Análise de Formas usando *Wavelets* em Grafos

Jorge de Jesus Gomes Leandro

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Doutorado
Área de Concentração: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Roberto Marcondes Cesar Jr.

São Paulo, 11 de Fevereiro de 2014

Análise de Formas usando *Wavelets* em Grafos

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e
defendida por Jorge de Jesus Gomes Leandro
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Roberto Marcondes Cesar Jr. (Presidente) - IME - USP
- Prof. Dr. Junior Barrera - IME - USP
- Prof. Dr. Aparecido Nilceu Marana - FC - UNESP
- Profa. Dra. Claudia Lucia Mendes de Oliveira - IAG - USP
- Prof. Dr. Paulo André Vechiatto de Miranda - IME - USP

Agradecimentos

Pelo dom da vida e o anelo por desafios que a move em mim, sou grato ao Todo-Poderoso, o Criador.

Por inspirar-me o apreço pelos valores que verdadeiramente enobrecem o homem, sou grato aos meus pais, Dulce e Satiro.

Pelo apoio, a compreensão e a resignação, durante os longos períodos solitários que minha ausência lhes impôs, sou grato a minha esposa Sheila e filha Julia.

Pela oportunidade e a confiança em mim depositada, sou grato ao meu orientador, Prof. Roberto Marcondes César Jr.

Pelo acesso às imagens do *Galaxy Zoo 2* e as ideias compartilhadas, sou grato ao colaborador, Prof. Rogério Schmidt Feris, da *IBM T. J. Watson Research Center, New York - USA*.

Pela licença, sempre que necessária, sou grato às chefias do Departamento de Física Nuclear - IFUSP, minha ex-Coordenadora Prof^a. Nobuko Ueta e ao atual coordenador Prof. Nemitala Added.

A todos os que colaboraram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho, em particular aos ouvidos atentos do colega Evandro Drigo.

Tudo o que te vier à mão para fazer, faze-o conforme as tuas forças, porque no além, para onde tu vais, não há obra, nem projetos, nem conhecimento, nem sabedoria alguma.

Eclesiastes 9 : 10. Rei Salomão.

Se os teus olhos se perderem nas estrelas, não verás as pedras no caminho.

Provérbio chinês.

"FAPESP grant #2011/50761 – 2, CNPq, CAPES, NAP eScience - PRP - USP."

Resumo

O presente texto descreve a tese de doutorado intitulada **Análise de Formas usando Wavelets em Grafos**. O tema está relacionado à área de Visão Computacional, particularmente aos tópicos de *Caracterização*, *Descrição* e *Classificação de Formas*.

Dentre os métodos da extensa literatura em Análise de Formas *2D*, percebe-se uma presença menor daqueles baseados em grafos com topologia arbitrária e irregular. As contribuições desta tese procuram preencher esta lacuna. É proposta uma metodologia baseada no seguinte *pipeline*: (i) Amostragem da forma, (ii) Estruturação das amostras em grafos, (iii) Função-base definida nos vértices, (iv) Análise multiescala de grafos por meio da Transformada *Wavelet* Espectral em grafos, (v) Extração de Características da Transformada *Wavelet* e (vi) Discriminação.

Para cada uma das etapas (i), (ii), (iii), (v) e (vi), são inúmeras as abordagens possíveis. Um dos desafios é encontrar uma combinação de abordagens, dentre as muitas alternativas, que resulte em um *pipeline* eficaz para nossos propósitos.

Em particular, para a etapa (iii), dado um grafo que representa uma forma, o desafio é identificar uma característica associada às amostras que possa ser definida sobre os vértices do grafo. Esta característica deve capturar a influência subjacente da estrutura combinatória de toda a rede sobre cada vértice, em diversas escalas. A Transformada *Wavelet* Espectral sobre os Grafos revelará esta influência subjacente em cada vértice.

São apresentados resultados obtidos de experimentos usando formas *2D* de *benchmarks* conhecidos na literatura, bem como de experimentos de aplicações em astronomia para análise de formas de galáxias do *Sloan Digital Sky Survey* não-rotuladas e rotuladas pelo projeto *Galaxy Zoo 2*, demonstrando o sucesso da técnica proposta, comparada a abordagens clássicas como Transformada de Fourier e Transformada *Wavelet* Contínua *2D*.

Palavras-chave: visão computacional, análise de formas, reconhecimento de padrões, aprendizagem de máquina, classificação, discriminação, processamento de imagens, transformada wavelet, grafos, redes complexas, análise espectral, análise espectral de grafos

Abstract

This document describes the PhD thesis entitled **Shape Analysis by using Wavelets on Graphs**.

The addressed theme is related to Computer Vision, particularly to the Characterization, Description and Classification topics.

Amongst the methods presented in an extensive literature on Shape Analysis $2D$, it is perceived a smaller presence of graph-based methods with arbitrary and irregular topologies. The contributions of this thesis aim at fulfilling this gap. A methodology based on the following pipeline is proposed: *(i)* Shape sampling, *(ii)* Samples structuring in graphs, *(iii)* Function defined on vertices, *(iv)* Multiscale analysis of graphs through the Spectral Wavelet Transform, *(v)* Features extraction from the Wavelet Transforms and *(vi)* Classification.

For the stages *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, *(v)* and *(vi)*, there are numerous possible approaches. One great challenge is to find a proper combination of approaches from the several available alternatives, which may be able to yield an effective *pipeline* for our purposes.

In particular, for the stage *(iii)*, given a graph representing a shape, the challenge is to identify a feature, which may be defined over the graph vertices. This feature should capture the underlying influence from the combinatorial structure of the entire network over each vertex, in multiple scales. The Spectral Graph Wavelet Transform will reveal such an underpinning influence over each vertex.

Yielded results from experiments on $2D$ benchmarks shapes widely known in literature, as well as results from astronomy applications to the analysis of unlabeled galaxies shapes from the *Sloan Digital Sky Survey* and labeled galaxies shapes by the *Galaxy Zoo 2* Project are presented, demonstrating the achievements of the proposed technique, in comparison to classic approaches such as the $2D$ Fourier Transform and the $2D$ Continuous Wavelet Transform.

Keywords: computer vision, shape analysis, pattern recognition, machine learning, classification, discrimination, wavelets, wavelet transform, graphs, complex networks, spectral analysis, spectral graph analysis

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
1 Introdução	1
1.1 Preâmbulo	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Contribuições	3
1.4 Organização do Texto	4
2 Fundamentos Teóricos	5
2.1 Análise de Formas	5
2.2 Grafos e Redes Complexas	10
2.2.1 Teoria de Grafos	10
2.2.2 Teoria de Redes Complexas	11
2.2.3 Teoria Espectral de Grafos	12
2.3 Wavelets	12
2.4 Wavelets em Grafos	17
2.5 A Transformada Wavelet Espectral de um Grafo (SGWT)	19
3 Análise de Formas usando <i>Wavelets</i> em Grafos	23
3.1 Método Proposto	23
3.2 Imagem de entrada	24
3.3 Amostragem	25
3.4 Estruturação em Grafo	27
3.5 Análise Multiescala	31
3.6 Extração de Características	32

4	Resultados Experimentais	35
4.1	Experimentos para avaliação de técnicas de amostragem e estruturação	37
4.2	Experimentos para avaliação das propriedades da SGWT	40
4.2.1	A <i>SGWT</i> sobre a função Delta em uma malha regular	40
4.2.2	A <i>SGWT</i> sobre uma estrutura conhecida	42
4.2.3	A <i>SGWT</i> sobre estruturas com variações geométricas	45
4.2.4	A <i>SGWT</i> sobre estruturas com variações topológicas	51
4.2.5	A <i>SGWT</i> e a variação da geometria de um vértice	55
4.2.6	A <i>SGWT</i> em grafos de polígonos	57
4.2.7	A <i>SGWT</i> em grafos estruturados por malhas	59
4.2.8	A <i>SGWT</i> para grafos com variação crescente da geometria	62
4.3	Estudos de caso com bases de dados de <i>benchmark</i>	74
4.3.1	Análise de Formas da base <i>MPEG7 CE Shape-1 Part B</i>	74
4.3.2	Análise de Formas em Agricultura	79
4.3.3	Análise de Formas de Galáxias	80
5	Conclusão	97
5.1	Comentários Finais	97
5.2	Trabalhos Futuros	99
A	Publicações	103
A.1	<i>Shape Analysis using the Spectral Graph Wavelet Transform</i>	104
	Referências Bibliográficas	115
	Índice Remissivo	129

Lista de Abreviaturas

AFWG	Grafo ponderado baseado em descritores de Fourier invariantes por transformadas afins (<i>Affine-Invariant Fourier Based Weighted Graph</i>).
avgAPSP	Função Média dos Comprimentos de Todos os Caminhos Mais Curtos (<i>Average All-Pairs Shortest Paths</i>).
SGWT	Transformada Wavelet Espectral de Grafos (<i>Spectral Graph Wavelet Transform</i>).
CFT	Transformada Contínua de Fourier (<i>Continuous Fourier Transform</i>).
CWT	Transformada Contínua Wavelet (<i>Continuous Wavelet Transform</i>).
WT	Transformada Wavelet (<i>Wavelet Transform</i>).
DFT	Transformada Discreta de Fourier (<i>Discrete Fourier Transform</i>).
FDG	Grafo de <i>Delaunay</i> baseado em características. (<i>Feature Based Delaunay Graph</i>).
FT	Transformada de Fourier (<i>Fourier Transform</i>).
FFT	Transformada Rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>).
FFT2	Transformada Rápida de Fourier 2D (<i>Fast Fourier Transform 2D</i>).
fMRI	Imageamento por Ressonância Magnética Funcional (<i>functional Magnetic Resonance Imaging</i>).
FIG	Figura
WHR	Razão entre Quadril e Cintura (<i>Waist-To-Hip Ratio</i>).
STFT	Transformada de Fourier de Tempo Reduzido (<i>Short-time Fourier transform</i>).

NFA	Autômato Finito Não-determinístico (<i>Non-deterministic Finite Automaton</i>).
GZ2	<i>Galaxy Zoo 2</i> .
SDSS	<i>Sloan Digital Sky Survey</i> .
TAB	Tabela
PCA	Análise de Componentes Principais (<i>Principal Component Analysis</i>).
SIFT	Transformada Característica Invariante a Escala (<i>Scale-Invariant Feature Transform</i>).
SURF	Características Robustas Aceleradas (<i>Speeded Up Robust Features</i>).

Lista de Símbolos

L	Número de linhas de uma imagem.
C	Número de colunas de uma imagem.
Ψ	Transformada de Fourier de ψ .
ψ	Função wavelet mãe ou analisadora.
$\mathbb{R}^2$	Plano real.
$*$	Complexo conjugado.
ω	Frequência angular.
$\mathbf{x}$	Vetor.
$\mathbf{b}$	Vetor deslocamento.
θ	Parâmetro de rotação.
a	Parâmetro de dilatação.
f	Imagem ou Função-base, conforme contexto.
L^1	Espaço das funções integráveis.
L^2	Espaço das funções quadraticamente integráveis definidas em $\mathbb{R}^2$.
T_ψ	Transformada contínua wavelet.
C_ψ	Constante de normalização.
ψ^*	Conjugado complexo de ψ .
$O(f(N))$	Notação para a ordem de funções com crescimento assintótico limitado superiormente por alguma função $f(N)$ a menos de uma constante multiplicativa.
$\Theta(f(N))$	Notação para a ordem de funções com crescimento assintótico limitado superiormente e inferiormente por alguma função $f(N)$ a menos de uma constante multiplicativa.
Δt	Resolução no domínio do tempo.
Δf	Resolução no domínio da frequência.
Q	Fator de qualidade.
$1D$	Unidimensional.
$2D$	Bidimensional.
$\log_2$	Função logaritmo na base 2.
$G(f_x, f_y)$	Transformada de Fourier da função gaussiana $g(x,y)$.
exp	Função exponencial.
m_q^M	Momento Estatístico de ordem q .
$\mathbb{R}^N$	Espaço Euclidiano de dimensão N .
d	Dimensão Euclidiana.

$\delta_i(j)$	Delta de Kronecker.
A_2^N	Arranjo de N dois a dois.
$\lfloor N \rfloor$	Piso de N .
r_{ij}	Distância entre os pontos X_i e X_j .
G	Grafo.
$V(G)$	Conjunto de Vértices de G .
$E(G)$	Conjunto de Arestas de G .
χ_G	Função de Incidência de G .
Γ	Grafo Geométrico.
A	Matriz de Adjacência.
λ_l	Autovalor l de A .
χ_l	Autofunção associada ao autovalor λ_l .
$\mathcal{D}$	Matriz Diagonal de Graus de Vértices.
g	Função núcleo (<i>kernel</i>) passa-banda.
v_i	Vértice i .
$v_{i,x}$	Índice de coluna de v_i .
$v_{i,y}$	Índice de linha de v_i .
$v_i v_j$	Aresta que liga os vértices v_i e v_j .
$w_{i,j}$	Peso associado à aresta $v_i v_j$.
∇	Operador Gradiente.

Lista de Figuras

1.1	Algumas aplicações de Análise de Formas	1
1.2	Fluxograma proposto neste projeto de tese	3
2.1	Exemplo da suficiência da informação fornecida por silhuetas para o reconhecimento das respectivas imagens originais pelo sistema visual natural. A figura mostra uma ilustração usada no material de apoio didático para o público infantil de Cultural (2010) , em que a criança é convidada a associar silhuetas às respectivas imagens originais.	6
2.2	Uma hierarquia para Técnicas de Representação e Descrição de Formas. Adaptado de (Zhang & Lu, 2004).	7
3.1	Fluxograma da metodologia proposta nesta tese	24
3.2	Função Peso nas Arestas	25
3.3	Domínios vistos como complexos celulares: da esquerda para a direita, contínuo, regular e irregular. Adaptado de (Grady e Polimeni, 2010).	30
3.4	Tesselação do domínio de uma imagem por diagrama de Voronoi, que corresponde ao dual da triangulação de Delaunay, o qual aparece sobreposto à tesselação.	31
4.1	Aproximação Poligonal e Esqueleto Reto para a forma <i>rat</i>	38
4.2	Aproximação Poligonal e Esqueleto Reto para a forma <i>ray</i>	39
4.3	Aproximação Poligonal e Esqueleto Reto para a forma <i>shark</i>	39
4.4	<i>SGWT</i> da função Delta em malha regular	41
4.5	Amostras estruturadas por dendrograma	42
4.6	(a) Dendrograma gerado para um conjunto de amostras, (b) reestruturação do dendrograma como árvore rotulada e (c) resultado da <i>SGWT</i> aplicada à árvore, na escala mais global, usando número de filhos como função definida nos vértices. Uma interpolação bicúbica do resultado da <i>SGWT</i> nos vértices permite sua visualização como superfície.	44
4.7	(a) Dendrograma gerado para um conjunto de amostras, (b) reestruturação do dendrograma como árvore rotulada e (c) resultado da <i>SGWT</i> aplicada à árvore, na escala mais global, usando o nível como função definida nos vértices. Uma interpolação bicúbica do resultado da <i>SGWT</i> nos vértices permite sua visualização como superfície.	45

4.8	Transformações afins sobre estrutura em árvore	47
4.9	Topologia fixa para <i>SGWT</i> sobre transformações afins	48
4.10	A <i>SGWT</i> e transformações afins	49
4.11	Curvas Paralelas da <i>SGWT</i> sobre transformações afins	50
4.12	Variação de topologia: original	52
4.13	Variação de topologia: acrescentando nós somente nas folhas	53
4.14	Variação de topologia: acrescentando nós na raiz	54
4.15	Topologia fixa para grafo com ponto móvel	55
4.16	Variação de geometria: afastamento do nó 28 do grafo	56
4.17	Triângulo aleatório e disco de <i>Poisson</i>	57
4.18	<i>SGWT</i> sobre triângulo aleatório, amostrado por disco de <i>Poisson</i> com dual da trans- formada da distância	59
4.19	<i>SGWT</i> sobre malhas de formas com dual da transformada da distância	61
4.20	Variação de geometria de um polígono: adicionando ruído gaussiano	63
4.21	Variação crescente de geometria da forma de um polígono	64
4.22	Variação de geometria da forma bicicleta: adicionando ruído gaussiano	65
4.23	Espaço de configurações com variações de geometria da forma bicicleta	66
4.24	Variação crescente de geometria da forma bicicleta	67
4.25	Variação de geometria da forma bonequinho: adicionando ruído gaussiano	68
4.26	Espaço de configurações com variações de geometria da forma bonequinho	69
4.27	Variação crescente de geometria da forma bonequinho	70
4.28	Variação de geometria da forma casinha: adicionando ruído gaussiano	71
4.29	Espaço de configurações com variações de geometria da forma casinha	72
4.30	Variação crescente de geometria da forma casinha	73
4.31	Base de imagens MPEG-7: exemplos de formas	74
4.32	Amostras de imagens de quatro classes da base de imagens <i>MPEG7</i> : (a) camel, (b) key, (c) rat e (d) stef	75
4.33	Comparação entre amostras de mesma classe. As Fig. (a) e (b) mostram sobreposições de grafos e transformadas da distância para respectivas imagens da classe <i>camel</i> . Note em (c) e (d) a semelhança entre os perfis tomados da transformada da distância como função-base definida sobre os vértices. São mostradas também, em (e) e (f) as semelhanças entre suas <i>SGWT</i>	77
4.34	Espaço reduzido de características: <i>gráficos de espalhamento</i> para o caso de discrimi- nação de imagens binárias de quatro classes. O poder de discriminação da combinação da transformada da distância e da <i>SGWT</i> para separar as 4 classes é evidente.	78
4.35	Estudo de caso de discriminação com imagens rotuladas de tomates.	79
4.36	Estudo de caso de discriminação com imagens rotuladas de tomates.	80
4.37	Imagens de galáxias com formas visualmente (a) elípticas e (b) espirais. Cortesia de <i>David W. Hogg, Michael R. Blanton e a the Sloan Digital Sky Survey Collaboration</i>	81

4.38	Comparação entre amostras de classes perceptualmente distintas. As Figs. (a) e (b) mostram sobreposições dos grafos e imagens filtradas pela média para diferentes classes. Note em (c) e (d) a diferença entre os perfis tomados da média do nível de cinza como uma função-base definida sobre os vértices. São mostradas, também, em (e) e (f) as diferenças entre suas SGWT em quatro escalas.	83
4.39	Espaço Reduzido de Características: <i>gráficos de espalhamento</i> para o estudo de caso de discriminação de formas de galáxias não-rotuladas. As Fig. (a) e (c) exibem protótipos para categorias perceptualmente distintas de galáxias, isto é, elípticas e espirais, respectivamente, enquanto as Fig.(b) e (d) mostram agrupamentos formados pelos 30 vizinhos mais próximos dos respectivos protótipos.	84
4.40	Espaço reduzido de características: <i>gráficos de espalhamento</i> para o estudo de caso de discriminação de formas de galáxias não-rotuladas. Pode-se notar agrupamentos de galáxias de formas similares.	85
4.41	Galáxias - Completely Round	86
4.42	Diagrama de estados para um Autômato Finito Não-determinístico que descreve o comportamento do <i>GZ2</i> . Nesta representação, cada vértice (estado) e respectivas arestas emergentes (transições) correspondem a uma tarefa específica, como descrito por Willett <i>et al.</i> (in press). 1 é o <i>estado inicial</i> , enquanto 1, 6 e 8 são os <i>estados de aceitação</i> . Uma sequência de rótulos produzidas pelo <i>GZ2</i> formam uma cadeia (<i>string</i>) que está na linguagem aceita pelo autômato.	88
4.43	Normalização de orientação de imagens de galáxias	90
4.44	Espaço Reduzido de Características por PCA da SGWT sobre imagens de galáxias	91
4.45	Espaço Reduzido de Características por PCA da SGWT sobre imagens de galáxias com sobreposição de instâncias	92
4.46	Espaço Reduzido de Características por PCA da SGWT sobre imagens de galáxias com sobreposição de instâncias	93
4.47	Resultado da FT sobre imagem de galáxia	94
4.48	Espaço Reduzido de Características por PCA da Transformada de FFT2 sobre imagens de galáxias	95
4.49	Resultados da CWT sobre imagens de galáxias	96
4.50	Espaço Reduzido de Características por PCA da CWT 2D sobre imagens de galáxias	96
5.1	Alguns exemplos de técnicas de amostragem	99
5.2	A Transformada do Eixo Medial. Adaptado de (Loncaric, 1998).	100
5.3	O resultado do casamento entre dois peixes baseado em seus grafos de choque. Cores iguais indicam os ramos correspondentes e ramos cinza no grafo de choque foram emendados. Adaptado de (Sebastian <i>et al.</i> , 2001). ©2001 IEEE.	100
5.4	Transformações afins sobre formas e respectivos grafos AFWG. Adaptado de (Jin <i>et al.</i> , 2006). ©2006 IEEE.	100
5.5	Algumas vantagens da representação de formas por grafos	101
5.6	Exemplos de 14 diferentes ícones produzido por um dos participantes do estudo para a base NicIcon. Adaptado de (Niels <i>et al.</i> , 2008).	101

Lista de Tabelas

4.1	Experimentos, Objetivos, Conclusões e Módulos Específicos	36
4.2	Módulos do experimento para avaliação de técnicas de amostragem e estruturação . .	38
4.3	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> sobre a função Delta em uma malha regular	40
4.4	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> sobre uma estrutura conhecida	42
4.5	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> sobre estruturas com variações geométricas .	46
4.6	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> sobre estruturas com variações topológicas .	51
4.7	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> com a variação da geometria de um vértice .	55
4.8	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> em grafos de polígonos	57
4.9	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> em Grafos Estruturados por Malhas	59
4.10	Módulos do experimento para a <i>SGWT</i> em grafo com variação crescente da geometria	62
4.11	Módulos do experimento Análise de Formas da base <i>MPEG7 CE Shape-1 Part B</i> . .	76
4.12	Módulos do experimento Análise de Formas em Agricultura	79
4.13	Módulos do experimento Análise de Formas de Galáxias Não-Rotuladas do SDSS . .	82
4.14	Módulos do experimento Análise de Formas de Galáxias do SDSS rotuladas pelo GZ2	87

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preâmbulo

O sentido da visão em seres humanos e em muitas espécies de animais desempenha um papel fundamental para a sobrevivência, fornecendo um tipo de percepção que atua como analisador de formas (Pinker, 1997), propiciando o reconhecimento de seu *habitat*, a perpetuação da espécie e a seleção de parceiros visando à procriação.

Figura 1.1: Algumas aplicações de Análise de Formas: (a) Lei de Thayer (countershading ou contrasombreado), uma estratégia de camuflagem usada por presas e predadores, como o tubarão. Visto de cima, sua coloração dorsal confunde o contorno de sua forma com o fundo do oceano, enquanto, visto de baixo, sua coloração ventral confunde o contorno de sua forma com a superfície do oceano e (b) Exemplo do trabalho de Rodriguez et al. (2011) na área da Agricultura: categorias de forma do tomate, adaptado de UPOV (2001) e IPGRI (1996). Cada fruto está identificado por um nome variado (informação disponível em <http://solgenomics.net/>) e presença de mutação nos genes SUN, OVATE, LC, e/ou FAS (abreviados como S, O, LC, e F, respectivamente). Cortesia de Plant Physiology: “Copyright American Society of Plant Biologists” - www.plantphysiol.org.

No campo das relações ecológicas, por exemplo, encontram-se diversos animais, nos quais a pele apresenta um gradiente natural de tonalidade, diminuindo em direção à região ventral (Fig. 1.1(a)). Esta variação cancela os efeitos de sombreamento que ocorrem quando os corpos tridimensionais destes animais são iluminados a partir de um plano superior. O resultado é a ilusão de achatamento de seus corpos, eliminando, assim, pistas de suas formas que poderiam denunciá-los às suas presas ou predadores naturais e dificultando, deste modo, a detecção por parte do analisador de formas existente no cérebro de uma presa ou predador (Pinker, 1997; Tankus e Yeshurun, 2009). Trata-se da estratégia de camuflagem conhecida na literatura como *contrassombreado*, ou *Lei de Thayer*, que contrabalança os efeitos de sombreamento (Pinker, 1997). Nestes casos, o reconhecimento da forma de outros animais, sejam eles predadores ou presas, pode ser uma garantia de perpetuação da própria espécie (Lane e Nadel, 2002).

Na agricultura, a forma dos frutos é um dos parâmetros de qualidade mais importantes na produção, como ilustrado na Fig. 1.1(b)¹ do trabalho de Rodriguez *et al.* (2011). A classificação de frutos é crucial para a avaliação da produção agrícola, conforme padrões de gradação de qualidade, podendo aumentar seu valor de mercado e encontrando utilidade no projeto de embalagens, transporte e operações de mercado. Frutos deformados são normalmente rejeitados, quando comparados a padrões de gradação de qualidade de frutos (Rashidi e Seyfi, 2007; Sadrnia, 2007).

No âmbito da evolução e comportamento humano, a análise de formas pode resultar na atração entre gêneros, favorecendo a procriação e perpetuação da espécie humana (Spicer e Platek, 2010). As formas do rosto e do corpo de um indivíduo podem significar boas condições físicas, um critério levado em conta para a escolha de um parceiro entre humanos (Miller, 2001). O artigo seminal de Singh (1993), um dos precursores da Teoria Evolutiva da Atratividade Física Feminina, foi seguido por trabalhos de pesquisa com formas femininas oriundas de várias culturas confirmando suas evidências (Furnham *et al.*, 1997) de que a atratividade das formas femininas é marcada por sinais de saúde, juventude e potencial reprodutivo, demonstrando uma clara correlação entre estes sinais e baixos valores da chamada Razão entre Cintura e Quadril ² (Cartwright, 2000; Marlowe *et al.*, 2005; Platek e Singh, 2010; Streeter, 2003).

Em se tratando de atividades do cotidiano, são inúmeras as tarefas aparentemente elementares, cuja execução envolve o sentido da visão. Em particular, a percepção e representação das formas de objetos figuram entre as mais importantes funções da visão humana (Garrigan e Kellman, 2011). Dependendo da escala, estas operações podem ser repetitivas, enfadonhas, arriscadas e/ou exigir um alto grau de acurácia. Nestes casos, sistemas eficazes de Visão Computacional têm sido cada vez mais requisitados, visando à automação daquelas tarefas com competência igual ou superior à visão natural, um fato constatado em diversas áreas nas quais abundam aplicações, tais como robótica, medicina e segurança, entre outros.

Não obstante a aparente simplicidade da visão natural, o desenvolvimento de sistemas de Visão Computacional não é trivial, haja vista seu caráter inter e multidisciplinar. Some-se a isto a subjetividade associada aos aspectos da informação visual que detêm a maior carga de conteúdo semântico e cognitivo. Dentre estes aspectos, figuram as **formas** dos objetos com importância tal, que as mesmas podem ser pensadas como sendo as *palavras* da linguagem visual, uma abstração de objetos (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Neste contexto, formas enquadram-se na definição de signos icônicos, segundo a Semiótica do filósofo e matemático americano Charles Sanders Peirce, posto que um signo é capaz de carregar consigo o poder de representar ou substituir algo diferente dele próprio (Santaella, 1983), remetendo ao objeto de referência e invocando no observador um significado (interpretante), isto é, uma ideia do objeto. James Jerome Gibson, um psicólogo e filósofo americano, teorizando sobre a iconicidade da imagem, destacou que a visão dos objetos que nos cercam é determinada pela percepção de invariantes, isto é, unidades de percepção elementares que se preservam independentes de mudanças de posição do objeto ou de seu observador. Exemplifica invariantes como descontinuidades abruptas entre superfícies ópticas homogêneas, manifestadas como delimitações entre figura e fundo, pois o

¹“Copyright American Society of Plant Biologists” - www.plantphysiol.org.

²WHR: *Waist-To-Hip-Ratio*

contorno da figura se preserva, quando esta se move em relação ao fundo (Gibson, 1972; Santaella e Noth, 1997). Assim, o contorno, como invariante, é um forte indicativo da coesão interna da forma no campo visual e é percebido como o análogo do objeto (Santaella e Noth, 1997).

Em face ao exposto, um dos grandes desafios da Análise de Formas, à luz da Semiótica Peirceana, está em caracterizar os invariantes de uma forma, como signo icônico que é, quantificando objetivamente, por assim dizer, o conteúdo sógnico daquela, responsável por despertar nos observadores o interpretante que lhes permita reconhecer o objeto original.

O presente trabalho pretende tratar deste desafio, propondo um *framework* para reconhecimento de formas em imagens 2D, considerando simultaneamente algumas abordagens de representação carregadas de invariantes, a saber, representação por bordas, por regiões e por grafos. Os descritores são obtidos a partir da caracterização da *Spectral Graph Wavelet Transform - SGWT* (Hammond et al., 2011), ou seja, a *Transformada Wavelet Espectral de Grafos*, a cujos vértices estão associados valores de características amostrados em pontos das representações por contorno e por região daquelas formas ou, em outras palavras, pontos amostrados do domínio da função que define a imagem.

Assim, nossa metodologia analisa grafos de topologia irregular, que estruturam subregiões de formas, ou seja, agrupamentos de pixels. Em certo sentido, estes agrupamentos satisfazem alguns dos fatores apontados por Wertheimer (1938) para o agrupamento perceptual e organização da visão, tais como proximidade, similaridade e boa continuação. Como agrupamentos segundo estes critérios nem sempre obedecem uma estrutura regular, por exemplo, agrupamentos resultantes de supersegmentação em *superpixels* (Ren e Malik, 2003), a opção por grafos de topologia irregular neste trabalho justifica-se plenamente.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é propor uma nova abordagem de caracterização de formas, usando a *Transformada Wavelet em Grafos*.

1.3 Contribuições

Como contribuição desta tese, uma nova abordagem foi proposta, a qual é resumida no *pipeline* exibido na Fig. 1.2.

Figura 1.2: Fluxograma do projeto: (1) Forma, (2) Amostragem, (3) Estruturação em grafo, (4) Transformada Wavelet sobre o Grafo (SGWT) e (5) Extração de características

Dada uma (1) forma, queremos:

- (2) determinar um esquema para amostragem de pontos de formas,
- (3) determinar um esquema para estruturação das amostras em grafos, cujas topologias capturem parte da informação visual relativa às formas, nas quais os grafos estão inscritos e uma função definida sobre os vértices dos grafos, que correspondam a atributos capazes de apreender a influência subjacente da topologia de toda a rede sobre cada vértice, em diversas escalas,

- (4) realizar uma análise multiescala, aplicando a *SGWT* sobre os grafos, a fim de revelar a influência da topologia da rede sobre cada vértice, desdobrando-a através de escalas e
- (5) extrair características da *SGWT* sobre o grafo de cada forma, nas diversas escalas, compondo vetores de características. Cada vértice do grafo corresponde a uma característica do vetor de características.

Este trabalho contribui para a Visão Computacional, em particular para a área de Análise de Formas, propondo uma metodologia para a caracterização de formas bidimensionais, por amostragem de pontos, estruturação em grafo, análise multiescala via *Transformada Wavelet Espectral em Grafos* e Extração de características.

A tese apresenta novos elementos que avançam o estado da arte em direções menos exploradas da literatura em análise de formas.

Na Seção 2.1 são resumidos alguns trabalhos que usaram a representação de formas por grafos para fins de caracterização, busca e classificação. No entanto, em todos estes trabalhos, são realizadas comparações pelo cálculo da distância entre grafos ou por casamento de grafos. Diferente daquelas abordagens, nossa metodologia propõe a caracterização de formas representadas por grafos, pela comparação entre vetores de características extraídas da Transformada *Wavelet Espectral* em Grafos. A comparação direta entre grafos naqueles métodos é computacionalmente mais cara que a comparação entre vetores de características proposta em nossa abordagem.

1.4 Organização do Texto

O presente texto encontra-se organizado como descrito a seguir.

O Capítulo 2 aborda conceitos teóricos relacionados aos principais aspectos envolvidos no desenvolvimento desta metodologia, devidamente embasados por uma ampla revisão bibliográfica.

O Capítulo 3 descreve a metodologia proposta, principal contribuição deste trabalho. Nele, o processo para a caracterização de formas usando a *SGWT* sobre os respectivos grafos é detalhado. Também são apresentados os resultados dos experimentos para avaliação das propriedades da *SGWT*, numa investigação sobre a influência da variação de topologias de grafos, geometrias de formas e características sobre os coeficientes da *SGWT*.

O Capítulo 4 apresenta e discute os resultados experimentais.

O Capítulo 5 aponta direções para as perspectivas futuras deste trabalho.

Fundamentos Teóricos

Devido à própria natureza multidisciplinar da Análise de Formas, o método proposto neste trabalho é fundamentado em uma vasta bibliografia, que estende-se por diversas áreas do conhecimento, tais como Matemática, Física e Ciência da Computação, entre outras.

Este capítulo intenta apresentar sucintamente os principais tópicos que ancoram o trabalho ora descrito, uma introdução teórica aos conceitos essenciais para sua compreensão, guarnecidos por citações a referências bibliográficas para oportuno aprofundamento.

2.1 Análise de Formas

A Análise de Formas constitui o ramo da Visão Computacional que trata do estudo de formas, examinando-as mediante tarefas categorizadas basicamente em três módulos, a saber: Pré-processamento de formas, Transformações de formas e Classificação de formas (da F. Costa e Cesar Jr., 2009). São diversas as aplicações para as quais a análise de imagens pode ser reduzida à análise de formas, por exemplo órgãos, células, peças de máquinas e caracteres, entre outros (Loncaric, 1998).

Como o objetivo final da Análise de Formas é a classificação de seus objetos de estudo, seria desejável uma definição matemática para formas, capaz de explicitar suas peculiaridades, bem como unificar o conceito para situações variadas. Infelizmente, formas não possuem uma definição matemática precisa e universalmente aceita, possivelmente devido à subjetividade inerente às mesmas. Por outro lado, é notório que as silhuetas de objetos bidimensionais proveem informação suficiente para seu reconhecimento, pois, em geral, formas bidimensionais são frequentemente os arquétipos de objetos que pertencem a mesma classe (da F. Costa e Cesar Jr., 2009), como bem exemplificado na Fig. 2.1, em que se vê a ilustração usada numa atividade do material de apoio pedagógico infantil de Cultural (2010) convidando a criança a relacionar silhuetas às respectivas imagens originais.

Convém lembrar outrossim, que formas bidimensionais são formas definidas no plano, ou seja, representações como conjuntos de pontos conexos no plano, eventualmente projeções bidimensionais de objetos tridimensionais. Por esta razão, estas silhuetas podem variar devido à mudança de ponto de vista do observador em relação ao objeto, movimento não-rígido do objeto e ruído (Latecki et al., 2000). Portanto, na ausência de uma definição matemática, uma forma pode ser pensada subjetivamente como a silhueta de um objeto (Loncaric, 1998) ou qualquer conjunto de pontos conectados (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Sistemas de Visão Computacional, especialmente Análise de Formas, empregam diversas abordagens das disciplinas de *Reconhecimento de Padrões* e *Aprendizado de Máquina*, com o objetivo final de classificar objetos representados em imagens, um problema cuja formulação se baseia na atribuição do rótulo da classe mais provável a uma amostra desconhecida.

No entanto, outras categorias de tarefas muito importantes precedem a classificação final. Particularmente, em Análise de Formas, a *Representação* e a *Caracterização* (ou *Descrição*), apresentam-

Figura 2.1: Exemplo da suficiência da informação fornecida por silhuetas para o reconhecimento das respectivas imagens originais pelo sistema visual natural. A figura mostra uma ilustração usada no material de apoio didático para o público infantil de *Cultural* (2010), em que a criança é convidada a associar silhuetas às respectivas imagens originais.

se entre as primeiras tarefas da categoria denominada Transformações de Formas (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Para fins de manipulação matemática, uma tarefa fundamental da categoria de transformações de forma é o uso de métodos de **representação** para este conjunto de pontos, cujo resultado é uma representação não-numérica da forma original (por exemplo, um gráfico), de modo que as características importantes da forma sejam preservadas (Loncaric, 1998).

Grosso modo, técnicas de representação e descrição de formas podem ser organizadas em abordagens baseadas em **Contorno/Bordas** e **Regiões** (Pavlidis, 1978; Zhang e Lu, 2004), para as quais encontram-se métodos de análise de formas com os mesmos nomes (Fig. 2.2). Outros tipos de classificações de técnicas de representação e descrição de formas são possíveis. Loncaric (1998) propõe outros dois tipos de abordagens: abordagem baseada nos resultados não-numéricos (técnicas baseadas no *domínio do espaço*, por exemplo, eixo medial) e resultados numéricos (técnicas baseadas no *domínio de transformadas*, por exemplo, transformada de Fourier). Este último, concorda com a abordagem por **Transformações** mencionadas por da F. Costa e Cesar Jr. (2009); Pavlidis (1978). A terceira abordagem, apontada por Loncaric (1998), classifica métodos de representação e descrição conforme sua capacidade de preservar ou não informações, permitindo a reconstrução da forma. *Métodos preservadores* permitem a reconstrução precisa da forma original, enquanto *Métodos não-preservadores* permitem apenas a reconstrução parcial da forma. Representações e descrições *degeneradas*, como a circularidade, falham ao reconstruir a forma original, pois muitas formas diferentes apresentam os mesmos valores para esta descrição.

Técnicas de representação de formas baseadas em bordas podem considerar sua borda, contorno paramétrico ou aproximações do contorno por curvas. Aquelas baseadas em regiões, podem usar decomposição de regiões, regiões envolventes ou características internas, ao passo que as baseadas em transformações podem empregar transformações lineares, que podem ser monoescala ou multiescala, ou transformações não-lineares. Normalmente, as técnicas baseadas em bordas usam representações de formas por sinais unidimensionais, cujo custo computacional costuma ser inferior às representações por sinais bidimensionais na abordagem baseada em regiões (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Em representação e análise por transformações, encontra-se uma classe de métodos particularmente interessante, fundamentada na teoria de Morse, a qual analisa uma dada forma pelo estudo de suas propriedades, configuração ou evolução dos pontos críticos de uma função f definida sobre a própria forma. Os pontos críticos são associados a *características* a serem extraídas e a configuração ou evolução dos pontos críticos captura uma descrição global da forma. Diferentes propriedades da

Figura 2.2: Uma hierarquia para Técnicas de Representação e Descrição de Formas. Adaptado de (Zhang & Lu, 2004).

forma podem ser estudadas, usando diferentes funções, recaindo eventualmente nas outras categorias de análise, ou seja, por regiões e por contorno (Biasotti *et al.*, 2008).

