**Aplicação do método do Gradiente
Espectral Projetado ao problema de
*Compressive Sensing***

Boris Chullo Llave

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Programa: Ciências da Computação
Orientador: Prof. Ernesto G. Birgin

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, outubro de 2012

Aplicação do método do Gradiente Espectral Projetado ao problema de *Compressive Sensing*

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 19/09/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ernesto Julian Goldberg Birgin (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Ronaldo Fumio Hashimoto - IME-USP
- Prof. Dr. Luis Felipe Cesar da Rocha Bueno - UNIFESP

Dedico este trabalho a Deus que com sua companhia e santa presença foi possível finalizar este trabalho. Dedico também este trabalho a minha família, pela paciência e amor, que me motivaram a continuar na luta diária, especialmente nos momentos difíceis. Dedico também este trabalho à mulher que se torno em minha amiga e companheira, sem cujo amor não teria sido possível finalizar este trabalho: minha noiva Ruth Tito Champi.

Resumo

A teoria de *Compressive Sensing* proporciona uma nova estratégia de aquisição e recuperação de dados com bons resultados na área de processamento de imagens. Esta teoria garante recuperar um sinal com alta probabilidade a partir de uma taxa reduzida de amostragem por debaixo do limite de Nyquist-Shanon. O problema de recuperar o sinal original a partir das amostras consiste em resolver um problema de otimização. O método de Gradiente Espectral Projetado é um método para minimizar funções suaves em conjuntos convexos que tem sido aplicado com frequência ao problema de recuperar o sinal original a partir do sinal amostrado. Este trabalho dedica-se ao estudo da aplicação do Método do Gradiente Espectral Projetado ao problema de *Compressive Sensing*.

Palavras-chave: Compressive Sensing, Otimização Contínua, Processamento de Imagens, Gradiente Espectral Projetado.

Abstract

The theory of compressive sensing has provided a new acquisition strategy and data recovery with good results in the image processing area. This theory guarantees to recover a signal with high probability from a reduced sampling rate below the Nyquist-Shannon limit. The problem of recovering the original signal from the samples consists in solving an optimization problem. The Spectral Projected Gradient (SPG) is a method to minimize continuous functions over convex sets which often has been applied to the problem of recovering the original signal from sampled signals. This work is dedicated to the study and application of the Spectral Projected Gradient method to Compressive Sensing problems.

Keywords: Compressive Sensing, Continuous Optimization, Image Processing, Spectral Projected Gradient.

Sumário

1	Introdução	1
2	Visão global de <i>Compressive Sensing</i>	4
2.1	O problema de <i>Compressive Sensing</i>	4
2.2	A base Wavelet Ψ	11
2.2.1	A transformada de Haar	11
2.2.2	Funções base da transformada Haar	12
2.3	A matriz de medição Φ	16
3	Resolução do problema de otimização	18
3.1	Reformulação do problema	18
3.2	Análise do custo de avaliar a função objetivo e seu gradiente	19
3.3	Gradiente Espectral Projetado	25
4	Experimentos computacionais	30
4.1	Experimentos preliminares	30
4.2	Experimentos sem ruído	33
4.3	Experimentos com ruído	39
4.4	Experimentos de grande porte	48
5	Conclusões	61
	Referências Bibliográficas	63

Capítulo 1

Introdução

A aquisição e reconstrução de sinais é um ramo essencial no estudo de sistemas de processamento de sinais. O teorema de Nyquist-Shannon garante que é possível recuperar exatamente um sinal sempre que o sinal seja de banda limitada e a taxa de amostragem seja pelo menos duas vezes a maior frequência do espectro do sinal [38]. Este teorema, desde sua formulação, tem sido usado como ferramenta para estabelecer as frequências de amostragem mínimas de sinais analógicos. Recentemente, uma nova teoria chamada *Compressive Sensing* (CS), também conhecida como *Compressed Sensing* ou *Compressive Sampling*, foi proposta como um paradigma eficiente de aquisição e reconstrução de dados.

A teoria de *Compressive Sensing* foi desenvolvida inicialmente por Emmanuel Candès em [18] e Donoho em [51] e assegura que um sinal pode ser recuperado dado um número pequeno de medições lineares aleatórias. Isto significa que é possível reconstruir um sinal $x \in \mathbb{R}^n$ k -esparso no domínio Ψ , mediante m medições lineares $y = \Phi x$, em que $m \gtrsim k \log n$. Comparado com a teoria tradicional de amostragem de Nyquist-Shannon, o CS provê uma grande redução na taxa de amostragem, consumo de energia e complexidade computacional na aquisição e representação de um sinal esparso.

Compressive Sensing é um campo que tem sido impulsionado largamente por avanços teóricos e práticos que fornecem tanto a motivação como a direção para as aplicações. Dentre as aplicações que envolvem o uso de *Compressive Sensing* na aquisição e recuperação de sinais podemos mencionar: a câmera de um *pixel*, ressonância magnética em imagens médicas e prospecção geofísica ou sismologia, dentre outras.

O processo de amostragem pode ser interpretado como produtos internos do sinal a considerar $x \in \mathbb{R}^n$ com uma coleção de vetores de teste $\{\phi_j\}_{j=1}^m$. Esta interpretação fornece uma ideia prática para fazer a amostragem dos dados sem a aquisição completa do sinal x . A câmera de um *pixel* [30] foi desenvolvida na Universidade de Rice [42] e é o dispositivo mais conhecido em *Compressive Sensing*. Para fazer a amostragem, este dispositivo usa um “computador óptico” e é composta de um dispositivo micro-espelho digital (DMD), duas lentes, um detector de fóton e um conversor analógico-digital [30]. O DMD consiste de um arranjo de n micro-espelhos, cada um dos quais corresponde a um *pixel* em x . Cada micro-espelho é configurado de forma a refletir

a luz em direção ao único pixel de recebimento, ou em alguma outra direção. Por sua vez, a lente foca a luz para o detector, que lê o produto interno (como uma tensão) entre a configuração atual dos micro-espelhos (um vector de uns e zeros) e os *pixels* de x . Esta tensão é digitalizada e o processo é repetido para m diferentes configurações aleatórias dos espelhos. A configuração do sistema permite dar valores de ± 1 nas entradas de cada ϕ_i e assim, obter as m amostras $y = \Phi x$. Considerando que a imagem é compressível numa base adequada, pode-se então obter uma aproximação da imagem original usando um algoritmo de CS. Além dos benefícios usuais de CS, esta arquitetura permite o uso de vários tipos de detectores [30], incluindo espectrômetros e fotodiodos que são, por exemplo, sensíveis a diferentes comprimentos de onda. Uma vez que o custo de um arranjo de m detectores pode ser elevado, o uso deste aplicativo restringe-se a situações nas quais o custo do sensoreamento é excessivamente alto.

Na área de imagens médicas, em especial, na Ressonância Magnética (MR), em que se medem os coeficientes de Fourier das imagens, a teoria de CS encontra uma aplicação importante. As imagens de MR são implicitamente esparsas. Algumas imagens de MR, tais como angiogramas, são esparsas em seu próprio domínio de representação (base canônica), enquanto outras imagens de MR mais complexas são esparsas em outro domínio como, por exemplo, as *wavelet*. Como sabemos, o processo de Ressonância Magnética em geral é muito custoso no que se refere ao tempo de aquisição das imagens. Assim, seria muito útil reduzir o tempo de amostragem sem sacrificar a qualidade da imagem. Em [41], explora-se a esparsidade das imagens de MR para, juntamente com CS, conseguir reduzir significativamente o tempo de aquisição dos dados.

Os dados sísmicos são coletados geralmente em tabelas multidimensionais e envolvem informação acima dos Terabytes. De forma simplificada, o processo de aquisição é realizado como segue. No processo de aquisição utilizam-se várias fontes colocadas na superfície da terra. Estas fontes transmitem energia através do subsolo. Subsequentemente, a resposta de cada receptor é recolhida e armazenada. Motivados pela teoria de CS, Hennenfent e Herrmann [37] propuseram um paradigma alternativo de aquisição que consiste na utilização de um número reduzido de fontes e receptores colocados numa grade subamostrada aleatoriamente perturbada. Observando-se que os dados sísmicos são esparsos, por exemplo, no domínio *curvelet* [37], a recuperação do sinal pode-se modelar como um problema de CS.

O CS baseia-se nos conceitos de “esparsidade” e “incoerência”, que são propriedades do sinal de interesse e da matriz de medição, respectivamente. A esparsidade indica o grau em que a informação contida no sinal pode ser concisamente representada em uma base Ψ escolhida adequadamente. Em outras palavras, o numero de coeficientes não nulos no domínio da base fornece uma medida da compressibilidade do sinal. A incoerência, por outro lado, proporciona uma medida do grau de semelhança entre a matriz de medição Φ e a base Ψ . Para alcançar um elevado grau de precisão na reconstrução de um sinal, um esquema de CS requer que o sinal de interesse seja muito esparso no domínio Ψ e que a matriz de medição seja o mais incoerente possível com relação à matriz da base esparsa Ψ .

Infelizmente, encontrar Ψ e Φ adequadas não é uma tarefa trivial. Por um lado, a natureza

de Φ esta ligada fortemente à construção de dispositivos de aquisição, quer dizer, o desenho da matriz de aquisição Φ deve ser simples. Por outro lado, a coerência com relação à matriz base esparsa Ψ deve ser muito baixa. O modelo de matriz de medição que utilizaremos neste texto é descrito em [52], onde brevemente são estudadas as matrizes de medição existentes e propõe-se um novo desenho altamente incoerente com as muitas bases conhecidas. Após feita a amostragem, algoritmos de reconstrução devem ser aplicados para recuperar o sinal original a partir das amostras. Esta reconstrução baseia-se na resolução de um problema de otimização. O método do Gradiente Espectral Projetado (SPG) introduzido em [12, 16] é um método utilizado para minimizar funções suaves em conjuntos convexos. Neste trabalho de mestrado estudaremos a aplicação do SPG à versão ponderada do problema de *Compressive Sensing* considerada em [33].

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2 introduziremos formalmente o problema de *Compressive Sensing* e estudaremos o problema de otimização que consiste em recuperar o sinal original a partir das amostras. No Capítulo 3 analisaremos em detalhe o problema de otimização e a forma de resolução usando o SPG. No Capítulo 4 apresentaremos e analisaremos experimentos computacionais. Conclusões finais serão apresentadas no Capítulo 5.

Notação:

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a norma ℓ_p de $x \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Em particular, para $p = 1, 2, \infty$, temos que:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Seja um subconjunto de índices $T \subseteq \{1, \dots, n\}$, denotamos por $x_T \in \mathbb{R}^n$ o vetor com entradas x_i para cada $i \in T$, e zero para os índices fora de T . Similarmente, se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $A_T \in \mathbb{R}^{n \times |T|}$ denota as colunas de A correspondentes aos índices em T , em que $|T|$ é a cardinalidade de T . $T^c = \{1, \dots, n\} \setminus T$ denota o complemento de T . O núcleo da matriz A é denotado como $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Uma base de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um conjunto de vetores em $\mathbb{V}$ linearmente independentes que geram esse espaço. Se os vetores de uma base $\mathbb{V}$ são ortogonais entre si e tem norma Euclidiana unitária, dizemos que $\mathbb{V}$ é uma base ortonormal.

Capítulo 2

Visão global de *Compressive Sensing*

Atualmente, muitas técnicas de compressão de imagens como JPG e JPG2000 [27] baseiam-se em estratégias adaptativas de recolha de informação. Estes algoritmos constroem uma representação esparsa completa de um sinal amostrado, para depois armazenar os coeficientes mais significativos¹, definindo assim um sinal menor ou um sinal comprimido.

Em essência, a teoria de CS é motivada pela seguinte questão citada por Donoho [51]: “*Por quê fazer tanto esforço para adquirir todos os dados quando a maior parte deles será descartada? Não podemos simplesmente medir diretamente a parte que não será descartada?*”. Se fossem conhecidas *a priori* as posições dos coeficientes mais significativos, teríamos a imagem comprimida medindo estes coeficientes e ignorando a informação restante. No entanto, por um lado não conhecemos a informação inteira do sinal, e muito menos as posições dos coeficientes significativos, e, por outro lado contamos apenas com um esquema de medição não adaptativo no sentido de que o mesmo esquema é utilizado no procedimento de captura de sinais diversos. Assim, CS é um paradigma de aquisição de dados que tenta realizar simultaneamente o processo de amostragem e a redução de dimensionalidade, no pressuposto de que o sinal é esparso.

Neste capítulo apresentamos formalmente o problema de *Compressive Sensing* e apresentamos exemplos de bases esparsas e matrizes de medição. O capítulo termina com a formulação do problema de otimização relacionado à recuperação da imagem original a partir das amostras.

2.1 O problema de *Compressive Sensing*

Nesta seção apresentamos a formulação matemática do problema de *Compressive Sensing* e as definições formais de algumas terminologias que serão utilizadas mas adiante.

Seja um sinal $x \in \mathbb{R}^n$ e uma base ortonormal $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, tal que a representação do sinal na base é dada por:

$$x = \sum_{i=1}^n s_i \psi_i, \quad (2.1)$$

¹Esta etapa é chamada codificação e tem como objetivo mapear os coeficientes significativos na menor sequência de bits possível.

onde $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ é o vetor de coeficientes da expansão de x . Se denotamos $\Psi = [\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n]^T$ temos

$$x = \Psi^T s. \quad (2.2)$$

Como Ψ é uma matrix ortogonal segue-se que $s = \Psi x$. Substituindo s em (2.2) temos que

$$x = \Psi^T \Psi x = \sum_{i=1}^n (\psi_i^T x) \psi_i. \quad (2.3)$$

Quer dizer, temos $s_i = \langle \psi_i, x \rangle$. Se s é esparso então é possível descartar os coeficientes menos significativos de s sem ter uma perda perceptível no sinal.

Formalmente, dado p , definimos o conjunto S_p , formado pelos índices dos p coeficientes de maior módulo em s e consideramos $\hat{x} = \Psi^T s_{S_p}$ ou $s_{S_p} = \Psi \hat{x}$. Nestas condições, o vetor s_{S_p} é chamado $|S_p|$ -esparso dado que tem no máximo $|S_p|$ elementos diferentes de zero. Uma vez que Ψ é uma matriz ortogonal, temos $\|x - \hat{x}\|_2 = \|\Psi x - \Psi \hat{x}\|_2 = \|s - s_{S_p}\|_2$ e, se s_{S_p} é uma boa aproximação esparsa de s , no sentido de que todas as componentes significativas de s fazem parte de s_{S_p} então $\|s - s_{S_p}\|_2$ é pequena e, portanto, $\hat{x}$ é uma boa aproximação de x [20].

Mais genericamente, o nível de esparsidade de um sinal indica quão aproximado pode ser o sinal resultante após a reconstrução. Determina também quão reduzido pode ser o número de amostras necessárias para recuperar o sinal.

Seja um sinal $x \in \mathbb{R}^n$ k -esparso no domínio Ψ . Quer dizer, $x = \Psi^T s$ e s é k -esparso (i.e. tem no máximo k componentes não nulas). O esquema de aquisição consiste em reunir amostras a partir de produtos internos do sinal x com vetores de teste $\{\phi_i\}_{i=1}^m$, em que $m \ll n$ (veja a Figura 2.1). Assim, adquirimos m medições $y_i = \langle \phi_i, x \rangle$, $i \in \{1, \dots, m\}$, isto é

$$y_1 = \langle \phi_1, x \rangle, y_2 = \langle \phi_2, x \rangle, \dots, y_m = \langle \phi_m, x \rangle. \quad (2.4)$$

Em notação matricial, podemos representá-lo sucintamente como $y = \Phi x$, onde a matriz de medição Φ é composta de linhas ϕ_i^T e $y \in \mathbb{R}^m$. Logo, temos que

$$y = \Phi x = \Phi \Psi^T s = \Theta s, \quad (2.5)$$

onde $\Theta = \Phi \Psi^T$, $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \ll n$ e $m \gtrsim k \log n$. Veja a Figura 2.2.

Dado que o número de equações é menor que o número de variáveis, existem infinitas soluções que satisfazem (2.5). Neste ponto a esparsidade joga um papel muito importante já que, dentre todas estas soluções, procuramos a solução mais esparsa. Mesmo nos restringindo a soluções k -esparsas, não é possível garantir que a solução será única. A unicidade pode ser conseguida se a matriz de medição Φ e a matriz da base Ψ forem incoerentes entre si [17].

Apenas como exemplo, note que se $\phi_i = (1, \dots, 1)^T$, $i = 1, \dots, m$, então teríamos $y_i = \sum_{j=1}^n x_j$, $i =$

Figura 2.1: Vectorização de uma imagem e extração das m medições lineares (extraída de [48]).

Figura 2.2: (a) Representação esparsa do sinal x no domínio Ψ (as entradas claras em s representam coeficientes pouco significativos) e extração das amostras y de x utilizando a matriz de amostragem Φ . (b) Representação gráfica do problema geral (veja que $\Theta = \Phi\Psi^T$) (extraída de [48]).

$1, \dots, m$, e seria impossível recuperar o sinal x dessas m medições idênticas.

A propriedade de isometria restrita é um conceito introduzido em [21] que demonstrou ser muito útil na teoria geral de CS. Como será mostrado posteriormente, este conceito fornece uma ferramenta muito conveniente para determinar condições suficientes que garantam a reconstrução exata do sinal esparsa para diferentes algoritmos de reconstrução.

Definição 1 [21]: Seja $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $1 \leq k \leq n$. Diz-se que Θ satisfaz a k -ésima propriedade de isometria restrita se existe uma constante δ_k tal que

$$(1 - \delta_k)\|s\|_2^2 \leq \|\Theta s\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|s\|_2^2, \quad (2.6)$$

para todo s k -esparso, $s \in \mathbb{R}^n$.

Se uma matriz Θ satisfaz a k -ésima propriedade de isometria restrita com δ_k “pequeno” então

Θ comporta-se quase como uma matriz ortogonal quando enxergada como uma transformação linear aplicada a vetores k -esparsos.

O seguinte exemplo, apresentado em [21], reflete a conexão entre a propriedade de isometria restrita e a teoria de CS. Suponha que desejamos recuperar um sinal p -esparso com $p \leq k$ a partir de m amostras feitas no sinal. Isto é, procuramos s' o mais esparso possível que satisfaça $\Theta s' = y$, o que nos leva a formular o problema conhecido como minimização ℓ_0 , dado por

$$\min \|s\|_0 \text{ sujeita a } \Theta s = y, \quad (2.7)$$

onde $\|s\|_0 = \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid s_i \neq 0\}$.

