 2\Delta$, então podemos aumentar o emparelhamento **vermelho** já que todas as arestas de $[U_3, F]$ são **vermelhas** e que apenas $\text{cr}(S_4)$ poderia aumentar ao removermos vértices de V_3 , mas $\text{cr}(S_4)$ é negativo (pois $|T_1| > \Delta$). Se $|W_3| \geq \Delta$, então podemos aumentar o emparelhamento **vermelho** adicionando a ele $\Delta/2$ arestas de $[U_1, V(G) \setminus V(H^*)]$ e simultaneamente $\Delta/2$ arestas de $[F, W_3]$. Isto não afeta nenhum dos $\text{cr}(S_i)$ (pois estamos decrementando ao mesmo tempo o valor $|U_1|$ e $|W_3|$). Concluimos então que $[U_1, T_2]$ é quase exclusivo da cor **azul**, e $[U_1, V_0]$, $[U_1, T_1]$ são quase exclusivos das cores **azul** e **verde**. O mesmo argumento pode ser aplicado para provar $[U_2, T_1]$, $[U_2, T_2]$ são quase exclusivos em **azul** e $[U_2, V_0]$ é quase exclusivo em **azul** e **verde**. Se $|P| \geq 2\Delta$ então pelo lema 4.5 o subgrafo **azul** $[P, W_3]$ possui um emparelhamento de tamanho $\Delta/2$ que podemos usar para estender M_2 a um emparelhamento como desejamos. Logo, podemos assumir que $|P| < 2\Delta$. Se os subgrafos **vermelhos** $[T_1, V_0 \setminus P]$ e $[T_2, V_0 \setminus P]$ possuem Δ arestas independentes, então podemos estender o emparelhamento **vermelho** a um emparelhamento **vermelho**. Caso contrário, estes grafos são quase exclusivos em **azul** e **verde** e temos uma WEC₂ com

$$A = T_1 \cup T_2, B = U_1 \cup U_2, C = V_0, Q = T_1 \cup U_1.$$

Resta o caso em que $|F| < 2\Delta$. Isso nos dá que γ é grande. De fato, usando que $|F| + |Y| = N - |C_2| \geq N - |C_1| = |V_3|$, temos que

$$2\Delta + \left(\frac{1}{4} + \eta - \rho_1\right)n - 4\Delta \geq |F| + |V_1| - |X| \geq |F| + |Y| \geq |V_3| \quad (4.11)$$

$$\geq \left(\frac{1}{4} + 2\eta - \gamma - \sqrt{\varepsilon}\right)n, \quad (4.12)$$

ou seja, $\gamma n \geq 2\Delta + (\eta + \rho_1 - \sqrt{\varepsilon})n > 2\Delta$. Também sabemos que $|T_1| \geq |X| \geq 4\Delta$, então podemos usar a afirmação 4.16 novamente e seguir o mesmo argumento do subcaso 2.1. Ou seja, os grafos $[U_i, T_j]$, para $1 \leq i \neq j \leq 3$ e $i = j = 2$, são quase exclusivos da cor **azul**. Então tomamos $Z_{ij} = [U_i, U_j]$, para $1 \leq i < j \leq 3$. A hipótese de que Z_{ij} possui Δ arestas independentes **vermelhas** implica que $[W_i, T_j]$ são quase exclusivos da cor **azul** para $1 \leq i < j \leq 3$ e $i = j = 2$. Contudo, as arestas de $[Y, T_2 \cup T_3]$ são **vermelhas** e, como $|Y| \geq 4\Delta$, isto é possível somente se $|T_2 \cup T_3| \leq 2\Delta$. Isto implica que $|T_1| = k_2 - |T_2 \cup T_3| \geq \left(\frac{1}{4} + \eta - \rho_2\right)n - 2\Delta$ e então $|U_1 \cup W_1| = k_1 - |T_1| \leq 2\Delta + (\rho_2 - \rho_1)n$. Contudo, pela definição de Δ e pela equação (4.8),

$$40\eta n = 4\Delta \leq |Y| \leq |U_1 \cup W_1| \leq 2\Delta + (\rho_2 - \rho_1)n \leq 20\eta n + \rho_2 \leq 25\eta n,$$

o que é uma contradição.

Então Z_{ij} é quase exclusivo da cor **azul** (para todos os índices válidos) e podemos usar o mesmo argumento do último parágrafo do caso 2.1.

Subcaso 2.4: C_2 cobre $V_1 \cup V_2$ (e parte de V_3).

Seja $Y = V_3 \setminus V(C_2)$, claramente $Y \subseteq W_3$. Defina C'_3 de modo análogo ao caso anterior e seja $X = V_3 \setminus V(C'_3)$, claramente $X \subseteq T_3$ e $|X|, |Y| \geq 4\Delta$, caso contrário estamos no caso 2.2. Segue também que $X = T_3$ e $Y = W_3$. É fácil ver que os conjuntos $(C_2 \setminus C'_3) \cap V_0$, $(C'_3 \setminus C_2) \cap V_0$ são vazios. Agora, $X_1 = V_0 \setminus V(C_2)$, $X_2 = V(C_1) \cap V(C_2)$, $X_3 = X$ e $X_4 = Y$ define uma 4-partição de $V(G_N)$. Ademais, é fácil ver que $|X_i| > 10\eta n$ para todo $1 \leq i \leq 4$. De fato, $|X_1| \leq 10\eta n$ contrariaria a escolha de C_1 , $|X_2| > 10\eta n$ é trivial e $|X_3|, |X_4| \geq 4\Delta > 10\eta n$. Então ou o subcaso 1.1, ou o subcaso 1.2 pode ser aplicado. Isto encerra o caso 2.4.

Subcaso 2.5: A observação final para o caso 2 é que o subcaso em que C_2 cobre $V_1 \cup V_3$ (e parte de V_2), na verdade, não acontece. De fato, neste caso nenhuma cor poderia ser atribuída para as arestas de $[(V_2 \cap C_2) \setminus C'_3, (V_2 \cap C'_3) \setminus C_2]$ (aqui C'_3 também é definida de modo análogo aos casos anteriores).

Isto termina a prova do lema 4.1. ■

4.2.3 Prova do lema 4.11: reduzindo colorações extremas fracas

Prova. Sejam $\eta, \varepsilon > 0$ tais que ε é pequeno em relação a η e seja G_N um grafo como no enunciado. Sejam $A, B, C, Q \subset V(G_N)$, como na definição da WEC_2 e seja $D = V(G_N) \setminus (A \cup B \cup C)$. Usaremos as cores **vermelha** e **azul** para as cores i, j na definição de WEC_2 .

Por conveniência, denote $n/4$ por m . Removendo vértices de A, B, C , podemos assumir sem perda da generalidade que $|A|, |B|, |C| = (1 - \beta)m$ e que $|D| \leq (1 + 3\beta)m$. Iremos manter um parâmetro p de modo que $(1 - p)m$ seja uma cota inferior para a ordem dos conjuntos A, B, C, D . Apesar de que em cada passo apenas as cotas inferiores de um ou dois dos conjuntos precisariam ser alteradas, nós usamos um limite inferior comum para simplificar os cálculos. Inicialmente $p = \beta$. Como $|Q| < (1 + \beta)m$, podemos remover no máximo $2\beta m$ vértices de $[A, B]$ para assegurar que o grafo bipartido restante (que continuaremos denotando por $[A, B]$) seja conexo na cor **vermelha**. (Note que não estamos proibindo que este grafo contenha arestas **azuis**). Agora, qualquer emparelhamento **vermelho** em $[A, B]$ é conectado. Chamamos de *emparelhamento guloso* um emparelhamento onde as arestas são definidas uma a uma e a cada passo simplesmente selecionamos uma nova aresta disjunta (em vértices) das que foram selecionadas até o passo anterior. Seja b o tamanho do maior emparelhamento **azul** em $[A \cap Q, B \cap Q]$. Teremos dois casos.

Caso 1: $b \leq cm$, para certa constante c que escolheremos adiante.

Removendo no máximo cm vértices de A e de B e fazendo $p = \beta + 2\beta + c = 3\beta + c$, todas as arestas restantes em $[A, B]$ são **vermelhas**. Sejam E_1, E_2 emparelhamentos

vermelhos de tamanho $2dm$ em $[C, A]$ e em $[C, B]$ respectivamente (d será determinado logo abaixo). Selecione $F_1 \subset E_1$ e $F_2 \subset E_2$ tais que $|F_1| = |F_2| = dm$ e $F_1 \cup F_2$ é um emparelhamento (isto é possível mesmo no “pior” caso em que $V(E_1) \cap C = V(E_2) \cap C$). Selecione então um emparelhamento guloso M em $[A \setminus V(F_1), B \setminus V(F_2)]$. Usando que no máximo $\sqrt{\varepsilon}n \leq 4\eta m$ arestas estão faltando em cada vértice, $|M| \geq (1-p-4\eta-d)m$, então

$$|M \cup F_1 \cup F_2| \geq (d+1-p-4\eta)m \geq \left(\frac{1}{4} + \eta\right)n,$$

desde que

$$d \geq 8\eta + 3\beta + c.$$

Então podemos assumir que as arestas **vermelhas** de $[A, C]$ ou $[B, C]$ podem ser eliminadas após a remoção de no máximo $2dm = (16\eta + 6\beta + 2c)m$ vértices. Podemos supor, por simetria, a primeira opção, assim ajustando $p = 24\eta + 9\beta + 3c$ ficamos com todas as arestas de $[A, C]$ na cor **azul**.

Subcaso 1.a: $[B, C]$ tem emparelhamentos M_1 e M_2 , **vermelho** e **azul** respectivamente, cada um de tamanho dm .

