Alguns processos relacionados a modelos de fluxo de tráfego

Márcio Watanabe Alves de Souza

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para obtenção do título de

Mestre em Ciências

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da

FAPESP e do CNPQ

São Paulo, fevereiro de 2009

Alguns processos relacionados a modelos de fluxo de tráfego

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Márcio Watanabe Alves de Souza
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Leandro P. R. Pimentel - Delft University
- Prof. Dr. Cristian Coletti - UFABC

A prova

Matemática rimaria perfeitamente com fantástica
se assim me ajudasse a sorvê-la,
mas a própria palavra fantástica
que por ser tão performática e já ter tantas derivadas,
se somada à matemática
me exauriria para resolvê-las.

Porém ao integrá-las me excitaria:
somaria suas áreas com partições cada vez mais ralas.
Começaria na reta de maneira clara até o ápice do deslumbre,
adicionando mais uma dimensão
atingiria o volume.
Usaria os óculos da física que
por ser mais empirista
me daria grande emoção quando da inércia me arrebataria,
como por definição e com total abstração
depois de sair da lama do chão
tenderia ao infinito
onde tudo é mais bonito.
Neste espaço perfeito, que não pertence só aos eleitos,
tem verdade, tem magia,
sangue, suor e alegria.

Topologicamente falando o universo cabe no Cartesiano.
Refutando todo engano provarei por absurdo
que este universo cabe no mundo e todos eles no plano.
Seja a Matemática algo sobre-humano
há uma função fantástica convergindo para zero:

toda rima e sua inversa também é obra prima.

Agradeço ao MEU AMOR
por desmistificar essa essência
redefinindo limites
e acreditar que em mim
também cabe esta consciência.

Fernanda Di Genio

Agradecimentos

Obrigado ao Pablo pela ótima orientação, que sem dúvida me ajudou a evoluir como matemático. Agradeço a minha mulher Fernanda e ao Leandro Pimentel pelas discussões esclarecedoras e a minha irmã Alessandra pelas belas figuras utilizadas ao longo do texto.

Para não deixar ninguém de fora, agradeço também a minha Mãe, ao meu Pai, aos meus outros irmãos e, em especial, ao meu sobrinho Vitão.

Resumo

No presente trabalho, estudamos alguns sistemas de partículas interagentes que podem ser vistos como modelos simples de fluxo de tráfego, a saber: O Processo de Hammersley-Aldous-Diaconis e o Processo de Exclusão. Exploramos suas representações como modelos de crescimento no plano. Ênfase é dada à casos em que há mais de um tipo de partícula, aos processos multiclasses e às suas relações com modelos de filas. Analogia entre os modelos é usada para provar os resultados. Por fim, damos uma nova prova para o cálculo da variância assintótica rescalonada do fluxo de partículas de segunda classe no processo de Hammersley multiclasse em equilíbrio.

Palavras-chave: Fluxo de tráfego, Processo de Hammersley-Aldous-Diaconis, Processo de exclusão totalmente assimétrico, Processos multiclasses, Filas em série, Mercado de ações.

Abstract

In the present work we study the following interacting particle systems which can be seen as simple models of traffic flow: The Hammersley-Aldous-Diaconis Process and the Exclusion Process. We explore the related growth models in the plane. Focus is given to cases where there are more than one kind of particles, to the multitype processes and to their relations with queue models. Analogy between the models is used to prove the results. At last, we give a new proof for the calculation of the asimptotic flux of second class particles in the Multiclass Hammersley process in equilibrium.

Keywords: Traffic flow, Hammersley-Aldous-Diaconis process, Totally asymmetric exclusion process, Multitype processes, Queues in tandem, Stock market.

Sumário

1 Introdução 1

2 O Processo de Hammersley 6

3 Processo de exclusão e Percolação de última passagem 18

4 Processos Multiclasses 33

Referências Bibliográficas 49

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Nas últimas décadas houve um enorme aumento no volume de tráfego de carros em todo o mundo. Nas grandes cidades a densidade de carros em certos horários chega a ser tão grande que a velocidade média dos carros é inferior a velocidade média dos pedestres.

Além da ineficiência e perda de tempo, o aumento do número de carros em circulação agrava outros problemas como a emissão de poluentes na atmosfera e o número de acidentes de trânsito. Estima-se que a quantidade de dinheiro gasto com o excesso de trânsito já supere duzentos bilhões de dólares por ano só na Alemanha.

Por estes motivos, a partir dos anos 90 uma grande quantidade de pesquisadores de diversas áreas têm se dedicado ao estudo de modelos de tráfego, com o objetivo de compreender melhor as dinâmicas do problema e buscar soluções para o mesmo.

Ademais, a criação de modelos matemáticos possibilitou a utilização de alguns deles em outros problemas das mais diversas áreas desde a economia às ciências médicas.

1.2 Modelos e resultados

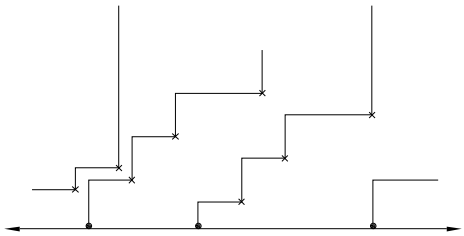
No estudo de modelos de fluxo de tráfego uma grande variedade de dinâmicas e espaços pode ser vista. Por exemplo, podemos imaginar que há apenas uma pista ou há múltiplas pistas. Determinar que o número de carros é fixo ao longo do tempo, ou seja, há uma conservação da energia total do sistema, ou que é permitida a entrada de carros em certos locais e a saída de carros em outros. Dependendo da característica específica que se quer estudar, a velocidade dos carros pode ser dita constante ou variável. No segundo caso, a distribuição poderia ser igual para todos os veículos ou ter taxas diferentes para cada um, mais ainda, poderíamos variar a taxa de acordo com condições espaciais e temporais. Podemos imaginar que há diferentes classes de veículos (motos e carros, por exemplo) e que os veículos interagem de maneira distinta de acordo com a classe do outro veículo, entre muitas outras possibilidades.

Neste trabalho estudamos alguns sistemas de partículas interagentes que servem de modelos simples para o fluxo de tráfego em uma única via. Damos a seguir definições informais dos processos, os quais serão devidamente definidos nos respectivos capítulos.

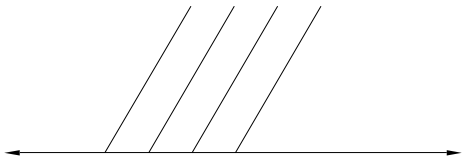
No capítulo 2 apresentamos o processo de Hammersley em espaço contínuo. Imagine uma rua com uma única pista em que não é possível fazer ultrapassagens (chamamos esta propriedade de exclusão). É natural pensarmos que nas cidades, um motorista acelere quando está distante do carro a sua frente e mantenha uma menor velocidade se está muito próximo do outro carro. Desta forma, pomos que cada carro avança com velocidade aleatória com taxa proporcional a distância entre ele e o carro a sua frente. A esta dinâmica damos o nome de processo de Hammersley ou processo HAD (abreviatura para Hammersley-Aldous-Diaconis). A partir de agora chamamos os carros de partículas e, por convenção, dizemos que as partículas saltam da direita para a esquerda. Em geral, estamos interessados no comportamento de longo prazo do sistema, por isso adotamos espaços infinitos. Para o caso contínuo a reta real $\mathbb{R}$ e para o caso discreto os inteiros $\mathbb{Z}$. Podemos considerar diversas condições iniciais, mas uma de especial interesse no

caso contínuo é o processo de Poisson, pois representa o processo em equilíbrio. As distribuições análogas no caso discreto são as medidas produtos, onde colocamos com probabilidade p uma partícula em cada sítio de $\mathbb{Z}$ de forma independente.

Uma questão relevante nesse tipo de sistema é o quão sensível a perturbações na condição inicial ele é. Se modificássemos o sistema em apenas um ponto (chamado discrepância), quais seriam as diferenças de comportamento destes sistemas ao longo do tempo? Para responder a essa pergunta, introduzimos a noção de acoplamento, ferramenta fundamental para o estudo desses processos.



TRAJETÓRIAS MICROSCÓPICAS



TRAJETÓRIAS MICROSCÓPICAS

Basicamente, acoplar dois ou mais processos significa construílos num mesmo espaço de probabilidade. No caso do acoplamento dos processos de Hammersley, temos que cada vez que uma partícula em um dos processos salta para um ponto x, a partícula mais próxima a direita de x no outro processo salta para o sítio x. Através desse acoplamento (chamado de acoplamento básico), podemos ver que uma discrepância viaja pelo sistema, saltando para o local onde se encontrava a partícula que acabou de saltar sobre a discrepância. Assim, podemos dizer que a discrepância se comporta como um tipo diferente de partícula, a qual denominamos partícula de segunda classe.

Outra condição inicial de interesse é quando a direita da origem a distribuição inicial é Poisson de taxa λ e a esquerda da origem a distribuição é Poisson de taxa ρ, com $\rho < \lambda$. Dizemos nesse caso que o sistema possui um choque na origem. O choque possui uma interessante interpretação no processo de exclusão que veremos mais adiante. Ferrari e Garcia provaram que se colocarmos uma partícula de segunda classe na origem do sistema com essas condições iniciais, então podemos dizer que a posição da partícula de segunda classe pode ser interpretada como um choque microscópico.

Mostraremos uma lei dos grandes números para a posição da partícula isolada de segunda classe no equilíbrio e em seguida, damos uma nova prova para o cálculo da sua esperança para todo tempo t.

No capítulo 3, definimos o clássico processo de exclusão e algumas possíveis variações. O caso totalmente assimétrico unidimensional (TASEP) é parecido com o HAD discreto, mas nesse caso as partículas só podem saltar para o sítio mais próximo e com velocidade com taxa constante.

No processo de exclusão existe uma simetria entre o comportamento de buracos e partículas. Toda vez que uma partícula salta para a esquerda, um buraco salta para a direita. Assim, os buracos formam um TASEP da esquerda para a direita. Devido a essa simetria é possível representar a dinâmica de saltos como um processo de crescimento no plano (ver Rost(1981) e Ferrari e Pimentel(2005)). Usamos essa representação para provar um teorema de Burke para as partículas de primeira classe e em seguida mostraremos uma relação entre o fluxo de partículas de primeira classe e a posição da partícula de segunda classe no equilíbrio.

Apesar do TASEP parecer uma simplificação do HAD discreto, sua dinâmica gera grande complexidade ao seu estudo no que diz respeito ao comportamento da partícula de segunda classe. No HAD discreto a partícula de segunda classe saltava somente em um sentido. Já no TASEP ela pode ir tanto para a direita como

para a esquerda, ora se comportando como uma partícula de primeira classe, ora se comportando como um buraco.

Outra conseqüência interessante da dinâmica do TASEP é que para condições de choque podemos interpretar que a posição da partícula de segunda classe corresponde a posição de um motorista que viajava em uma certa velocidade e de repente encontra um tráfego mais pesado a sua frente.

Outro regime de interesse é o chamado leque de rarefação. Ele é obtido quando a configuração inicial é semelhante do choque mas com $\rho > \lambda$. A diferença entre os dois regimes fica evidente quando comparamos o comportamento da partícula de segunda classe. No choque vale uma lei dos grandes números para a posição rescalada da partícula de segunda classe. Já no leque de rarefação, a posição assintótica é aleatória com distribuição uniforme em um intervalo que depende dos parâmetros (Ferrari e Pimentel, 2005).