Em se tratando da abordagem de representação por transformações não-lineares, podemos citar (Maragos, 1989), em que foi proposto o descritor de formas denominado *Espectro de Padrões*, que identifica escalas críticas em uma imagem, quantifica vários aspectos de tamanho e forma e viabiliza sua representação multiescala, por meio de métodos de esqueletonização. Para tanto, Maragos (1989) empregou os mesmos conceitos da teoria de transformações lineares como *Fourier* e *Wavelets*, ou seja, a decomposição de um sinal nos vetores de uma base para obtenção do espectro, usando elementos estruturantes B_n nas escalas n , no lugar dos vetores de uma base e uma transformação não-linear, como a abertura morfológica, no lugar da modulação usada em transformações lineares. Em seu trabalho, Maragos (1989) afirma que transformações lineares pouco oferecem para a quantificação do conteúdo de forma e tamanho de imagens, que são sinais com estrutura geométrica. Além disso, ele aponta três pontos fracos em análises por transformações lineares: (1) filtros lineares deslocam e borram características importantes, como bordas, (2) o parâmetro de escala em transformações lineares não está relacionado com sua definição de tamanho (escala) de formas e (3) em geral, as versões filtradas multiescala não correspondem a uma representação compacta da forma. Convém ressaltar que a tônica do trabalho de Maragos (1989) está na representação multiescala de formas num espectro de padrões, enquanto o presente trabalho emprega uma representação por regiões com ênfase em grafos, visando à caracterização de formas.

Em particular, regiões podem ser representadas por grafos planos de subregiões, sejam esqueletos ou decomposições (Sonka *et al.*, 2007), em que estabelecem-se relações estruturais entre elementos associados às formas de diversas maneiras. O trabalho de Tao e Grosky (1999), por exemplo, vale-se da decomposição de regiões, estruturando relações entre as mesmas por meio da triangulação de *Delaunay*, um tipo de representação frequentemente usada para manipulação de objetos em sequências de vídeo (Tekalp *et al.*, 1998; van Beek *et al.*, 1998) e Computação Gráfica. Latecki *et al.* (2000) mencionam esta como uma categoria à parte, em que formas são esqueletonizadas e estes últimos são representados como árvores. Outra maneira de estruturar informações de formas por grafos é tomando-se seus cruzamentos, bifurcações e extremidades como vértices e relacionando-os por arestas que representem os segmentos de curva que os ligam (da F. Costa e Cesar Jr., 2009). Ainda, a literatura reporta uma representação de formas por grafos, que estabelece relações entre as partes resultantes de um esquema de decomposição de formas baseado na operação morfológica abertura, uma abordagem que se mostrou robusta a transformações rígidas, ruído, deformação e oclusão (Kim *et al.*, 2004). Outros esquemas de decomposição de formas por partes são propostos por Zeng *et al.* (2008), Mi *et al.* (2009), Luyuan *et al.* (2010) e Tari (2011).

Grafos também podem ser usados para representar esqueletos morfológicos associados a formas (Backes e Bruno, 2009; Ruberto, 2004; Torres *et al.*, 2004). Sebastian *et al.* (2001, 2004) obtiveram estruturas hierárquicas de árvores a partir de grafos de *shock*¹, visando à determinação da similaridade entre formas pelo cálculo da distância entre grafos. Paradhi *et al.* (2009a,b) também usaram este mesmo tipo de estrutura para avaliar similaridade de formas, mas por meio de casamento de grafos. Árvores ou grafos de *shock* são representações obtidas a partir da representação do *eixo medial* (esqueleto)², definindo os segmentos do eixo medial com fluxo monotônico como sendo os segmentos da estrutura (Sebastian *et al.*, 2001).

Abordagens híbridas de representação também são possíveis. Yu e Shi (2001) consideraram a interação entre informações presentes nas representações por região e por contorno, estruturando tal interação em grafos e propondo ainda um algoritmo de partição destes, objetivando a segmentação de formas presentes em imagens. Mi *et al.* (2009) consideraram a combinação entre as informações locais e globais do contorno e do esqueleto de formas para análise e classificação. No trabalho de Jin *et al.* (2006), foi proposta uma representação denominada *AFWG - Affine-Invariant Fourier Weighted Graph*, na qual combinaram-se representações por contorno e por grafos. Os vértices do grafo foram dados pelos M descritores de Fourier F_k de frequência mais baixa (onde se concentra

¹shock graphs

²medial axis

a informação do contorno da forma), incluindo o F_0 , que corresponde ao centróide. As arestas do grafo foram definidas pelos lados de cada triângulo formado por um par de vértices adjacentes no sentido anti-horário (exceto o centróide) e o vértice correspondente ao centróide da forma. Os resultados dos experimentos neste trabalho mostraram, por distância entre grafos, que o *AFWG* superou efetivamente a representação *FDG* - *Feature Based Delaunay Graph* para fins de reconhecimento (Robles-Kelly e Hancock, 2005).

Dentro da categoria de Transformações ainda, a **caracterização** segue subsequente à representação da forma. No que tange à relação entre *Representação* e *Descrição/Caracterização*, vale citar o trabalho de Lee e Pizer (1985), segundo o qual, a distinção entre ambas pode ser expressa pela afirmação de que *a representação de um objeto contém informação suficiente para reconstruir o objeto (uma aproximação), enquanto uma descrição contém somente informação suficiente para identificar um objeto como um membro de alguma classe (sic)*. Pode-se dizer, então, que a representação é mais detalhada e precisa que a descrição/caracterização, mas não contém, necessariamente, informação de alto nível explicitamente sobre a forma (Biasotti et al., 2008).

O resultado da caracterização é uma ou mais características (*features*), também chamadas atributos, capazes de descrever a forma, idealmente de maneira única (Loncaric, 1998). Em se tratando de formas, estes atributos são frequentemente chamados de *descritores de formas*³ e definidos como algum conjunto de números produzidos a fim de descrever a característica de uma forma (Mingqiang et al., 2008). Em (da S. Torres e Falcão, 2007), um descritor é definido como um *vetor de características* e uma *métrica de distância*, para indexação de imagens por similaridade. Neste trabalho, adotamos a definição de descritores como em (Mingqiang et al., 2008), segundo a qual, os descritores em questão constituem as componentes de um vetor de características, uma representação numérica do objeto de interesse. Alguns exemplos de características são *área*, *perímetro*, *número de cantos*, *medidas baseadas em curvatura do contorno*, *orientação preferencial de contornos* (da F. Costa e Cesar Jr., 2009), etc.

Loncaric (1998) ressalta que, por definição, transformações rígidas não alteram a forma de um objeto, pois preservam distâncias. Por esta razão, um sistema de descrição de formas deve ser invariante por estas transformações. Por outro lado, da F. Costa e Cesar Jr. (2009) assinalam que, a despeito de transformações afins não necessariamente preservarem distâncias, é possível que retenham, até certo ponto, informação visual suficiente de uma forma transformada que lhe permita ser reconhecida como pertencente à classe original.

Em geral, a combinação de características produz resultados mais efetivos para recuperação e classificação de formas (Mehtre et al., 1997), no entanto, cumpre mencionar as restrições impostas pela maldição da dimensionalidade, que descreve uma relação de compromisso entre o número de amostras de uma dada classe e o número de características utilizadas para resolver um problema de classificação (Duda et al., 2000; Theodoridis e Koutrombas, 2009).

Uma vez definidas e obtidas as características apropriadas para a descrição das formas de interesse, estas são submetidas à categoria de tarefas denominada **classificação** de formas, em que são empregados métodos das disciplinas de *Reconhecimento de Padrões* (Bow, 2002; Duda et al., 2000; Fukunaga, 1990; Theodoridis e Koutrombas, 2009; van der Heijden et al., 2004; Webb, 2002) e *Aprendizado de Máquina* (Alpaydin, 2004; Hastie et al., 2008; Mitchell, 1997), a fim de obter-se um discriminador que as separe em classes ou um classificador que rotule uma nova amostra (Johnson e Wichern, 2007).

É mister registrar que, não raras vezes, são estudados casos para os quais as soluções costumam exibir um compromisso aparente entre a complexidade conceitual e/ou matemática de uma característica e a de um classificador, de modo que quanto mais efetiva for uma característica para capturar as peculiaridades do objeto de estudo, maiores as chances de que algum classificador simples separe as classes satisfatoriamente. Um sistema munido com características de alto poder discriminante pode prescindir do uso de classificadores excessivamente complexos, favorecendo classificadores triviais. Considere, por exemplo, o problema da Disjunção Exclusiva (**XOR problem**), isto é, encontrar uma função discriminante que separe as duas classes definidas pelo operador lógico

³também *assinaturas* ou ainda *fingerprints* - *impressão digital*

Disjunção Exclusiva (**XOR**) sobre quatro vetores de características bidimensionais, cujas componentes são variáveis booleanas. Este problema não pode ser resolvido com uma função discriminante linear, sendo necessária uma transformação dos vetores de características originais para um novo espaço, em que uma função discriminante linear os separa. O processo de transformação e separação pode ser realizado por um classificador não-linear, ou seja, uma rede neural *Perceptron* de uma camada (ver [Theodoridis e Koutrombas, 2009](#), cap.4).

Entretanto, a proposição de novas características que atendam objetivamente ao requisito de simplificar a etapa de classificação constitui-se em grande desafio, haja vista a subjetividade atrelada às qualidades de uma forma, como explanado no Capítulo 1.

Este trabalho aborda o desafio de propor características para classificação de formas bidimensionais, a partir da Transformada *Wavelet* Espectral dos grafos associados às formas. Para tanto, salientamos que é usada a abordagem de representação por regiões, com ênfase em grafos.

Fogem ao escopo deste estudo as minúcias de aquisição e segmentação das formas. Ressaltamos, apenas que as mesmas são representadas por imagens binárias.

2.2 Grafos e Redes Complexas

2.2.1 Teoria de Grafos

A teoria de Grafos nasceu a partir da solução de *Euler*, em 1736, para o problema das sete pontes de *Königsberg*. Euler demonstrou matematicamente, que não existia um caminho que permitisse cruzar as sete pontes, as quais ligavam a ilha de *Kneiphof* no rio *Pregel*, às margens deste, sem passar pela mesma ponte duas vezes. Para tanto, Euler abstraiu as faixas de terra e as pontes que as ligavam, representando-as respectivamente por vértices e arestas. Desde então, a Teoria de Grafos tem se desenvolvido sobremaneira, contando com a contribuição de grandes matemáticos, tais como *Cauchy*, *Hamilton*, *Cayley*, *Kirchoff* e *Pólya* ([Barabási, 2003](#)). No que se segue, são enunciadas as definições e conceitos mais relevantes da Teoria de Grafos para este trabalho.

Um **grafo** é um par ordenado $G = (V(G), E(G))$, formado por um conjunto $V(G)$ de *vértices*⁴ e um conjunto $E(G)$ de *arestas*⁵, com $E(G) \cap V(G) = \emptyset$, e uma *função de incidência* χ_G que associa cada aresta $e \in E(G)$ a um par não-ordenado (não necessariamente distinto) de vértices $\{u, v\}$ de G . Usualmente, a notação de par ordenado para uma aresta $\{u, v\}$ é simplificada para uv . Assim, se $e \in E(G)$ e $u, v \in V(G)$, diz-se que ([Bondy e Murty, 2008](#); [Diestel, 2010](#)):

- e liga u e v , se $\Phi_G(e) = uv$,
- u e v são extremidades⁶ de e ,
- e incide em u e v

Um *caminho* é uma lista $v_0, e_1, \dots, e_k, v_k$ de vértices e arestas, tais que $1 \leq i \leq k$, cada aresta e_i tem extremidades v_{i-1} e v_i e todas as arestas e vértices são distintos ([West, 2001](#); [Wilson, 1996](#)). Um *ciclo*⁷ de três ou mais vértices, é um caminho, cujas extremidades são coincidentes. O comprimento de um caminho é dado pelo número de arestas que o compõe.

Note que, conforme a definição acima de grafo, não são permitidas arestas paralelas, isto é, arestas diferentes com extremidades iguais, tampouco ciclos de comprimentos unitários, ou seja, arestas com extremidades coincidentes. O número de vértices e o número de arestas de G são denotados, respectivamente, por $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. Ao número de arestas incidentes a um vértice v , denomina-se *grau* de v , denotado por $d_G(v)$ ([Feofiloff et al., 2011](#)).

⁴ou nós

⁵ou arcos

⁶ou pontas

⁷ou circuito

Um grafo é dito *conexo* se, para toda partição $\mathcal{P}$ de $V(G)$ em dois subconjuntos X e Y , existe uma aresta $e = uv$, tal que $u \in X$ e $v \in Y$ (Bondy e Murty, 2008).

Para fins computacionais, um grafo pode ser representado por uma matriz de adjacência, uma matriz de incidência ou uma lista de adjacência (Sedgewick, 2002). Dado um grafo $G = (V, E)$, com $|V| = n$, a matriz de adjacência de G é uma matriz quadrada, definida como:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} w_{ij}, & \text{se e somente se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde w_{ij} é o peso associado à aresta $e = v_i v_j$.

A matriz $\mathcal{D}$ de G é uma matriz diagonal de graus de vértices, definida como:

$$\mathcal{D} = (d_{ij}) = \begin{cases} d_G(v_i), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz $\mathcal{L} = \mathcal{D} - A$ é denominada matriz laplaciana não-normalizada de G .

Em princípio, os vértices (ou arestas) de um grafo G são indistinguíveis entre si. A fim de distingui-los, os mesmos podem ser devidamente rotulados. Nestes casos, G é dito ser um **grafo rotulado**.

Dois grafos G e H são ditos idênticos e denotados $G = H$, se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$, e $\chi_G = \chi_H$. Se G e H possuem estruturas idênticas, mas os rótulos de seus vértices (ou arestas) forem diferentes, então eles não são idênticos, mas são ditos *isomorfos*. Dois grafos são isomorfos se existir um isomorfismo entre os mesmos. Formalmente, um **isomorfismo** é um par de mapeamentos $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$, tal que $\chi_G(e) = uv$, se e somente se $\chi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ (Bondy e Murty, 2008).

Usando o conceito de **isomorfismo**, **classes de equivalência** de grafos podem ser definidas, de tal modo que dois grafos G e H sejam equivalentes se existir uma permutação dos vértices de G que o transforme em H . Disto, segue que todos os grafos pertencentes a uma mesma classe de equivalência podem ser representados por um único grafo não-rotulado, ou seja, um grafo cujos vértices (ou arestas) sejam indistinguíveis entre si. Estas classes de equivalência são chamadas de **topologias**, de maneira que dois grafos possuem a mesma topologia se ambos pertencem a mesma classe de equivalência. Esta definição teórica de topologia para grafos equivale à definição de topologia de objetos geométricos, segundo a qual dois objetos têm a mesma topologia, se suas propriedades geométricas forem invariantes por qualquer transformação contínua (Vicsek, 2007).

2.2.2 Teoria de Redes Complexas

Sempre que o número de vértices interconectados de G é tão grande, que inviabiliza a compreensão e previsão de seu comportamento global pela análise de comportamentos locais associados a vértices ou arestas, G é denominado *rede complexa* (Steen, 2010). Em outras palavras, uma *rede complexa* é o termo usado para designar qualquer rede não-trivial, por exemplo, grafos regulares, reticulados e grafos aleatórios. No entanto, redes e grafos são termos que podem ser usados com o mesmo significado (Grady e Polimeni, 2010).

A Teoria de Redes Complexas constitui uma profícua área de pesquisa em si (Barabási e Oltvai, 2004; Barabási, 2003; Réka e Barabási, 2002), a despeito de tomar emprestada a terminologia da Teoria de Grafos para formular precisamente seus problemas (Steen, 2010). Por isso, tradicionalmente, o estudo de redes complexas tem sido o território da Teoria de Grafos (Réka e Barabási, 2002).

Dentre os inúmeros problemas passíveis de descrição por redes complexas, podem-se citar os compostos e reações químicas em células biológicas, roteadores e computadores da Internet e suas interligações físicas ou sem fio, avatares e seus relacionamentos em redes sociais (Réka e Barabási, 2002). Um estudo sobre aplicações e modelamento de problemas reais por redes complexas foi elaborado por da F. Costa *et al.* (2008).

Segundo Barabási (2003), o primeiro trabalho de que se tem notícia, com respeito às redes

complexas, remonta à década de 50, com o artigo de Solomonoff e Rapoport (1951), um estudo heurístico sobre **Redes Aleatórias**⁸. Mais tarde, Erdős e Rényi estabeleceram as bases da teoria de grafos aleatórios em oito publicações, a saber: (Erdős e Rényi, 1959, 1960, 1961a,b, 1963, 1964, 1966, 1968).

Entre outros fatores, a disponibilidade de grandes bases de dados sobre diversos tipos de redes, os avanços tecnológicos na construção de recursos de *hardware* com alto poder de processamento e o interesse multidisciplinar por esta área alavancaram seu rápido desenvolvimento, culminando com a proposição de alguns conceitos clássicos para o tratamento de redes complexas. Dentre eles, destacam-se os conceitos de Pequenos mundos (*Small Worlds*), Agrupamentos (*Clusterings*) e Redes livres de escala (*Scale Free Networks*), a partir dos quais, emergiram três grandes paradigmas de abordagem para o estudo de Redes Complexas, são eles: Modelos de Redes Aleatórias, Modelos de Pequenos Mundos e Modelos de Redes Livres de Escala (Réka e Barabási, 2002).

Em Física, o reducionismo permite prever o comportamento de um sistema, a partir das propriedades de seus constituintes. Em geral, isso é possível considerando-se forças de interação dependentes da distância física que separa as partículas ou corpos em questão. Esta abordagem é amplamente utilizada, por exemplos, em modelos construídos em Mecânica, Eletromagnetismo e Mecânica Quântica. No entanto, quando a distância é irrelevante para a descrição dos problemas ou existe ambiguidade com respeito às interações, o arcabouço da Mecânica Estatística faz-se mais adequado. A análise de redes complexas com estrutura topológica não-trivial recai nesta classe de problemas (Réka e Barabási, 2002). A revisão de (da F. Costa *et al.*, 2007) proporciona um panorama das principais métricas utilizadas para a caracterização de redes complexas.

2.2.3 Teoria Espectral de Grafos

A Teoria Espectral de Grafos é uma teoria matemática onde a Álgebra Linear encontra a Teoria de Grafos (Cvetković e Simić, 2011). Foi introduzida em 1931, no trabalho de Hückel (1931) em Química Quântica, com o propósito de modelar um problema, representando os níveis de energia dos estados dos elétrons em moléculas de hidrocarbonetos insaturados. No entanto, suas bases teóricas foram introduzidas somente em 1957, no trabalho de Collatz e Sinogowitz (1957), sendo apresentada uma formulação mais rigorosa na tese de doutorado de Cvetković (1971). Desde então, houve uma profusão de publicações de artigos científicos e livros, dentre os quais, destacamos Biggs (1974); Brouwer e Haemers (2011); Chung (1997); Cvetković *et al.* (1980). Além disto, aplicações multidisciplinares têm inspirado representantes de diversas comunidades, tais como Física, Química, Ciência da Computação, Engenharia Elétrica e Biologia (Cvetković, 2009), entre outras. Particularmente, em Ciência da Computação, esta teoria tem aparecido em trabalhos relacionados a Redes Complexas, Redes Sociais, Internet, Reconhecimento de Padrões, Visão Computacional, Mineração de Dados, Sistemas de Multiprocessamento, Bancos de Dados Estatísticos e Computação Quântica (Cvetković e Simić, 2011, 2012; Cvetković *et al.*, 2010).

Em síntese, esta teoria estuda as propriedades de grafos, estabelecendo relações entre suas estruturas topológicas e as respectivas matrizes de adjacência e laplaciana (de Abreu, 2005). Isto se dá, pela análise dos autovalores de uma matriz M definida para um grafo.

2.3 Wavelets

Wavelets são essencialmente famílias de funções que propiciam transformações integrais do tipo *tempo-freqüência* ou *tempo-escala*, viabilizando a localização com boa resolução de eventos transitentes nos domínios do tempo e freqüência (Trigg, 2005).

A origem da análise tempo-escala remonta à época em que Jean Morlet, um engenheiro da companhia francesa de prospecção de óleo *Elf-Aquitaine*, iniciou sua pesquisas buscando analisar sinais sísmicos não-estacionários e inhomogêneos emitidos por geólogos, que usualmente localizam depósitos subterrâneos de óleo, produzindo ondas sonoras. Como a velocidade das ondas sonoras depende

⁸ou randômicas

do meio em que viajam, os tipos de materiais que compõem as camadas subterrâneas podem ser investigadas, aplicando ondas sísmicas ao solo e medindo sua velocidade de reflexão. Se a velocidade de propagação das ondas for muito alta através de alguma camada, presume-se que esta seja um reservatório com formação salina, que pode reter uma camada de óleo sob a mesma. Os problemas do método tradicional por Análise de Fourier, devem-se à presença de transientes, mudanças abruptas nas ondas ao atravessar a interface entre camadas de rochas. A Análise de Fourier é apropriada para o estudo de sinais estacionários, isto é, aqueles cujas propriedades estatísticas permanecem invariantes com o tempo, mas não é adequada para o estudo de sinais com a presença de transientes, ou seja, eventos que não podem ser previstos a partir de dados anteriores (Ramachandran e Soman, 2004). Esses eventos são localizados no domínio do tempo e da frequência, mas a Análise de Fourier perde a informação de localização de um componente de frequência, devido ao seu caráter global, além de ser muito instável a perturbações e não-econômica (Antoine, 2004). Um arcabouço teórico para o método experimental de Morlet só começou a ser desenvolvido quando este começou a trabalhar em colaboração com o físico teórico Alex Grossmann, do *Centre de Physique Théorique de Marseilles*, que prontamente reconheceu no método de Morlet, alguns conceitos similares de seu próprio trabalho em estados quânticos coerentes. Disto, resultou a publicação do primeiro artigo empregando o termo *wavelet* em 1984 (Grossmann e Morlet, 1984) e a partir de então, a teoria da análise tempo-escala com *wavelets* tem sido refinada por matemáticos e físicos-matemáticos.

Como resultado destes esforços conjuntos, surgiu a *Transformada Wavelet* (WT), uma poderosa e versátil ferramenta matemática frequentemente chamada de *microscópio matemático* (Arneodo et al., 1988; Trigg, 2005), que tem encontrado aplicações em variados campos, particularmente em processamento de imagens, desde a codificação de imagens (Rioul e Vetterli, 1991) à Análise de Formas (da F. Costa e Cesar Jr., 2009). Nesta última, vale destacar algumas contribuições importantes com *wavelets* para a área de segmentação de sistemas vasculares de imagens de retinopatia diabética (Jelinek et al., 2004; Leandro et al., 2001, 2003; Soares, 2006; Soares et al., 2005, 2006) e caracterização da forma bidimensional de imagens de neurônios (Jelinek et al., 2003, 2004; Leandro, 2008).

Tamanho sucesso deve-se ao fato de as *wavelets* serem particularmente adequadas para detectar informações essenciais que ocorrem em singularidades (e.g. bordas em imagens) e estruturas irregulares presentes em sinais (Grossmann, 1988), também conhecidos como transientes (Mallat, 1998). É notória a ubiquidade de sinais não-estacionários com ocorrência de transientes no mundo real, em que partes com baixa frequência geralmente se estendem por longos intervalos, enquanto partes com alta frequência ocorrem em curtos intervalos de tempo (Antoine, 2004). *Wavelets* são capazes de revelar eventos que ocorrem em frequências instantâneas (Antoine et al., 1993), ao longo das linhas definidas pelos máximos locais da transformada *wavelet* em escalas finas (Mallat, 1998) e realizar análise fractal e multifractal (Arneodo et al., 1988; da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Seja f uma função pertencente à classe de funções quadraticamente integráveis na reta real, isto é, $f \in L^2(\mathbb{R})$ ou, equivalentemente, uma função de energia finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2.1)$$

A **Transformada Wavelet em uma dimensão** é definida por (Antoine, 2004; Castleman, 1996; Mallat, 1998):

$$T_{\psi}f(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.2)$$

onde

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (2.3)$$

é a função protótipo a ser dilatada e transladada, chamada Wavelet Mãe ou Analisadora, cujos parâmetros $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ especificam escala e posição de translação, respectivamente. A constante $\frac{1}{\sqrt{a}}$

garante a normalização em termos de energia, isto é, $\|\psi_{b,a}\|_2 = \|\psi\|_2$ (Castleman, 1996; Poularikas, 2009).

Uma inspeção cuidadosa da Eq. 2.2 revela que a *WT* é a projeção do sinal de f sobre a família $\{\psi_{b,a}, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$, a partir de translações e dilatações ($a > 1$) ou contrações ($1 > a > 0$) da *wavelet* mãe ψ . Quando todos os valores dos parâmetros $a > 0, b \in \mathbb{R}$ são considerados, a transformada *wavelet* é dita contínua (*CWT*). Distó, segue imediatamente que as versões dilatadas e transladadas da *CWT* não constituem uma base ortonormal, o que a torna uma representação redundante, adequada apenas para análise e detecção de características em sinais e obviamente requer sua discretização para fins computacionais.

A *Transformada Wavelet Discreta (DWT)*, por seu turno, é projetada especificamente para gerar bases ortonormais, sendo apropriada para compressão e reconstrução de sinais (Antoine, 2004). Muito embora a *DWT* possa ser construída independentemente da *CWT*, também é possível interpretá-la como uma discretização da *CWT*, mediante uma amostragem específica dos coeficientes desta última. O número mínimo de coeficientes de uma tal amostragem, que garanta a recuperação de toda a informação no sinal original, é denominado *amostragem crítica*. Além de determinar a resolução em ambos os domínios da transformada, a amostragem crítica produz uma base ortonormal. Demonstra-se que existe um espaço de funções de escala⁹ associado ao espaço gerado pela base constituída por uma família de *wavelets* discretas, de tal modo que ambos são complementares entre si. Para uma dada escala, é possível representar qualquer sinal na próxima escala mais fina, usando em conjunto o espaço gerado pelas *wavelets* e o espaço gerado pelas funções de escala correspondentes (Ramachandran e Soman, 2004).

São duas as condições essenciais, que a *wavelet* mãe, ou analisadora, deve satisfazer (Antoine, 1994a):

1.

$$\psi \in L^1 \cap L^2 \quad (2.4)$$

isto é, ψ deve ser bem localizada no domínio do tempo e da frequência (suporte compacto);

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.5)$$

ou seja, ψ deve ser admissível, o que é equivalente à condição de ter média zero.

Vale salientar, que esta última condição decorre da definição formal do Critério de Admissibilidade, uma restrição necessária para que a *CWT* seja inversível e para que f possa ser reconstruída (Chui, 1992):

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{|a|} da < \infty \quad (2.6)$$

uma vez que a Eq. 2.5 se faz necessária, haja vista o parâmetro a no denominador (Castleman, 1996). Esta condição limita a classe de funções que podem ser *wavelets* (Chui, 1992; Goswami e Chan, 2011), implicando que todas as *wavelets* devem ter sua transformada de Fourier nula na frequência zero (Kaiser, 1994):

$$|\hat{\psi}(\omega)|_{\omega=0}^2 = 0 \quad (2.7)$$

o que equivale às seguintes asserções: (i) a *wavelet* deve ser oscilatória no domínio do tempo como uma onda, (ii) a integral de sua área deve ser igual a zero, (iii) seu valor médio deve ser zero (Poularikas, 2009), (iv) a *wavelet* deve ter um espectro passa-banda (Kaiser, 1994) ou ainda (v) deve ser nulo seu momento de ordem zero (Castleman, 1996; Goswami e Chan, 2011):

⁹scaling functions

$$\widehat{\psi}(0) = 0 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.8)$$

Eventualmente, pode ser necessária a propriedade adicional de ψ de ter N momentos nulos. Esta propriedade proporciona à *wavelet* ψ a capacidade de detectar singularidades presentes no sinal, uma vez que, assim fazendo, ψ passa a ser *cega* aos polinômios até grau N (Antoine, 1994a; Berg, 2004; Mallat, 1998), ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

Isto pode ser verificado, expandindo a *CWT* em Séries de Taylor, em torno de $t = 0$, assim chegando a um somatório em cujos termos surgem:

$$M_p = \int t^p \psi(t) dt \quad (2.10)$$

denominados momentos. Tomando-se os n primeiros momentos M_p como nulos, os coeficientes da *CWT* decaem tão rápido quanto $O(a^{n+2})$ (Kaiser, 1994; Sheng, 2000).

Dada a constante de admissibilidade definida na Eq. 2.6, a função $f(t)$ pode ser reconstruída a partir dos coeficientes da transformada *wavelet* pela fórmula (Antoine, 2004; Chui, 1992):

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \int \{(T_\psi f)(b, a)\} \left\{ \frac{1}{a} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right\} \frac{da db}{a^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.11)$$

Note que as versões dilatadas e transladas da *wavelet* utilizada na *CWT* podem ser interpretadas como um banco de filtros passa-banda (Castleman, 1979, 1996), pois a Eq. 2.2 pode ser reescrita como um produto de convolução (Mallat, 1998), expressando uma filtragem linear, como segue:

Demonstração.

$$\begin{aligned} T_\psi(b, a)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{-(b-t)}{a} \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_a(b-t) dt = \\ &= f \star \bar{\psi}_a(b) \end{aligned} \quad (2.12)$$

□

onde

$$\bar{\psi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{-t}{a} \right) \quad (2.13)$$

No caso da *DWT*, as *wavelets* também podem ser pensadas como funções de base de um espaço de funções em que o sinal analisado será projetado (Antoine, 1994a), permitindo também uma leitura da *WT* como uma medida de similaridade entre f e ψ , porquanto todo produto de convolução pode ser reescrito como um produto de correlação:

Demonstração.

$$\begin{aligned} f(t) \circ g(t) &\stackrel{\text{def. Corr}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) g(\tau+t) d\tau \\ f^*(-t) \star g(t) &\stackrel{\text{def. Conv}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau+t) g(\tau) d\tau \stackrel{\text{comut}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) g(\tau+t) d\tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

□

A inadequação da Transformada de Fourier, e mesmo sua versão janelada (*Short Time Fourier Transform* - *STFT*), para reproduzir sinais com mudanças abruptas foi identificada como sendo um típico problema em que se manifesta o princípio da incerteza de *Heisenberg*, segundo o qual a posição e a velocidade de um objeto não podem ser medidos com precisão absoluta ao mesmo tempo, mesmo em teoria ([Ramachandran e Soman, 2004](#)). No contexto de Processamento de Sinais, isto significa que o princípio da incerteza de *Heisenberg* estabelece um limite inferior para a resolução nos domínios do tempo e da frequência, ou seja,

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (2.15)$$

ou em palavras, o produto da largura de banda no tempo e na frequência não pode ser arbitrariamente pequeno.

No entanto, as *wavelets* apresentam uma vantagem sobre as funções de base da *STFT*, por constituírem-se em filtros com largura de banda relativa¹⁰ $\frac{f}{\Delta f}$ constante (ou equivalentemente, fator de qualidade constante), isto é, sua resolução no tempo aumenta com a frequência central das *wavelets* ([Rioul e Vetterli, 1991](#)), de modo a manter constante a razão entre f e Δf . Esta propriedade capacita a *wavelet* para a detecção e análise de propriedades locais e singularidades ([Antoine et al., 1993](#)), destacando o caráter de filtro local das *wavelets* e indicando sua efetividade com o aumento da frequência, ou equivalentemente a redução de escala, mantendo constante o fator de qualidade.

O esquema de construção de *wavelets* baseado em dilatações e translações de uma *wavelet* mãe, descrito nesta seção, produzem as chamadas *wavelets de primeira geração*. [Sweldens \(1995\)](#) propôs um esquema, denominado *lifting*, o qual define um método para construção de *wavelets* diretamente no domínio espacial, isto é, sem usar a transformada de *Fourier*. Este método viabiliza uma implementação mais rápida e *in place* para a transformada *Wavelet*, além de possibilitar a construção de *wavelets* de segunda geração, ou seja, *wavelets* que não sejam translações e dilatações de uma *wavelet* mãe. O algoritmo proposto neste esquema é baseado em três etapas: *dividir*, *prever* e *atualizar*. Primeiro, o sinal é dividido por algum método prescrito, em seguida, uma das partes é tomada e realiza-se uma previsão da segunda parte em termos da primeira, armazenando-se apenas a diferença entre ambas. Finalmente, a primeira parte é substituída por sua divisão e o algoritmo repete-se recursivamente ([Sweldens, 1995, 1997](#)).

A definição da *WT* foi estendida para duas dimensões por [Mallat \(1989a,b\)](#), que desenvolveu a *WT* discreta 2D ([Antoine, 1994b](#)). Esta extensão decorre naturalmente da ideia de análise com multiresolução, que repousa no cerne da visão natural, já presente no trabalho pioneiro em modelamento da visão de [Marr \(1982\)](#). A *CWT* pode ser generalizada para duas ou mais dimensões, com as mesmas propriedades do caso unidimensional ([Antoine, 1994b](#)) descritas no início desta seção.

Seja $f \in L^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a representação de uma imagem como uma função quadraticamente integrável. Denotando-se o plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^2$ e os vetores em negrito, e.g. $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, a **transformada contínua wavelet** em duas dimensões $T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a)$ é definida como ([Antoine, 1994b; Arneodo et al., 2000](#)):

$$T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{b}, \theta, a}^* d^2 \mathbf{x} \quad (2.16)$$

onde

$$\psi_{\mathbf{b}, \theta, a} = \frac{1}{a} \psi \left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{a} \right) \quad (2.17)$$

é a *wavelet* mãe e C_ψ , $\mathbf{b}$, θ e a denotam a constante de normalização, o vetor deslocamento e os parâmetros de rotação angular e dilatação, respectivamente, sendo ψ^* o conjugado complexo de ψ .

¹⁰constant relative bandwidth

Além disso, r_θ denota o operador de rotação usual, que atua sobre um vetor arbitrário $\mathbf{x} = (x, y)$ como segue:

$$r_\theta(\mathbf{x}) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.18)$$

A gama de aplicações para a *WT* bidimensional em Visão Computacional é vastíssima, compreendendo, entre outras, compressão e filtragem de imagens, detecção de bordas, análise de textura (Bultheel, 2006). Diferentes aplicações podem requerer diferentes *wavelets*. Por exemplo, em segmentação de vasos sanguíneos de imagens de retinopatia diabética na área de imagens médicas, emprega-se a *wavelet* Morlet, que é direcional, portanto capaz de selecionar orientações, e ajusta-se com precisão a frequências específicas (Leandro *et al.*, 2001, 2003; Soares, 2006; Soares *et al.*, 2005, 2006), sendo definida como:

$$\psi_M(\mathbf{x}) = e^{(j\mathbf{k}_0\mathbf{x})} e^{(-\frac{1}{2}|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2)} \quad (2.19)$$

onde

$$j = \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 1 \right], \epsilon \geq 1$$

é uma matriz diagonal 2×2 que especifica a anisotropia do filtro, em outras palavras, sua elongação numa certa direção. Note que a *wavelet* Morlet é uma exponencial modulada por uma gaussiana, em que a frequência da exponencial é definida pelo vetor $\mathbf{k}_0$.

Em Análise de Formas, Jelinek *et al.* (2004); Leandro (2008) empregaram a 1ª das *wavelets* da família de *Wavelets Hermitianas* - a família de derivadas da Gaussiana (ver Lewalle, 1997) - para efetuar a caracterização de formas de estruturas de ramificação. Nestes trabalhos, a representação da imagem $2D$ é o sinal de interesse, sendo interpretado como um campo escalar. A *Wavelet Hermitiana* opera sobre a imagem, obtendo o campo vetorial gradiente associado àquela e provendo, em cada ponto, um vetor, cuja direção aponta para a máxima variação do respectivo campo escalar (Korn e Korn, 2000). A magnitude dos vetores do campo vetorial resultante viabiliza a detecção de singularidades nas imagens, isto é, pixels de contorno, onde ocorrem variações abruptas.

Vale ressaltar que a função gaussiana $g(x, y)$ não é uma *wavelet*, pois não satisfaz a condição de admissibilidade (Antoine, 1994a), tampouco a restrição de localização $g(x, y) \notin L^1 \cap L^2$, todavia suas derivadas são *wavelets*.

A 1ª *wavelet* hermitiana é definida como:

$$\psi_g(x, y) = \nabla_g(x, y) = \hat{i} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \quad (2.20)$$

O Teorema da Convolução nos permite ler a Eq. 2.20 como o próprio gradiente da imagem, suavizada por versões dilatadas da gaussiana, ou como a convolução entre o gradiente da gaussiana $2D$ e a imagem (Arneodo *et al.*, 2000).

2.4 Wavelets em Grafos

O arrazoado teórico apresentado na Seção 2.3 embasa diversas aplicações para transformadas *Wavelet*, definidas para funções de energia finita sobre domínios com estruturas regulares, por exemplo, funções escalares sobre espaços euclidianos, tais como séries temporais e imagens. A despeito disto, são encontradas muitas outras aplicações de interesse científico e tecnológico, em que os domínios não são regularmente estruturados (Hammond *et al.*, 2011). Nestes casos, tais domínios podem ser elegantemente modelados por grafos e redes complexas (Barabási, 2003; Bondy e Murty, 2008; Feofiloff *et al.*, 2011; Steen, 2010).