É possível ver que se a matriz Θ satisfizer a $2k$ -ésima propriedade de isometria restrita com constante $\delta_{2k} < 1$ então o problema (2.7) terá solução p -esparsa com $p \leq k$ única. Suponha por contradição que existem duas soluções diferentes p -esparsas s_1 e s_2 com $p \leq k$ tais que $\Theta s_1 = \Theta s_2 = y$. Consideremos $z = s_1 - s_2$, que, claramente, tem no máximo $2k$ entradas diferentes de zero, isto é, o vetor z é $2k$ -esparso. Logo

$$\Theta z = \Theta(s_1 - s_2) = \Theta s_1 - \Theta s_2 = 0. \quad (2.8)$$

De (2.8) segue que $\|\Theta z\|_2^2 = 0$. Logo, da Definição 1, segue-se que

$$(1 - \delta_{2k})\|z\|_2^2 \leq \|\Theta z\|_2^2 = 0. \quad (2.9)$$

De (2.9) temos que $(1 - \delta_{2k}) \leq 0$, pois $\|z\|_2^2 > 0$ já que $z = s_1 - s_2$ e $s_1 \neq s_2$ por hipótese, contradizendo a hipótese de que $\delta_{2k} < 1$.

As constantes de isometria restrita são difíceis de calcular [5] e referem-se à matriz $\Theta = \Phi \Psi^T$. Veremos agora uma propriedade que relaciona a matriz de medição Φ e a matriz da base esparsa Ψ .

Definição 2 [29]: *Sejam $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\|\phi_i\|_2 = 1, i = 1, \dots, m$ e $\|\psi_j\|_2 = 1, j = 1, \dots, n$. Definimos a coerência entre Φ e Ψ como*

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{|\langle \phi_i, \psi_j \rangle|\}. \quad (2.10)$$

Uma propriedade muito importante da matriz de medição é a incoerência, introduzida por Donoho e Huo em [29]. Este conceito pede que a matriz de medição Φ seja tal que, dada a matriz da base esparsa Ψ , $\mu(\Phi, \Psi)$ em (2.10) seja o menor possível. Isto é, se, por exemplo, a matriz de medição Φ fosse formada por m linhas da base esparsa Ψ selecionadas aleatoriamente, então um grande número de coeficientes nulos seria amostrado e não haveria informação suficiente para reconstruir o sinal. No entanto, se Φ e Ψ são incoerentes, no sentido de que não existe relação entre as linhas de Φ e as colunas de Ψ , uma grande informação será adquirida do sinal. Assim,

em cada medição, aprende-se algo novo sobre o sinal.

Se Φ e Ψ contêm elementos correlacionados, a coerência entre elas será grande. Caso contrário, será pequena. É possível ver que $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$. No exemplo do parágrafo anterior, $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n}$ (máxima coerência). Da definição (2.10) e a desigualdade Cauchy-Schwarz temos que

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{|\langle \phi_i, \psi_j \rangle|\} \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{\|\phi_i\| \|\psi_j\|\} = \sqrt{n}.$$

Por outro lado, da ortonormalidade da matriz Ψ , temos que

$$\sum_{j=1}^n (|\langle \phi_i, \psi_j \rangle|)^2 = \|\Psi^T \phi_i\|_2^2 = \|\phi_i\|_2^2 = 1, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

$\sum_{j=1}^n (|\langle \phi_i, \psi_j \rangle|)^2 = 1$ para $i = 1, \dots, m$ implica que, dado $1 \leq i \leq m$, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $|\langle \phi_i, \psi_j \rangle| \geq 1/\sqrt{n}$. Logo, $\max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{|\langle \phi_i, \psi_j \rangle|\} \geq 1/\sqrt{n}$ e, portanto, $\mu(\Phi, \Psi) \geq 1$. Concluimos que $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$ como queríamos mostrar.

Dados Φ e Ψ , calcular a coerência $\mu(\Phi, \Psi)$ é uma tarefa simples que envolve calcular o máximo entre mn produtos internos. Por outro lado verificar se um valor dado corresponde à k -ésima contante de isometria restrita da matriz $\Theta = \Phi\Psi^T$ é uma tarefa difícil que envolve verificar (2.6) para todos os possíveis $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k colunas da matriz Θ . Mesmo que isso fosse possível, ainda restaria verificar que a constante dada é a menor dentre todas as que satisfazem (2.6) já que, caso isso não fosse feito, teríamos apenas um limitante superior da k -ésima constante de isometria restrita da matriz Θ . Em [7] foi mostrada uma relação entre a coerência das matrizes Φ e Ψ e as constantes de isometria restrita da matriz $\Theta = \Phi\Psi^T$:

$$\delta_k \leq (k-1)\mu(\Phi, \Psi)/\sqrt{n}. \quad (2.11)$$

Logo, se baseando apenas na incoerência das matrizes Φ e Ψ é possível determinar se a matriz $\Theta = \Phi\Psi^T$ é uma matriz adequada à formulação do problema de CS ou não.

Infelizmente resolver o problema de minimização ℓ_0 (2.7) é NP-difícil [35]. Porém, abordagens mais eficientes do ponto de vista computacional cujas soluções podem ser interpretadas como aproximações da solução de (2.7) são a minimização ℓ_1 e a minimização ℓ_2 , que serão abordadas a seguir.

O problema de minimização de norma ℓ_2 consiste em

$$\min \|s\|_2 \text{ sujeita a } \Theta s = y, \quad (2.12)$$

que é equivalente a resolver

$$\min \frac{1}{2} \|s\|_2^2 \text{ sujeita a } \Theta s = y. \quad (2.13)$$

As condições KKT para o problema (2.13) são:

$$s + \Theta^T \lambda = 0, \quad (2.14)$$

$$\Theta s = y. \quad (2.15)$$

Isolando s de (2.14) e substituindo em (2.15) temos

$$-\Theta\Theta^T \lambda = y. \quad (2.16)$$

Se $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \leq n$, tiver posto completo, então temos que $\Theta\Theta^T$ é não singular e de (2.16) segue-se que

$$\lambda = -(\Theta\Theta^T)^{-1}y. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.14) resulta

$$s^* = \Theta^T(\Theta\Theta^T)^{-1}y. \quad (2.18)$$

Infelizmente esta solução nem sempre fornece soluções esparsas.

O problema de minimização de norma ℓ_1 consiste em

$$\min \|s\|_1 \text{ sujeita a } \Theta s = y. \quad (2.19)$$

O problema (2.19) é conhecido como problema *basis pursuit* (BP) [22]. Surpreendentemente, este “relaxamento” muitas vezes recupera o sinal original desde que o sinal seja esparso no domínio Ψ . Note-se que a matriz Θ é dada e fixada antecipadamente e não depende do sinal. Porém, se o sinal for esparso e as matrizes Φ e Ψ forem incoerentes a minimização da norma ℓ_1 fornecera uma boa aproximação da solução do problema (2.7) [18] (veja a Figura 2.3).

Em aplicações reais, as amostras podem conter erros nas medições, isto é

$$y = \Theta s + \eta, \quad (2.20)$$

onde η é o erro derivado das medições. Neste contexto, procuramos um s que minimize o resíduo $\|y - \Theta s\|_2^2$ do sistema linear $\Theta s = y$ e, além disso, seja esparso. Então, nosso objetivo agora consiste em minimizar simultaneamente $\|s\|_1$ e $\|y - \Theta s\|_2^2$. Isto está dado pelo problema:

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left(\|s\|_1, \|y - \Theta s\|_2^2 \right). \quad (2.21)$$

O problema (2.21) é um tipo de problema de otimização com dois objetivos, conhecido como problema de otimização multiobjetivo [44]. Para uma descrição detalhada do problema de otimização multiobjetivo e as diferentes técnicas de resolução veja, por exemplo, [47].

Se o nível de ruído nos dados é conhecido ou pode ser estimado, o problema (2.21) pode ser

Figura 2.3: $\alpha = \operatorname{argmin} \|s\|_1$ sujeita a $\Theta s = y$ e $\beta = \operatorname{argmin} \|s\|_2$ sujeita a $\Theta s = y$. Note que $\alpha_2 = 0$ enquanto que $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$. De alguma forma o gráfico sugere que a minimização da norma ℓ_1 resulta ter soluções mais esparsas do que a minimização da norma ℓ_2 .

reduzido a resolver um problema da forma

$$\min \|s\|_1 \text{ sujeita a } \|y - \Theta s\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2.22)$$

conhecido como problema *basis pursuit denoise* (BP_ϵ), onde o parâmetro $\epsilon > 0$ é uma estimativa do nível de ruído nos dados. Claramente, se $\epsilon = 0$, a solução do problema BP_ϵ corresponde com a solução do problema BP.

O problema (BP_ϵ) (2.22) é uma das formas possíveis de atacar o problema (2.21). Outras formas possíveis incluem o problema de quadrados mínimos penalizado (QP_γ) [22] dado por

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \|y - \Theta s\|_2^2 + \gamma \|s\|_1, \quad (2.23)$$

e o problema *Lasso* (LS_τ) [50] dado por

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \|y - \Theta s\|_2^2 \text{ sujeita a } \|s\|_1 \leq \tau. \quad (2.24)$$

Para valores apropriados dos parâmetros ϵ , γ e τ , as soluções dos problemas BP_ϵ , QP_γ e LS_τ coincidem e, portanto, estes três problemas são de alguma forma equivalentes [31].

Em [31] aborda-se o problema BP_ϵ . O algoritmo proposto baseia-se no fato de que o problema BP_ϵ pode ser resolvido aplicando o método do Gradiente Espectral Projetado a uma sequência de problemas LS_τ . A aplicação eficiente do SPG ao problema LS_τ depende de forma crucial de um algoritmo com complexidade $O(n \log n)$ para calcular a projeção no conjunto convexo dado por $\|s\| \leq \tau$. Em [33], o problema QP_λ é abordado. A técnica utilizada consiste em

reformular o problema QP_λ (2.23) como um problema contínuo e diferenciável de minimizar uma função quadrática sujeita a restrições de caixa e resolve-lo utilizando o método SPG. Neste trabalho, seguindo a metodologia descrita em [33], consideraremos a resolução de uma sequência de problemas da forma (2.23).

2.2 A base Wavelet Ψ

As transformadas de *wavelets* podem ser vistas como mecanismos para decompor ou quebrar sinais nas suas partes constituintes, permitindo analisar os dados em diferentes domínios de frequências com a resolução de cada componente associada à sua escala.

As *wavelets* mais usadas (Haar [36] e Daubechies [43]) formam um sistema ortonormal de funções com suportes compactos construídos a partir de dilatações e translações. Ou seja, mediante as dilatações, elas podem distinguir as características locais de um sinal em diferentes escalas. Por outro lado, pelas translações, elas cobrem toda a região na qual o sinal é analisado. Se pudéssemos escolher os coeficientes das *wavelets* que melhor se adaptam aos dados, ou ignorássemos os coeficientes menores do que um valor previamente estabelecido, os dados poderiam ser esparsamente representados. Esta codificação esparsa faz das *wavelets* uma excelente ferramenta no campo de compressão de dados. Nas próximas subseções daremos ênfase à análise de sinais com *wavelets* de Haar.

2.2.1 A transformada de Haar

Nesta subseção discutiremos a descomposição de um sinal usando *wavelets* de Haar. Descreveremos ainda como é que essa descomposição, que chamaremos daqui em diante Transformada de Haar, pode levar a uma técnica simples de compressão de sinais.

Para ter uma noção de como funcionam as *wavelets*, começamos com um exemplo bem simples. Suponha que temos uma imagem unidimensional com uma resolução de 4 *pixels*, tendo os seguintes valores

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar essa imagem na base de Haar, calculando uma transformada *wavelet*. Para fazer isto, calculamos a média aritmética para pares de *pixels* consecutivos na imagem. Este resultado será denominado coeficiente médio. No exemplo, os coeficientes médios da imagem são:

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \end{bmatrix},$$

já que $\frac{1}{2}(8 + 6) = 7$ e $\frac{1}{2}(5 + 7) = 6$. Claramente notamos que alguma informação foi perdida neste processo. Para recuperar a imagem completa, precisamos armazenar informação adicional, que chamaremos coeficientes de detalhe, e armazenarão a informação desperdiçada. Em nosso exemplo, temos 1 como nosso primeiro coeficiente de detalhe, dado que o primeiro coeficiente médio computado é 1 menos do que 8 (primeiro *pixel* da imagem original) e 1 mais do que 6 (segundo *pixel* da imagem original). Este número apenas permite-nos recuperar os primeiros

dois *pixels* da imagem original de um total de 4 *pixels*. Similarmente, o segundo coeficiente de detalhe é -1 , visto que $6 + (-1) = 5$ e $6 - (-1) = 7$.

Assim, decompomos a imagem original em uma imagem com uma resolução mais baixa. Repetindo o processo iterativamente sobre os coeficientes médios calculados temos a decomposição completa:

<u>Resolução</u>	<u>Média</u>	<u>Detalhe</u>
4	$[8 \ 6 \ 5 \ 7]$	
2	$[7 \ 6]$	$[1 \ -1]$
1	$[6.5]$	$[0.5]$

Finalmente, a transformada *wavelet* (chamada também decomposição *wavelet*) da imagem original de 4 *pixels* é formada pelo único coeficiente que representa a média global da imagem original, seguido pelos coeficientes de detalhe, que permitem recuperar a resolução original. Assim, a transformada *wavelet* da imagem original é dada por

$$[6.5 \ 0.5 \ 1 \ -1].$$

Armazenar os coeficientes da imagem transformada, ao invés da imagem em si, trás uma série de vantagens. Uma vantagem da transformada *wavelet* é que muitas vezes muitos dos coeficientes de detalhe acabam por ser muito pequenos em magnitude. Truncar ou ignorar esses coeficientes pequenos, pode apresentar erros desprezíveis na imagem reconstruída, dando uma representação comprimida da imagem com pouca perda de informação.

2.2.2 Funções base da transformada Haar

Nesta subseção analisaremos em detalhe as funções que compõem a transformada de Haar, a imagem e sua representação esparsa.

Alternativamente, trataremos as imagens como funções com valores constantes no intervalo $[0, 1)$. Uma imagem de um *pixel* é uma função com valor constante em todo o intervalo $[0, 1)$. O espaço vetorial para estas funções será definido como V_0 . Assim, o espaço V_1 contém todas as imagens de dois *pixels*, que tomam valores constantes nos intervalos $[0, 1/2)$ e $[1/2, 1)$ e o espaço V_2 incluirá todas as imagens de quatro *pixels*, constantes nos intervalos $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$ e $[3/4, 1)$. Generalizando, o espaço V_j incluirá todas as imagens de 2^j *pixels*, constantes em 2^j subintervalos iguais do intervalo $[0, 1)$.

Podemos pensar em cada imagem unidimensional com 2^j *pixels* como um elemento, ou como um vetor de V_j . Note que estas funções são definidas em um intervalo unitário, então todos os vetores em V_j também estão contidos em V_{j+1} . Isto é,

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

Precisamos definir uma base para cada espaço vetorial V_j . As funções base para os espaços V_j são chamadas funções escala, e são denotadas usualmente como ϕ . A base para V_j é dada pelo conjunto de funções escala:

$$\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

em que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como exemplo, as Figuras 2.4(a-b) ilustram as duas e as quatro funções base para os espaços V_1 e V_2 , respectivamente.

Figura 2.4: (a) Funções base de V_1 . (b) Funções base de V_2

Definimos um novo espaço vetorial W_j como o *complemento ortogonal* de V_j em V_{j+1} . Em outras palavras, W_j será o espaço das funções em V_{j+1} ortogonais a todas as funções em V_j . Isto é,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (2.25)$$

Definimos a função *wavelet* dada por:

$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), \quad k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

onde ψ no caso da *wavelet* de Haar é definida como:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em [26] mostra-se que o conjunto $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k=0,\dots,2^j-1}$ forma uma base para o espaço W_j . As funções ψ e ϕ possuem duas propriedades importantes:

1. As funções base $\psi_{j,k}(x)$ do espaço W_j , sempre formam, com as funções base $\phi_{j,k}(x)$ do espaço V_j , uma base para o espaço V_{j+1} [26].

2. Todas as funções base $\psi_{j,k}(x)$ do espaço W_j são ortogonais a todas as funções base $\phi_{j,k}(x)$ do espaço V_j [26].

Assim, notamos que os coeficientes de detalhe da Seção 2.2.1 são de fato os coeficientes da base de funções *wavelet*. As Figura 2.5(a-b) mostram as duas e as quatro *wavelets* de Haar que geram o espaço W_1 e W_2 , respectivamente.

Figura 2.5: (a) As *wavelets* de Haar para o espaço W_1 . (b) As *wavelets* de Haar para o espaço W_2 .

Denotemos por $\mathcal{I}(x)$ a imagem de 4 *pixels* do exemplo da Seção 2.2.1. Então $\mathcal{I}(x)$ pode ser escrita como combinação linear dos elementos da base de V_2 :

$$\mathcal{I}(x) = c_{2,0}\phi_{2,0}(x) + c_{2,1}\phi_{2,1}(x) + c_{2,2}\phi_{2,2}(x) + c_{2,3}\phi_{2,3}(x), \quad (2.26)$$

com $c_{2,0} = 8, c_{2,1} = 6, c_{2,2} = 5$ e $c_{2,3} = 7$.