No capítulo 4, generalizamos o conceito de partícula para um número qualquer de classes. Mostraremos que, para o caso em que o número de classes é um natural n, é possível construir medidas invariantes para os processos multiclasses como a lei das saídas de um sistema de filas em série com n classes de clientes. Como aplicação deste resultado para o TASEP, construímos um modelo para o mercado acionário.

Por fim, baseado em um resultado contido em Colletti, Ferrari e Pimentel(2008), calculamos a variância assintótica rescalonada do Fluxo de partículas de segunda classe no HAD multiclasse em equilíbrio.

Capítulo 2

O Processo de Hammersley

O **Processo de Hammersley** contínuo, ou processo **HAD**, é um sistema de partículas em $\mathbb{R}$ em que as cada partícula salta para uma posição uniformemente escolhida entre a sua posição e a posição da partícula mais próxima à sua esquerda. A taxa de salto é uma variável exponencial de parâmetro proporcional ao espaço que a partícula dispõe para saltar. Podemos difiní-lo de modo mais preciso através de sua construção gráfica. Seja η_0 a configuração inicial, aleatória ou não, do processo e seja P um processo de Poisson homogêneo em $\mathbb{R}^2$. Fazemos uma realização do processo, deslocando o eixo inicial pela coordenada do tempo e cada vez que uma marca de Poisson é intersectada a partícula mais próxima a direita salta para esta marca. Nesta construção, cada realização pode ser vista como um conjunto de trajetórias no espaço-tempo $\mathbb{R}^2$ que não se cruzam.
Historicamente o processo de Hammersley está ligado a determinação da distribuição do tamanho da maior subsequência crescente de uma permutação aleatória dos números de 1 a n. De fato, a versão original do processo de Hammersley é a tempo discreto e se restrige ao segmento $[0, 1]$. A versão descrita acima é devida a Aldous e Diaconis e por este motivo por vezes chamamos o processo de HAD (Hammersley-Aldous-Diaconis).

Defimos agora o HAD numa região finita do espaço e sujeita a condições de fronteira as quais denominamos entradas e saídas. Este versão será mais útil nas demonstrações. O processo de entradas é a configuração inicial de partículas e o processo de saídas são os momentos nos quais as partículas deixam a região observada. Fixamos o processo no retângulo finito $[0, x] \times [0, t]$ do primeiro qua-

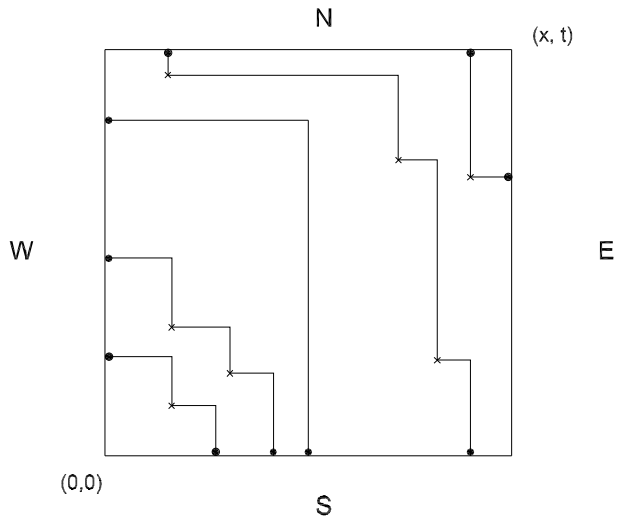
drante $\mathbb{R}^2_+$. Denotamos os processos das fronteiras pelas coordenadas direcionais (em inglês) N, S, E e W. Colocamos uma barra em cima para denotar o número de pontos do processo, por exemplo $\bar{S}$ é o número de pontos do processo S. De posse desses processos e das taxas salto P, construímos as trajetórias como uma função determinística $\mathcal{H}(S, W, P)$, onde S é o processo de entradas e W o processo de saídas. Descrevemos a evolução a seguir.

As partículas inicialmente estão distribuídas com a lei de S no intervalo (0,x). A medida que o tempo avança, deslocamos a configuração em direção ao tempo t. Cada vez que uma marca de P intersecta o intervalo em deslocamento, então a partícula mais próxima a direita da marca salta sobre a marca. Se não há nenhuma partícula a direita, então uma nova partícula entra no retrato por E e salta para a marca. Do mesmo modo, quando o intervalo intersecta um ponto s de W, ou a partícula mais próxima a direita sai do retrato por s ou um novo ponto surge em E e sai por s. Mais precisamente, ponha $\mathcal{H}(S, W, P) := (H_s, s \in [0, t])$ e defina $R(y, H) := \inf\{y' \in H \cup \{x\} : y' > y\}$ para $H \subset (0, x)$, então

$$H_s = \begin{cases} H_s \text{ se } s \in W \cup \{s', (y, s) \in P \text{ para algum } y' \in [0, x]\} \\ \{H_{s^-} - \{R(y, H_{s^-})\}\} \cup \{y\} \text{ se } (y, s) \in P \cup \{(0.s'), s' \in W\} \end{cases}$$

Agora, seja L o **fluxo de partículas** pelo retrato $[0, x] \times [0, t]$. Isto é, L é o número de trajetórias que cortam o retrato. Por uma figura, podemos ver que $L = \bar{N} + \bar{W} = \bar{S} + \bar{E}$. O interesse nessa variável está na sua interpretação no problema original de investigar o tamanho da máxima subsequência crescente de uma permutação aleatória do conjunto {1,...,n}. Para ver essa relação, observe que se queremos determinar o número máximo possível de pontos (de S, W, N, E ou P) num caminho crescente da origem $(0, 0)$ até o ponto (x, t), $x, t > 0$ então percebemos que esse número é justamente o fluxo L. Isto porque, como o caminho é crescente, só podemos ir para a direita ou para cima e quando fazemos isso podemos coletar no máximo um ponto por trajetória.

De fato, a utilidade do fluxo vai além deste problema. Isto porque podemos relacioná-lo com a posição $X(t)$ de uma partícula de segunda classe. A partícula



HAD COM ENTRADAS (S) E SAÍDAS (W)

de segunda classe é uma partícula que possui uma movimentação distinta das outras partículas, as quais chamaremos daqui em diante de partículas de primeira classe. Ao invés de saltar sobre as marcas de salto P, a partícula de segunda classe salta para frente, para a posição onde se encontrava uma partícula de primeira classe que acabou de ultrapassá-la. A importância das partículas de segunda classe é que elas são o análogo microscópico das características das equações diferenciais de Burgers. Groenenboom provou que se S e W são variáveis aleatórias com Lei Poisson de taxas λ e $\frac{1}{\lambda}$ respectivamente, então o processo se encontra em equilíbrio, no sentido que para qualquer tempo t escolhido ao acaso, a distribuição das partículas no intervalo $[0, x]$ (ie, a distribuição de N) é a mesma de S. Para o processo em equilíbrio, mostraremos que se colocarmos uma partícula de segunda classe na origem e tomarmos o limite para $x, t \to \infty$, então a posição rescalonada da partícula de segunda classe converge para a solução característica de uma equação de Burgers. Para provarmos este e outros resultados, definimos a seguir uma das principais ferramentas utilizadas em processos estocásticos, o **Acoplamento**.

Acoplar duas ou mais medidas de probabilidade significa construí-las simultaneamente no mesmo espaço de probabilidade. Existem inúmeras possibilidades

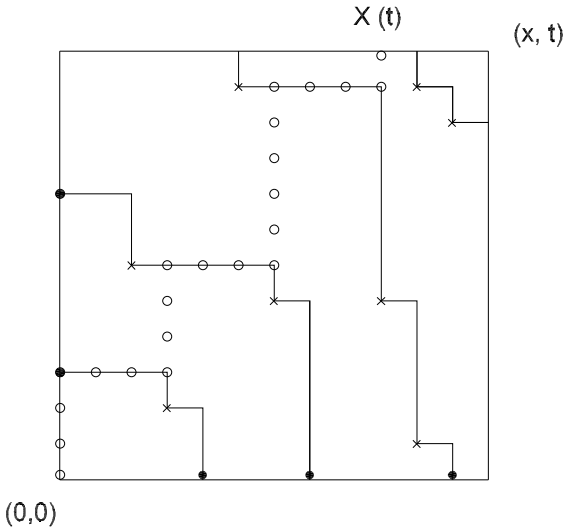
de acoplamento. Nas demonstrações deste texto, utilizamos alguns diferentes tipos de acoplamento. Para o processo de Hammersley um dos mais utilizados é o acoplamento básico.
Sejam $(\eta_t, t \geq 0)$ e $(\sigma_t, t \geq 0)$ dois processos de Hammersley a tempo contínuo com entradas e saídas. O acoplamento básico de η e σ é o processo

$$\begin{aligned}
&\Phi = (\eta, \sigma), \text{ onde} \\
&\eta = \mathcal{H}(S_\eta, W_\eta, P), \text{ e} \\
&\sigma = \mathcal{H}(S_\sigma, W_\sigma, P)
\end{aligned}$$

isto é, os processos marginais utilizam as mesmas marcas de salto. Uma das importantes propriedades que esse acoplamento possui é que ele é atrativo. Informalmente isto quer dizer que a medida em que o tempo passar os dois processos η e σ tendem a ficar com as configurações cada vez mais parecidas. De fato, quando uma marca de P intersecta o segmento (0,x), digamos em y, as partículas a direita de y mais próximas dos dois processos saltam para y. Se elas estavam juntas, permanecem juntas. Se estavam separadas, agora estão juntas. Assim, a densidade de partículas com mesma posição para os processos marginais é não decrescente.

Com base nisso, podemos usar o acoplamento básico para estudar as partículas de segunda classe. Para tanto, considere o acoplamento de (η, η'), onde η'_0 é uma cópia de η_0 exceto pela origem, onde colocamos uma partícula. Com probabilidade 1, para todo tempo t, η_t e η'_t diferem um do outro em apenas um ponto. Observe que esta discrepância entre os processos move-se para a posição da partícula de η a sua direita no momento em que esta salta sobre a discrepância. Concluimos que a discrepância se move como uma partícula de segunda classe.

Vamos acoplar agora os processos em equilíbrio η e σ só que com taxas $\frac{1}{\rho}$ e λ, com $\frac{1}{\rho} < \lambda$. Para tanto, sejam S e I dois processos de Poisson definidos na reta $\mathbb{R} \times \{0\}$ com taxas $\frac{1}{\rho}$ e $\lambda - \frac{1}{\rho}$ respectivamente. Sejam We J dois processos de Poisson definidos na reta $\{0\} \times \mathbb{R}$ com taxas $\frac{1}{\lambda}$ e $\rho - \frac{1}{\lambda}$ respectivamente. Como



TRAJETÓRIA DA PARTÍCULA DE 2ª CLASSE

antes, colocamos

$$\eta = \mathcal{H}(S_\eta, W_\eta, P) \text{ e}$$
$$\sigma = \mathcal{H}(S_\sigma, W_\sigma, P)$$

onde $S_\eta = S \cap [0, x]$, $S_\sigma = S_\eta + I \cap [0, x]$,$W_\sigma = W \cap [0, t]$, $W_\eta = W_\sigma + J \cap [0, t]$ e P tem lei Poisson de taxa 1, no plano. Tomamos todos eles mutuamente independentes. Vemos que as marginais tem as taxas desejadas. Neste acoplamento não temos apenas uma, mas sim uma infinidade de partículas de segunda classe. Observe que, apesar de atrativo, nenhuma partícula de segunda classe deixa de existir para qualquer t. Analogamente ao fluxo de partículas de primeira classe, definimos o fluxo de partículas de segunda classe ξ por

$$\xi(x, t) = \bar{N}_\xi(x, t) + \bar{W}_\xi(x, t) = \bar{S}_\xi(x, t) + \bar{E}_\xi(x, t)$$

onde $N_\xi := N_\sigma - N_\eta$, $S_\xi := S_\sigma - S_\eta$, $W_\xi := W_\sigma - W_\eta$ e $E_\xi := E_\sigma - E_\eta$. Enumeramos as partículas de ξ da seguinte forma. Para $t = 0$, a primeira partícula em S_ξ recebe o número 1. Da esquerda para a direita, vamos enumerando na ordem de aparição todas as partículas com os números naturais. Já as partículas de W_ξ são enumeradas de baixo para cima a partir da origem, com os inteiros não positivos.