Redes de computadores, redes de transportes e redes sociais são alguns exemplos de problemas definidos em domínios de estrutura não-regular, passíveis de representação por grafos ponderados, tomando-se respectivamente computadores, cidades e indivíduos como vértices (Hammond *et al.*,

2011). Muitos problemas, semelhantemente formulados, têm sido estudados mediante as teorias de Grafos e Redes Complexas, por exemplo, para modelar e analisar a organização funcional de células em biologia (Barabási e Oltvai, 2004) e redes de ligações químicas (Réka e Barabási, 2002).

Em termos das teorias de grafos e redes complexas, as análises podem considerar tanto a topologia das estruturas, como a dinâmica de sua evolução, baseando-se em distribuições de graus de vértices, correlações de graus, estatísticas de distância, coeficientes de agrupamento (Barabási, 2003; Steen, 2010), entre outros, sendo possível, em muitos casos, a discriminação entre grafos, por meio de tais medidas topológicas (He *et al.*, 2008). No entanto, medidas topológicas requerem significativas diferenças entre as topologias dos grafos envolvidos, por tratarem-se de índices globais, não capturando mudanças sutis de conectividade (Besson *et al.*, 2009).

Considerando, outrossim, a expectativa de que os dados definidos em cada vértice sofram a influência da topologia de toda a rede, a análise por transformada *Wavelet* definida em dados estruturados por grafos faz-se mais adequada para revelar eventos locais, evidenciando a influência da rede em cada vértice através de diversas escalas, isto é, uma análise multiescala de grafos (Hammond *et al.*, 2011). Para tanto, convém que a definição de transformada *Wavelet* tradicional seja estendida para domínios não estruturados, representados por grafos.

Diferentes propostas de definições para *Wavelets* em grafos são descritas nos parágrafos seguintes, uma coletânea representativa de sínteses de publicações recentes sobre o assunto.

Crovella e Kolaczyk (2003) propuseram uma generalização da transformada *Wavelet* tradicional sobre o domínio espacial, em lugar do domínio temporal, para dados estruturados em grafos não ponderados, visando a análises do tráfego de dados em redes de computadores. Nesta abordagem, além dos dados de tráfego definidos nos vértices, a topologia do grafo é considerada, com o objetivo de obter uma perspectiva global do tráfego de dados na rede. Para tanto, foi usada a distância *h-hop*, de modo que o valor de uma *wavelet* centrada no vértice **n** sobre o vértice **m** só depende do comprimento de caminho mínimo entre **m** e **n**. Para satisfazer a condição de admissibilidade, cada *wavelet* discreta foi projetada para que a média em cada intervalo anular fosse igual à integral definida num intervalo linear de uma *wavelet* tradicional, garantindo que a primeira tivesse média zero. Foram estudadas diversas propriedades necessárias, no entanto nenhuma função de escala foi definida e nenhum estudo sobre invertibilidade foi realizado. Este trabalho permitiu a compreensão das respostas do tráfego global de redes, na eventualidade de falhas de conexão, bem como a avaliação da extensão das mesmas.

Besson *et al.* (2009) discutiram a inadequação de medidas topológicas para discriminação entre grafos com diferenças sutis de conectividade, propondo um método multiescala de análise para caracterizar a conectividade de níveis finos para grossos em redes de conectividade cerebral. Adaptando trabalhos anteriores baseados na transformada *Wavelet* de intervalos, foi definida uma transformada *Wavelet* sobre um grande espectro de *wavelets*, inversível e sem conhecimento prévio do posicionamento de seus vértices para um grafo arbitrário. Usando esta abordagem, foi possível detectar diferenças sutis de conectividade entre grafos que representavam dois grupos.

Smalter *et al.* (2009) usaram a definição de *wavelets* em grafos de Crovella e Kolaczyk (2003) para triagem virtual de medicações, propondo um algoritmo de classificação de grafos para projetos de fármacos. Neste trabalho, estruturas químicas foram modeladas por grafos não-dirigidos, cujos vértices representavam átomos e cujas arestas representavam ligações químicas, devidamente rotuladas. A partir de características que rotulam vértices e arestas, representando diferentes informações da estrutura química, a transformada *Wavelet* foi usada para criar vetores de características compostos por atributos relacionados aos próprios vértices, assim como informações sobre a topologia da rede. Estas características permitiram a construção de modelos preditivos para substâncias químicas, viabilizando a comparação entre grafos. A similaridade entre dois grafos é calculada por um algoritmo de otimização, maximizando a similaridade dada por uma função *kernel* (*wavelet-alignment kernel*) para grafos, introduzida neste trabalho, a qual considera os vetores de características associados aos nós dos dois grafos, para todos os alinhamentos possíveis. Os resultados foram comparáveis aos métodos no estado-da-arte para classificação de substâncias químicas.

Narang *et al.* (2010) definiram a transformada *wavelet* para grafos, usando o esquema de *lifting*

de Sweldens (1995), discutido na Seção 2.3, para analisar grafos associados a redes de sensores sem fio.

O esquema de *lifting* também é descrito em Schroder e Sweldens (1995, 2000), em que funções são definidas sobre *manifolds*, em particular a superfície de uma esfera, usando malhas e sobre estas calculadas a transformada *wavelet*. Baseado nestes trabalhos, (Peyre, 2007) implementou a *Toolbox Wavelet on Meshes*, que permite calcular a transformada *wavelet* em malhas 3D.

Hammond *et al.* (2011) lançaram mão do Teorema Espectral e Cálculo Contínuo, para propor a Transformada Wavelet Espectral em Grafos (SGWT - Spectral Graph Wavelet Transform). Neste método, foi definido um operador *wavelet* no análogo do domínio de Fourier para grafos, em termos de uma função da decomposição espectral da matriz laplaciana de um grafo arbitrário ponderado e finito. Os autores introduziram naturalmente o parâmetro de escala e demonstraram a invertibilidade da transformada. A fim de evitar a diagonalização da matriz laplaciana do grafo, requerida pelo Teorema Espectral, propuseram ainda a SGWT rápida, por meio de um algoritmo de aproximação por polinômios de Chebyshev. O método foi disponibilizado¹¹ como uma biblioteca em código aberto implementado em *scripts* para a plataforma Matlab®. Em Hammond *et al.* (2011), prova-se que a complexidade total de tempo para a transformada rápida SGWT, a qual aproxima os *kernels* g por polinômios de Chebyshev, é $O(M|E| + N \sum_{j=0}^J M_j)$, onde M é o grau do polinômio escolhido, $|E|$ é o número de arestas, $N = |V|$ é o número de vértices, J é o número de escalas e M_j é o número dos termos do polinômio para a escala j . Quando $|E|$ cresce linearmente com N , então a complexidade de tempo da SGWT se reduz a $O(N)$. No que diz respeito à complexidade de espaço, a transformada rápida SGWT requer espaço em memória proporcional a $N(J+1) + 3N$. Portanto, a fim de processar um número X de imagens, o tempo necessário por nosso método consome tempo $O(XN)$. Como N é um parâmetro escolhido inicialmente constante, nosso sistema apresenta, em última análise, uma complexidade de tempo $O(X)$, ou seja, proporcional ao número de imagens. Além disso, o espaço necessário para processar X imagens teoricamente permanece $N(J+1) + 3N$, pois todas as variáveis são reutilizadas durante as iterações da estrutura de repetição. Ainda, vale a pena usar listas com nomes de arquivos e salvar resultados intermediários em metaarquivos, de maneira que o laço possa ser retomado de onde parou, no caso de interrupções eventuais.

No presente trabalho, foi usada a abordagem de Hammond *et al.* (2011) para obter a transformada Wavelet de grafos associados a formas. Os tópicos teóricos deste método, mais relevantes para nossos objetivos, são sumariados na Seção 2.5.

Leonardi e Ville (2011) obtiveram um *frame de Parseval* a partir da SGWT de Hammond *et al.* (2011), viabilizando a conservação da energia no espaço da transformada e facilitando a reconstrução do sinal original. Foi definido um grafo para as conexões funcionais entre partes diferentes do cérebro com dados de *fMRI* e sua SGWT foi obtida a fim de estudar a conectividade subjacente entre diferentes áreas do cérebro. Além disso, generalizaram a SGWT para grafos ponderados com valores negativos nas arestas.

Shuman *et al.* (2011) estudaram um problema de aprendizado semi-supervisionado transduativo (Pise e Kulkarni, 2008; Zhu, 2005), usando a SGWT de Hammond *et al.* (2011) para realizar aproximações por partes de funções suaves definidas nos vértices de grafos construídos a partir de dados rotulados e não-rotulados.

2.5 A Transformada Wavelet Espectral de um Grafo (SGWT)

Nesta seção, são destacados conceitos fundamentais sobre a SGWT, seguindo de perto a publicação de Hammond *et al.* (2011). Antes de introduzir a SGWT propriamente dita, o referido artigo faz menção ao análogo da transformada de Fourier tradicional para grafos.

Considere a transformada inversa de Fourier definida na reta real e dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (2.21)$$

¹¹<http://wiki.epfl.ch/sgwt>

Pode-se interpretar a Eq. 2.21 como a expansão da função f na base definida pelas funções $e^{i\omega x}$, as quais são autofunções do operador Laplaciano unidimensional $\frac{d}{dx^2}$:

Analogamente, pode-se definir a transformada de Fourier de um grafo, usando:

- i. a matriz de seu Laplaciano não-normalizado $\mathcal{L}$
- ii. sua equação característica:

$$\mathcal{L}\chi_l = \lambda_l\chi_l \quad (2.22)$$

onde χ_l e λ_l são respectivamente as autofunções e autovalores de $\mathcal{L}$.

A matriz $\mathcal{L}$ tem propriedades especiais pelo fato de ser *autoadjunta*¹², unitária e real. São elas (Barata, 2011, Cap. 8):

- 1. tem um conjunto de autovalores reais.
- 2. tem um conjunto completo de autovetores ortonormais.
- 3. é diagonalizável.

Assumindo que G é um grafo conexo, os autovalores de $\mathcal{L}$ podem ser ordenados como $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$.

Analogamente à Eq. (2.21), para qualquer função $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^N$, sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é definida por:

$$\hat{f}(l) = \langle \chi_l, f \rangle = \sum_{n=1}^N \chi_l^*(n) f(n) \quad (2.23)$$

ou seja, a transformada de Fourier de f associada à l -ésima autofunção corresponde a sua expansão nas n componentes da autofunção χ_l de $\mathcal{L}$, ou ainda, a projeção de f em χ_l , definida pelo produto escalar usual entre ambas. Note que os índices $n \in \{1, \dots, N\}$ dos vértices v_n , no domínio dos vértices, e os índices $l \in \{0, \dots, N-1\}$ das autofunções χ_l , no domínio espectral, são análogos respectivamente às variáveis tempo t e frequência f na Transformada de Fourier clássica.

Assim, sua inversa é definida como:

$$f(n) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l) \chi_l(n) \quad (2.24)$$

Na **SGWT**, uma wavelet é um **operador** $T_g = g(\mathcal{L})$, onde $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função núcleo (*kernel*) passa-banda¹³, análoga à transformada de Fourier de uma *wavelet* clássica. O operador wavelet T_g age sobre uma função $f(v)$ definida sobre todo vértice v do grafo representado pelo operador $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$, por suas propriedades, é um operador linear limitado autoadjunto no espaço de *Hilbert*, pode-se usar o **Cálculo Funcional Contínuo** (Barata, 2011) para definir a função g sobre aquele operador, lançando mão da representação espectral do operador $\mathcal{L}$, que aqui é equivalente à transformada de Fourier do grafo definida na Eq. (2.23).

A ação do operador wavelet sobre f é definida no domínio de Fourier, como uma modulação de cada modo de Fourier:

$$\widehat{T_g f}(l) = g(\lambda_l) \hat{f}(l) \quad (2.25)$$

No domínio do grafo, a operação correspondente é obtida pela transformada de Fourier inversa da Eq. (2.25), evocando a definição da Eq. (2.24) isto é:

¹²equivalentemente, *simétrica* ou *hermitiana*

¹³satisfaz a condição de admissibilidade

$$(T_g f)(m) = \sum_{l=0}^{N-1} g(\lambda_l) \hat{f}(l) \chi_l(m) \quad (2.26)$$

Como a transformada *Wavelet* clássica é uma transformada do tipo tempo-escala (da F. Costa e Cesar Jr., 2009), o operador *wavelet* deve ser definido para uma determinada escala t :

$$T_g^t = g(t\mathcal{L}) \quad (2.27)$$

Para obter as *wavelets* espectrais deste grafo, basta aplicar o operador acima definido sobre funções impulso, localizadas em cada vértice n , isto é, aplicar T_g^t sobre cada função $\delta_i(j)$, com:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tomando f por δ na Eq. (2.23), tem-se:

$$\hat{\delta}(l) = \langle \chi_l, \delta \rangle = \sum_{m=1}^N \chi_l^*(m) \delta_n(m) = \chi_l^*(n) \quad (2.28)$$

e substituindo-se o resultado da Eq. 2.28 na Eq. 2.26, verifica-se que os coeficientes da transformada *Wavelet* também podem ser obtidos a partir dos operadores definidos na Eq. 2.26:

$$(T_g \delta)(m) = T_g^t \delta_n(m) = \psi_{t,n}(m) = \sum_{l=0}^{N-1} g(t\lambda_l) \chi_l^*(n) \chi_l(m) \quad (2.29)$$

Em palavras, Hammond *et al.* (2011) usaram o **Cálculo Funcional Contínuo** para definir o operador wavelet T_g , cujo núcleo é a função g avaliada sobre o operador $\mathcal{L}$, usando sua representação espectral (autovalores λ_l e respectivas multiplicidades), aplicado à transformada de Fourier $\hat{f}$ de uma função f definida nos vértices do grafo.

Por definição, a matriz $\mathcal{L}$ está relacionada à topologia subjacente ao grafo G . Assim, convém ressaltar que a ação do operador *wavelet* sobre f corresponde a sua decomposição no conjunto de autofunções de $\mathcal{L}$, o que **captura simultaneamente a conectividade definida pela topologia da rede e as características da função** (Leonardi e Ville, 2011).

Análise de Formas usando *Wavelets* em Grafos

3.1 Método Proposto

Da discussão na sessão anterior, conclui-se que a *SGWT*, por definição, é sensível à topologia e aos valores definidos nos vértices do grafo. A estrutura geométrica do grafo pode ser incluída no problema, por meio dos pesos nas arestas, uma vez que a informação geométrica é de fundamental importância para a caracterização da forma por ele representada, como abordaremos na Seção 3.4. Considerando o exposto, propomos uma metodologia que objetiva a caracterização de formas usando a *SGWT*, mediante a estruturação em grafos dos pontos amostrados das formas, cujas etapas enumeramos a seguir:

1. Amostragem da forma: investigação de técnicas de amostragem de pontos representativos da forma.
2. Estruturação de amostras em grafos: investigação de abordagens de geração de grafos, cujas topologias correspondam à classe de equivalência que represente a informação visual contida nas formas.
3. Função-base: investigação de funções definidas nos vértices do grafo, que capturem informações concernentes à forma como influência oculta da topologia da rede sobre cada vértice.
4. Análise multiescala: aplicação da *SGWT* sobre os grafos, para desvendar a influência da topologia da rede sobre cada vértice.
5. Caracterização: composição de vetores de características, em termos dos coeficientes da *SGWT*.

Uma versão do esquema proposto foi implementada e resultados são apresentados no Capítulo 4. Nossa metodologia é composta pelas etapas mencionadas a seguir (Fig. 3.1).

Figura 3.1: Fluxograma da metodologia proposta: (1) Forma, (2) Amostragem, (3) Estruturação em grafo, (4) Transformada Wavelet sobre o Grafo (SGWT) e (5) Extração de características

3.2 Imagem de entrada

Considere uma imagem $2D$, como ilustrado no módulo (1)-**Forma** da Fig. 3.1. Em princípio, a entrada pode se uma imagem binária ou em níveis de cinza. Imagens coloridas podem ter seus canais processados separadamente pelo método aqui apresentado, compondo um único vetor de características no final. No caso de uma imagem binária, esta deve passar por alguma transformação, de modo a produzir uma imagem resultante, cujos pixels reflitam a morfologia da forma em questão.

Seja I a imagem a ser analisada. No presente trabalho, denominamos $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ de *função-base*, definida sobre os vértices de G e dada por:

$$f(v_i) = I(v_{i,x}, v_{i,y}) \quad (3.1)$$

onde, sem perda de generalidade, $v_{i,x}$ e $v_{i,y}$ são índices de coluna e linha respectivamente do pixel na imagem sob o vértice v_i do grafo.

Cumprе mencionar que I na Eq. 3.1 não é necessariamente a imagem bruta de interesse. No estudo de caso sobre galáxias aqui apresentado, I é a imagem filtrada por uma máscara da média com dimensões 5×5 , enquanto que no estudo de caso sobre formas binárias, I é a imagem resultante da transformada da distância aplicada à imagem binária original. Em ambos os casos, esta etapa de pré-processamento deve capturar localmente a estrutura a imagem na vizinhança de cada pixel como um escalar.

Os fundamentos teóricos que justificam a definição da função-base sobre a estrutura irregular do domínio dado pelo grafo serão detalhados na Seção 3.4.

Para os pesos nas arestas, definimos:

$$w_{i,j} = \frac{1}{(1 + |f(v_i) - f(v_j)|)^2} \quad (3.2)$$

Os pesos nas arestas costumam representar a similaridade entre os vértices que os conectam (Shuman *et al.*, 2013). Em vista disto, a função dada pela Eq. 3.2 representa a similaridade fotométrica entre os pixels relacionados aos vértices do grafo sobre eles. O termo 1 no denominador dá conta dos casos em que a diferença fotométrica é nula. O gráfico ilustrado na Fig. 3.2 mostra que, no limite das distâncias fotométricas tendendo a zero, os pesos tendem a um, enquanto que para distâncias fotométricas indo a 255, os pesos tendem a zero. Qualquer outra função, proporcional à similaridade entre os vértices, poderia ser usada em lugar da apresentada na Eq. 3.2, por exemplo, a função gaussiana.

Figura 3.2: Função Peso nas Arestas: o peso nas arestas usualmente representa a similaridade entre os vértices por elas ligados.

3.3 Amostragem

Em *Processamento de Sinais Digitais*, amostragem é a conversão da *variável independente*, do contínuo para o discreto, ao passo que *quantização* é a conversão da *variável dependente*, do contínuo para o discreto (Smith, 1999).

A posição das amostras e sua combinação é crucial para diversas tarefas de síntese de imagens em *Computação Gráfica* e *Visualização Científica*, o que tem motivado a exploração de variadas técnicas de amostragem, principalmente de padrões bidimensionais (Jones, 2006).

O teorema de Nyquist determina que o sinal amostrado, devidamente processado por um filtro ideal de reconstrução, reproduz exatamente o sinal original, desde que este sinal não contenha frequências acima do limite de Nyquist (Cook, 1986). Consequentemente, numa imagem amostrada, frequências maiores do que o limite de Nyquist (metade da frequência de amostragem) são amostradas incorretamente. Se as amostras estiverem espaçadas uniformemente, estas frequências podem aparecer como baixas frequências no sinal (Jones, 2006). Este fenômeno de mudanças de frequência de um sinal durante a amostragem é conhecido na literatura como *aliasing*¹, um termo em Inglês que significa pseudônimo e poderia ser entendido como uma *falsa identidade* ou como a atuação de um *impostor*, pois, tal qual um criminoso impostor poderia assumir uma identidade falsa (um *alias*), um sinal amostrado poderia assumir outras frequências que não estão presentes no sinal contínuo. Como o sinal amostrado não está mais relacionado de maneira única a sua contrapartida contínua, torna-se impossível sua reconstrução sem ambiguidade. Neste caso o sinal teria ocultado completamente sua identidade, o que caracteriza um *crime perfeito*! Com esta descrição do efeito de *aliasing*, Smith (1999) define uma amostragem com tais características como uma *amostragem inadequada*. Em outras palavras, a Teoria da Amostragem prevê que frequências maiores do que o limite de Nyquist podem causar o efeito de *aliasing*, sempre que uma grade de amostragem regular for empregada. Não obstante o processo de amostragem ser intrinsecamente incapaz de reproduzir aquelas frequências, o surgimento do efeito de *aliasing* decorre da regularidade da grade de amostragem. Se os pontos amostrados não estiverem regularmente espaçados, a energia naquelas frequências pode surgir como ruído, um artefato muito menos indesejado do que o efeito de *aliasing* (Cook, 1986).

Duas abordagens *anti-aliasing* para contornar este fenômeno são bem conhecidas, sendo elas: a *Super Amostragem*, que usa mais do que uma amostra regularmente espaçada por pixel, ou a *Amostragem Adaptativa*, que recorre a raios adicionais nas proximidades das bordas, reduzindo o efeito de *aliasing*, ao custo de um número maior de raios (Cook, 1986). No entanto, pelas razões

¹pseudônimo, identidade falsa, impostor

discutidas no parágrafo anterior, a preferência por métodos baseados em técnicas de amostragens de imagens usando grades irregulares está devidamente justificada. De fato, o olho humano constitui-se num exemplo natural e eficiente de amostragem com distribuição não-uniforme de posições, haja vista seu número limitado de fotoreceptores localizados no interior da fóvea e estruturados num padrão regularmente espaçado em disposição hexagonal (Yellott-Jr, 1983). Naturalmente, este processo está sujeito ao limite de *Nyquist* e a regularidade do padrão hexagonal favorece o surgimento do efeito de *aliasing*, que é evitado pela lente, atuando como um filtro passa-baixas. Por outro lado, no exterior da fóvea, a distribuição é não-uniforme, evitando o efeito de *aliasing*, já que as células encontram-se mais afastadas e a taxa de amostragem é mais baixa (Cook, 1986).

Dentre os métodos que adotam a abordagem de amostragem por grades irregulares, destaca-se a distribuição do Disco de Poisson, como um dos melhores padrões, encontrando uma de suas mais importantes aplicações em amostragem e sendo frequentemente empregada em Computação Gráfica. Devido às suas propriedades de ruído azul, há um consenso geral de que as distribuições de Disco de Poisson é um dos melhores padrões de amostragem para uma vasta gama de aplicações, em detrimento de outras diversas técnicas de amostragem que têm sido estudadas ultimamente. Este método surgiu no âmbito da Computação Gráfica para resolver o problema do efeito de *aliasing*, um dos principais responsáveis pelo aparecimento de artefatos em imagens sintetizadas digitalmente, tendo sido inspirada no estudo da distribuição dos fotoreceptores da retina, uma indicação de que este padrão de amostragem é eficaz para imagens (Lagae e Dutré, 2008). A distribuição do Disco de Poisson pode ser definida como o limite de um processo de amostragem uniforme, com um critério de rejeição baseado em distância mínima. Nesta técnica, pontos sucessivos são tomados independentemente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]^2$. Se um ponto estiver pelo menos a uma distância R de todos os pontos no conjunto dos pontos aceitos, ele é incluído no conjunto. Caso contrário ele é rejeitado. A densidade do padrão do Disco de Poisson é determinada indiretamente pelo valor de R , que controla a distância mínima entre pontos (Bridson, 2007; Jones, 2006). Inúmeros algoritmos que implementam a distribuição de Disco de Poisson têm sido propostos. O trabalho de Lagae e Dutré (2008) compara diversos algoritmos e as respectivas distribuições, além de fornecer orientações sobre como escolher o melhor método para uma dada aplicação.

No presente trabalho, optamos por um método simplificado de amostragem, denominado *Jittering*, que significa acrescentar ruído às posições das amostras. Esta é uma das técnicas de *amostragem estocástica*, que pode ser usada para aproximar distribuições do Disco de Poisson. Em particular, o tipo de *Jittering* empregado neste trabalho foi o *Jittering* Não-correlacionado Gaussiano de uma grade regular, o qual produz bons resultados, mostrando-se adequado para uso em algoritmos de apresentação de imagens. Apesar deste método não eliminar completamente o efeito de *aliasing*, ele o reduz significativamente (Cook, 1986). O algoritmo que projetamos para este método é descrito a seguir. Inicialmente, uma grade $M \times M$ com um número $N = M^2$ de pontos regularmente espaçados foi criada a partir dos pontos do domínio da imagem. Antes de iniciar a estruturação destes pontos num grafo, adicionaram-se valores da realização de uma variável aleatória de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 4 às coordenadas cartesianas de cada ponto da malha, a fim de perturbar a organização geométrica regular dos pontos.

Como mencionado na Seção 3.2, dependendo da aplicação, a imagem pode ter passado por algum pré-processamento, como o filtro da média com uma máscara de dimensões 5×5 . A relação entre o número de amostras, o grau de perturbação da posição dos pontos (σ da distribuição gaussiana) e o tamanho da máscara concordam com o fato, bem conhecido em Estatística, de que numa distribuição normal, 68% de seus valores recaem sob a abertura de um σ . Portanto, 68% das coordenadas serão devidamente perturbadas dentro do intervalo dado por $\sigma = 4$, o que motivou a escolha do tamanho da máscara da média em 5×5 , a fim de atribuir a cada vértice uma combinação dos valores numa vizinhança dentro dos limites da perturbação das coordenadas.

Obviamente, a principal vantagem relacionada à etapa de amostragem é a diminuição do tamanho do conjunto de dados analisado para algumas poucas amostras. Além disto, este módulo confere versatilidade ao arcabouço, pois nenhuma restrição é imposta sobre a escolha dos pontos.

Convém situar os módulos de pré-processamento e amostragem aqui descritos, no contexto

do processo de *Reamostragem* (Smith, 1981), descrito na literatura. A relação entre os módulos supracitados e *Reamostragem* evidencia-se por suas definições:

- o processo de transformar geometricamente imagens digitais (Dodgson, 1992);
- uma operação matemática que mapeia uma coleção de números em outra (Dodgson, 1992);
- o processo de transformar uma imagem discreta definida num conjunto de coordenadas para um novo (Parker *et al.*, 1983);
- o processo de determinar um valor de intensidade adequado para cada pixel na imagem final, dada uma imagem inicial e uma transformação (Fiume, 1989).

Diferentes autores propuseram a decomposição do processo de *Reamostragem* em partes. Parker *et al.* (1983) dividem este processo em duas partes: *Interpolação/Reconstrução* da imagem discreta para uma imagem contínua e *Amostragem* da imagem interpolada. Smith (1981) propôs uma decomposição em quatro partes, isto é, *Reconstrução*, *Transformação*, *Pré-filtragem* e *Amostragem*. Heckbert (1989) adaptou esta decomposição, substituindo a *Pré-filtragem* pela *Pós-filtragem* e a usou para formular o *Filtro de Reamostragem*. Dodgson (1992) conjectura que, basicamente, qualquer método de reamostragem pode ser decomposto em três partes: *Reconstrução*, *Transformação* e *Amostragem*. Adotamos esta última para descrever os primeiros módulos da nossa metodologia, como segue.

Na etapa de Reconstrução, produz-se uma *superfície contínua de intensidade* (imagem contínua) a partir de uma imagem discreta. A reconstrução pode ser efetuada por meio de uma interpolação, mediante a convolução de um filtro linear com as amostras, resultando na superfície contínua de intensidade (imagem contínua) (Dodgson, 1992). No estágio de Transformação, aplica-se uma transformação geométrica sobre a superfície contínua de intensidades (imagem contínua). Na fase final de Amostragem, amostra-se a superfície contínua de intensidades, produzindo uma nova imagem reamostrada, usando qualquer método, seja ele de amostragem por um ponto, múltiplos pontos ou por área (Dodgson, 1992). Em particular, o Amostrador por área (*area resampler*) (Heckbert, 1989) pode ser pensado como um filtro seguido de uma amostragem puntual. Consoante o processo de Reamostragem e sua decomposição em três partes, os primeiros módulos de nossa metodologia assumem a seguinte configuração:

1. Reconstrução: a superfície contínua de intensidades (imagem contínua) é obtida mediante interpolação pelo “filtro” da média de uma máscara 5×5 ;
2. Transformação: a tesselação da imagem em um diagrama de Voronoi pode ser interpretada como uma transformação geométrica, em que o suporte da imagem é particionado em células de Voronoi c_i ;
3. Amostragem: neste trabalho, usamos um amostrador puntual, que toma o centróide de cada c_i como amostra e o respectivo valor da imagem contínua. Alternativamente, poder-se-ia empregar um amostrador por área, tomando-se a área de cada célula c_i e o respectivo centróide como amostra. Neste caso, o árbitro, que decide qual valor naquela área deve ser atribuído à amostra, pode ser definido como o valor máximo do histograma h_i , correspondente à célula c_i .

3.4 Estruturação em Grafo

O conceito de topologia discutido no escopo da Seção 2.2.1 também é referenciado com o mesmo significado e outros significantes na literatura, tais como a *conectividade do grafo* (Biasotti *et al.*, 2008), as *relações de incidência* do grafo (Carlsson, 1996), ou ainda a *estrutura combinatória* do grafo (Devillers *et al.*, 1997; Kreher e Stinson, 1999). Este último termo tem sido empregado indistintamente como sinônimo de conectividade do grafo ou como sua própria definição: um grafo

é uma *estrutura combinatória* que pode ser descrita como coleções de subconjuntos de 2-elementos (arestas não-orientadas) ou 2-tuplas (arestas orientadas) de um conjunto de vértices $V(G)$ (Kreher e Stinson, 1999). Evidentemente, para um mesmo conjunto de vértices $V(G)$, diferentes *estruturas combinatórias* resultam em diferentes grafos.

Assim, considerando a conotação de topologia neste contexto e a definição dada na Seção 2.2.1 para classes de equivalência de grafos, um dos objetivos deste trabalho de pesquisa foi investigar uma representação de formas por grafos, de modo a classificar as formas, segundo as classes de equivalência em que os respectivos grafos fossem mapeados. Para tanto, seria necessário desenvolver um método que gerasse um grafo com a topologia de uma mesma classe de equivalência para toda forma que pertencesse a uma mesma categoria morfológica. Um tal método deveria atender a um número de requisitos básicos, a saber: (i) identificar inequivocamente um conjunto de pontos característicos² de cardinalidade fixa para toda e qualquer instância de forma pertencente a uma mesma classe morfológica, (ii) gerar sistematicamente uma mesma *estrutura combinatória* para qualquer conjunto de pontos identificados conforme o requisito anterior, além de (iii) fornecer um *isomorfismo* que mapeasse o grafo gerado para esta dada instância diretamente sobre o grafo modelo associado à topologia de uma classe de equivalência. Para atender ao requisito (i), seria necessário associar partes, componentes ou pontos de interesse da imagem a um vértice, uma tarefa não-trivial. Em particular, foram experimentados diversos métodos de extração de pontos de interesse, tais como *SIFT* (Lowe, 1999) e *SURF* (Bay et al., 2006), entre outros, todavia, nenhum dos métodos garantiu a cardinalidade fixa para o conjunto de pontos de interesse encontrado.

Na Seção 2.1 foram descritos métodos baseados em esqueletonização ou geração de grafos de *shock*, que levam em consideração informações morfológicas da forma que deu origem aos respectivos grafos. É possível que estes grafos sejam adaptáveis para atender ao requisito (ii). Em nossos experimentos, observamos que instâncias ligeiramente diferentes de uma classe morfológica podem gerar grafos de *shock* com topologias diferentes, o que inviabiliza seu uso para nossos propósitos. Mostramos na Seção 4.1, que, em geral, mesmo para aproximações poligonais obtidas por algoritmos de extração do esqueleto reto (*straight skeleton*) (Aichholzer et al., 1995), nem a cardinalidade de $V(G)$ é preservada para instâncias da mesma classe, tampouco a *estrutura combinatória* do grafo dado pelo esqueleto reto resultante.

No que tange à detecção de estruturas isomórficas em atendimento ao requisito (iii), esta pode ser realizada por algoritmos já existentes, baseados, por exemplo, no método dos invariantes ou no método dos certificados (Kreher e Stinson, 1999).

Vale ressaltar que grafos com a mesma topologia podem ter sido gerados a partir de formas geométricas perceptualmente semelhantes, mas formas geométricas diferentes também podem gerar grafos com a mesma estrutura combinatória, formando classes de equivalência (Carlsson, 1996). Disto, conclui-se que a topologia do grafo associado a uma forma não é suficiente para caracterizá-la, fazendo-se necessária a inclusão de informações da estrutura geométrica para este fim. De fato, a diferença entre os conceitos de estrutura topológica e estrutura geométrica é explicitamente destacada por Devillers et al. (1997), que denota por Γ um grafo geométrico e por G sua estrutura combinatória subjacente (topologia).

Considerando, então, a dificuldade em obter-se um conjunto de pontos de interesse com cardinalidade fixa para sempre gerar uma representação em grafo com a mesma topologia, bem como a insuficiência da *estrutura combinatória/topologia do grafo* para representar inequivocamente sua morfologia, fato constatado pelo experimento descrito na Seção 4.1, optamos recentemente por não representar a forma em si por um grafo. Em lugar disto, decidimos representar, por um grafo, o domínio discreto de alguma função definida sobre a imagem, incorporando informações geométricas da imagem, e, por assim dizer, representando este domínio por um grafo geométrico. Um *grafo geométrico* é definido como sendo um grafo desenhado por arestas em segmentos de reta e imerso no plano (Pach, 2004), ou num espaço d -dimensional, isto é, um grafo cujos vértices tenham coordenadas de dimensão d (Devillers et al., 1997). Vale salientar que um grafo geométrico é uma subclasse de grafos topológicos, em que arestas são segmentos de reta, posto que um grafo topológico é definido

²pontos de interesse, *landmarks*

como uma representação de um grafo no plano, onde vértices são pontos distintos e as arestas são arcos de Jordan. Um grafo topológico também é chamado de desenho de um grafo (Pach, 2013). A importância em diferenciar estes conceitos é evidenciada em sistemas de *Visualização Científica e Computação Gráfica*, em que as estruturas topológica e geométrica de um dado conjunto de pontos são definidas separadamente e combinadas posteriormente, a fim de realizar sua síntese gráfica (Schroeder, 2001; Schroeder et al., 2002). Um *grafo geométrico* Γ determina uma *subdivisão planar* S , ou seja, uma partição do plano em regiões denominadas faces. Diz-se que a subdivisão planar S é induzida por Γ e que é *convexa* se a borda de cada face é um polígono convexo. Uma subdivisão planar S induzida por um grafo geométrico Γ é dita *maximal*, se não existir outro grafo geométrico Γ' , tal que, Γ é um subgrafo de Γ' . Numa *subdivisão planar maximal*, a borda de cada face interna é um triângulo e a borda da face externa é um polígono convexo. Uma *subdivisão planar maximal* também é chamada de *triangulação* (Devillers et al., 1997).

Um sólido formalismo que fundamenta esta interpretação do grafo geométrico como o domínio irregular de uma função definida sobre a imagem é fomentado pelo encontro entre o *Cálculo Discreto* (Grady e Polimeni, 2010) e o *Processamento de Sinais em Grafos* (Shuman et al., 2013). No *Cálculo Discreto*, um domínio discreto pode ser representado por um *complexo celular*, o qual é composto por uma coleção de espaços vetoriais de p -células. Uma p -célula (σ^p) é definida como um conjunto de pontos que é homeomorfo a uma bola fechada unitária p -bola $\mathcal{B}_p$, ou seja $\mathcal{B}_p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1\}$. A borda $\partial\mathcal{B}^p$ da p -célula σ^p é a parte da célula que é mapeada pelo homeomorfismo na borda da bola unitária, isto é, $\partial\mathcal{B}_p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = 1\}$. Uma p -célula pode ser representada por um conjunto ordenado de vértices formando um p -politopo complexo. As p -células de baixa ordem mais simples são as 0-células (vértices), as 1-células (arestas) e as 2-células (faces). Um grafo é um caso especial de um *complexo celular*, o qual é composto por 0-células (vértices) e 1-células (arestas), constituindo-se, portanto, num 1-complexo. A matriz de adjacência representa a *estrutura topológica* do *complexo celular* algebricamente. Para grafos geométricos, suas 0-células são consideradas vértices de um *manifold* discreto e, portanto, estão imersos em algum espaço extrínseco, ou seja, cada vértice está associado a uma coordenada em n -dimensões. Esta imersão dos vértices permite que se definam outras características do complexo, como orientação e dualidade em termo do espaço ambiente. Quando uma p -célula consiste exatamente de $p + 1$ vértices, ela é dita ser um p -simplexo. Um *complexo celular* pode ser considerado como uma tesselação de um domínio contínuo (p -manifold), em que a tesselação pode ser regular ou irregular (Grady e Polimeni, 2010). Uma tesselação, por sua vez, é definida como a partição de uma superfície. Uma tesselação é dita regular, se for formada por figuras geométricas do mesmo tipo. Tesselações regulares³ só podem ser obtidas mediante a composição de triângulos, quadrados ou hexágonos (ver Aristotle, 1922, cap. 8).

O arcabouço teórico fornecido pelo *Cálculo Discreto* viabiliza a chamada *extração de conteúdo*, um termo que designa a caracterização de redes ou a análise de dados estruturados em rede (Grady e Polimeni, 2010). O campo denominado *Processamento de Sinais em Grafo* é uma área emergente que combina as teorias algébrica e espectral com conceitos de análise harmônica computacional para processar sinais em grafos. Do ponto de vista desta nova área, estes dados, por sua vez, podem ser interpretados como uma coleção finita de amostras, estando uma amostra em cada vértice. Neste grafo ponderado, os pesos nas arestas representam o grau de similaridade entre os vértices por eles conectados (Shuman et al., 2013).

Neste trabalho, enveredamos pela interpretação da estruturação em grafo geométrico dos pontos amostrados como uma subdivisão planar do domínio da imagem, optando pelo método de subdivisão planar maximal denominado Triangulação de *Delaunay* (ver Fig. 3.4). Com efeito, a triangulação de *Delaunay* é o dual do diagrama de *Voronoi* (Dyer et al., 2007), um tipo de tesselação /partição do domínio da imagem, em que as relações de vizinhança entre as partes (células de *Voronoi*) são representadas pelas arestas da triangulação.