Mostramos uma versão gráfica da representação:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x) &= 8 \times \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\ &+ 6 \times \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\ &+ 5 \times \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\ &+ 7 \times \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

Note que os coeficientes $c_{2,0}, \dots, c_{2,3}$ são exatamente os 4 *pixels* da imagem $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Podemos reescrever a expressão para $\mathcal{I}(x)$ em termos das bases de V_1 e W_1 já que, em virtude de (2.25), $V_2 = V_1 \oplus W_1$.

$$\mathcal{I}(x) = c_{1,0}\phi_{1,0}(x) + c_{1,1}\phi_{1,1}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x), \quad (2.27)$$

com $c_{1,0} = 7, c_{1,1} = 6, d_{1,0} = 1$ e $d_{1,1} = -1$, ou, graficamente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(x) &= 7 \times \text{[Step function 1]} \\
&+ 6 \times \text{[Step function 2]} \\
&+ 1 \times \text{[Step function 3]} \\
&+ -1 \times \text{[Step function 4]}
\end{aligned}$$

Finalmente, reescrevemos $\mathfrak{I}(x)$ como uma soma das bases de V_0 , W_0 , e W_1 :

$$\mathfrak{I}(x) = c_{0,0}\phi_{0,0}(x) + d_{0,0}\psi_{0,0}(x) + d_{1,0}\psi_{1,0}(x) + d_{1,1}\psi_{1,1}(x), \quad (2.28)$$

com $c_{0,0} = 6.5$, $d_{0,0} = 0.5$, $d_{1,0} = 1$ e $d_{1,1} = -1$, ou, graficamente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(x) &= 6.5 \times \text{[Step function 1]} \\
&+ 0.5 \times \text{[Step function 2]} \\
&+ 1 \times \text{[Step function 3]} \\
&+ -1 \times \text{[Step function 4]}
\end{aligned}$$

Os coeficientes $\begin{bmatrix} 6.5 & 0.5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ constituem a transformada de Haar da imagem original. As 4 funções $\phi_{0,0}(x)$, $\psi_{0,0}(x)$, $\psi_{1,0}(x)$ e $\psi_{1,1}(x)$ constituem a base Haar para V_2 . Generalizando, em virtude de (2.25). Temos

$$\begin{aligned}
V_j &= V_{j-1} \oplus W_{j-1}, \\
V_j &= V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1}, \\
&\vdots \\
V_j &= V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_{j-1}.
\end{aligned}$$

Isto é, as funções base dos espaços $V_0, W_0, \dots, W_{j-1}$ formam uma base para o espaço V_j . Esta base é a base Haar para V_j . Em [26] mostra-se que os vetores da base Haar são ortogonais. Podemos normalizar a base Haar substituindo as definições anteriores por

$$\begin{aligned}
\phi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\phi(2^j x - k), \\
\psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\psi(2^j x - k),
\end{aligned}$$

onde o fator $2^{j/2}$ é escolhido apenas para satisfazer a normalidade. Assim, no exemplo anterior, os coeficientes da transformada de Haar na base ortonormal de V_2 são

$$\begin{bmatrix} 13 & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Em CS, a base Ψ expressa-se como uma matriz ortogonal. Para sinais $x \in \mathbb{R}^4$ a matriz base esparsa $\Psi \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, é dada por $\Psi = H_2 H_1$ com H_1 e H_2 dadas pelas seguintes matrizes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde ambas matrizes H_1 e H_2 definem as etapas da transformada de Haar para o sinal x . O número de etapas vem dado pelo logaritmo na base 2 da dimensão do sinal a tratar, neste caso é $\log_2 4 = 2$. Logo, a matriz Ψ é

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} \\ \psi_{0,0} \\ \psi_{1,0} \\ \psi_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Notamos que as linhas da matriz Ψ são as funções da base Haar, quer dizer $\{\phi_{0,0}, \psi_{0,0}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}\}$.

2.3 A matriz de medição Φ

Um dos problemas mais recorrentes na teoria de CS é o desenho da matriz de medição. A matriz de medição Φ deve permitir a reconstrução do sinal $x \in \mathbb{R}^n$ a partir de $m \gtrsim k \log n$ medições lineares $y = \Phi x$. Na literatura existem muitos esquemas de amostragem. De acordo a sua complexidade podemos classifica-las como segue: (i) *Matrizes aleatórias*: Matrizes densas onde os elementos são independentes e identicamente distribuídos, por exemplo, matrizes aleatórias gaussianas [51], (ii) *Matrizes não-binárias ortogonais*: Estas matrizes são o resultado de selecionar um subconjunto de linhas da matriz da transformada de Fourier cujas colunas foram previamente permutadas, por exemplo, *Scramble Fourier Matrix* (SF) [19], (iii) *Matrizes binárias ortogonais*: Matrizes que usam funções *Noiselet* [24] como funções de teste, um exemplo destas matrizes é *Partial Noiselet Matrix* (PN) [17], (iv) *Matrizes esparsas bloco diagonais*: Por exemplo, *Scramble Block Hadamard* (SBH) [28].

Infelizmente nem todas estas matrizes são simples. O termo simples refere-se a que as matrizes não são esparsas e binárias, o que representa uma baixa eficiência de sensoriamento e dificuldade na implementação de hardware. Por conta disso, um novo desenho de matriz de aquisição foi proposto por Zaixing *et al.* [52] chamado *Binary Permuted Block Diagonal Matrix* (BPBD). Na seguinte subseção analisaremos o desenho desta matriz.

Dado $L \leq m$, consideremos L submatrizes bloco diagonais $\hat{\mathbf{A}}_1 = \text{diag}(\mathbf{a}_1^1, \mathbf{a}_2^1, \dots, \mathbf{a}_{m_1}^1) \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $\hat{\mathbf{A}}_2 = \text{diag}(\mathbf{a}_1^2, \mathbf{a}_2^2, \dots, \mathbf{a}_{m_2}^2) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, \dots, \hat{\mathbf{A}}_L = \text{diag}(\mathbf{a}_1^L, \mathbf{a}_2^L, \dots, \mathbf{a}_{m_L}^L) \in \mathbb{R}^{m_L \times n}$ com $m_1 + m_2 + \dots + m_L = m$ e blocos $\mathbf{a}_j^i \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ com $k \in \{\lfloor \frac{nL}{m} \rfloor, \lfloor \frac{nL}{m} \rfloor + 1\}$. Consideramos também L matrizes de permutação $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_L$, com $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Construímos a *Permuted Block Diagonal Matrix* (PBD) $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ permutando as matrizes bloco diagonais com suas respectivas matrizes de

permutação, quer dizer,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P}_1 \\ \hat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_L \mathbf{P}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{a}_1^1, \dots, \mathbf{a}_{m_1}^1) \times \mathbf{P}_1 \\ \text{diag}(\mathbf{a}_1^2, \dots, \mathbf{a}_{m_2}^2) \times \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \text{diag}(\mathbf{a}_1^L, \dots, \mathbf{a}_{m_L}^L) \times \mathbf{P}_L \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

As permutações aleatórias são usadas apenas para produzir incoerência com a matriz da base esparsa Ψ . As matrizes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_L$ são chamadas submatrizes de Φ . A matriz PBD com somente entradas binárias é chamada BPBD. Um exemplo da matriz BPBD é dado por:

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \times \mathbf{P}_1 \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \times \mathbf{P}_2 \end{bmatrix},$$

onde $L = 2$ e $\mathbf{a}_j^i = [1 \ 1 \ 1]$, $j = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, L$.

Um dos grandes aportes da estrutura da matriz BPBD é a facilidade de implementação a nível de hardware e a alta eficiência de sensoriamento. Além disso, uma vez que existem k '1's em cada linha da matriz BPBD, quando amostramos o sinal $x \in \mathbb{R}^n$, apenas k elementos de x são considerados. Assim, podemos obter n/k amostras por vez e, realizando L vezes o mesmo processo, todas as m amostras são obtidas. Em muitos algoritmos de reconstrução, por exemplo, *Orthonormal Matching Pursuit* (OMP)[8] e *Tree Matching Pursuit* (TMP)[40], são considerados apenas produtos matriz por vetor, que são computados economicamente, dado que a matriz de medição é armazenada de forma implícita. A matriz BPBD tem os requisitos mínimos de armazenamento e fornece uma forma rápida e econômica de fazer o produto matriz-vetor.

Em [52] mostra-se que a incoerência da BPBD com qualquer base esparsa é $O(\sqrt{k})$. Estes resultados obtidos indicam a eficiência do sensoriamento desta matriz. Como a matriz é binária, a implementação é menos custosa e mais tratável.

Capítulo 3

Resolução do problema de otimização

Neste capítulo, seguindo o conteúdo de [33], analisaremos o problema de otimização que consiste em recuperar um sinal esparso a partir de um conjunto de amostras. Inicialmente, apresentaremos uma reformulação contínua e diferenciável do problema (2.23) e analisaremos o custo computacional da avaliação da função objetivo e as derivadas do problema reformulado. Concluiremos o capítulo descrevendo brevemente o método do Gradiente Espectral Projetado.

3.1 Reformulação do problema

O problema considerado é basicamente o problema (2.23) e consiste em

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \gamma \|s\|_1 + \frac{(1-\gamma)}{2} \|y - \Theta s\|_2^2, \quad (3.1)$$

onde:

- n representa o tamanho do sinal $x \in \mathbb{R}^n$ que deve ser recuperado,
- $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz cujas linhas formam uma base na qual x tem representação esparsa, quer dizer, $\Psi^T s = x$ e $s \in \mathbb{R}^n$ tem muitos elementos nulos,
- m é número de amostras,
- $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de medição,
- $y = \Phi x \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de amostras,
- $\Theta = \Phi \Psi^T$ e
- $\gamma \in [0, 1]$ é um parâmetro dado.

O problema (3.1) é um problema de minimização irrestrita com função objetivo não diferenciável o que impede a sua resolução utilizando algoritmos clássicos de programação não linear que requerem diferenciabilidade da função objetivo. Usando a mudança de variáveis $s = u - v$, com

$u, v \geq 0$, o problema (3.1) pode ser reescrito como

$$\min \gamma \left[\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i \right] + \frac{(1-\gamma)}{2} \|y - \Theta(u-v)\|_2^2 \text{ sujeita a } u, v \geq 0. \quad (3.2)$$

O problema (3.2) consiste em minimizar uma quadrática sujeita a restrições de caixa (não negatividade) nas variáveis. Em formato matricial, o problema (3.2) pode ser reescrito como

$$\min \frac{(1-\gamma)}{2} z^T B z + c^T z \text{ sujeita a } z \geq 0, \quad (3.3)$$

onde $z = (u, v)^T$, $1_{2n} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$B = \begin{bmatrix} \Theta^T \Theta & -\Theta^T \Theta \\ -\Theta^T \Theta & \Theta^T \Theta \end{bmatrix} \text{ e } c = \gamma 1_{2n} + (1-\gamma) \begin{bmatrix} -\Theta^T y \\ \Theta^T y \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Observamos que, a dimensão do problema (3.3) é duas vezes maior do que a dimensão do problema (3.1): $s \in \mathbb{R}^n$ enquanto $z \in \mathbb{R}^{2n}$. No entanto, este incremento não é de grande impacto devido a que o custo de calcular a função objetivo de (3.3) está diretamente relacionado a custo do produto da matriz B por um vetor arbitrário z . Este produto pode ser realizado de forma econômica como segue:

$$Bz = B \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta^T \Theta & -\Theta^T \Theta \\ -\Theta^T \Theta & \Theta^T \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta^T \Theta(u-v) \\ -\Theta^T \Theta(u-v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ -w \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde $w = \Theta^T \Theta(u-v)$. Quer dizer, o produto Bz pode ser encontrado calculando o vetor diferença $u - v \in \mathbb{R}^n$ e, em seguida, multiplicando-o por Θ e depois por Θ^T , com $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Poder-se-ia concluir que, como o custo de calcular a função objetivo de (3.1) envolve apenas um único produto pela matriz Θ , o preço a pagar por trabalhar com a reformulação diferenciável (3.3) seria dobrar o custo da avaliação da função objetivo. Este preço poderia ser considerado modesto diante da vantagem de poder trabalhar com um problema diferenciável. Porém, como veremos em seguida, o custo de avaliar a função de (3.3) é de fato idêntico ao custo de avaliar a função de (3.1).

3.2 Análise do custo de avaliar a função objetivo e seu gradiente

A função objetivo de (3.3) está definida como

$$F(z) = \frac{(1-\gamma)}{2} z^T B z + c^T z. \quad (3.6)$$

Analisando primeiro o produto $z^T B z$, temos

$$z^T B z = \begin{bmatrix} u^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T \Theta & -\Theta^T \Theta \\ -\Theta^T \Theta & \Theta^T \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.5) em (3.7), temos

$$z^T Bz = \begin{bmatrix} u^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T \Theta(u-v) \\ -\Theta^T \Theta(u-v) \end{bmatrix} = (u-v)^T \Theta^T \Theta(u-v) = \|\Theta(u-v)\|_2^2. \quad (3.8)$$

Concluimos então que, efetivamente, o cálculo da função objetivo $F(z)$ de (3.3), requer apenas de uma única multiplicação pela matriz $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Supondo que o vetor constante c definido em (3.4), que depende de $\Theta^T y$, é pré-computado e armazenado no início do método, concluimos que custo de avaliar a função objetivo $F(z)$ de (3.3) é equivalente ao custo de avaliar a função objetivo não diferenciável da formulação original (3.1).

Para completar a análise do custo computacional da avaliação objetivo, precisamos analisar o custo do produto matriz-vetor $\Theta(u-v) = \Phi \Psi^T(u-v)$. Para isso mostramos a seguir as regras de formação das matrizes Φ e Ψ^T , onde Φ é a matriz de amostragem diagonal por blocos e Ψ é a matriz da transformada de Haar definidas no Capítulo 2. Já que $u-v \in \mathbb{R}^n$, faremos a análise considerando $s = u-v$.

Começaremos pela matriz Ψ^T analisando o produto $x = \Psi^T s$ e, para simplificar a tarefa, analisaremos um exemplo com $n = 8 = 2^3$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Psi^T = (H_3 H_2 H_1)^T$ com H_1 , H_2 e H_3 dadas por

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$H_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como queremos calcular $x = \Psi^T s$, calculamos $x = (H_3 H_2 H_1)^T s = H_1^T (H_2^T (H_3^T s))$. A regra de formação das matrizes H_i permite que cada um desses produtos matriz-vetor sejam calculados eficientemente sem sequer precisar construir as matrizes H_i . O Algoritmo 1 implementa o produto $x = \Psi^T s$ e o produto $s = \Psi x$ (que será necessário no cálculo do gradiente da função objetivo), dependendo do valor do parâmetro de entrada *work*. Quando $work = T$, o Algoritmo 1 recebe como parâmetro de entrada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e devolve $\mu = \Psi^T \lambda$ (linhas 5–13). Quando $work \neq T$, o Algoritmo 1 recebe como parâmetro de entrada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e devolve $\mu = \Psi \lambda$ (linhas 15–23).

Para calcular $\mu = \Psi^T \lambda = H_1^T (H_2^T (H_3^T \lambda))$, o Algoritmo 1 pré-multiplica o vetor λ pela matriz H_3^T , depois multiplica o resultado pela matriz H_2^T e, finalmente, multiplica o resultado pela matriz H_1^T . Estas operações são realizadas no Algoritmo 1 no laço das linhas 5–13 para $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$, respectivamente. Quer dizer, quando $i = 1$ calcula-se $H_3^T \lambda$, quando $i = 2$ aplica-se a transformação H_2^T e quando $i = 3$ aplica-se a transformação H_1^T . Basicamente, o produto $\mu = \Psi^T \lambda$ requer $\log_2 n$ pré-multiplicações pelas matrizes H_i^T e cada um desses produtos requer 2^i operações. A Tabela 3.1 mostra o custo computacional destas operações. Logo, o custo computacional de calcular $\mu = \Psi^T \lambda$ é dado por

$$\begin{aligned} T(n) &= O(1) + O(1) + O(n) + (\log_2 n) O(1) + \left(\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^{i-1} \right) O(1) + \left(\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^i \right) O(1) \\ &= O(n) + O(\log_2 n) + \left(\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^{i-1} \right) O(1) + \left(\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^i \right) O(1) \\ &= O(n) + O(n) O(1) + O(n) O(1) \\ &= O(n). \end{aligned}$$

O cálculo do custo computacional para a avaliação de $\mu = \Psi \lambda$ (que aparecerá no cálculo do gradiente), que corresponde às linhas 15–23 é análogo e também é dado por $O(n)$.

Resta agora analisar, para completar a análise do custo da avaliação da função objetivo $F(z)$ de (3.3) definida em (3.6), o custo do produto $y = \Phi x$. Ilustraremos esta análise considerando a

Algoritmo 1 Cálculo do produto $\mu = \Psi^T \lambda$ ou do produto $\mu = \Psi \lambda$.

Entrada: $work, n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Saída: $\mu = \Psi^T \lambda$ se $work = T$ e $\mu = \Psi \lambda$ caso contrário.

```

    PSI( $work, n, \lambda, \mu$ )
1:  $l2n \leftarrow \log_2 n$ 
2:  $cte \leftarrow 1/\sqrt{2}$ 
3:  $\mu \leftarrow \lambda$ 
4: se  $work = T$  então
5:   para  $i \leftarrow 1$  até  $l2n$  faça
6:     para  $j \leftarrow 1$  até  $2^{i-1}$  faça
7:        $tmp[2j-1] \leftarrow cte \times (\mu[j] + \mu[2^{i-1} + j])$ 
8:        $tmp[2j] \leftarrow cte \times (\mu[j] - \mu[2^{i-1} + j])$ 
9:     fim para
10:    para  $k \leftarrow 1$  até  $2^i$  faça
11:       $\mu[k] \leftarrow tmp[k]$ 
12:    fim para
13:  fim para
14: senão
15:  para  $i \leftarrow l2n$  até 1 (com passo -1) faça
16:    para  $j \leftarrow 1$  até  $2^{i-1}$  faça
17:       $tmp[j] \leftarrow cte \times (\mu[2j-1] + \mu[2j])$ 
18:       $tmp[2^{i-1} + j] \leftarrow cte \times (\mu[2j-1] - \mu[2j])$ 
19:    fim para
20:    para  $k \leftarrow 1$  até  $2^i$  faça
21:       $\mu[k] \leftarrow tmp[k]$ 
22:    fim para
23:  fim para
24: fim se
25: devolva  $\mu$ 

```

linha	custo	# vezes
1	$O(1)$	1
2	$O(1)$	1
3	$O(n)$	1
5	$O(1)$	$\log_2 n$
6–9	$O(1)$	$\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^{i-1}$
10–12	$O(1)$	$\sum_{i=1}^{\log_2 n} 2^i$

Tabela 3.1: Custo computacional das linhas 5–13 do Algoritmo 1 que calculam o produto $\mu = \Psi^T \lambda$.

matriz de medição estudada no Capítulo 2 e dada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P}_1 \\ \hat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_L \mathbf{P}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{a}_1^1, \dots, \mathbf{a}_{m_1}^1) \times \mathbf{P}_1 \\ \text{diag}(\mathbf{a}_1^2, \dots, \mathbf{a}_{m_2}^2) \times \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \text{diag}(\mathbf{a}_1^L, \dots, \mathbf{a}_{m_L}^L) \times \mathbf{P}_L \end{bmatrix},$$

onde $L \leq m$ é um parâmetro dado, $\hat{\mathbf{A}}_1, \hat{\mathbf{A}}_2, \dots, \hat{\mathbf{A}}_L$ são matrizes bloco diagonais de $m_i \times n$ com $\sum_{i=1}^L m_i = m$ e $m_i = \lfloor m/L \rfloor$ ou $m_i = \lfloor m/L \rfloor + 1$ e $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_L$ são matrizes de permutação aleatórias de $n \times n$. Consideremos o seguinte exemplo de matriz de medição com $n = 8$, $m = 4$ e $L = 2$ dada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P}_1 \\ \hat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_2 \end{bmatrix},$$

onde

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quer dizer

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada matriz de permutação P_i , $i = 1, \dots, L$, pode ser armazenada como uma coluna de uma matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times L}$. As matrizes $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ podem ser representadas por vetores de permutação da seguinte maneira

$$p_1 = (7 \ 4 \ 5 \ 4 \ 6 \ 8 \ 8 \ 8)^T \text{ e } p_2 = (1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 5 \ 8 \ 7 \ 8)^T.$$

Logo, a matriz $\mathbf{P}$ é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 4 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T.$$

Dado $\omega \in \mathbb{R}^n$, calcular $P_j \omega$ usando a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{P}$ consiste em fazer: para $i = 1, \dots, n-1$, permutar ω_i com $\omega_{P_{ij}}$. Claramente, esta operação tem custo $O(n)$. O produto $P_j^T \omega$ consistem em fazer: para $i = n-1, \dots, 1$ (com passo -1), permutar ω_i com $\omega_{P_{ij}}$. O

Algoritmo 2 implementa estas operações.

