Método Beam Search Aplicado a Problemas de Programação da Produção

José Eurípedes Ferreira de Jesus Filho

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Ernesto G. Birgin

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, agosto de 2018

Método Beam Search Aplicado a Problemas de Programação da Produção

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 05/12/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ernesto G. Birgin (orientadora) - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Maristela Oliveira dos Santos - ICMC-USP
- Prof. Dr. Alexandre César Muniz de Oliveira - UFMA
- Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva - UFC
- Prof. Dr. Cláudio Fabiano Motta Toledo - ICMC-USP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha esposa Raissa que sempre esteve do meu lado em toda a minha jornada no doutorado, se sacrificando inúmeras vezes só para me ajudar a cumprir os meus prazos.

Agradeço ao meu filho Arthur por sempre querer o pai por perto, por fazer carinhas só para me convencer a brincar mais um pouco.

Agradeço a minha mãe Gilda pelas palavras de carinho e de ternura nos inúmeros acolhimentos aos meus problemas.

Agradeço ao meu pai José Eurípedes pela história de vida de luta que impactou diretamente na formação do meu caráter. Agradeço pelos inúmeros conselhos e pelo inestimável suporte.

Agradeço a minha irmã Juliana por carregar todo o fardo nas costas, mesmo sendo inúmeras vezes injustiçada, só para tornar minha formação acadêmica possível.

Agradeço aos pais da minha esposa, Moacir e Regina, por todo acolhimento, amizade e suporte oferecido. Estes dois foram em inúmeras vezes meus pais em São Paulo.

Agradeço também ao Professor Ernesto e a Professora Débora, os quais sem a orientação, paciência e devoção com certeza este trabalho não teria sido possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

FERREIRA, J. E. **Método Beam Search Aplicado a Problemas de Programação da Produção**. 2018. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Nesta tese, dois diferentes problemas de programação da produção são abordados, o *Flexible Job Shop Scheduling Problem* com flexibilidade de sequenciamento e o *Flowshop Scheduling Problem* com tempos de espera e permutação de sequência. Para ambos, inicialmente um algoritmo *list scheduling* (LS) que explora características do problema é desenvolvido e então estendido para um método do tipo *Beam Search* (BS) que utiliza o LS em seus principais elementos: (1) expansão dos níveis, (2) avaliação local dos candidatos e (3) avaliação global dos candidatos. Todos os métodos propostos são determinísticos e seus pseudocódigos são cuidadosamente descritos para garantir a replicabilidade dos resultados reportados. O desempenho dos métodos propostos são avaliados utilizando instâncias e outros métodos heurísticos da literatura. Os resultados computacionais obtidos mostram a eficiência das heurísticas propostas que superaram os métodos da literatura utilizando pouco tempo computacional.

Palavras-chave: beam search, list scheduling, jobshop, jobshop flexível, flowshop.

Abstract

FERREIRA, J. E. **Método Beam Search Aplicado a Problemas de Programação da Produção**. 2018. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

In this thesis two different scheduling problems were addressed, the Flexible Job Shop Scheduling Problem with sequence flexibility and the Flowshop Scheduling Problem with waiting times and sequence permutation. For both problems, firstly, a list scheduling (LS) algorithm which exploit features of the problem was developed and then it was extended to a Beam Search (BS) method which use the LS in his main features: (1) level expansion, (2) local evaluation and (3) global evaluation. All the proposed methods are deterministic and their pseudocodes are carefully described to ensure the replicability of the reported results. The performance of the proposed methods was evaluated using instances and other heuristic methods found in literature. The computational results show the efficiency of the proposed heuristics, which outperformed the literature methods while using low computational time.

Keywords: beam search, list scheduling, jobshop, flexible jobshop, flowshop.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Flexible Job Shop Scheduling Problem com Flexibilidade de Sequenciamento	5
2.1 Modelagem matemática	8
2.2 Algoritmo List Scheduling	9
2.2.1 Características gerais	10
2.2.2 Soluções parciais	10
2.2.3 Regras de seleção	11
2.2.4 Pseudo-código	13
2.2.5 Exemplo	14
2.3 Método Beam Search	16
2.3.1 Estratégias de avaliação local e global	17
2.3.2 Pseudo-código	18
2.4 Experimentos Numéricos	23
2.5 Experimentos com FJSP clássico	27
2.6 Conclusão	28
3 Flowshop Scheduling Problem com Tempos de Espera	35
3.1 Modelagem matemática	37
3.2 Algoritmo List Scheduling	39
3.3 Método Beam Search	45
3.4 Experimentos Numéricos	53
3.5 Conclusão	58
4 Conclusões	61
4.1 Trabalhos Futuros	61
Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

2.1	Exemplo das restrições de precedências dadas por um DAG de uma possível tarefa do FJSP-SF (retirado de Birgin <i>et al.</i> (2015)).	6
2.2	Esquema ilustrativo de operações sem precedências entre si (as diferentes <i>signatures</i> e a capa) para a produção de um livro na indústria de impressão (retirado de Birgin <i>et al.</i> (2015)).	6
2.3	DAG de precedências e tabela de tempos de processamento de um cenário do FJSP-SF com $o = 8$ operações e $m = 2$ máquinas.	15
2.4	Pares operação/máquinas possíveis de serem programados considerando o cenário inicial da Figura 2.3.	15
2.5	Conjunto de pares operação/máquina após a Regra 1 ser aplicada ao cenário descrito pela Figura 2.3.	15
2.6	Conjunto de pares operação/máquina após a Regra 1 e a Regra 2 serem aplicadas ao cenário descrito pela Figura 2.3.	16
2.7	Gráfico de Gant da programação da operação o_1 na máquina m_1 considerando o cenário descrito pela Figura 2.3.	16
2.8	Árvore de busca após as Regras 1–3 serem aplicadas no cenário descrito pela Figura 2.3 e a programação do par (o_1, m_1)	16
2.9	Representação gráfica das precedências entre as operações da instância YFJS02. . . .	23
2.10	Representação gráfica das precedências entre as operações da instância DAFJS28. . .	26
2.11	Representação gráfica do desempenho do método <i>Beam Search</i> , com diferentes escolhas de parâmetros α , β e ξ , quando comparados aos resultados obtidos pelo <i>solver</i> CPLEX executado com limite de tempo de 1 hora. (a) Instâncias YFJS01–YFJS20. (b) Instâncias DAFJS01–DAFJS30.	33
2.12	Representação gráfica do tempo de CPU em segundos requerido pelo método <i>Beam Search</i> , com diferentes escolhas de parâmetros α , β e ξ . (a) Instâncias YFJS01–YFJS20. (b) Instâncias DAFJS01–DAFJS30.	34
3.1	Programação da tarefa J_1 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa a janela provocada pela programação. .	39
3.2	Programação das tarefas J_1 e J_2 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa o restante da janela de J_1	40
3.3	Programação das tarefas J_1 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa o restante da janela de J_1	40

3.4	Programação das tarefas J_1 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa o restante da janela de J_1	40
3.5	Programação das tarefas J_2 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa a janela de J_2	41
3.6	Duas programações possíveis considerando o cenário descrito na Tabela 3.3 e data de entrega comum $d = 10$. A programação de baixo é o resultado de empurrar as tarefas J_2 e J_3 dois instantes de tempo na programação de cima. Este processo mantém as somas dos adiantamentos e dos atrasos mas diminui a soma dos tempos de espera.	41
3.7	Três programações possíveis para a sequência de tarefas J_1, J_2, J_3 considerando o cenário descrito na Tabela 3.4 e data de entrega comum $d = 7$. A programação (a) é o resultado da chamada do Algoritmo 7 sem o processo de empurrar. A programação (b) é o resultado da chamada com o processo de empurrar. A programação (c) é a programação ótima para o FSP-WT.	45
3.8	Três programações ótimas para a soma dos adiantamentos e atrasos considerando o cenário descrito na Tabela 3.5 e data de entrega comum $d = 7$ mas com diferentes soma dos tempos de espera. A programação (a) é o resultado da programação da sequência J_1, J_3, J_2 utilizando o Algoritmo 7 sem o processo de empurrar. A programação (b) é o resultado da programação da sequência J_1, J_3, J_2 utilizando o Algoritmo 7 com o processo de empurrar. A programação (c) é o resultado da programação da sequência J_1, J_2, J_3 utilizando o Algoritmo 7 com o processo de empurrar. (c) é ótimo para o FSP-WT.	46
3.9	Esquema da expansão do nível 1 para o nível 2 na árvore de busca do BS. Cada nó pai possui três filhos candidatos para a expansão.	47
3.10	Aplicação da busca local com $\alpha = 2$ no esquema ilustrado pela Figura 3.9. Cada nó pai possui três filhos candidatos para a expansão. Os filhos candidatos são avaliados pela busca local e somente os dois melhores (nós hachurados) são escolhidos para serem avaliados pela busca global.	47
3.11	Aplicação da busca global com $\beta = 2$ no esquema ilustrado pela Figura 3.10. Cada nó pai possui três filhos candidatos para a expansão. Os filhos candidatos escolhidos pela busca local são avaliados pela busca global e somente os dois melhores (nós coloridos) são mantidos na árvore para a próxima iteração do método.	48
3.12	Tempo computacional médio em segundos gasto pelo BS com diferentes configurações de α e β para solucionar uma instância.	57

Lista de Tabelas

2.1	Descrição das instâncias com <i>Y-jobs</i>	24
2.2	Descrição das instâncias nas quais as relações de precedências entre as operações são dadas por um DAG qualquer.	25
2.3	Resultados numéricos da aplicação do CPLEX ao modelo (2.1–2.8) com as instâncias YFJS01–YFJS20. Como em Birgin <i>et al.</i> (2014), uma solução viável inicial é computada com a heurística EST (Birgin <i>et al.</i> , 2014) e passada ao CPLEX.	27
2.4	Resultados numéricos da aplicação do CPLEX ao modelo (2.1–2.8) com as instâncias DAFJS01–DAFJS30. Como em Birgin <i>et al.</i> (2014), uma solução factível inicial é computada com a heurística EST Birgin <i>et al.</i> (2014) e passada ao CPLEX.	28
2.5	Resultados do algoritmo <i>list scheduling</i> aplicado ao conjunto de instâncias YFJS01–YFJS20.	29
2.6	Resultados do algoritmo <i>list scheduling</i> aplicado ao conjunto de instâncias DAFJS01–DAFJS30.	30
2.7	Médias dos desvios relativos obtidos na comparação dos resultados do método <i>Beam Search</i> , com diferentes escolhas de parâmetros para α , β , e ξ , em relação ao CPLEX <i>solver</i> com dois limites de tempo de CPU (1 hora e 10 horas), quando aplicados às instâncias YFJS01–YFJS20.	31
2.8	Médias dos desvios relativos obtidos na comparação dos resultados do método <i>Beam Search</i> , com diferentes escolhas de parâmetros para α , β , e ξ , em relação ao CPLEX <i>solver</i> com dois limites de tempo de CPU (1 hora e 10 horas), quando aplicados às instâncias DAFJS01–DAFJS30.	32
2.9	Erros relativos obtidos pelo método <i>Beam Search</i> aplicado à vários conjuntos clássicos de instâncias do FJSP.	32
2.10	Melhores erros relativos obtidos por algoritmos genéticos clássicos executados cinco vezes em cada conjunto de instância do FJSP.	32
3.1	Variáveis do modelo matemático do FSP-WT.	37
3.2	Parâmetros do modelo matemático do FSP-WT.	37
3.3	Tempos de processamento para um problema com $n = 3$ tarefas e $m = 2$ máquinas. .	39
3.4	Tempos de processamento para um problema com $n = 3$ tarefas e $m = 3$ máquinas. .	44
3.5	Tempos de processamento para um problema com $n = 3$ tarefas e $m = 3$ máquinas. .	44

3.6	Resultados computacionais para o LS proposto neste trabalho considerando a data de entrega d' . Na tabela, cada entrada de E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos para 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que dois ou mais métodos encontraram o melhor valor de E/T . W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que houveram empates para E/T	55
3.7	Resultados computacionais para o LS proposto neste trabalho considerando a data de entrega d'' . Na tabela, cada entrada de E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos para 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que dois ou mais métodos encontraram o melhor valor de E/T . W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que houveram empates para E/T	56
3.8	Resultados computacionais preliminares para o BS com diferentes valores para os parâmetros α e β utilizando um conjunto reduzido de instâncias e data de entrega d' . Na tabela, E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pela BS em relação às demais configurações do método. W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que uma ou mais configurações encontraram o mesmo valor de E/T	56
3.9	Resultados computacionais preliminares para o BS com diferentes valores para os parâmetros α e β utilizando um conjunto reduzido de instâncias e data de entrega d'' . Na tabela, E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pela BS em relação às demais configurações do método. W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que uma ou mais configurações encontraram o mesmo valor de E/T	57
3.10	Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo considerando as 1200 instâncias e a data de entrega d' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos gap relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados reportados por Chandra <i>et al.</i> (2009) em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de gap . W é o IDR da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu atingir ou superar os resultados reportados por Chandra <i>et al.</i> (2009).	58
3.11	Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo considerando as 1200 instâncias e a data de entrega d'' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos gap relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados reportados por Chandra <i>et al.</i> (2009) em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de gap . W é o IDR da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu atingir ou superar os resultados reportados por Chandra <i>et al.</i> (2009).	59

- 3.12 Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo comparados com um *solver* ótimo executado sobre (3.1)–(3.10) considerando as instâncias de pequeno porte e a data de entrega d' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos *gap* relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados encontrados pelo *solver* ótimo em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de *gap*. W é o *IDR* da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu *gap* igual a zero. 60
- 3.13 Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo comparados com um *solver* ótimo executado sobre (3.1)–(3.10) considerando as instâncias de pequeno porte e a data de entrega d'' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos *gap* relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados encontrados pelo *solver* ótimo em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de *gap*. W é o *IDR* da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu *gap* igual a zero. 60

Capítulo 1

Introdução

No início do século XX, Frederick Winslow Taylor já observava que a ineficiência e a ociosidade do uso do tempo produtivo no nível operacional da indústria onde trabalhava reduziam a produtividade total para cerca de um terço do que deveria ser. Essas minuciosas observações de Taylor, mais tarde, foram as bases para a criação da chamada Administração Científica que tinha como principal objetivo eliminar os desperdícios e consequentemente aumentar a produtividade das empresas por meio da aplicação de métodos e técnicas da engenharia industrial. Desde então, é evidente a preocupação com a eficiência do nível operacional das indústrias, visto que o mercado se torna cada vez mais competitivo, exigindo constante aumento na produtividade, redução de custos e encurtamento de prazos de entrega (Chiavenato, 2004). Neste contexto, o planejamento das tarefas de uma empresa deve ser feito de forma a aproveitar os recursos disponíveis da melhor maneira possível. A este planejamento, dá-se o nome de Planejamento e Controle da Produção (PCP). Surgiram portanto, várias técnicas para as tomadas de decisões do PCP. Estas técnicas podem ser classificadas em dois grupos que usam diferentes conceitos de administração da produção: *Just In Case* (JIC) e *Just In Time* (JIT) (Antunes Júnior *et al.*, 1989).

Na JIC, o planejamento e a organização das tarefas visam minimizar o tempo ocioso dos meios de produção envolvidos através de uma previsão de mercado. Assim, é comum gerar estoques para atendimento de demandas futuras. Na JIT, o principal objetivo é minimizar todos os custos envolvidos que não agregam valor ao produto como o de estocagem, tempo/custo de troca nas máquinas de produção (*setup*), tempo/custo na movimentação de matérias primas e intermediárias, etc. Contudo, tanto na JIC quanto na JIT, as decisões de o quê, quando, onde, como, com o quê e o quanto produzir devem ser tomadas e o PCP deve atender as demandas no prazo e respeitar as restrições de capacidade e os recursos disponíveis no meio produtivo além de, geralmente, minimizar os custos envolvidos.

O presente trabalho desenvolve métodos heurísticos para solucionar dois diferentes cenários de programação da produção: o *Flexible Job Shop Scheduling Problem* com flexibilidade de sequenciamento (FJSP-SF) e o *Flowshop Scheduling Problem* com tempos de espera (FSP-WT).

O *Job Shop Scheduling Problem* (JSP) clássico consiste no processamento de n tarefas em um ambiente com m máquinas. Cada tarefa é composta por operações (cada uma das quais deve ser processada numa máquina predefinida) que possuem uma estrutura linear de precedência de processamento entre si. Portanto, cada tarefa possui uma única rota de processamento possível através das m máquinas e a rota de uma dada tarefa pode ser diferente da rota de outra tarefa. O *Flexible Job Shop Scheduling Problem* (FJSP) é uma generalização do JSP na qual uma operação pode ser processada por várias máquinas não necessariamente idênticas. Portanto, cada tarefa possui várias possibilidades de rotas de processamento através das m máquinas. O objetivo é determinar em qual máquina cada operação será processada e a ordem de processamento das operações nas máquinas levando em consideração a otimização de algum critério. O *Flexible Job Shop Scheduling Problem* com flexibilidade de sequenciamento (FJSP-SF) é uma extensão do FJSP que permite que a estrutura de precedências entre as operações de uma mesma tarefa seja estabelecida por um grafo direcionado acíclico (DAG) qualquer ao invés de uma estrutura linear. Assim, o problema consiste em

alocar as operações a pelo menos uma dentre as possíveis máquinas de processamento e determinar o tempo de início de processamento destas operações nas máquinas, respeitando as precedências de acordo com o DAG, de forma que o processamento das operações não se sobreponham.

O *Flowshop Scheduling Problem* (FSP) clássico também consiste no processamento de n tarefas em um ambiente de m máquinas. Contudo, diferentemente do JSP, todas as tarefas devem ser processadas obedecendo uma mesma rota nas máquinas de processamento, quer dizer, a k -ésima operação de cada tarefa deve ser processada pela k -ésima máquina do sistema, com $k = 1, \dots, m$. Pinedo (2008) menciona que nestes tipos de problemas, assume-se que as máquinas de processamento estão posicionadas em série e isto caracteriza o ambiente como *flow shop*. Neste problema, a sequência do processamento das n tarefas pode mudar de uma máquina para outra. Pinedo (2008) chama de *permutation flowshops* os cenários em que a sequência de processamento das tarefas nas máquinas é obrigatoriamente a mesma. O *Flowshop Scheduling Problem* com tempos de espera (FSP-WT) é uma variante do FSP em que os tempos entre o término do processamento de uma tarefa em uma máquina até o início de processamento na próxima máquina são considerados. Dessa forma, o problema consiste em determinar uma única sequência de processamento das tarefas em todas as máquinas, atribuindo instantes de início de processamento para cada uma das operações do sistema sem sobreposição, levando em conta os tempos de espera das tarefas nas máquinas e considerando a otimização de algum critério.

Este trabalho propõe métodos heurísticos do tipo *list scheduling* (LS) e *Beam Search* (BS) desenvolvidos para a minimização do *makespan* no FJSP-SF (Birgin *et al.*, 2015) e para a minimização da somatória do *earliness* e do *tardiness* no FSP-WT com permutação de sequências e data de entrega única. Em ambos os cenários, inicialmente o LS é cuidadosamente desenvolvido e então é usado como base na construção do BS. Para o FJSP-SF, o presente trabalho apresenta ainda uma melhoria que aleatoriza a construção de soluções parciais nos arcabouços do método *Beam Search*.

Métodos heurísticos ganharam muito destaque desde o desenvolvimento da teoria da complexidade, na década de 70, e da prova de que a maioria dos problemas combinatoriais são NP-Difícil (Gendreau, 2003). Nesta linha, o uso de heurísticas como abordagem para o FJSP-SF e para o FSP-WT é encorajado devido à complexidade de respectivos problemas. Garey *et al.* (1976); Lenstra e Kan (1979) mostram que o JSP é NP-Difícil e uma vez que o JSP é um caso particular do FJSP-SF, tem-se que o FJSP-SF também é NP-Difícil. Similarmente, Hall e Posner (1991) mostram que o FSP com uma única máquina é NP-Difícil e portanto o FSP-WT também é NP-Difícil.

De acordo com Rakrouki *et al.* (2012), o método *Beam Search* consiste de uma heurística que mantém a estrutura da árvore de busca do *Branch and Bound* e realiza podas baseadas em alguma regra heurística, geralmente gulosa. Através dessas podas, muitas soluções são descartadas e a complexidade do algoritmo diminui consideravelmente. Lowerre (1976) foi o primeiro a utilizar o método *Beam Search* em um trabalho de reconhecimento de linguagens. Desde então, o método *Beam Search* foi utilizado em vários trabalhos. Nesta linha, podem ser citados os trabalhos de Wang e Lim (2007), Valente e Alves (2004), Akeb *et al.* (2009), Blum *et al.* (2009) e Akeb *et al.* (2011), Fernandez-Viagas e Framinan (2017), Mejía e Niño (2017), Vélez-Gallego *et al.* (2016), entre outros.

No método *Beam Search* clássico somente alguns nós da árvore de busca, ditos mais promissores, são mantidos para o passo de ramificação. A quantidade de nós mantidos é chamada de largura do *beam* β . A avaliação dos nós a serem selecionados pode ser feita de diversas maneiras, desde regras heurísticas até funções de avaliação parcial ou completa. Com o decorrer dos anos, novas técnicas de avaliação deram origem a outros tipos de *Beam Search*, como o *Filtered Beam Search*. Este último caracteriza-se por fazer a avaliação dos nós em dois estágios. No primeiro estágio, o conjunto de nós é filtrado e reduzido a partir de uma regra mais simples e no segundo estágio uma avaliação mais complexa e abrangente é aplicada somente neste conjunto reduzido (Valente e Alves, 2004).

Algoritmos *list scheduling* são algoritmos simples de escalonamento que a cada iteração selecionam uma única operação para ser programada baseados em algum critério local. Inúmeros trabalhos em diversas áreas utilizam algoritmos LS como abordagem. Como exemplo, em trabalhos recentes, podem ser citados os trabalhos de Agnetis *et al.* (2014), Tang *et al.* (2010), Fard *et al.*

(2014). Agnetis *et al.* (2014) apresenta um método para um problema de programação de tarefas onde cada tarefa possui uma chance de sucesso e uma recompensa caso seja completada. Tang *et al.* (2010) e Fard *et al.* (2014) abordam problemas de distribuição de cargas em sistemas distribuídos. Além destes trabalhos, Sabuncuoglu e Bayiz (1999) utilizaram diferentes LS da literatura para estimar a qualidade de soluções parciais obtidas por um algoritmo BS para o JSP. Neste trabalho, os melhores candidatos eram escolhidos para a fase de expansão de um BS e a expansão do nível era feita utilizando dois outros métodos chamados *active* e *nondelay* sobre os candidatos mais promissores. O BS da presente tese utiliza um LS que explora características específicas do FJSP-SF e do FSP-WT não somente para avaliar as soluções parciais, mas também para expandir os níveis e filtrar os nós candidatos.

Este trabalho está organizado como segue. O Capítulo 2, descreve em detalhes o FJSP-SF e define os métodos *list scheduling* e *Beam Search* para o problema. Os resultados computacionais obtidos pelos dois métodos utilizando instâncias do FJSP-SF da literatura também são apresentados em adição com alguns experimentos utilizando instâncias clássicas do FJSP. O Capítulo 3 descreve em detalhes o FSP-WT e então desenvolve os métodos *list scheduling* e *Beam Search* utilizando a mesma metodologia empregada no Capítulo 2. Por fim, os resultados computacionais para ambos os métodos são reportados e comparados com outros métodos heurísticos da literatura. As conclusões gerais e as propostas para trabalhos futuros desta tese são então apresentadas no Capítulo 4.

Capítulo 2

Flexible Job Shop Scheduling Problem com Flexibilidade de Sequenciamento

O *Job Shop Scheduling Problem* (JSP) clássico é um problema onde deve-se escalonar o processamento de n tarefas em um ambiente com m máquinas. Cada tarefa é composta por várias operações (geralmente m operações) organizadas em uma estrutura linear de precedência entre si o que significa que uma operação de uma tarefa não pode iniciar processamento antes que a operação que a antecede termine de ser processada. Portanto, cada tarefa possui uma única rota de processamento possível através das m máquinas. O *Flexible Job Shop Scheduling Problem* (FJSP) consiste em uma extensão do JSP clássico onde as operações possuem várias máquinas nas quais podem ser processadas. As máquinas de processamento não são necessariamente idênticas e isso implica em diferentes tempos de processamento mesmo considerando uma mesma operação. Dessa forma, diferentemente do JSP clássico, existem várias possibilidades de rotas de processamento para cada tarefa através das m máquinas do ambiente. O objetivo do problema é determinar em qual máquina cada operação será processada e a ordem do processamento das operações associadas à cada uma das máquinas considerando a otimização de algum critério. O *Flexible Job Shop Scheduling Problem* com flexibilidade de sequenciamento (FJSP-SF), por sua vez, é uma variante do FJSP que permite que a estrutura de precedências entre as operações de uma mesma tarefa seja estabelecida por um grafo direcionado acíclico (DAG) qualquer ao invés de uma estrutura linear. Quer dizer, uma operação pode tanto suceder quanto preceder mais de uma operação. Assim, o problema consiste em alocar as operações às possíveis máquinas de processamento e em sequenciar o processamento destas operações nas máquinas respeitando as precedências de acordo com o DAG. O critério adotado nos métodos apresentados neste capítulo foi a minimização do instante de término do processamento da última operação (*makespan*). Foi considerado ainda que o tempo de processamento de cada operação em uma máquina é um dado conhecido a priori e que o processamento de uma operação não pode ser interrompido até que seja finalizado.

Um exemplo de tarefa com este tipo de estrutura de precedência é mostrado na Figura 2.1. Este problema pode ser encontrado na prática em ambientes industriais, como nas indústrias de impressão (Zeng *et al.*, 2010), onde operações de montagem e desmontagem fazem parte do processo produtivo. A impressão de um livro, por exemplo, pode ser dividida em três tarefas principais: pré-impressão, impressão e pós-impressão (PNEAC, 2015). A pré-impressão é formada por cinco etapas distintas. A impressão geralmente é realizada através de seis processos separados. A pós-impressão consiste em quatro processos. Além disso, geralmente, existem algumas pequenas tarefas de finalização de pós-impressão. Estas três tarefas principais do processo de impressão como um todo possuem restrições de precedências. Contudo, dentro destas três tarefas existem operações que não possuem precedências entre si. As páginas de um livro, por exemplo, são divididas em *signatures* de 8, 16 ou 32 páginas individuais que podem ser impressas, cortadas e dobradas separadamente. A capa do livro também é um elemento que pode ser preparado separadamente. Finalmente, todos os elementos devem ser compostos para formar o livro. A Figura 2.2 ilustra o processo de impressão e composição de um livro. É fácil ver que a flexibilidade nas precedências das operações do processo de

impressão pode ser encontrado em várias aplicações industriais, tornando o FJSP-SF um problema com uma ampla variedade de aplicações.

Figura 2.1: Exemplo das restrições de precedências dadas por um DAG de uma possível tarefa do FJSP-SF (retirado de Birgin et al. (2015)).

Figura 2.2: Esquema ilustrativo de operações sem precedências entre si (as diferentes assinaturas e a capa) para a produção de um livro na indústria de impressão (retirado de Birgin et al. (2015)).

Considerando as variações do JSP clássico, que muitas vezes surgem a partir da adaptação do JSP para contextos mais próximos da realidade industrial, a flexibilização de uma operação poder ser processada por um subconjunto das máquinas disponíveis é dita como flexibilidade de roteamento. Esta flexibilização transforma o JSP clássico em FJSP. A flexibilidade de sequenciamento consiste na possibilidade de representar as precedências entre as operações de uma mesma tarefa através de um DAG qualquer. Este trabalho aborda o FJSP com flexibilidade de sequenciamento (FJSP-SF). Poucos trabalhos da literatura lidam com a variação do FJSP com flexibilidade de sequenciamento. No trabalho de Kim et al. (2003) foi proposto um algoritmo evolucionário simbiótico para um JSP com flexibilidade de roteamento, sequenciamento e processamento. Flexibilidade de processamento é a possibilidade de completar uma tarefa, ou produzir um produto, a partir de operações ou sequência de operações diferentes. O trabalho de Lee et al. (2012) lida com um FJSP com flexibilidade de sequenciamento na qual as precedências são do tipo AND/OR. Um problema de sequenciamento de tarefas de uma fábrica de moldes é descrito em Gan e Lee (2002). No problema, vários tipos de flexibilidades, incluindo flexibilidade de sequenciamento, são tratadas de maneira integrada pelo

método proposto.