Os pontos amostrados, conforme o método descrito na Seção 3.3, foram topologicamente es-

³O leitor deve acautelar-se para não confundir a regularidade neste contexto, que se refere à uniformidade dos tipos de figura usadas para formar a tesselação, com a regularidade espacial nas posições dos vértices da tesselação discutida anteriormente.

Figura 3.3: Domínios vistos como complexos celulares: da esquerda para a direita, contínuo, regular e irregular. Adaptado de (Grady e Polimeni, 2010).

truturados como um grafo arbitrário por triangulação *Delaunay*. Como mencionado anteriormente, nesta partição, as células do diagrama de *Voronoi* determinam regiões da imagem, centradas nos pontos de amostragem. Agora, uma vez que a topologia do grafo foi obtida e os valores da *função-base* foram estimados, as distâncias fotométricas de pares entre vértices no grafo são calculadas e os pesos nas arestas são computados em seguida, de acordo com a Eq. 3.2. Assim, estabelecemos relações entre as células de *Voronoi*, por meio das arestas de *Delaunay*, usando pesos que representam o grau de similaridade fotométrica entre as regiões.

Chamamos de distância fotométrica entre os vértices v_i e v_j ao termo $|f(v_i) - f(v_j)|$ que aparece no denominador da Eq. 3.2. Esta função, a que chamamos de *função-base*, é definida sobre o conjunto de vértices do grafo resultante, devendo capturar atributos que representam a influência subjacente de toda a topologia da rede sobre cada vértice, através de várias escalas. Este propósito é atingido, mediante a avaliação dos valores da função-base, definida sobre o domínio irregular do grafo, pela cálculo da média em torno do centro da respectiva célula de *Voronoi*. Alternativamente, poder-se-iam levantar histogramas de intensidades para cada região e atribuírem-se aos respectivos vértices, alguma outra medida de tendência central ou de dispersão dos histogramas correspondentes. Saliente-se que a função-base deve ser definida de maneira a outorgar informação relacionada à forma de interesse. Desta maneira, o domínio regularmente estruturado da malha da imagem é assim representado por uma rede irregularmente estruturada e menor. A estruturação topológica dos pontos da amostra por um grafo arbitrário mantém um número menor das relações morfológicas existentes entre pixels do que a grade da imagem original.

De fato, como discutido na Seção 3.3, a tesselação da imagem em células de *Voronoi* pode ser interpretada, segundo o esquema de *Reamostragem* ali descrito, como um método de redimensionamento da imagem, mais conhecido como *downsampling*. Assim, pode-se pensar em cada célula de *Voronoi* como um pixel de dimensões maiores, o que nos remete a métodos de supersegmentação, tais como *Superpixels* (Mori, 2005; Mori et al., 2004; Ren e Malik, 2003) e *TurboPixels* (Levinshtein et al., 2009), baseados no critério global denominado *Cortes Normalizados* em grafos, proposto por Shi e Malik (2000). A tesselação da imagem como diagrama de *Voronoi* compartilha de algumas das vantagens daqueles métodos de supersegmentação, como o ganho de eficiência computacional, pela redução das dimensões da estrutura de dados que representa a imagem (Mori, 2005).

Pode-se dizer que os módulos compostos pela amostragem e tesselação do domínio da imagem, até então descritos, poderiam ser entendidos como um método segundo a abordagem de reconhecimento estrutural de padrões, por meio da decomposição da forma em subregiões e sua estruturação combinatória por grafos (Sonka et al., 2007). Esta coleção de amostras, cada qual localizada em um vértice, é chamada de *senal em grafo* (Shuman et al., 2013).

Figura 3.4: Tesselção do domínio de uma imagem por diagrama de Voronoi, que corresponde ao dual da triangulação de Delaunay, o qual aparece sobreposto à tesselação.

3.5 Análise Multiescala

Com vistas ao desdobramento em várias escalas da informação contida na função-base, de modo a melhor revelar a influência da rede sobre cada vértice, uma análise multiescala foi realizada como ilustrado no módulo (4)-**SGWT**. A análise multiescala é capaz de destacar singularidades que ocorrem na função *função-base* através de várias escalas, de maneira que podem-se observar assinaturas dentro do sinal observado. A função-base $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$, que podemos tratar como um sinal conforme o *Cálculo Discreto*, é definida sobre os vértices do grafo geométrico e pode ser representada como um vetor $f \in \mathbb{R}^N$, onde cada componente i representa o valor da função no i -ésimo vértice em $V(G)$ (Shuman *et al.*, 2013). Espera-se que o valor desta função-base f definida em cada vértice v represente o resultado da interação de G com v .

No presente trabalho, o módulo de Análise Multiescala foi realizado por meio da Transformada Wavelet Espectral do Grafo (*SGWT*), usando a abordagem de Hammond *et al.* (2011) para obter a transformada *Wavelet* de grafos associados a formas. Os tópicos teóricos deste método, mais relevantes para nossos objetivos, foram sumariados na Seção 2.5. É mister enfatizar que a *SGWT* não é uma ferramenta para analisar a estrutura combinatória (topologia) de um grafo, mas sim para analisar uma função-base $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$, que tem como domínio uma estrutura combinatória,

possivelmente irregular, dada por um grafo ponderado $G = (V(G), E(G))$ e pesos $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. A estrutura combinatória do grafo geométrico é incorporada ao problema na definição do operador wavelet, mediante $\mathcal{L}$. Por conseguinte, dado um grafo G representado por $\mathcal{L}$ e um operador wavelet T_g definido sobre seus autovalores, uma variação sutil na topologia de G ocasiona uma alteração em T_g .

Pode-se dizer que a Transformada Wavelet tradicional é um caso particular da *SGWT*, uma vez que aquela é definida num subconjunto do $\mathbb{R}^N$, em particular, no $\mathbb{R}^2$, para o caso em que o domínio da função é o complexo celular dado pela grade regular subjacente à imagem, com vizinhança 4 ou 8 e com pesos valendo 1 nas arestas (como ilustrado pelo exemplo de análise da superfície do lago Geneva, em (Hammond et al., 2011)). A *SGWT* surgiu como resposta à necessidade de realização de análise multiescala de funções definidas em domínios irregulares, diferentes, portanto, do $\mathbb{R}^2$.

Hammond et al. (2011) projetaram a wavelet, usada em seu trabalho, diretamente no domínio espectral, de modo a apresentar uma boa localização no limite de escalas finas, garantindo o comportamento de uma potência mônica para a g nas proximidades da origem e seu decaimento para valores grandes de x . Um sinal definido diretamente no domínio espectral é chamado de *kernel* (Shuman et al., 2013). A função g é construída por partes, satisfazendo a estas condições e sua continuidade é assegurada mediante o uso de *splines* cúbicas ligando as partes. Seu método foi disponibilizado⁴ como uma biblioteca em código aberto implementado em *scripts* para a plataforma *Matlab*®.

Em Hammond et al. (2011), prova-se que a complexidade total de tempo para a transformada rápida *SGWT*, que aproxima os *kernels* g pelos polinômios de Chebyshev, é $O(M|E| + N \sum_{j=0}^J M_j)$, onde M é o grau escolhido para o polinômio, $|E|$ é o número de arestas, $N = |V|$ é o número de vértices, J é o número de escalas e M_j é o número de termos do polinômio para a escala j . Para o caso em que $|E|$ cresce linearmente com N , a complexidade de tempo da *SGWT* reduz-se então a $O(N)$. No que diz respeito à complexidade de espaço, a transformada rápida *SGWT* requer espaço em memória proporcional a $N(J+1) + 3N$. Portanto, a fim de processar um número X de imagens, o tempo necessário por nosso método consome tempo $O(XN)$. Como N é um parâmetro escolhido inicialmente constante, nosso sistema apresenta, em última análise, uma complexidade de tempo $O(X)$, ou seja, proporcional ao número de imagens. Além disso, o espaço necessário para processar X imagens teoricamente permanece $N(J+1) + 3N$, pois todas as variáveis são reutilizadas durante as iterações da estrutura de repetição. Ainda, vale a pena usar listas com nomes de arquivos e salvar resultados intermediários em metaarquivos, de maneira que o laço possa ser retomado de onde parou, no caso de interrupções eventuais.

3.6 Extração de Características

Finalmente, a *SGWT* pode proporcionar características para compor um vetor de características a fim de alimentar um classificador, como ilustrado no módulo (5)-**características**. Em particular, a *SGWT* foi computada para 4 escalas, com o *kernel* definido por Hammond et al. (2011). No contexto de *Reconhecimento de Padrões*, o número de componentes de um vetor de características corresponde à dimensão deste vetor. Então, cada imagem pode ser representada por um vetor de características de 4 (escalas) $\times N$ (vértices) = $4N$ dimensões. Por exemplo, para o caso particular de análise de imagens de galáxias do *GZ2*, foram 256 vértices analisados em 4 escalas, consequentemente 1024 dimensões. A descrição desta aplicação é detalhada na Seção 4.3.3. Temos assim, um vetor de características gigantesco, constituído por respostas da *SGWT* em cada vértice em todas as escalas.

Em geral, são dois os principais problemas que costumam surgir nos processos de classificação de objetos representados por vetores de características de alta dimensão: a redundância de informações que normalmente existe em conjuntos de amostras obtidos por diferentes dispositivos (Theodoridis e Koutrombas, 2009) e a *Maldição da Dimensionalidade*, que compromete o desempenho de um classificador, a medida que o número de características (componente do vetor multidimensional) aumenta, quando permanece constante a cardinalidade do conjunto de treinamento. Com o aumento

⁴<http://wiki.epfl.ch/sgwt>

do número de características, também melhora a discriminação entre classes até certo ponto, mas o erro do classificador começa a aumentar, pois seria necessário um aumento no número de amostras, para que mais parâmetros do classificador fossem estimados (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

A solução deste problema invoca o conceito necessário de *Redução de Dimensionalidade*, a fim de escolher características relevantes, removendo redundâncias (Theodoridis e Koutrombas, 2009) e evitando a maldição da dimensionalidade. Duas são as principais abordagens para tratar este problema: a *Seleção de Características* e a *Extração de características*.⁵

Dentre as técnicas de extração/fusão de características, figura a *Análise de Componentes Principais* (PCA),⁶ a qual realiza uma transformação linear de um vetor de entrada de alta dimensão em um vetor de mais baixa dimensão, cujos componentes não estão correlacionados entre si (Theodoridis e Koutrombas, 2009). Este método busca minimizar a covariância entre as características transformadas ao longo dos principais eixos de coordenadas, maximizando a variância ao longo de cada novo eixo, de modo a tornar as novas características não-correlacionadas (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Basicamente, o PCA pode ser usado com três propósitos, a saber: compressão de dados, visualização e extração de características para redução de dimensionalidade (Bishop, 2006; Jolliffe, 2002). Neste trabalho, não usamos PCA para compressão de dados, tampouco para reduzir o número de características, com vistas à classificação, uma vez que não foi realizada classificação. Usamos o PCA objetivando à visualização do espaço de características e verificação da viabilidade deste método para discriminação das classes consideradas.

Neste trabalho, aplicamos esta última técnica aos vetores obtidos da *SGWT*. Assim, as $4N$ características de cada vetor foram reduzidas a 2 componentes principais, resultando num espaço reduzido de dimensão 2.

A técnica de visualização científica denominada *gráficos de espalhamento* foi empregada sobre os pontos do espaço reduzido, a fim de avaliar qualitativamente o poder de discriminação dos coeficientes produzidos pela *SGWT*. Para fins de interpretação, sobrepusemos algumas instâncias de cada classe aos *gráficos de espalhamento*.

⁵ou Fusão de Características

⁶Principal Components Analysis

Capítulo 4

Resultados Experimentais

Neste capítulo, são descritos experimentos realizados com diferentes combinações de métodos para os passos definidos na metodologia proposta. Uma extensa avaliação experimental foi realizada para caracterizar as propriedades do método. Essa caracterização do comportamento da *SGWT* é fundamental, uma vez que, até onde sabemos, esta é a primeira vez que a *SGWT* está sendo usada para a caracterização de formas *2D*.

A Tabela 4.1 sumariza todos os experimentos descritos neste trabalho, destacando objetivos, adiantando conclusões e apontando uma tabela específica com informações sobre cada experimento.

Tabela 4.1: *Experimentos, Objetivos, Conclusões e Configurações de Módulos*

Experimento	Objetivos	Conclusão	Configuração
Avaliação de Técnicas de Amostragem e Estruturação.	Testar uma técnica de amostragem e estruturação por aproximação poligonal e esqueleto reto.	A topologia de grafos pode variar muito para instâncias de uma mesma classe.	Tab. 4.2
A <i>SGWT</i> sobre a função Delta em uma malha regular.	Estudar o comportamento da <i>SGWT</i> em uma função definida sobre um domínio regular, com peso unitário nas arestas.	A <i>SGWT</i> comportou-se como a CWT em domínios 2D e a wavelet definida por Hammond exibiu a aparência do Chapéu Mexicano.	Tab. 4.3
A <i>SGWT</i> sobre uma estrutura conhecida <i>a priori</i> .	Verificar as respostas da <i>SGWT</i> em nós com valores definidos como número de filhos.	Os maiores valores da <i>SGWT</i> correspondem aos vértices com maior número de filhos.	Tab. 4.4
A <i>SGWT</i> sobre estruturas com variação geométrica.	Testar os efeitos sobre a <i>SGWT</i> quando os grafos geométricos sofrem transformações afins.	A <i>SGWT</i> mostrou-se invariante pelas transformações rígidas. A <i>SGWT</i> varia com deformações causadas por cisalhamento, mas não é covariante com esta transformação.	Tab. 4.5
A <i>SGWT</i> sobre estruturas com variações topológicas.	Investigar o comportamento da <i>SGWT</i> com a variação topológica dos grafos.	A adição de subárvores à raiz provoca alterações nas maiores escalas da <i>SGWT</i> . A adição de subárvores às folhas causa alterações nas menores escalas da <i>SGWT</i> .	Tab. 4.6
A <i>SGWT</i> com a variação geométrica de um vértice.	Investigar a influência dos pesos das arestas, transladando apenas um vértice do grafo geométrico.	Variação local de intensidade em torno do vértice transladado.	Tab. 4.7
A <i>SGWT</i> em grafos de polígonos.	Comparar as <i>SGWTs</i> obtidas para amostragens e estruturações diferentes de uma instância de uma mesma classe morfológica.	Os resultados das <i>SGWTs</i> não podem ser comparados, pois as topologias são diferentes.	Tab. 4.8
A <i>SGWT</i> em Grafos Estruturados por Malhas	Comparar as <i>SGWTs</i> obtidas para grafos estruturados por algoritmos iterativos de geração de malhas triangulares para duas instâncias de uma mesma classe morfológica	O algoritmo gera malhas com estruturas diferentes para formas perceptualmente semelhantes, portanto as <i>SGWTs</i> são diferentes.	Tab. 4.9
A <i>SGWT</i> para um grafo com variação crescente da geometria.	Estudar os efeitos sobre a <i>SGWT</i> da variação da estrutura geométrica de um grafo.	A correlação entre a <i>SGWT</i> de um modelo e suas versões perturbadas geometricamente decresce para perturbações cada vez maiores.	Tab. 4.10
Análise de formas da base MPEG7.	Investigar a viabilidade da <i>SGWT</i> para discriminação entre classes de formas binárias 2D.	As características da <i>SGWT</i> podem ser usadas para discriminar formas binárias 2D, usando o dual da transformada da distância definido sobre um grafo irregular obtido por triangulação de Delaunay.	Tab. 4.11
Análise de formas em agricultura.	Investigar a viabilidade da <i>SGWT</i> para discriminação entre classes de tomates diferentes.	As características da <i>SGWT</i> podem ser usadas para discriminar formas de tomates, usando a média 5×5 sob os vértices de um grafo irregular obtido por triangulação de Delaunay, com pesos nas arestas proporcionais à distância fotométrica.	Tab. 4.12
Análise de imagens não-rotuladas de galáxias do SDSS.	Investigar a viabilidade da <i>SGWT</i> para separar classes de galáxias perceptualmente diferentes.	Formas de galáxias perceptualmente semelhantes aparecem mais próximas no espaço reduzido de características e formas perceptualmente diferentes aparecem mais distantes no espaço reduzido de características.	Tab. 4.13
Análise de imagens de galáxias do SDSS rotuladas pelo GZ2.	Investigar a viabilidade da <i>SGWT</i> para discriminar entre classes de galáxias rotuladas.	As características da <i>SGWT</i> podem ser usadas para discriminar formas de galáxias das classes <i>rounded</i> e <i>cigar-shaped</i> , usando a média 5×5 sob os vértices de um grafo irregular obtido por triangulação de Delaunay, com pesos nos vértices proporcionais à distância fotométrica.	Tab. 4.14

4.1 Experimentos para avaliação de técnicas de amostragem e estruturação

Explorando as possibilidades de representar uma forma pela estruturação em grafo de um subconjunto de seus pontos característicos, estruturados topologicamente por um grafo que capturasse a geometria da forma, realizamos experimentos com uma combinação entre dois métodos para este propósito, a saber:

- *Aproximação Poligonal* para o contorno de uma forma
- extração do *Esqueleto Reto* de uma forma

Esta combinação foi testada com amostras de formas binárias da base ¹ *MPEG7 CE Shape-1 Part B*.

Inicialmente extraiu-se o contorno paramétrico de uma forma, cujo resultado foi amostrado uniformemente em seguida. A *aproximação poligonal* da amostragem do contorno foi realizada por meio de uma implementação simplificada ² do algoritmo recursivo de *Ramer-Douglas-Peucker*. Este algoritmo foi proposto independentemente por *Ramer* (1972) e *Douglas e Peucker* (1973). O *esqueleto reto* foi obtido a partir da aproximação poligonal do contorno, usando uma implementação ³ do algoritmo de *Aichholzer et al.* (1995). O *esqueleto reto* é constituído somente de segmentos de reta, os quais são partes dos bissetores angulares dos lados do polígono, diferindo dos eixos mediais, por aquele não estar relacionado ao conceito de diagrama de Voronoi, tampouco sendo definido em termos de uma função de distância, mas por um processo de encolhimento de um polígono (*Aichholzer e Aurenhammer*, 1998). Sua grande vantagem em relação ao *eixo medial*, ou *esqueleto morfológico*, está associada ao fato de ser formado apenas por segmentos de reta, apresentando uma estrutura combinatória de menor complexidade. Apesar de ambos os métodos representarem compactamente a forma de um polígono, o *esqueleto reto* é mais sensível a mudanças na forma. Sua principal desvantagem é não estar relacionado ao diagrama de Voronoi, prescindindo de todo o cabedal científico compilado para esta estrutura até então (*Aichholzer et al.*, 1995).

Como *função-base*, definimos a função *avgAPSP* (*Average All-Pairs Shortest Paths*), isto é, a Média dos Comprimentos de Todos os Caminhos Mais Curtos. O problema de obter os caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices do grafo e respectivos comprimentos representados numa matriz foi introduzido por *Shimbel* (1953), que foi seguido pela proposição de diversos algoritmos mais eficientes. Neste trabalho, usamos para este fim, o algoritmo de *Johnson* (1977). Em seguida, os caminhos foram normalizados pelo diâmetro do grafo⁴, para então obtermos a média *avgAPSP*. *Shimbel* (1953) declara que um caminho mais curto entre dois vértices mede a acessibilidade entre ambos. Com base nisto, podemos dizer que a *avgAPSP*, ora proposta, fornece uma medida da acessibilidade média de cada vértice, constituindo-se numa medida que reflete a influência da topologia de toda a rede sobre cada vértice, ou seja, exatamente o que esperamos que a *SGWT* seja capaz de desdobrar. O peso nas arestas foi definido como:

$$w_{i,j} = \frac{1}{(|r_i - r_j|)^2} \quad (4.1)$$

onde $|r_i - r_j|$ é a distância euclidiana entre os vértices v_i e v_j .

Note que a combinação destes métodos produziu grafos com topologias similares para o caso particular das instâncias da classe *rat* exibidas nas Fig. 4.1(a) e Fig. 4.1(c), fato que se evidencia pela semelhança dos gráficos das respectivas *funções-base* mostradas nas Fig. 4.1(b) e Fig. 4.1(d). Por outro lado, o método gerou grafos com topologias bastante distintas para os casos das instâncias da classe *ray* apresentadas na Fig. 4.2(a) e Fig. 4.2(c) e classe *shark*, na Fig. 4.3(a) e Fig. 4.3(c). A

¹http://www.imageprocessingplace.com/root_files_V3/image_databases.htm

²Função *dpsimplify* para *Matlab*. Cortesia de *Wolfgang Schwanghart*.

³*pySkeleton*[®], uma cortesia de *Olivier Teboul* - vision.mas.ecp.fr/Personnel/teboul/pySkeleton.php.

⁴o maior comprimento de um dos caminhos mais curtos no grafo.

diferença se torna mais notória, pelos gráficos das respectivas *funções-base* mostradas nas Fig. 4.2(b) e Fig. 4.2(d) e Fig. 4.3(b) Fig. 4.3(d).

Figura 4.1: Estruturação em grafo de pontos de interesse e respectiva função-base. (a) e (c) mostram grafos formados pela combinação entre aproximação poligonal e esqueleto reto para a forma rat, enquanto (b) e (d) mostram os gráficos das respectivas funções-base avgAPSP.

Tabela 4.2: Módulos do experimento para avaliação de técnicas de amostragem e estruturação

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Aproximação poligonal e Esqueleto reto		avgAPSP	Inverso do Quadrado da Distância Euclidiana

Figura 4.2: Estruturação em grafo de pontos de interesse e respectiva função-base. (a) e (c) mostram grafos formados pela combinação entre aproximação poligonal e esqueleto reto para a forma ray, enquanto (b) e (d) mostram os gráficos das respectivas funções-base avgAPSP.

Figura 4.3: Estruturação em grafo de pontos de interesse e respectiva função-base. (a) e (c) mostram grafos formados pela combinação entre aproximação poligonal e esqueleto reto para a forma shark, enquanto (b) e (d) mostram os gráficos das respectivas funções-base avgAPSP.

4.2 Experimentos para avaliação das propriedades da SGWT

4.2.1 A SGWT sobre a função Delta em uma malha regular

Neste experimento, visualizamos a SGWT da função *Delta de Kronecker* definida sobre uma grade regular, em que as arestas têm peso 1. A função é representada com valores iguais a zero em todos os vértices, exceto no vértice central, onde vale 1.

Como pode-se ver na Fig. 4.4, a SGWT aplicada a uma função conhecida e definida sobre uma grade regular, com pesos unitários nas arestas comportou-se como a Transformada Wavelet tradicional sobre o mesmo domínio e função.

Ainda, esta visualização nos permite verificar a Eq. 2.29, constatando que a transformada inversa de *Fourier* da *wavelet*, assim definida, revela que esta se assemelha à *wavelet 2D* conhecida como *chapéu mexicano*. Este resultado evidencia o fato destacado na Seção 2.5 de a Transformada Wavelet Tradicional ser um caso particular da SGWT.

Tabela 4.3: Módulos do experimento para a SGWT sobre a função Delta em uma malha regular

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
	Grade regular	Delta de Kronecker	Unitário

Figura 4.4: Visualização da SGWT em várias escalas da função Delta definida sobre uma malha regular, representada por um grafo com arestas de peso 1 e vizinhança de conectividade 4. Aqui são exibidas as SGWTs da função Delta em escalas decrescentes, ou seja, da escala mais global para a escala mais local. Note a semelhança entre a superfície da SGWT da função Delta e a wavelet denominada Chapéu Mexicano.

4.2.2 A SGWT sobre uma estrutura conhecida

A fim de investigar preliminarmente as propriedades da *SGWT*, mediante sua atuação em aplicações práticas em ambiente controlado, foram realizados experimentos usando dados sintéticos, isto é, conjuntos de pontos obtidos artificialmente e estruturação dos mesmos em árvores. Coordenadas de pontos obtidas por sorteio de distribuições multimodais bivariadas e isotrópicas (Fig. 4.5) compuseram o espaço amostral e um esquema de geração de árvores, a partir deste, foi proposto como descrito a seguir.

Os pontos sorteados destas distribuições foram estruturados em dendrogramas, por meio do método hierárquico aglomerativo de encadeamento completo⁵, o qual efetua a aglomeração de pontos conforme a distância euclidiana entre os objetos mais distantes entre *clusters*.

Figura 4.5: Estruturação de pontos sorteados de distribuições multimodais bivariadas e isotrópicas em dendrogramas pelo método hierárquico aglomerativo de encadeamento completo. (a) Exemplo de uma distribuição multimodal bivariada e isotrópica e (b) a estruturação em dendrograma destes pontos pelo método hierárquico aglomerativo de encadeamento completo (*agglomerative hierarchical complete linkage clustering*).

Normalmente, os resultados de algoritmos de *clustering* são visualizados por meio de *dendrogramas*, um tipo de diagrama em que os dados de entrada encontram-se nas folhas e os *clusters* aparecem como linhas que interligam outros *clusters*, segundo algum método hierárquico prescrito (ver Fig. 4.6(a)). Em geral, estes métodos são usados para classificação não-supervisionada (Duda *et al.*, 2000; Theodoridis e Koutrombas, 2009) e o número de classes é decidido limiarizando-se o dendrograma em algum nível conveniente para o problema.

Tabela 4.4: Módulos do experimento para a SGWT sobre uma estrutura conhecida

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Distribuição Gaussiana Multimodal Bivariada	Árvores dos Dendrogramas	Número de Filhos	Função Gaussiana da Distância Euclidiana

Gostaríamos de gerar estruturas em árvores, a partir dos dendrogramas, em que cada *cluster* fosse representado por um novo vértice rotulado, que não estivesse entre os pontos originalmente sorteados. Para tanto, foi desenvolvido e implementado um algoritmo para geração de árvores a partir da estrutura de dados gerada para os dendrogramas produzidos. Na árvore resultante, os n primeiros rótulos foram dados às amostras originais sorteadas, as quais também correspondem às folhas na nova estrutura. Os próximos rótulos identificam cada um dos *clusters* em ordem ascendente, de modo que o nó de mais alto rótulo corresponde ao pai da árvore, equivalente ao *cluster*

⁵*agglomerative hierarchical complete linkage clustering*.

que engloba todas as amostras. Na Fig. 4.6(b) encontra-se a árvore obtida por este método para o dendrograma correspondente ilustrado na Fig. 4.6(a). O número de filhos de cada vértice foi usado como *função-base* e o peso nas arestas foi dado pela função gaussiana:

$$g_{\sigma}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.2)$$

onde $\sigma = 0.1$ e x representa a distância entre cada par de pontos conectados por uma aresta.

Esta estrutura em árvore rotulada foi implementada a fim de facilitar a visualização das respostas da *SGWT* para cada vértice, bem como a conferência destas com os resultados esperados. Com o mesmo objetivo, também foi usada uma interpolação bicúbica do resultado da *SGWT*, permitindo sua visualização como superfície. Isto pode ser verificado examinando-se a Fig. 4.6(c), em que veem-se os vértices que responderam com maior intensidade à transformada *wavelet* como os que aparecem mais altos na imagem da árvore (Fig. 4.6(b)). De fato, o número de filhos de cada nó foi escolhido como sendo a função definida nos vértices da árvore. Como este número é único para cada vértice, tendo sido determinado pelo algoritmo aglomerativo, existe uma ordem para as respostas da *SGWT* em cada vértice. Assim, os vértices mais altos na visualização da *SGWT* correspondem aos vértices que têm maior número de filhos na árvore, indicando que a *SGWT* produz os resultados esperados.

A Fig. 4.7 apresenta resultados, usando o nível de cada vértice como função neles definida. Como esperado, vértices com o mesmo nível na árvore respondem à *SGWT* com a mesma intensidade.

Figura 4.6: (a) Dendrograma gerado para um conjunto de amostras, (b) reestruturação do dendrograma como árvore rotulada e (c) resultado da SGWT aplicada à árvore, na escala mais global, usando número de filhos como função definida nos vértices. Uma interpolação bicúbica do resultado da SGWT nos vértices permite sua visualização como superfície.

Figura 4.7: (a) Dendrograma gerado para um conjunto de amostras, (b) reestruturação do dendrograma como árvore rotulada e (c) resultado da SGWT aplicada à árvore, na escala mais global, usando o nível como função definida nos vértices. Uma interpolação bicúbica do resultado da SGWT nos vértices permite sua visualização como superfície.

4.2.3 A SGWT sobre estruturas com variações geométricas

Considerando nossa pretensão em obter vetores de características a partir dos coeficientes da SGWT e o fato de uma propriedade frequentemente desejável em muitas aplicações para definir uma característica ser sua invariância por transformações afins, foram testados os efeitos de transformações afins aplicadas aos dados de entrada sobre o resultado da SGWT.

Para avaliar a coerência dos resultados das transformações afins, foi desenvolvido um método que permitisse tanto gerar valores definidos nos vértices (associados à geometria dos pontos), como também visualizar a estrutura em árvore no domínio geométrico. O método criado baseia-se num critério para determinar as coordenadas cartesianas dos pontos associados aos vértices que representam cada *cluster*, usando *combinações afins* entre pontos (ver Mount, 2004, lecture 6). Esta representação facilita a visualização dos resultados das transformações afins e auxilia a verificação da topologia da árvore no plano da imagem, como se constata na Fig. 4.8.

Sabendo que o operador *wavelet*, consequentemente a SGWT, é alterado tanto pela variação da topologia, representada pela matriz laplaciana, como pela variação de valores associados aos vértices, representados pela função neles definidos, foi planejado um experimento tal que, dada uma configuração inicial de amostras de pontos, uma topologia de árvore fosse gerada pelo esquema acima descrito e mantida fixa (ver Fig. 4.9). Assim fazendo, foi possível conhecer a correspondência entre os

pontos originais e os transformados. Neste experimento, o ângulo entre bifurcações da estrutura em árvore, projetada no domínio geométrico dos pontos, foi usado como a função definida nos vértices do grafo, sendo obviamente uma característica geométrica que sofre influência da topologia da rede. Conceitualmente, esta característica é análoga à carga elétrica usada como a função definida em cada vértice, no problema abordado por Smalter *et al.* (2009) para redes de átomos, já que a carga sofre influência da topologia da rede. Como peso nas arestas, foi usada a função gaussiana, dada pela Eq. 4.2.

Os resultados, apresentados na Fig. 4.10, mostraram que a *SGWT* foi invariante a todas as transformações rígidas. A variação é pequena apenas para o cisalhamento. Visualizando a resposta da *SGWT* no gráfico de coordenadas paralelas (Fig. 4.11), em cada vértice e através das escalas, vê-se que há coincidência em quase todos os pontos, uma indicação de correlação positiva alta. Para o cisalhamento⁶, até certo ponto, a *SGWT* variou quando a alteração por ela causada foi pequena, no entanto não mostrou-se covariante com esta transformação. Constata-se qualitativamente que a superfície que representa a *SGWT* mantém o mesmo aspecto para uma certa escala, em todas as transformações.

Na árvore gerada para este exemplo, há 29 vértices. Como a *SGWT* foi gerada para 4 escalas, foram obtidas 116 respostas para a *SGWT*, ou seja, 116 características para a rede, com as quais pode-se criar um vetor de características de dimensão 116, o que pode constituir-se num problema, haja vista a maldição da dimensionalidade. Futuramente, deve-se adotar algum método de seleção de características, visando a redução de dimensionalidade (Theodoridis e Koutrombas, 2009). Alternativamente, podem-se usar medidas globais, como a energia da transformada ou a entropia do histograma dos coeficientes da transformada (da F. Costa e Cesar Jr., 2009).

Tabela 4.5: Módulos do experimento para a *SGWT* sobre estruturas com variações geométricas

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Distribuição Gaussiana	Árvores	Ângulo da Ramificação	Função Gaussiana da
Multimodal Bivariada			Distância Euclidiana

⁶ou *shearing*

Figura 4.8: Transformações afins sobre dados de entrada estruturados em árvore. (a) Amostras originais. (b) Reflexão. (c) Rotação. (d) Escala uniforme. (e) Cisalhamento (f) Translação

Figura 4.9: *Topologia fixa para SGWT sobre transformações afins*

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Figura 4.10: A influência exercida sobre a SGWT pelas transformações afins nos dados de entrada estruturados em árvore. (a) Amostras originais. (b) Reflexão. (c) Rotação. (d) Escala uniforme. (e) Cisalhamento (f) Translação. Uma interpolação bicúbica dos resultados da SGWT nos vértices permite sua visualização como superfície.

(a)

Figura 4.11: *Curvas Paralelas da SGWT sobre dados definidos nos vértices de uma árvore (ângulos) que sofreram transformações afins. Nota-se a coincidência dos valores da SGWT para todas as transformações, exceto o cisalhamento, que varia significativamente o ângulo em alguns pontos.*

4.2.4 A SGWT sobre estruturas com variações topológicas

Na Seção 4.2.3, foi variada a *geometria* das árvores por transformadas afins. Constatamos o esperado naquele experimento, isto é, que o resultado da SGWT é invariante por transformações rígidas⁷ sobre as amostras da entrada, mas varia com deformações causadas pelo cisalhamento. Nesta seção, descrevemos um experimento realizado com o intuito de investigar o comportamento da SGWT com a variação da *topologia* das árvores, usando ainda o ângulo entre bifurcações da estrutura em árvore como *função-base* e os pesos nas arestas dados pela função gaussiana da Eq. 4.2. Foram realizados dois tipos de adaptação, a saber:

1. acrescentar aleatoriamente novas bifurcações em algumas folhas;
2. acrescentar aleatoriamente algumas subárvores (bifurcações) diretamente na raiz.

Com a adaptação (1), esperava-se que a SGWT capturasse alterações locais (menor escala) e com a adaptação (2) esperava-se que SGWT apreendesse alterações globais (maior escala). Comparando-se a Fig. 4.13 com a Fig. 4.12, vê-se que o aspecto da superfície interpolada para o resultado da SGWT, nas diferentes escalas, exibe pequenas alterações com a variação da topologia pelo acréscimo de bifurcações às folhas. Uma explicação possível é a de que os ângulos das bifurcações acrescentadas são menores que o ângulo de alguma bifurcação pré-existente, na mais baixa altura. Além disso, este resultado indica que os nós adicionados nas folhas exercem pouca influência no restante da rede.

Por outro lado, comparando-se a Fig. 4.13 com a Fig. 4.14, notam-se grandes mudanças em todas as escalas, entre os resultados das transformações para variações da topologia original pela adição de subárvores diretamente na raiz, uma indicação de que a SGWT é sensível a pequenas e grandes variações topológicas.

De fato, como discutido na Seção 3.4, a topologia do grafo corresponde ao domínio irregularmente estruturado da função definida sobre os vértices (*função-base*). A SGWT, por sua vez, incorpora esta topologia na definição do operador *wavelet*. Portanto, uma alteração na topologia do grafo acarreta alteração na SGWT. As alterações realizadas neste experimento correspondem a extensões do domínio da *função-base*.

Tabela 4.6: Módulos do experimento para a SGWT sobre estruturas com variações topológicas

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Distribuição Gaussiana	Árvores	Ângulo da Ramificação	Função Gaussiana da
Multimodal Bivariada			Distância Euclidiana

⁷translação, rotação, reflexão e escala uniforme.

Figura 4.12: *Variação de Topologia: original. (a) Amostras originais. (b) Árvore original. Neste experimento, a análise multiescala foi feita em quatro escalas. (c) Primeira Escala (mais global) da SGWT. (d) Segunda Escala da SGWT. (e) Terceira Escala da SGWT (f) Quarta escala (mais fina) da SGWT*

Figura 4.13: Variação de topologia: acrescentando nós somente nas folhas. (a) Amostras originais. (b) Árvore original. Neste experimento, a análise multiescala foi feita em quatro escalas. (c) Primeira Escala (mais global) da SGWT. (d) Segunda Escala da SGWT. (e) Terceira Escala da SGWT (f) Quarta escala (mais fina) da SGWT

Figura 4.14: Variação de topologia: acrescentando nós na raiz. (a) Amostras originais. (b) Árvore original. Neste experimento, a análise multiescala foi feita em quatro escalas. (c) Primeira Escala (mais global) da SGWT. (d) Segunda Escala da SGWT. (e) Terceira Escala da SGWT (f) Quarta escala (mais fina) da SGWT

4.2.5 A *SGWT* e a variação da geometria de um vértice

A influência dos pesos associados às arestas dos grafos foi testada com um experimento em que variou-se a geometria de um ponto apenas, por translação. Com isto, avaliamos a influência exercida sobre a *SGWT* pela alteração do peso somente da aresta que conecta aquele vértice à árvore e somente o valor do ângulo da bifurcação associado àquele vértice. Como nos experimentos anteriores, o peso nas arestas foi dado pela função gaussiana dada pela Eq. 4.2 e o ângulo entre bifurcações da estrutura em árvore como *função-base*. Obviamente, afastar um vértice do grafo significa diminuir o peso da aresta que o conecta ao grafo. A topologia do grafo foi mantida fixa (Fig. 4.15). O vértice 28 foi escolhido arbitrariamente para a translação. Exceto pelas folhas, em que os ângulos são nulos, a escolha de qualquer outro vértice não altera a análise.

Figura 4.15: Topologia fixa para SGWT sobre grafo com translação sobre um ponto apenas

Observe na Fig. 4.16, que a *SGWT* exibe o comportamento esperado com a topologia e geometrias descritas acima, ou seja, responde com maior intensidade nos vértices, cujas imediações possuem valores mais altos. Além disso, a *SGWT* exibe alteração localmente apenas, isto é, na vizinhança do ponto 28, que sofre translação. Este resultado demonstra que a *SGWT* é sensível para detectar variações locais em valores associados a vértices, para grafos pertencentes à mesma classe de equivalência, uma indicação de sua viabilidade para caracterizar formas nestas condições.