De posse dessas definições, mostraremos a seguir uma primeira aplicação do acoplamento no estudo do processo de HAD: a Lei dos grandes números para a posição da partícula de segunda classe isolada no processo em equilíbrio.

Lema 1 *Seja $\mathbb{Z}(t)$ a posição no tempo t da partícula de segunda classe incialmente posta na origem do acoplamento básico de dois processos de Hammersley estacionários com taxas λ e $\frac{1}{\rho}$ acima definido. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{Z}(t)}{t} = \frac{\rho}{\lambda} \qquad , q.c. \tag{0.1}$$

Prova do Lema

A idéia é perceber que o fluxo ξ de particulas de segunda classe pela posição de $Z(t)$ é zero pra todo tempo t e, então, obter a Lei dos Grandes Números para $Z(t)$ a partir da Lei dos Grandes Números para o fluxo.

Para ver que vale uma Lei forte para ξ, lembramos que, da definição, $\xi(x,t) = \big(N_\sigma(x,t) - N_\eta(x,t)\big) + \big(W_\sigma(t) - W_\eta(t)\big)$. Agora, lembrando que N é um processo de Poisson, para todo $\epsilon > 0$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(|N_\eta(nx,n) - \frac{nx}{\rho}| > n\epsilon\big) < \infty$$

Pelo lema de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\big(|N_\eta(nx,n) - \frac{nx}{\rho}| > n\epsilon, \quad \text{infinitas vezes}\big) = 0$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_\eta(nx,n)}{n} = \frac{x}{\rho} \qquad , q.c.$$

Analogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{N}_\sigma(nx,n)}{n} = \lambda x \qquad , q.c.$$

Mais diretamente, pela Lei Forte, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{W}_\sigma(n)}{n} = \frac{1}{\lambda} \qquad , q.c.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{W}_\eta(n)}{n} = \rho \qquad , q.c.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(nx,n)}{n} = \big(\lambda - \frac{1}{\rho}\big)x - \big(\rho - \frac{1}{\lambda}\big) \qquad , q.c.$$

Assim,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi(\mathbb{Z}(n),n)}{n} = \big(\lambda - \frac{1}{\rho}\big) \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{Z}(n)}{n} - \big(\rho - \frac{1}{\lambda}\big) \qquad , q.c.$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{Z}(n)}{n} = \frac{\rho}{\lambda} \qquad , q.c.$$

Como $Z(t)$ é monótona em t, vale

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{Z}(t)}{t} = \frac{\rho}{\lambda} \qquad , q.c.$$

Como queríamos demonstrar.

□

Teorema 1 *(Cator, Groeneboom)*
Seja $\mathbb{X}(t)$ a posição no tempo t da partícula de segunda classe isolada incialmente posta na origem de um processo de Hammersley estacionário θ_t com taxa γ. Então,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{X}(t)}{t} = \frac{1}{\gamma^2} \qquad , q.c. \tag{0.2}$$

Prova do Teorema

Vamos mostrar que quando tomamos o limite da posição de $\frac{Z(t)}{t}$ para $\frac{1}{\rho}$ e λ cada vez mais próximos de γ, então conseguimos obter o limite de $\frac{X(t)}{t}$. Para tanto, acoplaremos o processo $(X(t), \theta_t)$ de Hammersley em equilíbrio com densidade γ e uma partícula isolada de segunda classe na origem, com o processo acoplado do lema acima $(Z(t), \sigma_t, \eta_t)$. Fazemos isso colocando $\lambda = \gamma$ e $\sigma_t = \theta_t$. Do acoplamento obtemos que $X(t) \leq Z(t)$ para todo t. Isto porque como $W_\gamma = W_\sigma \subset W_\eta$, então $X(t)$ leva um tempo maior ou igual que $Z(t)$ para dar o primeiro salto. Além disso, como $S_\gamma = S_\sigma \supset S_\eta$, $X(t)$ não consegue ultrapassar $Z(t)$ depois que ambas passam a origem. Assim,

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{Z(t)}{t} \\ &= \frac{\rho}{\lambda} \qquad , q.c.\end{aligned}$$

Como isto vale para todo $\frac{1}{\rho} < \lambda = \gamma$, temos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} \leq \frac{1}{\gamma^2} \qquad , q.c.$$

Repetimos o procedimento, agora colocando $\frac{1}{\rho} = \gamma$ e $\eta_t = \theta_t$ e denotando a partícula de segunda classe do novo processo acoplado por $Z'(t)$. Analogamente, obtemos que $X(t) \geq Z'(t)$ para todo t, e

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} &\geq \lim_{t\to\infty} \frac{Z'(t)}{t} \\ &= \frac{\rho}{\lambda} \qquad , q.c.\end{aligned}$$

E isto vale para todo $\lambda > \frac{1}{\rho} = \gamma$. Logo,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} \geq \frac{1}{\gamma^2} \qquad , q.c.$$

Da onde concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{X}(t)}{t} = \frac{1}{\gamma^2} \qquad , q.c.$$

□

No estudo da Teoria das Filas, muitas vezes conhecemos o processo de chegada dos clientes na fila, mas estamos interessados em determinar o processo de saída, isto é, com que distribuição os clientes deixam o sistema. Esta variável é de particular interesse quando temos um sistema de filas em série, em que um cliente sai de um servidor e entra na fila de outro servidor. Neste caso, o processo de chegadas dos clientes nesse segundo servidor é justamente o processo de saídas. Para uma fila M/M/1, em que o processo de chegadas é Poisson e os tempos de serviço do único servidor do sistema têm lei exponencial de média menor que os tempos de chegada dos clientes, Burke demonstrou que o processo de saídas é Poisson e com mesma taxa do processo de chegadas. Cator e Groeneboom, e Ferrari e Martin provaram um resultado análogo para o processo HAD no equilíbrio, a saber:
Seja $\bar{P}$ o processo dos pontos do $\mathbb{R}^2$ onde se encontravam as partículas antes do momento de um salto. Estes pontos, chamados de pontos duais de P, são os pontos que governam os saltos do processo reverso no tempo. Mas o processo reverso é um processo de HAD em equilíbrio com saltos no sentido inverso, o que implica que os pontos duais $\bar{P}$ é um processo de Poisson de taxa 1 no plano. Da reversibilidade, segue também que o Norte e o Leste são processos independentes. Utilizamos este fato para calcular a esperança da posição da partícula isolada de segunda classe.

Proposição 1 *Seja $\mathbb{X}(t)$ a posição no tempo t de uma partícula de segunda classe isolada incialmente posta na origem de um processo de Hammersley estacionário de taxa λ. Para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\mathbb{X}(t) = \frac{t}{\lambda^2}$$

Prova da Proposição

Vamos fazer um contagem dupla na variância do fluxo de partículas de primeira classe, $\mathrm{Var}(L)$, a partir da identidade $L = \bar{N} + \bar{W} = \bar{S} + \bar{E}$. Começamos calculando $\mathrm{Var}(\bar{N} + \bar{W})$, para $t > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\big(\bar{N}+\bar{W}\big) &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}+\bar{W},\bar{N}+\bar{W}\big)\\
&= \mathrm{Var}\big(\bar{W}\big)+\mathrm{Var}\big(\bar{N}\big)+2\mathrm{Cov}\big(\bar{N},\bar{W}\big)\\
&= \mathrm{Var}\big(\bar{W}\big)+\mathrm{Var}\big(\bar{N}\big)+2\mathrm{Cov}\big(\bar{N},\bar{S}+\bar{E}-\bar{N}\big)\\
&= \mathrm{Var}\big(\bar{W}\big)-\mathrm{Var}\big(\bar{N}\big)+2\mathrm{Cov}\big(\bar{S},\bar{N}\big)\\
&= \frac{t}{\lambda}-\lambda x+2\mathrm{Cov}\big(\bar{S},\bar{N}\big)
\end{aligned}$$

Queremos encontrar uma relação entre a covariância acima e a esperança de $\mathbb{X}(t)$. Para tanto, vamos variar o processo $\bar{S}$ para uma taxa $\lambda+\varepsilon$ com $\varepsilon\geq 0$. Mantemos $\bar{W}$ com a mesma intensidade. Denotamos por $\mathbb{E}_\varepsilon$ as esperanças com relação a essa nova taxa para $\bar{S}$ e $a_n := \mathbb{E}_\varepsilon\big(\bar{N}|\bar{S}=n\big)$. Observe que como a distribuição dos pontos de S é uniforme dado $\bar{S}$, segue que a_n não depende de ε. Assim,

$$\begin{aligned}
\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}_\varepsilon\big(\bar{N}\big) &= \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((\lambda+\varepsilon)t)^n}{n!}e^{-t(\lambda+\varepsilon)}a_n\\
&= \frac{1}{\lambda}\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-t\lambda}a_n n\big)-t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-t\lambda}a_n\\
&= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(\bar{N}\bar{S})-t\mathbb{E}(\bar{N})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{Cov}(\bar{N},\bar{S}) = \lambda\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}_\varepsilon\big(\bar{N}\big) \tag{0.3}$$

Agora, denotando por $\bar{N}^\varepsilon$ o norte do processo com a taxa da fonte variada, percebemos que para ε pequeno $\bar{N}^\varepsilon-\bar{N}=1$ se, e somente, se $\mathbb{X}_z(t)<x$, onde $\mathbb{X}_z(t)$ denota a posição no tempo t de uma partícula de segunda classe inicialmente posta no ponto z. Assim, como ε é um processo de Poisson, temos

$$\mathbb{E}(\bar{N}^\varepsilon-\bar{N}) = \varepsilon\int_0^x \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\mathbb{X}_z(t)<x})dz+O(\varepsilon^2)$$

Como o processo visto da partícula de segunda classe isolada é um processo

de Poisson invariante por traslações, segue que $\mathbb{X}_z$ tem a mesma distribuição para todo z. Temos então que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\bar{N}, \bar{S}) &= \lambda \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_\varepsilon\big(\bar{N}\big) \\
&= \lambda \int_0^x \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\mathbb{X}_z(t)<x}) dz \\
&= \lambda \int_0^x \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(t) < x - z\big) dz \\
&= \lambda \int_0^x \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(t) < z\big) dz
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{Var}\big(\bar{N} + \bar{W}\big) = \frac{t}{\lambda} - \lambda x + 2\lambda \int_0^x \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(t) < z\big) dz$$

Usando o Teorema de Burke e procedendo de modo análogo, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\big(\bar{S} + \bar{E}\big) &= \mathrm{Var}\big(\bar{S}\big) - \mathrm{Var}\big(\bar{E}\big) + 2\mathrm{Cov}\big(\bar{W}, \bar{E}\big) \\
&= \lambda x - \frac{t}{\lambda} + 2\mathrm{Cov}\big(\bar{W}, \bar{E}\big) \\
&= \lambda x - \frac{t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \int_0^t \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(u) > x\big) du
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{t}{\lambda} - \lambda x + 2\lambda \int_0^x \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(t) < z\big) dz = \lambda x - \frac{t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \int_0^t \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(u) > x\big) du$$

$\Rightarrow$

$$\lambda \int_0^x \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(t) > z\big) dz = \frac{1}{\lambda} \int_0^t \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(u) < x\big) du$$

Assim, vemos que $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\mathbb{X}(t)\big) &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(t) > z\big) dz \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t \mathbb{P}\big(\mathbb{X}(u) < x\big) du \\
&= \frac{t}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Para $t < 0$ o resultado segue da reversibilidade do HAD.