Neste caso, podemos assumir que a maioria das arestas de $[A, D]$ são **verdes**. De fato, suponha que tivéssemos um emparelhamento M_3 **azul** de tamanho dm em $[A, D]$. Então $M_2 \cup M_3$ juntamente com um emparelhamento guloso de $[A \setminus V(M_3), C \setminus V(M_2)]$ seria um emparelhamento **azul** conectado de tamanho pelo menos $(1-p)m - 4\eta m + dm \geq (\frac{1}{4} + \eta)n$ desde que

$$d \geq 8\eta + p$$

(O argumento análogo aplica-se caso exista um emparelhamento **vermelho** de tamanho dm em $[A, D]$). O mesmo argumento também mostra que podemos encontrar o emparelhamento **azul** conectado ou **vermelho** (de tamanho $(\frac{1}{4} + \eta)n$) se o subgrafo induzido por A possui um emparelhamento **azul** ou **vermelho** de tamanho $\frac{dm}{2}$ desde que

$$d/2 \geq 8\eta + p. \tag{4.13}$$

Assim, eliminando $2(16\eta + 2p) + 2(8\eta + p) = 48\eta + 6p$ vértices, e atualizando o valor de p , conseguimos com que todas as arestas de $[A, D]$ e todas as arestas dentro de A sejam **verdes**. Novamente, pelo mesmo argumento, podemos encontrar o emparelhamento procurado (dessa vez na cor **verde**) se $[C, D]$ ou $[B, D]$ possuir um emparelhamento **verde** de tamanho dm desde que (4.13) seja verdade (já que dentro de A , em particular, existe um emparelhamento **verde** de tamanho $dm/2$). Então, removendo no máximo $2dm$ vértices de B, C, D todas as arestas no grafo tripartido T induzido por B, C, D são **vermelhas** ou **azuis** - depois de ter ajustado p . Aplicando o lema 4.9, encontramos ou uma componente monocromática, digamos **vermelha**, C^* que cobre $V(T)$ quase todo ou duas componentes C_1, C_2 , a primeira **vermelha** e a segunda **azul**, que cobrem duas partes de T e juntas cobrem a terceira parte. No primeiro caso,

$|C \setminus V(C^*)| \leq 6\sqrt{\varepsilon}n \leq 6\eta n = 24\eta m$. Logo, um emparelhamento **vermelho** de tamanho $(p+2\eta)4m$ em $[C \cap V(C^*), D]$ seria suficiente para estender qualquer emparelhamento guloso de $[A, B]$ a um emparelhamento **vermelho** conectado do tamanho desejado. Assim, removendo no máximo $24\eta m + (p+2\eta)4m$ vértices de C, D e ajustando p , todas as arestas que sobram em $[C, D]$ são **azuis**. Finalmente isto implica que não pode haver um emparelhamento **azul** em $[B, D]$ de tamanho $(p+2\eta)4m$, caso contrário achamos um emparelhamento **azul** do tamanho adequado estendendo um emparelhamento guloso de $[A, C]$. Finalmente, com uma última remoção e ajuste de p , todas as arestas de $[B, D]$ passam a ser **vermelhas**. Agora, o que encontramos foi uma EC_2 cujo parâmetro α é uma combinação linear de η, β, c . Se C_1 é uma componente **vermelha** cobrindo dois dos conjuntos B, C, D , o mesmo argumento anterior funciona.

Subcaso 1.b: $[B, C]$ não possui emparelhamento **azul** de tamanho dm . (O caso em que $[B, C]$ não possui emparelhamento **vermelho** de tamanho dm é análogo)

Como a técnica aqui é basicamente a mesma que no caso anterior, não iremos calcular precisamente o valor de p . Removendo no máximo dm vértices de B, C , todas as arestas de $[B, C]$ se tornam **vermelhas**. Usando a mesma técnica de antes, um emparelhamento **vermelho** de tamanho dm em $[C, D]$ ou em $[A, D]$ seria suficiente para encerrar a prova; um emparelhamento **azul** de tamanho dm em ambos $[C, D]$ e $[A, D]$ teria o papel análogo. Então podemos concluir que pelo menos um entre $[C, D]$, $[A, D]$ (após a remoção de no máximo $2dm$ vértices de A, C e D) possui apenas arestas **verdes**. Se isto vale para ambos então temos uma EC_2 . Se $[C, D]$ (resp., $[A, D]$) possui apenas arestas **verdes** $[A, D]$ (resp., $[C, D]$) possui um emparelhamento **azul** de tamanho dm então, como no subcaso 1.a, todas as arestas dentro de C (resp., A) devem ser **verdes** também. Finalmente concluímos que o grafo tripartido induzido por A, B, D (resp., (A, B, C)) é colorido apenas de **vermelho** ou **azul** e podemos terminar como no subcaso 1.a.

Para finalizar o caso 1, temos que definir d como o máximo do valor das duas combinações lineares de η, β, c definidas implicitamente nos subcasos acima e fazer o mesmo para o valor do parâmetro α .

Caso 2: $b \geq cm$.

Seja $A_1 = A \cap Q$ e $B_1 = B \cap Q$, $A_2 = A \setminus A_1$, $B_2 = B \setminus B_1$. Usando as hipóteses sobre as ordens desses conjuntos temos que

$$(1 - 3\beta)m - |A_2| + |B_1| \leq |A_1| + |B_1| \leq (1 + \beta)m$$

e as inequações análogas para B_2 , A_1 também valem, de onde concluímos que

$$|B_1| \leq |A_2| + 4\beta m, \quad |A_1| \leq |B_2| + 4\beta m. \quad (4.14)$$

Além disso, como $b \geq cm$, em particular $|A_1|, |B_1| \geq cm$. Ou seja, nenhum dos conjuntos A_i, B_i é muito pequeno.

Suponha que existem emparelhamentos **vermelhos** E_1, E_2 ambos de tamanho $2dm$ em $[A, C]$ e em $[B_1, C]$. Tome $F_1 \subset E_1, F_2 \subset E_2$ tais que $|F_1| = |F_2| = dm$ e $F_1 \cup F_2$ é um emparelhamento. Considere o emparelhamento $M = F_1 \cup F_2 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$ onde M_1, M_2 , são emparelhamentos gulosos em $[A_1 \setminus V(F_1), B_2], [B_1 \setminus V(F_2), A_2 \setminus V(F_1)]$ e M_3 é um emparelhamento guloso de $[A_2 \setminus (V(M_1) \cup V(M_2)), B_2 \setminus V(M_1)]$.

Afirmamos que $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ cobre $A \setminus V(F_1)$ ou $B \setminus V(F_2)$ com um erro de no máximo $(4\beta + 4\eta)m$. Observe que, por causa de (4.14), $A_1 \setminus V(F_1)$ é quase coberto por M_1 (no máximo $4\beta m$ vértices de A_1 não são cobertos). Se $A_2 \setminus V(F_1)$ é coberto por M_2 , a afirmação está provada (com erro $4\beta m$). Caso contrário tome um vértice $x \in A_2 \setminus V(F_1)$ que não é coberto por M_2 e, pela definição de M_2 , $B_1 \setminus F_2$ é quase coberto por M_2 (com erro $\eta n = 4\eta m$). Finalmente, pela definição de M_3 , ou B_2 é quase coberto por $M_1 \cup M_3$ ou $A_2 \setminus V(F_1)$ é quase coberto por $M_2 \cup M_3$ (com erro $\eta n = 4\eta m$). Portanto, a afirmação está provada. Contando o número de arestas em $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ a partir do lado melhor coberto de $[A, B]$, digamos A , temos que

$$\begin{aligned} |M| &= (|F_1| + |F_2|) + (|M_1| + |M_2| + |M_3|) \geq 2dm + |A \setminus V(F_1)| - 4\beta m - 4\eta m = \\ &= |A| + dm - 4\beta m - 4\eta m \geq (d + 1 - 7\beta - 4\eta)m \geq \left(\frac{1}{4} + \eta\right)n \end{aligned}$$

desde que

$$d \geq (8\eta + 7\beta)m$$

e portanto encontramos um emparelhamento monocromático conectado do tamanho desejado. Concluimos portanto que $[A, C]$ ou $[B_1, C]$ não possui emparelhamento **vermelho** de tamanho $2dm$. De maneira análoga, $[A_1, C]$ ou $[B, C]$ não possui emparelhamento **vermelho** de tamanho $2dm$. Isto nos dá duas opção para testar.

Subcaso 2.a: $[A, C]$ não possui $2dm$ arestas **vermelhas** independentes. (O mesmo argumento vale para $[B, C]$ por simetria.)

Removendo no máximo $2dm$ vértices de A, C e ajustando $p = 3\beta + 2(8\eta + 7\beta)$ podemos assumir que todas as arestas de $[A, C]$ são **azuis**. Usando estas arestas e o emparelhamento **azul** de tamanho pelo menos cm em $[A_1, B_1]$, se existisse um emparelhamento **azul** de tamanho dm em $[B, C]$ poderíamos achar um emparelhamento **azul** do tamanho requerido (se c, d são grandes em termos de β e η). Logo, após ajustarmos p , podemos supor que as arestas de $[B, C]$ são **vermelhas**. Repetindo o mesmo argumento, segue que as arestas de $[C, D]$ são **verdes**, e que as arestas dentro de C são **verdes**, então que as de $[A, D]$ são **azuis**, as de $[B, D]$ são **vermelhas** e encontramos uma EC_2 , desde que c, d sejam combinações lineares adequadas de β, η . O parâmetro α da EC_2 é o valor final de p (que também é uma combinação linear de β e η).

Subcaso 2.b: nem $[A_1, C]$ nem $[B_1, C]$ possui um emparelhamento **vermelho** de tamanho $2dm$.

Seja $B^* = B_1 \cup A_1, A^* = B_2 \cup A_2$. Repetindo os mesmos passos usuais, todas as arestas de $[A_1, C], [B_1, C]$ são **azuis**, então $[B^*, C]$ é **azul**.

Suponha primeiro que $|B^*| > (1 - p - d - 2\eta)m$. Então os passos habituais mostram que podemos assumir que as arestas de $[A^*, C]$ são todas **vermelhas**, já que com um emparelhamento **azul** de tamanho dm em $[A^*, C]$ poderíamos terminar a prova. Segue também que todas as arestas de $[C, D]$ são **verdes**. Com um emparelhamento **vermelho** de tamanho dm dentro de C também conseguimos terminar. Suponha agora que existe um emparelhamento **azul** de tamanho dm dentro de C . Então um emparelhamento **vermelho** ou **azul** de tamanho dm em $[B^*, D]$ nos permitiria construir o emparelhamento desejado na cor **vermelha** ou **azul**. Caso contrário, todas as arestas de $[B^*, D]$ são **verdes** e com isto todas as arestas de $[A^*, B^*]$ devem ser **vermelhas** e temos uma EC_2 . A conclusão é que todas as arestas dentro de C são **verdes**. Agora, um emparelhamento **verde** ou **vermelho** de tamanho em dm em $[B^*, D]$ seria suficiente. Logo, $[B^*, D]$ deve ser **azul**, então $[A^*, D]$ é **vermelho** e novamente temos uma EC_2 .