Tabela 4.7: Módulos do experimento para a SGWT com a variação da geometria de um vértice

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Distribuição Gaussiana	Árvores	Ângulo da Ramificação	Função Gaussiana da
Multimodal Bivariada			Distância Euclidiana

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Figura 4.16: Variação de geometria: afastamento do nó 28 do grafo. Variação da geometria em (a), (c) e (e). Note que este afastamento causa a diminuição do ângulo de bifurcação associado a este nó. Variação correspondente de intensidade na SGWT em (b), (d) e (f). Observe como a SGWT desdobra a influência da diminuição do valor da função-base (ângulo de bifurcação) sobre o nó 28 e da diminuição nas arestas nele incidentes nas várias escalas.

4.2.6 A SGWT em grafos de polígonos

Semelhantemente aos procedimentos descritos anteriormente, a fim de avaliar a SGWT sobre grafos obtidos a partir de polígonos é necessário combinar (i) um método de amostragem de pontos das formas e um (ii) método de estruturação em grafos.

Figura 4.17: (a) Triângulo gerado aleatoriamente e amostrado pelo método Disco de Poisson. (b) Dual da Transformada da Distância. (c) Geometria da Árvore obtida. (d) Topologia da Árvore Obtida.

Tabela 4.8: Módulos do experimento para a SGWT em grafos de polígonos

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Distribuição do Disco de Poisson	Árvores	Dual da Transformada da Distância	Inverso do Cubo da Distância Euclidiana

Preliminarmente, foram testados dois métodos de amostragem de pontos de formas, combinados com sua estruturação em árvores, conforme procedimentos descritos anteriormente na Seção 4.2.3.

A amostragem de índices de pontos dos polígonos usando uma distribuição uniforme não produziu bons resultados, uma vez que o espaçamento observado entre pontos variava num intervalo muito grande. Deste modo, foi usada uma implementação rápida de [Bridson \(2007\)](#) para o algoritmo de amostragem por *disco de Poisson*⁸. O resultado desta amostragem para um experimento com um triângulo gerado aleatoriamente é mostrado na Fig. 4.17(a).

Estruturas em árvore foram geradas para estas amostragens (Fig. 4.17(c) e Fig. 4.17(d)), seguindo o método de agrupamento aglomerativo descrito na Seção 4.2.2.

De certa forma, a transformada da distância é sensível às propriedades da forma, condensando informações de toda a forma em cada ponto. Um inconveniente desta característica para uso com a *SGWT* é que gostaríamos de ter respostas mais altas nas bordas da imagem. Como os valores da transformada da distância crescem em direção ao centróide da forma, a resposta da *SGWT* seria sempre mínima. Assim, propusemos e definimos a característica *Dual da Transformada da Distância*, cujo resultado pode ser visualizado na Fig. 4.17(b).

Note que a transformada da distância é calculada somente no interior da forma, enquanto a *função-base* é definida sobre o suporte da imagem, que inclui o fundo. Assim, a *função-base* irá assumir valores nulos nos pontos amostrados fora da forma. Como a *Wavelet* usada nesta *SGWT* é um operador diferencial, o fato do fundo ser uma constante não influencia o resultado. Futuramente, a transformada da distância do complemento da forma em relação ao fundo também poderá ser calculada, permitindo que a *função-base* seja avaliada fora da forma, com valores não-constantes. Esperamos com isto, agregar mais informação sobre a forma.

Sejam $I(i, j)$ uma imagem binária, $D(i, j)$ a respectiva transformada da distância ([Dougherty e Lotufo, 2003](#)) e $d_{max} = \max(D)$. Definimos a característica *Dual da Transformada da Distância* como segue:

$$\hat{D} = (\hat{d}_{ij}) = \begin{cases} d_{max} - D + 1, & \text{se } I(i, j) \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O peso nas arestas foi definido como:

$$w_{i,j} = \frac{1}{(|r_i - r_j|)^3} \quad (4.3)$$

onde $|r_i - r_j|$ é a distância euclidiana entre os vértices v_i e v_j .

Como nos primeiros experimentos, a *SGWT* exibiu o comportamento esperado neste experimento, isto é, obteve respostas com maior intensidade nos vértices, cujas imediações possuíam valores mais altos, como veem-se nas Figs. 4.18(a), 4.18(b), 4.18(c) e 4.18(d).

No entanto, observou-se que os resultados da *SGWT* para esta combinação não podem ser comparados para formas distintas, pois as estruturas geradas para os grafos apresentam muitas diferenças, já que o esquema de geração de grafos ainda é baseado em distância. Como as coordenadas das amostras são determinadas aleatoriamente pela amostragem por disco de *Poisson*, a topologia também é determinada aleatoriamente.

⁸Poisson Disk Sampling.

Figura 4.18: A SGWT sobre triângulo aleatório, amostrado por disco de Poisson com função-base definida como o dual da transformada da distância. Observe que as respostas com maior intensidade da transformada ocorrem nos vértices cuja vizinhança também possui valores mais altos. (a) Escala 1. (b) Escala 2. (c) Escala 3. (d) Escala 4.

4.2.7 A SGWT em grafos estruturados por malhas

Grafos para formas podem ser obtidos, lançando mão de algoritmos de geração de malhas, os quais combinam um método de escolha de vértices e um método de triangulação (Persson, 2004).

Para o experimento descrito nesta seção, foi usada a biblioteca *MESH 2D - Automatic Mesh Generation* de Darren Engwirda, uma implementação de um algoritmo iterativo de geração de malhas triangulares 2D não estruturadas para um polígono, baseada numa entrada com geometria linear por partes e número arbitrário de cavidades. Uma limitação deste método é sua dependência de uma entrada como lista ordenada de pontos, ou seja, o contorno paramétrico da forma.

O dual da transformada da distância foi usado como *função-base* definida nos vértices. Os pesos nas arestas foram computados pelo inverso do quadrado da distância euclidiana (Eq. 4.1).

Tabela 4.9: Módulos do experimento para a SGWT em Grafos Estruturados por Malhas

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Malha triangular 2D		Dual da Transformada da Distância	Inverso do Quadrado da Distância Euclidiana

Alguns resultados usando este método de geração de grafos são apresentados na Fig. 4.19. Observe que este método de geração de malhas produziu diferentes topologias para os grafos de duas formas perceptualmente pertencentes a uma classe morfológica, portanto o domínio da *função-base*

é diferente para duas instâncias de uma mesma classe. Consequentemente, as respectivas SGWTs são diferentes.

Uma alternativa pode ser o uso da solução implementada na biblioteca *DISTMESH 2D*⁹ de Persson e Strang (2004). Nela, os pontos da malha são escolhidos, resolvendo-se um sistema de equações de forças lineares por partes, para uma estrutura em treliça em equilíbrio. Em princípio, as forças em equilíbrio posicionariam pontos associados aos vértices da treliça aproximadamente nas mesmas posições, para formas pertencentes a uma mesma classe. No entanto, a triangulação é obtida pelo algoritmo de *Delaunay*, que não garante que a topologia dos grafos seja idêntica, para pontos posicionados pelas forças em equilíbrio, mas eventualmente alterados por alguma transformação afim. Outro fator complicador é a determinação de funções de distância para formas obtidas a partir de imagens. O autor apresenta um exemplo em sua tese (Persson, 2004), mas não o detalha e não disponibiliza o código para o mesmo. Para estruturas geométricas em geral, o método funciona bem e são fornecidos códigos fonte com exemplos.

⁹<http://persson.berkeley.edu/distmesh/>

Figura 4.19: A SGWT sobre malhas de formas do MPEG7 com função-base definida como o dual da transformada da distância. Observe que este método de geração de malhas não produz uma estrutura combinatoria idêntica para os grafos de duas instâncias de uma mesma classe morfológica. Consequentemente, as respectivas SGWTs são diferentes. (a) Dual da Transformada da Distância da forma octopus 16. (b) Dual da Transformada da Distância da forma octopus 17. (c) Malha para a forma octopus 16. (d) Malha para a forma octopus 17. (e) SGWT na escala $j = 2$ para a forma octopus 16. (f) SGWT na escala $j = 2$ para a forma octopus 17.

4.2.8 A *SGWT* para grafos com variação crescente da geometria

Nesta seção, apresentamos os resultados de um estudo relativo aos efeitos da variação da estrutura geométrica de um grafo original sobre a respectiva *SGWT*. Com este objetivo, partimos de uma forma modelo, adicionando-lhe, às coordenadas de seus vértices, ruído aleatório oriundo de distribuições gaussianas com valores de σ crescente. Subsequentemente, as *SGWT* das variantes geometricamente perturbadas são comparadas às *SGWT* do grafo original, por meio do cálculo do *coeficiente de correlação* (cc) entre as *SGWT* dos grafos perturbados e a *SGWT* do grafo modelo. O *coeficiente de correlação* resulta numa medida adimensional e relativa da correlação entre duas variáveis X_i e X_j (ver da F. Costa e Cesar Jr., 2009, cap 2), definido como:

$$cc(X_i, X_j) = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (4.4)$$

Em nosso método, as duas variáveis são as *SGWT*, que podem ser descritas como variáveis aleatórias multidimensionais e representadas por vetores.

A Fig. 4.20 mostra a variação da estrutura geométrica de um polígono simples com 4 vértices, que ocorre com a adição de ruído gaussiano as suas coordenadas. Observe que é quase imperceptível a diferença entre os gráficos da função-base para o grafo modelo (Fig. 4.20(b)) e para o grafo perturbado com $\sigma = 2$ (Fig. 4.20(d)). Por outro lado, fica clara a diferença entre o gráfico da função-base para o grafo perturbado com $\sigma = 50$ (Fig. 4.20(f)) e os anteriores.

Representamos por $cc_{i,k}$, o coeficiente de correlação entre o vetor de características dados pelos coeficientes da *SGWT* de um grafo modelo G_M e sua i -ésima versão perturbada G_M^i , na escala k . Sendo o cálculo efetuado para cada uma das 4 escalas, podemos representar o resultado pelo vetor $r_i = (cc_{i,1}, cc_{i,2}, cc_{i,3}, cc_{i,4})$. O vetor r_i corresponde a um ponto num espaço de configurações de 4 dimensões. Obviamente, uma configuração ideal seria representada pelo vetor $r_{\text{best}} = (1, 1, 1, 1)$, cujas componentes apresentam os valores máximos da correlação entre o grafo modelo e ele mesmo.

Usando o inverso do quadrado da distância euclidiana como pesos nas arestas (Eq. 4.1) e a *função-base* correspondente à média dos comprimentos de caminhos mais curtos de todos os vértices para um dado vértice, definida na Seção 4.1, analisamos as formas bicicleta, bonequinho, casinha e cadeira.

Nas Figs. 4.23, 4.26 e 4.29, os vetores r_i aparecem numerados na ordem de crescimento da dispersão da distribuição gaussiana. As curvas (por escala) mostram a variação dos coeficientes de correlação médios das *SGWT* para σ crescente. Uma curva representa a média para 10 amostras por σ , enquanto a outra representa a média de 100 amostras por σ .

Como resultado, é possível visualizar uma ordem no espaço de configurações das correlações, evidenciando que variações com valores de σ menores aparecem mais próximos da coordenada $(1, 1, 1)$, caindo à medida que o sigma aumenta.

A dependência das variações com sigma não é uma função monotonicamente decrescente, um fato que pode ser explicado por duas razões: (i) a função-base é degenerada e (ii) o σ crescente não garante que os valores sorteados são sempre maiores. A degenerescência da função-base é uma propriedade intrínseca da mesma, uma vez que ela é definida como média de comprimentos de caminho mais curto entre pares de vértices, podendo caminhos diferentes compensarem-se mutuamente, resultando em valores muito próximos.

Os resultados demonstram a suficiência da proposição: para topologias mantidas constantes e geometrias aproximadas, existe alta correlação positiva entre as *SGWT* das respectivas formas.

Tabela 4.10: Módulos do experimento para a *SGWT* em grafo com variação crescente da geometria

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
Pontos de Interesse e Estrutura		avgAPSP	Inverso do Quadrado da
Manualmente definidos			Distância Euclidiana

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Figura 4.20: Variação de geometria de um polígono: adicionando-se ruído gaussiano às coordenadas. (a) Imagem e grafo modelo. (b) Função-base para grafo modelo. (c) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 2$ nas coordenadas dos vértices (d) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 2$ (e) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 50$ (f) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 50$

Figura 4.21: *Variação crescente de geometria da forma de um polígono: Correlações entre SGWT, em 4 escalas, de um grafo modelo para a forma de um polígono e suas versões com geometria alterada, variando-se a geometria. Para tanto, são adicionados os valores das realizações de uma variável aleatória de distribuições gaussianas com σ crescente, às coordenadas de seus vértices. Em (a) foram usadas 10 amostras, enquanto em (b) foram usadas 100 amostras por valor de σ . Note como a correlação decresce entre as transformadas para todas as escalas, a medida que o ruído aumenta.*

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Figura 4.22: Variação de geometria da forma bicicleta: adicionando-se ruído gaussiano às coordenadas. (a) Imagem e grafo modelo. (b) Função-base para grafo modelo. (c) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 2$ nas coordenadas dos vértices (d) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 2$ (e) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 38$ (f) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 38$

Figura 4.23: Visualização dos coeficientes de correlação entre as SGWT do grafo da forma modelo de uma bicicleta e suas versões com geometria alterada. O coeficiente de correlação em cada escala corresponde a uma coordenada no gráfico: (a) escalas 1, 2 e 3, (b) escalas 1, 2 e 4, (c) escalas 1, 3 e 4 e (d) escalas 2, 3 e 4. Cada ponto no gráfico representa uma versão do grafo modelo com geometria alterada, adicionando-se ruído crescente às coordenadas do respectivo grafo. A ordem crescente dos rótulos corresponde aos valores crescentes de σ . Como esperado, observe que os pontos rotulados com os menores números estão mais próximos do grafo modelo original, que seria representado pelo vetor (1,1,1).

Figura 4.24: Variação crescente de geometria da forma bicicleta: (a) Correlações entre SGWT, em 4 escalas, de um grafo modelo para a forma bicicleta e suas versões com geometria alterada, variando-se a geometria. Para tanto, são adicionados os valores das realizações de uma variável aleatória de distribuições gaussianas com σ crescente, às coordenadas de seus vértices. Note como a correlação decresce entre as transformadas para todas as escalas, a medida que o ruído aumenta. (b) Projeções dos vetores de correlações sobre o vetor de correlações da forma bicicleta. A projeção de cada vetor de correlações (cc_1, cc_2, cc_3, cc_4) sobre o vetor $(1, 1, 1, 1)$ resulta num escalar no intervalo $[-4, 4]$. Note que cada escala contribui com no máximo 1 para o produto escalar. Quanto melhor a correlação nas 4 escalas, mais próxima a projeção estará de 4. Observe que o resultado decresce com σ crescente.

Figura 4.25: Variação de geometria da forma bonequinho: adicionando-se ruído gaussiano às coordenadas. (a) Imagem e grafo modelo. (b) Função-base para grafo modelo. (c) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 2$ nas coordenadas dos vértices (d) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 2$ (e) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 22$ (f) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 22$

Figura 4.26: Visualização dos coeficientes de correlação entre as SGWT do grafo da forma modelo de um bonequinho e suas versões com geometria alterada. O coeficiente de correlação em cada escala corresponde a uma coordenada no gráfico: (a) escalas 1, 2 e 3, (b) escalas 1, 2 e 4, (c) escalas 1, 3 e 4 e (d) escalas 2, 3 e 4. Cada ponto no gráfico representa uma versão do grafo modelo com geometria alterada, adicionando-se ruído crescente às coordenadas do respectivo grafo. A ordem crescente dos rótulos corresponde aos valores crescentes de σ . Como esperado, observe que os pontos rotulados com os menores números estão mais próximos do grafo modelo original, que seria representado pelo vetor $(1, 1, 1)$.

(a)

(b)

Figura 4.27: *Variação crescente de geometria da forma bonequinho: (a) Correlações entre SGWT, em 4 escalas, de um grafo modelo para a forma bonequinho e suas versões com geometria alterada, variando-se a geometria. Para tanto, são adicionados os valores das realizações de uma variável aleatória de distribuições gaussianas com σ crescente, às coordenadas de seus vértices. Note como a correlação decresce entre as transformadas para todas as escalas, a medida que o ruído aumenta. (b) Projeções dos vetores de correlações sobre o vetor de correlações da forma bonequinho. A projeção de cada vetor de correlações (cc_1, cc_2, cc_3, cc_4) sobre o vetor $(1, 1, 1, 1)$ resulta num escalar no intervalo $[-4, 4]$. Note que cada escala contribui com no máximo 1 para o produto escalar. Quanto melhor a correlação nas 4 escalas, mais próxima a projeção estará de 4. Observe que o resultado decresce com σ crescente.*

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Figura 4.28: Variação de geometria da forma casinha: adicionando-se ruído gaussiano às coordenadas. (a) Imagem e grafo modelo. (b) Função-base para grafo modelo. (c) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 2$ nas coordenadas dos vértices (d) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 2$ (e) Imagem e grafo perturbado com ruído de gaussiana com $\sigma = 38$ (f) Função-base para grafo perturbado com $\sigma = 38$

Figura 4.29: Visualização dos coeficientes de correlação entre as SGWT do grafo da forma modelo de uma casinha e suas versões com geometria alterada. O coeficiente de correlação em cada escala corresponde a uma coordenada no gráfico: (a) escalas 1, 2 e 3, (b) escalas 1, 2 e 4, (c) escalas 1, 3 e 4 e (d) escalas 2, 3 e 4. Cada ponto no gráfico representa uma versão do grafo modelo com geometria alterada, adicionando-se ruído crescente às coordenadas do respectivo grafo. A ordem crescente dos rótulos corresponde aos valores crescentes de σ . Como esperado, observe que os pontos rotulados com os menores números estão mais próximos do grafo modelo original, que seria representado pelo vetor $(1,1,1)$.

(a)

(b)

Figura 4.30: Variação crescente de geometria da forma casinha: (a) Correlações entre SGWT, em 4 escalas, de um grafo modelo para a forma casinha e suas versões com geometria alterada, variando-se a geometria. Para tanto, são adicionados os valores das realizações de uma variável aleatória de distribuições gaussianas com σ crescente, às coordenadas de seus vértices. Note como a correlação decresce entre as transformadas para todas as escalas, a medida que o ruído aumenta. (b) Projeções dos vetores de correlações sobre o vetor de correlações da forma casinha. A projeção de cada vetor de correlações (cc_1, cc_2, cc_3, cc_4) sobre o vetor $(1, 1, 1, 1)$ resulta num escalar no intervalo $[-4, 4]$. Note que cada escala contribui com no máximo 1 para o produto escalar. Quanto melhor a correlação nas 4 escalas, mais próxima a projeção estará de 4. Observe que o resultado decresce com σ crescente.

4.3 Estudos de caso com bases de dados de *benchmark*

A fim de avaliar a adequação do arcabouço proposto para análise e discriminação de formas, nosso método foi testado com imagens oriundas de bases de dados de *benchmark*.

4.3.1 Análise de Formas da base *MPEG7 CE Shape-1 Part B*

As imagens usadas neste trabalho para o primeiro estudo de caso de Discriminação entre classes são da base de imagens ¹⁰ *MPEG7 CE Shape-1 Part B*.

(a)

Figura 4.31: Base de Imagens MPEG-7: exemplos de formas

Algumas amostras de quatro classes rotuladas desta base de imagens são apresentadas na Fig. 4.32. Esta base de dados foi selecionado porque o mesmo inclui dados rotulados, que permitem avaliar a metodologia proposta para discriminação (separação) entre classes.

Para os experimentos de discriminação, quatro conjuntos com vinte imagens rotuladas cada, da base de dados *MPEG7 CE Shape-1 Part B*, foram usados, isto é, as classes *camel*, *key*, *rat* e *stef*, como mencionado anteriormente. A evidência de diferenças notadas perceptualmente entre objetos destas classes foi o critério adotado para a escolha destes quatro conjuntos.

¹⁰http://www.imageprocessingplace.com/root_files_V3/image_databases.htm

Figura 4.32: Amostras de imagens de quatro classes da base de imagens MPEG7: (a) camel, (b) key, (c) rat e (d) stef

Primeiro, na etapa de pré-processamento, as oitenta imagens 2D binárias foram devidamente redimensionadas para o mesmo tamanho de 450×450 e centralizadas.

Em seguida, foi escolhido um conjunto de 256 pontos regularmente espaçados dos pontos do domínio da imagem. Inicialmente, estes pontos eram centralizados geometricamente na malha 16×16 . Imediatamente antes de serem trianguladas pelo algoritmo de *Delaunay* para produzir um grafo, foi acrescentado ruído de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 4 a cada uma das coordenadas cartesianas dos pontos da malha, a fim de perturbar a organização geométrica ortogonal dos pontos da malha, já que o algoritmo de triangulação de *Delaunay* não funciona para pontos colineares. A relação entre o número de amostras, o grau de perturbação de pontos e o tamanho da máscara da média, estão de acordo com uma constatação estatística, segundo a qual, em uma distribuição normal, 68% dos dados estão sob uma largura correspondente a um σ . Deste modo, cerca de 68% das coordenadas serão devidamente perturbadas dentro do intervalo dado por $\sigma = 4$. Esta afirmação motiva a escolha do tamanho da máscara da média igual a 5×5 , a fim de atribuir a cada vértice uma combinação dos valores na vizinhança estabelecida pelos limites da perturbação das coordenadas originais.

Vale lembrar que os tamanhos dos triângulos são consequência do algoritmo escolhido para triangulação, ou seja, *Delaunay*, que apresenta a propriedade de maximizar os ângulos mínimos (Edelsbrunner, 1987), evitando assim o surgimento de triângulos muito estreitos. A estrutura combinatória do grafo resultante não deve ser considerada regular tal como a estrutura do suporte original da imagem, uma vez que a valência (grau) ¹¹ dos nós da triangulação não é constante, enquanto uma vizinhança de tamanho fixo é normalmente definida para a estrutura do domínio da imagem (vizinhança 4, 6 ou 8).

Subsequentemente, a transformada da distância da imagem forneceu os valores da *função-base* para cada vértice do grafo. Sobreposições das transformadas da distância de grafos são ilustrados para duas formas de amostra na Fig. 4.33(a) e Fig. 4.33(b). Os perfis da *função-base* correspondente são respectivamente vistos nas Fig. 4.33(c) e Fig. 4.33(d).

Uma vez que a topologia do grafo tiver sido obtida e a transformada da distância computada, as distâncias fotométricas entre vértices no grafo são calculadas e os pesos nas arestas são computados em seguida, de acordo com a Eq. 3.2. Chamamos de distância fotométrica entre os vértices v_i e v_j ao termo $|f(v_i) - f(v_j)|$ que aparece no denominador da Eq. 3.2.

Agora, calculam-se as distâncias fotométricas entre vértices e pesos nas arestas como descrito na Seção 3.1.

Em seguida, o grafo ponderado com vértices com valores reais passa pela *Transformada Espectral Wavelet* - (*Spectral Wavelet Transform*). Em particular, a *SGWT* foi calculada para 4 escalas, com o núcleo *wavelet* definido como em (Hammond et al., 2011). As transformadas wavelet resultantes para 4 escalas e 256 vértices são ilustradas na Fig. 4.33(e) e a Fig. 4.33(f). Nas figuras mencionadas,

¹¹Em Computação Geométrica e Computação Gráfica, em se tratando de triangulações, é comum usar-se o termo *valência de nó* com o significado de *grau de vértice* em Teoria de Grafos.

Tabela 4.11: *Módulos do experimento Análise de Formas da base MPEG7 CE Shape-1 Part B*

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
<i>Uncorrelated</i> <i>Gaussian Jittering</i>	Triangulação de <i>Delaunay</i>	Dual da Transformada da Distância	Inverso do Quadrado da Distância Fotométrica

vê-se qualitativamente a similaridade entre perfis de funções e os perfis das *SGWT* para cada escala para amostras tomadas da mesma classe de equivalência.

Como consequência, cada imagem pode agora ser representada por um vetor de características de $4 \text{ escalas} \times 256 \text{ vértices} = 1024$ dimensões, isto é, um vetor de características composto das respostas da *SGWT* em cada vértice em todas as escalas.

A fim de avaliar o poder de discriminação dos coeficientes produzidos da *SGWT*, um mapeamento deste espaço de dimensão maior em um espaço de dimensão menor foi obtido pelo método de extração de características denominado *Análise de Componentes Principais*, comumente chamado na literatura de *PCA* [Alpaydin \(2004\)](#); [van der Heijden et al. \(2004\)](#).

Como enfatizado na Seção 3.6, a visualização da projeção de espaços de características em espaços de dimensões reduzidas é uma das aplicações de *PCA*. Neste trabalho, as 1024 características foram reduzidas a 2 componentes principais, criando um espaço de 2 dimensões. A decisão de extrair apenas dois componentes principais do espaço multidimensional foi meramente em virtude da questão de visualização.

Figura 4.33: Comparação entre amostras de mesma classe. As Fig. (a) e (b) mostram sobreposições de grafos e transformadas da distância para respectivas imagens da classe camel. Note em (c) e (d) a semelhança entre os perfis tomados da transformada da distância como função-base definida sobre os vértices. São mostradas também, em (e) e (f) as semelhanças entre suas SGWT.

(a)

(b)

Figura 4.34: Espaço reduzido de características: gráficos de espalhamento para o caso de discriminação de imagens binárias de quatro classes. O poder de discriminação da combinação da transformada da distância e da SGWT para separar as 4 classes é evidente.

4.3.2 Análise de Formas em Agricultura

As imagens usadas neste trabalho para o segundo estudo de caso de discriminação foram obtidas da imagem constante na Fig. 1.1(b) do trabalho de Rodriguez *et al.* (2011), uma vez que não encontramos bases de imagens de tomates devidamente rotuladas. Foram 53 imagens rotuladas em 8 classes distintas. No pré-processamento realizado com *shell scripts* usando funções do pacote *ImageMagick*, as imagens dos tomates foram segmentadas, redimensionadas e centralizadas. Os rótulos que apareciam nas imagens foram filtrados por um filtro da mediana com máscara 32×32 , seguido por uma suavização gaussiana com $\sigma = 8$. Os resultados do pré-processamento são mostrados para algumas instâncias de cada classe na Fig. 4.35.

Figura 4.35: Estudo de caso de discriminação com imagens rotuladas de tomates. Imagens da fileira superior (a) – (e) correspondem a um subconjunto das imagens originais, segmentadas, redimensionadas e centralizadas. Imagens da fileira inferior (f) – (j) correspondem a um subconjunto das imagens pré-processadas conforme descrição anterior.

Na Fig. 4.36 são exibidos alguns resultados da aplicação do método proposto às imagens de tomates. Claramente, vê-se nas Fig. 4.36(a) e Fig. 4.36(b) a capacidade de discriminação do método ora proposto, para os casos de 2 classes e 3 classes.

Tabela 4.12: Módulos do experimento Análise de Formas em Agricultura

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
<i>Uncorrelated Gaussian Jittering</i>	Triangulação de <i>Delaunay</i>	Média na vizinhança 5×5 do vértice	Inverso do quadrado da Distância Fotométrica

Figura 4.36: Estudo de caso de discriminação com imagens rotuladas de tomates. Exemplo de espaço reduzido de extração de características por PCA para uma combinação de (a) 2 classes: long e flat e (b) 3 classes: oxheart, long e flat.

4.3.3 Análise de Formas de Galáxias

Com a crescente disponibilidade de grandes quantidades de dados, os avanços tecnológicos em *hardware* para seu armazenamento e processamento e a galopante percepção dos benefícios econômicos e sociais que podem ser obtidos destas bases, tem crescido também o interesse multidisciplinar de inúmeras comunidades pelo assunto (Hall *et al.*, 2013), fomentando o fenômeno *Big Data*.

Em particular, a Astronomia e a Astrofísica são áreas que podem se beneficiar em grande medida da análise de grandes bases de dados, por exemplo, o *Sloan Digital Sky Survey (SDSS)*, que recebeu o mesmo nome da *Fundação Alfred P. Sloan*, a qual tem captado milhões de imagens de galáxias desde sua inauguração. O *SDSS* constitui-se num projeto para inspeção do espaço mediante o imageamento multifiltros e a espectroscopia com desvio para o vermelho, que usou um telescópio óptico com abertura de 2,5 m instalado no *Apache Point Observatory* localizado no Novo México, Estados Unidos (Cui *et al.*, 2013; York *et al.*, 2000).

Galáxias são vistas nos céus como nuvens gigantescas de luz, por milhares de anos-luz, cada qual sendo composta de bilhões de estrelas, gás, poeira e matéria escura ligadas entre si por forças gravitacionais (Sparke e Gallagher, 2007). Acredita-se que as formas distintas destas galáxias estejam correlacionadas com parâmetros físicos associados aos respectivos sistemas (Elmegreen, 1998). O sistema de classificação de galáxias, conhecido como *Hubble*, agrupa galáxias em tipos, baseando-se apenas em imagens, conforme características mais evidentes, por exemplo, o tamanho da protuberância comparada ao disco, a presença ou ausência de braços espirais e a compacidade dos braços espirais. Este sistema foi proposto em 1936 por *Edwin Hubble*, originalmente com as seguintes classes e subclasses (Mohamed e Atta, 2010):

- *Elliptical*: E0, E3, E5 e E7;
- *Spiral*: S0, Sa, Sb, Sc e Sd;
- *Barred Spiral*: SBa, SBb e SBc;
- *Irregular*: Im e Ibm

Apesar destes vários tipos, em geral, galáxias podem ser classificadas segundo a forma, em três tipos básicos: elípticas, espirais e irregulares. Em tempo, há que se considerar o ângulo de visualização entre seu disco e a linha de visão do observador, pois a mesma galáxia pode ser erroneamente classificada, uma vez que sua forma se altera aparentemente, dependendo do ponto de vista do

qual foi observada. Galáxias vistas de perfil - chamadas *edge-on* - aparecem com inclinação de 90° . Quando este ângulo de inclinação é de 0° , elas são vistas de frente e são chamadas *face-on* (Elmegreen, 1998).

As estrelas existentes nas galáxias elípticas formaram-se nos primeiros bilhões de anos após o *Big Bang* e hoje em dia, menos do que um por cento de sua massa ainda se encontra como gás. Nas galáxias espirais, a maioria das estrelas também se formou nos primeiros bilhões de anos, mas nem todo o gás foi consumido neste processo, restando cerca de 5% a 15% de sua massa em gás, o que viabiliza a formação de novas estrelas até hoje. Cerca de 25% da massa das galáxias irregulares encontra-se na forma de gás. À medida que nuvens protogalácticas girando colapsam sob o efeito da própria gravidade, todo gás que não tenha entrado na formação de estrelas assume a forma de um disco, enquanto estrelas já formadas permanecem em órbitas elípticas excêntricas. Disto, vê-se a importância da classificação de galáxias a partir de características morfológicas para a compreensão da evolução histórica e formação das mesmas (Elmegreen, 1998; Mohamed e Atta, 2010; Szalay e Brunner, 1997). A despeito disto, é importante que as características físicas da formação das galáxias também sejam consideradas.

4.3.3.1 Análise de Formas de Galáxias Não-Rotuladas do SDSS

Nesta seção, as imagens aqui usadas são oriundas do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) de galáxias selecionadas do *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies* (RC3) (de Vaucoulers *et al.*, 1995), uma cortesia da colaboração entre David W. Hogg, Michael R. Blanton e o *Sloan Digital Sky Survey* ¹². Amostras das classes perceptualmente distintas de imagens de galáxias desta base de dados são exibidas na Fig. 4.37. O objetivo deste experimento foi visualizar os vetores de características correspondentes às diferentes formas de galáxias no espaço reduzido de características.

Figura 4.37: Imagens de galáxias com formas visualmente (a) elípticas e (b) espirais. Cortesia de David W. Hogg, Michael R. Blanton e a the Sloan Digital Sky Survey Collaboration

Um conjunto de 506 imagens da base de dados mencionada foi usado no presente estudo de caso, que implementa o mesmo arcabouço descrito na Seção 4.3.1, com pequenas alterações em módulos específicos detalhados como segue.

As imagens coloridas foram convertidas para imagens em nível de cinza. Todas as imagens eram do mesmo tamanho, isto é, 768 linhas por 1024 colunas, portanto a etapa de redimensionamento foi desnecessária. Um grafo foi construído exatamente como descrito na Seção 4.3.1. Sobreposições de duas imagens de galáxias passadas pelo filtro da média e respectivos grafos são mostradas na Fig. 4.38(a) e Fig. 4.38(b).

¹²<http://cosmo.nyu.edu/hogg/rc3/>

Conforme descrito na Seção 3.2, a *função-base* avaliada em cada vértice do grafo é igual ao nível de cinza do pixel correspondente na imagem pré-processada. Este pré-processamento foi realizado pelo filtro da média, com máscara de dimensões 5×5 . Assim, o valor da *função-base* em cada vértice pode ser interpretado como sendo a informação da estrutura da forma na vizinhança, agregada num pixel. O filtro da média também atenua artefatos ruidosos e pequenas variações nas posições dos vértices. Os cálculos dos pesos nas arestas foram realizados, levando em conta a distância fotométrica, como descrito na seção anterior sobre a Eq. 3.2. Veja os perfis da *função-base* para duas galáxias de formas diferentes na Fig. 4.38(c) e Fig. 4.38(d).

As etapas da *SGWT* e extração de características *PCA* seguiram os mesmos passos descritos na seção anterior. Note as diferenças entre as posições e intensidades de picos que podem ser observadas nos perfis das transformadas wavelet para 4 escalas e 256 vértices, como mostrado na Fig. 4.38(e) e Fig. 4.38(f)

Tabela 4.13: Módulos do experimento *Análise de Formas de Galáxias Não-Rotuladas do SDSS*

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
<i>Uncorrelated</i> <i>Gaussian Jittering</i>	Triangulação de <i>Delaunay</i>	Média na vizinhança 5×5 do vértice	Inverso do Quadrado da Distância Fotométrica

Figura 4.38: Comparação entre amostras de classes perceptualmente distintas. As Figs. (a) e (b) mostram sobreposições dos grafos e imagens filtradas pela média para diferentes classes. Note em (c) e (d) a diferença entre os perfis tomados da média do nível de cinza como uma função-base definida sobre os vértices. São mostradas, também, em (e) e (f) as diferenças entre suas SGWT em quatro escalas.

Figura 4.39: *Espaço Reduzido de Características:* gráficos de espalhamento para o estudo de caso de discriminação de formas de galáxias não-rotuladas. As Fig. (a) e (c) exibem protótipos para categorias perceptualmente distintas de galáxias, isto é, elípticas e espirais, respectivamente, enquanto as Fig.(b) e (d) mostram agrupamentos formados pelos 30 vizinhos mais próximos dos respectivos protótipos.

Figura 4.40: Espaço reduzido de características: gráficos de espalhamento para o estudo de caso de discriminação de formas de galáxias não-rotuladas. Pode-se notar agrupamentos de galáxias de formas similares.

4.3.3.2 Análise de Formas de Galáxias do SDSS rotuladas pelo GZ2

Nesta seção, apresentamos os resultados da aplicação de nosso *framework* a uma grande base de imagens de galáxias oriundas do *Sloan Digital Sky Survey - SDSS* ¹³ (York *et al.*, 2000) e rotuladas pelo *Galaxy Zoo 2 - (GZ2)* ¹⁴ (Willett *et al.*, in press), além de descrever a própria base de imagens e alguns trabalhos a ela relacionados. O principal objetivo dos experimentos descritos nesta seção foi avaliar a separação das imagens rotuladas de galáxias no espaço reduzido de características.

Figura 4.41: Algumas Imagens de Galáxias do SDSS classificadas pelo projeto Galaxy Zoo 2 com pontuação acima de 0.95 (conjunto Super Clean), na Tarefa 7 como Completely-Round (a)-(j) e Cigar-Shaped (k)-(t).

Visando ao objetivo da classificação em massa de imagens de galáxias e alavancado pelo sucesso do projeto *Galaxy Zoo I* (Land *et al.*, 2008), foi lançado, no ano de 2009, o projeto científico *Galaxy Zoo 2*, contendo mais de 16 milhões de classificações morfológicas de mais de 300 mil imagens das maiores e mais brilhantes galáxias do *SDSS*. A classificação deste número de imagens de galáxias foi realizada a partir das informações oriundas de *crowdsourcing* and *citizen science* (Willett *et al.*, in press).

¹³<http://www.sdss.org>

¹⁴<http://www.galaxyzoo.org>

Para tanto, o *GZ2* empregou um sistema de votação ponderada por pesos baseados na consistência com a maioria dos votos, apresentando uma boa solução para simular um *ground-truth*, já que a maioria dos usuários-classificadores eram voluntários não-especialistas.

Uma tarefa de classificação (*task*) pode ser descrita pelo par ordenado (pergunta, respostas possíveis). Foram 11 tarefas para as quais havia 37 respostas possíveis. As tarefas não eram independentes. Willett *et al.* (in press) descreve o comportamento do *GZ2* como uma Árvore de Decisão de Múltiplos Estágios (*multi-step DECISION TREE*), no entanto, acreditamos que o comportamento do *GZ2* seja melhor descrito por um Autômato Finito Não-Determinístico (Nondeterministic Finite Automaton - *NFA*), cujo diagrama é mostrado na Fig. 4.42. De fato, árvores, por definição, não possuem ciclos, todavia a árvore de decisão do *GZ2* apresenta diversos ciclos. O fluxo de trabalho de classificação do usuário não entra em *loop* ao anotar uma imagem de uma galáxia, pois este autômato é um grafo dirigido (em que ciclos são permitidos). Observe que ao seguir o sentido dos arcos na Fig. 4.42, o processamento nunca volta a um estado anterior, a não ser nos estados de aceitação. O autômato é um *NFA*, porque não há uma aresta (transição) para todo símbolo do alfabeto em cada estado.