$\square$

Capítulo 3

Processo de exclusão e Percolação de última passagem

O **Processo de exclusão simples** η_t é um processo de Markov que descreve o movimento de partículas em $\mathbb{Z}$. As partículas interagem entre si com a regra de exclusão, isto é, em cada sítio só pode haver uma partícula, o que implica que se uma partícula tenta saltar para um sítio ocupado o salto não ocorre. Neste processo as partículas saltam um passo à direita com taxa p e um passo à esquerda com taxa $1-p$. Em geral, coloca-se $p \in [0,1]$. Os saltos são independentes, exceto pela regra de exclusão. Se $p = \frac{1}{2}$, então o processo é simétrico e recorrente. Caso contrário, com probabilidade 1 as partículas viajam para um mesmo sentido e após um tempo finito não retornam mais ao local onde estavam. Aos casos particulares em que $p = 0$ ou $p = 1$ denominamos o processo pela sigla (em inglês) TASEP, que quer dizer processo de exclusão simples totalmente assimétrico. Mostraremos agora como construir o processo de maneira precisa.

Colocamos $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ como espaço de estados para o processo, onde para cada sitío de $\mathbb{Z}$ denotamos por 0 os sítios vazios e 1 os sítios que estiverem ocupados. Seja $\omega = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ um elemento de Ω. Queremos construir o processo com as taxas de salto dadas, para todo $i \in \mathbb{Z}$, por

$$\begin{aligned}
\big(\omega_i, \omega_{i+1}\big) &\longrightarrow \big(\omega_i - 1, \omega_{i+1} + 1\big) \text{ com taxa } \; p\omega_i(1-\omega_{i+1}) \\
\big(\omega_i, \omega_{i+1}\big) &\longrightarrow \big(\omega_i + 1, \omega_{i+1} - 1\big) \text{ com taxa } \; (1-p)(1-\omega_i)\omega_{i+1}
\end{aligned}$$

Para tanto, utilizamos a construção gráfica de Harris. Realizaremos o processo

no espaço $(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, onde a segunda coordenada denota tempo. Para cada sítio i de $\mathbb{Z}$ construímos dois processos de Poisson no eixo $(i, \mathbb{R})$ independentes $P^i_{\rightarrow}$ e $P^i_{\leftarrow}$ com taxas p e $1-p$ respectivamente. Quando há uma marca de $P^i_{\rightarrow}$ no tempo t, então se há uma partícula no sítio i ela tenta saltar para o sítio $i+1$. Quando há uma marca do processo $P^i_{\leftarrow}$, a partícula tenta saltar para o sítio $i-1$ (faça o desenho!). Não é difícil ver que o processo assim definido satisfaz as taxas de salto acima.

Como no processo de Hammersley, dizemos que o processo está em equilíbrio quando para qualquer tempo t que olharmos para a configuração de partículas η_t, a lei da configuração é a mesma. Para o processo de exclusão simples assimétrico o conjunto de medidas invariantes é um conjunto convexo e compacto e, portanto, pode ser descrito como combinações convexas dos seus pontos extremos. Neste caso, os pontos extremos são as medidas ergódicas com configuração produto ou as medidas chamadas bloqueadoras. As medidas produtos são as medidas que atribuem de forma independente a cada sítio de $\mathbb{Z}$ uma probabilidade ρ de haver uma partícula. Já as medidas bloqueadoras são medidas que possuem a propriedade que assintoticamente (se $p > \frac{1}{2}$) a densidade à esquerda da origem é 0 e a direita é 1. Para o caso simétrico, as únicas medidas invariantes são as medidas produtos com densidade ρ.

Algumas generalizações possíveis do processo de exclusão simples já foram estudadas. Uma das mais naturais é permitirmos que as partículas saltem distâncias maiores do que um em cada salto. Neste caso, partículas que se encontram em regiões menos congestionadas se movimentam com maior velocidade. Se o tamanho máximo de cada salto for um certo natural k, então chamamos o processo de k-processo de exclusão. Este processo esta bem definido para qualquer configuração ω. Se colocamos $k = \infty$ e $p = 1$, então temos o chamado processo HAD discreto. Não é difícil ver que o HAD não está bem definido para configurações esparsas demais, isto é, configurações onde a densidade de partículas vai a zero muito rápido quando vamos para $+\infty$. Isto porque, neste caso, as partículas teriam taxas de salto crescentes de forma que eventualmente atingissem velocidade infinita. Seppalainen provou que se o espaço de estados Ω estiver restrito a

configurações satisfazendo

$$\omega : \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta(i)}{\sqrt{n}} = \infty$$

então não há escape de massa do sistema e o processo está bem definido.

Outra generalização interessante do processo de exclusão é aleatorizar as taxas de salto. Podemos fazer isto, por exemplo, colocando P como sendo um processo de Poisson não homogêneo. Mais simples é escolher aleatoriamente a taxa no tempo zero e então mantê-la constante durante o processo. Benjamini, Ferrari e Landim provaram que ocorre uma transição de fase neste caso.

Mais conhecido e com amplas aplicações é o chamado **TASEP**, um dos casos mais simples do processo de exclusão onde $p = 1$. Nele as partículas só saltam para um lado e por este motivo uma útil relação aparece com um outro processo chamado **Percolação de última passagem**. Vamos definí-lo agora.

Seja $\mathcal{W} = (\omega_{ij}, (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$ uma família de variáveis aleátorias independentes com distribuição exponencial de parâmetro 1. Dizemos que o caminho orientado

$$\pi = \{... \to (p_{-1}, q_{-1}) \to (p_0, q_0) \to ... \to (p_l, q_l) \to ...\}$$

é crescente se cada para todos p_l, q_l temos

$$(p_{l+1}, q_{l+1}) - (p_l, q_l) = \begin{cases} (1,0) & \text{ie, ir para a direita} \\ (0,1) & \text{ie, ir para cima} \end{cases}$$

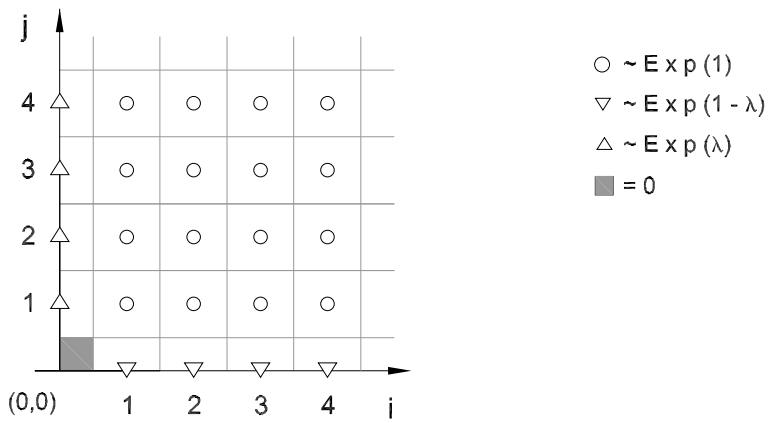
Dados $z = (i,j)$, $z' = (i',j')$, com $i \leq i'$ e $j \leq j'$ definimos $\Pi(z,z')$ como o conjunto dos caminhos crescentes de z a z'. O tempo de última passagem entre z e z' é a variável

$$G_{zz'} = \max_{\pi\in\Pi(z,z')} \Big\{ \sum_{z''\in\Pi} \omega_{z''} \Big\}$$

Imagine que uma certa configuração de pontos G_t está infectada no tempo t. Os tempos de última passagem representam o tempo necessário para que uma infecção inicialmente em z alcance o ponto z'. Assim definimos G_z ou G_{ij} como

sendo o tempo necessário para que um ponto $z = (i, j)$ fique infectado. Temos da definição que os tempos G_{ij} satisfazem a seguinte relação

$$G_{ij} = \max\{G_{i-1,j}, G_{i,j-1}\} + \omega_{ij}$$



CONFIGURAÇÃO INICIAL PARA MEDIDA DE PALM
PARA O PROCESSO EM EQUILÍBRIO

Estamos interessados neste modelo de crescimento no quadrante positvo $\mathbb{Z}_+^2$, pois daí poderemos derivar uma relação com o processo de exclusão TASEP. Mantemos para cada ponto (i, j) do interior do quadrante, ie, $i, j > 0$, as variáveis ω_{ij} com Lei exponencial de taxa 1. Como no HAD, adicionamos condições de fronteira. Isto é, aos pontos da forma $(i, 0)$ ou $(0, j)$, associamos uma certa variável (aleatória ou não) ω_{i0} ou ω_{0j}. Começamos o processo com todo o plano infectado exceto pelo primeiro quadrante e realizamos o processo de Percolação de última passagem. A cada linha j do quadrante positivo associamos a j-ésima partícula P_j do TASEP à esquerda da origem, enumeradas a partir do zero. A cada coluna i, associamos o i-ésimo buraco H_i à direta da origem (inclusive) enumeradas também a partir do zero. Nesta interpretação, o evento [(i, j) é infectado no tempo t] corresponde no TASEP ao evento [P_j salta sobre H_i em t]. Para ver isto, observe que a relação $G_{ij} = \max\{G_{i-1,j}, G_{i,j-1}\} + \omega_{ij}$ corresponde a dizer que a partícula P_j leva um tempo exponencial de parâmetro 1 (ω_{ij}) para saltar sobre H_i a partir do momento em que ela fica na frente de H_i. Por sua vez, uma fica a frente da outra após o último dos eventos [P_{j-1} salta sobre H_i]

ou $[P_j$ salta sobre $H_{j-1}]$ ocorrer. Desta forma, podemos construir o TASEP no mesmo espaço de probabilidade que modelo de percolação de última passagem. Para o TASEP em equilíbrio e densidade de partículas ρ, as condições de fronteira equivalentes no modelo de percolação são, para todos $i, j > 0$

$$G_{0j} \sim Exp(1-\rho) \qquad G_{i0} \sim Exp(\rho) \qquad G_{00} = 0$$

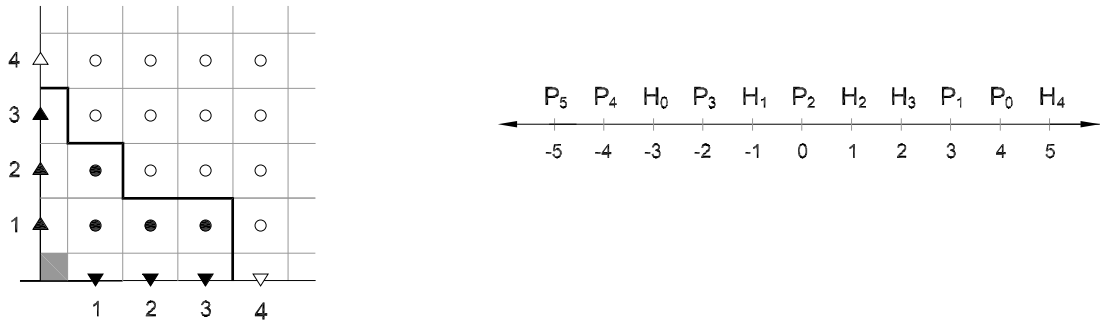
A medida acima corresponde ao processo em equilíbrio com uma partícula de segunda classe na origem. Ferrari e Pimentel (2005), mostraram que a trajetória da partícula de segunda classe possui uma variável correspondente no modelo de Percolação chamada **interface de competição**. Imagine que o quadrante sul, dos pontos $(i, 0)$ com $i > 0$, possui uma certa infecção A e o quadrante oeste, dos pontos $(0, j)$ com $j > 0$, possui outra infecção B. No ponto $(0, 0)$ colocamos um médico. Agora, se $(0, 1)$ é infectado antes de $(1, 0)$ então o médico corre para atender $(0, 1)$, sem poder voltar para trás para atender o ponto $(1, 0)$. A dinâmica se repete recursivamente. Para qualquer ponto (i, j) em que o médico esteja, ele muda para um ponto acima ou a direita, escolhendo sempre o que se infecta primeiro. À trajetória (φ_n)do médico damos o nome de interface de competição, em alusão ao fato de que os pontos infectados por A e B competem pelo socorro do médico. Formalmente, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+^2$ com $\varphi_0 = (0, 0)$ e $\forall n \geq 0$