Finalmente podemos assumir que $|B^*| = |A_1| + |B_1| < (1 - p - d - 2\eta)m$. Afirmamos que ou $[A_2, C]$ ou $[B_2, C]$ é **azul**. De fato, pelo procedimento usual, suponha que $E_1 \cup E_2$ é um emparelhamento **vermelho**, tal que $E_1 \subset [A_2, C]$, $E_2 \subset [B_2, C]$, $|E_1| = |E_2| = dm$. Como $|A|, |B| \geq (1 - p)m \geq |A_1| + |B_1| + dm + 2\eta m$, segue que $|A \setminus A_1| = |A_2| \geq |B_1| + dm + 2\eta m$, $|B \setminus B_1| = |B_2| \geq |A_1| + dm + 2\eta m$. Portanto, no grafo bipartido $[A, B]$, todos os vértices de A_1 podem ser gulosamente emparelhados a vértices de $B_2 \setminus V(E_2)$ formando um emparelhamento **vermelho** M_1 , todos os vértices de B_1 podem ser gulosamente emparelhados a vértices de $A_2 \setminus V(E_1)$ formando um emparelhamento **vermelho** M_2 . Seja então M_3 o maior emparelhamento guloso **vermelho** em $[A_2 \setminus (V(E_1) \cup V(M_2)), B_2 \setminus (V(E_2) \cup V(M_1))]$. Portanto, $M = E_1 \cup E_2 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$ cobre A ou B com erro no máximo $\eta n = 4\eta m$. Contando o número de arestas de M a partir do lado que está melhor coberto, digamos A , segue que

$$\begin{aligned} |M| &= (|E_1| + |E_2|) + (|M_1| + |M_2| + |M_3|) \geq 2dm + (|A \setminus V(E_1)| - 4\eta m) \geq \\ &\geq |A| + dm - 4\eta m \geq \left(\frac{1}{4} + \eta\right)n \end{aligned}$$

desde que

$$d \geq (p + 8\eta)m$$

e portanto encontramos um emparelhamento monocromático conectado do tamanho desejado. Logo, a afirmação está provada e, por simetria, assumimos que $[A_2, C]$ é **azul** (o que implica que $[A, C]$ é **azul**). Daí, como $[B_1, C]$ também é **azul**, podemos estender o emparelhamento **azul** a um do tamanho requerido.

Com isto terminamos a prova do lema 4.11 ■

Capítulo 5

Número de Ramsey para três circuitos pares de mesmo tamanho

Um resultado original deste trabalho, obtido em conjunto com Jozef Skokan [2], é o teorema a seguir.

Teorema 5.1. *Existe uma constante n_0 tal que para $n > n_0$, n par, temos*

$$R(C_n, C_n, C_n) = 2n.$$

A prova deste resultado segue o mesmo esquema geral do artigo de Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi [17], cujo resultado principal é o teorema 1.4. Contudo, precisamos melhorar alguns dos lemas desse artigo à fim de encontrar um circuito ao invés de apenas um caminho.

Começamos exibindo uma coloração que mostra que vale o limite inferior no teorema 5.1 (i.e., $R(C_n, C_n, C_n) > 2n - 1$).

Coloração 5 (EC_{MAX}). *Seja n um inteiro par. Particione os vértices de K_{2n-1} em conjuntos $A \cup B \cup C \cup D \cup K$ onde $|A| = |B| = |C| = |D| = n/2 - 1$ e $|K| = 3$. Seja $K = \{r, g, b\}$. Pinte as arestas internas aos conjuntos A, B, C, D de maneira arbitrária, as arestas em $[A, B] \cup [C, D]$ de vermelho, as arestas em $[A, D] \cup [B, C]$ de verde, e as arestas em $[A, C] \cup [B, D]$ de azul. Agora, pinte todas as arestas de r para $A \cup B \cup C \cup D$ de vermelho. De modo semelhante, pinte as arestas de g para $A \cup B \cup C \cup D \cup \{r\}$ de verde. E, finalmente, pinte todas as $2n - 2$ arestas incidentes a b de azul.*

Lema 5.2. *Para todo n par,*

$$R(C_n, C_n, C_n) > 2n - 1.$$

Prova. Basta ver que a coloração EC_{MAX} definida acima não contém um C_n monocromático. Considere então uma EC_{MAX} de K_{2n-1} e $A \cup B \cup C \cup D \cup \{r, g, b\}$ como na definição da mesma. É fácil ver que $G = K_{2n-1} \setminus \{r, g, b\}$ não contém nenhum C_n monocromático, já que as componentes conexas de cada um dos grafos G^B , G^R , G^G possuem menos do que n vértices. Também é fácil ver que não existe nenhum C_n monocromático que passa por algum dos vértices r, g, b . ■

Para verificar que a cota superior do teorema 5.1 vale, i.e., $R(C_n, C_n, C_n) \leq 2n$, para n par suficientemente grande, teremos que provar que toda 3-coloração de um K_{2n} possui um C_n monocromático. A principal ferramenta para provar esta cota é o lema de estabilidade (lema 4.1) de Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi [17], cuja prova exibimos no capítulo 4.

A estratégia que usaremos nesta prova tem se tornado padrão nos últimos anos. A idéia se baseia nos passos a seguir, que serão feitos em detalhes na próxima subseção. Seremos forçados a iniciar a prova escolhendo uma série de parâmetros para que possamos aplicar uma sequência de lemas nos passos subsequentes. Neste momento escolhemos também n_0 . Olharemos então para uma 3-coloração (G^R, G^G, G^B) de um grafo completo $G := K_{2n}$, onde n é par e $n > n_0$, e aplicaremos o teorema 3.6 aos grafos G^R, G^G, G^B para obter uma partição de $V(G)$. Definiremos um grafo reduzido a partir dessa partição e em seguida uma multicoloração de suas arestas. Aplicaremos então o lema de estabilidade (lema 4.1) para esta multicoloração o que nós dará 4 casos a analisar. Tal multicoloração contém um emparelhamento monocromático conectado de um certo tamanho ou ela é do tipo EC_1 ou do tipo EC_2 ou do tipo EC_3 , definidos no início do capítulo 4. No caso do lema nos dar o emparelhamento monocromático conectado, conseguiremos utiliza-lo para encontrar um C_n monocromático no grafo original. Nos demais casos, provamos que a coloração original também é do tipo EC_1 , EC_2 ou EC_3 e então aplicamos um dos lemas abaixo ao grafo original para concluir que o mesmo possui um C_n monocromático. As provas desses lemas serão apresentadas apenas nas seções 5.3 e 5.4, após a prova do teorema 5.1.

Lema 5.3. *Existe $\alpha_{5.3} > 0$ tal que, para todo $\alpha \leq \alpha_{5.3}$ e todo $\delta < \alpha$, existe um inteiro positivo $n_{5.3}$ tal que o seguinte vale para todo $n \geq n_{5.3}$ par: toda 3-coloração de K_{2n} do tipo $EC_1(\alpha, \delta)$ contém um C_n monocromático.*

Lema 5.4. *Existe $\alpha_{5.4} > 0$ tal que, para todo $\alpha \leq \alpha_{5.4}$ e todo $\delta < \alpha$, existe um inteiro positivo $n_{5.4}$ tal que o seguinte vale para todo $n \geq n_{5.4}$ par: toda 3-coloração de K_{2n} do tipo $EC_2(\alpha, \delta)$ contém um C_n monocromático.*

Lema 5.5. *Existe $\mu_{5.5} > 0$ tal que, para todo $\mu \leq \mu_{5.5}$, $c_1 < 1$ e $c_2 < 0,5$, existem $n_{5.5} = n_{5.5}(\mu, c_1, c_2)$ e $\delta_{5.5} = \delta_{5.5}(\mu, c_1, c_2)$ tais que o seguinte vale para todo $n \geq n_{5.4}$, n par, e $0 < \delta \leq \delta_{5.5}$: toda 3-coloração de K_{2n} do tipo $EC_3(\mu, c_1, c_2, \delta)$ contém um C_n monocromático. Ademais, para c_1, c_2 fixos e $\mu_1 < \mu_2$ temos $\delta_{5.5}(\mu_1, c_1, c_2) \leq \delta_{5.5}(\mu_2, c_1, c_2)$ e $n_{5.5}(\mu_1, c_1, c_2) \geq n_{5.5}(\mu_2, c_1, c_2)$.*

Definição 26. *Para simplificar futuras referências, iremos definir versões mais fortes das colorações EC_1 , EC_2 e EC_3 . Uma coloração é EC_1 -completa com parâmetro α se ela é uma coloração do tipo $EC_1(\alpha, 0)$, ou seja, $\delta = 0$. Neste caso, o que estamos exigindo é que todos os grafos bipartidos envolvidos na segunda condição da definição da coloração EC_1 sejam completos. Definimos as colorações EC_2 -completa e EC_3 -completa de maneira análoga (ou seja, fixando $\delta = 0$).*

O restante deste capítulo é organizado da seguinte forma: faremos a prova do teorema 5.1 na seção a seguir, usando os lemas 5.3, 5.4 e 5.5. Em seguida mostramos alguns resultados simples que usaremos nas prova desses lemas e finalmente exibimos as provas dos mesmos.

Notação 27. *Se uma aresta xy é vermelha dizemos que y é um vizinho vermelho de x (e vice-versa). Denotamos por $N_R(x)$ o conjunto dos vizinhos vermelhos de x e definimos $\deg_R(x, Y) := |N_R(x) \cap Y|$ (o grau vermelho de x em Y). Fazemos o análogo para as cores verde e azul.*

5.1 Prova do teorema 5.1

Prova. Pelo lema 5.2, já temos que para todo n par $R(C_n, C_n, C_n) > 2n - 1$. Resta então provar que existe n_0 tal que para n par e $n > n_0$ temos que $R(C_n, C_n, C_n) \leq 2n$. Primeiro temos que definir n_0 para depois olharmos para uma 3-coloração de $G := K_{2n}$ e tentarmos provar que existe um C_n monocromático nesta coloração. Mas a escolha de n_0 depende de inúmeros outros parâmetros que serão usados para aplicar lemas sobre G e sobre um grafo reduzido construído a partir da coloração de G . Essa escolha de parâmetros tem que ser feita no parágrafo a seguir, mas em uma primeira leitura é possível saltar este parágrafo, desde que se aceite que as premissas necessárias para aplicar os lemas sejam satisfeitas ao longo da prova.