Algoritmo 2 Permuta um vetor λ de acordo ao vetor de permutação p .

Entrada: $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^n$ o vetor de permutação, $work \in \{F, B\}$.

Saída: O vetor λ cujas entradas foram permutadas de acordo ao vetor de permutação p .

```

    PERM( $work, n, \lambda, p$ )
1: se  $work = F$  então
2:   para  $i \leftarrow 1$  até  $n - 1$  faça
3:      $tmp \leftarrow \lambda[i]$ 
4:      $\lambda[i] \leftarrow \lambda[p[i]]$ 
5:      $\lambda[p[i]] \leftarrow tmp$ 
6:   fim para
7: senão
8:   para  $i \leftarrow n - 1$  até 1 (com passo  $-1$ ) faça
9:      $tmp \leftarrow \lambda[i]$ 
10:     $\lambda[i] \leftarrow \lambda[p[i]]$ 
11:     $\lambda[p[i]] \leftarrow tmp$ 
12:   fim para
13: fim se
14: devolva  $\lambda$ 

```

Para calcular $y = \Phi x$ no nosso exemplo, realizamos as seguintes operações

$$y = \Phi x = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P}_1 \\ \hat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 (\mathbf{P}_1 x) \\ \hat{\mathbf{A}}_2 (\mathbf{P}_2 x) \end{bmatrix}.$$

Quer dizer, pré-multiplicamos o vetor x pelas matrizes de permutação $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, pré-multiplicamos depois pelas matrizes bloco-diagonais $\hat{\mathbf{A}}_1$ e $\hat{\mathbf{A}}_2$ e finalmente “concatenamos” os resultados.

Como já mencionamos acima, o custo de pré-multiplicar por cada matriz de permutação é $O(n)$. A regra de formação das matrizes $\mathbf{A}_i$ permite que cada produto seja calculado em $O(nL)$ sem sequer precisar armazenar a matriz $\mathbf{A}_i$. O Algoritmo 3 implementa o produto $y = \Phi x$ e o produto $\hat{x} = \Phi^T y$ (que será necessário no cálculo do gradiente da função objetivo), dependendo do valor do parâmetro $work$. Quando $work = T$, o Algoritmo 3 recebe como parâmetro de entrada $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e devolve $\mu = \Phi^T \lambda$. Quando $work \neq T$, o Algoritmo 3 recebe como parâmetro de entrada $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e devolve $\mu = \Phi \lambda$. A Tabela 3.2 mostra o custo computacional destas operações. Logo, o custo computacional de calcular $\mu = \Phi \lambda$ é dado por

$$\begin{aligned}
T(n) &= O(1) + O(1) + O(1) + LO(1) + LO(n) + LO(n) + LO(1) + nO(1) + \\
&\quad nO(1) + nO(1) + nLO(1) + LO(1) \\
&= O(1) + O(L) + O(nL) + O(L) + O(n) + O(n) + O(n) + O(nL) + O(L) \\
&= O(L) + O(n) + O(nL) \\
&= O(nL).
\end{aligned}$$

A análise do cálculo de $\mu = \Phi^T \lambda$ é análoga à análise do cálculo de $\mu = \Phi \lambda$ e é fácil ver que o

linha	custo	# vezes
1	$O(1)$	1
2	$O(1)$	1
3	$O(1)$	1
4 – 9	$O(1)$	L
10 – 12	$O(n)$	L
13 – 15	$O(n)$	L
16 – 18	$O(1)$	L
19	$O(1)$	n
20 – 24	$O(1)$	n
30	$O(1)$	n
31 – 33	$O(1)$	nL
39	$O(1)$	L

Tabela 3.2: *Custo computacional do Algoritmo 3 no cálculo do produto $\mu = \Phi\lambda$.*

seu custo é também $O(nL)$.

Havendo analisado os custos computacionais de pré-multiplicar pelas matrizes Φ e Ψ (ou suas transpostas), podemos concluir que o custo de pré-multiplicar por Θ ou Θ^T é $O(nL)$. Desta forma, o custo de avaliação da função objetivo do problema (3.3) é $O(nL)$.

Concluimos esta seção analisando o custo de avaliar o gradiente da função objetivo do problema (3.3) dado por

$$\nabla F(z) = (1 - \gamma)Bz + c,$$

com B e c como definidos em (3.4). Denotando $z = (u, v)^T$, temos que

$$\nabla F(z) = (1 - \gamma) \begin{bmatrix} \Theta^T \Theta(u - v) \\ -\Theta^T \Theta(u - v) \end{bmatrix} + c.$$

É fácil ver que o cálculo do gradiente da função objetivo (3.3) requer uma pré-multiplicação pela matriz Θ e uma pré-multiplicação pela matriz Θ^T . Logo, o custo de calcular o gradiente é também $O(nL)$. Mais ainda, se armazenássemos o produto pela matriz Θ utilizado na avaliação da função objetivo, apenas um único produto adicional seria necessário.

3.3 Gradiente Espectral Projetado

O método do Gradiente Espectral Projetado (SPG) aplica-se ao problema

$$\text{Minimizar } f(x) \text{ sujeita a } x \in \Omega,$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável e Ω é um conjunto convexo. Por utilizar apenas informação de primeira ordem e precisar de uns poucos vetores de tamanho n na sua implementação, o SPG é adequado para problemas de grande porte. A eficiência do método esta diretamente relacionada à existência de uma forma eficiente de projetar um ponto arbitrário $x \in \mathbb{R}^n$ no

Algoritmo 3 Cálculo do produto $\mu = \Phi^T \lambda$ ou do produto $\mu = \Phi \lambda$.

Entrada: $work, L, m, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^n, P \in \mathbb{N}^{n \times L}$.

Saída: $\mu = \Phi^T \lambda$ se $work = T$ ou $\mu = \Phi \lambda$ caso contrário.

```

  PHI( $work, n, m, L, \lambda, \mu, P$ )
1:  $quo \leftarrow \lfloor m/L \rfloor$ 
2:  $res \leftarrow m - quo \times L$ 
3:  $ibstart \leftarrow 1$ 
4: para  $k \leftarrow 1$  até  $L$  faça
5:   se  $k \leq res$  então
6:      $nbrows \leftarrow quo + 1$ 
7:   senão
8:      $nbrows \leftarrow quo$ 
9:   fim se
10:  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
11:     $pcol[i] \leftarrow P[i, k]$ 
12:  fim para
13:  se  $work \neq T$  então
14:     $tmp \leftarrow perm(F, pcol, \lambda)$ 
15:  fim se
16:   $quob \leftarrow \lfloor n/nbrows \rfloor$ 
17:   $resb \leftarrow n - quob * nbrows$ 
18:   $jstart \leftarrow 1$ 
19:  para  $i \leftarrow 1$  até  $nbrows$  faça
20:    se  $i \leq resb$  então
21:       $nones \leftarrow quob + 1$ 
22:    senão
23:       $nones \leftarrow quob$ 
24:    fim se
25:    se  $work = T$  então
26:      para  $j \leftarrow jstart$  até  $jstart + nones + 1$  faça
27:         $tmp[j] \leftarrow \lambda[ibstart + i - 1]$ 
28:      fim para
29:    senão
30:       $\mu[ibstart + i - 1] \leftarrow 0$ 
31:      para  $j \leftarrow jstart$  até  $jstart + nones + 1$  faça
32:         $\mu[ibstart + i - 1] \leftarrow \mu[ibstart + i - 1] + tmp[j]$ 
33:      fim para
34:    fim se
35:  fim para
36:  se  $work = T$  então
37:     $\mu \leftarrow \mu + perm(F, pcol, tmp)$ 
38:  fim se
39:   $ibstart \leftarrow ibstart + nones$ 
40: fim para
41: devolva  $\mu$ 

```

conjunto convexo Ω . O método do Gradientes Espectral Projetado foi introduzido em [12, 16] e combina o método clássico de gradiente projetado com dois ingredientes: o passo de Barzilai-

Borwein [6] e a busca linear não-monótona de Grippo, Lampariello e Lucidi [39]. Na última década, o SPG foi utilizado com sucesso em diversas aplicações práticas. Dentre elas destacamos a resolução dos problemas de otimização associados a máquinas de suporte vetorial [25, 49], ao cálculo de perturbações condicionais não-lineares ótimas [46] e a *compressive sensing* [31, 33], dentre outros. A seguir, descrevemos brevemente o método SPG.

As iterações do método SPG são da forma

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

onde

$$d_k = P_\Omega(x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)) - x_k \quad (3.9)$$

e α_k é tal que x_{k+1} satisfaz a condição de Armijo não monótona dada por

$$f(x_{k+1}) \leq f_{\max} + \alpha_k \gamma_{\text{arm}} \nabla f(x_k)^T d_k. \quad (3.10)$$

Em (3.9), $P_\Omega(\cdot)$ representa a projeção Euclidiana no conjunto convexo Ω , i.e.

$$P_\Omega(\tilde{x}) = \arg \min_x \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|_2^2 \text{ sujeita a } x \in \Omega,$$

e λ_k é o passo espectral dado por

$$\lambda_k = \max\{\lambda_{\min}, \min\{s_{k-1}^T s_{k-1} / s_{k-1}^T y_{k-1}, \lambda_{\max}\}\}, \quad (3.11)$$

onde $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$, $y_{k-1} = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$ e $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < +\infty$ são salvaguardas dadas. Na prática, utiliza-se $\lambda_{\min} = 10^{-30}$ e $\lambda_{\max} = 10^{30}$.

Em (3.10) $\gamma_{\text{arm}} > 0$ é a constante de Armijo (tipicamente $\gamma_{\text{arm}} = 10^{-4}$),

$$f_{\max} = \max\{f(x_{k-j}) \mid 0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}\}$$

e $M \geq 1$ é uma constante que regula a não monotonicidade da busca linear. A condição (3.10) garante decréscimo suficiente a cada M iterações. Se $M = 1$ então (3.10) coincide com o critério clássico de Armijo. Em [12] sugere-se $M = 10$ como valor *default*.

O passo espectral λ_k definido em (3.11) relaciona o método SPG com os métodos do tipo secante. Os métodos quase-Newton [32] do tipo secante obedecem a fórmula $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ com

$$d_k = B_k^{-1} \nabla f(x_k), \quad (3.12)$$

onde as matrizes B_k satisfazem a equação secante

$$B_k s_{k-1} = y_{k-1}. \quad (3.13)$$

Naturalmente, o custo de resolver o sistema linear (3.12) é o fator decisivo do custo da iteração dos métodos quase-Newton e a escolha da matriz B_k pode fazer o método estar tão próximo de um método do tipo gradiente o do método de Newton quanto desejado. Se impusermos $B_k = \tau I$ então a equação secante (3.13) fica $\tau s_{k-1} = y_{k-1}$. Esta equação muito provavelmente não terá solução, mas se considerarmos a solução de quadrados mínimos teremos

$$\tau_k = s_{k-1}^T y_{k-1} / s_{k-1}^T s_{k-1},$$

quer dizer, $B_k = \tau_k I$ e $d_k = \hat{\lambda}_k \nabla f(x_k)$ com $\hat{\lambda}_k = 1/\tau_k = s_{k-1}^T s_{k-1} / s_{k-1}^T y_{k-1}$. O passo espectral λ_k em (3.11) é a projeção de $\hat{\lambda}_k$ no intervalo $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Quer dizer, o passo espectral proporciona ao SPG algum tipo de informação de segunda ordem com custo mínimo. O uso da busca linear não monótona do tipo Armijo (no lugar da versão monótona) faz com que a primeira tentativa de passo na direção d_k , que como acabou de ser explicado carrega alguma informação de segunda ordem, tenha mais chances de ser aceita.

Sejam $M \geq 1$, $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < +\infty$, $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 < 1$, $\gamma_{\text{arm}} > 0$ e $\varepsilon > 0$ parâmetros dados. O método começa com $x_0 \in \Omega$ e $\lambda_0 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ arbitrários. Dados $x_k \in \Omega$ e $\lambda_k \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, o Algoritmo 4 descreve como obter x_{k+1} e λ_{k+1} e como terminar o processo.

Algoritmo 4.

Passo 1. *Critério de parada*

Se $\|P_\Omega(x_k - \nabla f(x_k)) - x_k\| \leq \varepsilon$, pare declarando que x_k é um ponto estacionário.

Passo 2. *Backtracking*

Passo 2.1. Calcule $d_k = P_\Omega(x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)) - x_k$ e faça $\alpha \leftarrow 1$.

Passo 2.2. Se

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq \max_{0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}} f(x_{k-j}) + \gamma_{\text{arm}} \alpha \nabla f(x_k)^T d_k, \quad (3.14)$$

defina $\alpha_k = \alpha$, $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$, $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ e vá para o Passo 3.

Caso contrário, defina $\alpha_{\text{new}} \in [\sigma_1 \alpha, \sigma_2 \alpha]$, faça $\alpha \leftarrow \alpha_{\text{new}}$ e volte ao início do Passo 2.2.

Passo 3. *Cálculo do passo espectral*

Se $s_k^T y_k \leq 0$, defina $\lambda_{k+1} = \lambda_{\max}$, senão, defina $\lambda_{k+1} = \max\{\lambda_{\min}, \min\{s_k^T s_k / s_k^T y_k, \lambda_{\max}\}\}$.

No Passo 2.2, o cálculo de α_{new} utiliza uma interpolação quadrática unidimensional salvaguardada tomando passo $\alpha_{\text{new}} = \alpha/2$ quando o minimizador da quadrática unidimensional fica fora do intervalo $[\sigma_1, \sigma_2 \alpha]$. Note que o processo de salvaguarda baseia-se em $[\sigma_1, \sigma_2 \alpha]$ no lugar da escolha usual $[\sigma_1 \alpha, \sigma_2 \alpha]$. Isto significa que, quando a interpolação tende a rejeitar 90% (para $\sigma_1 = 0.1$) do intervalo original $[0, 1]$, julga-se que a previsão não é confiável e o processo mais conservativo de biseção é utilizado. Experimentos numéricos em [12] mostraram que este procedimento obtém (ao menos para os problemas considerados em [12]) melhores resultados do que

o procedimento clássico. O Algoritmo 5 descreve a busca linear em detalhe.

Algoritmo 5.

Passo 1. Calcule $f_{\max} = \max\{f(x_{k-j}) \mid 0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}\}$ e $\delta = \nabla f(x_k)^T d_k$ e faça $\alpha \leftarrow 1$.

Passo 2. Faça $x_+ \leftarrow x_k + \alpha d_k$. Se

$$f(x_+) \leq f_{\max} + \gamma_{\text{arm}} \alpha \delta$$

faça $\alpha_k = \alpha$ e termine.

Passo 3. Faça $\alpha_{\text{tmp}} = \frac{1}{2} \alpha^2 \delta / (f(x_+) - f(x_k) - \alpha \delta)$.

Se $\alpha_{\text{tmp}} \geq \sigma_1$ e $\alpha_{\text{tmp}} \leq \sigma_2 \alpha$ então faça $\alpha \leftarrow \alpha_{\text{tmp}}$. Caso contrário, faça $\alpha \leftarrow \alpha/2$. Va para o Passo 2.

A boa definição e a teoria de convergência do SPG pode ser encontrada em [12], onde também são descritos experimentos numéricos relacionados à aplicação do SPG a problemas de minimização em caixas. Em [16] experimentos numéricos com uma família de problemas de grande porte (com milhões de variáveis e restrições) associados à alocação de pontos no plano são apresentados. A extensão do SPG para o caso de projeções inexatas foi apresentada em [13] e a extensão para problemas com restrições lineares foi introduzida em [1]. Para uma contextualização histórica do SPG e uma análise detalhada das suas variantes, veja [14].

Capítulo 4

Experimentos computacionais

Neste capítulo apresentamos experimentos computacionais relacionados a recuperar um sinal a partir do sinal amostrado. Na Seção 4.1 analisamos com experimentos preliminares a influência do valor do parâmetro L na composição da matriz de amostragem Φ definida no Capítulo 2. Na Seção 4.2 abordamos os problemas de programação linear (2.19) provenientes de considerar um ambiente em que o sinal é amostrado sem ruído. O caso em que há ruído na amostragem do sinal, e o problema a ser resolvido é o problema (3.3), é considerado na Seção 4.3. Finalmente, a Seção 4.4 inclui experimentos com problemas de grande porte.

Para a resolução dos problemas de programação linear (2.19) consideraremos os *software* CPLEX (IBM ILOG AMPL/CPLEX 12.1.0) [9] e Algencan 2.4.0 [3, 4]. Para os problemas do tipo (3.3) consideraremos o método do Gradiente Espectral Projetado [12, 16]. Algencan e SPG estão programados na linguagem Fortran 77 e foram compilados com o GNU Fortran (gfortran) versão 4.6.1 utilizando a opção de compilação “-O4”. Todos os experimentos deste capítulo foram conduzidos em um computador com processador INTEL XEON com 2.67GHz e 8GB de memória RAM, rodando o sistema operacional GNU/LINUX.

4.1 Experimentos preliminares

Nesta seção estamos interessados em avaliar a influência do parâmetro L na construção da matriz de medição Φ do tipo BPBD (veja a equação (2.29) na Seção 2.3).

Consideremos a imagem x^* com $n = 4 \times 8 = 32$ *pixels* da Figura 4.1. O sinal $x^* \in \mathbb{R}^{32}$ tem componentes $x_i^* \in [0, 1]$ que representam uma escala de cinza ($0 = \text{preto}$ e $1 = \text{branco}$). Se considerarmos como base a matriz $\Psi \in \mathbb{R}^{32 \times 32}$ associada às funções base da transformada de Haar, temos que x^* pode ser representado como $x^* = \Psi^T s^*$ com

$$s^* = (4.24, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \quad (4.1)$$

Note que, conhecendo x^* e Ψ , o valor de s^* pode ser calculado simplesmente como $s^* = \Psi x^*$. Para s^* temos que $k = \|s^*\|_0 = 7$ e, se definimos a densidade de x^* como

$$\delta(x^*) = \frac{\|s^*\|_0}{n} \times 100\%, \quad (4.2)$$

temos que a $\delta(x^*) = 7/32 \times 100\% = 21.875\%$.

1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0
1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Figura 4.1: Sinal x^* com $n = 4 \times 8 = 32$ pixels.