Considerando então o *NFA* e a definição de classificação dada por Willett *et al.* (in press) como “a quantidade total de informação colhida sobre uma galáxia por um único usuário que completa a árvore de decisão” [*sic*], o resultado de uma classificação corresponde a um dos estados de aceitação (*accept states*) existentes no *NFA* (1, 6 ou 8). Ou seja, uma classificação é o resultado de várias transições no *NFA* até um estado de aceitação. Os rótulos das transições tomadas num caminho entre um estado inicial e um estado de aceitação descrevem uma classificação. Não são permitidas classificações parciais, uma vez que a navegação pelo sistema (*website*) invariavelmente conduz o usuário a um dos estados de aceitação. Cumpre mencionar que a definição de *classificação*, segundo (Willett *et al.*, in press), não deve ser confundida com a de *classe*. Não obstante o número exponencial de combinações de estados possíveis formando uma *classificação*, ou seja, cadeias aceitas pelo autômato, vale ressaltar que são definidas 37 classes morfológicas, ou seja, 37 respostas possíveis às 11 tarefas. Isto viabiliza a análise independente das tarefas.

Os rótulos, segundo este esquema de votação, não são classificações definitivas. Eles são devidamente armazenados em arquivos de tabelas (.csv) e associados a diversos valores, tais como contagens, frações de votos e frações ponderadas de votos, que podem ser usados para efetuar a classificação final de uma imagem, usando limiares e alguma combinação entre os mesmos. As tarefas podem ser consideradas independentemente ou em conjunto. Jou *et al.* (2013) trataram as tarefas independentemente, usando regras do tipo:

$$\text{label} = \arg \max_{x \in \{\text{'spiral'}, \text{'no-spiral'}\}} f_r^w = \{x | \forall y : f_r^w(y) \leq f_r^w(x)\}$$

onde f_r^w é a fração ponderada de votos (*weighted vote fraction*) associada a cada resposta x dentre as possíveis para a pergunta que compõe a tarefa em questão. No caso particular da regra acima, trata-se da Tarefa 4, cuja pergunta é “Existe qualquer sinal de um padrão de braço espiral?”. Se f_r^w for máxima para a resposta “spiral”, então este será o rótulo devolvido, caso contrário o rótulo devolvido será “no-spiral”.

Tabela 4.14: Módulos do experimento Análise de Formas de Galáxias do SDSS rotuladas pelo *GZ2*

Amostragem	Estrutura Combinatória	Função-base	Peso nas Arestas
<i>Uncorrelated</i> <i>Gaussian Jittering</i>	Triangulação de <i>Delaunay</i>	Média na Vizinhança 5 × 5 do Vértice	Inverso do Quadrado da Distância Fotométrica

Uma estratégia para minimizar o número de classificações equivocadas, em que os usuários podem ter se confundido, é a de relacionar a classificação de cada usuário às demais classificações e às próprias classificações, resultando num parâmetro que Willett *et al.* (in press) chamam de consistência. Este parâmetro pondera as *frações de votos* produzindo as *frações ponderadas de votos*.

Figura 4.42: Diagrama de estados para um Autômato Finito Não-determinístico que descreve o comportamento do GZ2. Nesta representação, cada vértice (estado) e respectivas arestas emergentes (transições) correspondem a uma tarefa específica, como descrito por Willett et al. (in press). 1 é o estado inicial, enquanto 1, 6 e 8 são os estados de aceitação. Uma sequência de rótulos produzidas pelo GZ2 formam uma cadeia (string) que está na linguagem aceita pelo autômato.

Por fim, estes valores podem ser usados como proposto em (Land et al., 2008) e aplicado por Jou et al. (2013), que criaram subconjuntos de dados por eles denominados *clean* e *superclean*, descartando imagens para as quais ocorreram menos de 10 anotações e mantendo imagens com número de anotações superior a 10 e com pontuação máxima (*top class score*) acima de 0.8 e 0.95, respectivamente. Esta restrição forte sobre a consistência é apontada por Jou et al. (2013) como uma possível desvantagem, quando muitas classificações são descartadas, apesar do número colossal de respostas. Para descartar imagens com menos de 10 anotações, basta localizar, nas tabelas .csv de cada tarefa, a coluna contendo a subcadeia `_total_count` em seu cabeçalho. Se `_total_count < 10`, desconsidere. Para obter a pontuação máxima por classe (*top class score*), basta tomar o máximo dos valores correspondentes às colunas contendo a subcadeia `_weighted_fraction`, supondo $K = 1$ nas Eqs. (5) e (11) de (Willett et al., in press). No presente trabalho, os dados de classificação constantes nas tabelas .csv foram processados por regras, como as acima descritas, implementadas em *scripts* na linguagem *Python*, o que possibilitou a criação de subconjuntos *superclean* de imagens com pontuação acima de 0.95 para as classes *completely-round* e *cigar-shaped* em diretórios específicos, associados às respostas para a Tarefa 7. Algumas imagens do resultado desta separação são mostradas na Fig. 4.41, especificamente, classe *Completely-Round* nas Fig. 4.41(a) à Fig. 4.41(j) e *Cigar-Shaped* nas Fig. 4.41(k) à Fig. 4.41(t).

A classificação automática de uma imagem de galáxia usando como conjunto de treinamento uma enorme base de dados, tal qual o *SDSS*, constitui-se em grande desafio. No trabalho de de la Calleja et al. (2003), um pequeno conjunto de 309 imagens do *SDSS*, na ocasião ainda não rotuladas pelo projeto GZ2, foi usado para testar um método proposto para consulta: dada uma amostra de imagem de galáxia, o sistema devolve uma imagem supostamente da mesma classe. Neste método, as imagens foram inicialmente normalizadas com respeito à orientação, por meio de *PCA* conforme detalhado no Algoritmo 1, o qual também foi adotado no presente trabalho. Então, os corpos galácticos foram segmentados e recortados. O módulo de classificação também empregou *PCA*, mas construindo a matriz de covariância a partir do conjunto de imagens e usando 25 componentes principais. Os vizinhos mais próximos no espaço reduzido de 25 dimensões eram encontrados por *força-bruta*, pelo cálculo da distância euclidiana. A validação do método por *leave-one-out* mostrou

que o sistema devolvia o melhor casamento para a amostra consultada em 89% das consultas.

Cui *et al.* (2013) propuseram um método de classificação para as imagens do *SDSS*, usando os dados de rotulação do *GZ2*. Em seu trabalho, cada imagem de galáxia foi inicialmente suavizada por um filtro gaussiano, em seguida limiarizada adaptativamente, produzindo uma imagem binária, cujos componentes foram morfologicamente rotulados. O componente conexo central foi identificado a partir do centro de massa e sua excentricidade e orientação calculadas, esta última como a que minimiza o segundo momento de inércia do *blob* central. Em seguida, o *blob* central foi segmentado e rotacionado, de maneira a resultar num conjunto de amostras sem ruídos e normalizadas. A característica proposta neste trabalho foi obtida a partir do histograma de cores de diferentes regiões da galáxia segmentada, sendo invariante por transformações de escala e rotação. O mínimo círculo envolvente em torno do *blob* central foi dividido em 3 níveis, cada qual subdividido em 8 setores. Para cada setor foi obtido um histograma de cores, perfazendo um total de 24 histogramas por imagem. Os histogramas foram concatenados, compondo, assim, o respectivo vetor de características. A comparação entre vetores de características, para fins de consulta, foi feita usando *Kernelized Locality Sensitive Hashing* (Kulis e Grauman, 2009) com 3 funções *kernel* distintas, produzindo resultados superiores a características como histogramas de cores, *Local Binary Pattern* - *LBP*, *GIST* e *Histogram of Orientation* - *HOG*.

Jou *et al.* (2013) seguiram um método de pré-processamento e normalização de orientação semelhante ao de Cui *et al.* (2013), mas o componente central foi identificado diretamente. Características tais como *Gist*, *Local binary Patterns Histogram Fourier (LBP-HF)* e *SIFT* foram extraídas, compondo diversas combinações a serem usadas como entrada para vários classificadores. Este método de seleção e fusão de características mostrou resultados promissores na classificação de entradas do conjunto de dados mencionados.

As imagens do *SDSS* classificadas pelo *GZ2* possuem as mesmas dimensões (424×424), mas galáxias pertencentes a mesma classe de equivalência podem ter orientações diferentes. A fim de normalizar as imagens quanto à orientação, combinamos os métodos de pré-processamento adotados por de la Calleja *et al.* (2003), Cui *et al.* (2013) e Jou *et al.* (2013), produzindo a seguinte sequência:

Algoritmo 1: Normalização de orientação de imagens de galáxias

input : Imagem original de galáxia (Fig. 4.43(a))

output: Imagem de galáxia orientada horizontalmente para a direita (Fig. 4.43(h))

1. converter imagem para níveis de cinza (Fig. 4.43(b));
 2. binarizar por simples limiarização (Fig. 4.43(c));
 3. aplicar operação morfológica *fecha buracos* (Fig. 4.43(d));
 4. rotular componentes conexos (Fig. 4.43(e));
 5. identificar e segmentar *blob* central (Fig. 4.43(f));
 6. obter o vetor de coordenadas $\mathbf{v}$ dos pixels do *blob*;
 7. calcular matriz de covariância $\text{cov}(\mathbf{v})$;
 8. calcular os autovetores e autovalores de $\text{cov}(\mathbf{v})$;
 9. obter o máximo autovalor λ_1 de $\text{cov}(\mathbf{v})$ e índice do respectivo autovetor associado $\mathbf{v}_1$ (Fig. 4.43(g));
 10. calcular ângulo entre $\mathbf{v}_1$ e direção horizontal por $\theta = \arctan \frac{\mathbf{v}_1(2)}{\mathbf{v}_1(1)}$;
 11. rotacionar imagem de ângulo $-\theta$ em torno de seu centro, de modo que o eixo com maior variância aponte para a direita horizontalmente (Fig. 4.43(h)) ;
-

A configuração dos módulos (Tab. 4.14) para este experimento é a mesma descrita para o experimento descrito na Seção anterior.

A presença de *outliers* muito distantes dos *clusters* de classes no espaço de características dificultava sua visualização. Para contornar este problema, sem remover os *outliers*, geramos amostragens aleatórias com 8 mil amostras de cada classe, e selecionamos os gráficos de espalhamento em que os *outliers* não apareciam. Estes gráficos aparecem nas Figs. 4.44-(a)-(h). Futuramente, aplicaremos o método de remoção de *outliers* no espaço transformado por *PCA* de Filzmoser *et al.* (2008).

As Figs. 4.44, 4.45 e 4.46 mostram que a metodologia proposta é capaz de discriminar entre galáxias das classes *completely rounded* e *cigar-shaped*.

Figura 4.43: Normalização de imagens de galáxias usando PCA. (a) Imagem original em RGB. (b) Conversão para Níveis de Cinza. (c) Limiarização. (d) Operação morfológica Fecha-buracos. (e) Rotulação de componentes conexos. (f) Localização e segmentação de componente conexo central. (g) Direção principal por PCA. (h) Rotação.

Figura 4.44: Gráficos do Espaço reduzido de características (2 componentes principais - PCA) do espaço multidimensional de 1024 características ($256 \text{ vértices} \times 4 \text{ escalas}$) resultantes da SGWT. Observe o poder de discriminação da combinação SGWT e função-base nível de cinza das imagens de galáxias para separar as 2 classes.

(a)

Figura 4.45: Gráficos do Espaço reduzido de características (2 componentes principais - PCA) do espaço multidimensional de 1024 características (256 vértices $\times$ 4 escalas) resultantes da SGWT. Instâncias de imagens de ambas as classes são sobrepostas sobre os respectivos pontos no scatter plot. Observe o poder de discriminação do método proposto.

(a)

Figura 4.46: Gráficos do Espaço reduzido de características (2 componentes principais - PCA) do espaço multidimensional de 1024 características (256 vértices $\times$ 4 escalas) resultantes da SGWT. Instâncias de imagens de ambas as classes são sobrepostas sobre os respectivos pontos no scatter plot. Observe o poder de discriminação do método proposto.

4.3.3.3 Comparação entre SGWT, CWT e FT de Imagens de Galáxias

Como discutido na Seção 4.2.1, o domínio da transformada wavelet tradicional é uma grade regular com pesos unitários nas arestas. Os valores da função definidas nos vértices desta grade variam muito pouco de um pixel para o outro (de um vértice pra outro), isto é, a variação entre pixels é frequentemente muito próxima de 1. Com este tipo de grafo, a análise acaba não relacionando vértices distantes (distância fotométrica). Podemos interpretar os valores da transformada como médias ponderadas sobre uma vizinhança regular e muito próxima. No caso da *SGWT*, o grafo é esparsos, e a distância fotométrica relaciona vértices mais distantes, caracterizando de certa modo a imagem. Os valores da transformada são médias ponderadas de uma vizinhança irregular e não muito próxima.

Com o objetivo de comparar a abordagem de análise multiescala de formas via *SGWT* em grafos com métodos tradicionais, apresentamos os resultados de experimentos realizados com a *CWT* e com a *FT*.

4.3.3.4 Análise de Imagens de Galáxias usando a Transformada de Fourier

A transformada de Fourier $2D$ foi calculada e foram amostrados $4N$ pontos do primeiro quadrante do domínio de Fourier, ou seja, o intervalo de frequências $[0, \dots \lfloor N/2 \rfloor; 0 \dots \lfloor N/2 \rfloor]$.

Para tanto, foram tomados os $4N$ primeiros pares ordenados de uma permutação do arranjo $A_2^{\lfloor N/2 \rfloor}$ das coordenadas do primeiro quadrante. Apenas o primeiro quadrante foi amostrado, pois, segundo Smith (1999, cap. 24) há uma simetria entre os valores da *FT* de uma imagem. Tomando-se o módulo da transformação, são iguais os valores contidos nos 1º e 4º quadrantes e nos 2º e 3º quadrantes¹⁵.

Figura 4.47: Resultado da *FT* sobre imagens de galáxia. (a) Imagem original de galáxia cigar-shaped. (b) Amostragem do 1º quadrante do respectivo domínio de Fourier.

¹⁵Definindo-se a ordem dos quadrantes no sentido horário, iniciando pelo canto superior esquerdo da imagem.

Figura 4.48: Gráficos do Espaço reduzido de características (2 componentes principais - PCA) do espaço multidimensional de 1024 características (1024 vértices) resultantes da FFT2. Não há discriminação aparente por este método para separar as 2 classes.

4.3.3.5 Análise de Imagens de Galáxias pela CWT

A análise por CWT foi realizada empregando-se a *wavelet* denominada *Chapéu Mexicano*, a *wavelet* de ordem 2 dentre as *Wavelets Hermitianas*¹⁶ (Lewalle, 1997). Esta *wavelet* corresponde ao operador diferencial laplaciano da gaussiana, apresentando as propriedades de ser real, com dois momentos nulos, não-progressiva e invariante por rotação. Além disso, é sensível a singularidades presentes no sinal, produzindo análises genuinamente tempo-escala (Antoine, 2004; Antoine *et al.*, 1993).

A *wavelet* hermitiana de ordem 2 pode ser definida como:

$$\psi_g(x, y) = \nabla_g^2(x, y) = \hat{i} \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \hat{j} \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} \quad (4.5)$$

onde,

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} = (j2\pi f_x)^2 G(f_x) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = (j2\pi f_y)^2 G(f_y) \quad (4.7)$$

e:

$$g_\sigma(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Na Fig. 4.49, são exibidos os resultados da CWT, que foram amostrados pelo mesmo conjunto de pontos (mesmas posições) obtidos para compor o conjunto $V(G)$ do grafo geométrico usado para a análise pela SGWT em 4 escalas, totalizando o mesmo número $4N$ de pontos. Para o caso *wavelet* chapéu mexicano utilizada para a CWT, o conjunto de 4 escalas constitui os parâmetros $\{\sigma_i\}$ que caracterizam os graus de dispersão da gaussianas diferenciadas, ou seja $\{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$. Note que a magnificação do microscópio matemático (CWT) varia a análise de global para local na

¹⁶família de derivadas da Gaussiana.

mesma ordem que o apresentado nas Fig. 4.49(b) a Fig. 4.49(e).

Figura 4.49: Resultados da CWT sobre imagens de galáxias. (a) Imagem original de galáxia cigar-shaped. (b) Escala 1 da CWT. (c) Escala 2 da CWT. Escala 3 da CWT. Escala 4 da CWT.

Na Fig. 4.50 veem-se instâncias do espaço reduzido de características por *PCA* da transformada *CWT* sobre imagens de galáxias, em que a discriminação entre classes não é aparente.

Figura 4.50: Gráficos do Espaço reduzido de características (2 componentes principais - *PCA*) do espaço multidimensional de 1024 características (256 vértices $\times$ 4 escaas) resultantes da CWT. Não há discriminação aparente por este método para separar as 2 classes.

Conclusão

5.1 Comentários Finais

Conforme destacado na Seção 2.1, alguns trabalhos encontrados na literatura reportam o uso de transformadas *wavelet* para análise de redes e/ou caracterização de dados estruturados em grafos - *extração de conteúdo* (Grady e Polimeni, 2010). No entanto, quando a representação por grafos é usada para fins de busca e classificação, as comparações foram realizadas por meio de cálculos de distância entre grafos ou casamento entre grafos. Além disto, não foram encontradas referências sobre a aplicação de transformadas *wavelets* para extração de conteúdo de grafos associados a formas em imagens bidimensionais, objetivando sua caracterização.

Neste trabalho, propusemos um *framework* original para representação de formas 2D por grafos, visando à extração de seu conteúdo pela aplicação da *SGWT* e à caracterização daquelas formas. A representação híbrida pode ser entendida como uma combinação das representações por contorno e por regiões: o contorno pode ser amostrado por pontos e a região da forma pode ser decomposta em subregiões (células de Voronoi), as quais são representadas por pontos amostrados (centróides das células). As relações estruturais entre os centróides é mantida pelas arestas dadas pela triangulação de *Delaunay*, formando assim um grafo.

A estruturação de representações de subregiões da imagem por grafos irregulares foi parcialmente motivada pelas considerações de Wertheimer (1938), que destacou a importância do agrupamento perceptual e a organização em visão, enumerando alguns fatores cruciais para o agrupamento visual, tais como similaridade, proximidade e boa continuação (Shi e Malik, 2000). No âmbito de Processamento de Imagens e Visão Computacional, pixels não são entidades naturais, apenas uma consequência da representação discreta de imagens (Ren e Malik, 2003) e seu agrupamento, segundo os princípios *Gestalt*, geralmente não obedece uma estrutura irregular. Este fato pode ser constatado nos resultados apresentados por métodos de supersegmentação, como *Superpixels* (Mori, 2005; Mori et al., 2004; Ren e Malik, 2003) e *TurboPixels* (Levinshtein et al., 2009), que se basearam em *Cortes Normalizados* em grafos, um critério proposto por Shi e Malik (2000). Assim, ao considerarmos grafos arbitrários de topologia irregular, podemos estruturar quaisquer agrupamentos de pixels, obtidos pelos métodos mais variados.

Listamos, logo mais, as propriedades observadas nos experimentos realizados com este método. Sendo uma proposta original, partimos do marco zero, dirigindo os esforços para a exploração das propriedades da metodologia e a demonstração de sua eficiência para discriminação entre classes de formas, nos estudos de caso realizados.

Uma clara vantagem, em relação às abordagens mencionadas, repousa no fato de que a caracterização produzida pela metodologia proposta efetua a comparação entre vetores de características extraídas pela *SGWT*, com custo computacional inferior aos métodos baseados em casamento e distância entre grafos. Além disto, estes vetores de características têm dimensões muito menores que o número de pixels das imagens, permitindo que o método seja empregado a grandes bases compostas de imagens muito grandes.

Uma limitação deste método, quando usado o mesmo grafo para todas as imagens, é a necessidade do pré-processamento das imagens para centralizar a forma, normalizar sua orientação e redimensioná-la para a mesma escala. Neste caso, o método não é invariante por escala, rotação e translação. O método só seria invariante por estas transformações, se houvesse uma técnica para geração de grafos isomorfos para todas as instâncias de uma mesma classe de forma. As dificuldades técnicas encontradas para geração de um tal grafo foram descritas na Seção 3.4.

Como discutido na Seção 3.1, a *SGWT* é uma generalização da transformada *wavelet* tradicional, sendo capaz de analisar sinais definidos em estruturas combinatórias irregulares, tais como grafos. Com efeito, é possível constatar este fato a partir das respectivas definições. Análises multiescala tradicionais, como a *CWT*, são definidas em domínios regulares euclidianos, o que motivou a criação de uma ferramenta para análise em domínios irregulares não-euclidianos (Hammond *et al.*, 2011).

Sendo o grafo para a *CWT* uma grade com pesos unitários nas arestas, os valores da função nesta grade variam muito pouco de um pixel pra outro (de um vértice pra outro), isto é, a variação deve ser 1 entre praticamente todos os vértices. Com este tipo de grafo, a análise acaba não relacionando vértices distantes (distância fotométrica). Os valores da transformada são médias ponderadas de uma vizinhança regular e muito próxima. No caso da *SGWT*, o grafo é esparso, e a distância fotométrica relaciona vértices mais distantes, caracterizando, de certo modo, a imagem. Os valores da transformada são médias ponderadas de uma vizinhança irregular e não muito próxima.

Dos experimentos apresentados no Capítulo 4, podemos enumerar as seguintes conclusões:

1. A topologia de grafos geométricos pode variar muito, quando a estruturação é obtida pela combinação entre aproximação poligonal e esqueleto reto.
2. A *CWT* comporta-se como um caso particular da *SGWT*, quando o grafo é uma malha regular com pesos unitários definidos nas arestas.
3. A *wavelet* definida por Hammond *et al.* (2011) no domínio espectral assemelha-se à *wavelet* conhecida como Chapéu Mexicano.
4. A *SGWT* destaca eventos locais, respondendo com maior intensidade em vértices com valores mais altos.
5. A *SGWT* é invariante para transformações rígidas dos respectivos grafos geométricos. A *SGWT* varia com deformações causadas pelo cisalhamento de um grafo geométrico, mas não é covariante com esta transformação.
6. A *SGWT* revela mudanças nas pequenas escalas (influências menores) para variações topológicas locais nas folhas de uma árvore.
7. A *SGWT* revela mudanças nas grandes escalas (influências maiores) para variações topológicas globais na raiz de uma árvore.
8. A *SGWT* revela mudanças locais na vizinhança de um vértice transladado.
9. A correlação entre a *SGWT* de um grafo geométrico modelo e a *SGWT* de grafos geométricos morfologicamente perturbado diminui para valores de σ crescente.
10. As características da *SGWT* podem ser usadas para discriminar formas binárias 2D, usando o dual da transformada da distância definido sobre um grafo irregular obtido por triangulação de Delaunay.
11. As características da *SGWT* podem ser usadas para discriminar formas de tomates, usando a média 5×5 sob os vértices de um grafo irregular obtido por triangulação de Delaunay, com pesos nas arestas proporcionais à distância fotométrica.

12. Formas de galáxias perceptualmente semelhantes aparecem mais próximas no espaço reduzido de características extraídas da *SGWT* e formas perceptualmente diferentes aparecem mais distantes no espaço reduzido de características extraídas da *SGWT*.
13. As características da *SGWT* podem ser usadas para discriminar formas de galáxias das classes *rounded* e *cigar-shaped*, usando a média 5×5 sob os vértices de um grafo irregular obtido por triangulação de Delaunay, com pesos nos vértices proporcionais à distância fotométrica.
14. As características extraídas da *SGWT* apresentam desempenho superior para discriminação entre classes, comparadas com as características extraídas da *CWT* e da *Transformada de Fourier*.

5.2 Trabalhos Futuros

A perspectiva futura deste trabalho pode basear-se em combinações de técnicas para os diversos módulos do método proposto.

Presentemente, para o caso das imagens binárias, usamos como *função-base* a transformada da distância aplicada somente à forma. Em trabalhos futuros, investigaremos a influência da transformada da distância também aplicada sobre o complemento da forma em relação ao fundo, esperando agregar mais informação sobre a forma.

Neste trabalho, usamos uma aproximação para distribuições do *disco de Poisson*, por meio da técnica de *Jittering* Não-correlacionado gaussiano. Em trabalhos futuros, pretendemos avaliar o método de amostragem por *Jittering* não-correlacionado com ruído branco. Ainda, alguma implementação do próprio método de amostragem por *Distribuição do Disco de Poisson* (Fig. 5.1) (Bridson, 2007), que produz amostragens com distâncias irregulares, mas ainda mais regulares do que amostragens por distribuição uniforme (Bridson, 2007), pode ser avaliada com combinações diferentes de métodos de estruturação.

Outras técnicas de tesselação de imagens podem ser estudadas, como a supersegmentação baseada em *Cortes Normalizados* (Shi e Malik, 2000) por *Superpixels* (Mori, 2005; Mori et al., 2004; Ren e Malik, 2003) e *TurboPixels* (Levinshtein et al., 2009).

A *SGWT* também pode ser testada sobre adaptações de estruturas hierárquicas de árvores (grafos de *shock*) (Fig. 5.3) (Paradhi et al., 2009a,b; Sebastian et al., 2001, 2004), esqueletos (eixo medial) (Fig. 5.2) (Loncaric, 1998) e sobre grafos construídos a partir de descritores de Fourier (Fig. 5.4) (Jin et al., 2006), buscando a geração de grafos com topologia e número de vértices constante para uma mesma classe morfológica. Ambas as abordagens propiciam simultaneamente a amostragem e sua estruturação em grafos.

Figura 5.1: Alguns exemplos de técnicas de amostragem: (a) por *Disco de Poisson*; (b) por uma *Distribuição Uniforme*; as coordenadas x e y destes pontos foram selecionadas aleatoriamente dentro do domínio da image; (c) *Jittered Grid*. A imagem é dividida por uma grade e um ponto é selecionado aleatoriamente de cada célula da grade. Adaptado de (Tulleken, 2008).

Figura 5.2: A Transformada do Eixo Medial. Adaptado de (Loncaric, 1998).

Figura 5.3: O resultado do casamento entre dois peixes baseado em seus grafos de choque. Cores iguais indicam os ramos correspondentes e ramos cinza no grafo de choque foram emendados. Adaptado de (Sebastian et al., 2001). ©2001 IEEE.

Figura 5.4: Transformações afins sobre formas e respectivos grafos AFWG. Adaptado de (Jin et al., 2006). ©2006 IEEE.

O desempenho da metodologia aqui descrita deve ser estudado quando aplicado sobre outros subconjuntos de classes de bases de imagens binárias 2D, como a *Core Experiment CE-Shape-1 Part B* (Latecki *et al.*, 2000), sobre as demais classes das imagens rotuladas pelo *Galaxy Zoo 2*, bem como sobre imagens de ícones, como os da base *NicIcon* (Fig. 5.6) (Niels *et al.*, 2008). Outras *funções-base*, diferentes da intensidade dos pixels ou da transformada da distância podem ser estudadas.

Com relação às imagens de galáxias rotuladas pelo *Galaxy Zoo 2*, novos experimentos levando em conta anotações ruidosas e a interdependência de atributos podem ser realizados. Ainda, novas *funções-base* combinadas com técnicas de estruturação específicas podem ser estudadas para encontrar barras e braços espirais.

A importância das arestas para uma dada aplicação e configuração pode ser investigada, desenvolvendo-se algoritmos de aprendizagem, a fim de escolher arestas e impor pesos baseados nas relações geométricas ou radiométricas.

Com efeito, pretendemos identificar *outliers* usando o método de identificação no espaço transformado do PCA de Filzmoser *et al.* (2008). A identificação destes *outliers* viabilizará sua remoção, possibilitando a visualização de todo o espaço de características, bem como uma inspeção visual cuidadosa, visando ao aperfeiçoamento do método.

A metodologia, ora descrita, também pode ser testada para a análise de formas, as quais constituem-se em espaços topológicos com $\text{genus} \geq 1$, isto é, formas que contêm buracos, como a ilustrada na Fig. 5.5(a) e de formas que constituem-se em espaços topológicos desconexos, ou seja, formas compostas por outras formas, como a mostrada na Fig. 5.5(b). Tais problemas não foram muito explorados na literatura, principalmente em comparação com técnicas bem estabelecidas como curvatura ou dimensão fractal (Chen *et al.*, 1993; Coelho e da F. Costa, 1995; da F. Costa e Cesar Jr., 2009; Falconer, 1990; Family *et al.*, 1989; Jelinek e Fernandez, 2001; Mokhtarian, 1995; van Vliet e Verbeek, 1993).

Figura 5.5: A representação de formas por grafos possibilita a análise de (a) formas que contêm buracos e de (b) formas compostas por outras formas.

Figura 5.6: Exemplos de 14 diferentes ícones produzido por um dos participantes do estudo para a base *NicIcon*. Adaptado de (Niels *et al.*, 2008).

Ademais, devem ser realizadas validações quantitativas da metodologia aqui proposta por validação cruzada, usando métodos como o *k-fold validation* e o *leave-one-out cross validation*.

A metodologia aqui apresentada, também será empregada no projeto de Pós-Doutorado de Silvia Cristina Dias Pinto, do grupo de Visão Computacional *Creativision* do IME-USP, intitulado *Aprendizado de Modelos Estruturais baseados em Grafos*.

Apêndice **A**

Publicações

Segue cópia do artigo relacionado a esta tese, para o qual colaborei como autor principal.

A.1 *Shape Analysis using the Spectral Graph Wavelet Transform*

Anexo o trabalho *Shape Analysis using the Spectral Graph Wavelet Transform* apresentado na 9th *International IEEE Conference on e-Science, October 23 – 25, 2013, Beijing, China*. Este trabalho descreve um *framework* para análise e classificação de formas em imagens 2D baseado na representação de formas por grafos e sua análise pela *Transformada Wavelet Espectral de Grafos - SGWT*.

Shape Analysis using the Spectral Graph Wavelet Transform

Jorge de Jesus Gomes Leandro*, Roberto Marcondes Cesar Jr*, Rogerio Schmidt Feris†

*Institute of Mathematics and Statistics

Computer Science Department

University of São Paulo

São Paulo, Brazil

Email: jleandro,roberto.cesar@vision.ime.usp.br

†IBM T.J. Watson Research Center

New York, USA

Email: rsferis@us.ibm.com

Abstract—The present work describes a framework for morphological characterization of galaxies based on the Spectral Graph Wavelet Transform. A galaxy image is sampled with a number of points randomly chosen, whose Delaunay triangulation results in an arbitrary graph. The average intensity value in a 5×5 vicinity of a pixel related to a graph vertex is assigned to the corresponding graph vertex. A weight inversely proportional to the photometric distance between each pair of vertices is assigned to the respective graph edge. The Spectral Graph Wavelet Transform is computed from this weighted graph with real-valued vertices yielding a high-dimensional feature vector, which is reduced to a two dimensional vector through Principal Component Analysis. The proposed framework has been assessed through two case studies, namely, the case study of analyzing (i) 2D binary images from shapes and preliminary results of (ii) 2D gray tone images from galaxies. The obtained results imply the suitability of this framework for the characterization of galaxies images.

I. INTRODUCTION

Data analysis in astronomy presents important problems to be addressed by *eScience* methods. For instance, the evolution of the universe has been studied through the analysis of textual data, derived parameters, multi-band images and spectra [1]. The present paper presents a new wavelet framework for morphological characterization of galaxy images.

Pattern Recognition of shapes in images is an important problem both in the theoretical and empirical Computer Vision realms, with applications spreading over several domains, such as agriculture, medicine and astronomy.

The vast majority of approaches currently employed to tackle this problem is closely related to the chosen representation scheme for the shape. Briefly, such representation schemes are mostly based on *Contour/Edges*, *Regions* and *Transforms* [2], for which shape analysis methods are named likewise. In particular, among *Regions*-based representations methods, there are the graphs-based representation methods, where the structural relationship between elements within images may be represented by weighted graphs [3], as done in [4], where the decomposition of images from video frames in regions and their structuring in graphs through *Delaunay*

triangulation were carried out. Also, shapes may be skeletonized and represented by trees, a special kind of graphs [5]. Similarly, crossing, bifurcation and extremities points in skeletons may be represented as vertices and corresponding linking segments may be represented as graph edges [6].

In the literature, graphs were used to represent decomposed parts of images through the morphological opening operation [7]. Morphological skeletons from shapes were represented as graphs in [8]. Shock graphs were represented as hierarchical trees in [9] to allow the computation of graphs distance. The same sort of representation was used in order to carry out graphs matching in [10]. Hybrid representation methods were used to simultaneously consider both region and contour information [11].

Therefore, graphs can be widely used to represent irregular structured information dwelling in images.

On the other hand, until recently, powerful multiscale analyzing tools, such as the *wavelet transform* have mostly been well established for regular structured information in images. For such a kind of regular structured domains, *wavelets* have been widely explored, with important contributions to solve problems like segmentation in diabetic retinopathy images [12] and 2D neuronal images shape analysis [13].

The presentation of the *Spectral Graph Wavelet Transform* in [14] along with its efficient implementation provided an easy, fast and reliable manner to perform multiscale graphs analysis on arbitrary graphs, surpassing previous approaches, as will be discussed in the section II-A1.

The primary goal of the present work is to describe the viability of Graph Wavelet Transforms for shape characterization. To this end, we propose a novel methodology framework, whose modules are properly depicted in the pipeline shown in Fig.1 and briefly explained as follows.

Consider a 2D image, as shown in the module (1)-**Shape**. In principle, the input may be either a binary or a gray level image. In the case of a binary image, it should be transformed somehow so as to yield a resulting image whose pixels reflect the shape structure in some way. In the module (2)-**Sampling** a set of sample points is chosen from the set of points

of the image domain, according to a previously determined sampling scheme. Obviously, the main advantage related to this stage is downsizing the extent of the analyzed data to a few samples. Besides that, this module provides versatility to the framework, since no restriction is imposed over the choice of points. Next, in the module (3)-**Graph**, the just picked points are topologically structured as an arbitrary graph by *Delaunay* triangulation. In doing so, the regularly structured mesh domain of the image is thus represented by a smaller irregularly structured network. The topological structuring of the sample points with an arbitrary graph holds a fewer number of existing morphological relationships between pixels than the original image mesh. Then, once the graph topology has been obtained and the *base function* values are estimated, the pairwise photometric distances between vertices in the graph are calculated and edges weights are computed in the sequel, according to (2). We call photometric distance between the vertices v_i and v_j to the term $|f(v_i) - f(v_j)|$ that appears in the denominator of (2). This function, henceforth referred to as the *base function*, is defined over the set of vertices of the resulting graph. Such a base function should capture attributes that represent the underlying influence of the whole network topology on each vertex, throughout several scales. Besides that, the base function should also provide information related to the shape of interest. At this point, the *base function* defined over the irregular topology of the graph is expected to provide a good representation for the related shape. Then, in order to unfold the information contained within the base function into several scales, so as to better reveal the network influence on each vertex, a multiscale analysis is carried out as portrayed in the module (4)-**SGWT**. The multiscale analysis is able to highlight singularities occurring in the *base function* throughout various scales, so that signatures within the signal may be consistently observed. Finally, the *SGWT* may provide features to compose a feature vector to be fed to a classifier, as illustrated in the module (5)-**features**. Last, in order to qualitatively assess the discrimination power of the yielded *SGWT* coefficients by means of visualization, a mapping from such a high dimensional space onto a lower dimensional space, precisely $2D$, has been obtained by the feature extraction method so called *Principal Component Analysis*, commonly referred to in the literature as *PCA*. The decision to extract two principal components from the high dimensional space was merely due to a matter of visualization.

This paper is organized as follows. Section II presents the theoretical foundations for this work and details the methodology application to the case studies used to validate and evaluate this framework. Section III shows the results obtained for the cases studied. Section IV remarks conclusions and enumerate possible future works.

II. METHODS

A. Theoretical Background

Given a graph $G = (V, E)$, with $|V| = n$, its adjacency matrix is a square matrix, defined as:

$$A = (e_{ij}) = \begin{cases} w_{ij}, & \text{iff } v_i \text{ e } v_j \text{ are adjacents} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where w_{ij} is the weight associated to the edge $e_{ij} = v_i v_j$.

D is the diagonal matrix of the vertices degrees, defined as:

$$D = (d_{ij}) = \begin{cases} d_G(v_i), & \text{if } i = j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The non-normalized laplacian matrix of G is given by $\mathcal{L} = D - A$.

Let I be the image to be analyzed. Then, in the present work, we call $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ as the base function defined over the vertices in G and given by:

$$f(v_i) = I(v_{i,x}, v_{i,y}) \quad (1)$$

where, $v_{i,x}$ and $v_{i,y}$ are respectively column and row indexes of the pixel in the image under the graph vertex v_i .

Also, for the edges weights we define:

$$w_{i,j} = \frac{1}{(1 + |f(v_i) - f(v_j)|)^2} \quad (2)$$

The function given by the Eq. 2 takes into account the difference between photometric information in the pixels related to the vertices of the graph on top of them. The additive term 1 in the denominator accounts for the cases when the difference is zero.

It should be mentioned that I in the Eq. 1 is not necessarily the raw image of interest. In the case study about galaxies images presented herein, I is the image filtered by a 5×5 average mask, while in the case study about binary shapes, I is the resulting image from the distance transform applied to the original binary image. In both cases, this preprocessing step is meant to locally capture the structure of the image in the neighbourhood of each pixel into a scalar.

1) *The Spectral Graph Wavelet Transform*: The literature abounds in applications for *Wavelet* transforms defined over finite energy functions on regularly structured domains, such as, scalar functions over euclidian spaces, like time series and images [12], [15]–[20]. In spite of that, there may be found still several interesting scientific and technological applications in which the functions domains are not regularly structured [14]. Such irregular structured domains may be elegantly modeled as graphs and complex networks [21].

Computer, transport and social networks are just a few examples of problems where functions are defined over irregular structured domains, which may be represented by weighted graphs, by respectively taking computers, cities and individuals as vertices [14]. Similarly, the same kind of formulation has been used to model the functional organization of cells in biology [22] and chemical bonding networks [23].