Primeiro escolhamos α_1 e μ_1 . Num futuro próximo, precisaremos que α_1 seja pequeno o suficiente para que os lemas 5.3 e 5.4 possam ser aplicados e precisaremos também que $\alpha_1 \leq 1/20$. Definimos então $\alpha_1 := \min\{\alpha_{5.3}, \alpha_{5.4}, 1/20\}$. Por sua vez, μ_1 é um parâmetro que será usado como entrada para o lema 5.5. Tomamos então $\mu_1 := \mu_{5.5}$. Agora escolheremos os valores de parâmetros principais η e ε . Passando os valores escolhidos de α_1 e μ_1 como entrada para o lema 4.1, ele nos retorna (independentemente do grafo em que será aplicado) $\varepsilon_{4.1}$, $\eta_{4.1}$ e $\mu_{4.1} < \mu_1$. Tome $\eta := \eta_{4.1}$. Agora, o lema 5.5 com entrada $\mu = \mu_{4.1}/2$, $c_1 := 0,8$, $c_2 := 0,3$ nos devolve $n_{5.5}$ e $\delta_{5.5}$. Tome ε tal que $\varepsilon < \varepsilon_{4.1}$, $2\varepsilon^{1/3} < \delta_{5.5}$, $\varepsilon < 0,01\varepsilon^{1/3}$ e $\varepsilon < g(\alpha_1, \mu_{4.1}, \eta)$, para alguma função g que não iremos calcular explicitamente. Tendo escolhido também ε , o lema 4.1 nos dá $n_{4.1}$, e podemos escolher $m = \max\{n_{4.1}, 1/\varepsilon\}$ e $s = 3$ para aplicar o lema da regularidade (teorema 3.6) com parâmetros ε , m e s , que, por sua vez, nos devolve $N_{3.6}$ e $M_{3.6}$.

Finalmente, tome uma 3-coloração (G^R, G^G, G^B) de $G := K_{2n}$ com n par e grande o suficiente, digamos $n = \max\{n_{5.3}, n_{5.4}, n_{5.5}, N_{3.6}, 2M_{3.6}n_{3.3}\}$, e aplique o teorema 3.6 para os grafos G^R, G^G, G^B com parâmetros ε , m e s como acima. Ele nos devolve uma partição $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$ de V tal que $m < t < M_{3.6}$. Considere o *grafo reduzido*, H , desta partição definido da seguinte maneira: os vértices de H são $1, \dots, t$ e colocamos uma aresta entre os vértices i e j se e somente se (V_i, V_j) é um par ε -regular em relação a G^R, G^G e G^B . Note que

$$e(H) \geq (1 - \varepsilon) \binom{t}{2}.$$

Defina também uma 3-multicoloração (H^R, H^G, H^B) de H : coloque a aresta ij em H^R (resp., H^G, H^B) se $e_R(V_i, V_j) \geq \frac{\varepsilon^{1/3}}{4}|V_i||V_j|$ (resp., $e_G(V_i, V_j), e_B(V_i, V_j) \geq \frac{\varepsilon^{1/3}}{4}|V_i||V_j|$). Aplicando o lema 4.1 a esta coloração de H temos quatro casos.

Caso 1: existe um emparelhamento monocromático conectado $M = \{e_0, \dots, e_{t_1-1}\}$ de tamanho $t_1 \geq (1/4 + \eta)t$ em H .

Assuma que M é **vermelho**. Sejam a_i, b_i as extremidades de e_i . Então

$$\left| \bigcup_{i=0}^{t_1-1} V_{a_i} \cup V_{b_i} \right| \geq 2t_1 \frac{(1 - \varepsilon)2n}{t} \geq \left(\frac{1}{2} + 2\eta \right) (1 - \varepsilon)(2n) \geq (1 + 3\eta)n,$$

dado que ε é pequeno em função de η (pois tomamos $\varepsilon < g(\alpha, \mu_{4.1}, \eta)$).

Agora, usamos argumentos padrão de regularidade para construir um circuito monocromático de tamanho n em G^R . Seja F o subgrafo **vermelho** conexo minimal de H que contém M . Claramente, F é uma árvore. Considere um passeio fechado de comprimento mínimo $W = i_1 i_2 \dots i_l i_1$ que contém todas as arestas de M . Como F é uma árvore, W tem comprimento par. Usando propriedades simples de regularidade, como a proposição 3.2, não é difícil encontrar (gulosamente) em G^R um circuito par

$\tilde{C} = v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_l}v_{i_1}$ com $v_{i_j} \in V_{i_j}$ tal que v_{i_j} tem pelo menos $\frac{\varepsilon^{1/3}}{5}|V_{i_j}|$ vizinhos vermelhos em ambos $V_{i_{j-1}}$ e $V_{i_{j+1}}$, para todo $1 \leq j \leq l$. Contudo, o comprimento de C é l , o que é bem menor do que n . A idéia agora é substituir as arestas de M em C por caminhos de modo a estender C a um C_n vermelho. Daí, para cada aresta e_k de M escolhemos um número natural $1 \leq l_k \leq (1 - 5\varepsilon/\varepsilon^{1/3})|V_{i_k}|$ de modo que

$$\sum_{k=0}^{t_1-1} 2l_k = n - l.$$

Isto é possível, já que $\sum_{k=0}^{t_1-1} 2l_k$ pode ser tão grande quanto $(1 - 5\varepsilon/\varepsilon^{1/3})(1 + 3\eta)n = (1 - 5\varepsilon^{2/3})(1 + 3\eta)n > (1 + 2\eta)n$ e $n - l$ é par. (A desigualdade anterior, novamente segue do fato de que ε é pequeno em função de η). Finalmente, podemos usar o lema 3.3, pois $|V_i| \geq (1 - \varepsilon)2n/M_{3,6} > n_{3,3}$, uma vez para cada um dos grafos $G[V_{a_k}, V_{b_k}]$ ($0 \leq k < t_1$) e substituir as arestas $v_{a_k}v_{b_k}$ de $\tilde{C}$ por um caminho de comprimento $2l_k + 1$ que começa em v_{a_k} , termina em v_{b_k} e consiste apenas de arestas em $G^R[V_{a_k}, V_{b_k}]$. Claramente, o resultado disto é um circuito monocromático de comprimento n .

Caso 2: (H^R, H^G, H^B) é uma coloração do tipo EC_1 com parâmetro $\alpha_1/2$. Mostraremos que isto implica que (G^R, G^G, G^B) é uma coloração EC_1 com parâmetro α_1 . Considere uma partição $V(H) = A \cup B \cup C \cup D$ que satisfaz as condições de EC_1 . Olhe para a partição $V(G) = (f(A) \cup V_0) \cup f(B) \cup f(C) \cup f(D)$ onde $f(X) := \bigcup_{i \in X} V_i$. Primeiro note que

$$|f(A) \cup V_0|, |f(B)|, |f(C)|, |f(D)| \geq \left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right) \frac{t(1 - \varepsilon)(2n)}{4} \geq (1 - \alpha_1) \frac{2n}{4}. \quad (5.1)$$

Resta provar que a segunda condição da EC_1 também é satisfeita para esta partição, com a 3-coloração (G^R, G^G, G^B) original. Mostraremos como obter uma cota superior para o número de arestas entre $f(A) \cup V_0$ e $f(B)$ que não estão em G^R que neste caso é igual a G^{R*} (lembre da definição 18). As demais cotas seguem de maneira análoga.

Há no máximo $\frac{\alpha_1}{2}|A||B|$ arestas $ij \in [A, B]$ tais que $ij \notin H^{R*}$. Mesmo que, para cada aresta ij desse tipo, $[V_i, V_j]$ possua apenas arestas verdes e azuis, ao todo teremos no máximo $\frac{\alpha_1}{2}|f(A)||f(B)|$ arestas não vermelhas entre esses pares de conjuntos. Por outro lado, para cada aresta $ij \in [A, B]$ com $ij \in H^{R*}$, temos que $ij \notin H^G \cup H^B$. Então, o número de arestas não vermelhas em $G[V_i, V_j]$ é $|(G^G \cup G^B)[V_i, V_j]| \leq 2\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{4}|V_i||V_j|\right)$. Portanto,

$$|(G^G \cup G^B)[f(A), f(B)]| \leq \frac{\alpha_1}{2}|f(A)||f(B)| + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}|f(A)||f(B)|.$$

Agora, mesmo que todas as arestas de $[V_0, f(B)]$ não sejam vermelhas, temos que a densidade de arestas não vermelhas em $[f(A) \cup V_0, f(B)]$ é no máximo

$$\frac{\frac{\alpha_1}{2}|f(A)||f(B)| + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}|f(A)||f(B)| + |V_0||f(B)|}{|f(A) \cup V_0||f(B)|} \leq \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2} + \frac{|V_0|}{|f(A)|} < \alpha_1,$$

dado que $|V_0|/|f(A)| \leq \frac{\varepsilon(2n)}{n/5} = 10\varepsilon$, pois $\frac{1}{4} - \alpha_1 \geq 1/5$. Então $G^R[f(A) \cup V_0, f(B)]$ é $(1 - \alpha_1)$ -denso.

Agora basta usar o lema 5.3 para encontrar o C_n monocromático em G .

Caso 3: (H^R, H^G, H^B) é uma coloração do tipo EC_2 com parâmetro $\alpha_1/2$. Do mesmo modo que no caso anterior, podemos mostrar que (G^R, G^G, G^B) é uma EC_2 com parâmetro α_1 . Neste caso usamos o lema 5.4 para encontrar o C_n monocromático em G . Isto completa a prova.

Caso 4: (H^R, H^G, H^B) é uma coloração do tipo EC_3 com parâmetros $\mu = \mu_{4.1}$, $c_1 = 0,7$, $c_2 = 0,2$ e $\delta = \varepsilon^{1/3}$. Como no caso 2, consideramos $V(H) = A \cup B \cup C \cup D$, partição que satisfaz as condições de EC_3 , e olhamos para a partição $V(G) = (f(A) \cup V_0) \cup f(B) \cup f(C) \cup f(D)$ onde $f(X) := \bigcup_{i \in X} V_i$. Provaremos que esta partição define uma EC_3 com parâmetros $\mu = (1 - \varepsilon)\mu_{4.1}$, $c_1 = 0,8$, $c_2 = 0,3$, e $\delta = 2\varepsilon^{1/3}$. Primeiro é trivial que

$$|f(D)| \geq \mu_{4.1} \frac{t}{4} \frac{(1 - \varepsilon)(2n)}{t} \geq (1 - \varepsilon)\mu_{4.1} \frac{2n}{4}.$$

Vemos também que

$$|f(A) \cup V_0|, |f(B)|, |f(C)| \geq (1 - 0,7\mu_{4.1}) \frac{t}{4} \frac{(1 - \varepsilon)(2n)}{t} \geq (1 - 0,8(1 - \varepsilon)\mu_{4.1}) \frac{2n}{4}.$$

Também que

$$|A| - |B| \geq \mu_{4.1} \frac{t}{4} \Rightarrow |f(A)| - |f(B)| \geq \mu_{4.1} \frac{t}{4} \frac{(1 - \varepsilon)(2n)}{t} = (1 - \varepsilon)\mu_{4.1} \frac{2n}{4},$$

e que o análogo vale se trocarmos B por C ou D , de onde segue que

$$|f(A) \cup V_0| \geq |f(A)| \geq \max\{|f(B)|, |f(C)|, |f(D)|\} + (1 - \varepsilon)\mu_{4.1} \frac{2n}{4}.$$

E finalmente

$$|f(A) \cup V_0 \cup D| \leq (1 + 0,2\mu_{4.1}) \frac{t}{2} \frac{2n}{t} + \varepsilon(2n) \leq (1 + 0,3(1 - \varepsilon)\mu_{4.1}) \frac{2n}{2}.$$

Ademais, podemos obter as condições de densidade de modo análogo ao caso 2. Sendo assim, basta usar o lema 5.5 para terminar a prova. Podemos fazer isso já que $(1 - \varepsilon)\mu_{4.1} < \mu_{4.1} = \mu_{5.5}$, $(1 - \varepsilon)\mu_{4.1} > \mu_{4.1}/2$ e $\delta = 2\varepsilon^{1/3} < \delta_{5.5}(\mu_{4.1}/2, 0,8, 0,3)$. ■

5.2 Caminhos e circuitos em grafos densos

A prova do teorema 5.1 terminou, exceto pelos lemas 5.3, 5.4 e 5.5. Esta seção prepara a prova desses lemas. Durante tais provas, precisaremos encontrar caminhos ou circuitos

longos em grafos densos diversas vezes. Os resultados que precisamos para isto são bastante simples, mas resolvemos organizá-los aqui para melhor clareza e referência.