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} \varphi_n + (1,0) & \text{se } G(\varphi_n + (1,0)) < G(\varphi_n + (0,1)) \\ \varphi_n + (0,1) & \text{se } G(\varphi_n + (1,0)) > G(\varphi_n + (0,1)) \end{cases}$$

Seja I_{ij} o tempo que leva para a partícula P_j saltar de novo após ela saltar o buraco H_i e J_{ij} o tempo que leva para o buraco H_i saltar de novo após ele saltar a partícula P_j. Defina $X_{ij} := I_{i+1,j} \wedge J_{i,j+1}$. Provaremos agora, um lema necessário para uma generalização do teorema de Burke dada mais adiante.

Lema 2 *Fixe $i, j \geq 1$. Se $I_{i,j-1}$ e $J_{i-1,j}$ são independentes com distribuições exponenciais de taxas $1-\lambda$ e λ respectivamente, então I_{ij}, J_{ij} e $X_{i-1,j-1}$ são independentes com distribuições exponenciais de taxas $1-\lambda$, λ e 1, respectivamente.*

Prova do Lema



EQUIVALÊNCIA ENTRE O MODELO DE CRESCIMENTO E O PROCESSO DE EXCLUSÃO

Pela definição, $I_{ij} = G_{ij} - G_{i-1,j}$. Assim,

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= G_{ij} - G_{i-1,j} \\
&= (G_{i-1,j} \vee G_{i,j-1}) + \omega_{ij} - G_{i-1,j} \\
&= (G_{i-1,j} \vee G_{i,j-1}) - G_{i-1,j-1} + \omega_{ij} - (G_{i-1,j} - G_{i-1,j-1}) \\
&= (G_{i-1,j} \vee G_{i,j-1}) - G_{i-1,j-1} + \omega_{ij} - J_{i-1,j} \\
&= (I_{i,j-1} \vee J_{i-1,j}) + \omega_{ij} - J_{i-1,j} \\
&= (I_{i,j-1} - J_{i-1,j})_+ + \omega_{ij}
\end{aligned}$$

Da mesma forma obtemos

$$J_{ij} = (J_{i-1,j} - I_{i,j-1})_+ + \omega_{ij}$$

Assim, usando o enunciado e as expressões acima, temos que a função geradora de momento satisfaz:

$$\begin{aligned}
M_{I_{ij},J_{ij},X_{i-1,j-1}}(s,t,u) &= \mathbb{E}\big(e^{sI_{ij}+tJ_{ij}+uX_{i-1,j-1}}\big) = \\
&= \mathbb{E}\big(e^{s((I_{i,j-1}-J_{i-1,j})_+ + \omega_{ij})+t((J_{i-1,j}-I_{i,j-1})_+ + \omega_{ij})+u(I_{i,j-1}\wedge J_{i-1,j})}\big) \\
&= \mathbb{E}\big(e^{s((I_{i,j-1}-J_{i-1,j})_+)+t((J_{i-1,j}-I_{i,j-1})_+)+u(I_{i,j-1}\wedge J_{i-1,j})}\big)\mathbb{E}\big(e^{(s+t)\omega_{ij}}\big)
\end{aligned}$$

Como assumimos que $I_{i,j-1}$ e $J_{i-1,j}$ são independentes, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(e^{s((I_{i,j-1}-J_{i-1,j})_+)+t((J_{i-1,j}-I_{i,j-1})_+)+u(I_{i,j-1}\wedge J_{i-1,j})}|I_{i,j-1}=x\big) = \\ = \mathbb{E}\big(e^{s((x-J_{i-1,j})_+)+t((J_{i-1,j}-x)_+)+u(x\wedge J_{i-1,j})}\big)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&M_{I_{ij},J_{ij},X_{i-1,j-1}}(s,t,u) = \\ &\quad = \mathbb{E}\big(e^{s((I_{i,j-1}-J_{i-1,j})_+)+t((J_{i-1,j}-I_{i,j-1})_+)+u(I_{i,j-1}\wedge J_{i-1,j})}\big)\mathbb{E}\big(e^{(s+t)\omega_{ij}}\big) \\ &\quad = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big(e^{s((I_{i,j-1}-J_{i-1,j})_+)+t((J_{i-1,j}-I_{i,j-1})_+)+u(I_{i,j-1}\wedge J_{i-1,j})}|I_{i,j-1}\big)\big]\mathbb{E}\big(e^{(s+t)\omega_{ij}}\big) \\ &\quad = \mathbb{E}\big(e^{(s+t)\omega_{ij}}\big)\int_0^\infty (1-\lambda)e^{-x}\big[\int_0^x e^{s(x-y)+uy}\lambda e^{-y}dy + \int_x^\infty e^{t(y-x)+ux}\lambda e^{-y}dy\big]dx \\ &\quad = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda-s)(\lambda-t)(1-u)} \\ &\quad = M_{I_{ij}}(s)M_{J_{ij}}(t)M_{X_{i-1,j-1}}(u)\end{aligned}$$

e temos o resultado. □

Seja Σ o subconjunto dos caminhos crescentes contidos no primeiro quadrante de $\mathbb{Z}^2$. Ou seja, se $\sigma \in \Sigma$ então

$$\sigma = \{... \to (p_{-1},q_{-1}) \to (p_0,q_0) \to (p_1,q_1) \to ... \to (p_l,q_l) \to ...\}$$

com $p_l, q_l \geq 0$ e

$$(p_{l+1},q_{l+1}) - (p_l,q_l) = \begin{cases} (1,0) & \text{ie, ir para a direita} \\ (0,-1) & \text{ie, ir para baixo}\end{cases}$$

O interior do conjunto coberto por σ é definido como

$$\mathfrak{B}(\sigma) = \{(i,j) : 0 \leq i < p_l, 0 \leq j < q_l, \text{para algum}(p_l,q_l) \in \sigma\}$$

Os incrementos de tempo de última passagem sobre σ são as variáveis

$$Z_l(\sigma) = |G_{p_{l+1},q_{l+1}} - G_{p_l,q_l}| = \begin{cases} I_{p_{l+1},q_{l+1}} & \text{se}(p_{l+1},q_{l+1}) - (p_l,q_l) = (1,0) \\ J_{p_l,q_l} & \text{se}(p_{l+1},q_{l+1}) - (p_l,q_l) = (0,-1) \end{cases}$$

$\forall l \in \mathbb{Z}$. Observe que se σ é a união dos eixos i e j, então $\mathfrak{B}(\sigma)$ é vazio. Temos:

Teorema 2 *(Cator, Balazs, Sepallainen)*
Para todo $\sigma \in \Sigma$, a coleção de conjuntos

$$A(\sigma) := \big\{\{X_{ij} : (i,j) \in \mathfrak{B}(\sigma)\}, \{Z_l(\sigma) : l \in \mathbb{Z}\}\big\}$$

possui elementos independentes, I's $\sim Exp(1-\lambda)$, J's $\sim Exp(\lambda)$ e X's $\sim Exp(1)$.

Prova do Teorema
Consideremos primeiro o caso em que $|\mathfrak{B}(\sigma)| < \infty$. Provaremos por indução. Para $|\mathfrak{B}(\sigma)| = 0$, o resultado segue do teorema de Burke para P_0 e H_0. Suponha que o enunciado é válido para todo $\sigma' \in \Sigma$ tal que $|\mathfrak{B}(\sigma')| = n$. Tome $\sigma \in \Sigma$ com $|\mathfrak{B}(\sigma)| = n+1$. Da definição de Σ podemos encontrar um σ', tal que

$$\sigma = \sigma' \cup \{(i+1, j+1)\}$$

e $\{(i, j+1), (i+1, j)\} \in \sigma'$. Logo,

$$\mathfrak{B}(\sigma) = \mathfrak{B}(\sigma') \cup \{(i+1, j+1)\}$$

e

$$A(\sigma) = A(\sigma')/\{I_{i+1,j}, J_{i,j+1}\} \cup \{I_{i+1,j+1}, J_{i+1,j+1}, X_{i,j}\}$$

Como $\omega_{i+1,j+1}$ é independente de $A(\sigma')$, segue do lema anterior e das definições que $\{I_{i+1,j+1}, J_{i+1,j+1}, X_{i,j}\}$ são mutuamente independentes, possuem as distribuições do enunciado e são independentes de $A(\sigma')/\{I_{i+1,j}, J_{i,j+1}\}$. Como, por hipótese, $A(\sigma')$ satisfaz o enunciado, temos que $A(\sigma)$ satisfaz as condições do enunciado e segue por indução que isso vale para todo σ com interior finito.