O FJSP-SF é tido como NP-Difícil uma vez que ele tem o JSP, que é conhecido como NP-Difícil (Garey *et al.*, 1976; Lenstra e Kan, 1979), como um caso particular. Um exemplo do desafio matemático provido pelo JSP clássico é o cenário contendo 10 máquinas e 10 tarefas proposto no trabalho de Fisher e Thompson (1963) que foi debatido e estudado por vários pesquisadores e sua solução só apareceu 20 anos mais tarde. Além disso, Nuijten e Aarts (1996) mostraram que o FJSP está entre os mais difíceis problemas combinatoriais conhecidos. Em contrapartida, as decisões da programação das operações nas máquinas dentro das indústrias geralmente devem ser tomadas em curtos espaços de tempo.

Devido à esta complexidade computacional, somente alguns trabalhos centrados em solucionar o FJSP de forma exata podem ser encontrados na literatura. Nesta linha, Fattahi *et al.* (2007) propuseram um modelo Linear de Programação Inteiro Misto (MIP) como abordagem para o FJSP e solucionaram instâncias de pequeno porte com um *software* comercial. Mais tarde, Özgüven *et al.* (2010) introduziram um MIP mais conciso para o FJSP. Birgin *et al.* (2014) propuseram um novo MIP que incorpora a flexibilidade de sequenciamento ao FJSP e avaliaram o seu desempenho utilizando instâncias baseadas em cenários da indústria de impressão e também utilizando instâncias para o FJSP e JSP da literatura. De acordo com os experimentos, o CPLEX com o novo MIP obteve resultados melhores quando comparados aos resultados obtidos em Özgüven *et al.* (2010).

Na literatura, é possível encontrar vários trabalhos que utilizam heurísticas para minimização do *makespan* no FJSP. Nesta linha, Brandimarte (1993) é um dos pioneiros e em seu trabalho utiliza uma abordagem de duas fases. Na primeira fase, uma estratégia heurística chamada regra de despacho atribui as operações às máquinas de processamento. Na segunda fase, a definição do sequenciamento das operações nas máquinas é feita utilizando busca tabu. Este tipo de abordagem, de duas fases, é denominado abordagem hierárquica.

Dauzère-Pérès e Paulli (1997) e Mastrolilli e Gambardella (2000) utilizaram busca tabu (TS) para solucionar o FJSP em uma única fase, quer dizer, o método define em quais máquinas as operações serão processadas e o sequenciamento das operações nas máquinas de forma integrada. O algoritmo genético (GA) proposto por Ho *et al.* (2007), denominado *learnable genetic architecture* (LEGA), também aborda o FJSP de maneira integrada utilizando um módulo de aprendizagem que influencia a diversidade e a qualidade da população combinado à abordagem evolutiva do GA. Pezzella *et al.* (2008) desenvolveram um GA tradicional com alguns componentes melhorados da literatura e com uma mutação de atribuição, denominada mutação inteligente. De acordo com os experimentos computacionais, o GA superou os resultados de outros GAs da literatura e obteve soluções competitivas quando comparadas com as soluções da TS de Mastrolilli e Gambardella (2000). Gutiérrez e García-Magariño (2011) propuseram um GA híbrido que soluciona o FJSP de forma hierárquica. Inicialmente, o GA faz atribuições das operações nas máquinas de processamento sem a garantia de viabilidade. Posteriormente, uma heurística de reparo é aplicada às soluções para minimizar as violações. Além disso, a heurística também calcula a qualidade da solução, funcionando assim, no contexto dos GAs, como função de reparo e de *fitness*. Uma grande quantidade de comparações com trabalhos recentes da literatura, incluindo os resultados de Mastrolilli e Gambardella (2000) e de Brandimarte (1993), foram feitas para mostrar o desempenho do GA. Yuan e Xu (2012) desenvolveram um algoritmo de dois estágios para solucionar o FJSP. No primeiro estágio, um algoritmo evolucionário denominado *hybrid harmony search* (HHS) é executado até que uma solução que não se é possível realizar melhorias seja encontrada. No segundo estágio, um algoritmo baseado em programação com restrições denominado *large neighborhood search* (LNS) é utilizado para refinar a solução obtida pelo HHS no primeiro estágio. Utilizando quatro conjuntos de instâncias da literatura os autores concluíram que o HHS/LNS tem um desempenho bastante competitivo quando comparado com outros métodos da literatura. Wang *et al.* (2012) apresentaram um algoritmo de Colônia Artificial de Abelhas como abordagem para o FJSP utilizando algumas estratégias para balancear a diversificação e a intensificação no processo de busca. Nesse trabalho, para evitar a convergência prematura do método, abelhas sentinelas que controlam o comportamento da busca são adicionadas no processo de atualização da população de abelhas. O desempenho do método foi

avaliado utilizando instâncias da literatura e se mostrou efetivo quando comparado a outros métodos. [Bouazza et al. \(2017\)](#) utilizam algumas técnicas avançadas de *Q-Learning* como abordagem para o FJSP parcial. Nesse trabalho, os autores usam alguns “produtos inteligentes” que coletam informações e aprendem a decidir quais as melhores regras de seleção de operação e regras de despacho para realizar a programação de uma dada operação. [Bozejko et al. \(2012\)](#) desenvolveram uma busca tabu utilizando paralelismo em GPU que soluciona o FJSP através da exploração paralela de diversas vizinhanças. No trabalho, inicialmente várias vizinhanças são geradas através de um processo mestre controlado pela CPU e então atribuídas à várias GPUs onde serão exploradas seguindo as regras da busca tabu. Depois de algumas iterações, as soluções são coletadas pelo processo mestre e a melhor dentre elas é então escolhida para a geração das novas vizinhanças.

A presente tese, inicialmente, constrói um método heurístico do tipo *list scheduling* (LS) que soluciona o FJSP-SF e a partir disso, desenvolve um método *Beam Search* (BS) baseado nas regras utilizadas pelo LS.

O método *Beam Search* é uma heurística que realiza enumeração em árvore, semelhante ao método *Branch and Bound*, que utiliza critérios heurísticos para realizar podas ([Rakrouki et al., 2012](#)). A primeira utilização do método BS foi em um trabalho de reconhecimento de linguagens, feito por [Lowerre \(1976\)](#). Mais tarde, [Rubins \(1978\)](#) modificou a maneira conhecida de representação dos *pixels* para utilizar um BS como método para solucionar um problema de reconhecimento de imagens. Foi neste trabalho que o nome *Beam Search* se popularizou.

No trabalho de [Sabuncuoglu e Bayiz \(1999\)](#) um método BS foi usado como abordagem para o JSP clássico. Neste trabalho, dois métodos heurísticos, chamados *active* e *nondelay*, eram utilizados para a expansão dos níveis na árvore. A qualidade de cada nó era então estimada através de vários LSs da literatura e para cada nó pai, somente o nó filho mais promissor era então mantido.

Este capítulo aborda o FJSP-SF tratado nesta tese e está fortemente baseado em [Birgin et al. \(2015\)](#). Nesta linha, a Seção 2.1 apresenta em detalhes o modelo matemático para este problema. A Seção 2.2 descreve cuidadosamente o algoritmo LS proposto, definindo o conceito de soluções parciais e três regras de seleção de operações para serem programadas e por fim apresentando o pseudocódigo do algoritmo. A Seção 2.3 desenvolve o método BS para o FJSP-SF, descrevendo a origem do método a partir do algoritmo LS. Em seguida então, o pseudocódigo do método BS também é apresentado na Seção 2.3. As Seções 2.4 e 2.5 apresentam os experimentos numéricos realizados e discutem os resultados obtidos.

As principais vantagens dos métodos apresentados neste capítulo são: (a) tempo finito de término de processamento; (b) dependentes de um pequeno conjunto de parâmetros (o LS não possui nenhum parâmetro enquanto o *Beam Search* possui apenas três); (c) regras de desempates precisamente descritas; (d) resultados computacionais promissores.

2.1 Modelagem matemática

Seja n o número de tarefas, o o número de operações e m o número de máquinas. O número de tarefas não tem um papel explícito no modelo, mas é utilizado para entendimento. Para cada operação i ($i = 1, \dots, o$), seja $F_i \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ ($F_i \neq \emptyset$) o subconjunto de máquinas que pode processar a operação i com tempo de processamento p_{ik} , $k \in F_i$. Além disso, seja A o conjunto de pares (i, j) com $i, j \in \{1, \dots, o\}$ tal que se (i, j) pertence ao conjunto A , então a operação i precede a operação j , quer dizer, a operação j não pode iniciar processamento antes do término do processamento da operação i . O conjunto A define implicitamente as tarefas do problema uma vez que existem precedências somente entre operações de uma mesma tarefa. O conjunto A define ainda um grafo direcionado acíclico (DAG) onde os vértices estão nomeados de 1 até o e as arestas são os pares (i, j) . Dizemos que o problema está bem definido se o DAG definido pelo conjunto A não possui ciclos. O problema consiste em atribuir cada operação i à uma máquina $k \in F_i$ e determinar o tempo de início de processamento s_i que satisfaz as precedências dadas pelo conjunto A . Uma máquina só pode processar uma operação por vez e não é permitido interrupção de processamento. O objetivo é minimizar o *makespan*, quer dizer, minimizar o tempo de término de processamento

da última operação no sistema.

O modelo usa variáveis binárias x_{ik} ($i = 1, \dots, o, k \in F_i$) que indicam se a operação i foi alocada para ser processada na máquina k ($x_{ik} = 1$) ou não ($x_{ik} = 0$). O modelo também utiliza variáveis binárias y_{ij} ($i, j = 1, \dots, o, F_i \cap F_j \neq \emptyset$) para indicar, caso duas operações sejam alocadas para processamento numa mesma máquina, qual será processada primeiro. Por exemplo, se duas operações i e j que forem alocadas numa mesma máquina k , portanto $x_{ik} = x_{jk} = 1$ e $k \in F_i \cap F_j$, significa que $y_{ij} \neq y_{ji}$ e consequentemente ou $y_{ij} = 1$ ou $y_{ji} = 1$. Se $y_{ij} = 1$ e $y_{ji} = 0$ então a operação i é processada na máquina k antes da operação j . Se $y_{ji} = 1$ e $y_{ij} = 0$ então a operação i é processada na máquina k depois do processamento da operação j . Por último, o modelo utiliza variáveis s_i ($i = 1, \dots, o$) que representam o instante de início de processamento da operação i na máquina em que ela foi alocada e a variável $C_{\max}$ para representar o *makespan*. Com tudo isso, o MIP para o FJSP-SF introduzido em Birgin *et al.* (2014) pode ser escrito como:

$$\text{Minimize} \quad C_{\max} \quad (2.1)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{k \in F_i} x_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, o, \quad (2.2)$$

$$p'_i = \sum_{k \in F_i} x_{ik} p_{ik}, \quad i = 1, \dots, o, \quad (2.3)$$

$$C_{\max} \geq s_i + p'_i, \quad i = 1, \dots, o, \quad (2.4)$$

$$s_i + p'_i \leq s_j, \quad i, j = 1, \dots, o \text{ tal que } (i, j) \in A, \quad (2.5)$$

$$y_{ij} + y_{ji} \geq x_{ik} + x_{jk} - 1, \quad i, j = 1, \dots, o, i \neq j, \text{ e } k \in F_i \cap F_j, \quad (2.6)$$

$$s_i + p'_i - (1 - y_{ij})L \leq s_j, \quad i, j = 1, \dots, o \text{ e } i \neq j \text{ tal que } F_i \cap F_j \neq \emptyset, \quad (2.7)$$

$$s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, o. \quad (2.8)$$

A restrição (2.2) determina que cada operação i só pode ser atribuída à somente uma máquina $k \in F_i$. A restrição (2.3) define o tempo de processamento p'_i da operação i , que depende da máquina em que a operação foi atribuída. O uso das variáveis p'_i somente simplifica a representação do modelo. A restrição (2.4) em conjunto com a minimização da função objetivo em (2.1) definem $C_{\max}$ como o *makespan*. A restrição (2.5) representa as restrições dadas pelo conjunto A . Para cada par de operações atribuídas à uma mesma máquina, as restrições (2.6) e (2.7) definem que duas operações não podem ser processadas ao mesmo tempo numa mesma máquina e determinam qual operação será processada primeiro. Além disso, se existe uma intersecção nos subconjuntos de máquinas de processamento de duas operações i e j , isto é, se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ e contudo elas foram atribuídas à máquinas diferentes, implica que $x_{ik} + x_{jk} \leq 1$ e portanto as restrições (2.6) e (2.7) são satisfeitas trivialmente com $y_{ij} + y_{ji} = 0$. Em (2.7), L representa um número positivo suficientemente grande. Uma sugestão de valor para L pode ser encontrada em Birgin *et al.* (2014). Finalmente, a restrição (2.8) determina que o instante de início de processamento das operações não deve ser menor que o início do horizonte de planejamento que, sem perda de generalidade, no MLPIM descrito, é 0.

2.2 Algoritmo List Scheduling

Esta seção descreve o algoritmo *list scheduling* utilizado como base para a elaboração do método *beam search* posteriormente. Neste contexto, a Seção 2.2.1 introduz algumas características gerais que facilitarão o entendimento do método. Em seguida, a Seção 2.2.2 descreve como caracterizar uma solução parcial para o problema. Em seguida, a Seção 2.2.3 define as regras de seleção utilizadas para escolher sem ambiguidades qual operação será processada e em qual máquina isto ocorrerá. Para finalizar, a Seção 2.2.4 apresenta o pseudo-código do método, descrevendo suas principais partes.

2.2.1 Características gerais

Será descrito a seguir um algoritmo *list scheduling* não-hierárquico. Ele é assim caracterizado devido que a cada iteração ele seleciona uma operação, atribui esta operação à uma máquina e define um instante de início de processamento. Este é um processo em contraste aos métodos hierárquicos que normalmente abordam o problema de programação em duas fases: numa primeira fase atribui operações às máquinas e em uma segunda fase determina os instantes de início de processamento de cada operação.

O método proposto itera o vezes e, a cada iteração, seleciona uma operação i , atribui a uma máquina $k \in F_i$ e determina o instante de início de processamento st_{ik} da operação i na máquina k de forma construtiva. Neste processo, regras especializadas para o FJSP-SF guiam a seleção das operações e das máquinas. A decisão é gravada fazendo $s[i] \leftarrow st_{ik}$ e $w[i] \leftarrow k$ que representam o instante de início de processamento da operação i e a máquina k que irá processar a operação i . Uma vez que os valores de $s[i]$ e $w[i]$ forem definidos no algoritmo, a operação i será tratada como “manipulada” ou “programada”. Dada uma iteração, as operações que são candidatas a serem programadas são aquelas que ainda não foram programadas e que possuem todas as suas operações precedentes programadas.

Os dados de entrada para o algoritmo são os parâmetros n , m , $F_i (i = 1, \dots, o)$, $p_{ik} (i = 1, \dots, o, k \in F_i)$ e A , que caracterizam uma instância do FJSP-SF. A partir destes parâmetros, alguns dados auxiliares que ajudam a aplicação do método podem ser computados da seguinte maneira:

- (a) Os conjuntos de predecessores e sucessores $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{S}_i$ dados por

$$\mathcal{P}_i = \{j \in \{1, \dots, o\} \mid (j, i) \in A\}$$

e

$$\mathcal{S}_i = \{j \in \{1, \dots, o\} \mid (i, j) \in A\}.$$

- (b) As médias dos tempos de processamento $\bar{p}_i$ dadas por

$$\bar{p}_i = \frac{1}{|F_i|} \sum_{k \in F_i} p_{ik}.$$

- (c) O *remaining work* ou *blocked work* RW_i dado pelo maior caminho partindo da operação i até qualquer outra operação j no DAG formado pelos nós nomeados de $\{1, \dots, o\}$ com pesos $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_o$ e arestas definidas em A .

2.2.2 Soluções parciais

A cada iteração, o *list scheduling* mantém algumas informações que auxiliam a seleção da operação a ser programada, da máquina de processamento e do instante de início de processamento. São elas:

- $s[i]$ O instante de início de processamento para cada operação i . Se a operação i não foi programada, o valor armazenado é “não determinado”.
- $w[i]$ A máquina $k \in F_i$ que irá processar a operação i . Se a operação i não foi programada, o valor armazenado é “não determinado”.
- $C_{\max}$ O valor máximo entre os instantes de término de processamento de todas as operações que já foram programadas, quer dizer, o *makespan* da solução parcial.

- $u[i]$ O valor máximo entre os instantes de término de processamento das operações que precedem i e que já foram programadas.
- $v[k]$ O valor máximo entre os instantes de término de processamento de todas as operações que já foram programadas e atribuídas a máquina k .
- $L[k]$ A soma do tempo de processamento de todas as operações que ainda não foram programadas e que potencialmente poderiam ser atribuídas a máquina k . Este valor representa um limitante superior que estima a carga futura da máquina.
- $\eta[i]$ A quantidade de operações predecessoras da operação i que ainda não foram programadas.
- Ω Conjunto de operações candidatas a serem programadas, quer dizer, o conjunto de operações não programadas mas que possuem todas as suas precedentes programadas ($\eta[i] = 0$).

Na abordagem apresentada neste trabalho, uma solução parcial com ℓ operações programadas é caracterizada pela tupla $(\ell, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega)$. Esta tupla armazena todas as informações que o algoritmo *list scheduling*, que será apresentado com mais detalhes na Seção 2.2.4, necessita para gerar uma nova solução parcial com $\ell + 1$ operações programadas. Para o caso particular de uma solução parcial com $\ell = 0$ operações programadas, a tupla é caracterizada como a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s[i] & \text{não determinado para } i = 1, \dots, o, \\ w[i] & \text{não determinado para } i = 1, \dots, o, \\ C_{\max} & = 0, \\ u[i] & = 0 \text{ for } i = 1, \dots, o, \\ v[k] & = 0 \text{ for } k = 1, \dots, m, \\ L[k] & = \sum_{\{i \mid k \in F_i\}} p_{ik} \text{ para } k = 1, \dots, m, \\ \eta[i] & = |\mathcal{P}_i| \text{ para } i = 1, \dots, o, \\ \Omega & = \{i \in \{1, \dots, o\} \mid \mathcal{P}_i = \emptyset\}. \end{array} \right.$$

Dada uma solução parcial $(\ell, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega)$ com $0 \leq \ell < o$, para escalonar uma operação $i \in \Omega$ para iniciar processamento no instante st na máquina $k \in F_i$, a nova tupla com $\ell + 1$ operações programadas é $(\ell + 1, s', w', C'_{\max}, u', v', L', \eta', \Omega')$ onde $s', w', C'_{\max}, u', v', L', \eta'$ e Ω' recebem, respectivamente, os valores de $s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta$ e Ω e são atualizados como a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s'[i] & \leftarrow st, \\ w'[i] & \leftarrow k, \\ C'_{\max} & \leftarrow \max\{C'_{\max}, st + p_{ik}\}, \\ u'[j] & \leftarrow \max\{u'[j], st + p_{ik}\} \text{ para todo } j \in S_i, \\ v'[k] & \leftarrow \max\{v'[k], st + p_{ik}\}, \\ L'[r] & \leftarrow L'[r] - p_{ir} \text{ para todo } r \in F_i, \\ \eta'[j] & \leftarrow \eta'[j] - 1 \text{ para todo } j \in S_i, \\ \Omega' & \leftarrow \Omega' \setminus \{i\} \cup \{j \in S_i \mid \eta'[j] = 0\}. \end{array} \right.$$

2.2.3 Regras de seleção

Os critérios utilizados para selecionar a operação a ser programada, a máquina de processamento e o instante de início de processamento serão apresentados nesta seção. Nesta linha, inicialmente o

list scheduling começa com uma solução parcial com $\ell = 0$ operações programadas. A cada iteração, o algoritmo escalona uma única operação. Portanto, após o iterações, o algoritmo termina toda a programação e com uma solução viável para a dada instância do FJSP-SF.

A cada iteração, o conjunto Ψ_0 de pares operação/máquina dado pelas operações possíveis de serem programadas e as suas respectivas máquinas de processamento é dado por

$$\Psi_0 = \{(i, k) \mid i \in \Omega \text{ e } k \in F_i\}. \quad (2.9)$$

A partir do conjunto Ψ_0 , três regras são sequencialmente aplicadas até que um único par operação/máquina $(i, k) \in \Psi_0$ seja selecionado e um instante de início de processamento st seja determinado para a programação da operação i na máquina k . As três regras são descritas a seguir:

Regra 1: *Par operação/máquina com o menor instante de início de processamento possível.*

O primeiro critério utilizado para selecionar um par $(i, k) \in \Psi_0$ é baseado no menor instante de processamento s_{ik} possível para a operação i na máquina k . Este valor pode ser facilmente calculado através do máximo entre dois valores: o máximo entre o instante de término de processamento de todas as operações que precedem a operação i , armazenado em $u[i]$ e o instante em que a máquina k termina de processar todas as operações programadas e atribuídas à ela, armazenado em $v[k]$. Assim, calcula-se

$$s_{ik} = \max\{u[i], v[k]\} \quad (2.10)$$

para todo $(i, k) \in \Psi_0$. Seja

$$\hat{st} = \min\{s_{ik} \mid (i, k) \in \Psi_0\} \quad (2.11)$$

o menor instante de início de processamento possível entre todos os pares $(i, k) \in \Psi_0$ candidatos. Somente os pares (i, k) tais que $s_{ik} = \hat{st}$ permanecem como possibilidade para programação na iteração e os demais pares são descartados. Portanto, após aplicar a Regra 1, o conjunto de pares candidatos resultante Ψ_1 é dado por

$$\Psi_1 = \{(i, k) \mid (i, k) \in \Psi_0 \text{ e } s_{ik} = \hat{st}\}. \quad (2.12)$$

Regra 2: *Máquina de processamento mais rápida.*

Seja

$$\Psi_1^i = \{(j, k) \mid (j, k) \in \Psi_1 \text{ e } j = i\} \text{ for } i = 1, \dots, o,$$

quer dizer, Ψ_1^i é o subconjunto de pares operação/máquina em Ψ_1 fixando a operação i . O objetivo nesta regra é determinar uma única máquina de processamento para as operações i que possuem várias máquinas de processamento como possibilidade, quer dizer, para todo Ψ_1^i com $i = 1, \dots, o$ e $|\Psi_1^i| > 1$, objetiva-se reduzir a cardinalidade para $|\Psi_1^i| = 1$ escolhendo uma única máquina dentre todas as possíveis.

Seja a operação i tal que $|\Psi_1^i| > 1$ e sejam os pares $(i, k_1), (i, k_2), \dots$ os elementos de Ψ_1^i . Cada máquina $k_1, k_2, \dots$ está associada a um tempo de processamento $p_{ik_1}, p_{ik_2}, \dots$ e a um limitante superior da carga na máquina $L[k_1], L[k_2], \dots$. Considere as triplas

$$(p_{ik_1}, L[k_1], k_1), (p_{ik_2}, L[k_2], k_2), \dots$$

Seja o conjunto $\Psi_{1.5}^i = \{(i, k_v)\}$ formado por um único par tal que $(p_{ik_v}, L[k_v], k_v)$ é a menor tripla da ordem lexicográfica destas triplas. Isto significa que, dentre todas as possíveis máquinas para processar a operação i , seleciona-se aquela com o menor tempo de processamento (mais rápida). Caso houver empates, a máquina com o menor valor de limitante superior de carga associada à

ela é preferida. Caso ainda persista algum empate, a máquina com o menor índice é escolhida com propósito único de definir uma regra determinística. Portanto, após aplicar a Regra 2 no conjunto Ψ_1 , o conjunto Ψ_2 resultante é dado por

$$\Psi_2 = \{\cup \Psi_1^i \mid |\Psi_1^i| \leq 1\} \cup \{\cup \Psi_{1.5}^i \mid |\Psi_1^i| > 1\},$$

que consiste no subconjunto de Ψ_1 que contém somente um par de operação/máquina para cada operação. Nos casos onde haviam mais de uma máquina de processamento possível, preserva-se somente os pares associados às máquinas mais rápidas e com a menor estimativa de carga futura.

Regra 3: *Operação com o maior remaining (blocked) work.*

O próximo atributo utilizado para reduzir a quantidade de pares candidatos $(i, k) \in \Psi_2$ é baseado na estimativa do *remaining (blocked) work* RW_i associado com a operação i . Lembre-se que RW_i é definido como o maior caminho partindo da operação i para qualquer outra operação j no DAG com conjunto de arcos A , conjunto de nós $\{1, \dots, o\}$ com pesos $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_o$. Note que se o maior caminho começa na operação i e termina em uma operação j então $\mathcal{S}_j = \emptyset$ e i e j pertencem à uma mesma tarefa t . Além disso, $st_{ik} + RW_i$ pode ser visto, na perspectiva do par $(i, k) \in \Psi_2$, como uma estimativa do instante de tempo em que a tarefa t irá terminar de ser processada. Contudo, uma vez que $st_{ik} = \hat{st}$ para todo $(i, k) \in \Psi_2$ por definição, então considera-se simplesmente o valor de RW_i como a estimativa do *remaining work* associado com a operação i .

Para os pares $(i_1, k_1), (i_2, k_2), \dots \in \Psi_2$ considere as triplas

$$(-RW_{i_1}, -L[k_1], i_1), (-RW_{i_2}, -L[k_2], i_2), \dots$$

e seja $(-RW_{i_v}, -L[k_v], i_v)$ a menor tripla considerando a ordem lexicográfica associada com o par (i_v, k_v) . Isto significa que a última escolha foi feita e que ela consiste em atribuir a operação i_v à máquina k_v com instante de início de processamento $\hat{st}$. Nesta linha, a operação com o maior *remaining work* foi selecionada para ser programada. A ideia por trás desta escolha é escalonar rapidamente as operações que emperram o processamento de uma grande quantidade de trabalho. No caso de empate, o limitante superior da carga futura das máquinas é utilizado como critério de desempate, visando minimizar o tempo ocioso de máquinas que tem uma alta carga futura, atribuindo operações o mais cedo possível à elas. Finalmente, no caso de um segundo empate, a operação com o menor índice é escolhida com propósito único de definir uma regra de escolha determinística.

2.2.4 Pseudo-código

O algoritmo *list scheduling*, inteiramente descrito pelo Algoritmo 1, é introduzido nesta seção. Para isto, a inicialização da solução vazia ($\ell = 0$) definida na Seção 2.2.2, a aplicação iterativa das Regras 1-3 da Seção 2.2.3 e a atualização da solução parcial descrita também na Seção 2.2.2 a partir do par operação/máquina escolhido serão utilizados em harmonia e definirão o método proposto.

No Algoritmo 1, os conjuntos $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{S}_i$ são computados nas linhas 2-3. As médias dos tempos de processamento $\bar{p}_i$ são computadas nas linhas 4-7. A estimativa do *remaining work* RW_i são feitas nas linhas 8-16 pelo método de Dijkstra de menor caminho (Cormen *et al.*, 2009) adaptado para calcular o maior caminho no ambiente de várias origens e vários destinos, que é o caso do DAG do FJSP-SF. Os valores de $C_{\max}$, u , v , L , η , e o conjunto Ω são inicializados nas linhas 17-21. O laço principal, da linha 22 até a linha 41, executa o vezes as Regras 1-3. O par operação/máquina de cada iteração é denominado (λ, θ) e o instante de início de processamento determinado é nomeado $\hat{st}$. O instante de início de processamento $s[\lambda]$ para a operação λ é atribuído na linha 36 assim como a atribuição da máquina θ para processar a operação λ , definindo $w[\lambda]$ como θ . Os valores de $C_{\max}$, u , v , L , η , e do conjunto Ω são atualizados nas linhas 36-41.

Pseudo-código 1: List Scheduling.