O primeiro lema é um fato bastante conhecido. Veja, por exemplo, a página 107 de [3].

Lema 5.6. *Seja G_n um grafo de ordem n que não possui um caminho de tamanho $k \geq 1$. Então o número de arestas de G_n é no máximo $\frac{k-1}{2}n$. Ademais, se o número de arestas de G_n é igual a $\frac{k-1}{2}n$, então G_n é a união de grafos completos de ordem k .*

O lema seguinte é semelhante ao lema 3.3, porém bem mais simples pois, apesar de que não temos um par ε -regular, a densidade de arestas é muito alta.

Lema 5.7. *São dados um natural n par, um real $\beta < 1/4$ e um grafo bipartido em classes A e B tais que $|A| \geq |B|$. Suponha ainda que, para todo $v \in A$, $\deg(v, B) \geq (1 - \beta)|B|$, e, para todo $v \in B$, $\deg(v, A) \geq 2$. Temos então que*

- a) *dados $u, v \in A$, para todo $2 \leq k \leq (1 - 2\beta)|B|$ existe um caminho de ordem $2k + 1$ começando em u e terminando em v ;*
- b) *dados $u \in A$, $v \in B$, para todo $2 \leq k \leq (1 - 2\beta)|B|$ existe um caminho de ordem $2k$ começando em u e terminando em v .*

Prova. Para provar o item a), escolha $k + 1$ pontos $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$ tais que $a_1 = u$, $a_{k+1} = v$. É fácil construir um caminho $P_{k+1} = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots b_k a_{k+1}$, tal que $b_i \in B$ para $1 \leq i \leq k$. Uma maneira de fazer isto é escolhendo os b_i s indutivamente de maneira gulosa, ou seja, suponha que para certo $l \leq k$ já construímos $P_l = a_1 b_1 \dots b_{l-1} a_l$. Basta então escolher b_l como qualquer vértice na vizinhança comum de a_l e a_{l+1} em $B \setminus V(P_l)$. Tal vértice existe pois

$$|(N(a_{l+1}) \cap N(a_l)) \setminus V(P_l)| \geq (|B| - 2\beta|B|) - (l - 1) \geq 1,$$

já que

$$l \leq k \leq (1 - 2\beta)|B|.$$

Para o item b), basta começar tomando um vizinho w de v em A tal que $w \neq u$, e então aplicar o item anterior para encontrar um caminho de tamanho $2k - 1$ entre u e w (apenas tomando o cuidado de não usar v neste caminho). ■

O próximo lema é sobre uma situação muito específica que acontecerá na seção seguinte.

Lema 5.8. *Sejam $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ conjuntos tais que $|\tilde{A}| = |\tilde{B}|$. Suponha que, para $\beta < 1/3$, existem partições $A \cup A'$ de $\tilde{A}$ e $B \cup B'$ de $\tilde{B}$ tais que $|A'| \leq \beta|\tilde{A}|$, $|B'| \leq \beta|\tilde{B}|$, $[A, B]$ é um grafo bipartido completo, e que, para todo $a \in A'$, temos $\deg(a, B) \geq 2\beta|\tilde{B}|$ e, para todo $b \in B'$, temos $\deg(b, A) \geq 2\beta|\tilde{A}|$. Então o grafo bipartido $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ é hamiltoniano.*

$\beta(n/2 - t)$, $|B'| \leq \beta(n/2 - t)$, para $\beta < 1/4$, e $[A, B]$ é um grafo bipartido completo (como no lema anterior). Suponha ainda que para todo $a \in A'$ temos $\deg(a, B) \geq 2\beta|\tilde{B}|$ e para todo $b \in B'$ temos $\deg(b, A) \geq 2\beta|\tilde{B}| + 2t + 1$. Finalmente, suponha que existe um caminho P de ordem $2t + 1$ com todos seus vértices pertencentes a A . Então o grafo induzido por $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ é hamiltoniano.

Prova. Seja P o caminho de ordem $2t + 1$ em A e sejam u, v as extremidades de P . Considere o grafo $[(\tilde{A} \setminus P) \cup \{u\}, \tilde{B}]$ e remova dele as arestas entre u e B' . Veja que $|(\tilde{A} \setminus P) \cup \{u\}| = |B| = n/2 - t$. Assim, a mesma construção do lema anterior nos dá um circuito hamiltoniano neste grafo e, como u não possui vizinhos em B' , os vizinhos de u neste circuito pertencem a B . Considere um desses vizinhos, digamos u' , e substitua a aresta uu' do circuito pelo caminho $uPvu'$. Obtemos então um circuito hamiltoniano do grafo original. ■

Observação. Vale para este lema uma observação semelhante à que segue o lema anterior.

5.3 Prova dos lemas 5.3 e 5.5

Prova. Faremos as provas dos lemas 5.3 e 5.5 em um passo só, já que elas são quase idênticas.

Considere uma 3-coloração de K_{2n} tal que existe uma partição $A \cup B \cup C \cup D$ de $V(K_{2n})$ que, ou satisfaz as condições da EC_1 com parâmetros α e δ , ou satisfaz as condições da EC_3 com parâmetros μ , c_1 , c_2 e δ , como no enunciado do lema. Ou seja, admitimos que α e μ são pequenos e que δ é suficientemente pequeno em relação a μ e c .

Chamaremos um vértice de A de ruim se ele não possui grau alto para B , C ou D nas cores apropriadas. Mais precisamente, um vértice $v \in A$ é ruim se

$$\deg_R(v, B) < (1 - \delta^{1/2})|B|, \quad \deg_B(v, C) < (1 - \delta^{1/2})|C| \quad \text{ou} \quad \deg_G(v, D) < (1 - \delta^{1/2})|D|.$$

Veja que, há menos do que $2\delta^{1/2}|A|$ vértices em A tais que $\deg_R(v, B) < (1 - \delta^{1/2})|B|$, caso contrário, pelo menos $2\delta|A||B|$ arestas de $[A, B]$ não seriam vermelhas. Fazendo o mesmo para $[A, C]$ e $[A, D]$, segue que o número de vértices ruins de A é, ao todo, no máximo $6\delta^{1/2}|A|$. Do mesmo modo, simultaneamente, classificamos alguns vértices de B , C e D como ruins. Seja E_1 o conjunto dos vértices ruins. Temos então que $|E_1| \leq 6\delta^{1/2}(|A| + |B| + |C| + |D|) = 12\delta^{1/2}n$. Denote então, $A_1 = A \setminus E_1$, $B_1 = B \setminus E_1$, $C_1 = C \setminus E_1$ e $D_1 = D \setminus E_1$.

Feito isso, todos os vértices em A_1 são adjacentes a pelo menos

$$(1 - 7\delta^{1/2})|B| \geq (1 - 7\delta^{1/2})|B_1| \geq (1 - \delta^{1/3})|B_1|$$

vértices em B_1 por arestas **vermelhas**. Assim, o lema 5.7, com $\beta = \delta^{1/3}$, nos dá caminhos entre A_1 e B_1 que saturam quase todos os vértices do menor desses conjuntos. O mesmo vale para os outros pares de conjuntos nas cores correspondentes.

Concluimos então que não existem duas arestas paralelas (independentes) da cor **vermelha** entre A_1 e C_1 : se a_1, c_1 e a_2, c_2 fossem duas arestas desse tipo, poderíamos achar um a_1, a_2 -caminho P em $[A_1, B_1]$ e um c_1, c_2 -caminho Q em $[C_1, D_1]$ que podem ser unidos através das duas arestas para obter um circuito $C_k = a_1 P a_2 c_2 Q c_1 a_1$ **vermelho** de tamanho k . Veja que, pelo lema 5.7, o tamanho de P pode ser tão grande quanto $2(1 - 2\delta^{1/3}) \min\{|A_1|, |B_1|\}$ e o de Q tão grande quanto $2(1 - 2\delta^{1/3}) \min\{|C_1|, |D_1|\}$. Assim, o tamanho k do circuito obtido pode ser tão grande quanto

$$2(1 - 2\delta^{1/3})(\min\{|A_1|, |B_1|\} + \min\{|C_1|, |D_1|\} + 1).$$

Aqui precisamos analisar o caso em que temos uma EC_1 e o caso em que temos uma EC_3 separadamente. O primeiro é fácil, como $|A_1|, |B_1|, |C_1|, |D_1| \geq (1 - \alpha - 24\delta^{1/2})n/2$, k pode ser tão grande quanto

$$2(1 - 2\delta^{1/3})(1 - \alpha - 24\delta^{1/2})n \geq 2(1 - 2\alpha^{1/3})(1 - \alpha^{1/3})n \geq (1 - 3\alpha^{1/3})(2n) > n.$$

No segundo caso, a cota é um pouco mais crítica, k poderá ser tão grande quanto

$$2(1 - 2\delta^{1/3})((1 - c_1\mu)n/2 + \mu n/2 - 12\delta^{1/2}n) > (1 - 2\delta^{1/3})(1 + (1 - c_1)\mu - 24\delta^{1/2})n,$$

mas isto também é maior do que n , já que δ é pequeno em relação a μ e $c_1 < 1$.