O problema (2.19) pode ser reformulado como um problema de programação linear substituindo s por $s = u - v$ com $u \geq 0$ e $v \geq 0$ como segue:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i \\ &\text{sujeita a} && \Theta(u - v) = y \\ &&& u, v \geq 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $\Theta = \Phi\Psi^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Φ é a matriz de medição do tipo BPBD com parâmetro L e Ψ é a matriz associada às funções base da transformada de Haar.

Desejamos agora, resolver diferentes problemas de programação linear da forma (4.3) para recuperar a imagem x^* a partir de experimentos simulados com diferentes valores m para o número de amostras e valores do parâmetro L na construção da matriz de amostragem Φ do tipo BPBD (2.29). Consideramos então $m \in \{k, 1.5k, 2k, 2.5k, 3k\}$ e $L \in \{1, 2, 3\}$ e, usando as 15 combinações de m e L , geramos as matrizes de amostragem Φ obtendo 15 problemas de programação linear diferentes. Os problemas foram resolvidos utilizando CPLEX com todos os seus parâmetros *default* que, em todos os casos, demorou menos do que uma centésima de segundo de tempo de CPU. As Tabelas 4.1–4.3 mostram os coeficientes $s = u - v$ encontrados e as Figuras 4.2–4.4 ilustram as imagens reconstruídas utilizando os coeficientes encontrados.

Figura 4.2: Imagens reconstruídas utilizando os coeficientes recuperados nos problemas de programação linear com matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 1$. Os coeficientes recuperados correspondem aos mostrados na Tabela 4.1.

Figura 4.3: Imagens reconstruídas utilizando os coeficientes recuperados nos problemas de programação linear com matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 2$. Os coeficientes recuperados correspondem aos mostrados na Tabela 4.2.

É importante notar que, dado $s = u - v$ solução (coeficientes recuperados) de um problema de

	i	Número de amostras				
		$m = k$	$m = 1.5k$	$m = 2k$	$m = 2.5$	$m = 3k$
x^*	1	4.2426406871192910	4.2426406868698239	4.2426406871192892	4.2426406865388406	4.2426406871116527
	2	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.2828427124747471	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	3	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.9999999810654676	0.99999999853667
	4	0.0000000000000000	-0.1000000045880174	-0.3999999999999330	-0.9999999895130788	-1.000000000307061
	5	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	6	0.0000000000000000	0.1414213581233788	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	7	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	8	0.0000000000000000	-3.53182290708E-002	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	9	0.0000000000000000	-0.599999999159670	-0.4000000000001712	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	10	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	11	0.499999999998990	0.0000000000000000	0.799999999998720	0.9999999877722606	0.999999999990342
	12	0.0000000000000000	0.0000000000000000	-0.799999999999475	-0.9999999963054850	-0.99999999822905
	13	0.0000000000000000	0.3500000008558777	0.0000000000000000	0.9999999850468577	1.000000000056701
	14	0.0000000000000000	-1.7499999944837192	-0.4000000000000801	-0.9999999909906753	-1.000000000374079
	15	0.0000000000000000	0.3250000005176638	0.799999999998675	7.88522282224E-009	0.0000000000000000
	16	0.2500000000000370	0.3749999983975413	0.399999999999633	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	17	0.0000000000000000	0.0000000000000000	-0.2828427124745003	9.91059873883E-009	0.0000000000000000
	18	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	19	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	20	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	21	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	22	-0.7071067811864443	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	23	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	24	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	25	0.0000000000000000	-0.7778174603837905	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	26	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	27	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	28	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	29	0.0000000000000000	0.3889087267051568	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	30	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.5656854249492100	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	31	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	32	-0.1767766952967148	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000

Tabela 4.1: Coeficientes recuperados considerando $m \in \{k, 1.5k, 2k, 2.5k, 3k\}$ amostras e uma matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 1$.

Figura 4.4: Imagens reconstruídas utilizando os coeficientes recuperados nos problemas de programação linear com matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 3$. Os coeficientes recuperados correspondem aos mostrados na Tabela 4.3.

programação linear da forma (2.19) e dado $x = \Psi^T s$ (sinal construído a partir dos coeficientes recuperados ou simplesmente “sinal recuperado”), não há nada que implique que teremos $x_i \in [0, 1]$ como de fato acontece no sinal original. De fato, isso nem sempre ocorre, como pode ser observado na Figura 4.2b. Logo, as cores atribuídas aos *pixels* das Figuras 4.2–4.4 correspondem à projeção do valor calculado $x_i = [\Psi^T s]_i$ no intervalo $[0, 1]$, quer dizer, na representação gráfica das imagens recuperadas mostramos $P_{[0,1]^n}(x)$, onde $P_{[0,1]^n}(\cdot)$ representa o operador de projeção na caixa n -dimensional $0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n$.

A Figura 4.5 ilustra a diferença entre a imagem original e as imagens recuperadas ao resolver os 15 PLs para os diferentes valores de m e L . Analisando as imagens recuperadas no caso $L = 1$ (Figura 4.2) observamos que apenas nos casos $m \in \{2.5k, 3k\}$ o sinal original x^* foi recuperado.

	i	Número de amostras				
		$m = k$	$m = 1.5k$	$m = 2k$	$m = 2.5$	$m = 3k$
Φ	1	4.2426406871172375	4.2426406871192874	4.2426406871210993	4.2426406870239237	4.2426406871132922
	2	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	3	1.2142857142597530	0.1578947368421057	1.000000000149847	0.999999999581101	1.000000000169658
	4	0.0000000000000000	-0.1428571428571425	-1.000000000119675	-0.9999999998935067	-1.000000000305638
	5	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	6	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	7	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	8	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	-5.44788567006E-011
	9	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	-5.04422875038E-011
	10	0.0000000000000000	-0.7368421052631556	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	11	0.0000000000000000	0.5939849624060100	1.000000000121159	0.999999999433177	1.000000000172573
	12	-1.9285714287693543	0.0000000000000000	-0.999999999521777	-1.000000000323539	-1.000000000486668
	13	0.0000000000000000	0.0000000000000000	1.000000000534601	0.9999999998479339	1.000000000138589
	14	0.0000000000000000	-1.3383458646616542	-0.999999999801451	-1.000000000111520	-0.999999999934237
	15	0.0000000000000000	-0.1879699248120331	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	16	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	-1.35910310537E-011
	17	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	18	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	3.31471490925E-012	0.0000000000000000
	19	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	20	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	21	0.0000000000000000	0.1435479931732104	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	22	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	23	0.0000000000000000	-0.4731767182376145	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	24	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	25	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	26	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	27	-3.78807204408E-002	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	28	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	-2.16568049869E-013	0.0000000000000000
	29	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	30	-3.78807204407E-002	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	31	-0.3030457635112963	-1.4514297087513373	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	32	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000

Tabela 4.2: Coeficientes recuperados considerando $m \in \{k, 1.5k, 2k, 2.5k, 3k\}$ amostras e uma matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 2$.

Já nos casos $L = 2$ e $L = 3$ (Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente) o sinal original foi também recuperado para $m = 1.5k$ e $m = 2k$ amostras. Este resultado empírico está de alguma forma de acordo com a teoria que sugere que, com alta probabilidade, o sinal original esparso deveria ser recuperado utilizando a partir de $m \gtrsim k \log_{10} n \approx 1.5k$ amostras. Considerando que para $L = 2$ e $L = 3$ as imagens recuperadas são similares para todos os valores de m e lembrando que a complexidade de operar com a matriz de amostragem Φ do tipo BPBD com parâmetro L é $O(Ln)$, fixamos para os experimentos das seções seguintes $L = 2$.

4.2 Experimentos sem ruído

Nesta seção, abordaremos problemas de programação linear de tipo (4.3) provenientes de considerar ambientes em que o sinal é amostrado sem ruído. Em todos os casos utilizaremos a matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 2$. Compararemos o desempenho de CPLEX (IBM ILOG AMPL/CPLEX 12.1.0) [9] e Algencan 2.4.0 [3, 4] para resolver os problemas de programação linear e analisaremos a qualidade do sinal recuperado em função do número de amostras utilizado.

Para resolver o problema de programação linear (4.3), o CPLEX precisa da matriz $\Theta = \Phi\Psi^T$. De fato, precisa da matriz $[\Theta \quad -\Theta]$, que aparece de forma explícita ao escrever a restrição

	i	Número de amostras				
		$m = k$	$m = 1.5k$	$m = 2k$	$m = 2.5$	$m = 3k$
Φ	1	4.2426406871192945	4.2426406871192874	4.2426406871192865	4.2426406871192874	4.2426406871192919
	2	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	3	0.0000000000000000	0.0000000000000000	1.499999999999984	0.9999999999998134	0.9999999999994673
	4	0.0000000000000000	-0.6315789473684206	0.0000000000000000	-1.0000000000000719	-0.9999999999994371
	5	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	6	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	7	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	8	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	9	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	10	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	11	0.0000000000000000	1.7631578947368427	1.0000000000000023	0.9999999999999608	1.00000000000001077
	12	0.0000000000000000	-0.9473684210526305	-0.9999999999999250	-1.0000000000000524	-1.0000000000000813
	13	0.4999999999978739	1.4473684210526330	1.0000000000000064	0.9999999999999766	0.9999999999990230
	14	0.0000000000000000	-0.3157894736842113	-0.9999999999999999	-1.0000000000000930	-0.99999999999985322
	15	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	16	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	17	0.0000000000000000	-1.86080731892E-002	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	18	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	19	0.353533905940678	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	20	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	21	-0.353533905923411	0.0000000000000000	8.83883476483E-022	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	22	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	23	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	24	0.353533905940678	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	25	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	26	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	27	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	28	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	29	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	30	0.0000000000000000	0.2791210978367932	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	31	0.0000000000000000	0.2977291710259142	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	32	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000

Tabela 4.3: Coeficientes recuperados considerando $m \in \{k, 1.5k, 2k, 2.5k, 3k\}$ amostras e uma matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 3$.

$\Theta(u - v) = y$ no formato padrão. No caso de CS, isto é uma limitação para o uso do CPLEX, já que calcular e armazenar a matriz Θ é custoso. Por outro lado, métodos que utilizem apenas o produto matriz-vetor $\Theta \omega$, para um vetor arbitrário $\omega \in \mathbb{R}^n$ dado, poderão resolver o problema de forma mais eficiente. Este é o caso da versão 2.4.0 de Algencan que, modificado *ad-hoc* para ser utilizado neste trabalho, incorpora uma opção que permite que o usuário implemente apenas três subrotinas para calcular: (a) a função objetivo e as restrições; (b) o produto do Jacobiano das restrições (ou sua transposta) por um vetor arbitrário dado; e (c) o produto da Hessiana do Lagrangiano (matriz nula no caso do problema (4.3)) por um vetor arbitrário dado. Nos experimentos numéricos que seguem utilizamos Algencan 2.4.0 implementando estas três subrotinas, o que corresponde com uma versão de Algencan livre de matrizes (livre de computar, armazenar e fatorizar matrizes). Utilizamos todos os parâmetros *default* de Algencan a menos de dois: (i) desabilitamos o escalamento da função objetivo e as restrições com a palavra chave OBJECTIVE-AND-CONSTRAINTS-SCALING-AVOIDED, já que fazê-lo implicaria o cálculo individual do gradiente de cada restrição, quer dizer, da matriz de restrições Θ ; e (ii) forçamos o uso do produto verdadeiro da Hessiana do Lagrangiano aumentado vezes um vetor usando a palavra chave TRUE-HESSIAN-PRODUCT-IN-CG. Basta dizer que esta é a decisão adequada a ser tomada neste caso mas que Algencan utiliza, de forma arbitrária, uma aproximação da Hessiana do Lagrangiano aumentado [11] quando o número de variáveis é maior do que 20,000. Para mais

Figura 4.5: Comparação das soluções do problema (2.19) para diferentes valores de m e L .

detalhes veja [10]. No caso do CPLEX utilizamos todos os parâmetros *default*.

Para os experimentos numéricos desta seção consideramos as imagens *Phantom* e *Camera Man*, ambas de 256×256 pixels, ilustradas na Figura 4.6. A imagem *Phantom* pode ser gerada com a função `phantom` [61] do Octave [60] enquanto que a imagem *Camera Man* está amplamente disponível na *web* (veja, por exemplo, [58]). A partir delas, utilizando a função `imresize` [59] do Octave, geramos versões modificadas destas imagens com 32×32 , 64×64 e 128×128 pixels. Daqui em diante denominaremos estas imagens de *Phantom 32*, *Phantom 64*, *Phantom 128* e *Phantom 256*, respectivamente, e, analogamente, para o caso da imagem *Camera Man*.

Figura 4.6: Imagens teste.

Para cada uma das oito imagens (imagens *Phantom* e *Camera Man* com 32×32 , 64×64 , 128×128 ou 256×256 pixels) consideramos problemas com $m = \alpha n$ amostras e $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$. A Tabela 4.4 apresenta o desempenho de Algencan e CPLEX na resolução destes 72 problemas de

programação linear. Na Tabela 4.4, n é a quantidade de *pixels* da imagem considerada (o número de variáveis do problema de programação linear é $2n$) e α é tal que o número de amostras é dado por $m = \alpha n$. Na coluna “Algencan” apresenta-se o tempo de CPU em segundos utilizado por Algencan para resolver o problema. Na coluna “CPLEX” aparecem o tempo de CPU “pre” (preprocessamento) utilizado para gerar a matriz Θ e o tempo de CPU “sol” (solução) utilizado pelo CPLEX para resolver o problema. O símbolo “–” indica que o tempo de CPU excedeu o limite máximo estipulado em 2.5 horas (8,800 segundos). Em todos os problemas em que Algencan e CPLEX terminaram sua execução dentro do limite de tempo de CPU estabelecido, os valores ótimos encontrados por ambos métodos coincidem até a sexta casa decimal e são apresentados na coluna $\|s\|_1$. A análise dos tempos de CPU apresentados na Tabela 4.4 mostra, como já era esperado, que o CPLEX é mais eficiente nos problemas menores enquanto que a versão livre de matriz de Algencan é preferível para resolver os problemas maiores.

n	α	m	Imagem <i>Phantom</i>				Imagem <i>Camera Man</i>			
			Algencan	CPLEX		$\ s\ _1$	Algencan	CPLEX		$\ s\ _1$
				pre	sol			pre	sol	
$1,024 = 32 \times 32$ px	0.1	102	0.27	0.02	0.03	37.224238	0.26	0.01	0.03	53.799529
	0.2	204	0.70	0.01	0.07	54.672388	0.73	0.01	0.08	72.391219
	0.3	307	1.07	0.02	0.15	74.142265	1.27	0.01	0.16	90.413290
	0.4	409	1.16	0.02	0.26	85.085042	1.12	0.02	0.26	102.872796
	0.5	512	1.43	0.02	0.41	95.254448	1.92	0.01	0.37	114.122068
	0.6	614	2.24	0.02	0.60	103.177364	3.00	0.02	0.43	122.522672
	0.7	716	3.14	0.02	0.56	107.098199	3.31	0.02	0.55	129.208704
	0.8	819	0.12	0.02	0.35	108.184847	3.48	0.02	0.57	132.650227
	0.9	921	0.06	0.02	0.22	108.184847	0.64	0.02	0.45	133.549329
$4,096 = 64 \times 64$ px	0.1	409	6.50	0.20	0.86	134.743520	7.26	0.18	0.83	176.148837
	0.2	819	12.41	0.22	3.52	216.518599	12.54	0.19	3.54	246.466116
	0.3	1228	21.75	0.26	8.42	269.782353	25.36	0.22	9.31	303.415697
	0.4	1638	32.55	0.28	15.55	311.808579	30.95	0.25	22.08	345.632535
	0.5	2048	34.17	0.24	27.32	338.869225	39.96	0.21	35.07	379.151367
	0.6	2457	1.23	0.31	27.32	338.869225	48.99	0.27	42.83	401.182541
	0.7	2867	0.92	0.35	18.24	348.912247	66.26	0.32	56.99	413.589578
	0.8	3276	0.30	0.39	8.95	348.912247	1.37	0.34	34.00	414.571902
	0.9	3686	0.26	0.42	4.98	348.912247	0.96	0.36	13.84	414.571902
$16,384 = 128 \times 128$ px	0.1	1638	88.17	3.45	58.58	523.844242	66.19	3.24	66.70	600.741653
	0.2	3276	271.54	3.71	431.32	796.145496	210.43	3.55	480.06	864.182351
	0.3	4915	375.16	4.08	1,565.69	967.986054	459.33	3.91	1,488.89	1042.837885
	0.4	6553	610.23	4.45	3,265.81	1051.457258	588.99	4.27	3,838.88	1182.478010
	0.5	8192	2.23	3.89	2,510.99	1063.602312	618.20	3.79	4,473.21	1182.478010
	0.6	9830	1.61	4.83	1,818.80	1063.602312	611.64	4.75	6,595.57	1283.331897
	0.7	11468	1.59	5.58	1,019.23	1063.602312	5.03	5.50	3,536.30	1283.333904
	0.8	13107	0.92	5.97	540.97	1063.602312	3.31	5.85	1,849.34	1283.333904
	0.9	14745	1.20	6.33	205.42	1063.602312	2.19	6.24	746.42	1283.333904
$65,536 = 256 \times 256$ px	0.1	6553	4,359.30	58.68	7,019.91	2015.043391	2,816.86	60.42	7,426.60	2182.843851
	0.2	13107	7,773.51	62.98	–	2902.988117	3,109.46	65.15	–	3022.546589
	0.3	19660	6,258.33	69.16	–	3277.830741	6,263.21	70.88	–	3513.585312
	0.4	26214	12.41	75.08	–	3303.274688	8,403.79	76.26	–	3767.363661
	0.5	32768	6.45	67.18	–	3303.274688	15.16	67.18	–	3768.553034
	0.6	39321	4.65	82.78	–	3303.274688	16.27	81.49	–	3768.553034
	0.7	45875	5.41	94.27	–	3303.274688	9.37	94.03	–	3768.553034
	0.8	52428	4.84	100.29	–	3303.274688	7.55	98.33	–	3768.553034
	0.9	58982	4.28	105.65	–	3303.274688	7.70	104.77	–	3768.553034

Tabela 4.4: Desempenho de Algencan e CPLEX para resolver 72 problemas de programação linear associados à recuperação de sinais amostrados sem ruído.