Input: m, o, F_i ($i = 1, \dots, o$), p_{ik} ($i = 1, \dots, o, k \in F_i$), A
Output: $s[i], w[i]$ ($i = 1, \dots, o$), $C_{\max}$
 LISTSCHEDULING(m, o, F, p, A)

```

1 begin
2   for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do  $\mathcal{P}_i \leftarrow \emptyset, \mathcal{S}_i \leftarrow \emptyset$ 
3   foreach  $(i, j) \in A$  do  $\mathcal{P}_j \leftarrow \mathcal{P}_j \cup \{i\}, \mathcal{S}_i \leftarrow \mathcal{S}_i \cup \{j\}$ 
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do
5      $\bar{p}_i \leftarrow 0$ 
6     foreach  $k \in F_i$  do  $\bar{p}_i \leftarrow \bar{p}_i + p_{ik}$ 
7      $\bar{p}_i \leftarrow \bar{p}_i / |F_i|$ 
8      $\mathcal{Q} \leftarrow \{i \mid |\mathcal{S}_i| = 0\}, i = 1, \dots, o$ 
9     for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do
10      if  $i \in \mathcal{Q}$  then  $RW_i \leftarrow \bar{p}_i$  else  $RW_i \leftarrow 0$ 
11     while  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$  do
12       Let  $z \in \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \setminus \{z\}$ 
13       foreach  $i \in \mathcal{P}_z$  do
14         if  $RW_z + \bar{p}_i > RW_i$  then
15            $RW_i \leftarrow RW_z + \bar{p}_i$ 
16           if  $i \notin \mathcal{Q}$  then  $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \cup \{i\}$ 
17    $C_{\max} \leftarrow 0, u[1 \dots o] \leftarrow 0, v[1 \dots m] \leftarrow 0, L[1 \dots m] \leftarrow 0$ 
18   for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do
19     foreach  $k \in F_i$  do  $L[k] \leftarrow L[k] + p_{ik}$ 
20   for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do  $\eta[i] \leftarrow |\mathcal{P}_i|$ 
21    $\Omega \leftarrow \{i \mid \eta[i] = 0\}$ 
22   do  $o$  times
23      $\widehat{st} \leftarrow \infty, \widehat{RW} \leftarrow 0$ 
24     foreach  $i \in \Omega$  do
25        $\widetilde{st} \leftarrow \infty, \widetilde{pt} \leftarrow \infty$ 
26       foreach  $k \in F_i$  do
27          $st \leftarrow \max(u[i], v[k])$ 
28         if  $st < \widetilde{st}$  or (  $st = \widetilde{st}$  and  $p_{ik} < \widetilde{pt}$  )
29           or (  $st = \widetilde{st}$  and  $p_{ik} = \widetilde{pt}$  and  $L[k] < L[\widetilde{k}]$  )
30           or (  $st = \widetilde{st}$  and  $p_{ik} = \widetilde{pt}$  and  $L[k] = L[\widetilde{k}]$  and  $k < \widetilde{k}$  ) then
31              $\widetilde{st} \leftarrow st, \widetilde{pt} \leftarrow p_{ik}, \widetilde{k} \leftarrow k$ 
32         if  $\widetilde{st} < \widehat{st}$  or (  $\widetilde{st} = \widehat{st}$  and  $RW_i > \widehat{RW}$  )
33           or (  $\widetilde{st} = \widehat{st}$  and  $RW_i = \widehat{RW}$  and  $L[\widetilde{k}] > L[\theta]$  )
34           or (  $\widetilde{st} = \widehat{st}$  and  $RW_i = \widehat{RW}$  and  $L[\widetilde{k}] = L[\theta]$  and  $i < \lambda$  ) then
35              $\widehat{st} \leftarrow \widetilde{st}, \widehat{RW} \leftarrow RW_i, \theta \leftarrow \widetilde{k}, \lambda \leftarrow i$ 
36    $s[\lambda] \leftarrow \max(u[\lambda], v[\theta]), w[\lambda] \leftarrow \theta, C_{\max} \leftarrow \max(C_{\max}, s[\lambda] + p_{\lambda\theta})$ 
37    $v[\theta] \leftarrow s[\lambda] + p_{\lambda\theta}, \Omega \leftarrow \Omega \setminus \{\lambda\}$ 
38   foreach  $k \in F_\lambda$  do  $L[k] \leftarrow L[k] - p_{\lambda k}$ 
39   foreach  $i \in \mathcal{S}_\lambda$  do
40      $\eta[i] \leftarrow \eta[i] - 1, u[i] \leftarrow \max(u[i], s[\lambda] + p_{\lambda\theta})$ 
41     if  $\eta[i] = 0$  then  $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{i\}$ 
42   return  $s[i], w[i]$  ( $i = 1, \dots, o$ ),  $C_{\max}$ 
43 end

```

2.2.5 Exemplo

Para entender melhor o funcionamento do *list scheduling* proposto nesta seção, considere o cenário dado pela Figura 2.3. De acordo com a figura, o conjunto Ψ_0 é formado pelos pares $(o_1, m_1), (o_1, m_2), (o_5, m_1), (o_5, m_2)$ e (o_6, m_2) . Esses pares são compostos pelas operações cujas operações precedentes já foram programadas, quer dizer, não possuem precedentes pendentes, em conjunto com as máquinas que possam processá-las. A Figura 2.4 apresenta estas opções em um

formato de árvore. Na figura, o primeiro nó da árvore representa o início do horizonte de processamento, onde nada ainda foi escolhido para ser programado. O segundo nível da árvore são as opções de pares operação/máquinas representados por Ψ_0 .

Figura 2.3: DAG de precedências e tabela de tempos de processamento de um cenário do FJSP-SF com $o = 8$ operações e $m = 2$ máquinas.

Figura 2.4: Pares operação/máquinas possíveis de serem programados considerando o cenário inicial da Figura 2.3.

Ao aplicarmos a Regra 1 no conjunto Ψ_0 , todos os pares operação/máquina são selecionados para o conjunto Ψ_1 . Isso acontece pois nenhuma operação foi selecionada ainda para ser programada e portanto, todas as máquinas estão livres no início do horizonte de processamento implicando em todas as operações disponíveis poderem iniciar processamento no mesmo instante. A Figura 2.5 ilustra a árvore de busca dada por Ψ_1 .

Figura 2.5: Conjunto de pares operação/máquina após a Regra 1 ser aplicada ao cenário descrito pela Figura 2.3.

Agora é a vez da Regra 2 ser aplicada sobre o conjunto Ψ_1 . Neste caso, deseja-se selecionar as máquinas mais rápidas possíveis para cada uma das operações disponíveis e em caso de empates, a máquina com o menor índice será escolhida. A Figura 2.6 ilustra este processo. Na figura, os pares (o_1, m_1) , (o_5, m_2) e (o_6, m_2) são os pares selecionados para compor o conjunto Ψ_2 . A operação o_1 possuía duas máquinas possíveis para ser processadas. Ambas as máquinas poderiam processar a operação em 4 instantes de tempo. A máquina m_1 foi selecionada pela regra de menor índice. A operação o_5 também poderia ser processada pela máquina m_1 e pela máquina m_2 . A máquina

m_2 foi selecionada pois processa a operação em menos tempo, quer dizer, mais rapidamente. Por último, a máquina m_2 foi selecionada para a operação o_6 pois é a única máquina que pode processar a operação.

Figura 2.6: Conjunto de pares operação/máquina após a Regra 1 e a Regra 2 serem aplicadas ao cenário descrito pela Figura 2.3.

Por último, a Regra 3 é aplicada sobre o conjunto Ψ_2 . Nesta regra, deseja-se escolher o par operação/máquina vinculado ao maior *remaining work*. O valor de RW_i é mostrado na Figura 2.3 para cada operação. De acordo com os valores, a operação o_1 é a operação com o maior valor $RW_1 = 10$ e portanto, o par (o_1, m_1) é o primeiro par selecionado a ser programado. A Figura 2.7 apresenta o gráfico de Gant com o par (o_1, m_1) programado. A Figura 2.8 ilustra a árvore de busca com as novas operações possíveis de serem programadas.

Figura 2.7: Gráfico de Gant da programação da operação o_1 na máquina m_1 considerando o cenário descrito pela Figura 2.3.

Figura 2.8: Árvore de busca após as Regras 1–3 serem aplicadas no cenário descrito pela Figura 2.3 e a programação do par (o_1, m_1) .

Portanto, ao aplicarmos as Regras 1–3 o vezes em um cenário qualquer do FJSP-SF, o pares operação/máquinas serão escolhidos e uma programação completa poderá ser feita. Este processo descreve o algoritmo *list scheduling* proposto nesta seção.

2.3 Método Beam Search

O algoritmo *list scheduling* descrito na Seção 2.2, a cada iteração, seleciona uma única operação, atribui a uma máquina e determina o instante de início de processamento desta operação. Cada uma destas decisões é feita utilizando regras heurísticas. Mesmo que estas decisões fossem decisões

ótimas, por se tratarem de decisões locais, o algoritmo como um todo não geraria necessariamente uma programação de boa qualidade. Assim, com custo de aumentar a complexidade do algoritmo, faz sentido lidar com a construção de mais de uma programação por vez, selecionando e analisando não somente uma operação por iteração mas sim um pequeno conjunto de operações. Nesta linha, uma solução parcial com ℓ operações programadas pode originar várias outras soluções parciais com $\ell + 1$ operações programadas desde que diferentes operações sejam manipuladas. Esta descrição encaixa com a descrição da árvore de busca de um método *Beam Search*. Portanto, é possível dizer que o método *Beam Search* construído e apresentado nesta seção é uma extensão natural do método *list scheduling* da seção anterior.

O método *Beam Search* deste trabalho é um *Filtered Beam Search* que mantém aproximadamente $f(\beta)$ nós em cada nível da árvore de busca onde $\beta \in (0, 1]$ é um parâmetro e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função que será determinada posteriormente. Em um dado nível ℓ da árvore, cada nó representa uma solução parcial com ℓ operações programadas. Utilizando as Regras 1–3 descritas na Seção 2.2.3 é possível selecionar um pequeno conjunto de $g(\alpha)$ operações mais promissoras que poderiam ser programadas, onde $\alpha \in (0, 1]$ é um parâmetro do método e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$. No contexto do método *Beam Search*, este passo é feito com a avaliação local, que é uma avaliação simplificada dos nós e que consome pouco tempo computacional. Portanto, uma solução parcial com ℓ operações origina $g(\alpha)$ outras soluções parciais com $\ell + 1$ operações programadas. A partir daí, a avaliação global, que é mais cara computacionalmente, é responsável por escolher uma das $g(\alpha)$ soluções parciais. No método apresentado nesta seção, a avaliação global consiste em completar cada solução parcial utilizando o algoritmo *list scheduling* apresentado na seção anterior e a partir do *makespan* obtido, selecionar a melhor solução parcial, dentre as $g(\alpha)$, para o próximo nível da árvore. Neste trabalho, a estratégia de manter apenas um filho por nó sugerida em Sabuncuoglu e Bayiz (1999) foi adotada.

2.3.1 Estratégias de avaliação local e global

Seja uma solução parcial $(\ell, s, w, u, v, L, C_{\max}, \eta, \Omega)$ com $\ell < o$ ou de maneira equivalente, seja um nó do nível ℓ da árvore de busca. É possível aplicar as Regras 1–3 da Seção 2.2.3 nesta solução de maneira a selecionar o par operação/máquina $(i_1, k_1) \in \Psi_0$ e designar um instante de início de processamento $st_{i_1 k_1}$ e a partir de tudo isso, gerar uma nova solução parcial, ou em termos de árvore de busca: um filho, com $\ell + 1$ operações programadas utilizando a estratégia descrita na Seção 2.2.2. Pode-se dizer que do ponto de vista de uma estratégia local utilizando as Regras 1–3, o filho gerado consiste no filho mais promissor possível. Considere agora que o par (i_1, k_1) é proibido. Se for aplicado as Regras 1–3 novamente ao mesmo nó $(\ell, s, w, u, v, L, C_{\max}, \eta, \Omega)$, um novo par operação/máquina $(i_2, k_2) \in \Psi_0$ será obtido e um novo instante de início de processamento $st_{i_2 k_2}$ pode ser designado. A partir do mesmo nó, pode-se gerar um novo filho com $\ell + 1$ operações programadas utilizando o novo par $(i_2, k_2) \in \Psi_0$. Pode-se dizer também que este segundo filho é o segundo mais promissor do ponto de vista da mesma estratégia local.

É possível gerar vários filhos a partir do que foi descrito no parágrafo anterior. Contudo, visto que a estratégia global consiste em uma estratégia computacionalmente mais cara quando comparada a estratégia local, aplicar a estratégia global em todos os possíveis filhos gerados seria inviável. Assim, no método proposto, um limite para a quantidade de filhos gerados é imposto de forma a restringir a quantidade de vezes que a estratégia global será utilizada. Este limite é uma função do parâmetro $\alpha \in (0, 1]$ que idealmente deveria ser independente do tamanho da instância. Porém, com o intuito de não comprometer o desempenho do método em instâncias de grande porte, o limite dado por $\hat{\alpha}_1 \equiv \alpha \lceil \Psi_0 \rceil$ é adotado. É importante notar que $\hat{\alpha}_1$ varia de acordo com o nó em questão visto que Ψ_0 , como definido em (2.9), varia de acordo com o conjunto Ω . Além do limite $\hat{\alpha}_1$, um segundo limite $\hat{\alpha}_2$ que visa preservar a qualidade dos filhos gerados também é adotado. Para entender este limite, primeiramente note que ao aplicar as Regras 1–3 em um dado nó $(\ell, s, w, u, v, L, C_{\max}, \eta, \Omega)$ obtêm-se o par operação/máquina (i_1, k_1) com instante de início de processamento $st_{i_1 k_1}$. Ao aplicar as Regras 1–3 novamente no mesmo nó, proibindo o par (i_1, k_1) , obtêm-se o par operação/máquina (i_2, k_2) com instante de início de processamento $st_{i_2 k_2}$. Contudo, $st_{i_1 k_1} \leq st_{i_2 k_2}$ e portanto o par (i_2, k_2) não necessariamente é um par com o menor instante de

início de processamento possível, o que de certa forma, quebra o intuito da Regra 1. Assim, para garantir um limite máximo no instante de início de processamento dos pares selecionados, define-se o conjunto

$$\Psi_{0.5} = \{(i, k) \mid (i, k) \in \Psi_0 \text{ e } st_{ik} \leq \hat{st} + \xi \hat{p}\} \subseteq \Psi_0, \quad (2.13)$$

onde

$$\hat{st} = \min\{st_{ik} \mid (i, k) \in \Psi_0\} \text{ e } \hat{p} = \max\{p_{ik} \mid (i, k) \in \Psi_0\} \quad (2.14)$$

e define-se o limite $\hat{\alpha}_2 \equiv |\Psi_{0.5}|$. Desta forma, o limite máximo do instante de início de processamento dos filhos gerados não pode ser maior que $\hat{st} + \xi \hat{p}$, onde ξ é outro parâmetro do método. Finalmente, têm-se que a quantidade máxima de filhos selecionados pela estratégia local a partir de um dado nó na árvore de busca é limitada por $\hat{\alpha} = \min\{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2\}$, o que define a função $g(\alpha)$.

A estratégia global adotada neste trabalho consiste em aplicar o algoritmo *list scheduling* descrito na Seção 2.2 no pequeno conjunto de filhos gerados a partir da estratégia local descrita no parágrafo anterior completando cada programação parcial. A partir de cada programação completa, é possível computar um *makespan* $C_{\max}^{\text{est}}$ associado com a programação. Finalmente, seleciona-se para a próxima geração da árvore somente o filho do pequeno conjunto com o menor $C_{\max}^{\text{est}}$ obtido completando a programação parcial e todos os outros filhos são “cortados” da árvore de busca. É importante notar que o limite $\hat{\alpha}$ “filtra” a quantidade de vezes que o algoritmo *list scheduling* será utilizado uma vez que o algoritmo não é aplicado em todos os possíveis filhos de um nó da árvore.

Na próxima seção, o pseudo-código do método *Beam Search* será apresentado e os detalhes técnicos dos critérios de desempate entre os filhos bem como alguns outros detalhes menores serão descritos.

2.3.2 Pseudo-código

Os Algoritmos 2–5 apresentam inteiramente e descrevem com detalhes o método *Beam Search* proposto neste trabalho. O Algoritmo 2 descreve a rotina BEAMSEARCHINI que faz as inicializações necessárias para o método e constrói o primeiro nível da árvore de busca que é um pouco diferente da construção dos demais níveis. O Algoritmo 3 descreve a rotina CMAXEST que estima o *makespan* de uma dada solução parcial completando a sua programação através de uma re-implementação do Algoritmo 1 apresentado na Seção 2.2. Esta re-implementação remove as inicializações e adapta o algoritmo para receber uma solução parcial. O Algoritmo 4 descreve a rotina SELECT que recebe uma solução parcial e seleciona um par operação/máquina que pode ser utilizado para expandir esta solução. Em linhas gerais, as rotinas SELECT e CMAXEST desempenham o papel das avaliações local e global.

O Algoritmo 2 recebe como entrada $(n, m, o, F_i \ (i = 1, \dots, o), p_{ik} \ (i = 1, \dots, o, k \in F_i), A)$, que são dados que caracterizam uma instância do FJSP-SF, e os valores escalares $\xi > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$. O parâmetro ξ diz respeito a tolerância máxima pelo quanto o instante de início de processamento de um par operação/máquina $(i, k) \in \Psi_0$ pode ser superior ao menor instante de início de processamento possível $\hat{st}$ entre todos os pares em Ψ_0 , como definido em (2.13, 2.14). O parâmetro α está relacionado a quantidade de nós que a estratégia local seleciona para que a busca global seja aplicada. O parâmetro β determina a quantidade de nós abertos por nível na árvore.

As linhas 2–16 do Algoritmo 2 inicializam $\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_i, \bar{p}_i$, e $RW_i \ (i = 1, \dots, o)$ da mesma maneira que o Algoritmo 1. As linhas 17–21 inicializam $C'_{\max}, u', v', L', \eta'$ e o conjunto Ω' que estão associados ao nó raiz da árvore, que representa uma solução parcial com nenhuma operação programada. No primeiro nível, as soluções parciais são formadas por apenas uma única operação programada e a qualidade dos nós mais promissores escolhidos impacta diretamente no desempenho do método. Além disso, a ramificação deste nível é feita apenas a partir do nó raiz e o máximo de filhos possíveis do nó raiz é dado por nm . Visto tudo isso, nenhum filtro é utilizado na construção do primeiro nível da árvore de busca e todos os pares operação/máquina são avaliados pela estratégia global que por sua vez seleciona os nós mais promissores para comporem o primeiro nível. As linhas 22–34 consideram cada par operação/máquina, como definido em (2.9), constroem a respectiva solução parcial, estimam o *makespan* através da busca global da linha 33 e salva a solução parcial com o

respectivo *makespan* estimado no conjunto $\mathcal{N}'$. Nas linhas 35 e 36, a fração β das soluções parciais mais promissoras de $\mathcal{N}'$ são copiadas em $\mathcal{N}$ que por sua vez constitui de fato o primeiro nível da árvore. É importante notar que, em caso de empates, a cardinalidade de $\mathcal{N}$ pode ser maior que $\hat{\beta} \equiv \lceil \beta |\mathcal{N}'| \rceil$. Finalmente, na linha 37, a rotina BEAMSEARCH recebe o primeiro nível, constrói todo o restante da árvore e retorna a melhor folha encontrada.

O Algoritmo 5 descreve a rotina BEAMSEARCH que itera $o - 1$ vezes e cada iteração inicia com o conjunto $\mathcal{N}$ composto pelos nós do nível atual da árvore de busca. Estes nós são temporariamente rotulados de $1, \dots, |\mathcal{N}|$ e esse rótulo é guardado na variável *nid*. Para cada nó, um conjunto de filhos denominado $\mathcal{D}_{\text{nid}}$ é construído. As linhas 6–16 implementam o limite de filhos para cada nó, como discutido na Seção 2.3.1. Posteriormente, um único filho para cada nó é selecionado e copiado no conjunto $\mathcal{N}'$. A iteração termina substituindo $\mathcal{N}$ por $\mathcal{N}'$. É importante notar que somente os nós do nível atual da árvore são necessários para o método visto que cada nó carrega toda a informação da representação da solução parcial. Dessa forma, nenhuma estrutura de árvore é de fato implementada.

Os filhos de um dado nó são construídos nas linhas 17–28 e salvos no conjunto $\mathcal{D}_{\text{nid}}$, que é inicializado como um conjunto vazio na linha 17. Um total de $\min\{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2\}$ filhos são gerados, onde $\hat{\alpha}_1$ é computado na linha 6 e $\hat{\alpha}_2$ é computado nas linhas 12–16. Na linha 19, uma cópia $(s', w', C'_{\text{max}}, u', v', L', \eta', \Omega')$ da solução $(s, w, C_{\text{max}}, u, v, L, \eta, \Omega)$ é feita. Na linha 20, um par operação/máquina (λ, θ) é selecionado através da rotina SELECT. Nas linhas 21–26, o par (λ, θ) é escalonado e uma nova solução parcial é construída. A chamada da rotina CMAXEST na linha 27 estima o valor do *makespan* $C_{\text{max}}^{\text{est}}$ da nova solução parcial. Finalmente, a solução parcial com (λ, θ) já escalonados é colocada no conjunto $\mathcal{D}_{\text{nid}}$, juntamente com o par (λ, θ) e o valor de $C_{\text{max}}^{\text{est}}$. Para que nas próximas chamadas da rotina SELECT um par diferente de (λ, θ) seja devolvido e consequentemente um filho diferente seja gerado, o par (λ, θ) é adicionado ao conjunto $\mathcal{F}$. Todos os pares no conjunto $\mathcal{F}$ são tidos como proibidos nas próximas chamadas de SELECT. Dessa forma, é importante notar que a rotina SELECT implementa as Regras 1–3 com a única diferença que os pares são escolhidos a partir de $\Psi_0 \setminus \mathcal{F}$.

Portanto, cada nó do nível possui um conjunto de filhos, quer dizer, cada nó está vinculado a um *nid* que por sua vez está vinculado a um conjunto de filhos $\mathcal{D}_{\text{nid}}$. Contudo, apenas um filho de cada conjunto deve ser escolhido para o próximo nível da árvore. Esta escolha é feita baseada no valor do $C_{\text{max}}^{\text{est}}$ de cada solução parcial e utiliza os pares (λ, θ) como critério de desempate. Além da tarefa de simplificar cada conjunto de filhos a um único filho por nó, existe outra tarefa que requer inspecionar todos os conjuntos $\mathcal{D}_{\text{nid}}$ simultaneamente: evitar filhos idênticos de diferentes soluções parciais em $\mathcal{N}$. Note que no primeiro nível da árvore de busca, todos os nós são obrigatoriamente diferentes visto que consistem em soluções parciais oriundas de uma única operação programada a partir de pares operação/máquina diferentes. Contudo, duas diferentes soluções parciais quando expandidas podem se tornar idênticas. Além disso, se em algum nível da árvore de busca existem soluções idênticas, as expansões dessas soluções serão idênticas até as folhas e portanto, gerarão soluções completas idênticas, afetando diretamente e de maneira negativa a diversidade do método. Para evitar esta situação, antes de escolher um único filho por nó, soluções parciais idênticas são removidas da $\cup \mathcal{D}_{\text{nid}}$. Caso soluções parciais idênticas existam, a solução com o menor λ é preservada e em caso de empate, a solução com o menor θ . Esta eliminação de soluções parciais idênticas é feita no laço da linha 30, onde os valores de $C_{\text{max}}^{\text{est}}$ destas soluções são marcados como ∞ . Na linha 37 as soluções marcadas são de fato removidas. Finalmente, o melhor filho de cada pai é escolhido nas linhas 38 e 39 e copiados no conjunto $\mathcal{N}'$ que se torna o conjunto de nós $\mathcal{N}$ na linha 40, no final da iteração do laço principal.

Pseudo-código 2: Inicialização e construção do primeiro nível da árvore de busca.

Input: m, o, F_i ($i = 1, \dots, o$), p_{ik} ($i = 1, \dots, o, k \in F_i$), A, α, β, ξ
Output: $s^*[i], w^*[i]$ ($i = 1, \dots, o$), $C_{\max}^*$
 BEAMSEARCHINI($m, o, F, p, A, \alpha, \beta, \xi$)

```

1 begin
2   for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do  $\mathcal{P}_i \leftarrow \emptyset, \mathcal{S}_i \leftarrow \emptyset$ 
3   foreach  $(i, j) \in A$  do  $\mathcal{P}_j \leftarrow \mathcal{P}_j \cup \{i\}, \mathcal{S}_i \leftarrow \mathcal{S}_i \cup \{j\}$ 
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do
5      $\bar{p}_i \leftarrow 0$ 
6     foreach  $k \in F_i$  do  $\bar{p}_i \leftarrow \bar{p}_i + p_{ik}$ 
7      $\bar{p}_i \leftarrow \bar{p}_i / |F_i|$ 
8      $\mathcal{Q} \leftarrow \{i \mid |\mathcal{S}_i| = 0\}$ 
9     for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do
10      if  $i \in \mathcal{Q}$  then  $RW_i \leftarrow \bar{p}_i$  else  $RW_i \leftarrow 0$ 
11     while  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$  do
12       Let  $z \in \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \setminus \{z\}$ 
13       foreach  $i \in \mathcal{P}_z$  do
14         if  $RW_i < RW_z + \bar{p}_i$  then
15            $RW_i \leftarrow RW_z + \bar{p}_i$ 
16         if  $i \notin \mathcal{Q}$  then  $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \cup \{i\}$ 
17      $C'_{\max} \leftarrow 0, u'[1 \dots o] \leftarrow 0, v'[1 \dots m] \leftarrow 0, L'[1 \dots m] \leftarrow 0$ 
18     for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do
19       foreach  $k \in F_i$  do  $L'[k] \leftarrow L'[k] + p_{ik}$ 
20     for  $i \leftarrow 1$  to  $o$  do  $\eta'[i] \leftarrow |\mathcal{P}_i|$ 
21      $\Omega' \leftarrow \{i \mid \eta'[i] = 0\}, \mathcal{N}' \leftarrow \emptyset$ 
22     foreach  $\lambda \in \Omega$  do
23        $L, \eta, \Omega \leftarrow L', \eta', \Omega'$ 
24       foreach  $k \in F_\lambda$  do  $L[k] \leftarrow L[k] - p_{\lambda k}$ 
25       foreach  $i \in \mathcal{S}_\lambda$  do
26          $\eta[i] \leftarrow \eta[i] - 1$ 
27         if  $\eta[i] = 0$  then  $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{i\}$ 
28        $\Omega \leftarrow \Omega \setminus \{\lambda\}$ 
29       foreach  $\theta \in F_\lambda$  do
30          $s, w, C_{\max}, u, v \leftarrow s', w', C'_{\max}, u', v'$ 
31          $s[\lambda] \leftarrow \max(u[\lambda], v[\theta]), w[\lambda] \leftarrow \theta, C_{\max} \leftarrow \max\{C_{\max}, s[\lambda] + p_{\lambda\theta}\}, v[\theta] \leftarrow s[\lambda] + p_{\lambda\theta}$ 
32         foreach  $i \in \mathcal{S}_\lambda$  do  $u[i] \leftarrow \max(u[i], s[\lambda] + p_{\lambda\theta})$ 
33          $C_{\max}^{\text{est}} \leftarrow \text{CMAXEST}(m, o, F, p, \mathcal{S}, RW, 1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega)$ 
34          $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}' \cup \{(1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega, C_{\max}^{\text{est}})\}$ 
35        $\hat{\beta} \leftarrow \lceil \beta |\mathcal{N}'| \rceil$  and let  $\hat{C}_{\max}^{\text{est}}$  be the  $\hat{\beta}$ -th smallest  $C_{\max}^{\text{est}}$  such that  $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, C_{\max}^{\text{est}}) \in \mathcal{N}'$ 
36        $\mathcal{N} \leftarrow \{(1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega) \mid (1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega, C_{\max}^{\text{est}}) \in \mathcal{N}' \text{ and } C_{\max}^{\text{est}} \leq \hat{C}_{\max}^{\text{est}}\}$ 
37        $s^*, w^*, C_{\max}^* \leftarrow \text{BEAMSEARCH}(m, o, F, p, \mathcal{S}, RW, \alpha, \xi, \mathcal{N})$ 
38       return  $s^*[i], w^*[i]$  ( $i = 1, \dots, o$ ),  $C_{\max}^*$ 
39 end

```

Pseudo-código 3: Estimativa do makespan (avaliação global).