From the Graph and Networks Theory standpoint, graph analysis may take into account both topology and evolution dynamics, with measures based on vertices degrees distributions, degrees correlations, distance statistics and clustering

Fig. 1. Proposed framework: (1) Shape image, (2) Geometry sampling, (3) Structuring graph topology, (4) Spectral Graph Wavelet Transform (SGWT) and (5) Features Vector

coefficients [21], making it possible to distinguish among graphs by using such topological measures [24]. However, topological measures require meaningful differences among graphs topologies, for they are global indexes that are not able to capture subtle changings in the graphs connectivities [25].

Being data defined over vertices hopefully under the influence of the whole graph topology, the *wavelet* transform analysis defined on irregularly structured data represented by graphs shows up as a very suitable tool to reveal local events, making evident the network influence on each vertex throughout several scales, that is, a multiscale analysis of graphs [14]. In order to carry out such sort of analysis, it is necessary to extend the traditional *wavelet* definition for unstructured domains represented by graphs.

Different definitions have been proposed for *wavelets* on graphs in a recent past. A generalization of the traditional *wavelet* transform in the spacial domain was presented in [26] in order to analyze data traffic in computer networks, by using the *h-hop* distance concept, such that the *wavelet* centered at the vertex $\mathbf{n}$ and evaluated at the vertex $\mathbf{m}$ depends solely upon the shortest path length between both vertices. A *lifting* scheme was defined in [27] to analyze graphs representing wireless sensors networks. In [14], the Spectral Theorem and Continuous Calculus were used to propose the so called *SGWT - Spectral Graph Wavelet Transform*. In this approach, it was defined a *wavelet* operator in the analogous domain to the Fourier domain for graphs, in terms of a spectral decomposition of the laplacian matrix of a weighted and finite graph. In the present work, the *SGWT* proposed in [14] was used to get the *wavelet* transform of graphs related to shapes in images.

In [20], a *Parseval frame* was obtained from the *SGWT* [14], making the energy conservation possible in the transformation space and easing the original signal reconstruction. Also, it was defined a generalization for the *SGWT* for weighted graphs with negative values in the edges.

In [28], it is presented a study of a transductive semi-supervised learning, by using the *SGWT* [14] for providing smooth functions approximations by parts, which are defined over graphs vertices from labeled and unlabeled data.

The main theoretical concepts following [14] are presented below.

Consider the inverse *Fourier* transform defined on the real

line and given by:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (3)$$

Analogously, a graph Fourier transform may be defined by using:

$$\mathcal{L}\chi_l = \lambda_l \chi_l \quad (4)$$

where χ_l and λ_l are respectively the eigenfunctions and eigenvalues of the operator $\mathcal{L}$.

Similarly to the Eq. (3), for any function $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^N$, its Fourier transform $\hat{f}$ is given by:

$$\hat{f}(l) = \langle \chi_l, f \rangle = \sum_{n=1}^N \chi_l^*(n) f(n) \quad (5)$$

that is, the Fourier transform of f related to the l -th eigenfunction corresponds to its decomposition into the n components of an eigenvector χ_l of $\mathcal{L}$, or, alternatively, the projection of f on χ_l , defined by the usual scalar product between both them. Notice that the vertices indices $n \in \{1, \dots, N\}$ and the eigenfunctions indices $l \in \{0, \dots, N-1\}$ play the role of the variables time t and frequency f respectively of the ordinary Fourier transform.

Thus, its inverse is given by:

$$f(n) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l) \chi_l(n) \quad (6)$$

According to the **SGWT** theory, a wavelet is an **operator** $T_g = g(\mathcal{L})$, where $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a band pass kernel function¹, analogous to the Fourier transform of a classic *wavelet*. The wavelet operator T_g acts upon a base function $f(v)$ defined over each vertex v of a graph represented by the $\mathcal{L}$ operator. Since $\mathcal{L}$, by its own properties, is a linear self-adjoint limited operator in the *Hilbert* space, the **Continuous Functional Calculus** may be used to define the function g on the referred operator, by using the spectral representation of the operator $\mathcal{L}$, which is herein the equivalent to the Fourier transform of the graph, defined by (5).

The wavelet operator action upon f is defined on the Fourier domain as follows:

¹satisfying the admisibility condition

$$\widehat{T_g f}(l) = g(\lambda_l) \hat{f}(l) \quad (7)$$

In the graph domain, the correspondent operation is yielded by the inverse Fourier Transform of (7), calling upon the definition given in (6), that is:

$$(T_g f)(m) = \sum_{l=0}^{N-1} g(\lambda_l) \hat{f}(l) \chi_l(m) \quad (8)$$

Since the traditional *Wavelet* transform is a time-scale transform [6], the *wavelet* operator must be defined for a certain scale t :

$$T_g^t = g(t\mathcal{L}) \quad (9)$$

It may be shown that the *Wavelet* transform coefficients can also be computed from the operators defined in (8):

$$\begin{aligned} (T_g \delta)(m) &= T_g^t \delta_n(m) = \psi_{t,n}(m) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} g(t\lambda_l) \chi_l^*(n) \chi_l(m) \end{aligned} \quad (10)$$

By definition, the matrix $\mathcal{L}$ is related to the underlying topology of the graph G . Thus, it is worth emphasizing that the wavelet operator action on f corresponds to its decomposition into the set of eigenfunctions of $\mathcal{L}$, which is able to simultaneously capture both the connectivity structured by the network topology as well as the base function characteristics [20].

Hence, given a graph G represented by $\mathcal{L}$ and an operator *wavelet* T_g defined on its eigenvalues, a subtle topology variation of G results in an alteration in T_g . For the sake of coherence in comparisons among results from wavelet analysis of functions defined on distinct graphs, it is mandatory to assure that the topologies of the graphs involved in the comparison are the same.

The *wavelet* proposed in [14] was designed in the Fourier domain. The kernel function g was built by parts, satisfying the conditions of well localization in the limit of fine scales, with a monic power behaviour in the origin neighbourhood and decay for large values of x . The continuity of g is guaranteed by the usage of cubic splines to link the function parts.

The implementation for the above described method is available and hosted at <http://wiki.epfl.ch/sgwt> as a free and opensource library in scripts for the *Matlab*® platform. In [14] the overall time complexity for the fast *SGWT*, which approximates the g kernels by Chebyshev polynomials, is proved to be $O(M|E| + N \sum_{j=0}^J M_j)$, where M is the chosen polynomial degree, $|E|$ is the number of edges, $N = |V|$ is the number of vertices, J is the number of scales and M_j is the number of polynomial terms for the scale j . In case $|E|$ grows linearly with N , then the *SGWT* time complexity reduces to $O(N)$. As for the space complexity, the fast *SGWT* requires an amount of memory proportional to $N(J+1) + 3N$. So, in order to process a number X of images, the time required by our framework scales as $O(XN)$. Since in our

system, N is a parameter initially set to a constant, our framework ultimately presents a $O(X)$ time complexity. Also, the memory requirement for processing X images in our system theoretically remains $N(J+1) + 3N$, for all variables are reused during the loop iterations. Moreover, it pays to use lists of files names and to save intermediate results to metafiles, so that the loop can be resumed, in case of eventual breaks.

The current work used Hammond's approach to obtain wavelet transforms from graphs representing the domain of the function distance transform in $2D$ binary shapes and the domain of a photometric function with gray level values in $2D$ gray level galaxies images.

B. Case studies

In order to assess the suitability of the proposed framework for shape analysis, our method has been tested with the supervised and unsupervised learning approaches.

1) *Supervised Classification*: The images used in this work for the case study of Supervised classification are from the *MPEG7 CE Shape-1 Part B* database². Some samples of four labeled classes from this database are presented in the Fig.2. This database was selected because it includes labeled data, which allows evaluating the proposed framework for supervised classification.

Fig. 2. Sample images taken from four classes of the *MPEG7* image base: (a) camel, (b) key, (c) rat and (d) stef

²http://www.imageprocessingplace.com/root_files_V3/image_databases.htm

For the supervised classification experiments, four sets of twenty labeled images each, from the *MPEG7 CE Shape-1 Part B* database, has been used, namely, the classes *camel*, *key*, *rat* and *stef*, as mentioned previously.

First, in the preprocessing step, the eighty binary 2D images were accordingly scaled to the same size of 450×450 and centralized.

Following, it was chosen a set of 256 regularly spaced points from the points of the image domain. Initially, these points are geometrically centralized in a 16×16 mesh. Right before being triangulated by the *Delaunay* algorithm to yield a graph, noise drawn from a normal distribution with mean 0 and standard deviation 4 was added to each one of the mesh points cartesian coordinates, in order to disturb the orthogonal geometric organization of the mesh points, since the *Delaunay* triangulation algorithm does not work out for aligned points. The relationship between the number of samples, the degree of points disturbance and the average mask size comply with a fact from statistics, which states that in a normal distribution, 68% of the data fall under one σ . Hence, about 68% of the coordinates will be accordingly disturbed within the interval given by $\sigma = 4$. This motivates setting the size of an average mask to 5×5 , in order to assign to each vertex a merge of the values in a neighbourhood within the limits of the coordinates disturbance.

Notice that the resulting triangles sizes follow as a result of the used triangulation algorithm, that is, *Delaunay*, which has the property to maximize minimum angles [29], thus avoiding skinny triangles. The combinatorial structure of the yielded graph should not be regarded as regular as the structure of the original image support, since the valencies (degrees) of the triangulation nodes are not constant, whereas a fixed neighbourhood is usually defined for the image domain structure.

Subsequently, the distance transform taken from the image provided the *base function* values for each graph vertex. Overplots of distance transforms and graphs are illustrated for two sample shapes in Fig.4(a) and Fig.4(b). The corresponding *base functions* profiles are respectively seen in Fig.4(c) and Fig.4(d).

Now, photometric distances between vertices and edges weights are calculated as described in the section II.

Next, the weighted graph with real-valued vertices undergoes the *Spectral Wavelet Transform*. Particularly, the *SGWT* has been computed for 4 scales, with the wavelet kernel defined in [14]. The resulting wavelet transforms for 4 scales and 256 vertices are depicted in Fig.4(e) and Fig.4(f). In the mentioned figures, it may be qualitatively seen the similarity between function profiles and *SGWT* profiles for each scale for samples taken from a same equivalence class.

As a result, each image may now be represented by a feature vector of $4 \text{ (scales)} \times 256 \text{ (vertices)} = 1024$ dimensions, that is, a feature vector comprised of the *SGWT* responses at each vertex in all scales.

The 1024 features were reduced to 2 principal components, providing a 2 dimensional space.

2) *Unsupervised Classification*: In [30], it is presented a method aimed at classifying galaxies images from the large dataset known as Sloan Digital Sky Survey (SDSS), along with their crowd-sourced annotations gathered by the project implemented in the platform called Galaxy Zoo³ [31]. Each galaxy image was firstly smoothed out by a gaussian filter, then binarized and had its connected components properly labeled. The central blob was identified and its eccentricity and orientation were computed, being accordingly segmented and rotated in the sequel, so as to yield a denoised and orientation normalized set of samples. Features such as Gist, Local Binary Patterns Histogram Fourier (LBP-HF) and SIFT were extracted to comprise several combinations to fed up a number of classifier models. Their method of feature selection and fusion showed promising results in classification of entries from the aforementioned dataset.

In our work, for the Unsupervised classification case study, the credits of the images used herein are to *David W. Hogg, Michael R. Blanton and the Sloan Digital Sky Survey Collaboration*⁴. Samples of two visually distinct classes of galaxies images from this database are displayed in the Fig.3.

A set of 506 images from the mentioned database was used in the present case study, which implement the very same framework described in the section II-B1, with minor differences in specific modules detailed as follows.

The colored images were converted to gray level images. All the images were same sized, that is, 768 rows by 1024 columns, hence the scaling step was unnecessary. A graph was constructed exactly as described in section II-B1. Overplots of two average filtered galaxies images and respective graphs are shown in Fig.5(a) and Fig.5(b).

The *base function* values defined over the graph vertices were simply taken as the pixel intensities values from the original image filtered out by an average 5×5 mask. The photometric information in a neighbourhood defined by the mask was aggregated into one pixel, as a means to condense the shape structure information nearby, besides compensating noise and tiny variations in the vertices positions. Edges weights calculations were carried out taking into account the photometric distance, as described in the previous section about (2). See *base functions* profiles for two different shaped galaxies in Fig.5(c) and Fig.5(d).

The stages of *SGWT* and *PCA* feature extraction followed the same steps described in the previous section. It is worth mentioning the remarkable difference between the profiles for the resulting wavelet transforms for 4 scales and 256 vertices, as shown in Fig.5(e) and Fig.5(f).

III. RESULTS

Regarding the case study detailed in the section II-B1, results are shown as plots for the reduced feature space related to the 2D binary images in the Fig.6. Some points have been randomly picked up to appear overlapped by the respective

³<http://www.galaxyzoo.org>

⁴<http://cosmo.nyu.edu/hogg/rc3/>

(a)

(b)

Fig. 3. Galaxies images with visually (a) elliptical and (b) spiral shapes. Courtesy by David W. Hogg, Michael R. Blanton and the Sloan Digital Sky Survey Collaboration

images. Notice the clear-cut separation among the 4 classes studied by our framework.

As for the case study described in the section II-B2, results are displayed as plots for the reduced feature space related to the 2D gray level images from galaxies in the Fig.8. Similarly, some images are plotted overlapping the respective points that were randomly chosen. One may visually identify clusters of similar shaped galaxies in these plots. In order to emphasize the discrimination capability of our framework in this case study, we present in the Fig.7 (a) and (c), prototypes from two visually distinct classes (elliptical and spiral) are shown, while in (b) and (d) the respective 30-nearest neighbours are displayed. Notice the similarity between prototypes and respective nearest neighbours.

IV. CONCLUSION AND FUTURE WORKS

The current work described a novel framework for morphological characterization of galaxies images by using the *Spectral Graph Wavelet Transform*.

Our method starts by sampling points from the image domain and structuring them as a graph via *Delaunay Triangulation*. The image is preprocessed by a 5×5 average filter, which in turn provides the real values for the *base function* assigned to the graph vertices, depending on their position over the image. The graph edges are weighted according to the photometric distance between the vertices on their extremities. The graph undergoes a *Spectral Graph Wavelet Transform*, unfolding the *base function* in four scales. From the resulting high dimensional feature vector with dimension given by the number of graph vertices times the number of scales, two features are extracted through *Principal Components Analysis*.

As discussed in the section III, the experiments results imply the discrimination capability of the proposal framework in the two case studies presented herein.

The main advantage of such an approach is the arbitrary selection of points from the image domain and their structuring as a graph, providing a compressed representation of the original image which holds a great deal of relevant information.

The weights assigned to edges as a function of the photometric distance between pairs of vertices gather information about morphological relations established between regions within the shape.

A perspective for future works may include studies with machine learning algorithms to keep relevant edges, relating weights according to certain types of geometric relationships.

For the case study of binary shape, a distance transform was used to assign values to the *base function*. As explained previously, this was done in order to condense region information around a certain vertex. Similar aggregating functions could be used, like histograms. Future research might be in the direction of determining alternative *base functions* that convey relevant morphological information about the shape.

Finally, the experiments lead in this work may be reproduced and improved in larger databases, like the image base from *Galaxy Zoo*.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank FAPESP, CNPq, CAPES and PRP-USP.

REFERENCES

- [1] A. Szalay and R. Brunner, "Exploring terabyte archives in astronomy," in *Wide-Field Spectroscopy*, ser. Astrophysics and Space Science Library, E. Kontizas, M. Kontizas, D. Morgan, and G. Vettolani, Eds. Springer Netherlands, 1997, vol. 212, pp. 95–101. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-5722-3_13
- [2] S. Loncaric, "A survey of shape analysis techniques," *Pattern Recognition*, vol. 31, no. 8, pp. 983–1001, 1998.
- [3] Y. Tao and W. I. Grosky, "Delaunay triangulation for image object indexing: A novel method for shape representation," in *In Proceedings of the Seventh SPIE Symposium on Storage and Retrieval for Image and Video Databases*, 1999, pp. 23–29.
- [4] A. M. Tekalp, P. V. Beek, C. Toklu, and B. Gunsels, "Two-dimensional mesh-based visual-object representation for interactive synthetic/natural digital video," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 6, pp. 1029–1051, June 1998.
- [5] L. J. Latecki, R. Lakämper, and U. Eckhardt, "Shape descriptors for non-rigid shapes with a single closed contour," in *CVPR*. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2000, pp. 1424–1429.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Fig. 4. Comparison between samples from the same class. Figures (a) and (b) show overplot of graphs and distance transforms for respective images from the class camel. Notice in (c) and (d) the similarity between the profiles taken from the distance transform as a function-base defined over the vertices. Also, in (e) and (f) it is shown the similarities between their SGWT.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Fig. 5. Comparison between samples from visually distinct classes. Figures (a) and (b) show overplot of graphs and average filtered galaxies images for different classes. Notice in (c) and (d) the difference between the profiles taken from the average gray level as a function-base defined over the vertices. Also, in (e) and (f) it is shown differences between their SGWT in four scales.

- [6] L. da F. Costa and R. M. Cesar Jr., *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*. CRC Press, 2001.
- [7] D. H. Kim, I. D. Yun, and S. K. Lee, "Graph-based representation for

- 2-d shape using decomposition scheme," in *International Conference on Image Processing*, vol. 5, April 2004, pp. 3081–3084.
- [8] A. Backes and O. R. Bruno, "A graph-based approach for shape skeleton

Fig. 6. Reduced feature space: plots for the supervised case study of binary images from four labeled classes. It is evident the discrimination power of the combination of the distance transform and the SGWT to set apart the 4 classes.

- analysis," in *Proceedings of the 15th International Conference on Image Analysis and Processing*, ser. ICIAP '09. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, pp. 731–738.
- [9] T. Sebastian, P. N. Klein, and B. Kimia, "Recognition of shapes by editing their shock graphs," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 5, pp. 550–571, 2004.
- [10] B. P. Paradhi, A. Mahajan, and S. Hingway, "2d shape matching," in *Proceedings of the 2009 Second International Conference on Emerging Trends in Engineering & Technology*, ser. ICETET '09. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2009, pp. 242–247.
- [11] T. Jin, Z. Chunyan, and L. Bin, "Shape representation and distance measure based on relational graph," in *Proceedings of the Sixth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*, ser. HIS '06. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2006, pp. 20–20.
- [12] J. V. B. Soares, J. J. G. Leandro, R. M. Cesar-Jr., H. F. Jelinek, and M. J. Cree, "Retinal vessel segmentation using the 2-D Gabor wavelet and supervised classification," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 25, pp. 1214–1222, 2006.
- [13] H. Jelinek, R. M. Cesar-Jr., J. J. G. Leandro, and I. Spence, "Automated computational morphometric analysis of the cat retinal α/y , β/x and δ ganglion cells using clustering algorithms," *Journal of Integrative Neuroscience*, vol. 3, no. 4, pp. 415–432, 2004.
- [14] D. K. Hammond, P. Vandergheynst, and R. Gribonval, "Wavelets on Graphs via Spectral Graph Theory," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 30, pp. 129–150, 2011.
- [15] R. S. Feris and R. M. Cesar-Jr., "Efficient real-time face tracking in wavelet space," in *Proc. XXII Congresso da SBC - SBC2002*, 2002.
- [16] H. Jelinek, R. M. Cesar-Jr., and J. J. G. Leandro, "Exploring the structure-function relationship of cat retinal ganglion cells using wavelets," *Brain and Mind*, vol. 4, no. 1, pp. 67–90, 2003.
- [17] C. M. Takemura and R. M. Cesar-Jr., "Shape analysis and classification using landmarks: Polygonal wavelet transform," in *Proc. 15th European Conference on Artificial Intelligence ECAI2002*, F. van Harmelen, Ed. Vrije Universiteit, Amsterdam IOS Press, 2002, pp. 726–730.
- [18] A. M. Smalter, J. Huan, and G. Lushington, "Graph wavelet alignment kernels for drug virtual screening," *J. Bioinformatics and Computational Biology*, vol. 7, no. 3, pp. 473–497, 2009.
- [19] M. Gavish, B. Nadler, and R. R. Coifman, "Multiscale wavelets on trees, graphs and high dimensional data: Theory and applications to semi supervised learning," in *ICML*, 2010, pp. 367–374.
- [20] N. Leonardi and D. V. D. Ville, "Wavelet frames on graphs defined by fmri functional connectivity," in *ISBI*. IEEE, 2011, pp. 2136–2139.
- [21] A. L. Barabási, *Linked: how everything is connected to everything else and what it means for business, science, and everyday life*, ser. A Plume book. Plume, 2003.
- [22] A. B. Barabási and Z. N. Oltvai, "Network biology: understanding the cell's functional organization," *Nature Reviews Genetics*, vol. 5, pp. 101–113, February 2004.
- [23] A. Réka and A. L. Barabási, "Statistical mechanics of complex networks," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, pp. 47–97, June 2002. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106096>
- [24] Y. He, Z. Chen, and A. Evans, "Structural insights into aberrant topological patterns of large-scale cortical networks in alzheimer's disease," *Journal of Neuroscience*, vol. 28, no. 18, pp. 4756–4766, April 2008.
- [25] P. Besson, C. Delmaire, V. L. Thuc, S. Lehericy, F. Pasquier, and X. Leclerc, "Graph wavelet applied to human brain connectivity," in *Proceedings of the 2009 IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro, Boston, MA, USA, June 28 - July 1, 2009*. Boston, MA: IEEE, July 2009, pp. 1326–1329.
- [26] M. Crovella and E. Kolaczyk, "Graph wavelets for spatial traffic analysis," in *INFOCOM 2003. Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications. IEEE Societies*, vol. 3, April 2003, pp. 1848–1857.
- [27] W. Sweldens, "The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions," in *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, A. F. Laine and M. Unser, Eds. Proc. SPIE 2569, 1995, pp. 68–79.
- [28] D. I. Shuman, M. J. Faraji, and P. Vandergheynst, "Semi-Supervised Learning with Spectral Graph Wavelets," in *Proceedings of the International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, 2011.
- [29] H. Edelsbrunner, *Algorithms in combinatorial geometry*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1987.
- [30] B. Jou, J. G. Ellis, and J. Feng, "Macro-scale Visual Recognition: Morphology Classification in Galaxy Imagery," May 2013, Student Final Project Presentation - Columbia University - New York, NY.
- [31] K. W. Willett, C. J. Lintott, S. P. Bamford, K. L. Masters, B. D. Simmons, K. Schawinski, L. Fortson, R. A. Skibba, K. R. V. Casteels, E. M. Edmondson, A. M. Smith, M. J. Raddick, S. Kaviraj, T. Melvin, R. J. Simpson, R. C. Nichol, and W. C. Keel, "Galaxy Zoo 2: detailed morphological classifications for 304,122 galaxies from the Sloan Digital Sky Survey," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, in press.

Fig. 7. Reduced feature space: plots for the unsupervised case study of gray scale images. The figures (a) and (c) show prototypes for visually distinct categories of galaxies, that is, elliptical and spiral respectively, while figures (b) and (d) display clusters comprised of the 30 nearest neighbours to the respective prototypes to their left.

Fig. 8. Reduced feature space: plots for the unsupervised case study of galaxy images. It may be noticed cluster of similar shaped galaxies.

Referências Bibliográficas

- Aichholzer e Aurenhammer (1998)** Oswin Aichholzer e Franz Aurenhammer. Straight skeletons for general polygonal figures in the plane. Em A. M. Samoilenko, editor, *Voronoi's Impact on Modern Science II*, páginas 7–21. National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine. Citado na pág. [37](#)
- Aichholzer et al. (1995)** Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, David Alberts e Bernd Gärtner. A novel type of skeleton for polygons. *Journal of Universal Computer Science*, 1(12):752–761. Citado na pág. [28](#), [37](#)
- Alpaydin (2004)** E. Alpaydin. *Introduction to Machine Learning*. Adaptive computation and machine learning. MIT Press, London, England. ISBN 0-262-01211-1. Citado na pág. [9](#), [76](#)
- Antoine (2004)** J. P. Antoine. Wavelet analysis and some of its applications in physics. Em J. Govaerts, M.N. Hounkonnou e A.Z. Msezane, editors, *Proceedings of the Third International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics*, páginas 384–413, Singapore. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ISBN 9812560300. Citado na pág. [13](#), [14](#), [15](#), [95](#)
- Antoine (1994a)** J-P. Antoine. Wavelet analysis: A new tool in signal processing. *Physicalia Magazine*, 16:17–42. Citado na pág. [14](#), [15](#), [17](#)
- Antoine (1994b)** J-P. Antoine. Two-dimensional wavelet analysis in image processing. *Physicalia Magazine*, 16:105–134. Citado na pág. [16](#)
- Antoine et al. (1993)** J-P. Antoine, P. Carette, R. Murenzi e B. Piette. Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform. *Signal Processing*, 31:241–272. Citado na pág. [13](#), [16](#), [95](#)
- Aristotle (1922)** Aristotle. *On the Heavens*, volume III. Oxford Clarendon Press. translation by John Leofric Stocks. Citado na pág. [29](#)
- Arneodo et al. (1988)** A. Arneodo, G. Grasseau e M. Holschneider. Wavelet transform of multifractals. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2281–2284. Citado na pág. [13](#)
- Arneodo et al. (2000)** A. Arneodo, N. Decoster e S. G. Roux. A wavelet-based method for multifractal image analysis. i. methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *The European Physical Journal B*, 15:567–600. Citado na pág. [16](#), [17](#)
- Backes e Bruno (2009)** A. Backes e O. R. Bruno. A graph-based approach for shape skeleton analysis. Em *Proceedings of the 15th International Conference on Image Analysis and Processing*, ICIAP '09, páginas 731–738, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. ISBN 978-3-642-04145-7. Citado na pág. [8](#)
- Barabási e Oltvai (2004)** A. B. Barabási e Z. N. Oltvai. Network biology: understanding the cell's functional organization. *Nature Reviews Genetics*, 5:101–113. Citado na pág. [11](#), [18](#)

- Barabási (2003)** A. L. Barabási. *Linked: how everything is connected to everything else and what it means for business, science, and everyday life*. A Plume book. Plume. ISBN 9780452284395. Citado na pág. 10, 11, 17, 18
- Barata (2011)** J. C. A. Barata. Curso de Física Matemática. Livro *on-line*, Dezembro 2011. URL http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html. Instituto de Física - USP - SP, Brasil. Citado na pág. 20
- Bay et al. (2006)** Herbert Bay, Tinne Tuytelaars e Luc Van Gool. SURF: Speeded Up Robust Features. Em *Computer Vision - ECCV 2006 - Lectures Notes in Computer Science*, volume 3951, páginas 404–417, Austria. Springer. Citado na pág. 28
- Berg (2004)** J. C. Van Den Berg, editor. *Wavelets in physics*. Cambridge University Press, New York, USA. ISBN 9780521533539. Citado na pág. 15
- Besson et al. (2009)** P. Besson, C. Delmaire, V. Le Thuc, S. Lehericy, F. Pasquier e X. Leclerc. Graph wavelet applied to human brain connectivity. Em *Proceedings of the 2009 IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro, Boston, MA, USA, June 28 - July 1, 2009*, páginas 1326–1329, Boston, MA. IEEE. Citado na pág. 18
- Biasotti et al. (2008)** S. Biasotti, L. De Floriani, B. Falcidieno, P. Frosini, D. Giorgi, C. Landi, L. Papaleo e M. Spagnuolo. Describing shapes by geometrical-topological properties of real functions. *ACM Comput. Surv.*, 40:12:1–12:87. ISSN 0360-0300. doi: <http://doi.acm.org/10.1145/1391729.1391731>. Citado na pág. 8, 9, 27
- Biggs (1974)** N. Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, Great Britain. ISBN 0-521-20335-X. Citado na pág. 12
- Bishop (2006)** Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer Science Business Media LLC, New York - USA. Citado na pág. 33
- Bondy e Murty (2008)** J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph theory*. Graduate texts in mathematics. Springer. ISBN 9781846289699. Citado na pág. 10, 11, 17
- Bow (2002)** S. T. Bow. *Pattern Recognition and Image Processing*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 2nd ed. ISBN 0824706595. Citado na pág. 9
- Bridson (2007)** R. Bridson. Fast poisson disk sampling in arbitrary dimensions. Em *SIG-GRAPH'07 ACM*, New York, NY, USA. University of British Columbia. Citado na pág. 26, 58, 99
- Brouwer e Haemers (2011)** A. E. Brouwer e W. H. Haemers. *Spectra of Graphs*. Universitext Series. Springer. ISBN 978-1-4614-1938-9. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6. Citado na pág. 12
- Bultheel (2006)** A. Bultheel. Wavelets with applications in signal and image processing, October 2006. URL <http://people.cs.kuleuven.be/~adhemar.bultheel/>. Citado na pág. 17
- Carlsson (1996)** Stefan Carlsson. Combinatorial geometry for shape representation and indexing. Em Jean Ponce, Andrew Zisserman e Martial Hebert, editors, *Object Representation in Computer Vision II*, volume 1144 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 53–78. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-61750-1. doi: 10.1007/3-540-61750-7_23. URL http://dx.doi.org/10.1007/3-540-61750-7_23. Citado na pág. 27, 28
- Cartwright (2000)** J. Cartwright. *Evolution and human behavior: Darwinian perspectives on human nature*. Bradford Books. MIT Press. ISBN 9780262531702. Citado na pág. 2
- Castleman (1979)** K. R. Castleman. *Digital Image Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. Citado na pág. 15

- Castleman (1996)** K.R. Castleman. *Digital Image Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. Citado na pág. [13](#), [14](#), [15](#)
- Chen et al. (1993)** S.S. Chen, J.M. Keller e R.M. Crownover. On the calculation of fractal features from images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(10): 1087–1090. Citado na pág. [101](#)
- Chui (1992)** Charles K. Chui. *An introduction to wavelets*. Wavelet analysis and its applications. Academic Press. ISBN 9780121745844. Citado na pág. [14](#), [15](#)
- Chung (1997)** F. R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*. Number 92 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society. Citado na pág. [12](#)
- Coelho e da F. Costa (1995)** R. C. Coelho e L. da F. Costa. The box-counting fractal dimensional: Does it provide an accurate subsidy for experimental shape characterization? if so, how to use it? Em *Proc. Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI-95)*, São Carlos, SP, Out 1995, páginas 183–191. Citado na pág. [101](#)
- Collatz e Sinogowitz (1957)** L. Collatz e U. Sinogowitz. Spektren endlicher grafen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 21:63–77. Citado na pág. [12](#)
- Cook (1986)** Robert L. Cook. Stochastic sampling in computer graphics. *ACM Transactions on Graphics*, 5(1):51–72. Citado na pág. [25](#), [26](#)
- Crovella e Kolaczyk (2003)** M. Crovella e E. Kolaczyk. Graph wavelets for spatial traffic analysis. Em *INFOCOM 2003. Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications. IEEE Societies*, volume 3, páginas 1848–1857. Citado na pág. [18](#)
- Cui et al. (2013)** Yin Cui, Yogzhou Xiang e Kun Rong. A robust novel low-level feature for large-scale galaxy image retrieval. Student Final Project Presentation - Columbia University - New York, NY, May 2013. Citado na pág. [80](#), [89](#)
- Cultural (2010)** Ciranda Cultural. Maleta Polly. Em *Atividades 2*. Ciranda Cultural Editora e Distribuidora Ltda, São Paulo, Brasil. Citado na pág. [xv](#), [5](#), [6](#)
- Cvetković (2009)** D. Cvetković. Applications of graph spectra: An introduction to the literature. Em D. Cvetković e I. Gutman, editors, *Applications of Graph Spectra*, volume 13, chapter 1, páginas 7–31. Matematički institut SANU, Beograd. ISBN 978-86-80593-40-1. Citado na pág. [12](#)
- Cvetković e Simić (2011)** D. Cvetković e S. Simić. Graph spectra in computer science. *Linear Algebra and its Applications*, 434(6):1545–1562. Citado na pág. [12](#)
- Cvetković e Simić (2012)** D. Cvetković e S. K. Simić. Spectral graph theory in computer science. *The IPSI BgD Transactions on Advanced Research*, 8(2):35–42. ISSN 1820-4511. Citado na pág. [12](#)
- Cvetković et al. (2010)** D. Cvetković, T. Aleksic, S. Simic, D. Stevanovic e L. Trajkovic. Applications of graph spectra to computer science, 2010. Citado na pág. [12](#)
- Cvetković (1971)** D. M. Cvetković. *Graphs and their spectra*. Tese de Doutorado, Univ. Beograd. Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 354-No. 356 1-50. Citado na pág. [12](#)
- Cvetković et al. (1980)** D. M. Cvetković, M. Doob e H. Sachs. *Spectra of graphs: theory and application*. Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, USA. ISBN 9780121951504. Citado na pág. [12](#)
- da F. Costa e Cesar Jr. (2009)** L. da F. Costa e R. M. Cesar Jr. *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*. Image Processing Series. CRC PRESS, Taylor & Francis Group LLC, New York, USA, 2nd ed. ISBN 978-0-8493-7929-1. Citado na pág. [2](#), [5](#), [6](#), [8](#), [9](#), [13](#), [21](#), [33](#), [46](#), [62](#), [101](#)

- da F. Costa et al. (2007)** L. da F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso e P. R. V. Boas. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in Physics*, 56:167–242. Citado na pág. 12
- da F. Costa et al. (2008)** L. da F. Costa, O. Oliveira Jr, G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. V. Boas, L. Antiqueira, M. P. Viana e L. C. Correa. Analyzing and modeling real-world phenomena with complex networks: a survey of applications. *Advances in Physics*, 60:329–412. doi: 10.1080/00018732.2011.572452. Citado na pág. 11
- da S. Torres e Falcão (2007)** R. da S. Torres e A. X. Falcão. Contour salience descriptors for effective image retrieval and analysis. *Image and Vision Computing*, 25:3–13. Citado na pág. 9
- de Abreu (2005)** N. M. M. de Abreu. Teoria espectral dos grafos: um híbrido entre a Álgebra linear e a matemática discreta e a combinatória com origens na química quântica. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 6:1–10. Citado na pág. 12
- de la Calleja et al. (2003)** Jorge de la Calleja, Olac Fuentes e Aurelio López-López. Content-based retrieval of astronomical images. Em M. H. Hanza, editor, *IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications*, Benalmádena, Spain. ACTA Press. Citado na pág. 88, 89
- de Vaucoulers et al. (1995)** G. de Vaucoulers, A. de Vaucoulers, H. G. Corwin, R. J. Buta, P. Fouque e G. Paturel. Third Reference Catalogue of Bright Galaxies - (RC3). *VizieR Online Data Catalog*, 7155. Citado na pág. 81
- Devillers et al. (1997)** O. Devillers, G. Liotta, F. P. Preparata e R. Tamassia. Checking the convexity of polytopes and the planarity of subdivisions (extended abstract). Em *Algorithms and Data Structures*, volume 1272 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 186–199. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-63307-5. doi: 10.1007/3-540-63307-3_59. URL http://dx.doi.org/10.1007/3-540-63307-3_59. Citado na pág. 27, 28, 29
- Diestel (2010)** R. Diestel. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, fourth ed. Citado na pág. 10
- Dodgson (1992)** Neil Anthony Dodgson. Image resampling. Relatório Técnico UCAM-CL-TR-261, University of Cambridge - Computer Laboratory. Citado na pág. 27
- Dougherty e Lotufo (2003)** E. R. Dougherty e R. A. Lotufo. *Hands-On Morphological Image Processing*. SPIE-International Society for Optical Engine. Citado na pág. 58
- Douglas e Peucker (1973)** David H. Douglas e Thomas K. Peucker. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 10(2):112–122. Citado na pág. 37
- Duda et al. (2000)** R. O. Duda, P. E. Hart e D. Stork. *Pattern Classification*. Wiley-Interscience, NY. Citado na pág. 9, 42
- Dyer et al. (2007)** Ramsey Dyer, Hao Zhang e Torsten Möller. Voronoi-delaunay duality and delaunay meshes. Em Bruno Lévy e Dinesh Manocha, editors, *Symposium on Solid and Physical Modeling*, páginas 415–420. ACM. ISBN 978-1-59593-666-0. Citado na pág. 29
- Edelsbrunner (1987)** Herbert Edelsbrunner. *Algorithms in combinatorial geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA. ISBN 0-387-13722-X. Citado na pág. 75
- Elmegreen (1998)** Debra Meloy Elmegreen. *Galaxies and Galactic Structure*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA. ISBN 0-13-779232-8. Citado na pág. 80, 81

- Erdős e Rényi (1959)** P. Erdős e A. Rényi. On Random Graphs I. *Math. Debrecen*, 6:290–297. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1960)** P. Erdős e A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5:17–61. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1961a)** P. Erdős e A. Rényi. On the evolution of random graphs. 38:343–347. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1961b)** P. Erdős e A. Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica*, 12:261–267. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1963)** P. Erdős e A. Rényi. *Acta Mathematica Hungarica*, 14:295–315. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1964)** P. Erdős e A. Rényi. On random matrices. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 8:455–461. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1966)** P. Erdős e A. Rényi. On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, 17:359–368. Citado na pág. 12
- Erdős e Rényi (1968)** P. Erdős e A. Rényi. On random matrices ii. *Studia Sci. Math. Hung*, 13: 459–464. Citado na pág. 12
- Falconer (1990)** K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, England. Citado na pág. 101
- Family et al. (1989)** F. Family, B. Masters e D. Platt. Fractal pattern formation in human retinal vessels. *Physica D*, 38:98–103. Citado na pág. 101
- Feofiloff et al. (2011)** P. Feofiloff, Y. Kohayakawa e Y. Wakabayashi. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. e-Book, July 2011. URL <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. Instituto de Matemática e Estatística - USP - SP, Brasil. Citado na pág. 10, 17
- Filzmoser et al. (2008)** Peter Filzmoser, Ricardo Maronna e Mark Werner. Outlier identification in high dimensions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(3):1694–1711. Citado na pág. 90, 101
- Fiume (1989)** Eugene L. Fiume. *The Mathematical Structure of Raster Graphics*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA - USA, 1st ed. ISBN 0-12-257960-7. Citado na pág. 27
- Fukunaga (1990)** K. Fukunaga. *Introduction to statistical pattern recognition (2nd ed.)*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA. ISBN 0-12-269851-7. Citado na pág. 9
- Furnham et al. (1997)** Adrian Furnham, Tina Tan e Chris McManus. Waist-to-hip ratio and preferences for body shape: a replication and extension. *Personality and Individual Differences*, 22:539–549. Citado na pág. 2
- Garrigan e Kellman (2011)** Patrick Garrigan e Philip J. Kellman. The role of constant curvature in 2d contour shape representations. *Perception*, 4:1290–1308. doi: 10.1068/p6970. Citado na pág. 2
- Gibson (1972)** J. J. Gibson. *A theory of direct visual perception*, páginas 215–240. Gordon and Breach. Citado na pág. 3
- Goswami e Chan (2011)** J. C. Goswami e A. K. Chan. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. John Wiley & Sons. ISBN 9780470484135. Citado na pág. 14