No caso em que σ tem interior infinito, a independência dos elementos de $A(\sigma)$ segue da independência de suas subcoleções finitas. Fixe o caminho σ. Para

mostrar que suas subcoleções finitas satisfazem o enunciado, basta perceber que para qualquer subcoleção finita de $A(\sigma)$, existe um quadrado, grande o suficiente e com dois lados contidos nos eixos, que contém o subconjunto de σ correspondente a subcoleção escolhida. Assim, podemos encontrar um caminho σ' com $|\mathfrak{B}(\sigma')| < \infty$ que contém o subconjunto de σ. Logo, segue do caso finito que qualquer subconjunto finito de qualquer caminho $\sigma \in \Sigma$ satisfaz o enunciado e temos o resultado. $\square$

Corolário 1 *Considere o processo de exclusão simples totalmente assimétrico em $\mathbb{Z}$, com uma partícula no sítio 1, um buraco no sítio 0 e medida produto nos sítios restantes (o que equivale ao processo em equilíbrio visto de uma partícula de segunda classe). Temos que o teorema de burke vale para toda partícula P a partir do momento em que P ultrapassa o buraco H_0 e para todo buraco H a partir do momento em que este ultrapassa P_0.*

Prova do Corolário

Considere a representação do TASEP como um modelo de percolação de última passagem. Tome $j, i > 0$. Nesta representação, o evento P_j salta sobre H_0 em t é equivalente a $(0, j)$ é infectado em t. Assim, a partir de t, o tempo necessário para o próximo salto de P_j é $I_{0,j}$. Para o salto seguinte é $I_{0,j} + I_{1,j}$, e de maneira geral, para o n-ésimo salto é $I_{0,j} + ... + I_{n-1,j}$. Pelo Teorema anterior, tomando $\sigma = \bigcup_{l \geq j}\{(0, l)\} \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}}\{(l, j)\}$, temos que o tempo entre os saltos sucessivos de P_j a partir de t são independentes com distribuição exponencial. Logo a posição de P_j segue um processo de Poisson apartir do momento em que P_j atende H_0 e temos o resultado. Para um buraco H_i, o resultado é obtido de maneira análoga, só que tomando $\sigma = \bigcup_{l \in \mathbb{N}}\{(i, l)\} \cup \bigcup_{l \geq i}\{(l, 0)\}$. $\square$

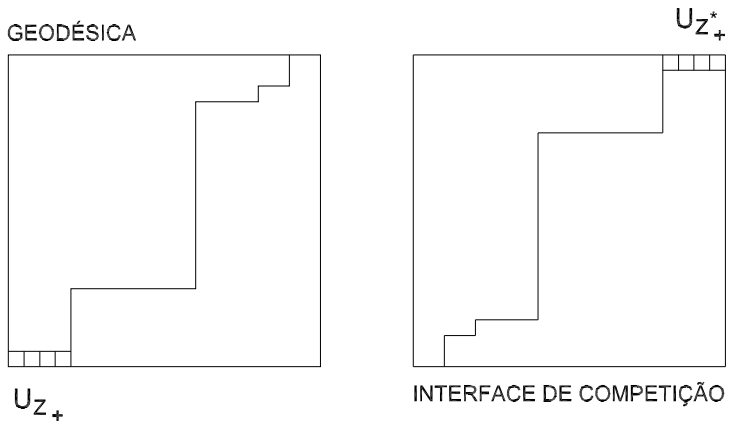
Lembremos que, como o TASEP em equlíbrio é reversível no tempo então o modelo de percolação de última passagem com as condições de fronteira descritas acima também é. A partir disso, observamos que quando corremos o tempo para trás, a interface de competição que parte de um ponto (m, n) com $m, n > 0$, escolhe sempre o ponto com maior tempo de última passagem até que alcance

um dos eixos i ou j. Em suma, denotando por $\bar{\pi}$ a **geodésica** entre a origem e o ponto (m, n), ie, o caminho que maximiza a soma dos tempos ω_{ij} com $(i, j) \subset \bar{\pi}$, então a interface de competição do processo reverso coincide com $\bar{\pi}$ do ponto Z em que ele deixa um dos eixos até (m, n). Colocamos $Z = Z_+$ se a geodésica entra no interior do primeiro quadrante pelo eixo i e $Z = Z_-$ caso ela saia pelo eixo j. E denotamos por U_Z o tempo coletado pela geodésica ao longo dos eixos. Por fim, defina

$$Z^* = (m - v(n))_+ - (n - w(m))_+$$

onde

$$v(n) = \inf\{i : (i, n) = \varphi_k, \text{ para algum } k \geq 0\}$$
$$w(m) = \inf\{j : (m, j) = \varphi_k, \text{ para algum } k \geq 0\}$$



U_{Z_+} E $U_{Z^*_+}$ TÊM A MESMA DISTRIBUIÇÃO

Em seguida, calculamos a variância assintótica do tempo de última passagem, modificando a demontração de um lema de Cator, Balazs, Sepallainen.

Teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(G_{rn,n})}{n} = \begin{cases} \frac{r}{(1-\rho)^2} & se\ r > \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \\ \frac{1}{\rho^2} - \frac{r}{(1-\rho)^2} & cc \end{cases}$$

Prova do Teorema

Procedemos de modo análogo ao cálculo da variância do fluxo de partículas no HAD. Vamos fazer um contagem dupla na variância do tempo de última passagem G_{mn} a partir da identidade $G_{mn} = N + W = S + E$, onde

$$S =: G_{m0} - G_{00}, \quad W =: G_{0n} - G_{00}, \quad N =: G_{mn} - G_{0n}, \quad E =: G_{mn} - G_{m0}$$

Começamos calculando $\mathrm{Var}(N + W)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\big(N+W\big) &= \mathrm{Cov}\big(N+W, N+W\big) \\
&= \mathrm{Var}\big(W\big) + \mathrm{Var}\big(N\big) + 2\mathrm{Cov}\big(N, W\big) \\
&= \mathrm{Var}\big(W\big) + \mathrm{Var}\big(N\big) + 2\mathrm{Cov}\big(N, S+E-N\big) \\
&= \mathrm{Var}\big(W\big) - \mathrm{Var}\big(N\big) + 2\mathrm{Cov}\big(S, N\big) \\
&= \frac{n}{\rho^2} - \frac{m}{(1-\rho)^2} + 2\mathrm{Cov}\big(S, N\big)
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o teorema de Burke anterior, que implica que N e E são independentes.

Queremos encontrar uma relação entre a covariância acima e a esperança de $U(Z_+)$. Para tanto, vamos variar o processo S da seguinte maneira: trocamos cada um dos tempos ω_{i0} de S para $\omega_{i0}^{\varepsilon} = \frac{1-\rho}{1-\lambda}\omega_{i0}$, com $\lambda = \rho+\varepsilon$ e $\varepsilon > 0$. Denotamos por S^{ε} o processo S modificado e observe que $S^{\varepsilon} \sim Gama(m, 1-\rho-\varepsilon)$ com densidade f_{ε}. Mantemos W com a mesma intensidade. Defina $a_n := \mathbb{E}\big(N^{\varepsilon}|S^{\varepsilon} = n\big)$ e observe que a_n não depende de ε, ie, $a_n = \mathbb{E}\big(N|S = n\big)$.
Assim,

$$
\begin{aligned}
\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}\big(N^{\varepsilon}\big) &= \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\int_0^{\infty}\mathbb{E}(N^{\varepsilon}|S^{\varepsilon}=n)f_{\varepsilon}(s)ds \\
&= \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\int_0^{\infty}\mathbb{E}(N|S=n)f_{\varepsilon}(s)ds \\
&= \int_0^{\infty}\mathbb{E}(N|S=n)\big[\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}f_{\varepsilon}(s)\big]ds \\
&= \int_0^{\infty}\mathbb{E}(N|S=n)\big[sf_0(s)-\frac{m}{1-\rho}f_0(s)\big]ds \\
&= \int_0^{\infty}\mathbb{E}(N|S=n)sf_0(s)ds-\frac{m}{1-\rho}\int_0^{\infty}\mathbb{E}(N|S=n)f_0(s)ds \\
&= \mathbb{E}(NS)-\frac{m}{1-\rho}\mathbb{E}(N) \\
&= \mathbb{E}(NS)-\mathbb{E}(S)\mathbb{E}(N)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\mathrm{Cov}(N,S)=\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}\big(N^{\varepsilon}\big) \tag{0.1}
$$

Agora, sejam Z e Z^{ε} os pontos de saída das geodésicas da origem até (m,n) no processo original e no processo modificado, respectivamente, e U_x e U_x^{ε} os tempos para que um ponto x pertencente a um dos eixos seja infectado nos processos anteriores. Assim, por exemplo, U_Z é o tempo que leva para a geodésica do processo original deixar um dos eixos. Vamos calcular $\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}\big(N^{\varepsilon}\big)$ de outra maneira, de modo a relacioná-la com $\mathbb{E}(U_{Z_+})$. Temos:

$$
\begin{aligned}
N_{\varepsilon}-N &= (N^{\varepsilon}-N)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}=Z]}+(N^{\varepsilon}-N)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]} \\
&= (U_Z^{\varepsilon}-U_Z)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}=Z]}+(N_{\varepsilon}-N)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]} \\
&= (U_Z^{\varepsilon}-U_Z)+\big(N_{\varepsilon}-N-(U_Z^{\varepsilon}-U_Z)\big)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}
\end{aligned}
$$

Observe que se o ponto de saída Z pertence a W, então $U_Z^{\varepsilon}-U_Z=0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
U_Z^{\varepsilon}-U_Z &= U_{Z_+}^{\varepsilon}-U_{Z_+} \\
&= \big(\frac{1-\rho}{1-\rho-\varepsilon}\big)U_{Z_+} \\
&= \frac{\varepsilon}{1-\rho-\varepsilon}U_{Z_+}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N,S) &= \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}\big(N^{\varepsilon}\big) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}\big(N_{\varepsilon}-N\big)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}(U_{Z_+})}{1-\rho-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}\big((N_{\varepsilon}-N-U_Z^{\varepsilon}+U_Z)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big)}{\varepsilon} \\
&= \frac{\mathbb{E}(U_{Z_+})}{1-\rho}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}\big((N_{\varepsilon}-N-U_Z^{\varepsilon}+U_Z)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que este último limite é zero. Para tanto, veja que $N_{\varepsilon}-N$ não pode exceder $S_{\varepsilon}-S$. Deste modo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((N_{\varepsilon}-N-U_Z^{\varepsilon}+U_Z)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big) &\leq \mathbb{E}\big((N_{\varepsilon}-N)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big) \\
&\leq \mathbb{E}\big((S_{\varepsilon}-S)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big) \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}\big((S_{\varepsilon}-S)^2\big)\mathbb{E}\big(\mathbf{1}^2_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big)} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}\big((S_{\varepsilon}-S)^2\big)\mathbb{P}\big(Z^{\varepsilon}\neq Z\big)} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}\big((\frac{\varepsilon}{1-\rho-\varepsilon}S)^2\big)\mathbb{P}\big(Z^{\varepsilon}\neq Z\big)} \\
&= \frac{\varepsilon}{1-\rho-\varepsilon}\sqrt{\mathbb{E}\big(S^2\big)\mathbb{P}\big(Z^{\varepsilon}\neq Z\big)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{E}\big((N_{\varepsilon}-N-U_Z^{\varepsilon}+U_Z)\mathbf{1}_{[Z^{\varepsilon}\neq Z]}\big)}{\varepsilon} \leq \frac{\sqrt{\mathbb{E}\big(S^2\big)}}{1-\rho}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\mathbb{P}\big(Z^{\varepsilon}\neq Z\big)}$$

e resta mostrar que $\mathbb{P}\big(Z^{\varepsilon}\neq Z\big)\to 0$ quando $\varepsilon\to 0$. Fazemos isto provando que a probabilidade do evento complementar vai pra 1.
Seja ω uma possível realização do processo de percolação. Perceba que da definição de ω^{ε} temos que

$$\{\omega : Z^{\varepsilon}=Z\}\uparrow\lim_{\varepsilon\to 0}\{\omega : Z^{\varepsilon}=Z\}$$

Agora, considere o conjunto $\{\omega$: a geodésica da origem a (m,n) é única$\}$. Como o número de variáveis que determina a geodésica é finito, para cada elemento ω deste conjunto é possível encontrar um ε pequeno suficiente tal que $Z_\varepsilon(\omega) = Z(\omega)$. Logo,

$$\{\omega : \text{a geodésica da origem a (m,n) é única}\} \subseteq \lim_{\varepsilon\to 0}\{\omega : Z_\varepsilon = Z\}$$