Input: $m, o, \ell, C_{\max}, \Omega, u[i], RW_i, \mathcal{S}_i, F_i, \eta[i], s[i], w[i]$ ($i = 1, \dots, o$), p_{ik} ($i = 1, \dots, o, k \in F_i$), $v[k], L[k]$ ($k = 1, \dots, m$)

Output: $C_{\max}$

$C_{\max} \leftarrow C_{\max}$

$C_{\max} \leftarrow C_{\max}$

1 **begin**

2 **do** $o - \ell$ **times**

3 $\lambda, \theta \leftarrow \text{SELECT}(m, o, F, p, RW, u, v, L, \Omega, \emptyset)$

4 $s[\lambda] \leftarrow \max(u[\lambda], v[\theta]), w[\lambda] \leftarrow \theta, C_{\max} \leftarrow \max\{C_{\max}, s[\lambda] + p_{\lambda\theta}\}$

5 $v[\theta] \leftarrow s[\lambda] + p_{\lambda\theta}, \Omega \leftarrow \Omega \setminus \{\lambda\}$

6 **foreach** $k \in F_\lambda$ **do** $L[k] \leftarrow L[k] - p_{\lambda k}$

7 **foreach** $i \in \mathcal{S}_\lambda$ **do**

8 $\eta[i] \leftarrow \eta[i] - 1, u[i] \leftarrow \max(u[i], s[\lambda] + p_{\lambda\theta})$

9 **if** $\eta[i] = 0$ **then** $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{i\}$

10 **return** $C_{\max}$

11 **end**

Pseudo-código 4: Seleção de par operação máquina (avaliação local).

Input: $m, o, u[i], RW_i, F_i$ ($i = 1, \dots, o$), p_{ik} ($i = 1, \dots, o, k \in F_i$), $v[k], L[k]$ ($k = 1, \dots, m$), $\Omega, \mathcal{F}$

Output: λ, θ

$\text{SELECT}(m, o, F, p, RW, u, v, L, \Omega, \mathcal{F})$

1 **begin**

2 $\widehat{st} \leftarrow \infty, \widehat{RW} \leftarrow 0$

3 **foreach** $i \in \Omega$ **do**

4 $\widetilde{st} \leftarrow \infty, \widetilde{pt} \leftarrow \infty$

5 **foreach** $k \in F_i$ **do**

6 **if** $(i, k) \notin \mathcal{F}$ **then**

7 $st \leftarrow \max(u[i], v[k])$

8 **if** $st < \widetilde{st}$ **or** $(st = \widetilde{st} \text{ and } p_{ik} < \widetilde{pt})$

9 **or** $(st = \widetilde{st} \text{ and } p_{ik} = \widetilde{pt} \text{ and } L[k] < L[\widetilde{k}])$

10 **or** $(st = \widetilde{st} \text{ and } p_{ik} = \widetilde{pt} \text{ and } L[k] = L[\widetilde{k}] \text{ and } k < \widetilde{k})$ **then**

11 $\widetilde{st} \leftarrow st, \widetilde{pt} \leftarrow p_{ik}, \widetilde{k} \leftarrow k$

12 **if** $\widetilde{st} < \widehat{st}$ **or** $(\widetilde{st} = \widehat{st} \text{ and } RW_i > \widehat{RW})$

13 **or** $(\widetilde{st} = \widehat{st} \text{ and } RW_i = \widehat{RW} \text{ and } L[k] > L[\theta])$

14 **or** $(\widetilde{st} = \widehat{st} \text{ and } RW_i = \widehat{RW} \text{ and } L[k] = L[\theta] \text{ and } i < \lambda)$ **then**

15 $\widehat{st} \leftarrow \widetilde{st}, \widehat{RW} \leftarrow RW_i, \theta \leftarrow \widetilde{k}, \lambda \leftarrow i$

16 **return** λ, θ

17 **end**

Pseudo-código 5: Rotina principal.

Input: $m, o, RW_i, \mathcal{S}_i, F_i$ ($i = 1, \dots, o$), p_{ik} ($i = 1, \dots, o, k \in F_i$), $\alpha, \xi, \mathcal{N}$
Output: $s^*[i], w^*[i]$ ($i = 1, \dots, o$), $C_{\max}^*$
 BEAMSEARCH($m, o, F, p, \mathcal{S}, RW, \alpha, \xi, \mathcal{N}$)

```

1 begin
2   do  $o - 1$  times
3      $nid \leftarrow 0$ 
4     foreach  $(\ell, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega) \in \mathcal{N}$  do
5        $nid \leftarrow nid + 1$ 
6        $\hat{\alpha}_1 \leftarrow \lceil \alpha |\{(i, k) \mid i \in \Omega \text{ and } k \in F_i\}| \rceil$ 
7        $st_{\min} \leftarrow \infty, pt_{\max} \leftarrow 0$ 
8       foreach  $i \in \Omega$  do
9         foreach  $k \in F_i$  do
10            $st \leftarrow \max(u[i], v[k])$ 
11            $st_{\min} \leftarrow \min\{st_{\min}, st\}, pt_{\max} \leftarrow \max\{pt_{\max}, p_{ik}\}$ 
12        $\hat{\alpha}_2 \leftarrow 0$ 
13       foreach  $i \in \Omega$  do
14         foreach  $k \in F_i$  do
15            $st \leftarrow \max(u[i], v[k])$ 
16           if  $st \leq st_{\min} + \xi pt_{\max}$  then  $\hat{\alpha}_2 \leftarrow \hat{\alpha}_2 + 1$ 
17        $\mathcal{D}_{nid} \leftarrow \emptyset, \mathcal{F} \leftarrow \emptyset$ 
18       do  $\min\{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2\}$  times
19          $s', w', C'_{\max}, u', v', L', \eta', \Omega' \leftarrow s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega$ 
20          $\lambda, \theta \leftarrow \text{SELECT}(m, o, F, p, RW, u', v', L', \Omega', \mathcal{F})$ 
21          $s'[\lambda] \leftarrow \max(u'[\lambda], v'[\theta]), w'[\lambda] \leftarrow \theta, C'_{\max} \leftarrow \max\{C'_{\max}, s'[\lambda] + p_{\lambda\theta}\}$ 
22          $v'[\theta] \leftarrow s'[\lambda] + p_{\lambda\theta}, \Omega' \leftarrow \Omega' \setminus \{\lambda\}$ 
23         foreach  $k \in F_{\lambda}$  do  $L'[k] \leftarrow L'[k] - p_{\lambda k}$ 
24         foreach  $i \in S_{\lambda}$  do
25            $\eta'[i] \leftarrow \eta'[i] - 1, u'[i] \leftarrow \max(u'[i], s'[\lambda] + p_{\lambda\theta})$ 
26           if  $\eta'[i] = 0$  then  $\Omega' \leftarrow \Omega' \cup \{i\}$ 
27          $C_{\max}^{\text{est}} \leftarrow \text{CMAXEST}(m, o, F, p, \mathcal{S}, RW, \ell + 1, s', w', C'_{\max}, u', v', L', \eta', \Omega')$ 
28          $\mathcal{D}_{nid} \leftarrow \mathcal{D}_{nid} \cup \{(\lambda, \theta, \ell + 1, s', w', C'_{\max}, u', v', L', \eta', \Omega', C_{\max}^{\text{est}})\}, \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{(\lambda, \theta)\}$ 
29        $\mathcal{N}' \leftarrow \emptyset$ 
30       for  $nid_1 \leftarrow 1$  to  $|\mathcal{N}|$  do
31         foreach  $(\lambda_1, \theta_1, \ell + 1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega, C_{\max}^{\text{est}}) \in \mathcal{D}_{nid_1}$  do
32           for  $nid_2 \leftarrow nid_1 + 1$  to  $|\mathcal{N}|$  do
33             foreach  $(\lambda_2, \theta_2, \ell + 1, s', w', C'_{\max}, u', v', L', \eta', \Omega', C_{\max}^{\text{est}}) \in \mathcal{D}_{nid_2}$  do
34               if ( $s = s'$  and  $w = w'$ ) or ( $\ell + 1 = o$  and  $C_{\max} = C'_{\max}$ ) then
35                 if  $\lambda_1 < \lambda_2$  or ( $\lambda_1 = \lambda_2$  and  $\theta_1 < \theta_2$ ) then  $C_{\max}^{\text{est}} \leftarrow \infty$ 
36                 else  $C_{\max}^{\text{est}} \leftarrow \infty$ 
37             Remove from  $\mathcal{D}_{nid_1}$  the elements with  $C_{\max}^{\text{est}} = \infty$ .
38           if  $\mathcal{D}_{nid_1} \neq \emptyset$  then
39             Let  $(\lambda, \theta, \ell + 1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega, C_{\max}^{\text{est}}) \in \mathcal{D}_{nid_1}$  with smallest  $C_{\max}^{\text{est}}$ . In case of
              ties, consider the one with smallest  $\lambda$  and in case of ties consider the one with
              smallest  $\theta$ .  $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}' \cup \{(\ell + 1, s, w, C_{\max}, u, v, L, \eta, \Omega)\}$ .
40        $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N}'$ 
41       Let  $(o, s^*, w^*, C_{\max}^*, u, v, L, \eta, \Omega) \in \mathcal{N}$  with smallest  $C_{\max}^*$ .
42       return  $s^*[i], w^*[i]$  ( $i = 1, \dots, o$ ),  $C_{\max}^*$ 
43 end

```

2.4 Experimentos Numéricos

O algoritmo *list scheduling* e o método *Beam Search*, Algoritmos 1 e 2–5, foram implementados em C/C++ e os códigos fonte estão disponíveis em <http://www.ime.usp.br/~egbirgin/>. A compilação dos códigos foi feita utilizando o compilador g++ do GCC, versão 4.7.2 Debian 4.7.2–5, utilizando a opção de otimização “-O3”. Todos os testes foram feitos utilizando um computador Intel(R) Xeon(R) E5645 2.40GHz com 132 GB de memória RAM e executados no sistema operacional Debian 7, kernel 3.7.6 SMP x86_64. A descrição detalhada dos resultados numéricos em conjunto com a descrição completa das soluções obtidas também estão disponibilizadas com os códigos fontes.

Para poder avaliar o comportamento dos métodos propostos quando aplicados em instâncias de pequeno e médio porte, um *solver* exato foi aplicado em 50 instâncias do modelo (2.1–2.8) introduzidas em Birgin *et al.* (2014). Estas instâncias são divididas em dois grupos de 20 e 30 instâncias, denominados de YFJS e instâncias DAFJS respectivamente. As instâncias YFJS01–YFJS20 são instâncias compostas por duas sequências de operações seguidas por uma operação de montagem que une os dois componentes já processados, denominados como *Y-jobs* em Birgin *et al.* (2014). As instâncias DAFJS01–DAFJS30 são instâncias compostas por tarefas cujas as precedências são dadas por um DAG arbitrário. As Tabelas 2.1 e 2.2 descrevem as principais características de cada instância. As Figuras 2.9 e 2.10 ilustram os tipos de precedências das operações de cada um dos conjuntos de instâncias, quer dizer, ilustram a flexibilidade de sequenciamento de cada um dos conjuntos. Como *solver* exato foi utilizado o IBM ILOG CPLEX 12.1 com as seguintes configurações: 1 para o número máximo de *threads* e 2048MB de memória disponível. Todos os demais parâmetros foram deixados como o padrão. Duas baterias de testes com o *solver* foram feitas. Na primeira, o tempo de CPU foi de 1 hora. Na segunda, foram consideradas somente as instâncias nas quais as soluções ótimas não foram encontradas e foi dado 10 horas de tempo de CPU. As Tabelas 2.3 e 2.4 apresentam os resultados para os conjuntos de instâncias YFJS01–YFJS20 e DAFJS01–DAFJS30, respectivamente. Nas tabelas, “mks” é o *makespan* e “CPU(s)” é o tempo de CPU em segundos. Nos casos onde o *solver* atingiu o limite de tempo sem encontrar uma solução ótima, a tabela apresenta o limitante inferior obtido e o *gap* relativo, dado pela diferença entre os limitantes dividido pelo limitante superior. Na Tabela 2.3 o *solver* conseguiu encontrar soluções ótimas para 14 (YFJS01–YFJS14) das 20 instâncias do conjunto e também um *gap* menor que 1% foi obtido em 2 outras instâncias (YFJS15 e YFJS16). Por outro lado, a Tabela 2.4 mostra que o *solver* encontrou soluções ótimas em 4 das 30 instâncias e *gap* menor que 1% em apenas 1 instância, quando o conjunto DAFJS01–DAFJS30 foi considerado. Estes resultados também ajudam a explicar as “melhorias” obtidas pelos métodos heurísticos propostos neste trabalho quando comparados às soluções obtidas pelo *solver* com limite de tempo de CPU.

Figura 2.9: Representação gráfica das precedências entre as operações da instância YFJS02.

Nome	n	m	# de operações			$ F_i $			# de precedências		
			min	max	Σ	min	max	Σ	min	max	Σ
YFJS01	4	7	10	10	40	1	3	104	0	2	36
YFJS02	4	7	10	10	40	1	3	104	0	2	36
YFJS03	6	7	4	4	24	2	3	63	0	2	18
YFJS04	7	7	4	4	28	2	3	71	0	2	21
YFJS05	8	7	4	4	32	2	3	81	0	2	24
YFJS06	9	7	4	4	36	2	3	95	0	2	27
YFJS07	9	7	4	4	36	2	3	93	0	2	27
YFJS08	9	12	4	4	36	2	3	100	0	2	27
YFJS09	9	12	4	4	36	4	8	219	0	2	27
YFJS10	10	12	4	4	40	1	3	113	0	2	30
YFJS11	10	10	5	5	50	1	3	134	0	2	40
YFJS12	10	10	5	5	50	2	3	133	0	2	40
YFJS13	10	10	5	5	50	1	3	137	0	2	40
YFJS14	13	26	17	17	221	2	3	641	0	2	208
YFJS15	13	26	17	17	221	2	3	648	0	2	208
YFJS16	13	26	17	17	221	2	3	633	0	2	208
YFJS17	17	26	17	17	289	3	5	1328	0	2	272
YFJS18	17	26	17	17	289	3	5	1362	0	2	272
YFJS19	17	26	17	17	289	3	5	1347	0	2	272
YFJS20	17	26	17	17	289	3	5	1343	0	2	272

Tabela 2.1: Descrição das instâncias com *Y-jobs*.

O primeiro conjunto de testes objetivou avaliar o desempenho do algoritmo *list scheduling* proposto. As Tabelas 2.5 e 2.6 mostram os resultados de aplicar o algoritmo *list scheduling* aos conjuntos de instâncias YFJS01–YFJS20 e DAFJS01–DAFJS30, respectivamente. Para cada instância, as tabelas mostram o *makespan* da solução obtida pelo algoritmo. Uma comparação com o *makespan* obtida pela heurística EST apresentada em Birgin *et al.* (2014) e o *makespan* obtido pelo *solver* com o limite de tempo de CPU de 1 hora e 10 horas também são apresentados. Em cada caso, se v_1 é o valor do *makespan* encontrado pelo *list scheduling* e v_2 é o valor encontrado pelo outro método, a diferença relativa “diff” é dada por $\text{diff} = (v_1 - v_2)/v_2$. Isto significa que valores negativos de “diff” indicam que o algoritmo *list scheduling* encontrou uma solução de melhor qualidade. Ambas as tabelas mostram que o *list scheduling* proposto encontra soluções melhores que a heurística construtiva determinística EST apresentada em Birgin *et al.* (2014). Quando o *list scheduling* é comparado contra o *solver* exato, os dois conjuntos de instâncias devem ser considerados separadamente. No conjunto de instâncias YFJS01–YFJS20, o qual o *solver* encontrou soluções ótimas na maioria dos casos, a diferença relativa é de aproximadamente 35%. No conjunto de instâncias DAFJS01–DAFJS30, o qual o *solver* não foi capaz de encontrar soluções ótimas na maioria dos casos, a distância é de aproximadamente 7%. Contudo, é importante notar que o algoritmo *list scheduling* proposto é executado em menos de uma fração de segundo para cada instância. Em todo caso, não objetiva-se comparar a heurística proposta com o *solver* simplesmente avaliando a qualidade das soluções obtidas.

O segundo conjunto de experimentos objetivou avaliar o desempenho do método *Beam Search* proposto. Similarmente a todo método heurístico, também é relevante avaliar a influência dos parâmetros do método em relação ao seu desempenho. Com este propósito, todas as 80 combinações de $\alpha \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, $\beta \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ e $\xi \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ foram consideradas. Para cada combinação de parâmetros, o método foi executado sobre os dois conjuntos de instâncias e calculou-se a média da diferença relativa à solução obtida pelo *solver* executado com limite de tempo de CPU definido em 1 hora e 10 horas. As Tabelas 2.7 e 2.8 mostram estas médias das distâncias relativas para os conjuntos de instâncias YFJS01–YFJS20 e DAFJS01–DAFJS30 respec-

Nome	n	m	# de operações			$ F_i $			# de precedências		
			min	max	$\sum$	min	max	$\sum$	min	max	$\sum$
DAFJS01	4	5	5	9	26	2	4	82	0	3	26
DAFJS02	4	5	5	7	25	2	4	79	0	3	23
DAFJS03	4	10	10	17	55	3	7	279	0	2	52
DAFJS04	4	10	9	14	43	3	7	220	0	2	40
DAFJS05	6	5	5	13	39	2	4	104	0	3	34
DAFJS06	6	5	5	13	44	2	4	136	0	3	41
DAFJS07	6	10	7	23	85	3	7	431	0	3	82
DAFJS08	6	10	6	23	85	3	7	403	0	3	82
DAFJS09	8	5	4	9	45	2	4	135	0	3	42
DAFJS10	8	5	4	11	58	2	4	168	0	3	52
DAFJS11	8	10	10	23	113	3	7	534	0	3	108
DAFJS12	8	10	9	22	117	3	7	603	0	3	114
DAFJS13	10	5	5	11	62	2	4	193	0	3	55
DAFJS14	10	5	4	10	69	2	4	206	0	3	62
DAFJS15	10	10	8	19	120	3	7	595	0	3	117
DAFJS16	10	10	6	20	120	3	7	602	0	3	114
DAFJS17	12	5	4	11	82	2	4	246	0	3	77
DAFJS18	12	5	5	9	74	2	4	231	0	2	64
DAFJS19	8	7	7	13	70	3	5	283	0	3	66
DAFJS20	10	7	6	17	92	3	5	361	0	3	87
DAFJS21	12	7	5	16	107	3	5	425	0	3	102
DAFJS22	12	7	5	17	116	3	5	450	0	3	109
DAFJS23	8	9	6	17	76	4	6	367	0	3	71
DAFJS24	8	9	6	25	92	4	6	463	0	2	87
DAFJS25	10	9	9	19	123	4	6	619	0	3	119
DAFJS26	10	9	8	17	119	4	6	606	0	3	116
DAFJS27	12	9	7	22	127	4	6	625	0	3	118
DAFJS28	8	10	8	15	91	3	7	457	0	3	89
DAFJS29	8	10	7	19	95	3	7	468	0	3	94
DAFJS30	10	10	8	19	98	3	7	509	0	3	94

Tabela 2.2: Descrição das instâncias nas quais as relações de precedências entre as operações são dadas por um DAG qualquer.

tivamente. Esta mesma informação também é apresentada graficamente nas Figuras 2.11a e 2.11b respectivamente. Além disso, as Figuras 2.12a e 2.12b apresentam a média do tempo de CPU, em segundos, que o *Beam Search* utilizou para cada combinação de parâmetros.

Com foco na comparação do método *Beam Search* com as soluções obtidas pelo *solver* exato com limite de tempo de CPU de 1 hora (a outra comparação é similar), a Tabela 2.7 mostra que o método *Beam Search* com a combinação $(\alpha, \beta, \xi) = (1, 1, 1)$ obtém média das diferenças relativas de 3.5% no conjunto de instâncias YFJS01–YFJS20. Este é um resultado interessante se recordarmos que, para este conjunto de instâncias, o *solver* exato encontrou soluções ótimas na maioria dos casos. No outro extremo da tabela, com parâmetros $(\alpha, \beta, \xi) = (0.25, 0.25, 0)$, a média das diferenças relativas é de 8.86%. Por outro lado, a Figura 2.12a mostra que a primeira combinação de parâmetros citada utiliza quase 2650 segundos por instância em média enquanto a última combinação de parâmetros utiliza aproximadamente 5 segundos por instância em média. Além disso, a tabela mostra que, considerando todas as 80 combinações de parâmetros, a diferença de 3.5% para 9.03% aponta uma importante característica: o desempenho do método não é fortemente dependente de uma escolha precisa de parâmetros. A relação entre a escolha de parâmetros e o desempenho do método pode

Figura 2.10: Representação gráfica das precedências entre as operações da instância DAFJS28.

ser facilmente vista nas Figuras 2.11a e 2.11b. Para valores fixos de α e β , o melhor valor para o parâmetro ξ é sempre maior ou igual a 0.5. Além disso, como esperado, quanto maior os valores de α e β , maior o espaço de busca e em consequência, o método obtém soluções de melhor qualidade em troca de mais tempo de CPU.

Analisando a Tabela 2.8 é possível notar que, no conjunto de instâncias DAFJS01–DAFJS30, o qual o *solver* exato não foi capaz de encontrar soluções ótimas na maioria dos casos, o método *Beam Search* supera em qualidade as soluções do *solver* apresentando diferenças que vão de -4.94% , para a combinação de parâmetros $(\alpha, \beta, \xi) = (0.5, 0.25, 0)$, até -6.36% , para a combinação de parâmetros $(\alpha, \beta, \xi) = (1, 1, 0.5)$. No primeiro caso, considerando as instâncias DAFJS01–DAFJS30 individualmente, a diferença vai de 12.94% até -17.18% com média de tempo de CPU de 1.18 segundos. No segundo caso, a diferença vai de 8.95% até -17.52% com média de tempo de CPU de 115.04 segundos por instância. É importante lembrar que esta comparação é realizada em relação ao *solver* exato que utilizou um limite de tempo de CPU máximo de 1 hora e que este limite foi

Instância	CPLEX com 1h de limite de tempo		CPLEX com 10h de limite de tempo	
	mks	CPU(s)	mks	CPU(s)
YFJS01	773	10.83	—	—
YFJS02	825	9.25	—	—
YFJS03	347	3.50	—	—
YFJS04	390	7.31	—	—
YFJS05	445	341.38	—	—
YFJS06	[427;447] 4.47%	3600	446	15072.02
YFJS07	444	1277.35	—	—
YFJS08	353	0.59	—	—
YFJS09	242	13.09	—	—
YFJS10	399	3.83	—	—
YFJS11	526	168.72	—	—
YFJS12	512	2843.79	—	—
YFJS13	405	1427.47	—	—
YFJS14	1317	3378.27	—	—
YFJS15	[1239;1244] 0.40%	3600	[1239;1244] 0.40%	36000
YFJS16	[1222;1243] 1.69%	3600	[1222;1231] 0.73%	36000
YFJS17	[1133;1622] 30.15%	3600	[1133;1290] 12.17%	36000
YFJS18	[1220;2082] 41.40%	3600	[1220;1499] 18.61%	36000
YFJS19	[926;1525] 39.28%	3600	[926;1333] 30.53%	36000
YFJS20	[968;2020] 52.08%	3600	[968;1279] 24.32%	36000

Tabela 2.3: Resultados numéricos da aplicação do CPLEX ao modelo (2.1–2.8) com as instâncias YFJS01–YFJS20. Como em *Birgin et al. (2014)*, uma solução viável inicial é computada com a heurística EST (*Birgin et al., 2014*) e passada ao CPLEX.

atingido na maioria dos casos, como mostrado na Tabela 2.4. Portanto, isto significa que o método *Beam Search* foi capaz de encontrar melhores soluções utilizando menos tempo de CPU.

2.5 Experimentos com FJSP clássico

Uma vez que o FJSP clássico é um caso particular do FJSP-SF abordado neste trabalho, alguns experimentos com o método *Beam Search* deste trabalho utilizando instâncias clássicas do FJSP foram realizados. Para estes experimentos, foram considerados os conjuntos de instâncias introduzidos em *Brandimarte (1993)*, em *Dauzère-Pérès e Paulli (1997)*, em *Barnes e Chambers (1996)* e em *Hurink et al. (1994)*. A Tabela 2.9 apresenta o erro relativo (RE) em relação aos limitantes inferiores disponíveis em http://people.idsia.ch/~monaldo/fjspresults/fjsp_result.ps. O RE é dado por

$$RE = 100\% \times (mks - mks_{LB})/mks_{LB},$$

onde mks é o *makespan* obtido pelo método *Beam Search* e mks_{LB} é o limitante inferior. Na tabela, “# inst.” é a quantidade de instâncias em cada conjunto.

Para meios de comparação, a Tabela 2.10 apresenta os resultados do algoritmo genético considerado estado da arte de *Pezzella et al. (2008)* para o FJSP. É possível ver que, mesmo quando aplicado à instâncias do FJSP clássico, o método *Beam Search* obteve resultados competitivos. De acordo com as tabelas, o *Beam Search* supera todos os três GA’s nos conjuntos de instâncias Dauzère-Pérès and Paulli e Hurink VData. É importante dizer que, estes dois conjuntos onde o *Beam Search* supera os resultados dos GA’s, possuem a maior flexibilidade nas máquinas, quer dizer, são os conjuntos dos quais cada operação possui a maior quantidade de possíveis máquinas de processamento.

É importante apontar alguns aspectos para a comparação dos resultados apresentados nesta

Instância	CPLEX com 1h de limite de tempo		CPLEX com 10h de limite de tempo	
	mks	CPU(s)	mks	CPU(s)
DAFJS01	257	50.17	–	–
DAFJS02	289	794.66	–	–
DAFJS03	576	10.22	–	–
DAFJS04	606	0.76	–	–
DAFJS05	[351;57;402] 12.54%	3600	[381;394] 3.30%	36000
DAFJS06	[326;431] 24.36%	3600	[326;410] 20.49%	36000
DAFJS07	[497.90;565] 11.88%	3600	[498.22;547] 8.92%	36000
DAFJS08	[628;631] 0.48%	3600	[628;631] 0.48%	36000
DAFJS09	[315;484] 34.92%	3600	[316.74;471] 32.75%	36000
DAFJS10	[336;569] 40.95%	3600	[336;538] 37.55%	36000
DAFJS11	[658;708] 7.06%	3600	[658;701] 6.13%	36000
DAFJS12	[530;720] 26.39%	3600	[530;720] 26.39%	36000
DAFJS13	[304;710] 57.18%	3600	[304;683] 55.49%	36000
DAFJS14	[358.95;838] 57.17%	3600	[358.95;775] 53.68%	36000
DAFJS15	[512;818] 37.41%	3600	[512;796] 35.68%	36000
DAFJS16	[640;831] 22.98%	3600	[640;798] 19.80%	36000
DAFJS17	[300;904] 66.81%	3600	[300;902] 66.74%	36000
DAFJS18	[322;951] 66.14%	3600	[322;878] 63.33%	36000
DAFJS19	[512;595] 13.95%	3600	[512;585] 12.48%	36000
DAFJS20	[434;815] 46.75%	3600	[434;810] 46.42%	36000
DAFJS21	[504;965] 47.77%	3600	[504;959] 47.45%	36000
DAFJS22	[464;902] 48.56%	3600	[464;896] 48.21%	36000
DAFJS23	[450;541] 16.82%	3600	[450;537] 16.20%	36000
DAFJS24	[476;660] 27.88%	3600	[476;648] 26.54%	36000
DAFJS25	[584;897] 34.89%	3600	[584;879] 33.56%	36000
DAFJS26	[565;903] 37.43%	3600	[565;898] 37.08%	36000
DAFJS27	[503;981] 48.73%	3600	[503;981] 48.73%	36000
DAFJS28	[535;662] 19.18%	3600	[535;572] 6.47%	36000
DAFJS29	[609;720] 15.42%	3600	[609;710] 14.23%	36000
DAFJS30	[467;637] 26.69%	3600	[467;615] 24.07%	36000

Tabela 2.4: Resultados numéricos da aplicação do CPLEX ao modelo (2.1–2.8) com as instâncias DAFJS01–DAFJS30. Como em Birgin et al. (2014), uma solução factível inicial é computada com a heurística EST Birgin et al. (2014) e passada ao CPLEX.

seção. Primeiramente, o método *Beam Search* é um método determinístico, sem aleatoriedade e com tempo finito para conclusão. Os GA's apresentados foram executados cinco vezes e apenas o melhor resultado foi apresentado. Um outro aspecto importante é o fato de que o método *Beam Search* foi executado fixando os parâmetros $(\alpha, \beta, \xi) = (1, 1, 1)$ enquanto para os experimentos do FJSP-SF, 80 combinações diferentes foram avaliadas. Os métodos utilizados para comparação foram executados em diferentes máquinas e o tempo de CPU dos GA's de Pezzella et al. (2008) não foram reportados. Por último e não menos importante, vale a pena destacar que o método *Beam Search* deste trabalho foi desenvolvido para ser aplicado ao FJSP-SF, que possui como caso particular o FJSP clássico.