Isto implica que não existem arestas **vermelhas** em $[A_1, C_1]$, com exceção de no máximo uma estrela. Aplicando o mesmo argumento para os outros conjuntos e cores, concluimos que esta é uma coloração EC_1 -completa ou EC_3 -completa, módulo no máximo 12 estrelas das quais podemos nos livrar removendo no máximo 12 vértices de $A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D_1$. Sejam A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 os conjuntos obtidos após removermos esses vértices e os colocarmos em E_1 .

Temos então que, o grafo induzido por $A_2 \cup B_2 \cup C_2 \cup D_2$ forma uma coloração EC_1 -completa ou EC_3 -completa.

Agora, vamos redistribuir os vértices de E_2 para os conjuntos A_2, B_2, C_2 e D_2 mantendo a estrutura da coloração e os graus altos nas cores apropriadas.

Primeiro, classificaremos alguns vértices especiais de E_2 . Chamamos um vértice de especial do tipo $R1$ se $v \in E_2$ e

$$\deg_R(v, A_2), \deg_R(v, C_2) \geq 4$$

ou

$$\deg_R(v, B_2), \deg_R(v, D_2) \geq 4.$$

Afirmção 5.10. *O conjunto E_2 possui no máximo um vértice do tipo $R1$, ou conseguimos achar um C_n monocromático.*

Prova. Suponha que existem dois vértices v_1 e v_2 do tipo $R1$. Assuma, sem perda da generalidade, que $\deg_R(v_1, A_2), \deg_R(v_1, C_2) \geq 4$ e sejam $a_1 \in A_2, c_1 \in C_2$ vizinhos vermelhos de v_1 . Daí, se $\deg_R(v_2, A_2), \deg_R(v_2, C_2) \geq 4$, então existem $a_2 \in A_2, c_2 \in C_2$ vizinhos vermelhos de v_2 e distintos de a_1, c_1 . Pelo lema 5.7, do mesmo modo que acima, podemos encontrar um caminho vermelho P de comprimento par entre a_1 e a_2 em $[A_2, B_2]$ e um caminho vermelho Q de comprimento par entre c_1 e c_2 em $[C_2, D_2]$ tais que $v_1 a_1 P a_2 v_2 c_2 Q c_1 v_1$ é o circuito de tamanho n que estamos procurando. No caso em que $\deg_R(v_2, B_2), \deg_R(v_2, D_2) \geq 4$ procedemos de maneira semelhante: tome $b_2 \in B_2, d_2 \in D_2$ vizinhos vermelhos de v_2 , encontre um caminho ímpar P de a_1 para b_2 com arestas em $[A_2, B_2]$ e um caminho ímpar Q de c_1 para d_2 com arestas em $[C_2, D_2]$ tais que $v_1 a_1 P b_2 v_2 d_2 Q c_1 v_1$ é monocromático e tem comprimento n . ■

Observação. *Para esta prova, a definição que demos de vértice do tipo $R1$ é até forte demais: seria suficiente classificar um vértice como $R1$ se $\deg_R(v, A_2), \deg_R(v, C_2) \geq 2$ ou $\deg_R(v, B_2), \deg_R(v, D_2) \geq 2$. Mas, posteriormente, precisaremos da definição mais forte.*

De modo análogo, dizemos que $v \in E_2$ é do tipo $R2$ se $\deg_R(v, A_2), \deg_R(v, D_2) \geq 4$ ou $\deg_R(v, B_2), \deg_R(v, C_2) \geq 4$. Pelo mesmo argumento acima, existe no máximo um vértice do tipo $R2$. Dizemos que um vértice é do tipo R^* se ele é do tipo $R1$ ou $R2$. É imediato verificar que um vértice de E_2 que satisfaz $\deg_R(v, A_2 \cup B_2) \geq 7$ e $\deg_R(v, C_2 \cup D_2) \geq 7$ é do tipo R^* . Podemos então definir, de maneira análoga, os tipos $B1, B2, B^*, G1, G2$ e G^* :

- v é $B1$: se $\deg_B(v, A_2), \deg_B(v, B_2) \geq 4$ ou $\deg_B(v, C_2), \deg_B(v, D_2) \geq 4$;
- v é $B2$: se $\deg_B(v, A_2), \deg_B(v, D_2) \geq 4$ ou $\deg_B(v, B_2), \deg_B(v, C_2) \geq 4$;
- v é $G1$: se $\deg_G(v, A_2), \deg_G(v, B_2) \geq 4$ ou $\deg_G(v, C_2), \deg_G(v, D_2) \geq 4$;
- v é $G2$: se $\deg_G(v, A_2), \deg_G(v, C_2) \geq 4$ ou $\deg_G(v, B_2), \deg_G(v, D_2) \geq 4$.

Usando o análogo da afirmação 5.10 para as outras cores, podemos assumir que existem ao todo no máximo 6 vértices dos tipos R^*, B^* e G^* . Seja F o conjunto desses vértices e $E'_2 = E_2 \setminus F$. A seguir, particionaremos E'_2 em $A'_2 \cup B'_2 \cup C'_2 \cup D'_2$.

Para todos os vértices $v \in E'_2$, temos $\deg_R(v, A_2 \cup B_2) \leq 6$ ou $\deg_R(v, C_2 \cup D_2) \leq 6$. Ademais, $\deg_B(v, A_2 \cup C_2) \leq 6$ ou $\deg_B(v, B_2 \cup D_2) \leq 6$. Também, $\deg_G(v, A_2 \cup D_2) \leq 6$ ou $\deg_G(v, B_2 \cup C_2) \leq 6$. Tome qualquer vértice $v \in E'_2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\deg_R(v, C_2 \cup D_2) \leq 6$ e $\deg_B(v, B_2 \cup D_2) \leq 6$. Então $\deg_G(v, D_2) \geq |D_2| - 12$, donde $\deg_G(v, B_2 \cup C_2) \leq 6$. Finalmente isto implica que $\deg_B(v, C_2) \geq |C_2| - 12$ e $\deg_R(v, B_2) \geq |B_2| - 12$. Neste caso, colocaremos v no conjunto A'_2 . (Nos outros possíveis casos colocaríamos v em um dos conjunto B'_2, C'_2

ou D'_2). Após fazer o procedimento acima para cada vértice de E'_2 , defina $\tilde{A}_2 = A_2 \cup A'_2$, $\tilde{B}_2 = B_2 \cup B'_2$, $\tilde{C}_2 = C_2 \cup C'_2$ e $\tilde{D}_2 = D_2 \cup D'_2$.

Lembre-se que $|E'_2| \leq |E_1| + 12 \leq 13\delta^{1/2}n$. Ademais, $|\tilde{A}_2 \cup \tilde{B}_2 \cup \tilde{C}_2 \cup \tilde{D}_2| \geq 2n - |F| \geq 2n - 6$. Assim, se no grafo original tínhamos uma EC_3 , sabemos que o maior desses conjuntos é $\tilde{A}_2$. Se tínhamos uma EC_1 , podemos assumir o mesmo sem perda da generalidade. Veja que $|\tilde{A}_2| \geq n/2 - 1$. Se dois dos conjuntos $\tilde{A}_2$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_2$ e $\tilde{D}_2$, digamos $\tilde{A}_2$ e $\tilde{B}_2$, têm pelo menos $n/2$ vértices, pelo lema 5.8, existe um circuito vermelho C_n com arestas em $[\tilde{A}_2, \tilde{B}_2]$. Sendo assim, podemos assumir que $|\tilde{B}_2| = n/2 - b$, $|\tilde{C}_2| = n/2 - c$ e $|\tilde{D}_2| = n/2 - d$, onde $b, c, d > 0$. Defina $|\tilde{A}_2| = n/2 + a$, onde $a \geq 0$ ou $a = -1$, e $|F| = f$. Então

$$a + f = b + c + d. \quad (5.2)$$

Agora, temos dois casos.

Caso 1: $a \geq 0$.

Afirmção 5.11. *Existe em A_2 um caminho vermelho de tamanho $2b$, ou um caminho azul de tamanho $2c$, ou um caminho verde de tamanho $2d$.*

Prova. Suponha que nenhum desses caminhos existe. Então o lema 5.6 nos dá um cota superior para o número de arestas em A_2 .

$$\left(\frac{|A_2| - 1}{2}\right) |A_2| \leq \left(\frac{2b - 1}{2} + \frac{2c - 1}{2} + \frac{2d - 1}{2}\right) |A_2|.$$

De onde concluímos que

$$\frac{n}{2} + a - 13\delta^{1/2}n - 1 \leq 2(b + c + d) - 3.$$

E, usando (5.2), temos que $a \geq n/2 - 13\delta^{1/2}n - 2f + 2$. E temos uma cota para a ordem do conjunto A da partição original,

$$|A| \geq |\tilde{A}_2| - 13\delta^{1/2}n \geq n - 26\delta^{1/2}n - 2f + 2.$$

Mas isto é uma contradição: no caso de termos uma EC_1 , $|A| = (2n) - |B \cup C \cup D| \leq n/2 + 3\alpha < n - 26\delta^{1/2}n - 2f$; no caso de termos uma EC_3 , as cotas para $|A \cup D|$ e $|D|$ implicam que $|A| \leq (1 + (c_2 - 0,5)\mu)n < n - 26\delta^{1/2}n - 2f$, dado que $c_2 < 0,5$ e δ é pequeno em relação a μ . Isto completa a prova da afirmação. ■

Suponha então que existe um caminho P verde de tamanho $2d$, ou seja, ordem $2d+1$, em A_2 . Os outros casos são análogos, na verdade, até um pouco mais fáceis. Se $d \leq a$ podemos achar um C_n verde em $[\tilde{A}_2, \tilde{D}_2]$ usando o lema 5.9. Basta nos restringirmos a um subconjunto $\hat{A}_2$ de $\tilde{A}_2$ com $n/2 + d$ vértices que contenha P . As condições para aplicar o lema 5.9 em $[\hat{A}_2, \tilde{D}_2]$ são garantidas pela escolha dos parâmetros (em particular, veja que $|A'_2|$ e $|D'_2|$ são pequenos em relação a $|D_2|$).

Então podemos supor que $d > a$.