Considerando os resultados obtidos, analisaremos agora a qualidade da imagem recuperada para diferentes valores do número de amostras m , utilizando Algencan para resolver os problemas de programação linear correspondentes. Para estes experimentos consideraremos as imagens

Phantom 256 e *Camera Man 256* (ambas com $n = 256 \times 256$ pixels) ilustradas na Figura 4.6. A densidade (4.2) da imagem *Phantom 256* é 9.7% enquanto que a densidade da imagem *Camera Man 256* é 89.8%. As Figuras 4.7a e 4.7b ilustram as entradas s_i dos coeficientes s das imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256*, ordenando-as em ordem decrescente de $|s_i|$, respectivamente. A Figura 4.7a mostra que, como pode ser deduzido da densidade da imagem *Phantom 256*, o seu vetor s de coeficientes tem apenas $k = 6,391$ elementos não nulos. Por outro lado, a Figura 4.7b mostra que o vetor de coeficientes s da imagem *Camera Man 256* tem $k = 58,852$ elementos não nulos.

Figura 4.7: Entradas s_i dos coeficientes s das imagens (a) *Phantom 256* e (b) *Camera Man 256*, ordenadas em ordem decrescente de $|s_i|$.

Como as ideias de *compressive sensing* aplicam-se a sinais esparsos, precisamos “esparsificar” a imagem *Camera Man 256* eliminando as entradas menos significativas (valores pequenos de $|s_i|$) no seu vetor de coeficientes s . Dada uma constante $c > 0$, consideraremos as imagens resultantes de eliminar as entradas s_i tais que $|s_i| \leq c \|s\|_\infty$. As Figuras 4.8a–4.8j ilustram as imagens resultantes de considerar $c = 0.0010, 0.0009, 0.0008, \dots, 0.0001$, respectivamente. As figuras mostram, para cada imagem, a densidade resultante do processo de “esparsificação”. Daqui em diante, no restante da presente seção, consideraremos a imagem *Phantom 256* original com densidade 9.7% e a imagem *Camera Man 256* “esparsificada” com $c = 0.0010$ e densidade 14.17% que, com abuso de notação, continuaremos chamando de *Camera Man 256*.

Tendo selecionado as duas imagens, consideraremos agora os problemas de programação linear relacionados ao problema de recuperar as imagens selecionadas utilizando $m \in \{1.5k, 2k, 2.5k, 3k, 3.5k, 4k, 4.5k, 5k\}$ amostras, onde $k = \|s\|_0 = 6,391$ para a imagem *Phantom 256* e $k = \|s\|_0 = 9,786$ para a imagem *Camera Man 256* representam a esparsidade do sinal. Os 8 problemas de programação linear (duas imagens e quatro valores possíveis para o número de amostras m) foram resolvidos utilizando Algencan com os parâmetros já mencionados.

A Tabela 4.5 mostra o desempenho do Algencan ao resolver cada um dos 16 problemas. Na tabela, m/k é razão entre o número de amostras e a esparsidade do sinal, $\|s\|_1$ é o valor da função objetivo de (4.3) e $\|y - \Theta s\|_\infty$ é a norma infinito da viabilidade de (4.3), # outit, # ininit

Figura 4.8: Imagens resultantes de aplicar o processo de “esparcificação” à imagem *Camera Man 256*.

e Tempo representam uma medida do custo computacional de resolver o problema e rerem-se ao número de iterações externas e internas de Algencan e ao tempo de CPU em segundos, respectivamente.

As Figuras 4.9 e 4.10 apresentam as imagens recuperadas. As Figuras 4.11 e 4.12 ilustram a diferença entre a imagem original e as imagens recuperadas. Analisando as imagens recuperadas observamos que, tanto para a imagem *Phantom 256* como para a imagem *Camera Man 256*, as imagens recuperadas são muito parecidas às imagens originais quando $m \in \{2.5k, 3k, \dots, 5k\}$.

m/k	Imagem <i>Phantom 256</i>					Imagem <i>Camera Man 256</i>				
	$\ s\ _1$	$\ y - \Theta s\ _\infty$	# outit	# innit	Tempo	$\ s\ _1$	$\ y - \Theta s\ _\infty$	# outit	# innit	Tempo
1.5	2488.378252	1.90E-11	19	2163	6978.62	3151.149480	7.50E-09	21	1291	4878.00
2.0	2887.744625	3.20E-09	22	1637	6395.56	3508.192221	3.40E-09	24	2245	11495.99
2.5	3132.373870	9.10E-09	21	1301	3851.97	3739.190799	5.30E-09	23	2405	7500.96
3.0	3265.240770	1.40E-09	22	1451	6119.39	3768.553034	2.40E-12	26	752	32.01
3.5	3303.274688	5.30E-12	16	533	22.01	3768.553034	4.30E-12	19	321	11.81
4.0	3303.274688	1.30E-10	16	347	11.15	3768.553034	2.60E-13	18	289	12.70
4.5	3303.274688	6.50E-12	17	241	8.90	3768.553034	3.80E-12	18	206	9.44
5.0	3303.274688	6.40E-12	15	188	6.75	3768.553034	3.00E-12	19	194	9.52

Tabela 4.5: Detalhe do desempenho do Algencan na resolução do problema (4.3) para as imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256* variando o número de amostras m .

Figura 4.9: *Imagens recuperadas a partir da solução do problema de programação linear (4.3) para a imagem Phantom 256 e considerando diferentes valores para o número de amostras m .*

Figura 4.10: *Imagens recuperadas a partir da solução do problema de programação linear (4.3) para a imagem Camera Man 256 e considerando diferentes valores para o número de amostras m .*

4.3 Experimentos com ruído

Nesta seção abordaremos a resolução de uma sequência de problemas do tipo (3.3–3.4) para diferentes valores do parâmetro $\gamma \in [0, 1]$. Para um valor fixo de γ , o problema (3.3–3.4) consiste em minimizar uma quadrática convexa sujeita a restrições de caixa. Como já foi mencionado no Capítulo 3, este problema vem de considerar ambientes em que o sinal original é amostrado

Figura 4.11: Comparação da imagem verdadeira Phantom 256 com a imagem recuperada utilizando a solução do problema de programação linear (4.3) com diferentes valores do número de amostras m .

Figura 4.12: Comparação da imagem verdadeira Camera Man 256 com a imagem recuperada utilizando a solução do problema de programação linear (4.3) com diferentes valores do número de amostras m .

com ruído. Ao longo desta seção utilizaremos a matriz de medição Φ do tipo BPBD com $L = 2$. Analisaremos a qualidade do sinal recuperado em função de número de amostras m e o nível de ruído introduzido.

Para os experimentos numéricos consideraremos primeiramente as imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256* consideradas na Seção 4.2 (quer dizer, com abuso de notação, continuamos chamando de *Camera Man 256* à versão esparsificada da imagem *Camera Man 256* original que foi utilizada na seção anterior). Acompanhando o desenvolvimento do trabalho [33], utilizaremos o método do Gradiente Espectral Projetado (SPG) [12, 16] com todos seus parâmetros *default*

para resolver os problemas do tipo (3.3). Isto quer dizer que utilizaremos $M = 10$, $\lambda_{\min} = 10^{-30}$, $\lambda_{\max} = 10^{30}$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.9$, $\gamma_{\text{arm}} = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-6}$.

Para introduzir ruído nas amostras y (que denotam amostras sem ruído da forma $y = \Phi x$, onde x é a imagem original) e assim simular um possível erro no instrumento de medição, redefinimos y como

$$y_i \leftarrow y_i + \eta_i^y \times y_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $\eta_i^y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2)$. Quer dizer, η_i^y segue uma distribuição normal $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ com média 0 e variância σ_y^2 , onde $\sigma_y > 0$ define o nível de ruído considerado nas amostras. De forma, análoga, para introduzir ruído na imagem verdadeira x e assim simular possíveis condições adversas no ambiente, redefinimos x como

$$x_i \leftarrow x_i + \eta_i^x \times x_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $\eta_i^x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$. Nos experimentos a seguir consideraremos ruído tanto no sinal como nas amostras e utilizaremos $\sigma_x = \sigma_y \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.09\}$.

Para comparar o sinal recuperado x com o sinal original x^* utilizaremos a medida *Peak Signal-to-Noise Ratio* (PSNR) [23] definida como

$$PSNR(x, x^*) = 10 \log_{10} \left(\frac{\|x^*\|_{\infty}^2}{\frac{1}{n} \|x - x^*\|_2^2} \right). \quad (4.4)$$

O valor típico para o $PSNR(\cdot, \cdot)$ fica entre 30dB e 50dB, e valores entre 20dB e 25dB são considerados aceitáveis. Um valor “alto” do $PSNR(\cdot, \cdot)$ indica uma boa qualidade da imagem recuperada [23]. A solução x do problema (3.3–3.4) é de fato algo do tipo $x(\gamma)$. Nos experimentos numéricos a seguir, resolveremos uma sequência de problemas (3.3–3.4) para diferentes valores de γ e, fazendo uso da solução verdadeira x^* , apresentaremos como imagem reconstruída, a solução $x(\gamma)$ com maior valor de $PSNR(x(\gamma), x^*)$.

Foi observado em [33] que problemas do tipo (3.3–3.4) são mais fáceis de resolver quando $\gamma \approx 1$. De fato, para $\gamma = 1$ o problema (3.3–3.4) (veja o problema equivalente (3.2)) consiste em achar o $s \in \mathbb{R}^n$ com $\|\cdot\|_1$ mínima, quer dizer, $s = 0$. Isto sugere que uma estratégia válida (do tipo *warmstart*) para resolver uma sequência de problemas (3.3–3.4) para valores diferentes de γ seria começar com $\gamma = 1$, ir reduzindo o valor de γ até chegar a zero e utilizar como ponto inicial para o problema com um γ dado, a solução do problema “anterior”. A solução do primeiro problema (com $\gamma = 1$) é, como já foi mencionado, $s = 0$. Porém, empiricamente, foi também comprovado em [33] que não é necessário resolver problemas do tipo (3.3–3.4) para γ variando de 1 até 0. Logo, a nossa estratégia consistirá em variar γ de forma decrescente de um certo $\gamma_{\max}$ até um certo $\gamma_{\min}$. A solução inicial para o primeiro problema será dada pela solução do problema

$$\text{Minimizar } \|s\|_2 \text{ sujeita a } \Theta s = y, \quad (4.5)$$

cuja expressão analítica é dada por

$$s = \Theta^T (\Theta \Theta^T)^{-1} y. \quad (4.6)$$

Calculado s como em (4.6), o valor inicial das variáveis u e v do problema (3.3–3.4) é dado por $u = [s]_+$ e $v = [-s]_+$. O valor de s em (4.6) é calculado utilizando Gradientes Conjugados [34] (veja também [45]) para resolver o sistema $(\Theta \Theta^T) \tilde{s} = y$ e depois calculando $s = \Theta^T \tilde{s}$.

Na escolha do intervalo $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ utilizamos como referência o trabalho [15]. Em [15] mostra-se (adaptando-o para a formulação (3.3–3.4)) que se

$$\gamma \geq \frac{\|\Theta^T s^*\|_\infty}{1 + \|\Theta^T s^*\|_\infty},$$

onde s^* são os coeficientes da imagem verdadeira x^* , quer dizer $s^* = \Psi x^*$, então $s = 0$ (ou a sua representação equivalente nas variáveis u e v) é a solução única do problema (3.3–3.4). Nos experimentos que apresentaremos a seguir, consideraremos $\gamma_{\max} = 0.2$, $\gamma_{\min} = 10^{-4}$, $\gamma_{\text{step}} = 10^{-4}$ e

$$\gamma \leftarrow \gamma_{\max} - (i - 1) \gamma_{\text{step}}, i = 1, \dots, 2000. \quad (4.7)$$

A modo de exemplo, consideremos o problema (3.3–3.4) associado à imagem *Phantom* 256, com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e $m = 2k$ (lembramos que para a imagem *Phantom* 256 temos $k = \|s^*\|_0 = 6,391$). Se resolvemos de forma independente os 2,000 problemas de otimização provenientes de variar γ como sugerido em (4.7), utilizando como ponto inicial o valor de s dado em (4.6), então são necessárias, ao todo, 464,248 iterações do SPG, 492,319 avaliações de função objetivo e 2,577.84 segundos de tempo de CPU. Por outro lado, utilizando a técnica de *warmstart* são necessárias, ao todo, 75,707 iterações do SPG, 102,502 avaliações de função objetivo e 526.55 segundos de tempo de CPU. A Tabela 4.6 mostra em detalhe estas quantidades para alguns valores de γ escolhidos arbitrariamente. Na tabela, $f(s)$ corresponde com a função objetivo do problema (3.3–3.4) (ou, equivalentemente, a função objetivo do problema (3.2)), as colunas $\|s\|_1$ e $\frac{1}{2}\|y - \Theta s\|_2^2$ são auto-explicativas e “# it”, “# fcnt” e “Tempo” correspondem ao número de iterações do SPG, o número de avaliações de função e o tempo de CPU (em segundos), respectivamente. Em todos os casos o SPG satisfaz o critério de parada, já mencionado, dado por $\|\nabla f(s)\|_\infty \leq 10^{-6}$. É fácil observar que a estratégia *warmstart* reduz drasticamente o custo computacional de resolver uma sequência de problemas. No exemplo ilustrado a redução é de, aproximadamente, 80%.

Resumindo, nos experimentos a seguir consideraremos duas imagens (*Phantom* 256 e *Camera Man* 256), com nove níveis possíveis de ruído ($\sigma_x = \sigma_y \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.09\}$) e, consideraremos ainda um número de amostras $m \in \{2k, 3k, 4k, 5k\}$ com $k = \|s^*\|_0 = 6,391$ para a imagem *Phantom* 256 e $k = \|s^*\|_0 = 9,786$ para a imagem *Camera Man* 256. Temos então 72 problemas diferentes do tipo (3.3–3.4). Note que, para cada um deles, variaremos γ como mencionado acima (2,000 valores de γ para cada problema), totalizando 144,000 diferentes problemas de

γ	Warmstart						Coldstart					
	$f(s)$	$\ s\ _1$	$\frac{1}{2}\ y - \Theta s\ _2^2$	# it	# fcnt	Tempo	$f(s)$	$\ s\ _1$	$\frac{1}{2}\ y - \Theta s\ _2^2$	# it	# fcnt	Tempo
0.2000	259.581909	209.931361	219.861470	37	38	0.21	259.581909	209.931361	219.861470	37	38	0.21
0.1000	1,011.807852	85.523313	178.151762	18	30	0.14	1,011.808442	85.523248	178.151762	123	125	0.64
0.0900	1,136.957548	72.395117	168.205732	21	33	0.16	1,136.958367	72.395036	168.205732	79	81	0.42
0.0800	1,272.852491	59.781294	156.826987	28	40	0.20	1,272.852788	59.781268	156.826987	92	94	0.49
0.0700	1,419.573794	47.893725	143.911331	27	39	0.19	1,419.573988	47.893711	143.911331	92	94	0.50
0.0600	1,577.894872	36.897847	129.357666	34	47	0.24	1,577.895057	36.897835	129.357666	97	99	0.53
0.0500	1,749.053405	26.946794	113.052120	37	51	0.26	1,749.053326	26.946798	113.052120	164	169	0.88
0.0400	1,934.877011	18.204276	94.871184	34	48	0.24	1,934.877724	18.204247	94.871184	134	140	0.74
0.0300	2,138.361469	10.838438	74.664127	59	74	0.40	2,138.362695	10.838400	74.664127	172	178	0.94
0.0200	2,361.861563	5.125097	52.259825	86	100	0.55	2,361.862468	5.125078	52.259825	346	351	1.87
0.0100	2,609.983429	1.367495	27.453653	94	111	0.60	2,609.988423	1.367444	27.453653	644	659	3.52
0.0090	2,636.296831	1.115134	24.831768	140	158	0.87	2,636.305730	1.115053	24.831768	772	800	4.24
0.0080	2,662.887989	0.887180	22.183185	153	169	0.96	2,662.900579	0.887079	22.183185	952	984	5.21
0.0070	2,689.787245	0.683919	19.507642	115	137	0.75	2,689.795447	0.683862	19.507642	1,013	1,052	5.54
0.0060	2,716.961010	0.506154	16.804883	197	223	1.24	2,716.970632	0.506096	16.804883	1,156	1,216	6.42
0.0050	2,744.486891	0.353936	14.074600	178	198	1.13	2,744.503548	0.353852	14.074600	1,419	1,471	8.04
0.0040	2,772.319798	0.228126	11.316492	308	334	1.92	2,772.329777	0.228087	11.316493	1,917	2,006	10.79
0.0030	2,800.439824	0.129370	8.530302	254	286	1.63	2,800.457038	0.129319	8.530302	1,948	2,093	10.98
0.0020	2,828.907017	0.058040	5.715737	212	251	1.38	2,828.933237	0.057989	5.715739	2,969	3,222	16.81
0.0010	2,857.778994	0.014673	2.872437	238	273	1.52	2,857.808606	0.014649	2.872443	4,667	5,207	26.93
0.0009	2,860.680621	0.011913	2.586514	277	305	1.71	2,860.718276	0.011884	2.586519	4,547	5,049	26.23
0.0008	2,863.596016	0.009430	2.300299	441	490	2.72	2,863.629041	0.009408	2.300304	5,735	6,526	33.46
0.0007	2,866.503537	0.007246	2.013793	298	336	1.88	2,866.542770	0.007223	2.013798	7,373	8,323	42.80
0.0006	2,869.422537	0.005345	1.726995	445	487	2.74	2,869.461524	0.005327	1.727001	7,965	8,991	46.31
0.0005	2,872.346386	0.003734	1.439905	455	508	2.78	2,872.386342	0.003721	1.439913	9,064	10,251	52.74
0.0004	2,875.272257	0.002414	1.152522	403	443	2.45	2,875.316801	0.002407	1.152532	9,433	10,697	55.04
0.0003	2,878.192602	0.001391	0.864848	260	284	1.61	2,878.257988	0.001382	0.864859	12,616	14,476	74.12
0.0002	2,881.135280	0.000654	0.576881	347	381	2.14	2,881.239946	0.000650	0.576897	16,158	18,294	94.19
0.0001	2,884.083823	0.000211	0.288619	478	516	2.84	2,884.355554	0.000209	0.288645	26,215	29,582	153.40

Tabela 4.6: Comparação entre as estratégias *warmstart* e *coldstart* para resolver uma sequência de problemas do tipo (3.3–3.4) variando o parâmetro γ .

otimização que serão resolvidos com o SPG.

A Tabela 4.7 mostra o desempenho do SPG para resolver cada um dos 72 problemas. Na tabela, m/k representa o número de amostras, $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$ é o nível de ruído e $PSNR(\cdot, \cdot)$ quantifica a qualidade da solução recuperada. Note que a medida $PSNR(\cdot, \cdot)$ calcula-se utilizando a imagem recuperada x e a imagem verdadeira x^* . A imagem recuperada x é dada por $x = \Psi^T s$, onde $s = u - v$ e u e v representam a solução do problema (3.3–3.4) para um valor de γ fixo. Como já mencionado, o $PSNR(\cdot, \cdot)$ apresentado nas tabelas e figuras é o maior dentre todos os obtidos variando γ . Ainda na Tabela 4.7, “#it”, “# fcnt” e “Tempo” correspondem ao total de iterações do SPG, total de avaliações de função e tempo de CPU (em segundos) necessários para resolver cada sequência completa de problemas da forma (3.3–3.4) variando γ (utilizando *warmstart*). Em todos os casos o SPG satisfaz o critério de parada.