- Grady e Polimeni (2010)** Leo J. Grady e Jonathan R. Polimeni. *Discrete Calculus - Applied Analysis on Graphs for Computational Science*. Springer, London. ISBN 978-1-84996-289-6. Citado na pág. [xv](#), [11](#), [29](#), [30](#), [97](#)
- Grossmann (1988)** A. Grossmann. Wavelet transforms and edge detection. Em S. Albeverio, Ph. Blanchard, M. Hazewinkel e L. Streit, editors, *Stochastic Processes in Physics and Engineering*. Reidel Publishing Company, Dordrecht. Citado na pág. [13](#)
- Grossmann e Morlet (1984)** A. Grossmann e J. Morlet. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. *J. Math. Anal.*, 15:723–736. Citado na pág. [13](#)
- Hall et al. (2013)** Mary W. Hall, Robert M. Kirby, Feifei Li, Miriah D. Meyer, Valerio Pascucci, Jeff M. Phillips, Rob Ricci, Jacobus E. van der Merwe e Suresh Venkatasubramanian. Rethinking abstractions for big data: Why, where, how and what. *Computing Research Repository*, abs/1306.3295. Citado na pág. [80](#)
- Hammond et al. (2011)** D. K. Hammond, P. Vandergheynst e R. Gribonval. Wavelets on Graphs via Spectral Graph Theory. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 30:129–150. Citado na pág. [3](#), [17](#), [18](#), [19](#), [21](#), [31](#), [32](#), [75](#), [98](#)
- Hastie et al. (2008)** T. Hastie, R. Tibshirani e J. H. Friedman. *The Elements of Statistical Learning*. Springer, 2nd ed. ISBN 0387952845. Citado na pág. [9](#)
- He et al. (2008)** Y. He, Z. Chen e A. Evans. Structural insights into aberrant topological patterns of large-scale cortical networks in alzheimer’s disease. *Journal of Neuroscience*, 28(18):4756–4766. Citado na pág. [18](#)
- Heckbert (1989)** Paul S. Heckbert. Fundamentals of texture mapping and image warping, June 1989. Citado na pág. [27](#)
- Hückel (1931)** E. Hückel. Quantentheoretische beitrage zum benzolproblem. *Z. Phys.*, (70): 204–286. Citado na pág. [12](#)
- Jelinek e Fernandez (2001)** H. Jelinek e E. Fernandez. Use of fractal theory in neuroscience: Methods, advantages and potential problems. *Methods*, 24(4):309–321. Citado na pág. [101](#)
- Jelinek et al. (2003)** H. Jelinek, R. M. Cesar-Jr. e J. J. G. Leandro. Exploring wavelet transforms for morphological differentiation between functionally different cat retinal ganglion cells. *Brain and Mind*, 4(1):67–90. Citado na pág. [13](#)
- Jelinek et al. (2004)** H. Jelinek, R. M. Cesar-Jr., J. J. G. Leandro e I. Spence. Automated morphometric analysis of the cat retinal α/y , β/x and δ ganglion cells using wavelet statistical moment and clustering algorithms. *Journal of Integrative Neuroscience*, 3(4):415–432. Citado na pág. [13](#), [17](#)
- Jin et al. (2006)** T. Jin, Z. Chunyan e L. Bin. Shape representation and distance measure based on relational graph. Em *Proceedings of the Sixth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*, HIS ’06, páginas 20–20, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 0-7695-2662-4. Citado na pág. [xvii](#), [8](#), [99](#), [100](#)
- Johnson (1977)** Donald Johnson. Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks. *Journal of the ACM*, 24(1):1–13. Citado na pág. [37](#)
- Johnson e Wichern (2007)** Richard A. Johnson e Dean W. Wichern. *Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall, 6th ed. Citado na pág. [9](#)
- Jolliffe (2002)** I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag New York, Inc, New York, USA, 2nd ed. ISBN 0-387-95442-2. Citado na pág. [33](#)

- Jones (2006)** Thouis R. Jones. Efficient generation of poisson-disk sampling patterns. *Journal of Graphics, GPU, and Game Tools*, 11(2). Citado na pág. 25, 26
- Jou et al. (2013)** Brendan Jou, Joseph G. Ellis e Jie Feng. Macro-scale Visual Recognition: Morphology Classification in Galaxy Imagery. Student Final Project Presentation - Columbia University - New York, NY, May 2013. Citado na pág. 87, 88, 89
- Kaiser (1994)** G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhauser, Boston. Citado na pág. 14, 15
- Kim et al. (2004)** D. H. Kim, I. D. Yun e S. K. Lee. Graph-based representation for 2-d shape using decomposition scheme. Em *International Conference on Image Processing*, volume 5, páginas 3081–3084. Citado na pág. 8
- Korn e Korn (2000)** G. A. Korn e T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover Publications, New York, 2nd ed. Citado na pág. 17
- Kreher e Stinson (1999)** Donald L. Kreher e Douglas R. Stinson. *Combinatorial Algorithms. Generation, Enumeration, and Search*. CRC Press LLC, USA. ISBN 0-8493-3988-X. Citado na pág. 27, 28
- Kulis e Grauman (2009)** Brian Kulis e Kristen Grauman. Kernelized locality-sensitive hashing for scalable image search. Em *12th IEEE International Conference on Computer Vision*, páginas 2130–2137, Kyoto, Japan. IEEE. Citado na pág. 89
- Lagae e Dutré (2008)** Ares Lagae e Philip Dutré. Comparison of methods for generating poisson disk distributions. *Computer Graphics Forum*, 27(1):114–129. Citado na pág. 26
- Land et al. (2008)** K. Land, A. Slosar, C. Lintott, D. Andreescu, S. Bamford, P. Murray, R. Nichol, M. J. Raddick, K. Schawinski, A. Szalay, D. Thomas e J. Vandenberg. Galaxy zoo: the large-scale spin statistics of spiral galaxies in the sloan digital sky survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 388:1686–1692. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13490.x. Citado na pág. 86, 88
- Lane e Nadel (2002)** R. D. Lane e L. Nadel. *Cognitive Neuroscience of Emotion (Series in Affective Science)*. Oxford University Press, USA. Citado na pág. 2
- Latecki et al. (2000)** L. J. Latecki, R. Lakämper e U. Eckhardt. Shape descriptors for non-rigid shapes with a single closed contour. Em *CVPR*, páginas 1424–1429, Los Alamitos, CA, USA. IEEE Computer Society. Citado na pág. 5, 8, 101
- Leandro (2008)** J. J. G. Leandro. Dois problemas em análise de formas de estruturas de ramificação. Dissertação de Mestrado, Institute of Mathematics and Statistics - University of São Paulo. URL <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45134/tde-02092008-113204/>. Citado na pág. 13, 17
- Leandro et al. (2001)** J. J. G. Leandro, R. M. Cesar-Jr e H. Jelinek. Blood vessels segmentation in retina: Preliminary assessment of the mathematical morphology and of the wavelet transform techniques. Em *Proc. Brazilian Conference on Computer Graphics, Image Processing and Vision, (SIBGRAPI-01, Florianopolis - SC, Out 2001)*, páginas 84–90. IEEE Computer Society Press. Citado na pág. 13, 17
- Leandro et al. (2003)** J. J. G. Leandro, J. V. B. Soares, R. M. Cesar-Jr. e H. Jelinek. Blood vessels segmentation in non-mydratic images using wavelets and statistical classifiers. Em *Proc. 16th Brazilian Symposium on Computer Graphics, Image Processing - Sibgrapi03*, páginas 262–269. IEEE Computer Society Press. Citado na pág. 13, 17

- Lee e Pizer (1985)** R. N. Lee e S. M. Pizer. Three-dimensional shape description using the symmetric axis transform i: Theory. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, PAMI-7(2):187–202. ISSN 0162-8828. doi: 10.1109/TPAMI.1985.4767643. Citado na pág. 9
- Leonardi e Ville (2011)** N. Leonardi e D. Van De Ville. Wavelet frames on graphs defined by fmri functional connectivity. Em *ISBI*, páginas 2136–2139. IEEE. ISBN 978-1-4244-4128-0. Citado na pág. 19, 21
- Levinshtein et al. (2009)** Alex Levinshtein, Adrian Stere, Kiriakos N. Kutulakos, David J. Fleet, Sven J. Dickinson e kaleem Siddiqi. Turbopixels: Fast superpixels using geometric flows. *pami*, 31(12). Citado na pág. 30, 97, 99
- Lewalle (1997)** J. Lewalle. Hamiltonian formulation for the diffusion equation. *Phys. Rev. E*, 55(2):1590–1599. doi: 10.1103/PhysRevE.55.1590. Citado na pág. 17, 95
- Loncaric (1998)** S. Loncaric. A survey of shape analysis techniques. *Pattern Recognition*, 31(8): 983–1001. Citado na pág. xvii, 5, 6, 9, 99, 100
- Lowe (1999)** David G. Lowe. Object recognition from local scale-invariant features. Em *The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision*, volume 2, páginas 1150–1157. Citado na pág. 28
- Luyuan et al. (2010)** Cai Luyuan, Zhao Meng, Liu Shang, Mao Xiaoyan e Bai Xiao. Shape decomposition for graph representation. Em Roger Lee, Jixin Ma, Liz Bacon, Wencai Du e Miltos Petridis, editors, *Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel Distributed Computing 2010*, volume 295 of *Studies in Computational Intelligence*, páginas 1–10. Springer Berlin Heidelberg. Citado na pág. 8
- Mallat (1998)** S. Mallat. *A Wavelet tour of Signal Processing*. Academic Press. Citado na pág. 13, 15
- Mallat (1989a)** S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693. Citado na pág. 16
- Mallat (1989b)** S. G. Mallat. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(12):2091–2110. Citado na pág. 16
- Maragos (1989)** P. Maragos. Pattern spectrum and multiscale shape representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):701–716. Citado na pág. 8
- Marlowe et al. (2005)** F. Marlowe, C. Apicella e D. Reed. Men’s preferences for women’s profile waist-to-hip ratio in two societies. *Evolution and Human Behavior*, 26(6):458–468. Citado na pág. 2
- Marr (1982)** D. Marr. *Vision*. W.H. Freeman and Company. Citado na pág. 16
- Mehetre et al. (1997)** B. M. Mehete, M. S. Kankanhalli e W. F. Lee. Shape measures for content based image retrieval: a comparison. *Inf. Process. Manage.*, 33:319–337. ISSN 0306-4573. doi: 10.1016/S0306-4573(96)00069-6. Citado na pág. 9
- Mi et al. (2009)** Xiaofeng Mi, Doug DeCarlo e Matthew Stone. Abstraction of 2D shapes in terms of parts. Em *NPAR 09 Proceedings of the 7th International Symposium on Non-Photorealistic Animation and Rendering*, páginas 15–24, New York, USA. ACM. ISBN 978-1-60558-604-5. Citado na pág. 8
- Miller (2001)** Geoffrey Miller. *The Mating Mind*. Anchor Books. ISBN 0-385-49517-X. Citado na pág. 2

- Mingqiang et al. (2008)** Yang Mingqiang, Kpalma Kidiyo e Ronsin Joseph. A survey of shape feature extraction techniques. Em Peng-Yeng Yin, editor, *Pattern Recognition Techniques, Technology and Applications*, páginas 43–90. inTech. Citado na pág. 9
- Mitchell (1997)** T. M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw-Hill, New York. Citado na pág. 9
- Mohamed e Atta (2010)** M. A. Mohamed e M. M. Atta. Automated classification of galaxies using transformed domain features. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 10(2). Citado na pág. 80, 81
- Mokhtarian (1995)** F. Mokhtarian. Silhouette-based isolated object recognition through curvature scale space. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(5):539–544. Citado na pág. 101
- Mori (2005)** Greg Mori. Guiding model search using segmentation. Em *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision, 2005. ICCV 2005.*, páginas 1417–1423. IEEE. Citado na pág. 30, 97, 99
- Mori et al. (2004)** Greg Mori, Xiaofeng Ren, Alexei A. Efros e Jitendra Malik. Recovering human body configurations: Combining segmentation and recognition. Em *Proc of the 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 2, páginas 326–333. IEEE. Citado na pág. 30, 97, 99
- Mount (2004)** D. M. Mount. Cmsc 427 - Computer Graphics. e-book - lecture notes, 2004. URL <http://www.cs.umd.edu/~mount/427/>. Department of Computer Science - University of Maryland - USA. Citado na pág. 45
- Narang et al. (2010)** S. K. Narang, G. Shen e A. Ortega. Unidirectional graph-based wavelet transforms for efficient data gathering in sensor networks. Em *ICASSP*, páginas 2902–2905. Citado na pág. 18
- Niels et al. (2008)** Ralph Niels, Don Willems e Louis Vuurpijl. The NicIcon database of hand-written icons for crisis management. Em *The 11th International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*, Montreal, Canada. Citado na pág. xvii, 101
- Pach (2004)** János Pach, editor. *Towards a Theory of Geometric Graphs*. Contemporary Mathematics. Amer Mathematical Society, USA. ISBN 0821834843. Citado na pág. 28
- Pach (2013)** János Pach. The beginnings of the geometric graph theory. Em L. Lovász, I. Ruzsa, V. T. Sós e D. Palvolgyi, editors, *Erdős Centennial*, volume 25 of *Bolyai Society Mathematical Studies*, Budapest, Hungary. Springer. Citado na pág. 29
- Paradhi et al. (2009a)** B. Paradhi, A. Mahajan e S. Hingway. Hierarchical tree structure based 2d shape matching. Em *Proceedings of the 2009 International Conference on New Trends in Information and Service Science*, páginas 511–514, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 978-0-7695-3687-3. doi: 10.1109/NISS.2009.219. Citado na pág. 8, 99
- Paradhi et al. (2009b)** B. P. Paradhi, A. Mahajan e S. Hingway. 2d shape matching. Em *Proceedings of the 2009 Second International Conference on Emerging Trends in Engineering & Technology, ICETET '09*, páginas 242–247, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. ISBN 978-0-7695-3884-6. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/ICETET.2009.1>. Citado na pág. 8, 99
- Parker et al. (1983)** J. Anthony Parker, Robert V. Kenyon e Donald E. Troxel. Comparison of interpolating methods for image resampling. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2(1). Citado na pág. 27
- Pavlidis (1978)** T. Pavlidis. A review of algorithms for shape analysis. *Computer Graphics and Image Processing*, 7:243–258. Citado na pág. 6

- Persson (2004)** P.-O. Persson. *Mesh Generation for Implicit Geometries*. Tese de Doutorado, Department of Mathematics, MIT. Citado na pág. 59, 60
- Persson e Strang (2004)** P.-O. Persson e G. Strang. A simple mesh generator in matlab. *SIAM Review*, 46(2):329–345. Citado na pág. 60
- Peyre (2007)** Gabriel Peyre. Toolbox Wavelets on Meshes. File Exchange - MATLAB Central - <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17577-toolbox-wavelets-on-meshes>, November 2007. A toolbox to compute wavelet transform on 3D meshes. Citado na pág. 19
- Pinker (1997)** S. Pinker. *How the Mind Works*. W. W. Norton & Company, New York. Citado na pág. 1, 2
- Pise e Kulkarni (2008)** N. N. Pise e P. Kulkarni. A survey of semi-supervised learning methods. Em *Computational Intelligence and Security, 2008. CIS '08. International Conference on*, volume 2, páginas 30–34. IEEE Computer Society. doi: 10.1109/CIS.2008.204. Citado na pág. 19
- Platek e Singh (2010)** S. M. Platek e D. Singh. Optimal waist-to-hip ratios in women activate neural reward centers in men. *PLoS ONE*, 5(2):e9042. doi: 10.1371/journal.pone.0009042. Citado na pág. 2
- Poularikas (2009)** A. D. Poularikas. *Transforms and Applications Handbook*. Electrical engineering handbook series. CRC Press, 3rd ed. ISBN 9781420066524. Citado na pág. 14
- Ramachandran e Soman (2004)** K. I. Ramachandran e K. P. Soman. *Insight Into Wavelets From Theory To Practice*. Prentice Hall of India. Citado na pág. 13, 14, 16
- Ramer (1972)** Urs Ramer. An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves. *Computer Graphics and Image Processing*, 1(3):244–256. Citado na pág. 37
- Rashidi e Seyfi (2007)** M. Rashidi e K. Seyfi. Classification of fruit shape in cantaloupe using the analysis of geometrical attributes. *World Journal of Agricultural Sciences*, 3. Citado na pág. 2
- Réka e Barabási (2002)** A. Réka e A. L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97. URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106096>. Citado na pág. 11, 12, 18
- Ren e Malik (2003)** Xiaofeng Ren e Jitendra Malik. Learning a classification model for segmentation. Em *Proc. 9th Int. Conf. Computer Vision*, volume 1, páginas 10–17. Citado na pág. 3, 30, 97, 99
- Rioul e Vetterli (1991)** O. Rioul e M. Vetterli. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, páginas 14–89. Citado na pág. 13, 16
- Robles-Kelly e Hancock (2005)** A. Robles-Kelly e E. R. Hancock. Graph edit distance from spectral seriation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 27(3): 365–378. Citado na pág. 9
- Rodriguez et al. (2011)** G. R. Rodriguez, C. Anderson S. Muños, S-C. Sim, A. Michel, M. Causse, B. B. M. Gardener, D. Francis e E. van der Knaap. Distribution of SUN, OVATE, LC, and FAS in the tomato germplasm and the relationship to fruit shape diversity. *Plant Physiology*, 156(1): 275–285. Citado na pág. 1, 2, 79
- Ruberto (2004)** C. Di Ruberto. Recognition of shapes by attributed skeletal graphs. *Pattern Recognition*, 37(1):21 – 31. ISSN 0031-3203. Citado na pág. 8
- Sadrnia (2007)** H. Sadrnia. Classification and analysis of fruit shapes in long type watermelon using image processing. *International Journal of Agriculture and Biology*. ISSN 1560-8530. Citado na pág. 2

- Santaella (1983)** L. Santaella. *O que é Semiótica*. Editora Brasiliense, São Paulo, Brasil, 1 ed. Citado na pág. 2
- Santaella e Noth (1997)** L. Santaella e W. Noth. *Imagem: cognição, semiótica, mídia*. Editora Iluminuras Ltda, São Paulo, Brasil, 1 ed. Citado na pág. 3
- Schroder e Sweldens (1995)** Peter Schroder e Wim Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on a sphere. Em *SIGGRAPH 95 Proceedings of the 22nd annual conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, páginas 161–172, New York, USA. ACM. ISBN 0-89791-701-4. Citado na pág. 19
- Schroder e Sweldens (2000)** Peter Schroder e Wim Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on a sphere. Em *Wavelets in the Geosciences*, volume 90 of *Lecture Notes in Earth Sciences*, páginas 158–188. Springer Berlin Heidelberg. Citado na pág. 19
- Schroeder (2001)** W. Schroeder. *The VTK Users Guide*. Kitware, Inc. ISBN 1930934076. Citado na pág. 29
- Schroeder et al. (2002)** W. Schroeder, K. Martin e B. Lorensen. *The Visualization Toolkit: An Object Oriented Approach to 3D Graphics*. Kitware, Inc., 3rd ed. ISBN 1930934076. Citado na pág. 29
- Sebastian et al. (2001)** T. Sebastian, P. Klein e B. Kimia. Recognition of shapes by editing shock graphs. Em *Proceedings of the Eighth International Conference On Computer Vision (ICCV-01)*, páginas 755–762, Los Alamitos, CA. IEEE Computer Society. Citado na pág. xvii, 8, 99, 100
- Sebastian et al. (2004)** T. Sebastian, P. N. Klein e B. Kimia. Recognition of shapes by editing their shock graphs. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(5): 550–571. Citado na pág. 8, 99
- Sedgewick (2002)** R. Sedgewick. *Part 5 Graph Algorithms*, volume 2 of *Algorithms Third Edition in C++*. Addison-Wesley, USA, 3rd ed. ISBN 0-201-36118-3. Citado na pág. 11
- Sheng (2000)** Y. Sheng. Wavelet Transform. Em Alexander D. Poularikas, editor, *The Transforms and Applications Handbook*, páginas 864–951. CRC and IEEE Press, Florida. Citado na pág. 15
- Shi e Malik (2000)** Jianbo Shi e Jitendra Malik. Normalized cuts and image segmentation. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(8). Citado na pág. 30, 97, 99
- Shimbel (1953)** Alfonso Shimbel. Structural parameters of communications networks. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 15. Citado na pág. 37
- Shuman et al. (2011)** D. I. Shuman, M. J. Faraji. e P. Vandergheynst. Semi-Supervised Learning with Spectral Graph Wavelets. Em *Proceedings of the International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*. Citado na pág. 19
- Shuman et al. (2013)** David I. Shuman, Sunil K. Narang, Pascal Frossard, Antonio Ortega e Pierre Vandergheynst. The emerging field of signal processing on graphs. *IEEE Signal Processing Magazine*, (2):83–98. Citado na pág. 24, 29, 30, 31, 32
- Singh (1993)** D. Singh. Adaptive significance of female physical attractiveness: role of waist-to-hip ratio. *Journal of Personality and Social Psychology*, 65:293–307. Citado na pág. 2
- Smalter et al. (2009)** A. M. Smalter, J. Huan e G. Lushington. Graph wavelet alignment kernels for drug virtual screening. *J. Bioinformatics and Computational Biology*, 7(3):473–497. Citado na pág. 18, 46
- Smith (1981)** Alvy Ray Smith. Digital filtering tutorial, part II. Technical Memo 27, Lucas film Ltd. Citado na pág. 27

- Smith (1999)** Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to DIGITAL SIGNAL PROCESSING*. California Technical Publishing, San Diego, CA - USA, 2nd ed. ISBN 0-9660176-6-8. Citado na pág. 25, 94
- Soares (2006)** J. V. B. Soares. Segmentação de vasos sanguíneos em imagens de retina usando wavelets e classificadores estatísticos. Dissertação de Mestrado, Institute of Mathematics and Statistics - University of São Paulo. Citado na pág. 13, 17
- Soares et al. (2005)** J. V. B. Soares, J. J. G. Leandro, R. M. Cesar-Jr., H. F. Jelinek e M. J. Cree. Using the 2-D morlet wavelet with supervised classification for retinal vessel segmentation. Em *IV Workshop de Teses e Dissertações em Computação Gráfica e Processamento de Imagens, CD-ROM - 18th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, Natal, RN. Citado na pág. 13, 17
- Soares et al. (2006)** J. V. B. Soares, J. J. G. Leandro, R. M. Cesar-Jr., H. F. Jelinek e M. J. Cree. Retinal vessel segmentation using the 2-D Gabor wavelet and supervised classification. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25:1214–1222. Citado na pág. 13, 17
- Solomonoff e Rapoport (1951)** R. J. Solomonoff e A. Rapoport. Connectivity of random nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 13(2):107–117. Citado na pág. 12
- Sonka et al. (2007)** Milan Sonka, Vaclav Hlavac e Roger Boyle. *Image Processing, Analysis and Machine Vision*. Thomson Engineering, third ed. ISBN 049508252X. Citado na pág. 8, 30
- Sparke e Gallagher (2007)** Linda S. Sparke e John G. Gallagher. *Galaxies in the Universe: An Introduction*. Cambridge University Press, New York, USA, 2nd ed. ISBN 978-0-511-29472-3. Citado na pág. 80
- Spicer e Platek (2010)** K. R. Spicer e S. M. Platek. Curvaceous female bodies activate neural reward centers in men. *Communicative & Integrative Biology*, 3:282–283. Citado na pág. 2
- Steen (2010)** M. V. Steen. *Graph Theory and Complex Networks*. Createspace. ISBN 9789081540612. URL <http://www.distributed-systems.net/gtcn/>. Citado na pág. 11, 17, 18
- Streeter (2003)** S. Streeter. Waist-hip ratio and attractiveness New evidence and a critique of a critical test. *Evolution and Human Behavior*, 24(2):88–98. Citado na pág. 2
- Sweldens (1995)** W. Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. Em A. F. Laine e M. Unser, editors, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, páginas 68–79. Proc. SPIE 2569. Citado na pág. 16, 19
- Sweldens (1997)** W. Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2):511–546. Citado na pág. 16
- Szalay e Brunner (1997)** A.S. Szalay e R.J. Brunner. Exploring terabyte archives in astronomy. Em E. Kontizas, M. Kontizas, D.H. Morgan e G.P. Vettolani, editors, *Wide-Field Spectroscopy*, volume 212 of *Astrophysics and Space Science Library*, páginas 95–101. Springer Netherlands. ISBN 978-94-010-6413-2. doi: 10.1007/978-94-011-5722-3_13. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-5722-3_13. Citado na pág. 81
- Tankus e Yeshurun (2009)** A. Tankus e Y. Yeshurun. Computer vision, camouflage breaking and countershading. *Philosophical Transactions of The Royal Society B*, 364:529–536. Citado na pág. 2
- Tao e Grosky (1999)** Y. Tao e W. I. Grosky. Delaunay triangulation for image object indexing: A novel method for shape representation. Em *In Proceedings of the Seventh SPIE Symposium on Storage and Retrieval for Image and Video Databases*, páginas 23–29. Citado na pág. 8

- Tari (2011)** Sibel Tari. Extracting parts of 2D shapes using local and global interactions simultaneously. *CoRR*, abs/1104.2175. Citado na pág. 8
- Tekalp et al. (1998)** A. M. Tekalp, P. Van Beek, C. Toklu e B. Gunsel. Two-dimensional mesh-based visual-object representation for interactive synthetic/natural digital video. *Proceedings of the IEEE*, 86(6):1029–1051. Citado na pág. 8
- Theodoridis e Koutrombas (2009)** Sergio Theodoridis e Konstantinos Koutrombas. *Pattern Recognition*. Academic Press, Elsevier Inc., USA, 4th ed. ISBN 978-1-59749-272-0. Citado na pág. 9, 10, 32, 33, 42, 46
- Torres et al. (2004)** R. S. Torres, A. X. Falcao e L. da F. Costa. A Graph-based Approach for Multiscale Shape Analysis. *Pattern Recognition*, 37(6):1163–1174. Citado na pág. 8
- Trigg (2005)** G. Trigg, editor. *Mathematical Tools for Physicists*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, New York/Weinheim. ISBN 3-527-40548-8. Citado na pág. 12, 13
- Tulleken (2008)** H. Tulleken. Poisson disk sampling. *DEV.MAG - South Africa's Premier Game Development Magazine*, 21:21–25. Citado na pág. 99
- van Beek et al. (1998)** P. van Beek, A. M. Tekalp, N. Zhuang, I. Celasun e M. Xia. Hierarchical 2D mesh representation, tracking and compression for object-based video. *IEEE Trans. on Circ. and Syst. for Video Tech.*, 9:353–369. Citado na pág. 8
- van der Heijden et al. (2004)** Ferdinand van der Heijden, Robert Duin, Dick de Ridder e David M. J. Tax. *Classification, Parameter Estimation and State Estimation: An Engineering Approach Using MATLAB*. Wiley, 1 ed. ISBN 0470090138. Citado na pág. 9, 76
- van Vliet e Verbeeck (1993)** L.J. van Vliet e P.W. Verbeeck. Curvature and bending energy in digitized 2d and 3d images. Em K.A. Hogda, B. Braathen e K. Heia, editors, *Proceedings, 8th Scandinavian Conference on Image Analysis, (Norway)*, volume 2, páginas 1403–1410. NONIM-Norwegian Soc. Image Process. & Pattern Recognition. Citado na pág. 101
- Vicsek (2007)** T. Vicsek. Phase transitions and overlapping modules in complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 378:20 – 32. ISSN 0378-4371. doi: 10.1016/j.physa.2006.11.075. Citado na pág. 11
- Webb (2002)** A. R. Webb. *Statistical Pattern Recognition*. John Wiley and Sons Ltd., England, 2nd ed. ISBN 0-470-84513-9. Citado na pág. 9
- Wertheimer (1938)** Max Wertheimer. Laws of organization in perceptual forms. Em Willis D. Ellis, editor, *A source book of Gestalt psychology*, páginas 71–88. Kegal Paul, Trubner & Co., Ltd., London. Citado na pág. 3, 97
- West (2001)** Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education Inc, 2nd ed. Citado na pág. 10
- Willett et al. (in press)** Kyle W. Willett, Chris J. Lintott, Steven P. Bamford, Karen L. Masters, Brooke D. Simmons, Kevin Schawinski, Lucy Fortson, Ramin A. Skibba, Kevin R. V. Casteels, Edward M. Edmondson, Arforn M. Smith, M. Jordan Raddick, Sugata Kaviraj, Thomas Melvin, Robert J. Simpson, Robert C. Nichol e William C. Keel. Galaxy Zoo 2: detailed morphological classifications for 304,122 galaxies from the Sloan Digital Sky Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Citado na pág. xvii, 86, 87, 88
- Wilson (1996)** Robin J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, fourth ed. Citado na pág. 10

- Yellott-Jr (1983)** J. I. Yellott-Jr. Spectral consequences of photoreceptor sampling in the rhesus retina. *Science*, 221(4608):382–385. Citado na pág. 26
- York et al. (2000)** D. G. York, J. Adelman, Jr Anderson, S. F. Anderson, J. Annis, N. A. Bahcall, J. A. Bakken, R. Barkhouser, S. Bastian, E. Berman, W. N. Boroski, S. Bracker, C. Briegel, J. W. Briggs, J. Brinkmann, R. Brunner, S. Burles, L. Carey, M. A. Carr, F. J. Castander, B. Chen, P. L. Colestock, A. J. Connolly, J. H. Crocker, I. Csabai, P. C. Czarapata, J. E. Davis, M. Doi, T. Dombeck, D. Eisenstein, N. Ellman, B. R. Elms, M. L. Evans, X. Fan, G. R. Federwitz, L. Fiscelli, S. Friedman, J. A. Frieman, M. Fukugita, B. Gillespie, J. E. Gunn, V. K. Gurbani, E. de Haas, M. Haldeman, F. H. Harris, J. Hayes, T. M. Heckman, G. S. Hennessy, R. B. Hindsley, S. Holm, D. J. Holmgren, C.-h. Huang, C. Hull, D. Husby, S.-I. Ichikawa, T. Ichikawa, Ivezić, S. Kent, R. S. J. Kim, E. Kinney, M. Klaene, A. N. Kleinman, S. Kleinman, G. R. Knapp, J. Korienek, R. G. Kron, P. Z. Kunszt, D. Q. Lamb, B. Lee, R. F. Leger, S. Limmongkol, C. Lindenmeyer, D. C. Long, C. Loomis, J. Loveday, R. Lucinio, R. H. Lupton, B. MacKinnon, E. J. Mannery, P. M. Mantsch, B. Margon, P. McGehee, T. A. McKay, A. Meiksin, A. Merelli, D. G. Monet, J. A. Munn, V. K. Narayanan, T. Nash, E. Neilsen, R. Neswold, H. J. Newberg, R. C. Nichol, T. Nicinski, M. Nonino, N. Okada, S. Okamura, J. P. Ostriker, R. Owen, A. G. Pauls, J. Peoples, R. L. Peterson, D. Petravick, J. R. Pier, A. Pope, R. Pordes, A. Prosapio, R. Rechenmacher, T. R. Quinn, G. T. Richards, M. W. Richmond, C. H. Rivetta, C. M. Rockosi, K. Ruthmansdorfer, D. Sandford, D. J. Schlegel, D. P. Schneider, M. Sekiguchi, G. Sergey, K. Shimasaku, W. A. Siegmund, S. Smee, J. A. Smith, S. Snedden, R. Stone, C. Stoughton, M. A. Strauss, C. Stubbs, M. SubbaRao, A. S. Szalay, I. Szapudi, G. P. Szokoly, A. R. Thakar, C. Tremonti, D. L. Tucker, A. Uomoto, D. Vanden Berk, M. S. Vogeley, P. Waddell, S.-i. Wang, M. Watanabe, D. H. Weinberg, B. Yanny e N. Yasuda. The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. *The Astrophysical Journal*, 120:1579–1587. doi: 10.1086/301513. URL <http://dx.doi.org/10.1086/301513>. Citado na pág. 80, 86
- Yu e Shi (2001)** S. Yu e J. Shi. Perceiving shapes through region and boundary interaction. Relatório Técnico CMU-RI-TR-01-21, Robotics Institute, Pittsburgh, PA. Citado na pág. 8
- Zeng et al. (2008)** JingTing Zeng, Rolf Lakaemper, XingWei Yang e Xin Li. 2D shape decomposition based on combined skeleton-boundary features. Em *Advances in Visual Computing*, volume 5359 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, páginas 682–691. Springer Berlin Heidelberg. Citado na pág. 8
- Zhang e Lu (2004)** Dengsheng Zhang e Guojun Lu. Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*, 37:1–19. Citado na pág. 6
- Zhu (2005)** X. Zhu. Semi-supervised learning literature survey. Relatório Técnico 1530, Computer Sciences, University of Wisconsin-Madison. URL http://pages.cs.wisc.edu/~jerryzhu/pub/ssl_survey.pdf. Citado na pág. 19

Índice Remissivo

- abstract, [v](#)
- Amostragem
 - Estocástica, [24](#)
 - Inadequada, [23](#)
 - Jittering, [24](#)
 - Teorema de Nyquist, [23](#)
- Análise
 - de Formas, [5](#)
 - Analizador de Formas, [1](#)
 - Característica, [9](#)
 - Caracterização, [8](#)
 - Classificação, [9](#)
 - na Agricultura, [2](#)
 - na Psicologia Evolutiva, [2](#)
 - nas Relações Ecológicas, [1](#)
 - no Comportamento Humano, [2](#)
 - no quotidiano, [2](#)
 - Multiescala, [3](#)
- Astrofísica, [77](#)
- Astronomia, [77](#)
 - Galáxias, [77](#)
- Bases de dados, [71](#)
 - Galaxy Zoo 2 - (GZ2), [82](#)
 - MPEG7 CE Shape-1 Part B, [71](#)
 - Sloan Digital Sky Survey (SDSS), [77](#)
- Cálculo Discreto, [27](#)
 - p -célula, [27](#)
 - Complexo Celular, [27](#)
 - Extração de Conteúdo, [27](#)
 - Polítopo Complexo, [27](#)
 - Simplexo, [27](#)
- Cálculo Funcional Contínuo, [20](#)
- Características
 - Extração de Características, [30](#)
 - Seleção de Características, [30](#)
- Contorno
 - Contorno Paramétrico, [35](#)
 - Aproximação Poligonal, [35](#)
- Contrassombreado, [2](#)
- Countershading, [2](#)
- Descritores, [9](#)
- Domínio
 - Discreto, [27](#)
- Forma
 - Definição, [5](#)
 - Invariante, [2](#)
 - Signos
 - Icônicos, [2](#)
- Função de escala, [13](#)
- Função-base, [22](#)
- Fundamentos Teóricos, [5](#)
- Grafo, [10](#)
 - Aresta, [10](#)
 - Caminho, [10](#)
 - Ciclo, [10](#)
 - Classes de Equivalência, [11](#)
 - Complexo Celular, [27](#)
 - Conectividade, [25](#)
 - Conexo, [10](#)
 - Diâmetro, [35](#)
 - Esqueleto Reto, [35](#)
 - Estrutura Combinatória, [25](#)
 - Geométrico, [26](#)
 - Isomorfismo, [11](#)
 - Lista de Incidência, [10](#)
 - Matriz
 - de Adjacência, [10](#)
 - de Incidência, [10](#)
 - Laplaciano, [19](#)
 - Processamento de Sinais em Grafos, [27](#)
 - Relações de incidência, [25](#)
 - Rotulado, [11](#)
 - Subdivisão Planar, [27](#)
 - Maximal, [27](#)
 - Tesselação, [27](#)
 - Voronoi, [28](#)

- Topologia, 3, 11
- Triangulação, 27
 - Delaunay, 28
- Vértice, 3, 10
 - Grau, 10
- Lei
 - de Thayer, 2
- Processamento de Sinais em Grafos, 27
- publicações, 99
- Reconhecimento de Padrões
 - Redução de Dimensionalidade, 30
- Redes Complexas, 11
 - Random Networks, 11
 - Redes Aleatórias, 11
 - Topologia, 11
- Representação
 - Borda, 2, 6
 - Contorno, 2
 - Região, 6
 - Transformação, 6
- resumo, iii
- Revisão Bibliográfica, 5
- Semiótica, 2
- Signos
 - Interpretante, 2
 - Referência, 2
- Silhueta, 5
- Singularidade, 13
- Teoria
 - da Iconicidade da Imagem, 2
 - Espectral, 20
 - Evolutiva da Atratividade Feminina, 2
- Transformada
 - Dual da Transformada da Distância, 55
 - da Distância, 55
 - Fourier, 12
 - em Grafos, 19
 - Wavelet, 12
 - em Grafos, 17
 - SGWT, 3
- Visão Computacional, 5
- Waist-To-Hip-Ratio, 2
- Wavelet, 12
 - Scaling Function*, 13
 - Convolução, 17
 - Gradiente da gaussiana, 16
 - Hermitiana, 16, 90
 - Laplaciano da Gaussiana, 90
- Primeira Geração, 15
- Segunda Geração, 16
- WHR, 2