2.6 Conclusão

Este capítulo aborda uma extensão do FJSP na qual as precedências entre as operações de uma tarefa são definidas através de um DAG qualquer. Inicialmente, um algoritmo LS baseado em regras que exploram várias características do problema para determinar um par operação/máquina para

Instância	mks	heurística EST		CPLEX (limite 1h)		CPLEX (limite 10h)	
		mks	diff	mks	diff	mks	diff
YFJS01	1130	1318	-14.26	773	46.18	773	46.18
YFJS02	1133	1243	-8.85	825	37.33	825	37.33
YFJS03	575	439	30.98	347	65.71	347	65.71
YFJS04	576	569	1.23	390	47.69	390	47.69
YFJS05	608	566	7.42	445	36.63	445	36.63
YFJS06	633	633	0.00	447	41.61	446	41.93
YFJS07	628	628	0.00	444	41.44	444	41.44
YFJS08	485	531	-8.66	353	37.39	353	37.39
YFJS09	402	506	-20.55	242	66.12	242	66.12
YFJS10	513	541	-5.18	399	28.57	399	28.57
YFJS11	745	740	0.68	526	41.63	526	41.63
YFJS12	744	813	-8.49	512	45.31	512	45.31
YFJS13	553	717	-22.87	405	36.54	405	36.54
YFJS14	1555	2055	-24.33	1317	18.07	1317	18.07
YFJS15	1690	2296	-26.39	1244	35.85	1244	35.85
YFJS16	1769	2006	-11.81	1243	42.32	1231	43.70
YFJS17	1734	2408	-27.99	1622	6.91	1290	34.42
YFJS18	1735	2082	-16.67	2082	-16.67	1499	15.74
YFJS19	1604	2038	-21.30	1525	5.18	1333	20.33
YFJS20	1700	2369	-28.24	2020	-15.84	1279	32.92
Média			-10.26		32.40		38.68

Tabela 2.5: Resultados do algoritmo list scheduling aplicado ao conjunto de instâncias YFJS01–YFJS20.

ser programado a cada iteração foi cuidadosamente desenvolvido. A partir daí, uma extensão natural do LS que explora um conjunto de pares operação/máquina, ao invés de apenas um par, originou o BS deste trabalho. Para avaliar o desempenho dos métodos propostos, uma solução inicial foi gerada a partir de uma heurística construtiva proposta em Birgin *et al.* (2014) e então um *solver* exato foi aplicado ao modelo (2.1–2.8) introduzido também em Birgin *et al.* (2014). O *solver* foi executado com um limite de 1 e de 10 horas. Um total de 50 instâncias para o FJSP-SF foram utilizadas nos experimentos numéricos. Os resultados obtidos demonstram a eficiência das heurísticas propostas que, em linhas gerais, conseguem obter soluções melhores utilizando menos tempo de CPU quando comparados ao único método encontrado na literatura para o problema.

Além disso, 6 conjuntos clássicos de instâncias do FJSP também foram avaliados. Os resultados foram comparados com os algoritmos genéticos (GA) considerados estado da arte em Pezzella *et al.* (2008). Os GAs foram executados 5 vezes e somente o melhor resultado foi considerado. Em linhas gerais, o método BS proposto nesta tese se mostrou competitivo e até mesmo superou todos os GAs nos conjuntos mais complexos.

Todos os métodos e instâncias deste capítulo estão disponíveis em <http://www.ime.usp.br/~egbirgin/>.

Instância	mks	heurística EST		CPLEX (limite 1h)		CPLEX (limite 10h)	
		mks	diff	mks	diff	mks	diff
DAFJS01	321	327	-1.83	257	24.90	257	24.90
DAFJS02	350	382	-8.38	289	21.11	289	21.11
DAFJS03	631	710	-11.13	576	9.55	576	9.55
DAFJS04	607	653	-7.04	606	0.17	606	0.17
DAFJS05	505	482	4.77	402	25.62	394	28.17
DAFJS06	497	489	1.64	431	15.31	410	21.22
DAFJS07	632	717	-11.85	565	11.86	547	15.54
DAFJS08	706	847	-16.65	631	11.89	631	11.89
DAFJS09	533	535	-0.37	484	10.12	471	13.16
DAFJS10	621	629	-1.27	569	9.14	538	15.43
DAFJS11	767	708	8.33	708	8.33	701	9.42
DAFJS12	727	720	0.97	720	0.97	720	0.97
DAFJS13	768	766	0.26	710	8.17	683	12.45
DAFJS14	888	871	1.95	838	5.97	775	14.58
DAFJS15	788	818	-3.67	818	-3.67	796	-1.01
DAFJS16	808	831	-2.77	831	-2.77	798	1.25
DAFJS17	935	910	2.75	904	3.43	902	3.66
DAFJS18	939	951	-1.26	951	-1.26	878	6.95
DAFJS19	598	601	-0.50	595	0.50	585	2.22
DAFJS20	854	815	4.79	815	4.79	810	5.43
DAFJS21	937	965	-2.90	965	-2.90	959	-2.29
DAFJS22	826	902	-8.43	902	-8.43	896	-7.81
DAFJS23	548	632	-13.29	541	1.29	537	2.05
DAFJS24	687	674	1.93	660	4.09	648	6.02
DAFJS25	885	897	-1.34	897	-1.34	879	0.68
DAFJS26	915	903	1.33	903	1.33	898	1.89
DAFJS27	982	981	0.10	981	0.10	981	0.10
DAFJS28	633	703	-9.96	662	-4.38	572	10.66
DAFJS29	800	760	5.26	720	11.11	710	12.68
DAFJS30	640	657	-2.59	637	0.47	615	4.07
Média		-2.20		5.73		8.40	

Tabela 2.6: Resultados do algoritmo list scheduling aplicado ao conjunto de instâncias DAFJS01–DAFJS30.

α	ξ	diff vs. CPLEX (limite 1h)				diff vs. CPLEX (limite 10h)			
		β				β			
		0.25	0.50	0.75	1.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.25	0.00	8.86	8.87	8.42	8.28	13.94	13.91	13.47	13.32
	0.25	7.73	7.17	6.51	6.25	12.72	12.15	11.45	11.18
	0.50	7.17	6.42	5.70	5.68	12.09	11.32	10.59	10.56
	0.75	7.76	7.02	6.54	6.22	12.74	11.98	11.49	11.17
	1.00	8.32	7.68	6.80	6.46	13.31	12.65	11.75	11.41
0.50	0.00	8.76	7.45	7.41	7.24	13.80	12.46	12.41	12.24
	0.25	7.14	6.00	5.22	5.05	12.05	10.88	10.07	9.90
	0.50	6.97	5.80	5.69	5.23	11.93	10.74	10.62	10.17
	0.75	6.82	6.11	5.65	5.21	11.72	11.00	10.54	10.09
	1.00	6.51	5.80	5.46	5.50	11.46	10.75	10.40	10.43
0.75	0.00	9.03	6.86	6.87	6.51	14.04	11.87	11.88	11.54
	0.25	6.44	4.80	4.24	4.19	11.35	9.69	9.09	9.04
	0.50	6.01	5.11	4.80	4.48	10.91	9.99	9.68	9.35
	0.75	5.50	4.53	4.32	3.81	10.44	9.45	9.24	8.73
	1.00	4.99	4.08	4.00	3.82	9.93	8.99	8.91	8.73
1.00	0.00	9.03	6.85	7.11	6.86	14.05	11.86	12.09	11.87
	0.25	6.53	4.63	4.59	4.42	11.43	9.48	9.44	9.27
	0.50	5.41	4.66	4.43	4.00	10.30	9.54	9.31	8.86
	0.75	5.12	4.32	4.01	3.87	9.99	9.19	8.84	8.71
	1.00	4.56	3.79	3.92	3.50	9.49	8.70	8.80	8.38

Tabela 2.7: Médias dos desvios relativos obtidos na comparação dos resultados do método *Beam Search*, com diferentes escolhas de parâmetros para α , β , e ξ , em relação ao *CPLEX* solver com dois limites de tempo de CPU (1 hora e 10 horas), quando aplicados às instâncias YFJS01–YFJS20.

α	ξ	diff vs. CPLEX (limite 1h)				diff vs. CPLEX (limite 10h)			
		β				β			
		0.25	0.50	0.75	1.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.25	0.00	-5.07	-5.57	-5.75	-5.72	-2.69	-3.20	-3.38	-3.35
	0.25	-5.18	-5.74	-5.95	-6.01	-2.80	-3.37	-3.60	-3.65
	0.50	-5.24	-5.70	-5.81	-5.91	-2.86	-3.33	-3.44	-3.55
	0.75	-5.20	-5.67	-5.85	-5.90	-2.81	-3.30	-3.49	-3.54
	1.00	-5.19	-5.66	-5.87	-6.03	-2.80	-3.28	-3.50	-3.68
0.50	0.00	-4.94	-5.56	-5.75	-5.77	-2.55	-3.19	-3.39	-3.41
	0.25	-5.53	-6.01	-6.14	-6.19	-3.16	-3.65	-3.79	-3.84
	0.50	-5.71	-6.07	-6.13	-6.19	-3.36	-3.72	-3.78	-3.85
	0.75	-5.43	-5.91	-6.06	-6.11	-3.05	-3.54	-3.70	-3.75
	1.00	-5.11	-5.86	-5.98	-5.96	-2.72	-3.49	-3.62	-3.60
0.75	0.00	-5.19	-5.62	-5.70	-5.77	-2.81	-3.25	-3.33	-3.40
	0.25	-5.88	-6.02	-6.07	-6.25	-3.52	-3.66	-3.72	-3.90
	0.50	-5.82	-6.06	-6.27	-6.32	-3.46	-3.71	-3.93	-3.98
	0.75	-5.68	-5.93	-6.16	-6.25	-3.32	-3.58	-3.81	-3.90
	1.00	-5.74	-6.07	-6.19	-6.34	-3.37	-3.71	-3.83	-3.99
1.00	0.00	-5.19	-5.65	-5.70	-5.77	-2.81	-3.27	-3.33	-3.40
	0.25	-5.90	-6.10	-6.30	-6.33	-3.53	-3.74	-3.95	-3.98
	0.50	-6.01	-6.28	-6.36	-6.36	-3.65	-3.94	-4.02	-4.02
	0.75	-5.72	-6.04	-6.19	-6.29	-3.36	-3.69	-3.84	-3.95
	1.00	-5.65	-6.01	-6.13	-6.22	-3.28	-3.65	-3.77	-3.86

Tabela 2.8: Médias dos desvios relativos obtidos na comparação dos resultados do método *Beam Search*, com diferentes escolhas de parâmetros para α , β , e ξ , em relação ao *CPLEX* solver com dois limites de tempo de CPU (1 hora e 10 horas), quando aplicados às instâncias DAFJS01–DAFJS30.

Instâncias	# inst.	RE
Brandimarte	10	26.54
Dauzère-Péérès and Paulli	18	6.21
Barnes and Chambers	21	32.09
Hurink EData	43	8.52
Hurink RData	43	4.75
Hurink VData	43	0.26

Tabela 2.9: Erros relativos obtidos pelo método *Beam Search* aplicado à vários conjuntos clássicos de instâncias do FJSP.

Instâncias	# inst.	Pezzella <i>et al.</i> (2008)	Chen <i>et al.</i> (1999)	Jia <i>et al.</i> (2003)
Brandimarte	10	17.53	19.55	19.11
Dauzère-Péérès and Paulli	18	7.63	7.91	10.62
Barnes and Chambers	21	29.56	38.64	29.75
Hurink EData	43	6.00	5.59	9.01
Hurink RData	43	4.42	4.41	8.34
Hurink VData	43	2.04	2.59	3.24

Tabela 2.10: Melhores erros relativos obtidos por algoritmos genéticos clássicos executados cinco vezes em cada conjunto de instância do FJSP.

(a)

(b)

Figura 2.11: Representação gráfica do desempenho do método Beam Search, com diferentes escolhas de parâmetros α , β e ξ , quando comparados aos resultados obtidos pelo solver CPLEX executado com limite de tempo de 1 hora. (a) Instâncias YFJS01–YFJS20. (b) Instâncias DAFJS01–DAFJS30.

(a)

(b)

Figura 2.12: Representação gráfica do tempo de CPU em segundos requerido pelo método Beam Search, com diferentes escolhas de parâmetros α , β e ξ . (a) Instâncias YFJS01-YFJS20. (b) Instâncias DAFJS01-DAFJS30.

Capítulo 3

Flowshop Scheduling Problem com Tempos de Espera

O *Flowshop Scheduling Problem* (FSP) é um problema de produção onde n tarefas devem ser processadas em m máquinas. Cada tarefa é composta por m operações e todas as tarefas possuem uma mesma rota de processamento através das máquinas, quer dizer, a k -ésima operação de uma tarefa i qualquer sempre será processada pela k -ésima máquina do sistema com tempo de processamento p_{ik} , $k = 1, \dots, m$. Cada máquina pode processar as n tarefas em uma mesma ordem ou não. Os cenários onde obrigatoriamente as n tarefas devem ser processadas numa mesma ordem são chamados de *permutation flowshops* ou *flowshops* com permutação de sequência (Pinedo, 2008; Sakuraba *et al.*, 2009). Em linhas gerais, o problema consiste em definir instantes de início de processamento s_{ik} para cada tarefa i na máquina k , respeitando a rota de processamento, de forma a não sobrepor nenhum dos processamentos nas máquinas e visando a minimização de algum objetivo.

É importante ressaltar que a rota de uma tarefa é o caminho que ela precisa percorrer entre as máquinas de processamento para que ela seja finalizada.

Pinedo (2008) aponta que o FSP pode possuir ou não capacidade ilimitada de armazenamento entre as máquinas. Esta característica é comum em indústrias que lidam com pequenos produtos, como a indústria de circuitos ou indústria de drogas farmacêuticas. Além disso, quando a capacidade entre as máquinas não é ilimitada, esse armazenamento pode ficar cheio e causar bloqueio no processamento das tarefas.

Alguns dos possíveis objetivos para o FSP consistem na minimização da somatória dos termos de processamento de todas as tarefas, na minimização do término de processamento da última tarefa do sistema (também conhecido como *makespan*), na minimização dos atrasos nas entregas das tarefas do sistema ou ainda na minimização da somatória dos adiantamentos e dos atrasos. Problemas que consideram adiantamentos ou atrasos consistem em problemas em que cada tarefa i possui uma data de entrega d_i , $i = 1, \dots, n$, e assim, o adiantamento E_i desta tarefa é definido como $\max\{0, d_i - C_{im}\}$, onde C_{im} é o instante de término de processamento da tarefa i na última máquina m . De maneira similar, o atraso T_i é definido como $\max\{0, C_{im} - d_i\}$. Pinedo (2008) menciona que problemas com datas de entrega são mais difíceis de se obter soluções do que os problemas que consideram *makespan*. Hall e Posner (1991) mostraram que o FSP com minimização da somatória dos adiantamentos e dos atrasos em uma única máquina é NP-Difícil, mesmo que todas as tarefas possuam a mesma data de entrega. O trabalho de Wan e Yuan (2013) prova que na verdade o problema é fortemente NP-Difícil.

O FSP com tempos de espera (FSP-WT) deste trabalho é uma variante do FSP clássico, descrito nos parágrafos anteriores, que considera: (a) a minimização dos adiantamentos e dos atrasos; (b) data de entrega única para todas as tarefas; (c) capacidade ilimitada de armazenamento entre as máquinas; (d) permutação de sequência; (e) proibição na interrupção do processamento de uma tarefa; (f) os tempos entre o término do processamento de uma tarefa em uma máquina até o início de processamento na próxima máquina. O objetivo é escolher dentre as soluções que minimizam os adiantamentos e os atrasos aquela que gere o menor tempo de espera das tarefas entre as máquinas.

Fernandez-Viagas *et al.* (2016) classificam esse tipo de objetivo como um objetivo *Just in Time*.

Devido a complexidade do problema, somente alguns trabalhos com abordagens exatas (ou aproximadas) para o FSP com adiantamentos e atrasos podem ser encontrados na literatura. Nesta linha, Sarper (1995) propôs um MIP para o problema com duas máquinas e minimização do desvio médio absoluto das somatórias dos adiantamentos e atrasos. Nesse trabalho, Sarper (1995) só conseguiu encontrar resultados ótimos para instâncias com 5 e 6 tarefas. Moslehi *et al.* (2009) desenvolveram um algoritmo do tipo *Branch and Bound* para o FSP com duas máquinas e com minimização da somatória dos adiantamentos e atrasos. Moslehi *et al.* (2009) criaram um total de 380 instâncias, divididas em dois grupos de 220 e 160 respectivamente. No primeiro grupo, as instâncias possuíam data de entrega comum mais apertada enquanto no segundo grupo as instâncias possuíam data de entrega comum mais folgada. De acordo com os resultados obtidos por Moslehi *et al.* (2009), o algoritmo proposto conseguiu resolver problemas com até 1000 tarefas do primeiro grupo de instâncias mas somente com 20 tarefas no segundo grupo com tempo razoável. Chandra *et al.* (2009) fizeram uma análise sobre as diferentes datas de entrega para o FSP e afirmaram que datas de entrega muito apertadas transformam o problema de minimização dos adiantamentos e atrasos em um problema de minimização dos tempos de término de processamento das tarefas. Fernandez-Viagas *et al.* (2016) reforçaram essa afirmação e ainda mencionaram que datas de entrega muito apertadas geram funções objetivos opostas à datas de entrega folgadas.

Contudo, diversas abordagens heurísticas foram desenvolvidas para o FSP. Kanet (1981) desenvolveu uma heurística que encontra soluções ótimas para o FSP com uma única máquina e com adiantamentos e atrasos desde que a data de entrega seja maior que a somatória dos tempos de processamento das tarefas. Chandra *et al.* (2009) mostraram uma extensão natural deste resultado para o problema com m máquinas. Sakuraba *et al.* (2009) combinaram uma heurística NEH (Nawaz *et al.*, 1983) com uma busca tabu para construir um sequenciamento de tarefas no FSP com duas máquinas. Nesse trabalho, os instantes de início de processamento de cada operação era determinado por uma adaptação do algoritmo *timing* proposto em Hendel e Sourd (2007) para o problema com duas máquinas e data de entrega única. Sakuraba *et al.* (2009) analisaram ainda várias regras de despacho para servir como base para a heurística e concluíram que a regra do tipo *shortest processing time* (SPT) utilizando a somatória dos tempos de processamento obtinha melhores resultados quando comparada a outras 8 regras. Chandra *et al.* (2009) também propuseram uma busca tabu para o FSP com m máquinas. Nesse trabalho, três diferentes categorias de datas de entrega são consideradas: restritiva, muito restritiva e não restritiva. As datas muito restritivas fazem com que todas as tarefas do sistema fiquem atrasadas. As datas não restritivas não restringem o sequenciamento das tarefas. As datas restritivas são datas que ficam entre as datas muito restritivas e as não restritivas. Como solução inicial para a busca tabu, Chandra *et al.* (2009) propuseram uma heurística construtiva baseada em uma regra de despacho que considerava a máquina gargalo do sistema em conjunto com as datas de entrega para escolher a tarefa da sequência e determinar os instantes de início de processamento. Um total de 1200 instâncias foram geradas pelos autores e os resultados obtidos pelo método proposto comparados com as soluções ótimas obtidas nos casos onde a data de entrega era não restritiva ou no casos onde as instâncias eram de pequeno porte. No geral, a distância não foi mais do que 1.71% em relação aos ótimos. Fernandez-Viagas *et al.* (2016) propuseram uma heurística construtiva para o FSP com minimização da somatória dos adiantamentos e atrasos com datas de entrega diferentes. A heurística, a cada iteração, seleciona uma tarefa baseada em uma lista de prioridades dinâmica que considera os tempos ociosos, os instantes de término de processamento, os adiantamentos e os atrasos de cada tarefa. A heurística foi combinada com uma busca local iterativa e os resultados do método foram comparados com outras heurísticas que também utilizam lista de prioridade dinâmica.

Neste trabalho, o FSP com tempos de espera será abordado com a mesma metodologia utilizada no Capítulo 2. Inicialmente, um MIP para o FSP-WT é descrito na Seção 3.1. A Seção 3.2 propõe um método *list scheduling* que utiliza uma regra de seleção baseada no encaixe das tarefas nas janelas da programação. Além disso, a Seção 3.2 ainda descreve uma rotina para definir os instantes de início de processamento de uma dada sequência de tarefas. O método *Beam Search* é então definido

na Seção 3.3. Os resultados computacionais obtidos pelos métodos propostos são reportados e discutidos na Seção 3.4. Por último, a Seção 3.5 apresenta as conclusões deste capítulo.

3.1 Modelagem matemática

O FSP-WT é definido como segue. Sejam n tarefas para serem processadas em m máquinas. Todas as tarefas possuem uma mesma data de entrega d e devem passar em cada uma das máquinas numa mesma rota de processamento, quer dizer, toda tarefa i , $i = 1, \dots, n$, será processada pela k -ésima máquina, $k = 1, \dots, m$, com tempo de processamento p_{ik} , no seu k -ésimo estágio de processamento. Portanto, o problema se resume em definir instantes de início de processamento s_{ik} , ou equivalentemente definir instantes de término de processamento C_{ik} , para cada um dos estágios de todas as tarefas, garantindo que nenhum processamento se sobreponha e que a rota através das máquinas seja respeitada. Além disso, neste trabalho considera-se o problema com permutação de sequência, quer dizer, a sequência do processamento das tarefas deve ser a mesma em todas as máquinas. Uma vez iniciado o processamento de um estágio de uma tarefa, este processamento não pode ser interrompido e a capacidade de armazenamento entre as máquinas é infinita. O objetivo é a minimização dos adiantamentos $E_i = d - C_{i,m}$ e dos atrasos $T_i = C_{i,m} - d$. Em complemento, deseja-se escolher dentre as soluções que minimizam os adiantamentos e os atrasos, aquela que possui menor somatória dos tempos de espera entre os estágios de processamento. As equações (3.1)–(3.10) descrevem um MIP para o FSP-WT. As Tabelas 3.1 e 3.2 descrevem as variáveis e os parâmetros utilizados no MIP.

Variáveis	
E_i	Adiantamento da tarefa i .
T_i	Atraso da tarefa i .
C_{ik}	Instante de término de processamento da tarefa i na máquina k .
z_{ij}	1 se o <i>job</i> i precede o <i>job</i> j na sequência. 0 caso contrário.
W_{ik}	Tempo de espera da tarefa i entre a máquina k e $k + 1$.

Tabela 3.1: Variáveis do modelo matemático do FSP-WT.

Parâmetros	
d	Data de entrega das tarefas.
p_{ik}	Tempo de processamento da tarefa i na máquina k .
P	Soma dos tempos de processamento calculada como $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_{ik}$
M	Constante positiva suficientemente grande.

Tabela 3.2: Parâmetros do modelo matemático do FSP-WT.

$$\text{Minimize } n(d + P) \left(\sum_{i=1}^n (E_i + T_i) \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} W_{ik} \quad (3.1)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad T_i \geq C_{im} - d, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$E_i \geq d - C_{im}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$C_{i1} \geq p_{i1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

$$C_{i,k+1} = p_{i,k+1} + C_{ik} + W_{ik}, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m-1, \quad (3.5)$$

$$C_{ik} \geq p_{ik} + C_{jk} - Mz_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; j = i+1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \quad (3.6)$$

$$C_{jk} \geq p_{jk} + C_{ik} - M(1 - z_{ij}), \quad i = 1, \dots, n; j = i+1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n; j = i+1, \dots, n, \quad (3.8)$$

$$T_i, E_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

$$W_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m-1. \quad (3.10)$$

A função objetivo (3.1) relaciona a soma dos adiantamentos e dos atrasos com os tempos de espera das tarefas entre as máquinas. Nela, a constante $n(d + P)$ é um limitante superior da soma dos tempos de espera para o conjunto de soluções que minimizam a soma dos adiantamentos e dos atrasos. A constante garante que o modelo nos leve à soluções que minimizam o tempo de espera das tarefas entre as máquinas ($\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} W_{ik}$) dentre aquelas que minimizam os adiantamentos e atrasos ($\sum_{i=1}^n (E_i + T_i)$). As restrições (3.2) e (3.3) calculam os adiantamentos e os atrasos para cada tarefa. A restrição (3.4) garante que o primeiro estágio de processamento de cada tarefa seja processado por pelo menos o seu tempo de processamento. A restrição (3.5) relaciona os tempos de espera de cada tarefa com os instantes de término de processamento e os tempos de processamento. Finalmente, as restrições (3.6) e (3.7) garantem que as tarefas sejam processadas pelas máquinas na ordem estabelecida pela variável binária z e que os processamentos não se sobreponham.

Para entender o limitante superior $n(d + P)$, primeiramente considere a restrição (3.5). Com ela, é fácil ver que o tempo de espera de uma tarefa i entre a máquina k e a máquina $k+1$ é dado por $W_{ik} = C_{i,k+1} - C_{ik} - p_{ik}$. Com isso, a soma dos tempos de espera do sistema pode ser escrita como $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} C_{i,j+1} - C_{ij} - p_{ij}$ ou de forma equivalente como

$$\sum_{i=1}^n (C_{im} - C_{i1}) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^m p_{ik}.$$

Uma vez que $\sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^m p_{ik}$ é uma constante, minimizar a soma dos tempos de espera é o mesmo que minimizar

$$\sum_{i=1}^n (C_{im} - C_{i1}).$$

Assumindo que os dados do problema, quer dizer, os tempos de processamento p_{ik} e a data de entrega d , são valores inteiros, então toda solução ótima para o problema de somente minimizar os adiantamentos e atrasos é tal que E_i e T_i também são valores inteiros e portanto a soma $\sum_{i=1}^n (E_i + T_i)$ também é um valor inteiro. Assim, dado qualquer solução ótima do problema de somente minimizar os adiantamentos e atrasos, é verdade que

$$\sum_{i=1}^n C_{im} < n(d + P), \quad (3.11)$$

Demonstração. Considere uma solução viável para o problema de minimização dos adiantamentos

e atrasos E_i e T_i tal que as tarefas são processadas na mesma ordenação de seus índices. A tarefa 1 inicia processamento no instante d e possui tempo de término de processamento $C_{1m} = d + \sum_{k=1}^m p_{1k}$ e para as demais tarefas $i = 2, \dots, n$, a tarefa i inicia processamento no instante $C_{i-1,m}$ e possui tempo de término de processamento no instante $C_{im} = C_{i-1,m} + \sum_{k=1}^m p_{ik}$. Nesta solução viável, $\sum_{i=1}^n C_{im} = nd + \sum_{i=1}^n ((n-i+1) \sum_{k=1}^m p_{ik}) < nd + n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_{ik} = n(d+P)$. $\square$

Portanto, de (3.11) temos

$$\sum_{i=1}^n (C_{im} - C_{i1}) \leq \sum_{i=1}^n C_{im} < n(d+P),$$

ou, equivalentemente

$$\frac{\sum_{i=1}^n (C_{im} - C_{i1})}{n(d+P)} < 1. \quad (3.12)$$

Assim, somar a fração do lado esquerdo de (3.12) na função objetivo do problema de somente minimizar a soma dos adiantamentos e atrasos é inócuo. Além disso, a minimização da função objetivo que combina a soma dos adiantamentos e atrasos e o lado esquerdo de (3.12) tem o efeito de dentre as soluções que minimizam os adiantamentos e os atrasos escolher aquela com menor soma dos tempos de espera.

3.2 Algoritmo List Scheduling

O algoritmo *list scheduling* (LS) para o FSP-WT deste trabalho consiste em um algoritmo heurístico que constrói a sequência em que as tarefas devem ser programadas nas máquinas baseado em uma lista dinâmica de prioridades. Em palavras, a filosofia do algoritmo é a de priorizar as tarefas que preenchem da melhor maneira possível as janelas deixadas pela programação das tarefas anteriores.

Para entender o significado de “janela”, suponha um cenário com $n = 3$ tarefas e $m = 2$ máquinas. Os tempos de processamento são dados de acordo com a Tabela 3.3. A Figura 3.1 ilustra a janela entre as máquinas M_1 e M_2 provocada pela programação da tarefa J_1 .