As Figuras 4.13a–d e 4.13e–h mostram uma comparação das curvas Pareto para valores fixos do número de amostras e variando o nível de ruído nos experimentos com as imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256*, respectivamente. As Figuras 4.14 e 4.15 mostram o valor de $PSNR(x, x^*)$ para as 36 combinações de nível de ruído e número de amostras nos experimentos envolvendo as imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256*, respectivamente. Para cada combinação de $\sigma_x = \sigma_y$ e m , como já foi mencionado anteriormente, consideramos como imagem recuperada x , dentre todas as 2,000 $x(\gamma)$, aquela com maior valor de $PSNR(x(\gamma), x^*)$.

Analisando a Figura 4.14, podemos ver que quando $m = 3k$ e $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ o valor do

Figura 4.13: Comportamento das curvas Pareto do problema (3.3–3.4) associado às imagens *Phantom* 256 e *Camera Man* 256 variando o número de amostras $m \in \{2k, 3k, 4k, 5k\}$ e o nível de ruído $\sigma = \sigma_x = \sigma_y \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.09\}$.

$PSNR(\cdot, \cdot)$ associado à imagem recuperada fica por volta de 28dB e, para o mesmo valor de m ,

quando o nível de ruído aumenta o valor do $PSNR$ desce até 22dB. O mesmo comportamento do $PSNR(\cdot, \cdot)$ é observado para outros valores de m sendo que o intervalo de variação do $PSNR(\cdot, \cdot)$ é proporcional a m . O mesmo comportamento é observado na Figura 4.15.

As Figuras 4.16a–4.16l representam as imagens recuperadas nos problemas associados à imagem *Phantom* 256 com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e $m \in \{2k, 3k, 4k, 5k\}$. Na figura, a primeira coluna corresponde sempre à imagem com ruído, a segunda coluna corresponde à imagem utilizada como estimativa inicial do processo de otimização (quer dizer, a imagem vinda de considerar o coeficiente s solução do problema (4.5)) e a terceira coluna corresponde à solução $x(\gamma)$ do problema (3.3–3.4) com maior valor de $PSNR(x(\gamma), x^*)$. A primeira linha corresponde a $m = 2k$, a segunda corresponde a $m = 3k$ e a terceira e a quarta linha correspondem a $m = 4k$ e $m = 5k$, respectivamente. A Figura 4.16c, que corresponde à solução do problema com $\gamma = 0.0104$ tem valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 18.4054\text{dB}$. Quando $m \geq 3$ a qualidade da imagem recuperada aumenta atingindo 42dB, no caso $m = 5k$.

Figura 4.14: Comparação da qualidade das imagens recuperadas ao resolver os 36 problemas do tipo (3.3–3.4) associados à imagem *Phantom* 256 considerando diferentes níveis de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e diferentes números de amostras m .

Considerando o problema com $m = 2k$, a Figura 4.17 mostra a curva Pareto para $\gamma \in [0.9999, 0.0001]$. Na figura, $f_1 = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i$ e $f_2 = \|\Theta(u - v) - y\|_2^2$. A figura mostra ainda as imagens recuperadas correspondentes a alguns valores arbitrários de γ . Notamos que no intervalo $\gamma \in [0.2, 0]$ as imagens recuperadas são mais parecidas à imagem original. Daqui que nos nossos experimentos consideramos γ no intervalo $[\gamma_{\max}, \gamma_{\min}]$ com $\gamma_{\max} = 0.2$ e $\gamma_{\min} = 10^{-4}$.

As Figuras 4.18a–4.18l representam as imagens recuperadas nos problemas associados à imagem *Camera Man* 256 com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e $m \in \{2k, 3k, 4k, 5k\}$. Na figura, a primeira coluna corresponde sempre à imagem com ruído, a segunda coluna corresponde à imagem utilizada como estimativa inicial do processo de otimização (quer dizer, a imagem vinda de considerar o coeficiente s solução do problema (4.5)) e a terceira coluna corresponde à solução $x(\gamma)$

Figura 4.15: Comparação da qualidade das imagens recuperadas ao resolver os 36 problemas do tipo (3.3–3.4) associados à imagem Camera Man 256 considerando diferentes níveis de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e diferentes números de amostras m .

do problema (3.3–3.4) com maior valor de $PSNR(x(\gamma), x^*)$. A primeira linha corresponde a $m = 2k$, a segunda corresponde a $m = 3k$ e a terceira e a quarta linha correspondem a $m = 4k$ e $m = 5k$, respectivamente. Figura 4.16c, que corresponde à solução do problema com $\gamma = 0.0104$ tem valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 18.4054\text{dB}$. Quando $m \geq 3$ a qualidade da imagem recuperada aumenta atingindo 42dB, no caso $m = 5k$. A Figura 4.18c, que corresponde à solução do problema com $\gamma = 0.0073$ tem valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 22.0350\text{dB}$. Quando $m \geq 3$ a qualidade da imagem recuperada aumenta atingindo 38dB, no caso $m = 5k$.

Em muitos trabalhos que envolvem aplicações de *compressive sensing* à reconstrução de imagens, consideram-se imagens de teste não necessariamente esparsas na base Ψ . Neste contexto, em nossos experimentos consideraremos as seguintes imagens de $n = 512 \times 512$ pixels: (a) *Lena* 512, (b) *Barbara* 512 e (c) *Mandrill* 512. As três imagens, ilustradas na Figura 4.19, estão amplamente disponíveis na *web* (veja, por exemplo, [58]). A densidade das imagens *Lena* 512, *Barbara* 512 e *Mandrill* 512 é 94.35%, 95.89% e 97.92%, respectivamente.

Nestes experimentos consideramos níveis de ruído $\sigma_x = \sigma_y \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.05\}$ e um número de amostras dado por $m = \alpha n$ com $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, obtendo um total de 135 problemas. A Tabela 4.8 mostra a qualidade das soluções, medida utilizando o $PSNR(\cdot, \cdot)$, e o custo computacional de resolver cada um dos 135 problemas, apresentando o total de iterações ($\#$ it), o total de avaliações de função ($\#$ fcnt) e o tempo de CPU em segundos (Tempo) utilizados pelo SPG para resolver a sequência de 2,000 problemas variando γ (para α e σ fixos). Na tabela, α é tal que o número de amostras é dado por $m = \alpha n$ e σ corresponde ao valor do nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. As Figuras 4.21–4.23 mostram a variação do $PSNR(\cdot, \cdot)$ em função do nível de ruído e o número de amostras, para cada uma das imagens *Lena* 512, *Barbara* 512 e *Mandrill* 512, respectivamente. O comportamento é similar ao observado anteriormente.

		Imagem <i>Phantom 256</i>				Imagem <i>Camera Man 256</i>			
m/k	σ	$PSNR(\cdot, \cdot)$	# it	# fcnt	Tempo	$PSNR(\cdot, \cdot)$	# it	# fcnt	Tempo
2	0.1	18.409516	61,626	86,621	868.10	21.823839	43,262	67,429	538.93
	0.2	27.984457	55,998	81,514	751.14	31.776533	38,082	63,576	494.99
	0.3	40.856474	45,950	71,169	438.65	38.106914	29,698	55,306	336.62
	0.4	44.136453	35,524	60,974	338.53	40.947919	27,582	53,167	357.76
	0.5	18.213673	55,696	80,029	718.64	21.307818	38,354	61,732	514.47
	0.6	26.983246	54,527	79,870	530.44	27.166329	35,214	59,985	400.27
	0.7	35.717949	40,008	65,056	389.17	32.108234	30,702	55,823	341.98
	0.8	38.368857	33,449	58,694	324.45	34.813227	26,676	51,658	448.58
	0.9	18.014482	48,026	71,637	560.20	20.427230	36,121	58,815	578.75
3	0.1	26.005193	54,298	79,386	565.41	24.982977	31,698	55,392	329.14
	0.2	32.670810	43,189	68,071	410.88	28.745266	28,867	53,301	325.76
	0.3	35.043807	35,005	60,033	354.22	31.433681	24,917	49,195	590.15
	0.4	18.024570	53,838	77,889	616.29	19.767069	31,848	52,987	509.20
	0.5	25.098360	49,844	74,700	471.93	23.382151	30,082	52,998	291.96
	0.6	30.346729	42,122	66,810	404.90	26.664032	27,605	51,378	314.20
	0.7	32.683462	33,057	57,796	336.87	29.040410	25,306	48,799	589.66
	0.8	18.066545	51,699	75,638	594.36	19.300316	30,480	50,537	490.43
	0.9	24.413126	48,331	72,705	417.23	22.383831	28,655	50,350	288.78
4	0.1	28.922394	39,661	64,077	383.16	25.238877	25,822	48,396	293.87
	0.2	30.756660	33,444	57,941	335.58	27.313324	22,125	44,669	536.62
	0.3	18.097176	54,954	78,818	629.89	18.669803	26,560	45,290	438.62
	0.4	23.681739	44,985	69,141	410.05	21.567593	25,824	46,095	265.72
	0.5	27.725628	42,276	66,461	402.94	23.882798	23,559	44,970	270.51
	0.6	29.594163	33,652	57,927	673.76	26.014848	21,049	42,526	508.13
	0.7	17.708898	50,346	74,073	533.62	18.224832	23,978	41,013	325.79
	0.8	22.857610	44,944	68,897	408.24	20.857925	23,762	43,237	246.77
	0.9	26.491847	38,030	62,086	371.31	22.949558	21,916	41,668	243.16
5	0.1	28.447949	31,171	55,017	714.10	24.855008	20,990	41,183	399.04
	0.2	17.746482	49,347	72,233	533.00	17.794731	22,207	37,649	351.19
	0.3	22.279440	45,757	69,839	413.95	20.145172	20,787	38,502	215.48
	0.4	25.846373	37,047	60,749	361.54	22.307714	19,771	38,405	209.30
	0.5	27.321747	34,711	58,366	772.67	23.998037	19,722	38,684	355.61
	0.6	17.486831	46,910	69,636	607.07	17.355597	18,807	33,183	264.81
	0.7	21.887356	44,879	68,681	421.23	19.681704	19,142	35,525	198.54
	0.8	24.931380	35,675	58,984	347.10	21.435238	17,955	35,107	217.98
	0.9	26.612839	29,883	52,957	686.60	23.163715	18,570	36,391	336.58

Tabela 4.7: Detalhe da qualidade das soluções e do desempenho do SPG na resolução do problema (3.3–3.4) para as imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256* variando o nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e o número de amostras m .

As Figuras 4.20a–i, 4.20j–r e 4.20s–aa mostram uma comparação das curvas Pareto para valores fixos do número de amostras e variando o nível de ruído nos experimentos com as imagens *Lena 512*, *Barbara 512* e *Mandrill 512*, respectivamente. As Figuras 4.14 e 4.15 mostram o valor de $PSNR(x, x^*)$ para as 36 combinações de nível de ruído e número de amostras nos experimentos envolvendo as imagens *Phantom 256* e *Camera Man 256*, respectivamente. Para cada combinação de $\sigma_x = \sigma_y$ e m , como já foi mencionado anteriormente, consideramos como imagem recuperada x , dentre todas as 2,000 $x(\gamma)$, aquela com maior valor de $PSNR(x(\gamma), x^*)$. As Figuras 4.24–4.26 mostram as imagens recuperadas considerando nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ para diferentes valores do número de amostras $m = \alpha n$ com $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, para as imagens *Lena 512*, *Barbara 512* e *Mandrill 512*, respectivamente.

Analisando a Figura 4.24, notamos que para $m \geq 0.4n$ as imagens resultantes são muito parecidas à imagem original, com valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 23\text{dB}$ no caso $m = 0.4n$. A medida que aumenta o número de amostras a qualidade das imagens recuperadas melhora até atingir um valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 40.6208\text{dB}$ no caso $m = 0.9n$. Analisando a Figura 4.25, notamos

		Imagem <i>Lena</i> 512				Imagem <i>Barbara</i> 512				Imagem <i>Mandrill</i> 512			
α	σ	$PSNR(\cdot, \cdot)$	# it	# fcnt	Tempo	$PSNR(\cdot, \cdot)$	# it	# fcnt	Tempo	$PSNR(\cdot, \cdot)$	# it	# fcnt	Tempo
0.1	0.01	16.134409	82,802	110,287	3,049.40	15.123786	88,389	116,016	3,413.62	16.896500	76,678	104,688	2,886.91
	0.02	19.182680	75,697	102,595	3,637.82	17.115679	87,288	114,714	4,107.47	18.140199	80,474	107,624	3,730.33
	0.03	22.223677	65,998	92,327	3,607.19	19.043394	79,314	106,163	3,682.90	19.418215	75,554	102,379	3,044.71
	0.04	25.147852	55,928	82,015	2,376.53	20.895304	73,597	100,379	4,115.48	20.839047	70,839	97,607	2,905.56
	0.05	28.230556	48,435	75,067	2,269.22	22.831951	63,147	90,535	2,744.33	22.443594	64,378	91,755	2,648.26
0.2	0.01	31.380095	43,053	70,008	3,109.59	25.011818	59,885	87,436	3,442.34	24.416165	62,225	90,000	2,909.63
	0.02	34.485758	38,204	65,162	2,134.58	27.698817	55,258	82,653	2,826.47	26.955540	55,064	82,792	2,715.32
	0.03	37.219963	36,149	63,374	2,399.03	30.620268	50,297	77,834	2,861.75	30.718425	49,892	77,776	2,753.63
	0.04	39.256680	33,220	60,488	2,050.83	33.808677	44,806	72,356	2,520.65	35.199277	42,385	70,216	2,373.19
	0.05	15.988598	84,238	111,875	3,029.58	15.050359	91,597	119,489	3,985.91	16.804260	80,546	108,505	2,952.01
0.3	0.01	18.842025	77,386	104,423	3,657.35	16.986453	90,474	118,026	4,254.91	18.030635	82,606	109,693	3,631.06
	0.02	21.657692	66,577	92,887	3,500.09	18.855817	80,341	107,233	4,111.85	19.254354	78,851	105,711	3,060.96
	0.03	24.168987	60,827	87,112	3,091.16	20.624002	74,941	101,804	4,267.90	20.600246	74,681	101,491	3,132.34
	0.04	26.583914	51,229	78,044	2,656.79	22.425985	65,326	92,674	2,630.27	22.055220	64,921	92,400	2,675.91
	0.05	28.730495	48,099	75,274	3,300.80	24.320550	62,046	89,700	3,478.73	23.761298	63,193	91,035	2,914.97
0.4	0.01	30.612428	45,246	72,544	2,637.61	26.649789	59,175	86,681	3,353.12	25.678865	59,506	87,442	2,887.64
	0.02	32.312896	41,969	69,461	2,684.73	28.792889	54,820	82,453	3,927.67	27.904890	55,454	83,671	2,905.15
	0.03	33.796002	39,720	67,384	2,233.01	30.963152	49,242	76,922	2,959.18	30.231985	49,136	77,378	2,677.91
	0.04	15.800674	91,227	118,924	3,166.60	14.943682	95,644	123,569	3,982.94	16.685004	84,741	112,799	3,938.03
	0.05	18.424374	82,884	110,136	3,891.23	16.794196	94,090	121,820	4,670.76	17.862762	84,918	112,140	3,451.80
0.5	0.01	21.002748	71,793	98,406	3,611.62	18.590492	84,472	111,494	4,415.35	19.023686	81,424	108,428	3,218.39
	0.02	23.192096	65,758	92,157	3,441.34	20.258638	79,543	106,529	4,830.51	20.279064	76,742	103,679	3,243.59
	0.03	25.227093	57,295	84,267	3,298.96	21.910707	66,828	94,339	2,617.38	21.574156	68,676	96,251	2,803.59
	0.04	26.965989	53,135	80,582	2,851.32	23.535201	64,560	92,329	3,627.41	23.038004	68,990	97,132	3,055.16
	0.05	28.436493	51,582	79,219	3,057.27	25.613623	62,114	89,687	3,996.52	24.551021	65,054	93,280	3,096.27
0.6	0.01	29.769490	48,853	76,629	3,067.12	27.354663	59,502	87,168	3,496.98	26.174275	60,389	88,789	3,043.70
	0.02	30.958355	45,359	73,421	2,683.42	29.054909	54,405	82,170	3,657.64	27.806249	55,635	84,212	2,957.18
	0.03	15.599433	94,701	122,791	3,399.71	14.826419	99,301	127,433	4,447.15	16.553692	90,156	118,375	3,861.48
	0.04	17.990314	89,942	117,446	4,191.58	16.573480	96,727	124,580	4,717.93	17.669059	88,595	115,943	3,648.66
	0.05	20.356678	75,658	102,463	4,078.45	18.291407	86,756	113,872	4,418.23	18.759032	84,252	111,397	3,264.74
0.7	0.01	22.325571	69,225	95,851	3,726.10	19.858993	81,351	108,420	4,829.41	19.926116	81,223	108,171	3,346.56
	0.02	24.109623	61,698	88,828	3,648.85	21.379813	72,431	100,227	3,421.75	21.078890	72,537	100,240	3,148.48
	0.03	25.643452	58,869	86,459	2,912.42	23.134685	68,198	95,753	3,666.02	22.356278	71,217	99,363	3,177.05
	0.04	26.901867	57,410	85,400	3,345.80	24.707792	65,906	93,546	3,751.88	23.618461	68,593	96,909	3,410.31
	0.05	28.042120	53,678	81,767	2,839.50	26.202909	65,302	93,112	4,099.87	24.912258	65,881	94,705	3,238.81
0.8	0.01	29.063366	54,605	83,277	3,572.60	27.646264	60,986	88,802	3,342.33	26.211162	61,684	90,674	3,130.12
	0.02	15.412279	99,720	127,874	3,598.71	14.703542	103,577	131,923	4,814.37	16.434951	98,647	126,896	3,931.39
	0.03	17.575804	91,922	119,639	4,519.51	16.342378	99,485	127,525	3,720.71	17.480346	94,160	121,768	3,451.02
	0.04	19.765489	83,367	110,542	3,235.32	17.987199	92,439	119,812	4,107.90	18.496999	88,671	116,000	3,675.66
	0.05	21.571499	74,410	101,112	4,168.58	19.461096	84,687	111,977	4,402.72	19.572596	85,792	112,985	3,446.37
0.9	0.01	23.182220	67,475	94,851	4,002.22	20.863693	75,771	103,537	3,663.68	20.612827	77,830	105,643	3,270.37
	0.02	24.577694	65,806	93,588	2,887.12	22.529364	74,293	101,914	3,337.96	21.745420	73,295	101,462	3,265.14
	0.03	25.715906	62,503	90,625	3,597.15	23.930635	70,690	98,387	3,641.95	22.837005	73,364	101,912	3,766.93
	0.04	26.733406	62,219	90,848	3,051.81	25.260248	69,730	97,567	4,456.38	23.917336	71,837	100,948	3,414.29
	0.05	27.647914	59,257	88,195	3,371.13	26.537841	66,887	94,843	3,431.79	25.011217	68,846	98,299	3,515.24

Tabela 4.8: Detalhe da qualidade das soluções e do desempenho do SPG na resolução do problema (3.3–3.4) para as imagens *Lena* 512, *Barbara* 512 e *Mandrill* 512 variando o nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e o número de amostras m .

que para $m \geq 0.5n$ as imagens resultantes são muito parecidas à imagem original, com valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 22\text{dB}$ no caso $m = 0.5n$. A medida que aumenta o número de amostras a qualidade das imagens recuperadas melhora até atingir um valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 33.80867\text{dB}$ no caso $m = 0.9n$. Finalmente, analisando a Figura 4.26, notamos que para $m \geq 0.4n$ as imagens resultantes são muito parecidas à imagem original, com valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 20\text{dB}$ no caso $m = 0.4n$. A medida que aumenta o número de amostras a qualidade das imagens recuperadas melhora até atingir um valor de $PSNR(x(\gamma), x^*) = 36.05327\text{dB}$ no caso $m = 0.9n$.