Assim, vale que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\big(Z^\varepsilon = Z\big) &= \mathbb{P}\big(\lim_{\varepsilon\to 0}\{\omega : Z^\varepsilon = Z\}\big)\\ &\geq \mathbb{P}\big(\{\omega : \text{a geodésica da origem a (m,n) é única}\}\big)\\ &= 1\end{aligned}$$

Da onde concluimos que

$$\mathrm{Cov}(N,S) = \frac{\mathbb{E}(U_{Z_+})}{1-\rho}$$

e

$$\mathrm{Var}\big(N+W\big) = \frac{n}{\rho^2} - \frac{m}{(1-\rho)^2} + \frac{2\mathbb{E}(U_{Z_+})}{1-\rho}$$

Por fim, para todo $r \geq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(G_{rn,n})}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\big(N+W\big)}{n}\\ &= \frac{1}{\rho^2} - \frac{r}{(1-\rho)^2} + \frac{2}{1-\rho}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}(U_{Z_+})}{n}\\ &= \frac{1}{\rho^2} - \frac{r}{(1-\rho)^2} + \frac{2}{1-\rho}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}(U_{Z_+^*})}{n}\end{aligned}$$

onde $U_{Z_+^*}$ é a diferença entre o tempo em P_n salta sobre $H_{\lfloor rn\rfloor}$ e o tempo em que uma partícula de segunda classe inicialmente na origem passa por P_n. Pela Lei dos grandes números para a partícula de segunda classe no equilíbrio, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}(U_{Z_+^*})}{n} = \begin{cases} \frac{r}{1-\rho} - \frac{1-\rho}{\rho^2} & \text{se } r > \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \\ 0 & \text{cc}\end{cases}$$

Da onde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(G_{rn,n})}{n} = \begin{cases} \frac{r}{(1-\rho)^2} & \text{se } r > \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \\ \frac{1}{\rho^2} - \frac{r}{(1-\rho)^2} & \text{cc} \end{cases}$$

□

Capítulo 4

Processos Multiclasses

Neste capítulo apresentamos uma generalização para os processos dos capítulos anteriores. Definimos os processos de exclusão (TASEP) e o processo de Hammersley (contínuo ou discreto) com n classes distintas de partículas. De certa forma, para o caso $n = 2$ já vimos alguma coisa antes, em especial, sobre o comportamento assintótico da posição de uma partícula de segunda classe isolada. Agora estudaremos os processos com uma desidade positiva de partículas de segunda classe, bem como com densidades positivas de um número qualquer de classes. Vamos as definições.

Como antes, utilizamos o acoplamento básico para realizar diferentes configurações iniciais do processo no mesmo espaço de probabilidade induzido pelo processo de Poisson bidimensional P. Agora, acoplamos n configurações $\eta_1, ..., \eta_n$, com $n > 1$, tais que $\eta_1 \subset ... \subset \eta_n$. Dizemos que para todo x (em $\mathbb{R}$ no HAD ou em $\mathbb{Z}$ no TASEP) com $\eta_n(x) = 1$, x possui uma partícula de classe $k \in \{1, ...n\}$ se $\inf_{i \in \{1,...,n\}}\{i : \eta_i(x) = 1\} = k$. Com esta definição, vemos que as partículas de classe k podem ser ultrapassadas pelas partículas de menor classe e podem ultrapassar partículas de maior classe.
Daqui em diante, as definições e resultados mostrados se referem ao HAD multiclasse em espaço contínuo, exceto dito o contrário. Para o TASEP ou para o HAD discreto, as definições e resultados são análogos e podem ser encontrados em Ferrari e Martin (2005).

Sejam

$$\mathcal{X}_{n\uparrow} = \{(\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathcal{X}_n : \eta_1(x) \leq ... \leq \eta_n(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

o espaço das configurações ordenadas do acoplamento básico de processos HAD em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{X}_n$ o espaço das configurações bem definidas do acoplamento de n processos de Hammersley na reta. Definimos o processo **HAD multiclasse** de forma precisa como

$$\psi_t = R\eta_t$$

em que a bijeção $R : \mathcal{X}_{n\uparrow} \to \mathcal{X}_n$ é definada por

$$(R\eta)_k = \eta_k/\eta_{k-1}$$

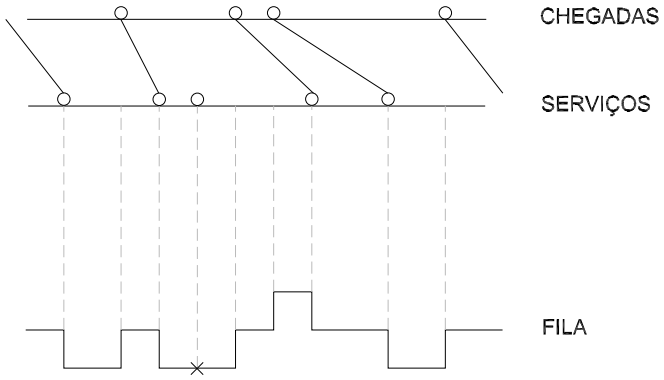
para todo $k \in \{1, ..., n\}$. Assim, $\psi_t = (\psi_t^1, ..., \psi_t^n)$, onde ψ_t^i é a configuração das partículas de i-ésima classe no tempo t.

Assim como a noção de partícula de segunda classe no processo em equilíbrio surgiu como um análogo microscópico para o estudo das características das equações de Burgers associadas aos processos, a partícula marcada de segunda classe no processo Multiclasse aparece como o análogo microscópico para os chamados **choques**, ou ondas de choque. O choque é um fenômeno comumente encontrado nas vias de trânsito, em especial, é bem perceptível em rodovias. Os veículos viajam com uma certa velocidade média próxima, estando em situação de equilíbrio. Em algum momento específico, a velocidade média dos veículos cai e os veículos que alcançam este tráfego mais pesado são obrigados a frear, diminuindo de velocidade repentinamente. Desta forma, localmente distiguimos duas diferentes densidades na via e ao ponto de separação destas densidades dá-se o nome de choque. O termo onda de choque, diz respeito ao fato de que, ao longo do tempo o choque se mantém existente, viajando pela via com uma certa velocidade. Podemos ver intuitivamente que as partículas de segunda classe no TASEP multiclasse (n=2) em equlíbrio se encontram numa situação análoga a descrita. Para tanto, observe que elas não diferenciam a classe das partículas que estão à sua frente, enquanto só podem ser ultrapassadas por partículas de primeira classe. Assim, estas partículas de segunda classe enxergam um processo em equilíbrio com taxa

λ à sua frente e um processo com taxa ρ atrás delas, com $\lambda > \rho$ (ver Ferrari e Martin (2005)).

Ao contrário do que acontece no processo com uma classe de partículas, o conjunto das medidas invariantes extremas não é Poisson para cada classe de partícula. As únicas medidas invariantes extremas são obtidas como a saída de um sistema de $n-1$ filas em série com n classes de clientes. A descrição do sistema é a seguinte: Clientes de primeira classe chegam à primeira fila como um processo de Poisson de taxa ρ_1. Para cada fila k com k de 1 a n-1, existe uma quantidade infinita de clientes de classe $k+1$ esperando por atendimento. Quando um cliente de classe i é atendido na fila k, ele passa para a próxima fila ou sai do sistema caso $k = n-1$. O atendimento segue a regra FIFO para clientes de mesma classe, ou seja, o primeiro a chegar é o primeiro a sair. Clientes de classe i têm prioridade no atendimento com relação a clientes de classes maiores. Assim, por exemplo, quando um cliente de segunda classe chega na segunda fila, ele é atendido antes dos clientes de terceira classe que lá estavam. Por fim, as taxas de serviço do servidor da fila k são exponenciais independentes de parâmetros ρ_k. Como todas as filas sempre possuem clientes esperando por atendimento, temos que os processos de saídas são processos de Poisson com taxas $\rho_2, ...\rho_n$. De imediato, aplicando o teorema de Burke sucessivas vezes, obtemos que a distribuição marginal dos clientes de primeira classe é um processo de Poisson de densidade ρ_1. O mesmo não ocorre para os clientes das outras classes, já que as chegadas deles no sistema não é um processo de Poisson homogêneo. Podemos ver que os clientes de classe k (de 2 a n) chegam na fila k+1 nos momentos dos serviços não utilizados pelos clientes de classe menor que k. Podemos observar que nesta medida, clientes de classe maior que 1 não estão distribuídos uniformemente pelo espaço, o que ocorre com os clientes de primeira classe. Eles possuem uma certa tendência de se atraírem, formando pequenos clusters cujos tamanhos têm distribuição geométrica.

Vamos colocar isto em notação precisa. Por simplicidade, fixamos n=2 (os outros casos são análogos). Para este caso temos uma única fila. Construímos ela a partir de dois processos de Poisson independentes α_1 e α_2 com taxas ρ_1 e ρ_2, respectivamente. O processo α_1 corresponde aos momentos das chegadas

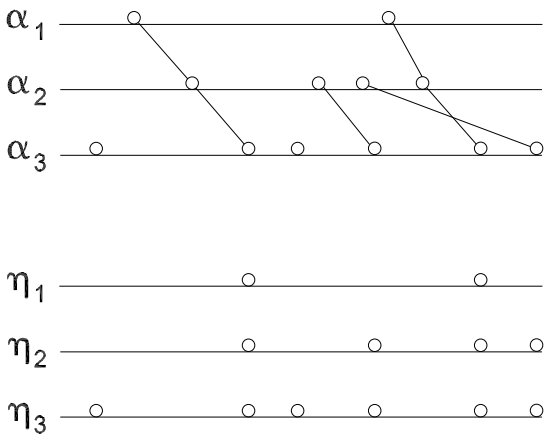


CONSTRUÇÃO DA FILA M I M I 1 ATRAVÉS
DE DOIS PROCESSOS DE POISSON INDEPENDENTES

dos clientes de primeira classe na fila. O processo α_2 corresponde aos momentos dos serviços do servidor. Denotamos por $M(x)$ o número de clientes na fila no momento x. Aqui, x denota tempo. Lembrando que $\rho_1 < \rho_2$, temos que o processo $M(x)$ é uma fila do tipo M/M/1 estacionária. Pelo teorema de Burke, a distribição das saídas dos clientes primeira classe, ie, das partículas de primeira classe, é um Processo de Poisson ρ_1. Já a distribuição dos clientes de segunda classe, ou seja, das partículas de segunda classe, é um processo de Poisson não homogêneo com taxa $(\rho_2 \mathbf{1}_{[M(x)=0]})$.

Para provar que de fato a medida acima é invariante para o processo ψ_t, introduzimos agora um novo processo denominado **Processo Multilinha**. Seja $\alpha_t = (\alpha_t^1, ..., \alpha_t^n)$, onde as margimais são processos HAD acoplados da seguinte maneira: α_t^n é governado pelo processo de Poisson bidimensional P de taxa 1, que é independente da configuração inicial $\alpha = \alpha_0$. Agora, denotando por $\bar{P}_i$ os pontos duais do processo α_t^i, temos que para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, α_t^i é governado pelos pontos $\bar{P}_{i+1}$, definidos sucessivamente para i de n até 2. O teorema de Burke garante que os processos $\bar{P}_{i+1}$ são Poisson bidimensionais de taxa 1 e, portanto, as marginais $\alpha_t^1, ..., \alpha_t^n$ são de fato processos HAD sempre que a configuração inicial de α for um produto de processos de Poisson homogêneos.