Tarefas	Máquinas	
	M_1	M_2
J_1	5	5
J_2	2	2
J_3	3	2

Tabela 3.3: Tempos de processamento para um problema com $n = 3$ tarefas e $m = 2$ máquinas.

Figura 3.1: Programação da tarefa J_1 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa a janela provocada pela programação.

A filosofia do LS proposto vai de encontro com as características do problema, visto que os tempos de espera das tarefas entre as máquinas estão diretamente relacionados com as janelas

provocadas pela programação da sequência. Nesta linha, em uma programação ideal, todas as janelas seriam totalmente preenchidas e não haveriam tempos de espera. As Figuras 3.2 e 3.3 ilustram respectivamente a programação das tarefas J_2 e J_3 após J_1 para o exemplo descrito na Tabela 3.3. Nas figuras, a parte hachurada é a porção não preenchida da janela de J_1 . Comparando as programações, note que escolher a tarefa J_3 ao invés da tarefa J_2 como a próxima tarefa da sequência produz uma programação que preenche melhor a janela e também com menores tempos de espera, quer dizer, J_3 se “encaixa” melhor do que J_2 . Suponha que então a tarefa J_3 seja escolhida para seguir a tarefa J_1 na programação. A Figura 3.4 mostra a janela atualizada, dada a programação da sequência J_1, J_3 .

Figura 3.2: Programação das tarefas J_1 e J_2 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa o restante da janela de J_1 .

Figura 3.3: Programação das tarefas J_1 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa o restante da janela de J_1 .

Figura 3.4: Programação das tarefas J_1 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa o restante da janela de J_1 .

A Figura 3.5 ilustra a programação de J_2 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. É possível ver na figura que na máquina M_1 , a janela de J_2 é preenchida com sobra por J_3 . Em um cenário onde a data de entrega fosse maior que 4 para este problema, essa sobra seria indesejada visto que ela provocaria tempo de espera entre as máquinas para J_2 .

Duas programações ótimas possíveis para a soma dos adiantamentos e dos atrasos considerando o problema da Tabela 3.3 e data de entrega comum $d = 10$ são ilustradas pela Figura 3.6. Nas programações, a soma dos adiantamentos e dos atrasos valem $\sum_{i=1}^n E_i + T_i = 0+0+0+0+2+4 = 6$. Para a primeira programação (programação de cima), as somas dos tempos de espera entre as

Figura 3.5: Programação das tarefas J_2 e J_3 nas máquinas M_1 e M_2 de acordo com o problema descrito na Tabela 3.3. A parte hachurada representa a janela de J_2 .

máquinas valem $\sum_{k=1}^{m-1} W_{ik} = 0 + 3 + 2 = 5$. Na segunda programação (programação de baixo), a soma dos tempos de espera entre as máquinas valem $\sum_{k=1}^{m-1} W_{ik} = 0 + 1 + 0 = 1$. Note que é possível chegar na segunda programação se simplesmente as tarefas J_2 e J_3 forem empurradas dois instantes de tempo na primeira máquina.

Figura 3.6: Duas programações possíveis considerando o cenário descrito na Tabela 3.3 e data de entrega comum $d = 10$. A programação de baixo é o resultado de empurrar as tarefas J_2 e J_3 dois instantes de tempo na programação de cima. Este processo mantém as somas dos adiantamentos e dos atrasos mas diminui a soma dos tempos de espera.

O Algoritmo 6 descreve o LS proposto nesta seção. Nas linhas 2–5, o algoritmo calcula a somatória dos tempos de processamentos das tarefas e escolhe a tarefa com menor somatória para ser a primeira tarefa da sequência. As linhas 6–9 faz a programação da então sequência parcial com uma única tarefa, escolhendo os menores instantes de terminos de processamento possíveis. As linhas 10–23 descrevem o laço principal do método. A cada iteração, o método calcula as janelas da programação (linha 11) e para cada tarefa ainda não escolhida, calcula os encaixes nas janelas (linha 15). Para escolher a próxima tarefa a fazer parte da sequência, o LS utiliza uma estimativa que considera os encaixes e a somatória dos tempos de processamento de cada tarefa candidata e depois seleciona aquela com menor estimativa e caso haja empates, o algoritmo utiliza o menor índice das tarefas como critério de desempate (linhas 17–18). Uma vez que a escolha é feita, a sequência e a programação são então atualizadas (linhas 18–22). O método escolhe uma tarefa para o sequenciamento por iteração. No final das iterações do laço principal, todas as n tarefas estarão no sequenciamento.

É importante dizer que o LS descrito pelo Algoritmo 6 apenas calcula uma sequência e a programação utilizada no processo é descartada. A programação final é calculada por uma versão estendida para m máquinas do algoritmo *timing* apresentado em Sakuraba *et al.* (2009). O algoritmo *timing* foi inicialmente proposto por Hendel e Sourd (2007) para um problema de minimização dos adiantamentos e atrasos com máquina única e datas de liberação. Datas de liberação significam que as tarefas só podem iniciar processamento na máquina após um determinado instante de tempo r_i , $i = 1, \dots, n$. O algoritmo retorna a programação ótima para qualquer sequência dada conside-

Pseudo-código 6: Descrição detalhada do algoritmo Fits.

Input: n, m, d, p_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$).
Output: $f, w, st[i, k], \sigma[i]$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
 FITS(n, m, d, p)

```

1 begin
2    $sp[i] \leftarrow \sum_{k=1}^m p_{ik}, i = 1, \dots, n$ 
3    $\delta \leftarrow \arg \min_{i=1}^n \{sp[i]\}$ 
4    $\sigma[i] \leftarrow i, i = 1, \dots, n$ 
5    $\sigma[1] \leftarrow \delta, \sigma[\delta] \leftarrow 1$ 
6    $c[1 : n, 1 : m] \leftarrow -1$ 
7    $v \leftarrow 0$ 
8   for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
9      $c[\delta, k] \leftarrow v + p_{\delta, k}, v \leftarrow v + p_{\delta, k}$ 
10    for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
11       $b[k] \leftarrow c[\delta, k+1] - c[\delta, k], k = 1, \dots, m-1$ 
12       $\lambda \leftarrow -1, minFit \leftarrow \infty, iPos \leftarrow -1$ 
13      for  $l \leftarrow i$  to  $n$  do
14         $j \leftarrow \sigma[l]$ 
15         $fit[j] \leftarrow \sum_{k=1}^{m-1} |b[k] - p_{j, k}|$ 
16        if  $fit[j] + sp[j] < minFit$  OR  $(fit[j] + sp[j] = minFit \text{ AND } j < \lambda)$  then
17           $\lambda \leftarrow j, iPos \leftarrow l, minFit \leftarrow fit[j] + sp[j]$ 
18         $o \leftarrow \sigma[i], \sigma[i] \leftarrow \lambda, \sigma[iPos] \leftarrow o$ 
19         $v \leftarrow 0$ 
20        for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
21           $c[\lambda, k] \leftarrow \max\{v, c[\delta, k]\} + p_{\lambda, k}$ 
22           $v \leftarrow c[\lambda, k]$ 
23         $\delta \leftarrow \lambda$ 
24     $f, w, st \leftarrow STARTTIMES(n, n, m, d, \sigma, p)$ 
25    return  $f, w, st, \sigma$ 
26 end

```

rando o problema de minimizar as somas dos adiantamentos e dos atrasos (Hendel e Sourd, 2007; Sakuraba *et al.*, 2009). Sakuraba *et al.* (2009) estenderam o algoritmo para o problema com 2 máquinas programando o mais cedo possível as tarefas na primeira máquina e utilizando os instantes de término de processamento na primeira como datas de liberação para a segunda máquina e então aplicando o algoritmo de *timing* original. Neste trabalho, dado uma sequência qualquer, o cálculo da programação é feito por uma extensão natural da ideia de Sakuraba *et al.* (2009) para m máquinas onde a programação nas $m-1$ primeiras máquinas é feita o mais cedo possível e depois o algoritmo *timing* calcula a programação ótima para a máquina m utilizando os instantes de término de processamento na máquina $m-1$ como instantes de liberação. O pseudocódigo para esta extensão é descrito pelo Algoritmo 7. O algoritmo recebe os parâmetros $\lambda, n, m, d, \sigma, p$ como entrada onde λ é a quantidade de tarefas na sequência σ , n, m e d são o número de tarefas, número de máquinas e data de entrega com um respectivamente. σ é a sequência de tarefas e p é a matriz de tempos de processamento. No pseudocódigo, as linhas 2–10 calculam os menores instantes de início de processamento para as tarefas em σ nas $m-1$ primeiras máquinas. O algoritmo TIMING calcula então os instantes de início de processamento para a máquina m na linha 11. As linhas 12–17 empurram as tarefas nas $m-1$ primeiras máquinas, como no exemplo da Figura 3.6. A soma dos tempos de espera é então calculada nas linhas 18–21. Por fim, a soma dos adiantamentos e dos atrasos para cada tarefa é calculada nas linhas 22–24.

Portanto, dado uma sequência de tarefas qualquer, o algoritmo STARTTIMES (Algoritmo 7) calcula os inícios de processamento ótimos na última máquina para o problema de minimização dos adiantamentos e dos atrasos e empurra a programação nas $m-1$ primeiras máquinas para possivelmente reduzir os tempos de espera. Contudo, este processo não é ótimo para o FSP-WT. Esta afirmação é demonstrada na Figura 3.7. A figura apresenta três programações ótimas para

Pseudo-código 7: Descrição detalhada do algoritmo StartTimes.

Input: λ, n, m, d, p_{ik} ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$), $\sigma[i]$ ($i = 1, \dots, n$).
Output: $f, w, st[i, k]$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
 STARTTIMES($\lambda, n, m, d, \sigma, p$)

```

1 begin
2    $u[1 : n] \leftarrow 0$ 
3    $st[1 : n, 1 : m] \leftarrow 0$ 
4   for  $k \leftarrow 1$  to  $m - 1$  do
5      $v \leftarrow 0$ 
6     for  $j \leftarrow 1$  to  $\lambda$  do
7        $i \leftarrow \sigma[j]$ 
8        $st[i, k] \leftarrow \max\{v, u[i]\}$ 
9        $v \leftarrow st[i, k] + p_{i,k}$ 
10       $u[i] \leftarrow st[i, k] + p_{i,k}$ 
11    $st[1 : n, m] \leftarrow \text{TIMING}(\lambda, n, m, d, \sigma, p, st)$ 
12   for  $k = m - 1$  to  $1$  with step  $-1$  do
13     for  $i \leftarrow \lambda$  to  $1$  with step  $-1$  do
14       if  $i = \lambda$  then
15          $st[\sigma[i], k] \leftarrow st[\sigma[i], k + 1] - p_{\sigma[i],k}$ 
16       else
17          $st[\sigma[i], k] \leftarrow \min\{st[\sigma[i + 1], k], st[\sigma[i], k + 1]\} - p_{\sigma[i],k}$ 
18    $w \leftarrow 0$ 
19   for  $i \leftarrow 1$  to  $\lambda$  do
20     for  $k \leftarrow 1$  to  $m - 1$  do
21        $w \leftarrow w + st[\sigma[i], k + 1] - st[\sigma[i], k] + p_{\sigma[i],k}$ 
22    $f \leftarrow 0$ 
23   for  $i \leftarrow 1$  to  $\lambda$  do
24      $f \leftarrow f + \max\{0, d - st[\sigma[i], m] + p_{\sigma[i],m}\} + \max\{0, st[\sigma[i], m] + p_{\sigma[i],m} - d\}$ 
25   return  $f, w, st$ 
26 end

```

a soma dos adiantamentos e atrasos para o problema descrito na Tabela 3.4 com data de entrega comum $d = 7$. A programação (a) é o resultado da chamada do Algoritmo 7 com a sequência J_1, J_2, J_3 sem o processo de empurrar (linhas 12–14) e possui soma dos adiantamentos e atrasos igual a 4 e soma dos tempos de espera igual a 2. A programação (b) é o resultado da chamada com o processo de empurrar e possui soma dos adiantamentos e atrasos e soma dos tempos de espera também iguais a 4 e 2 respectivamente. A programação (c) é a programação ótima para o cenário descrito considerando o FPS-WT e possui soma dos adiantamentos e atrasos igual a 4 mas soma dos tempos de espera igual a 0.

Contudo, diferentes sequências podem gerar diferentes programações com o mesmo valor de soma de adiantamentos e atrasos mas diferentes valores para os tempos de espera. A Figura 3.8 ilustra isso com três programações para o cenário descrito pela Tabela 3.5 com data de entrega comum $d = 7$. Na figura, a programação (a) é a programação da sequência J_1, J_3, J_2 com os instantes de início de processamento calculados pelo Algoritmo 7 sem o processo de empurrar. Em (a), a soma dos adiantamentos e atrasos é igual a 2 e a soma dos tempos de espera é igual a 3. A programação (b) é a programação da sequência J_1, J_3, J_2 com os instantes de início de processamento calculados pelo Algoritmo 7 com o processo de empurrar. Em (b), a soma dos adiantamentos e atrasos é igual a 2 e a soma dos tempos de espera é igual a 1. A programação (c) é a programação da sequência J_1, J_2, J_3 com os instantes de início de processamento calculados pelo Algoritmo 7 com o processo de empurrar. Em (c), a soma dos adiantamentos e atrasos é igual a 2 e a soma dos tempos de espera é igual a 0.

Pseudo-código 8: Descrição detalhada do Timing.

Input: $\lambda, n, m, d, \sigma[i]$ ($i = 1, \dots, n$), $p_{ik}, st[i, k]$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: $st[i, m]$ ($i = 1, \dots, n$).
TIMING($\lambda, n, m, d, \sigma, p, st.$)

```

1 begin
2    $S, C \leftarrow d$ 
3    $\alpha, \beta, \delta, h \leftarrow 0$ 
4    $j \leftarrow 1$ 
5    $i \leftarrow \sigma[1]$ 
6   while  $j < \lambda$  and  $\delta > 0$  and  $st[i, m-1] < C$  do
7      $i \leftarrow \sigma[j]$ 
8      $C \leftarrow C + p_{i, m-1}$ 
9      $\beta \leftarrow \beta + 1$ 
10     $\delta \leftarrow \min\{\delta, C - p_{i, m-1} - st[i, m-1]\}$ 
11    while  $\delta > 0$  and  $\beta > \alpha$  do
12      if  $\delta \geq p_{\sigma[h], m-1}$  then
13         $\alpha \leftarrow \alpha + 1$ 
14         $\beta \leftarrow \beta - 1$ 
15         $S \leftarrow S - p_{\sigma[h], m-1}$ 
16         $C \leftarrow C - p_{\sigma[h], m-1}$ 
17         $\delta \leftarrow \delta - p_{\sigma[h], m-1}$ 
18         $h \leftarrow h + 1$ 
19      else
20         $S \leftarrow S - \delta$ 
21         $C \leftarrow C - \delta$ 
22         $\delta \leftarrow 0$ 
23       $j \leftarrow j + 1$ 
24     $v \leftarrow S$ 
25    for  $i \leftarrow 1$  to  $\delta$  do
26       $st[\sigma[i], m] \leftarrow \max\{v, st[\sigma[i], m-1]\}$ 
27       $v \leftarrow st[\sigma[i], m] + p_{\sigma[i], k}$ 
28    return  $st[1 : n, m]$ 
29 end

```

Tarefas	Máquinas		
	M_1	M_2	M_3
J_1	1	2	3
J_2	3	2	1
J_3	3	1	2

Tabela 3.4: Tempos de processamento para um problema com $n = 3$ tarefas e $m = 3$ máquinas.

Tarefas	Máquinas		
	M_1	M_2	M_3
J_1	1	2	3
J_2	2	1	1
J_3	1	2	1

Tabela 3.5: Tempos de processamento para um problema com $n = 3$ tarefas e $m = 3$ máquinas.

Figura 3.7: Três programações possíveis para a sequência de tarefas J_1, J_2, J_3 considerando o cenário descrito na Tabela 3.4 e data de entrega comum $d = 7$. A programação (a) é o resultado da chamada do Algoritmo 7 sem o processo de empurrar. A programação (b) é o resultado da chamada com o processo de empurrar. A programação (c) é a programação ótima para o FSP-WT.

3.3 Método Beam Search

O método *Beam Search* (BS) para o FSP-WT neste trabalho foi desenvolvido utilizando a mesma metodologia do método BS para o FJSP-SF do Capítulo 2. Assim, como no capítulo anterior, ele também é uma extensão natural do LS apresentado na Seção 3.2 que explora várias tarefas a cada iteração ao invés de somente uma.

Nesta linha, o método BS aqui descrito realiza podas na árvore de busca utilizando dois mecanismos heurísticos: a busca local e a busca global. A busca local consiste em uma avaliação rápida e local dos nós da árvore de busca, enquanto a busca global é uma avaliação mais profunda e consequentemente, mais demorada. A busca local tem o papel de filtrar as possibilidades e escolher quais os α nós da árvore valem a pena serem explorados pela busca global. A busca global determina quais os β nós da árvore vão permanecer para a próxima iteração do método. Uma vez que o método utiliza o mecanismo de filtro de soluções, ele também é conhecido como *filtered Beam Search*.

Portanto, são três os principais processos do *filtered BS*: a expansão dos níveis, a busca local e a busca global. As Figuras 3.9 e 3.10 ilustram o funcionamento destes três processos na expansão do nível 1 para o nível 2 utilizando $\alpha = \beta = 2$. A Figura 3.9 mostra todos os possíveis nós de cada pai, ou seja, a expansão do nível. Na Figura 3.10 a busca local do método é aplicada, avaliando os filhos do primeiro pai em 5, 8 e 3 respectivamente e os filhos do segundo pai em 1, 9 e 6 respectivamente. Os filhos hachurados são os nós escolhidos pela busca local para serem avaliados pela busca global. Note que somente 2 dos 3 filhos de cada pai foram escolhidos. Por fim, na Figura 3.11 a busca global

Figura 3.8: Três programações ótimas para a soma dos adiantamentos e atrasos considerando o cenário descrito na Tabela 3.5 e data de entrega comum $d = 7$ mas com diferentes soma dos tempos de espera. A programação (a) é o resultado da programação da sequência J_1, J_3, J_2 utilizando o Algoritmo 7 sem o processo de empurrar. A programação (b) é o resultado da programação da sequência J_1, J_3, J_2 utilizando o Algoritmo 7 com o processo de empurrar. A programação (c) é o resultado da programação da sequência J_1, J_2, J_3 utilizando o Algoritmo 7 com o processo de empurrar. (c) é ótimo para o FSP-WT.

avalia os filhos em 1, 2, 1 e 3 respectivamente e seleciona somente os dois melhores candidatos para a próxima iteração do método.

Cada nó na árvore do BS proposto representa uma solução parcial para o FSP-WT. Além disso, um nó do nível ℓ da árvore já possui ℓ tarefas escolhidas no sequenciamento que ele representa. Portanto, cada nó é formado pela tupla $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)$ onde

- i A última tarefa que foi adicionada na sequência parcial que o nó representa.
- λ Quantidade de tarefas já escolhidas para o sequenciamento ou equivalentemente, o nível que o nó pertence.
- f Valor da soma dos adiantamentos e dos atrasos do sequenciamento representado pelo nó e calculado com o uso do Algoritmo 7.
- w Valor da soma dos tempos de espera do sequenciamento representado pelo nó e calculado com o uso do Algoritmo 7.
- σ Vetor de inteiros de tamanho n com as λ primeiras posições preenchidas com valores entre $[1, n]$ que guarda o sequenciamento das tarefas representado pelo nó.

Figura 3.9: Esquema da expansão do nível 1 para o nível 2 na árvore de busca do BS. Cada nó pai possui três filhos candidatos para a expansão.

Figura 3.10: Aplicação da busca local com $\alpha = 2$ no esquema ilustrado pela Figura 3.9. Cada nó pai possui três filhos candidatos para a expansão. Os filhos candidatos são avaliados pela busca local e somente os dois melhores (nós hachurados) são escolhidos para serem avaliados pela busca global.

ϕ vetor binário de tamanho n que para cada posição j do vetor, com $j = 1, \dots, n$, $\phi[j] = \text{true}$ caso a tarefa j já tenha sido escolhida para o sequenciamento e está em alguma posição de σ ou $\phi = \text{false}$ caso contrário.

Neste trabalho, a busca local proposta para o BS recebe um nó $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)$ e avalia as tarefas candidatas, de acordo com os critérios de seleção de tarefas do LS da seção anterior que se baseia na janela da programação do sequenciamento parcial, no encaixe das tarefas candidatas e nas somas dos tempos de processamento. A busca global recebe um nó $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)$ completa o sequenciamento parcial primeiramente com a tarefa candidata e em seguida utilizando o LS da seção anterior e avalia a sequência completa utilizando a soma dos adiantamentos, dos atrasos e dos tempos de espera são calculados pelo Algoritmo 7.

O Algoritmo 9 apresenta o pseudocódigo do BS para o FSP-WT. O pseudocódigo recebe $\eta, \kappa, \alpha, \beta, n, m, d$ e p como parâmetros sendo η e κ parâmetros que influenciam a expansão dos primeiros níveis, que será discutida mais tarde, α e β representam parâmetros da busca local e da busca global, respectivamente. n, m, d e p são a quantidade de tarefas, a quantidade de máquinas, a data de entrega comum e o tempo de processamento de cada tarefa em cada máquina. A quantidade de nós que serão mantidos e explorados a cada nível da árvore é calculada na linha 2. A quantidade de nós candidatos que serão escolhidos pela busca local para serem avaliados pela busca local é

Figura 3.11: Aplicação da busca global com $\beta = 2$ no esquema ilustrado pela Figura 3.10. Cada nó pai possui três filhos candidatos para a expansão. Os filhos candidatos escolhidos pela busca local são avaliados pela busca global e somente os dois melhores (nós coloridos) são mantidos na árvore para a próxima iteração do método.

calculada na linha 3. Note que ambos os valores são calculados em função da quantidade de tarefas n . No presente trabalho, adota-se que $\alpha, \beta \in (0, 1]$. A linha 4 realiza a expansão dos primeiros η níveis da árvore, quer dizer, após a execução da linha 4, a árvore possuirá β nós que representam um sequenciamento parcial com η tarefas já escolhidas. A expansão dos primeiros níveis, como discutido no Capítulo 2, é extremamente importante para o sucesso do método. Em linhas gerais, nos primeiros níveis da árvore, o método aplica a busca global em todos os nós candidatos e mantém κ candidatos para o próximo nível. Ao atingir o η -ésimo nível, o método seleciona os β melhores nós, de acordo com a busca global, e entra no laço principal da linha 5. O laço principal itera por $n - \eta$ vezes e para cada nó da árvore, a cada iteração, escolhe uma nova tarefa para fazer parte do seu sequenciamento. A variável $\mathcal{N}$ da linha 4, é um conjunto que guarda os nós ativos da árvore. No laço principal, a linha 6 faz a expansão de cada nó em $\mathcal{N}$ e aplica a busca local em cada um dos candidatos escolhendo somente α para serem avaliados pela busca global. $\mathcal{B}$ é um conjunto de $\mathcal{N}$'s e cada $\mathcal{N} \in \mathcal{B}$ possui α tuplas do tipo $(i, \ell, \lambda, f, w, \sigma, \phi)$ que representam os nós candidatos oriundos da expansão do nível ℓ e da seleção da busca local. A linha 7 aplica a busca global em todos os nós em $\mathcal{B}$ e seleciona os β melhores nós para continuarem a serem explorados. Após o laço principal, nas linhas 8–12, o método então retorna a melhor solução com n tarefas sequenciadas em $\mathcal{N}$.

O Algoritmo 10 descreve a expansão dos η primeiros níveis da árvore. Nestes níveis, para cada nó ativo, todas as possibilidades de expansão são considerados. Isso significa que todas as tarefas ainda não sequenciadas pelo nó serão avaliadas pela busca global. Inicialmente, as sequências parciais não possuem nenhuma tarefa. A primeira tarefa é escolhida baseada na regra *SPT* com soma dos tempos de processamento descrita em Sakuraba *et al.* (2009). O método LS da seção anterior também seleciona a primeira tarefa da sequência utilizando este critério. Contudo, o BS considera as $\min\{n, \kappa\}$ tarefas seguindo este critério. Para isso, a linha 2 calcula a somatória dos tempos de processamento para cada tarefa. A linha 3 cria um vetor de pares $(i, sp[i])$ onde i é o índice de uma tarefa e $sp[i]$ é a somatória dos tempos de processamento da tarefa i . O vetor é então ordenado de acordo com os tempos de processamento do par e em caso de empates, de acordo com o menor índice da tarefa. O laço da linha 4 cria sequências com uma única tarefa, baseado na ordenação das tarefas pelos tempos de processamento, e completa esta sequência utilizando a rotina *COMPLETEWITHFITS*. Essa rotina será descrita mais tarde neste texto, mas em palavras ela recebe uma sequência parcial qualquer, completa essa sequência utilizando os mesmos critérios do LS apresentado na seção anterior e então calcula os tempos de início de processamento para a sequência utilizando o Algoritmo 7. O laço então na linha 10 cria um conjunto $\mathcal{N}$ de tuplas $(1, f, w, \sigma, \phi)$ com sequências parciais de somente

Pseudo-código 9: Descrição detalhada do BeamSearch.

Input: $\alpha, \beta, \eta, \kappa, n, m, d, p_{ik}$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: $\sigma^*[i]$ ($i = 1, \dots, n$), f^*, w^* .
 BEAMSEARCH($\alpha, \beta, \eta, \kappa, n, m, d, p$)

```

1 begin
2    $\ddot{\beta} \leftarrow \max\{1, \lfloor \beta n \rfloor\}$ 
3    $\ddot{\alpha} \leftarrow \max\{1, \lfloor \alpha n \rfloor\}$ 
4    $\mathcal{N} \leftarrow \text{EXPANDASFIRSTLVLS}(\eta, \kappa, \ddot{\beta}, n, m, d, p)$ 
5   for  $\ell \leftarrow \eta + 1$  to  $n$  do
6      $\mathcal{B} \leftarrow \text{EXPANDLVLANDLOCALSEARCH}(\ddot{\alpha}, n, m, d, \mathcal{N}, p)$ 
7      $\mathcal{N} \leftarrow \text{GLOBALSEARCH}(\ddot{\beta}, n, m, d, \mathcal{B}, p)$ 
8      $f^*, w^*, i^* \leftarrow \infty$ 
9     foreach  $(i', \lambda', f', w', \sigma', \phi') \in \mathcal{N}$  do
10      if  $f' < f^*$  OR  $(f' = f^* \text{ AND } w' < w^*)$  OR  $(f' = f^* \text{ AND } w' = w^* \text{ AND } i' < i^*)$  then
11         $(\sigma^*, f^*, w^*) \leftarrow (\sigma', f', w')$ 
12   return  $\sigma^*, f^*, w^*$ 
13 end
```

uma tarefa e valores f e w estimados pela rotina COMPLETEWITHFITS. O conjunto $\mathcal{N}$ é então ordenado na linha 11 de acordo com os valores estimados da soma dos adiantamentos e atrasos f_i . Em caso de empates, a soma dos atrasos w_i é utilizada como desempate e como último critério de desempate, o índice da última tarefa sequenciada j_i . O laço das linhas 12–26 itera $\eta - 1$ vezes e a cada iteração, para cada nó em $\mathcal{N}$, gera todas as possibilidades de sequenciamento considerando todas as tarefas ainda não programadas (linhas 14–19), avalia as possibilidades (linha 20) e as armazena em $\mathcal{N}'$. É importante perceber que os nós armazenados em $\mathcal{N}'$ possuem uma tarefa a mais na sequência quando comparados com os nós de $\mathcal{N}$ neste ponto. Na linha 22 o conjunto $\mathcal{N}'$ é ordenado de acordo com os valores de f_i , w_i e j_i . Uma vez ordenado, os primeiros κ nós de $\mathcal{N}'$ são escolhidos para permanecerem na árvore e são adicionados em um novo $\mathcal{N}$. Após todas as iterações do laço da linha 12, $\mathcal{N}$ terá até κ nós com η operações sequenciadas. O laço da linha 27 constrói então um conjunto $\hat{\mathcal{N}}$ com os β melhores nós de $\mathcal{N}$ para ser o retorno do método.

o Algoritmo 11 descreve a rotina que completa uma solução parcial utilizando os critérios dos LS da seção anterior e em seguida calcula os inícios de processamento, a soma dos adiantamentos e atrasos e a soma dos tempos de espera entre as máquinas para a sequência obtida. A rotina recebe $\lambda, n, m, d, \sigma, \phi$ e p como parâmetros. Nas linhas 2–10 as λ tarefas da sequência parcial σ são programadas o mais cedo possível, quer dizer, instantes de tempo de término de processamento c são calculados como os mais cedo possível para a sequência. As linhas 11 e 12 fazem uma cópia da sequência parcial σ e do vetor ϕ . O laço das linhas 13–21 então completa a sequência parcial escolhendo sempre a melhor tarefa possível com o auxílio da rotina ONEROUNDFITS. A cada iteração do laço, a rotina ONEROUNDFITS recebe a solução parcial atual σ' e devolve a melhor tarefa i que satisfaça os mesmos critérios de seleção do LS da seção anterior tal que $\phi'[i] = \text{false}$. Nas linhas 15 e 16 a tarefa i é adicionada à sequência σ' e marcada como já sequenciada. Instantes de término de processamento para a tarefa i são então definidos no laço das linhas 19–21. Este laço itera $n - \lambda$ vezes e uma vez que em cada iteração adiciona uma tarefa à sequência de tamanho λ , no final σ' terá todas as tarefas adicionadas à sequência. Por fim, a linha 22 utiliza o Algoritmo 7 para calcular valores para a soma dos adiantamentos e dos atrasos f , para a soma dos tempos de espera w e para os instantes de início de processamento st para a sequência σ' .