4.4 Experimentos de grande porte

Nesta seção, para verificar o desempenho do SPG ao resolver o problema (3.3–3.4), realizamos experimentos numéricos com imagens com $n = 1,024 \times 1,024 = 1,048 \times 576$ e $n = 2,048 \times$

$2,048 = 4,194,304$ *pixels*. Imagens de $n = 4,096 \times 4,096$ *pixels* não puderam ser testadas por falta de memória no ambiente computacional descrito no início do capítulo. Note que o número de variáveis dos problemas de otimização considerados é $2n$, quer dizer, que resolveremos problemas de otimização com até 8,338,608 de variáveis. A variação do parâmetro γ é como segue

$$\gamma \in \{0.2000, 0.1995, \dots, 0.0001\}.$$

Na Figura 4.28 ilustramos o teste para a imagem *Phantom* de $1,024 \times 1,024$ *pixels*. A Figura 4.28c é a imagem recuperada com $m = 5k$ onde $k = 36,956$, apresentando um total iterações de 18,375, um total de avaliações de função de 22,546 e um tempo de CPU em segundos (Tempo) utilizados pelo SPG para resolver a sequência de 400 problemas variando γ (para σ fixo) de 3,893.43.

Mostramos na Figura 4.28 o teste para a imagem *Phantom* de $n = 2,048 \times 2,048$ *pixels*. A Figura 4.28c ilustra a imagem recuperada com $m = 5k$ onde $k = 85,853$, apresentando um total iterações de 27,884, um total de avaliações de função de 32,332 e um tempo de CPU em segundos (Tempo) utilizados pelo SPG para resolver a sequência de 400 problemas variando γ (para σ fixo) de 25468.68.

Figura 4.16: Comparação da imagem original Phantom 256 com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.001$ ((a) $m = 2k$, (d) $m = 3k$, (g) $m = 4k$ e (j) $m = 5k$) com a imagem recuperada resolvendo o problema (4.5) ((b) $m = 2k$, (e) $m = 3k$, (h) $m = 4k$ e (k) $m = 5k$) e a imagem recuperada resolvendo o problema (3.3–3.4) ((c) $m = 2k$, (f) $m = 3k$, (i) $m = 4k$ e (l) $m = 5k$), para $m \in \{2k, 3k, 4k, 5k\}$.

Figura 4.17: Curva Pareto do problema (3.3–3.4) associado à imagem Phantom 256 com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e número de amostras $m = 2k$.

Figura 4.18: Comparação da imagem original *Camera Man* 256 com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.001$ ((a) $m = 2k$, (d) $m = 3k$, (g) $m = 4k$ e (j) $m = 5k$) com a imagem recuperada resolvendo o problema (4.5) ((b) $m = 2k$, (e) $m = 3k$, (h) $m = 4k$ e (k) $m = 5k$) e a imagem recuperada resolvendo o problema (3.3-3.4) ((c) $m = 2k$, (f) $m = 3k$, (i) $m = 4k$ e (l) $m = 5k$), para $m \in \{2k, 3k, 4k, 5k\}$.

Figura 4.19: *Imagens não esparsas (a) Lena, (b) Barbara e (c) Mandrill, todas com $n = 512 \times 512$ pixels.*

Figura 4.20: Comportamento das curvas Pareto do problema (3.3–3.4) associado às imagens *Lena 512*, *Barbara 512* e *Mandrill 512* variando o número de amostras $m \in \{0.1n, 0.2n, \dots, 0.9n\}$ e o nível de ruído $\sigma = \sigma_x = \sigma_y \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.05\}$.

Figura 4.21: Comparação da qualidade das imagens recuperadas ao resolver os 45 problemas do tipo (3.3–3.4) associados à imagem Lena 512 considerando diferentes níveis de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e diferentes números de amostras m .

Figura 4.22: Comparação da qualidade das imagens recuperadas ao resolver os 45 problemas do tipo (3.3–3.4) associados à imagem Barbara 512 considerando diferentes níveis de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e diferentes números de amostras m .

Figura 4.23: Comparação da qualidade das imagens recuperadas ao resolver os 45 problemas do tipo (3.3–3.4) associados à imagem Mandrill 512 considerando diferentes níveis de ruído $\sigma_x = \sigma_y$ e diferentes números de amostras m .

Figura 4.24: *Imagens recuperadas a partir da solução do problema (3.3–3.4) para a imagem Lena com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e considerando diferentes valores para o número de amostras m .*

Figura 4.25: *Imagens recuperadas a partir da solução do problema (3.3–3.4) para a imagem Barbara com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e considerando diferentes valores para o número de amostras m .*

Figura 4.26: *Imagens recuperadas a partir da solução do problema (3.3–3.4) para a imagem Mandrill com nível de ruído $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e considerando diferentes valores para o número de amostras m .*

Figura 4.27: (a) Imagem Phantom de $1,024 \times 1,024$ pixels com ruído. (b) Imagem que representa o ponto inicial dado por $s_0 = \Theta^T(\Theta\Theta^T)^{-1}y$. (c) Reconstrução via SPG considerando $m = 5k$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e $\gamma = 0.0011$.

Figura 4.28: (a) Imagem Phantom de $2,048 \times 2,048$ pixels com ruído agregado. (b) Imagem que representa o ponto inicial dado por $s_0 = \Theta^T(\Theta\Theta^T)^{-1}y$. (c) Reconstrução via SPG considerando $m = 5k$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$ e $\gamma = 0.0011$.

Capítulo 5

Conclusões

O processo tradicional de compressão de imagens é muito custoso, já que requer a amostragem e armazenamento da imagem original completa para depois descartar os coeficientes menos significativos da sua representação esparsa e assim obter uma versão comprimida do sinal. *Compressive Sensing* consegue simplificar o processo de aquisição e compressão agrupando-os num só passo.

Neste trabalho estudamos a forma em que o método do Gradiente Espectral Projetado é utilizado no processo de reconstrução de um sinal a partir das amostras. O estudo seguiu de perto a abordagem introduzida em [33]. Com leituras complementares, estudamos conceitos básicos de matrizes de amostragem e matrizes que poderiam ser utilizadas como uma base na qual o sinal original tem uma representação esparsa. Com relação às matrizes de amostragem ou medição, nos concentramos nas chamadas *Binary Permuted Block Diagonal Matrix* [52]. Com relação às matrizes utilizadas como base esparsa, estudamos a transformada discreta da *wavelet* de Haar [36, 57]. Outras matrizes de medição [19, 24, 17, 28] e matrizes que poderiam ser utilizadas como base esparsa, como por exemplo, a transformada do cosseno discreto [55] e a transformada discreta de Fourier [56] não foram abordadas. De qualquer forma, os conceitos estudados nos forneceram os fundamentos necessários para construir instâncias do problema de otimização relacionado à reconstrução de um sinal amostrado.

No caso em que não há ruído no processo de aquisição das amostras, o problema de reconstrução do sinal original é um problema de programação linear. Resolvemos instâncias deste problema utilizando o *solver* comercial CPLEX e Algencan. No caso de Algencan, desenvolvemos uma variante que não requer explicitamente a matriz de coeficientes das restrições. Esta versão de Algencan mostrou-se competitiva em problemas de programação linear de grande porte apontando para uma eventual aplicação importante de Algencan em problemas específicos de programação linear.

Quando a amostragem do sinal é afetada por ruído, o SPG pode ser utilizado, como apontado em [33], para resolver uma sequência de problemas que consistem em minimizar uma quadrática convexa sujeita a restrições de não-negatividade nas variáveis. Utilizando a técnica de *warmstart*, o SPG mostrou-se (como já tinha sido observado na literatura) uma ferramenta eficiente para abordar o problema. Nos nossos experimentos, resolvemos problemas como até 8,338,608

variáveis.

Pelo acima exposto, cumprimos o nosso objetivo de estudar e reproduzir experimentos numéricos relacionados à aplicação do SPG ao problema de *Compressive Sensing*. Como complemento aos temas abordados no presente trabalho seria interessante estudar os conceitos teóricos de *Compressive Sensing* que garantem que, sobre certas hipóteses, o sinal original pode ser recuperado com alta probabilidade a partir de um número reduzido de amostras [19, 51]. Seria também interessante fazer um estudo mais aprofundado do trabalho [31] em que o SPG é utilizado para resolver a abordagem *Basis Pursuit Denoise* do problema de *Compressive Sensing*. Por último, seria também interessante estudar uma abordagem mais abrangente do problema de ℓ_1 -regularization que engloba *Compressive Sensing* mas tem muitas outras aplicações, como por exemplo, *Image Inpainting* [2] e o *Problema do Google* [54].

Referências Bibliográficas

- [1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and J. Yuan, Spectral projected gradient and variable metric methods for optimization with linear inequalities, *IMA Journal of Numerical Analysis* 25, pp. 221–252, 2005. 29
- [2] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester, Image inpainting, *Proceeding of ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics*, pp. 417–424, 2000. 62
- [3] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt, Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification, *Mathematical Programming* 111, pp. 5–32, 2008. 30, 33
- [4] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and L. M. Schuverdt, On Augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints, *SIAM Journal on Optimization* 18, pp. 1286–1309, 2007. 30, 33
- [5] A. S. Bandeira, E. Dobriban, D. G. Mixon, and W. F. Sawin, Certifying the restricted isometry property is hard, *Computing Research Repository*, 2012. 7
- [6] J. Barzilai and J. M. Borwein, Two point step size gradient methods, *IMA Journal of Numerical Analysis* 8, pp. 141–148, 1988. 27
- [7] Z. Ben-Haim, Y. C. Eldar, and M. Elad, Coherence-based performance guarantees for estimating a sparse vector under random noise, *IEEE Transactions on Signal Processing* 58, pp. 5030–5043, 2010. 8
- [8] F. Bergeaud and S. Mallat, Matching pursuit of images, em anais do *International Conference on Image Processing*, 1995, pp. 53–56. 17
- [9] IBM ILOG, *CPLEX Optimizer*, version 12.1 edition. <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer>. 30, 33
- [10] E. G. Birgin and J. M. Gentil, Evaluating bound-constrained minimization software, *Computational Optimization and Applications*, por aparecer (DOI: 10.1007/s10589-012-9466-y). 35
- [11] E. G. Birgin and J. M. Martínez, Structured minimal-memory inexact quasi-Newton method and secant preconditioners for Augmented Lagrangian Optimization, *Computational Optimization and Applications* 39, pp. 1–16, 2008. 34
- [12] E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. Raydan, Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets, *SIAM Journal on Optimization* 10, pp. 1196–1211, 2000. 3, 26, 27, 28, 29, 30, 40
- [13] E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. Raydan, Inexact Spectral Projected Gradient Methods on Convex Sets, *IMA Journal of Numerical Analysis* 23, pp. 539–559, 2003. 29

- [14] E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. Raydan, Spectral Projected Gradient Methods, em *Encyclopedia of Optimization*, C. A. Floudas and P. M. Pardalos eds., 2nd ed., Springer US, 2009, pp. 3652–3659. 29
- [15] S. Kim, K. Koh, M. Lustig, S. Boyd, and D. Gorinvesky, An interior point method for large-scale ℓ_1 -regularized least square, *IEEE jornal of selected topics in signal processing*, 1, pp. 606–617, 2007. 42
- [16] E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. Raydan, Algorithm 813: SPG – software for convex-constrained optimization, *ACM Transactions on Mathematical Software* 27, pp. 340–349, 2001. 3, 26, 29, 30, 40
- [17] E. Candès and J. Romberg, Sparsity and incoherence in compressive sampling, *Inverse Problems* 23, 969–985, 2007. 5, 16, 61
- [18] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Transactions on Information Theory* 52, pp. 489–509, 2006. 1, 9
- [19] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 59, pp. 1207–1223, 2006. 16, 61, 62
- [20] E. Candès and M. B. Wakin, An introduction to compressive sampling, *IEEE Transactions on Signal Processing* 25, pp. 21–30, 2008. 5
- [21] E. J. Candès, The restricted isometric property and its implications for compressed sensing, *Comptes Rendus Mathématique* 346, pp. 589–592, 2008. 6, 7
- [22] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, Atomic decomposition by basis pursuit, *SIAM Review* 43, pp. 129–159, 2001. 9, 10
- [23] Peak signal-to noise ratio, 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Peak_signal_to_noise_ratio. 41
- [24] R. Coifman, F. Geshwind, and Y. Meyer, Noiselets, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 10, pp. 27–44, 2001. 16, 61
- [25] D. Cores, R. Escalante, M. Gonzalez-Lima, and O. Jimenez, On the use of the Spectral Projected Gradient method for Support Vector Machines, *Computational & Applied Mathematics* 28, pp. 327–364, 2009. 27
- [26] P. Cupertino de Lima, Wavelets: uma introdução, *Matemática Universitária* 33, pp. 13–44, 2002. 13, 14, 15
- [27] S. David and W. Michael, *JPEG 2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 2001. 4
- [28] T. T. Do, Lu Gan, N. H. Nguyen, and T. D. Tran, Fast and efficient compressive sensing using structurally random matrices, *IEEE Transactions on Signal Processing* 60, pp. 139–154, 2012. 16, 61
- [29] D. L. Donoho and X. Huo, Uncertainty principles and ideal atomic decomposition, *IEEE Transactions on Information Theory* 47, pp. 2845–2862, 2001. 7

- [30] M. Duarte, M. Davenport, D. Takhar, J. Laska, T. Sun, K. Kelly, and R. Baraniuk, Single-pixel imaging via compressive sampling, *IEEE Signal Processing Magazine* 25, pp. 83–91, 2008. 1, 2
- [31] E. van den Berg and M. P. Friedlander, Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions, *SIAM Journal on Scientific Computing* 2, pp. 890–912, 2008. 10, 27, 62
- [32] J. E. Dennis Jr and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996. 27
- [33] M. Figueiredo, R. Niwal, and S. Wright, Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 1, pp. 586–597, 2007. 3, 10, 11, 18, 27, 40, 41, 61
- [34] R. M. Hestenes and E. Stiefel, Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49, pp. 409–436, 1952. 42
- [35] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990. 8
- [36] A. Haar, Zur theoric der orthonormalen funktionen-systeme, *Mathematische Annalen* 69, pp. 331–371, 1910. 11, 61
- [37] F. J. Herrmann and G. Hennenfent, Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames, *Geophysical Journal International* 173, pp. 233–248, 2008. 2
- [38] A. Jerri, The Shannon sampling theorem – Its various extensions and applications: A tutorial review, *Proceeding of the IEEE* 65, pp. 1565–1596, 1977. 1
- [39] F. Lampariello, L. Grippo, and S. Lucidi, A nonmonotone line search technique for Newton’s method, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 23, pp. 707–716, 1986. 27
- [40] Chinh La and M. N. Do, Tree-based orthogonal matching pursuit algorithm for signal reconstruction, em anais do *IEEE International Conference on Image Processing*, 2006, pp. 1277–1280. 17
- [41] M. Lustig, D. Donoho, and J. Pauly, Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging, *Magnetic Resonance in Medicine* 58, pp. 1182–1195, 2007. 2
- [42] J. Laska, M. Wakin, M. Duarte, D. Baron, S. Sarvotham, K. Kelly D. Takhar, and R. Baraniuk, An architecture for compressive imaging, em anais do *IEEE International Conference on Image Processing*, 2006, pp. 1273–1276. 1
- [43] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing – The Sparse Way*, Academic Press, 3rd edition, 2008. 11
- [44] K. M. Miettinen, *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1999. 9
- [45] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 2006. 42
- [46] J. A. de Lima, *Otimização em Meteorologia: cálculo de perturbações condicionais não-lineares ótimas*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil, 2011. 27

- [47] P. R. Sampaio, *Teoria, métodos e aplicações de otimização multiobjetivo*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil, 2012. 9
- [48] A. Schulz, *Compressive Sensing, Novos paradigmas para aquisição e compressão de imagens*, Trabalho de Formatura, Escola Politécnica, UFRJ, 2008. 6
- [49] T. Serafini, G. Zanghirati, and L. Zanni, Gradient projection methods for quadratic programs and applications in training support vector machines, *Optimization Methods & Software* 20, pp. 347–372, 2005. 27
- [50] R. Tibshirani, Regression shrinkage and selection via the Lasso, *Journal of the Royal Statistical Society – Series B (Methodological)* 58, pp. 267–288, 1996. 10
- [51] Y. Tsaig and D. L. Donoho, Compressed sensing, *IEEE Transactions Information Theory* 52, pp. 1289–1306, 2006. 1, 4, 16, 62
- [52] T. Ogawa, Z. He, and M. Haseyama, The simplest measurement matrix for compressed sensing of natural images, em anais do *17th IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 4301–4304, 2010 3, 16, 17, 61
- [53] L. A. Zadeh, Optimality and non-scalar-valued performance criteria, *IEEE Transactions on Automatic Control* 8, pp. 59–60, 1963.
- [54] Yu. Nesterov, Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems, *Optimization Online* (http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2010/01/2527.pdf). 62
- [55] Discrete cosine transform, 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform. 61
- [56] Discrete Fourier transform, 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform. 61
- [57] Discrete wavelet transform, 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_wavelet_transform. 61
- [58] <http://decsai.ugr.es/cvg/dbimágenes/index.php>. 35, 46
- [59] <http://octave.sourceforge.net/image/function/imresize.html>. 35
- [60] <http://www.gnu.org/software/octave/>. 35
- [61] <http://octave.sourceforge.net/image/function/phantom.html>. 35