Para cada vértice $v \in F$ olhe para a cor que mais aparece nas arestas de v para $A_2 \setminus P$. Se existem $d - a$ vértices para os quais esta cor é **verde** podemos adicionar estes vértices ao conjunto $D' \subset \tilde{D}_2$. Feito isto, ficaríamos com $|\tilde{A}_2| = n/2 + a$, $|\tilde{B}_2| = n/2 - b + (b - a) = n/2 - a$ e poderíamos usar achar um C_n como acima. Veja que, neste caso, precisamos observar que $d - a \leq f \leq 6$, e usar a observação que segue o lema 5.9 para achar tal circuito. Então existem no máximo $b - a - 1$ vértices desse tipo em F . Se existem b vértices para os quais esta cor é **vermelho**, podemos adicionar estes vértices ao conjunto $B' \subset \tilde{B}_2$ e encontrar um C_n **vermelho** em $\tilde{A}_2 \cup \tilde{B}_2$ usando o lema 5.8, já que após adicionar os vértices a $\tilde{B}_2$ teríamos $|\tilde{B}_2| \geq n/2$. Então existem no máximo $b - 1$ vértices em F tais que esta cor é **vermelha**. Pelo mesmo motivo existem no máximo $c - 1$ vértices em F tais que esta cor é **azul**.

Contudo, agora temos que

$$|F| \leq (b - a - 1) + (c - 1) + (d - 1) = |F| - 3,$$

uma contradição.

Caso 2: $a = -1$.

Veja que $(|\tilde{B}_2|, |\tilde{C}_2|, |\tilde{D}_2|, |F|)$ deve assumir um dos valores abaixo.

$$\begin{aligned} &(n/2 - 1, n/2 - 1, n/2 - 1, 4) \\ &(n/2 - 1, n/2 - 1, n/2 - 2, 5) \\ &(n/2 - 1, n/2 - 1, n/2 - 3, 6) \\ &(n/2 - 1, n/2 - 2, n/2 - 2, 6) \end{aligned}$$

Note que agora, as ordens dos conjuntos $\tilde{A}_2$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{D}_2$ são basicamente as mesmas. Sendo assim, a nossa EC_3 também é uma EC_1 .

Vamos primeiro resolver o caso

$$(|\tilde{B}_2|, |\tilde{C}_2|, |\tilde{D}_2|, |F|) = (n/2 - 1, n/2 - 1, n/2 - 1, 4).$$

Lembre-se que todos os vértices de F são especiais. Como $|F| = 4$ dois deles devem ser especiais na mesma cor, digamos que u seja do tipo $R1$ e v do tipo $R2$. Podemos assumir, sem perda da generalidade, que $\deg_R(u, A_2), \deg_R(u, C_2) \geq 4$ e que $\deg_R(v, A_2), \deg_R(v, D_2) \geq 4$. Mas, neste caso, podemos adicionar u ao conjunto D'_2 e v ao conjunto C'_2 e então achar um C_n **vermelho** em $G[\tilde{C}_2, \tilde{D}_2]$ usando o lema 5.8 e a observação que o segue.

Para os demais casos precisaremos usar a afirmação a seguir.

Afirmção 5.12. *Se existem dois vértices do tipo R^* (resp., B^* , G^*) e existe uma aresta vermelha (resp., azul, verde) dentro de algum dos conjuntos A, B, C, D , então conseguimos encontrar um C_n vermelha (resp., azul, verde).*

Prova. Suponha que existem dois vértices do tipo R^* , digamos u do tipo $R1$ e v do tipo $R2$. Como $A_2 \cup B_2 \cup C_2 \cup D_2$ induz uma EC_1 -completa, usando os vértices u e v , mesmo sem usar arestas internas aos conjuntos A_2, B_2, C_2, D_2 , é possível encontrar circuitos de tamanho k para todo k ímpar entre 7 e $2n - 4\alpha^{1/3}$. Se existe uma aresta interna a um dos conjuntos A_2, B_2, C_2, D_2 podemos facilmente usá-la e conseguir formar também circuitos **vermelhos** de tamanho par de quase todos os tamanhos. Em particular, conseguimos encontrar um C_n **vermelho**. ■

Veja portanto que, se $|F| = 6$, deve existir um C_n monocromático. De fato, como existem no máximo dois vértices especiais de cada cor, a única maneira de termos $|F| = 6$ seria com dois vértices do tipo R^* , dois do tipo B^* e dois do tipo G^* . Portanto, usando a afirmação acima, não há como colorir as arestas internas aos conjuntos A_2, B_2, C_2 e D_2 sem que exista um C_n monocromático. Agora, o único caso que sobra é

$$(|\tilde{B}_2|, |\tilde{C}_2|, |\tilde{D}_2|, |F|) = (n/2 - 1, n/2 - 1, n/2 - 2, 5).$$

Construímos um grafo auxiliar H com conjunto de vértices $V(H) = F \cup \{X, Y, Z, W\}$, onde X, Y, Z, W representam os conjuntos A_2, B_2, C_2, D_2 em alguma ordem. E, com certo abuso de notação, se X representa o conjunto A_2 usamos $\tilde{X}$ e X' para representar $\tilde{A}_2$ e A'_2 respectivamente. Todo par de vértices de H , exceto os da forma $\{u, v\} \subset F$, é uma aresta. A seguir, definimos uma 3-multicoloração de H . As arestas $\{U, V\}$ tais que $U, V \in \{X, Y, Z, W\}$ recebem uma única cor: a mesma das arestas do grafo completo $G[U, V]$; as arestas uV tais que $u \in F$ e $V \in \{X, Y, Z, W\}$ recebem cor **vermelha** (resp., **azul**, **verde**) se $\deg_R(u, V) \geq 4$ (resp., $\deg_B(u, V) \geq 4$, $\deg_G(u, V) \geq 4$).

Já que $|F| = 5$ e pela simetria das cores, podemos assumir que F possui dois vértices do tipo R^* , dois do tipo B^* e um do tipo G^* . Chame estes vértices de r_1, r_2, b_1, b_2 e g respectivamente. Usando a afirmação 5.12, podemos assumir que todas as arestas dentro dos conjuntos A_2, B_2, C_2, D_2 são **verdes**. Agora, como ainda não escolhemos qual dos conjuntos $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}$ é $\tilde{D}_2$, ou seja, qual deles é o que tem ordem $n/2 - 2$, podemos assumir sem perda da generalidade que r_1X, r_1Y, r_2X, r_2W são **vermelhas**. Daí, usando que b_1 e b_2 são do tipo B^* , pelo menos uma das colorações representadas na figura seguinte ocorre em $H \setminus g$.

Se em qualquer das colorações $D_2 = X$ ou $D_2 = Y$, então podemos adicionar r_1 a W' e r_2 a Z' e depois encontrar um C_n vermelho em $G[\tilde{Z}, \tilde{W}]$, usando o lema 5.8. Nas colorações 1 e 3 se $D_2 = W$ poderíamos adicionar b_1 a X' e b_2 a Z' e depois encontrar um C_n azul em $G[\tilde{X}, \tilde{Z}]$, também usando o lema 5.8. Do mesmo modo, nos casos 2 e 4, se $D_2 = Z$, podemos encontrar um C_n azul em $G[\tilde{Y}, \tilde{W}]$. As outras quatro possibilidades precisam de um pouco mais de trabalho.

Caso 1 e $D_2 = Z$: Se a aresta $\{b_2, W\}$ fosse azul então o vértice b_2 seria do tipo $B1$. Mas, neste caso, teríamos dois vértices do tipo $B1$ em F e isto nos daria um C_n . Se a aresta $\{b_2, W\}$ fosse vermelha então poderíamos adicionar os vértices b_2 e r_2 ao conjunto Z' e o vértice r_1 a W' e depois encontrar um C_n vermelho em $G[Z, W]$, usando o lema 5.8. Portanto, $\{b_2, W\}$ deve ser exclusiva da cor verde. Um argumento semelhante mostra que $\{b_1, W\}$ deve ser exclusiva da cor verde. Mas agora podemos adicionar b_1 e b_2 ao conjunto X' . Depois disso teremos $|X| = n/2 + 1$ e $|W| = n/2 - 1$. Mas, lembre-se que as arestas dentro de X são todas verdes, então podemos usar o lema 5.9 para achar um C_n verde. Isto encerra este caso.

Caso 2 e $D_2 = W$: Agora, a aresta $\{b_2, Y\}$ não pode ser azul (pois neste caso

teríamos dois vértices do tipo $B1$) e não pode ser **vermelha** (pois poderíamos adicionar b_2 a X' e r_2 a Y' e depois achar um C_n **vermelho**). Portanto, $\{b_2, Y\}$ deve ser **verde**. Do mesmo modo a aresta $\{r_2, Z\}$ não pode ser **vermelha** (pois teríamos dois vértices do tipo $R1$) nem **azul** (pois poderíamos adicionar b_2 a Z' e r_2 a X' e depois encontrar um C_n **azul** em $G[\tilde{X}, \tilde{Z}]$). Portanto, $\{b_2, Y\}$ deve ser **verde**, mas, neste caso, podemos adicionar r_2 a Y' e b_2 a Z' e depois encontrar C_n **verde** em $G[\tilde{Y}, \tilde{Z}]$.

Os outros casos são quase idênticos, então apenas indicamos para quais arestas precisamos olhar.

Caso 3 e $D_2 = Z$: Primeiro $\{b_2, Y\}$ deve ser **verde**. Segundo $\{r_1, Y\}$ deve ser **verde**. Também $\{b_1, Y\}$ deve ser **verde**. Então podemos encontrar um C_n **verde** em $G[\tilde{Y}, \tilde{Z}]$ após adicionar b_1, b_2 e r_1 ao conjunto Z' .

Caso 4 e $D_2 = W$: Primeiro, $\{b_2, Y\}$ deve ser **verde**. Também $\{r_1, Y\}$ deve ser **verde**. Então podemos achar um C_n **verde** em $G[\tilde{Y}, \tilde{Z}]$ após adicionar b_2 e r_1 ao conjunto Z' . ■

5.4 Prova do lema 5.4

Prova. Considere uma 3-coloração de K_{2n} e seja $V(K_{2n}) = A \cup B \cup C \cup D$ uma partição que satisfaz as condições da EC_2 .

Como na prova do lema anterior, primeiro removemos de A todos os vértices que não possuem grau alto em B, C ou D nas cores apropriadas, então todos os vértices de B que não possuem grau alto em A, C ou D nas cores apropriadas. Então todos os vértices de C e D que não possuem grau alto em $A \cup B$ na cor apropriada. Mais precisamente, um vértice $v \in A$ é removido se

$$\deg_R(v, B) < (1 - \alpha^{1/2})|B|, \quad \deg_G(v, C) < (1 - \alpha^{1/2})|C| \quad \text{ou} \quad \deg_B(v, D) < (1 - \alpha^{1/2})|D|.$$

Pelas condições de densidade em EC_1 segue que o número de tais vértices excepcionais em A é no máximo $6\alpha^{1/2}|A|$. Um vértice $v \in B$ é removido se

$$\deg_R(v, A) < (1 - \alpha^{1/2})|A|, \quad \deg_G(v, C) < (1 - \alpha^{1/2})|C| \quad \text{ou} \quad \deg_B(v, D) < (1 - \alpha^{1/2})|D|.$$

Um vértice $v \in C$ é removido se

$$\deg_G(v, A \cup B) < (1 - \alpha^{1/2})(|A| + |B|),$$

e finalmente um vértice $v \in D$ é removido se

$$\deg_B(v, A \cup B) < (1 - \alpha^{1/2})(|A| + |B|).$$

Ao todo, estes somam no máximo $12\alpha^{1/2}n$ vértices excepcionais. Como antes, colocamos estes vértices em um novo conjunto chamado E_1 . E, como antes, definimos $A_1 = A \setminus E_1$, $B_1 = B \setminus E_1$, $C_1 = C \setminus E_1$, $D_1 = D \setminus E_1$.