O Algoritmo 12 descreve a rotina ONEROUNDFITS. A rotina recebe um sequenciamento parcial σ com λ tarefas e o vetor ϕ que indica quais tarefas já foram sequenciadas. Além disso, a rotina também recebe os instantes de término de processamento c de todas as tarefas que já estão em σ . A somatória dos tempos de processamento das tarefas é calculada na linha 2. Uma cópia σ' de tamanho λ do sequenciamento parcial σ é feita na linha 3. O laço das linhas 5–8 completa σ' a partir da posição $\lambda + 1$ até a posição n com as tarefas candidatas em ordem crescente, quer dizer,

Pseudo-código 10: Descrição detalhada da expansão dos primeiros níveis.

Input: $\eta, \kappa, \beta, n, m, d, p_{ik}$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: $\hat{\mathcal{N}}$.
EXPANDASFIRSTLVLS($\eta, \kappa, \beta, n, m, d, p$)

```

1 begin
2    $sp[i] \leftarrow \sum_{k=1}^m p_{ik}, i = 1, \dots, n$ 
3    $\mathcal{SP}[j] \leftarrow (i_j, sp[i_j]), \text{ such that } sp[i_j] < sp[i_{j+1}] \text{ OR } sp[i_j] = sp[i_{j+1}] \text{ implies } i_j < i_{j+1}, j = 1, \dots, n$ 
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $\min\{n, \kappa\}$  do
5      $(i, sum) \leftarrow \mathcal{SP}[j]$ 
6      $\sigma[1] \leftarrow i$ 
7      $\phi[1 : n] \leftarrow false$ 
8      $\phi[i] \leftarrow true$ 
9      $st, f, w \leftarrow \text{COMPLETEWITHFITS}(1, n, m, d, \sigma, \phi, p)$ 
10     $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup (i, 1, f, w, \sigma, \phi)$ 
11    Sort  $\mathcal{N}$  such that for each  $(j_i, \lambda_i, f_i, w_i, \sigma_i, \phi_i) \in \mathcal{N}, f_i < f_{i+1}$  and such that  $f_i = f_{i+1}$  implies
     $w_i < w_{i+1}$  and such that  $f_i = f_{i+1}$  and  $w_i = w_{i+1}$  implies  $j_i < j_{i+1}$ 
12    for  $\lambda' \leftarrow 2$  to  $\eta$  do
13      foreach  $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi) \in \mathcal{N}$  do
14        for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
15          if  $\phi[j] = false$  then
16             $\sigma' \leftarrow \sigma$ 
17             $\sigma'[\lambda] \leftarrow j$ 
18             $\phi' \leftarrow \phi$ 
19             $\phi'[j] \leftarrow true$ 
20             $st', f', w' \leftarrow \text{COMPLETEWITHFITS}(\lambda', n, m, d, \sigma', \phi', p)$ 
21             $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}' \cup \{(j, \lambda', f', w', \sigma', \phi')\}$ 
22            Sort  $\mathcal{N}'$  such that for each  $(j_i, \lambda_i, f_i, w_i, \sigma_i, \phi_i) \in \mathcal{N}', f_i < f_{i+1}$  OR  $f_i = f_{i+1}$  implies
             $w_i < w_{i+1}$  OR  $f_i = f_{i+1}$  AND  $w_i = w_{i+1}$  implies  $j_i < j_{i+1}$ 
23             $\mathcal{N} = \emptyset$ 
24            foreach  $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi) \in \mathcal{N}'$  do
25               $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup \{(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)\}$ 
26              if  $|\mathcal{N}| = \kappa$  then stop
27            foreach  $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi) \in \mathcal{N}$  do
28               $\hat{\mathcal{N}} \leftarrow \hat{\mathcal{N}} \cup \{(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)\}$ 
29              if  $|\hat{\mathcal{N}}| = \beta$  then stop
30    return  $\hat{\mathcal{N}}$ 
31 end

```

com as tarefas i nas quais $\phi[i] = false$. O laço das linhas 10–11 calcula as janelas da programação da sequência parcial σ . O laço das linhas 13–19, para cada tarefa i que ainda não faz parte do sequenciamento parcial, calcula o encaixe *fit* nas janelas (linha 15), calcula a estimativa do LS da seção anterior (linha 16) e verifica se a estimativa é a melhor encontrada até então (linha 17). Caso seja, f_{its}^* e i^* são atualizados nas linhas 18 e 19. No final de suas iterações, f_{its}^* e i^* serão o valor da melhor estimativa e a tarefa que originou esse valor respectivamente. A rotina retorna então, na linha 20, a tarefa i^* .

O Algoritmo 13 descreve a rotina EXPANDLVLANDLOCALSEARCH em detalhes. A rotina recebe um conjunto $\mathcal{N}$ de nós do tipo $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)$ do λ -ésimo nível da árvore do BS e para cada nó recebido, cria um conjunto $\mathcal{N}'$ de até α nós do tipo $(j, \lambda + 1, f', w', \sigma', \phi')$ que representam uma sequência parcial com $\lambda + 1$ tarefas. As tarefas adicionadas são oriundas da avaliação da busca local. No algoritmo, a linha 2 inicializa o conjunto $\mathcal{B}$ como um conjunto vazio e a cada iteração do laço das linhas 3–16 adiciona um conjunto $\mathcal{N}'$ à $\mathcal{B}$. Para isso, para cada nó $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi)$ em $\mathcal{N}$, a rotina ALLONEROUNDFITS armazena em $\mathcal{O}$ pares do tipo (i, v) na linha 4 onde i é uma tarefa ainda não sequenciada, quer dizer, $\phi[i] = false$ e v é o valor do critério de seleção do LS da seção anterior. Na linha 5, o conjunto $\mathcal{O}$ é ordenado de acordo com os valores v de cada par e em casos de empates, de acordo com os índices i . O laço das linhas 7–15 então, para cada par (i', v') do conjunto $\mathcal{O}$, faz

Pseudo-código 11: Descrição detalhada do CompleteWithFits.

Input: $\lambda, n, m, d, \sigma[i], \phi[i]$ ($i = 1, \dots, n$), p_{ik} ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: st_{ik} ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$), f, w .
 COMPLETEWITHFITS($\lambda, n, m, d, \sigma, \phi, p$)

```

1 begin
2    $u[1 : m] \leftarrow 0$ 
3    $c[1 : n, 1 : m] \leftarrow 0$ 
4   for  $l \leftarrow 1$  to  $\lambda$  do
5      $i \leftarrow \sigma[l]$ 
6      $v \leftarrow 0$ 
7     for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
8        $c[i, k] \leftarrow \max\{v, u[k]\} + p_{ik}$ 
9        $v \leftarrow c[i, k]$ 
10       $u[k] \leftarrow c[i, k]$ 
11    $\sigma' \leftarrow \sigma$ 
12    $\phi' \leftarrow \phi$ 
13   for  $\lambda' \leftarrow \lambda + 1$  to  $n$  do
14      $i \leftarrow \text{ONEROUNDFITS}(\lambda' - 1, n, m, \sigma', \phi', c, p)$ 
15      $\sigma'[\lambda'] \leftarrow i$ 
16      $\phi'[i] \leftarrow \text{true}$ 
17      $v \leftarrow 0$ 
18      $j \leftarrow \sigma'[\lambda' - 1]$ 
19     for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
20        $c[i, k] \leftarrow \max\{v, c[j, k]\} + p_{i,k}$ 
21        $v \leftarrow c[i, k]$ 
22    $f, w, st \leftarrow \text{STARTTIMES}(n, n, m, d, p, \sigma')$ 
23   return  $st, f, w$ 
24 end
```

Pseudo-código 12: Descrição detalhada do OneRoundFits.

Input: $\lambda, n, m, d, \sigma[i], \phi[i]$ ($i = 1, \dots, n$), $c[i, k], p_{ik}$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: i^* .
 ONEROUNDFITS($\lambda, n, m, d, \sigma, \phi, c, p$)

```

1 begin
2    $sp[i] \leftarrow \sum_{k=1}^m p_{ik}, i = 1, \dots, n$ 
3    $\sigma'[1 : \lambda] \leftarrow \sigma[1 : \lambda]$ 
4    $\lambda' \leftarrow \lambda + 1$ 
5   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
6     if  $\phi[i] = \text{false}$  then
7        $\sigma[\lambda'] \leftarrow i$ 
8        $\lambda' \leftarrow \lambda' + 1$ 
9    $j \leftarrow \sigma[\lambda]$ 
10  for  $k \leftarrow 1$  to  $m - 1$  do
11     $b[k] \leftarrow c[j, k + 1] - c[j, k]$ 
12   $fits^* \leftarrow \infty$ 
13  for  $\lambda' \leftarrow \lambda + 1$  to  $n$  do
14     $i \leftarrow \sigma[\lambda']$ 
15     $fit \leftarrow \sum_{k=1}^{m-1} |b[k] - p_{i,k}|$ 
16     $fits \leftarrow fit + sp[i]$ 
17    if  $fits^* > fits$  OR ( $fits^* = fits$  AND  $i^* > i$ ) then
18       $fits^* \leftarrow fits$ 
19       $i^* \leftarrow i$ 
20  return  $i^*$ 
21 end
```

uma cópia σ' do sequenciamento parcial σ (linha 9), adiciona i' ao sequenciamento σ' (linha 10), marca i' como já sequenciada (linhas 11–12), calcula os valores da soma dos adiantamentos e atrasos f' , dos tempos de espera w' e dos instantes de início de processamento para o sequenciamento σ' com o Algoritmo 7 (linha 13) e então adiciona o nó expandido $(i', \lambda', f', w', \sigma', \phi')$ no conjunto $\mathcal{N}'$ (linha 14). Este laço é repetido $|\mathcal{O}|$ vezes ou até que $\mathcal{N}'$ tenha α elementos. Por último, o conjunto de nós expandidos e avaliados pela busca local $\mathcal{N}'$ é adicionado ao conjunto $\mathcal{B}$ na linha 16. O método retorna o conjunto $\mathcal{B}$ (linha 17).

Pseudo-código 13: Descrição detalhada da expansão de níveis com a busca local.

Input: $\alpha, n, m, d, \mathcal{N}, p_{ik}$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: $\mathcal{B}'$.
EXPANDLVLANDLOCALSEARCH($\alpha, n, m, d, \mathcal{N}, p$)

```

1 begin
2    $\mathcal{B} \leftarrow \emptyset$ 
3   foreach  $(i, \lambda, f, w, \sigma, \phi) \in \mathcal{N}$  do
4      $\mathcal{O} \leftarrow \text{ALLONEROUNDFITS}(\lambda, n, m, d, \sigma, \phi, p)$ 
5     Sort  $\mathcal{O}$  such that for each  $(i'_j, v'_j) \in \mathcal{O}$ ,  $v'_j < v'_{j+1}$  OR  $v'_j = v'_{j+1}$  implies  $i'_j < i'_{j+1}$ 
6      $\mathcal{N}' \leftarrow \emptyset$ 
7     foreach  $(i', v') \in \mathcal{O}$  do
8        $\lambda' \leftarrow \lambda + 1$ 
9        $\sigma' \leftarrow \sigma$ 
10       $\sigma'[\lambda'] \leftarrow i'$ 
11       $\phi' \leftarrow \phi$ 
12       $\phi'[i'] \leftarrow \text{true}$ 
13       $f', w', st' \leftarrow \text{STARTTIMES}(\lambda', n, m, d, p, \sigma')$ 
14       $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}' \cup \{(i', \lambda', f', w', \sigma', \phi')\}$ 
15      if  $|\mathcal{N}'| = \alpha$  then stop
16      $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{N}'$ 
17   return  $\mathcal{B}$ 
18 end
```

O Algoritmo 14 descreve o pseudocódigo da rotina ALLONEROUNDFITS em detalhes. O algoritmo recebe uma sequência parcial σ com λ tarefas já sequenciadas e devolve um conjunto $\mathcal{O}$ de pares $(i, fits)$ em que i é uma tarefa ainda não sequenciada, quer dizer, $\phi[i] = \text{false}$ e $fits$ é o valor da estimativa do LS da seção anterior para a tarefa i considerando o sequenciamento parcial σ . No algoritmo, as linhas 2–10 calculam os instantes de término de processamento da sequência parcial σ como o mais cedo possível. A linha 11 armazena em j a última tarefa da sequência parcial. O laço das linhas 12–13 calcula as janelas do sequenciamento parcial. A somatória dos tempos de processamento para cada tarefa é calculada na linha 14. O laço das linhas 15–19, para cada tarefa candidata i , calcula a estimativa $fits$ (linhas 17–18) e adiciona em $\mathcal{O}$ o par $(i, fits)$ correspondente (linha 19). Por fim, o conjunto $\mathcal{O}$ é retornado (linha 20).

O Algoritmo 15 descreve o pseudocódigo da rotina GLOBALSEARCH em detalhes. A rotina recebe um conjunto $\mathcal{B}$ de conjuntos $\mathcal{N}$ de nós do tipo $(i', \lambda', f', w', \sigma', \phi')$, completa todos os nós utilizando a rotina COMPLETEWITHFITS (Algoritmo 11), avalia o sequenciamento completo com o Algoritmo 7, armazena em $\mathcal{N}$ os β melhores sequenciamentos parciais que resultaram os melhores sequenciamentos completos de acordo com a avaliação e retorna $\mathcal{N}$. Para isso, o laço das linhas 3–6 completa cada nó em $\mathcal{B}$ (linha 5), avalia o sequenciamento completo (linha 5) e armazena a sequência parcial σ' e os valores da avaliação f e w no conjunto $\hat{\mathcal{N}}$ (linha 6). Na linha 7, o conjunto $\hat{\mathcal{N}}$ é ordenado de acordo com os valores armazenados. Por último, o laço das linhas 9–11 adiciona em $\mathcal{N}$ os β melhores nós de $\hat{\mathcal{N}}$ (linhas 10 e 11).

Pseudo-código 14: Descrição detalhada do ALLONEROUNDFITS.

Input: $\lambda, n, m, d, \sigma[i], \phi[i]$ ($i = 1, \dots, n$), p_{ik} ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: $\mathcal{O}$.
 ALLONEROUNDFITS($\lambda, n, m, d, \sigma, \phi, p$)

```

1 begin
2    $u[1 : m] \leftarrow 0$ 
3    $c[1 : n, 1 : m] \leftarrow 0$ 
4   for  $l \leftarrow 1$  to  $\lambda$  do
5      $i \leftarrow \sigma[l]$ 
6      $v \leftarrow 0$ 
7     for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
8        $c[i, k] \leftarrow \max\{v, u[k]\} + p_{ik}$ 
9        $v \leftarrow c[i, k]$ 
10       $u[k] \leftarrow c[i, k]$ 
11    $j \leftarrow \sigma[\lambda]$ 
12   for  $k \leftarrow 1$  to  $m - 1$  do
13      $b[k] \leftarrow c[j, k + 1] - c[j, k]$ 
14    $sp[i] \leftarrow \sum_{k=1}^m p_{ik}, i = 1, \dots, n$ 
15   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
16     if  $\phi[i] = false$  then
17        $fit \leftarrow \sum_{k=1}^{m-1} |b[k] - p_{i,k}|$ 
18        $fits \leftarrow fit + sp[i]$ 
19        $\mathcal{O} \leftarrow \mathcal{O} \cup \{(i, fits)\}$ 
20   return  $\mathcal{O}$ 
21 end
```

Pseudo-código 15: Descrição detalhada da busca global.

Input: $\beta, n, m, d, \mathcal{B}, p_{ik}$ ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$).
Output: $\mathcal{N}$.
 GLOBALSEARCH($\beta, n, m, d, \mathcal{B}, p$)

```

1 begin
2    $\hat{\mathcal{N}} \leftarrow \emptyset$ 
3   foreach  $\mathcal{N}' \in \mathcal{B}$  do
4     foreach  $(i', \lambda, f', w', \sigma', \phi') \in \mathcal{N}'$  do
5        $st, f, w \leftarrow \text{COMPLETEWITHFITS}(\lambda, n, m, d, \sigma', \phi', p)$ 
6        $\hat{\mathcal{N}} \leftarrow \hat{\mathcal{N}} \cup \{(i', \lambda', f, w, \sigma', \phi')\}$ 
7   Sort  $\hat{\mathcal{N}}$  such that for each  $(j_i, \lambda_i, f_i, w_i, \sigma_i, \phi_i) \in \hat{\mathcal{N}}, f_i < f_{i+1}$  OR  $f_i = f_{i+1}$  implies  $w_i < w_{i+1}$ 
   OR  $f_i = f_{i+1}$  AND  $w_i = w_{i+1}$  implies  $j_i < j_{i+1}$ 
8    $\mathcal{N} \leftarrow \emptyset$ 
9   foreach  $(i', \lambda', f', w', \sigma', \phi') \in \hat{\mathcal{N}}$  do
10      $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup \{(i', \lambda', f', w', \sigma', \phi')\}$ 
11     if  $|\mathcal{N}| = \beta$  then stop
12   return  $\mathcal{N}$ 
13 end
```

3.4 Experimentos Numéricos

Todos os algoritmos apresentados neste capítulo, foram implementados em C/C++. A compilação dos códigos foi feita utilizando o compilador g++ do GCC, versão 6.3.0 Debian 6.3.0-18, utilizando a opção de otimização “-O3”. Todos os testes foram feitos utilizando um computador Intel(R) Xeon(R) E5645 2.40GHz com 216 GB de memória RAM e executados no sistema operacional Debian 9 x86_64.

Nos testes computacionais, o conjunto de 1200 instâncias e as 2 datas restritas de entrega propostos em Chandra *et al.* (2009) foram utilizados. Essas instâncias foram geradas utilizando a

seguinte combinação de parâmetros: $n \in \{5, 10, 20, 50, 80, 100\}$, $m \in \{5, 10, 15, 20\}$ e $p_{ik} \in [1, 99]$, $i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$. O conjunto possui 50 instâncias para cada combinação de n e m .

Inicialmente, o algoritmo LS proposto neste capítulo foi comparado com dois outros algoritmos da mesma categoria da literatura. O primeiro, aqui denominado HS1, consiste no algoritmo construtivo baseado em regras de despacho que foi utilizado para construir uma solução inicial para a busca tabu de Chandra *et al.* (2009). O segundo, o SPT que considera a somatória dos tempos de processamento de Sakuraba *et al.* (2009) e que também foi utilizado para construir a solução inicial da busca tabu dos autores. Para avaliar o desempenho dos três algoritmos em questão, as regras foram executadas no conjunto de instâncias para as duas datas de entrega e a programação das sequências obtidas foi calculada pelo Algoritmo 7. A partir dos valores de soma dos adiantamentos e dos atrasos (E/T) e das somas dos tempos de espera (W) obtidos, o IDR (índice de desvio relativo)

$$IDR = \frac{V - \min}{\max - \min}$$

foi calculado, sendo V o valor em questão, $\min$ o menor entre os valores e $\max$ o maior entre os valores. As Tabelas 3.6 e 3.7 apresentam os resultados para as duas datas de entrega. Na tabela, cada entrada representa uma média dos valores obtidos em 50 instâncias nas quais n é a quantidade de tarefas e m a quantidade de máquinas. W é a média do IDR da soma dos tempos de espera somente nos casos em que duas ou mais soluções encontraram o menor valor de E/T , caracterizando um empate. $\#Empates$ é a quantidade de vezes que dois ou mais métodos encontraram o menor valor de E/T . De acordo com as tabelas, houve somente 47 e 43 empates de E/T em todas as 1200 instâncias consideradas para d' e d'' , respectivamente. Todavia, em nenhum caso as soluções tinham valores de soma de tempos de espera entre as máquinas W diferentes. No geral, o algoritmo LS proposto nesta tese para o FSP-WT consegue resultados melhores do que os métodos da literatura em 22 das 24 configurações de instâncias diferentes para d' e em 21 das 24 para d'' . É notável também que a medida que a complexidade das instâncias aumenta, o LS consegue desempenho cada vez melhor e que nas instâncias com $n \geq 50$, a média dos IDR do método é 0 ou praticamente 0 em todos os casos. Em linhas gerais, o LS foi o melhor método, com média geral dos IDR para E/T de 0.12 e 0.18 enquanto o SPT foi o segundo melhor método com médias dos IDR para E/T de 0.38 e 0.46, respectivamente. O LS, o SPT e o HS1 levam em média 0.005 segundos, 0.001 segundos e 0.02 segundos de tempo computacional respectivamente para solucionar uma instância do conjunto considerado.

Em relação ao BS deste capítulo, inicialmente vários testes preliminares foram feitos para a calibragem dos parâmetros κ , α e β . Nestes testes iniciais, somente 240 instâncias foram consideradas, sendo 10 instâncias para cada combinação de n e m . Os valores analisados para κ foram de 60, 80, 100 e 120. Os valores testados para α e β foram de 0.25, 0.50, 0.75 e 1.00. Em relação ao parâmetro κ , os diferentes valores avaliados praticamente não impactaram nos resultados. A diferença de tempo de processamento em CPU também foi muito pequena e por isso, os testes para este parâmetro serão omitidos e fica definido que $\kappa = 120$ para os demais resultados para o BS neste capítulo.

As Tabelas 3.8 e 3.9 apresentam os resultados obtidos para os diferentes valores de α e β e data de entrega d' e d'' , respectivamente. De acordo com as tabelas, a melhor configuração de parâmetros é $\beta = 1.00$ e $\alpha = 0.50$, com médias de E/T iguais a 0.13 e 0.12, respectivamente. Apesar dos 146 empates para d' e dos 129 empates para d'' , não houve variação significativa para W . A Figura 3.12 ilustra graficamente a média dos tempos computacionais em segundos para as diferentes configurações analisadas. De acordo com os gráficos, como esperado, é fácil ver a relação de aumento de tempo com o aumento dos parâmetros α e β . A configuração $\alpha = 0.25$ e $\beta = 0.25$ é a configuração com menor tempo computacional. A configuração com maior tempo computacional é $\alpha = 1.00$ e $\beta = 1.00$. A configuração $\alpha = 0.50$ e $\beta = 1.00$ gastou aproximadamente 478 segundos por instância.

Uma vez definidos os parâmetros do método BS ($\kappa = 120$, $\alpha = 0.50$ e $\beta = 1.00$), uma comparação

d'								
Instância		HS1		SPT		LS		# Empates
n	m	E/T	W	E/T	W	E/T	W	
5	5	0.56	0.00	0.50	0.00	0.29	0.00	15
5	10	0.64	0.00	0.32	0.00	0.42	0.00	11
5	15	0.54	0.00	0.47	0.00	0.39	0.00	8
5	20	0.45	0.00	0.48	0.00	0.52	0.00	13
10	5	0.91	0.00	0.29	0.00	0.11	0.00	0
10	10	0.64	0.00	0.51	0.00	0.21	0.00	0
10	15	0.67	0.00	0.43	0.00	0.30	0.00	0
10	20	0.59	0.00	0.49	0.00	0.32	0.00	0
20	5	0.96	0.00	0.30	0.00	0.02	0.00	0
20	10	0.93	0.00	0.36	0.00	0.11	0.00	0
20	15	0.89	0.00	0.45	0.00	0.04	0.00	0
20	20	0.84	0.00	0.48	0.00	0.10	0.00	0
50	5	1.00	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0
50	10	1.00	0.00	0.40	0.00	0.01	0.00	0
50	15	0.99	0.00	0.42	0.00	0.00	0.00	0
50	20	0.95	0.00	0.46	0.00	0.02	0.00	0
80	5	1.00	0.00	0.16	0.00	0.00	0.00	0
80	10	1.00	0.00	0.32	0.00	0.00	0.00	0
80	15	1.00	0.00	0.41	0.00	0.00	0.00	0
80	20	1.00	0.00	0.45	0.00	0.00	0.00	0
100	5	1.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00	0
100	10	1.00	0.00	0.28	0.00	0.00	0.00	0
100	15	1.00	0.00	0.42	0.00	0.00	0.00	0
100	20	1.00	0.00	0.40	0.00	0.00	0.00	0
Média		0.86	0.00	0.38	0.00	0.12	0.00	–

Tabela 3.6: Resultados computacionais para o LS proposto neste trabalho considerando a data de entrega d' . Na tabela, cada entrada de E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos para 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que dois ou mais métodos encontraram o melhor valor de E/T . W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que houveram empates para E/T .

dos resultados obtidos pelo LS e pelo BS em relação aos resultados obtidos pela busca tabu de Chandra *et al.* (2009) no conjunto completo de 1200 instâncias foi feita. Para isso, a distância relativa (*gap*) da soma dos adiantamentos e atrasos obtidas pelos métodos em relação à soma obtida pela busca tabu de Chandra *et al.* (2009) foi calculada, onde

$$gap = 100 \times \frac{V - CV}{CV},$$

sendo V o obtido pelo método e CV o valor reportado por Chandra *et al.* (2009). As Tabelas 3.10 e 3.11 apresentam os resultados. Nas tabelas, $\overline{gap}$ é a média do *gap* em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método em questão conseguiu *gap* menor ou igual a zero, quer dizer, a quantidade de vezes em que o método conseguiu atingir ou superar os resultados de Chandra *et al.* (2009). # Empates é a quantidade de vezes em que os métodos encontraram o mesmo valor de soma de adiantamentos e atrasos entre si. De acordo com as tabelas, os métodos só obtiveram os mesmos resultados de *gap* em 16 dos 2400 casos. O LS fica a aproximadamente 27.29% e 28.93% de distância relativa em relação a busca tabu de Chandra *et al.* (2009). O BS supera a busca tabu de Chandra *et al.* (2009) em -3.73% e -1.97% . Os resultados

d''								
Instância		HS1		SPT		LS		# Empates
n	m	E/T	W	E/T	W	E/T	W	
5	5	0.49	0.00	0.54	0.00	0.36	0.00	15
5	10	0.54	0.00	0.40	0.00	0.49	0.00	9
5	15	0.44	0.00	0.54	0.00	0.53	0.00	6
5	20	0.47	0.00	0.48	0.00	0.51	0.00	12
10	5	0.75	0.00	0.41	0.00	0.16	0.00	0
10	10	0.56	0.00	0.59	0.00	0.34	0.00	0
10	15	0.62	0.00	0.48	0.00	0.33	0.00	1
10	20	0.61	0.00	0.48	0.00	0.32	0.00	0
20	5	0.77	0.00	0.43	0.00	0.13	0.00	0
20	10	0.75	0.00	0.52	0.00	0.16	0.00	0
20	15	0.69	0.00	0.52	0.00	0.20	0.00	0
20	20	0.69	0.00	0.51	0.00	0.18	0.00	0
50	5	0.95	0.00	0.29	0.00	0.04	0.00	0
50	10	0.86	0.00	0.50	0.00	0.05	0.00	0
50	15	0.87	0.00	0.46	0.00	0.08	0.00	0
50	20	0.85	0.00	0.55	0.00	0.07	0.00	0
80	5	0.93	0.00	0.27	0.00	0.03	0.00	0
80	10	0.84	0.00	0.46	0.00	0.05	0.00	0
80	15	0.86	0.00	0.48	0.00	0.08	0.00	0
80	20	0.91	0.00	0.51	0.00	0.07	0.00	0
100	5	0.93	0.00	0.20	0.00	0.03	0.00	0
100	10	0.90	0.00	0.41	0.00	0.04	0.00	0
100	15	0.86	0.00	0.49	0.00	0.09	0.00	0
100	20	0.85	0.00	0.51	0.00	0.09	0.00	0
Média		0.75	0.00	0.46	0.00	0.18	0.00	—

Tabela 3.7: Resultados computacionais para o LS proposto neste trabalho considerando a data de entrega d'' . Na tabela, cada entrada de E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos para 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que dois ou mais métodos encontraram o melhor valor de E/T . W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que houveram empates para E/T .

d'								
	$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.50$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1.00$	
	E/T	W	E/T	W	E/T	W	E/T	W
$\beta = 0.25$	0.58	0.00	0.51	0.00	0.48	0.00	0.49	0.00
$\beta = 0.50$	0.39	0.00	0.33	0.00	0.33	0.00	0.33	0.00
$\beta = 0.75$	0.29	0.00	0.23	0.00	0.22	0.00	0.23	0.00
$\beta = 1.00$	0.21	0.00	0.13	0.00	0.15	0.00	0.14	0.00

Tabela 3.8: Resultados computacionais preliminares para o BS com diferentes valores para os parâmetros α e β utilizando um conjunto reduzido de instâncias e data de entrega d' . Na tabela, E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pela BS em relação às demais configurações do método. W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que uma ou mais configurações encontraram o mesmo valor de E/T .

em relação ao # Vitórias são notáveis. Enquanto o LS consegue atingir ou superar os resultados da busca tabu em 20 dos 2400 casos, o BS conseguiu atingir ou superar os resultados em 2065 dos

d''								
	$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.50$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1.00$	
	E/T	W	E/T	W	E/T	W	E/T	W
$\beta = 0.25$	0.60	0.00	0.49	0.00	0.50	0.00	0.50	0.00
$\beta = 0.50$	0.37	0.00	0.33	0.00	0.34	0.00	0.35	0.00
$\beta = 0.75$	0.27	0.00	0.20	0.00	0.25	0.00	0.24	0.00
$\beta = 1.00$	0.21	0.00	0.12	0.00	0.16	0.00	0.16	0.00

Tabela 3.9: Resultados computacionais preliminares para o BS com diferentes valores para os parâmetros α e β utilizando um conjunto reduzido de instâncias e data de entrega d'' . Na tabela, E/T é a média dos IDR da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pela BS em relação às demais configurações do método. W é o IDR da soma dos tempos de espera nos casos em que uma ou mais configurações encontraram o mesmo valor de E/T .

Figura 3.12: Tempo computacional médio em segundos gasto pelo BS com diferentes configurações de α e β para solucionar uma instância.

2400.

Além da comparação feita com os resultados reportados por [Chandra et al. \(2009\)](#), os métodos também foram comparados em relação a um *solver* exato executado sobre o modelo matemático descrito na Seção 3.1. Para isso, devido a complexidade do problema, somente as instâncias de pequeno porte do conjunto de instâncias total foram utilizadas. Estas instâncias possuem configurações de (n, m) iguais a $(5, 5)$, $(5, 10)$, $(5, 15)$, $(5, 20)$ e $(10, 5)$. As Tabelas 3.12 e 3.13 apresentam os resultados para d' e d'' respectivamente. De acordo com as tabelas, o método LS conseguiu atingir resultado ótimo para soma dos adiantamentos e atrasos em somente 16 dos 500 casos e ficou com média geral de *gap* em torno de 40% enquanto o método BS conseguiu ótimos em 455 dos 500 casos e média geral em torno de 0.12%. Os métodos empataram somente em 16 casos. Estes casos de empate são exatamente os mesmos casos onde o LS conseguiu atingir resultados ótimos. Nestes casos, a soma dos tempos de espera entre as máquinas foram exatamente as mesmas e por isso W possui o mesmo valor nas tabelas para ambos os métodos.

d'								
Instância		LS			BS			# Empates
n	m	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	
5	5	27.72	0.00	3	-0.86	0.00	50	3
5	10	40.73	0.00	3	-1.02	0.00	50	2
5	15	38.27	0.00	3	-1.02	0.00	50	3
5	20	58.03	0.00	0	-0.93	0.00	50	0
10	5	27.04	0.00	0	-0.72	0.00	42	0
10	10	34.70	0.00	0	-1.45	0.00	42	0
10	15	43.64	0.00	0	-1.41	0.00	41	0
10	20	43.30	0.00	0	-1.16	0.00	37	0
20	5	23.75	0.00	0	-2.18	0.00	36	0
20	10	31.51	0.00	0	-2.82	0.00	45	0
20	15	30.45	0.00	0	-3.54	0.00	43	0
20	20	32.57	0.00	0	-4.33	0.00	44	0
50	5	19.18	0.00	0	-2.53	0.00	48	0
50	10	22.09	0.00	0	-5.35	0.00	50	0
50	15	22.61	0.00	0	-5.85	0.00	50	0
50	20	24.24	0.00	0	-5.71	0.00	49	0
80	5	17.64	0.00	0	-2.92	0.00	48	0
80	10	17.24	0.00	0	-6.15	0.00	50	0
80	15	18.41	0.00	0	-7.01	0.00	50	0
80	20	18.41	0.00	0	-7.35	0.00	50	0
100	5	15.55	0.00	0	-3.59	0.00	49	0
100	10	16.44	0.00	0	-6.39	0.00	50	0
100	15	15.16	0.00	0	-7.31	0.00	50	0
100	20	16.33	0.00	0	-7.87	0.00	50	0
Média		27.29	0.00	0.38	-3.73	0.00	46.83	—

Tabela 3.10: Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo considerando as 1200 instâncias e a data de entrega d' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos gap relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados reportados por *Chandra et al. (2009)* em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de gap. W é o IDR da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu atingir ou superar os resultados reportados por *Chandra et al. (2009)*.

3.5 Conclusão

Este capítulo aborda uma extensão do FSP com sequência de permutação na qual os tempos de espera das tarefas entre as máquinas são considerados. Para o desenvolvimento dos métodos utilizados como abordagem, a mesma metodologia do Capítulo 2 foi utilizada. Nesta linha, inicialmente uma heurística construtiva do tipo *list scheduling*, denominada FITS, foi desenvolvida. A cada iteração, a heurística escolhe, entre as tarefas candidatas, aquela que melhor se encaixa nas janelas deixadas pela programação das tarefas que já fazem parte do sequenciamento e com menor somatória de tempo de processamento. A partir daí, a extensão natural do FITS que explora várias operações por iteração utilizando as mesmas regras deu origem ao método BS deste trabalho. A avaliação do desempenho dos métodos propostos foi feita utilizando um conjunto de 1200 instâncias e 2 diferentes datas de entrega propostos em *Chandra et al. (2009)*. Inicialmente, os resultados obtidos pelo LS foram comparados com dois outros métodos da literatura da mesma categoria. Os resultados mostraram que o LS obteve resultados muito melhores em tempo computacional razoavelmente equivalente.

d''								
Instância		LS			BS			# Empates
n	m	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	
5	5	30.93	0.00	4	-0.69	0.00	50	4
5	10	34.83	0.00	2	-1.59	0.00	50	1
5	15	40.32	0.00	2	-1.14	0.00	50	2
5	20	55.26	0.00	1	-0.74	0.00	50	1
10	5	27.66	0.00	0	-0.24	0.00	40	0
10	10	35.35	0.00	0	-1.12	0.00	33	0
10	15	38.74	0.00	0	-0.14	0.00	37	0
10	20	44.04	0.00	0	0.18	0.00	27	0
20	5	25.14	0.00	0	-0.68	0.00	29	0
20	10	30.84	0.00	1	-0.45	0.00	29	0
20	15	32.42	0.00	0	-0.53	0.00	31	0
20	20	34.93	0.00	0	-1.01	0.00	32	0
50	5	22.39	0.00	0	-0.96	0.00	35	0
50	10	23.32	0.00	0	-2.86	0.00	40	0
50	15	25.24	0.00	0	-3.79	0.00	41	0
50	20	26.11	0.00	0	-3.51	0.00	42	0
80	5	20.93	0.00	0	-1.42	0.00	36	0
80	10	21.41	0.00	0	-4.02	0.00	42	0
80	15	22.36	0.00	0	-3.88	0.00	42	0
80	20	21.99	0.00	0	-4.51	0.00	43	0
100	5	19.62	0.00	1	-1.40	0.00	34	0
100	10	20.30	0.00	0	-3.42	0.00	41	0
100	15	19.47	0.00	0	-4.64	0.00	43	0
100	20	20.80	0.00	0	-4.84	0.00	44	0
Média		28.93	0.00	0.46	-1.97	0.00	39.21	—

Tabela 3.11: Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo considerando as 1200 instâncias e a data de entrega d'' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos gap relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados reportados por [Chandra et al. \(2009\)](#) em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de gap. W é o IDR da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu atingir ou superar os resultados reportados por [Chandra et al. \(2009\)](#).

Posteriormente, um subconjunto das instâncias foi utilizado para analisar e calibrar os parâmetros do método BS. A partir da definição dos parâmetros, os resultados computacionais para todo o conjunto foi comparado com os resultados reportados para a busca tabu de [Chandra et al. \(2009\)](#). O BS conseguiu atingir ou superar os resultados reportados em 2065 dos 2400 casos analisados, melhorando em média -3.73% e -1.97% os resultados de [Chandra et al. \(2009\)](#) para as duas diferentes datas de entrega consideradas, respectivamente.

Por fim, um *solver* exato foi aplicado sobre o modelo matemático proposto na Seção 3.1 em um subconjunto de instâncias de pequeno porte contendo 500 das 2400 instâncias do conjunto total. Em linhas gerais, enquanto o LS conseguiu encontrar valores ótimos para soma dos adiantamentos e atrasos em somente 16 dos 500 casos, o BS conseguiu encontrar em 455 dos 500 casos. Além disso, a média geral do *gap* em relação ao *solver* ficou em torno de 40% para o LS e em torno de 0.12% para o BS.

d'								
Instância		LS			BS			# Empates
n	m	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	
5	5	28.81	0.33	3	0.00	0.33	50	3
5	10	42.11	0.50	2	0.00	0.50	50	2
5	15	39.65	0.00	3	0.00	0.00	50	3
5	20	59.79	-	0	0.00	-	50	0
10	5	28.77	-	0	0.58	-	32	0
Média		39.83	0.28	1.60	0.12	0.28	46.40	

Tabela 3.12: Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo comparados com um solver ótimo executado sobre (3.1)–(3.10) considerando as instâncias de pequeno porte e a data de entrega d' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos gap relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados encontrados pelo solver ótimo em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de gap. W é o IDR da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu gap igual a zero.

d''								
Instância		LS			BS			# Empates
n	m	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	$\overline{gap}$	W	# Vitórias	
5	5	31.87	0.25	4	0.00	0.25	50	4
5	10	37.56	0.00	1	0.00	0.00	50	1
5	15	42.39	0.50	2	0.00	0.50	50	2
5	20	56.75	1.00	1	0.00	1.00	50	1
10	5	28.74	-	0	0.59	-	23	0
Média		39.46	0.44	1.60	0.12	0.44	44.60	

Tabela 3.13: Resultados computacionais dos métodos LS e BS propostos neste capítulo comparados com um solver ótimo executado sobre (3.1)–(3.10) considerando as instâncias de pequeno porte e a data de entrega d'' . Na tabela, cada entrada de $\overline{gap}$ é a média dos gap relativos da soma dos adiantamentos e dos atrasos encontrados pelos métodos em relação aos resultados encontrados pelo solver ótimo em 50 instâncias com n tarefas e m máquinas. # Empates é a quantidade de vezes que os dois métodos encontraram o mesmo valor de gap. W é o IDR da soma dos tempos de espera nesses casos. # Vitórias é a quantidade de vezes em que o método conseguiu gap igual a zero.

Capítulo 4

Conclusões

Esta tese aborda dois problemas de programação da produção, o *Flexible Job Shop Scheduling Problem* com flexibilidade de sequenciamento (FJSP-SF) e o *Flowshop Scheduling Problem* com tempos de espera (FSP-WT).

Em ambos os problemas, a metodologia utilizada foi a de inicialmente desenvolver um algoritmo construtivo do tipo *list scheduling* (LS) bem definido que explora características do problema em questão e então estender este algoritmo para um método *Beam Search* (BS). O BS proposto utiliza o LS de diferentes formas em todos os seus principais elementos: (1) expansão dos níveis da árvore de busca, (2) avaliação local dos candidatos e (3) avaliação global dos candidatos.

Os métodos propostos para o FJSP-SF foram comparados utilizando resultados de um *solver* exato executado sobre um modelo matemático da literatura para o problema. Além disso, o BS também foi comparado com instâncias do FJSP clássico contra algoritmos genéticos considerados estado da arte da literatura. Os resultados computacionais são encorajadores e mostram a eficiência dos métodos propostos para o problema. Mesmo lidando com instâncias que não são o foco do método, o BS conseguiu superar nas instâncias mais complexas os algoritmos genéticos para o FJSP da literatura.

Os métodos propostos para o FSP-WT também foram comparados contra outras heurísticas da literatura. O LS proposto conseguiu superar outros dois métodos da mesma categoria encontrados na literatura enquanto o BS conseguiu atingir ou superar os resultados reportados por [Chandra et al. \(2009\)](#) em 2065 dos 2400 casos analisados. Além disso, quando comparados com um *solver* exato aplicado ao modelo matemático para o problema, também proposto neste trabalho, os métodos se mostraram promissores e em particular, o método BS conseguiu atingir valores ótimos em 455 dos 500 casos avaliados.

Em linhas gerais, devido aos resultados computacionais encorajadores, a metodologia para o desenvolvimento dos métodos se mostrou robusta visto que foi muito bem sucedida em dois diferentes problemas de programação da produção, utilizando pouco tempo computacional e superando os métodos da literatura.

4.1 Trabalhos Futuros

Para o FSP-WT, a análise dos métodos propostos em cenários com diferentes objetivos de minimização, como o atraso total ou o *makespan*, a comparação dos métodos propostos contra ótimos para instâncias pequenas e a extensão dos métodos para o problema que possui datas de liberação são opções de trabalhos futuros.

Para o FJSP-SF, a adaptação dos métodos propostos em diferentes cenários do FJSP clássico são tópicos para futuras pesquisas.

No geral, utilizar a metodologia abordada no desenvolvimento dos métodos desta tese em problemas diferentes dos de programação da produção é uma proposta intrigante para pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

- Agnētis et al.(2014)** Alessandro Agnētis, Paolo Detti e Marco Pranzo. The list scheduling algorithm for scheduling unreliable jobs on two parallel machines. *Discrete Applied Mathematics*, 165:2–11. Citado na pág. [2](#), [3](#)
- Akeb et al.(2009)** Hakim Akeb, Mhand Hifi e Rym M’Hallah. A beam search algorithm for the circular packing problem. *Comput. Oper. Res.*, 36:1513–1528. ISSN 0305-0548. Citado na pág. [2](#)
- Akeb et al.(2011)** Hakim Akeb, Mhand Hifi e Stéphane Negre. An augmented beam search-based algorithm for the circular open dimension problem. *Comput. Ind. Eng.*, 61:373–381. ISSN 0360-8352. Citado na pág. [2](#)
- Antunes Júnior et al.(1989)** J. A. V. Antunes Júnior, F. J. Kliemann Neto e J. Fensterseifer. Considerações críticas sobre a evolução das filosofias de administração da produção: Do just-in-case ao just-in-time. *Revista de Administração de Empresas*, 29:49–64. Citado na pág. [1](#)
- Barnes e Chambers(1996)** J. W. Barnes e J. B. Chambers. Flexible job shop scheduling with tabu search. Graduate program in operations research and industrial engineering, University of Texas. Citado na pág. [27](#)
- Birgin et al.(2014)** E. G. Birgin, P. Feofiloff, C. G. Fernandes, E. L. de Melo, M. T. I. Oshiro e D. P. Ronconi. A milp model for an extended version of the flexible job shop problem. *Optimization Letters*, 8(4):1417–1431. Citado na pág. [xi](#), [7](#), [9](#), [23](#), [24](#), [27](#), [28](#), [29](#)
- Birgin et al.(2015)** E.G. Birgin, J.E. Ferreira e D.P. Ronconi. List scheduling and beam search methods for the flexible job shop scheduling problem with sequencing flexibility. *European Journal of Operational Research*, 247(2):421–440. Citado na pág. [ix](#), [2](#), [6](#), [8](#)
- Blum et al.(2009)** Christian Blum, Maria J. Blesa e Manuel López-Ibáñez. Beam search for the longest common subsequence problem. *Comput. Oper. Res.*, 36:3178–3186. Citado na pág. [2](#)
- Bouazza et al.(2017)** W. Bouazza, Y. Sallez e B. Beldjilali. A distributed approach solving partially flexible job-shop scheduling problem with a q-learning effect. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):15890 – 15895. 20th IFAC World Congress. Citado na pág. [8](#)
- Bozejko et al.(2012)** Wojciech Bozejko, Zdzisław Hejducki, Mariusz Uchroński e Mieczysław Woźniak. Solving the flexible job shop problem on multi-gpu. *Procedia Computer Science*, 9:2020 – 2023. Proceedings of the International Conference on Computational Science, ICCS 2012. Citado na pág. [8](#)
- Brandimarte(1993)** P. Brandimarte. Routing and scheduling in a flexible job shop by tabu search. *Annals of Operations Research*, 41:157–183. Citado na pág. [7](#), [27](#)
- Chandra et al.(2009)** P. Chandra, P. Mehta e D. Tirupati. Permutation flow shop scheduling with earliness and tardiness penalties. *International Journal of Production Research*, 47(20): 5591–5610. Citado na pág. [xii](#), [36](#), [53](#), [54](#), [55](#), [57](#), [58](#), [59](#), [61](#)

- Chen et al.(1999)** H. Chen, J. Ihlow e C. Lehmann. A genetic algorithm for flexible job-shop scheduling. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2: 1120–1125. Citado na pág. [32](#)
- Chiavenato(2004)** I. Chiavenato. *Introdução à Teoria Geral da Administração: Edição Compacta*. CAMPUS. Citado na pág. [1](#)
- Cormen et al.(2009)** T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest e C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 3rd edição. Citado na pág. [13](#)
- Dauzère-Pérès e Paulli(1997)** S. Dauzère-Pérès e J. Paulli. An integrated approach for modeling and solving the general multiprocessor job-shop scheduling problem using tabu search. *Annals of Operations Research*, 70:281–306. Citado na pág. [7](#), [27](#)
- Fard et al.(2014)** Hamid Mohammadi Fard, Radu Prodan e Thomas Fahringer. Multi-objective list scheduling of workflow applications in distributed computing infrastructures. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 74(3):2152–2165. Citado na pág. [2](#), [3](#)
- Fattahi et al.(2007)** P. Fattahi, M. Mehrabad e F. Jolai. Mathematical modeling and heuristic approaches to flexible job shop scheduling problems. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 18: 331–342. Citado na pág. [7](#)
- Fernandez-Viagas e Framinan(2017)** Victor Fernandez-Viagas e Jose M. Framinan. A beam-search-based constructive heuristic for the pfsp to minimise total flowtime. *Computers & Operations Research*, 81:167 – 177. Citado na pág. [2](#)
- Fernandez-Viagas et al.(2016)** Victor Fernandez-Viagas, Manuel Dios e Jose M. Framinan. Efficient constructive and composite heuristics for the permutation flowshop to minimise total earliness and tardiness. *Computers & Operations Research*, 75:38 – 48. Citado na pág. [36](#)
- Fisher e Thompson(1963)** H. Fisher e G. L. Thompson. Probabilistic learning combinations of local job-shop scheduling rules. Em G.L. Thompson J.F. Muth, editor, *Industrial Scheduling*, páginas 225–251. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. Citado na pág. [7](#)
- Gan e Lee(2002)** P. Y. Gan e K. S. Lee. Scheduling of flexible-sequenced process plans in a mould manufacturing shop. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 20:214–222. Citado na pág. [6](#)
- Garey et al.(1976)** M. Garey, D. Johnson e R. Sethi. The complexity of flowshop and jobshop scheduling. *Mathematics of Operations Research*, 1(2):117–129. Citado na pág. [2](#), [7](#)
- Gendreau(2003)** M. Gendreau. *An Introduction to Tabu Search*, volume 57. Springer. Citado na pág. [2](#)
- Gutiérrez e García-Magariño(2011)** C. Gutiérrez e I. García-Magariño. Modular design of a hybrid genetic algorithm for a flexible job-shop scheduling problem. *Knowledge-Based Systems*, 24(1):102–112. Citado na pág. [7](#)
- Hall e Posner(1991)** Nicholas G. Hall e Marc E. Posner. Earliness-tardiness scheduling problems, i: Weighted deviation of completion times about a common due date. *Operations Research*, 39(5):836–846. Citado na pág. [2](#), [35](#)
- Hendel e Sourd(2007)** Yann Hendel e Francis Sourd. An improved earliness-tardiness timing algorithm. *Computers & Operations Research*, 34(10):2931 – 2938. Citado na pág. [36](#), [41](#), [42](#)
- Ho et al.(2007)** N. B. Ho, J. C. Tay e E. M.-K. Lai. An effective architecture for learning and evolving flexible job-shop schedules. *European Journal of Operational Research*, 179(2):316–333. Citado na pág. [7](#)

- Hurink et al.(1994)** J. Hurink, B. Jurish e M. Thole. Tabu search for the job-shop scheduling problem with multi-purpose machines. *OR-Spektrum*, 15(4):205–215. Citado na pág. 27
- Jia et al.(2003)** H. Z. Jia, A. Y. C. Nee, J. Y. H. Fuh e Y. F. Zhang. A modified genetic algorithm for distributed scheduling problems. *International Journal of Intelligent Manufacturing*, 14(3):351–362. Citado na pág. 32
- Kanet(1981)** John J. Kanet. Minimizing the average deviation of job completion times about a common due date. *Naval Research Logistics Quarterly*, 28(4):643–651. Citado na pág. 36
- Kim et al.(2003)** Y. K. Kim, K. Park e J. Ko. A symbiotic evolutionary algorithm for the integration of process planning and job shop scheduling. *Computers & Operations Research*, 30:1151–1171. Citado na pág. 6
- Lee et al.(2012)** S. Lee, I. Moon, H. Bae e J. Kim. Flexible job-shop scheduling problems with and/or precedence constraints. *International Journal of Production Research*, 50:1979–2001. Citado na pág. 6
- Lenstra e Kan(1979)** J. K Lenstra e A. H. G. Rinnoy Kan. Computational complexity of discrete optimisation problems. *Annals of Discrete Mathematics*, 4:121–140. Citado na pág. 2, 7
- Lowerre(1976)** B. T. Lowerre. *The harpy speech recognition system*. Tese de Doutorado, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA. Citado na pág. 2, 8
- Mastrolilli e Gambardella(2000)** M. Mastrolilli e L. M. Gambardella. Effective neighbourhood functions for the flexible job shop problem. *Journal of Scheduling*, 3:3–20. Citado na pág. 7
- Mejía e Niño(2017)** Gonzalo Mejía e Karen Niño. A new hybrid filtered beam search algorithm for deadlock-free scheduling of flexible manufacturing systems using petri nets. *Computers & Industrial Engineering*, 108:165 – 176. Citado na pág. 2
- Moslehi et al.(2009)** G. Moslehi, M. Mirzaee, M. Vasei, M. Modarres e A. Azaron. Two-machine flow shop scheduling to minimize the sum of maximum earliness and tardiness. *International Journal of Production Economics*, 122(2):763 – 773. Citado na pág. 36
- Nawaz et al.(1983)** Muhammad Nawaz, E Emory Enscore e Inyong Ham. A heuristic algorithm for the m-machine, n-job flow-shop sequencing problem. *Omega*, 11(1):91 – 95. Citado na pág. 36
- Nuijten e Aarts(1996)** W.P.M. Nuijten e E.H.L. Aarts. A computational study of constraint satisfaction for multiple capacitated job shop scheduling. *European Journal of Operational Research*, 90(2):269 – 284. Citado na pág. 7
- Pezzella et al.(2008)** F. Pezzella, G. Morganti e G. Ciaschetti. A genetic algorithm for the flexible job-shop scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 35:3202–3212. Citado na pág. 7, 27, 28, 29, 32
- Pinedo(2008)** M. Pinedo. *Scheduling: theory, algorithms, and systems*. Springer. Citado na pág. 2, 35
- PNEAC(2015)** PNEAC. Printers national environmental assistance center (pneac), acessado em 9 de fevereiro de 2015, 2015. URL <http://www.pneac.org>. Citado na pág. 5
- Rakrouki et al.(2012)** Mohamed Ali Rakrouki, Talel Ladhari e Vincent T'kindt. Coupling genetic local search and recovering beam search algorithms for minimizing the total completion time in the single machine scheduling problem subject to release dates. *Computers & Operations Research*, 39:1257–1264. ISSN 0305-0548. Citado na pág. 2, 8
- Rubins(1978)** S. Rubins. *The ARGOS Image Understanding System*. Tese de Doutorado, Pittsburgh, PA, USA. Citado na pág. 8

- Sabuncuoglu e Bayiz(1999)** I. Sabuncuoglu e M. Bayiz. Job shop scheduling with beam search. *European Journal of Operational Research*, 118(2):390–412. Citado na pág. [3](#), [8](#), [17](#)
- Sakuraba et al.(2009)** C. S. Sakuraba, D. P. Ronconi e F. Sourd. Scheduling in a two-machine flowshop for the minimization of the mean absolute deviation from a common due date. *Computers & Operations Research*, 36:60–72. Citado na pág. [35](#), [36](#), [41](#), [42](#), [48](#), [54](#)
- Sarper(1995)** Hüseyin Sarper. Minimizing the sum of absolute deviations about a common due date for the two-machine flow shop problem. *Applied Mathematical Modelling*, 19(3):153 – 161. Citado na pág. [36](#)
- Tang et al.(2010)** Xiaoyong Tang, Kenli Li, Guiping Liao e Renfa Li. List scheduling with duplication for heterogeneous computing systems. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 70(4):323–329. Citado na pág. [2](#), [3](#)
- Valente e Alves(2004)** J. M. S. Valente e R. A. F. S. Alves. Beam search algorithms for the early/tardy scheduling problem with release dates. FEP Working Papers 143, Universidade do Porto, Faculdade de Economia do Porto. Citado na pág. [2](#)
- Vélez-Gallego et al.(2016)** Mario C. Vélez-Gallego, Jairo Maya e Jairo R. Montoya-Torres. A beam search heuristic for scheduling a single machine with release dates and sequence dependent setup times to minimize the makespan. *Computers & Operations Research*, 73:132 – 140. Citado na pág. [2](#)
- Wan e Yuan(2013)** Long Wan e Jinjiang Yuan. Single-machine scheduling to minimize the total earliness and tardiness is strongly np-hard. *Operations Research Letters*, 41(4):363 – 365. Citado na pág. [35](#)
- Wang e Lim(2007)** F. Wang e A. Lim. A stochastic beam search for the berth allocation problem. *Decis. Support Syst.*, 42:2186–2196. ISSN 0167-9236. Citado na pág. [2](#)
- Wang et al.(2012)** L. Wang, G. Zhou, Y. Xu, S. Wang e M. Liu. An effective artificial bee colony algorithm for the flexible job-shop scheduling problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 60(1):303–315. Citado na pág. [7](#)
- Yuan e Xu(2012)** Y. Yuan e H. Xu. Hhs/lms: An integrated search method for flexible job shop scheduling. Em *Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on*, páginas 1–8. Citado na pág. [7](#)
- Zeng et al.(2010)** J. Zeng, S. Jackson, I.-J. Lin, M. Gustafson, E. Hoarau e R. Mitchell. On-demand digital print operations: A simulation based case study. Technical report, Hewlett-Packard. Citado na pág. [5](#)
- Özgüven et al.(2010)** C. Özgüven, L. Özbakir e Y. Yavuz. Mathematical models for job-shop scheduling problems with routing and process plan flexibility. *Applied Mathematical Modelling*, 34(6):1539–1548. Citado na pág. [7](#)