Agora, todos os vértices em A_1 são adjacentes a pelo menos $(1 - 7\alpha^{1/2})|B| \geq (1 - 7\alpha^{1/2})|B_1| \geq (1 - \alpha^{1/3})|B_1|$ vértices em B_1 através de arestas **vermelhas** e o análogo vale para os outros conjuntos e cores. Se $|C_1| \geq n/2$ é fácil achar um C_n monocromático gulosamente em $[C_1, A_1 \cup B_1]$. De modo análogo é fácil acabar se $|D_1| \geq n/2$. Logo, suponha que $|C_1|, |D_1| < n/2$. Sejam $|C_1| = \frac{n}{2} - c$ e $|D_1| = \frac{n}{2} - d$, onde $c, d > 0$.

Afirmamos que não existe um caminho **verde** em A_1 (nem em B_1) de ordem $2c + 1$ assim como não existe caminho **azul** em A_1 (ou em B_1) de ordem $2d + 1$. Suponha que P é um tal caminho em A_1 , com ordem $2c + 1$ e extremidades a_1 e a_2 . Note que c é muito pequeno, certamente menor que $\alpha^{1/3}n/2$.

Como todos os vértices de $A_1 \cup B_1$ têm grau **verde** alto em C_1 , podemos achar $c_1 \neq c_2 \in C_1$ tais que as arestas a_1c_1 e a_2c_2 são **verdes**. Agora, quaisquer dois vértices em C_1 têm pelo menos $|A_1 \cup B_1| - 2\alpha^{1/3}|A_1 \cup B_1| - 2k_C > |C_1|$ vizinhos **verdes** em comum em $A_1 \cup B_1 \setminus V(P)$. Daí, podemos de maneira gulosa encontrar um caminho **verde** P' , começando em c_1 e terminando em c_2 que não passa por $V(P)$ e passa por todos os vértices de C_1 . Então $P \cup P'$ é nosso C_n monocromático.

Pelo lema 5.6, A_1 (resp., B_1) contém no máximo $(2c-1)|A_1|/2$ (resp., $(2c-1)|B_1|/2$) arestas **verdes** e no máximo $(2d-1)|A_1|/2$ (resp., $(2d-1)|B_1|/2$) arestas **azuis**. Agora, removemos de A_1 e B_1 todos os vértices adjacentes a mais que $\alpha^{1/6}n$ vértices de $A_1 \cup B_1$ através de arestas **verdes** ou **azuis** e os colocamos em E_1 . Chamamos os novos conjuntos de A_2, B_2, C_2, D_2 e E_2 (veja que $C_2 := C_1$ e $D_2 := D_1$, mas trocamos os índices de todos os conjuntos para manter a notação simples). Note que removemos no máximo $4\alpha^{1/6}n$ vértices, assim $|E_2| \leq 5\alpha^{1/6}n$. Feito isto, o que obtemos é que o grafo $G^R[A_2 \cup B_2]$, induzido pelas arestas **vermelhas** de $A_2 \cup B_2$, tem grau mínimo $|A_2 \cup B_2| - 5\alpha^{1/6}n$, ou seja, é quase completo.

Estamos chegando ao ponto final. Sejam $n_{AB} = n - |A_2 \cup B_2|$, $n_C = n/2 - |C_2|$, e $n_D = n/2 - |D_2|$. Se $n_{AB} < 1$, então estamos feitos já que $G^R[A_2 \cup B_2]$ é hamiltoniano, por Dirac. Logo, suponha que $n_{AB} \geq 1$.

Suponha agora que existem $k = n_C < \alpha^{1/6}n$ vértices em E_2 , cada um com pelo menos $n/16$ vizinhos **verdes** em $A_2 \cup B_2$. Sejam $e_1, \dots, e_k$ tais vértices. Como e_i tem pelo menos $n/16$ vizinhos **verdes** em $A_2 \cup B_2$, podemos escolher para cada e_i dois desses vizinhos a_i, b_i de modo que $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ sejam dois a dois distintos.

Daí, tomamos um vizinho **verde** $c_1 \in C_2$ de a_1 , e um vizinho **verde** $c_{k+1} \in C_2$ de b_k , e para cada par de vértices b_{i-1}, a_i , com $i = 2, \dots, k$, tomamos um de seus vizinhos **verdes** $c_i \in C_2$ em comum. Novamente, os c_i 's podem ser escolhidos dois a dois distintos já que quaisquer dois vértices de $A_2 \cup B_2$ têm pelo menos $|C_2| - 2\alpha^{1/6}n/2 > 2k$ vizinhos

verdes em C_2 em comum. Podemos também encontrar de maneira gulosa um c_1, c_{k+1} -caminho verde que não passa pelos vértices a_i, b_i, c_i 's e satura todos os demais vértices de C_2 , já que todos os pares de vértices em C_2 têm uma vizinhança comum grande em $A_2 \cup B_2$. Com isto, temos um C_n verde.

Dai, resta o caso em que há menos que $n_C < \alpha^{1/6}n$ vértices em E_2 que possuem grau verde maior ou igual a $n/16$ em $A_2 \cup B_2$. Do mesmo modo, podemos assumir que há menos que $n_D < \alpha^{1/6}n$ vértices em E_2 que possuem grau azul maior ou igual a $n/16$ em $A_2 \cup B_2$.

Então, existem pelo menos $2n - |A_2 \cup B_2| - |C_2| - |D_2| - (n_C - 1) - (n_D - 1) > n - |A_2 \cup B_2| = n_{AB}$ vértices em E_2 , cada um com pelo menos $|A_2 \cup B_2| - 2(n/16) > 2|A_2 \cup B_2|/3$ vizinhos vermelhos em $A_2 \cup B_2$. Seja F um conjunto de n_{AB} vértices desse tipo.

Assim o grafo $G^R[A_2 \cup B_2 \cup F]$, induzido pelas arestas vermelhas de $A_2 \cup B_2 \cup F$, é hamiltoniano (por Dirac) e tem n vértices. Logo, ele contém um C_n vermelho. ■

Referências Bibliográficas

- [1] L. Babai, M. Simonovits, and J. Spencer, *Extremal subgraphs of random graphs*, Journal of Graph Theory **14** (1990), no. 5, 599–622.
- [2] F. Benevides and J. Skokan, *The 3-colored Ramsey number of even cycles*, working notes, 2007.
- [3] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] J. A. Bondy and P. Erdős, *Ramsey numbers for cycles in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **14** (1973), 46–54.
- [5] V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi, and W. T. Trotter, Jr., *The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **34** (1983), no. 3, 239–243.
- [6] E.J. Cockayne and P.J. Lorimer, *The Ramsey number for stripes*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **19** (1975), 252–256.
- [7] Reinhard Diestel, *Graph theory*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [8] P. Erdős and M. Simonovits, *An extremal graph problem*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **22** (1971/1972), 275–282.
- [9] R.J. Faudree and R.H. Schelp, *Path Ramsey numbers in multicolorings*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **19** (1975), 150–160.
- [10] A. Figaj and T. Łuczak, *The Ramsey number for a triple of long even cycles*, Journal of Combinatorial Theory, Series B (2006), InPress.
- [11] Z. Füredi and A. Gyárfás, *Covering t -element sets by partitions*, European Journal of Combinatorics **12** (1991), 483–489.
- [12] Z. Füredi, O. Pikhurko, and M. Simonovits, *The Turán density of the hypergraph $\{abc, ade, bde, cde\}$* , Electronic Journal of Combinatorics **10** (2003), Research Paper 18, 7 pp. (electronic).

- [13] ———, *On triple systems with independent neighbourhoods*, Combinatorics, Probability and Computing **14** (2005), no. 5-6, 795–813.
- [14] Z. Füredi and M. Simonovits, *Triple systems not containing a Fano configuration*, Combinatorics, Probability and Computing **14** (2005), no. 4, 467–484.
- [15] L. Gerencsér and A. Gyárfás, *On Ramsey-type problems*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **10** (1967), 167–170.
- [16] R. L. Graham, B. L. Rothschild, and J. H. Spencer, *Ramsey theory*, second ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, A Wiley-Interscience Publication.
- [17] A. Gyárfás, M. Ruszinkó, G. N. Sárközy, and E. Szemerédi, *Three color Ramsey numbers for paths*, Combinatorica **27** (2007), no. 3, 35–69.
- [18] P. Keevash and B. Sudakov, *The Turán number of the Fano plane*, Combinatorica **25** (2005), no. 5, 561–574.
- [19] Y. Kohayakawa, M. Simonovits, and J. Skokan, *The 3-colored Ramsey number of odd cycles*, Proceedings of Brazilian Symposium on Graphs and Combinatorics (GRACO2005), Angra dos Reis, vol. 19, 2005, pp. 397–402.
- [20] G. Károlyi and V. Rosta, *Generalized and geometric Ramsey numbers for cycles*, Theoretical Computer Science **263** (2001), 87–98.
- [21] L. Lovász and M. Simonovits, *On the number of complete subgraphs of a graph*, Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (Univ. Aberdeen, 1975) (Winnipeg, Man.) (Aberdeen), Utilitas Math., 1976, Congressus Numerantium, No. XV., pp. 431–441.
- [22] ———, *On the number of complete subgraphs of a graph. II*, Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975) (Winnipeg, Man.), Studies in pure mathematics (Basel), Birkhäuser, 1983, pp. 459–495.
- [23] T. Łuczak, $R(C_n, C_n, C_n) \leq (4 + o(1))n$, Journal of Combinatorial Theory, Series B **75** (1999), 174–187.
- [24] S. P. Radziszowski, *Small Ramsey numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **1** (1994), Dynamic Survey 1, 30 pp. (electronic).
- [25] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 104–109.
- [26] M. Simonovits, *A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems*, Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966) (New York), Academic Press, 1968, pp. 279–319.
- [27] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969), 89–104.

-
- [28] ———, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.
- [29] Endre Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.
- [30] Paul Turán, *Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 436–452.