De fato, o processo multilinha pode ser definido com outras configurações iniciais, mas neste caso as marginais não serão processos de HAD, pois os pontos duais não satisfarão o teorema de Burke.
Ferrari e Martin (2006) mostraram utilizando os geradores do processo e do processo reverso que, se tomamos as marginais independentes, então esta medida é invariante extrema (por ser ergódica). Além disso, provaram ser essa a única medida invariante extrema e que existe uma transformação bijetiva que leva o processo multilinha estacionário α_t no processo multiclasse ψ_t com medida μ igual a saída de um sistema de filas como o definido acima. Segue da unicidade da medida invariante do processo α_t que a medida μ é a única medida invariante extrema para o processo multiclasse com as densidades fixadas.



CONSTRUÇÃO DA MEDIDA INVARIANTE PARA η
PELA TRANSFORMAÇÃO DE α

Mostraremos adiante que o processo de Hammersley multiclasse admite uma construção num retângulo finito com entradas e saídas, análoga à do HAD.

Proposição 2 *Sejam $x, t \geq 0$. Existem S_ψ em $[0, x] \times \{0\}$ e W_ψ em $\{0\} \times [0, t]$ tais que $\psi = \mathcal{H}_n(S_\psi, W_\psi, P)$ é um processo de Hammersley multiclasse estacionário construído no retângulo finito $[0, x] \times [0, t]$ de $\mathbb{R}^2_+$ como uma função determinística $\mathcal{H}_n$ de S_ψ,W_ψ e P, onde P é um processo de Poisson bidimensio-*

nal de taxa 1. Além disso, assim como a lei de S_ψ, a lei de W_ψ pode ser obtida como a saída de uma fila M/M/1 com n classes de clientes.

Prova da Proposição 2

Considere o processo multilinha $\alpha_t = (\alpha_t^1, ..., \alpha_t^n)$. Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, S_{α^i} é a restrição de α_0^i ao intervalo (0,x) e W_{α^i} é o subconjunto dos pontos do segmento vertical $\{0\} \times [0, t]$ por onde as trajetórias de α_t^i passam. Como os processos α_0^i's são independentes, temos que os $\{S_{\alpha^i}\}$ são mutuamente independentes. Como as marginais são processos HAD em equilíbrio, sabemos que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, W_{α^i} é um processo de Poisson com taxa $\frac{1}{\rho_i}$ e é independente de S_{α^i}.

Rotacionando os processos marginais em 90º no sentido anti-horário vemos que o processo obtido é um processo multilinha com saltos no sentido inverso e com os papéis dos $S's$ e $W's$ invertidos (faça uma figura!). O teorema de Burke para o HAD com uma classe de partícula implica que os lestes dos processos marginais têm a mesma lei que os $W's$ o que implica na invariância do processo rotacionado. Segue da unicidade da medida invariante para o processo multilinha que os W_{α^i} são mutuamente independentes. Assim, podemos construir o processo multinha num retrato finito $[0, x] \times [0, t]$ de $\mathbb{R}_+^2$ como função determinística dos processos independentes P,$\{S_{\alpha^i}\}_{i=1,..n}$ e $\{W_{\alpha^i}\}_{i=1,..n}$.

Agora observe que ao rotacionarmos o processo modificado em 180 graus (isto é, o processo original em 90 graus no sentido horário) obtemos um processo multilinha β_{-x} da esquerda para a direita, com os E's nos lugares dos S's e com os N's nos lugares dos W's, em que podemos aplicar a a função Φ, que leva o processo multilinha α_t no processo multiclasse ψ_t, e assim obter um outro processo multiclasse. Ao aplicarmos a função Φ nos $\{S_{\alpha^i}\}_{i=1,..n}$, obtemos uma configuração multiclasse S_ψ cuja medida invariante é obtida como a saída de uma fila M/M/1 com n classes de clientes, cujas taxas estão relacionadas com as taxas dos $S'_{\alpha^i}s$. Analogamente, aplicando Φ nos $\{N_{\beta^i}\}_{i=1,..n}$, obtemos uma outra configuração multiclasse cuja medida invariante é obtida como a saída de uma fila M/M/1 com n classes de clientes, cujas taxas estão relacionadas com as taxas dos $N'_{\beta^i}s$. Mas temos que, para uma dada realização do processo original, $N_{\beta^i} = W_{\alpha^i}$ para todo i. Segue o resultado.

□

Vamos calcular a variância assintótica do fluxo de partículas de segunda classe ξ por um observador que viaja com velocidade constante $r \geq 0$, num processo de Hammersley multiclasse com medida invariante μ com densidades $\lambda - \frac{1}{\rho}$ de partículas de segunda classe e $\frac{1}{\rho}$ de partículas de primeira classe.

Construímos o processo a partir de um processo multilinha α_t, com $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$. Restringimos os processos ao retrato $[0, x] \times [0, t]$, com $x = rt$ e $r \geq 0$. Nessa construção, as trajetórias das marginais são processos HAD com entradas e saídas $S_{\alpha_1}, W_{\alpha_1}$ e $S_{\alpha_2}, W_{\alpha_2}$ todas mutuamente independentes e independentes do processo de marcas P. α_2 é governado por P e α_1 é governado pelo processo de pontos duais de P, o qual denotaremos por $D(P)$.

Agora mostraremos algumas relações importantes utilizadas na prova. Defina:

$$
\begin{aligned}
M_0(t) &:= \text{ número de clientes na fila (do tempo t) no instante 0} \\
M_x(t) &:= \text{ número de clientes na fila (do tempo t) no instante x} \\
\bar{N}_\eta &:= \text{ número de clientes atendidos no intervalo (0,x) na fila do tempo t} \\
&= M_0(t) + \bar{N}_{\alpha_1} - M_x(t) \\
&= \bar{N}_{\alpha_1} - (M_x(t) - M_0(t)) \\
\bar{N}_\xi &:= \text{ número de serviços não utilizados no intervalo (0,x) na fila do tempo t} \\
&= \bar{N}_\sigma - \bar{N}_\eta \\
&= \bar{N}_{\alpha_2} - (\bar{N}_{\alpha_1} - (M_x(t) - M_0(t))) \\
&= \bar{N}_{\alpha_2} - \bar{N}_{\alpha_1} + (M_x(t) - M_0(t)))
\end{aligned}
$$

Observação: Por vezes denotamos os processos $M_0(t)$ e $M_x(t)$ por $M_0(t, \alpha)$ e $M_x(t, \alpha)$ para enfatizar a dependencia com relação ao processo α.

Vale o seguinte resultado:

Proposição 3 *Para todo $r \geq 0$, temos que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\overline{\xi}(rt,t)}{t} = \begin{cases} \left(\rho + \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\lambda + \frac{1}{\rho}\right)r & se\ r \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ \left(\rho - \frac{1}{\lambda}\right) + \left(\lambda - \frac{1}{\rho}\right)r & se\ r \in (\frac{1}{\lambda^2}, \rho^2) \\ \left(\lambda + \frac{1}{\rho}\right)r - \left(\rho + \frac{1}{\lambda}\right) & se\ r \geq \rho^2 \end{cases} \tag{0.1}$$

Prova da Proposição

A idéia é utilizar as relações acima como a que estabelece que o número de partículas de primeira classe num intervalo qualquer é um processo de Poisson independente do número total de partículas a menos de um erro de ordem 1 com momentos finitos. Assim, o erro não influência no cálculo do limite desejado e podemos "ignorá-lo"e pensar em termos de processos de Poisson independentes.

Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\overline{\xi}(rt,t)}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}(\bar{N}_\xi + \bar{W}_\xi, \bar{N}_\xi + \bar{W}_\xi)}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\bar{N}_\xi)}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\bar{W}_\xi)}{t} + 2\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi, \bar{W}_\xi\big)}{t} \end{aligned}$$

Calcularemos cada um desses limites.

Primeiro, pela invarância de μ

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\bar{N}_\xi)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\bar{S}_\xi)}{t} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\big(\bar{S}_{\alpha_2} - \bar{S}_{\alpha_1} + (M_{rt} - M_0)\big)}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\big(\bar{S}_{\alpha_2} - \bar{S}_{\alpha_1}\big)}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\big(M_{rt} - M_0\big)}{t} + 2\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_{\alpha_2} - \bar{S}_{\alpha_1}, M_{rt} - M_0\big)}{t} \end{aligned}$$

Observe que tanto M_{rt} como M_0 têm Lei igual ao do número de clientes numa fila M/M/1 em equiíbrio, que é uma variável geométrica. Neste caso o parâmetro é $\frac{1}{\lambda\rho} < 1$ e portanto M_{rt} e M_0 possuem todos os momentos finitos e independentes

de t. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\big(M_{rt}-M_0\big)}{t} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\big(M_{rt}\big)}{t}+\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\big(M_0\big)}{t}-2\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Cov}\big(M_{rt},M_0\big)}{t}\\ &\leq 4\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\big(M_{rt}\big)}{t}\\ &= 0\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_{\alpha_2}-\bar{S}_{\alpha_1},M_{rt}-M_0\big)=\\ &\quad= \mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_2},M_{rt})+\mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_1},M_0)-\mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_2},M_0)-\mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_1},M_{rt})\end{aligned}$$

Lembrando que $\bar{S}_{\alpha_1}$ é um processo de Poisson com taxa $\frac{rt}{\rho}$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_{\alpha_2},M_{rt}\big)}{t} &= \lim_{t\to\infty}\mathrm{Cov}\big(\frac{\bar{S}_{\alpha_2}}{t},M_{rt}\big)\\ &= \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[\big(\frac{\bar{S}_{\alpha_2}-\mathbb{E}(\bar{S}_{\alpha_2})}{t}\big)\big(M_{rt}-\mathbb{E}(M_{rt})\big)\big]\\ &\leq \lim_{t\to\infty}\sqrt{\mathbb{E}\big[\big(\frac{\bar{S}_{\alpha_2}-\mathbb{E}(\bar{S}_{\alpha_2})}{t}\big)^2\big]\mathbb{E}\big[\big(M_{rt}-\mathbb{E}(M_{rt})\big)^2\big]}\\ &= \lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{Var}\big(\bar{S}_{\alpha_2}\big)}{t}\frac{\mathrm{Var}\big(M_{rt}\big)}{t}}\\ &= 0\end{aligned} \tag{0.2}$$

Analogamente, obtemos que $\frac{\mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_1},M_0)}{t}\to 0$,$\frac{\mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_2},M_0)}{t}\to 0$ e $\frac{\mathrm{Cov}(\bar{S}_{\alpha_1},M_{rt})}{t}\to 0$. Da onde

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_{\alpha_2}-\bar{S}_{\alpha_1},M_{rt}-M_0\big)}{t}=0 \tag{0.3}$$

Logo, como S_{α_1} e S_{α_2} são processos de Poisson independentes, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(\bar{N}_\xi)}{t} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(\bar{S}_{\alpha_2}-\bar{S}_{\alpha_1})}{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(\bar{S}_{\alpha_2})}{t}+\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(\bar{S}_{\alpha_1})}{t}\\ &= \big(\lambda+\frac{1}{\rho}\big)r\end{aligned}$$

Utilizando a proposição anterior, obtemos relações analogas para $M_0(x,\beta)$ e $M_t(x,\beta)$. Procedendo como antes, obtemos que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(\bar{W}_\xi)}{t}=\rho+\frac{1}{\lambda}$$

Nos resta calcular o limite de $\frac{\mathrm{Cov}(\bar{N}_\xi,\bar{W}_\xi)}{t}$. Vale,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi,\bar{W}_\xi\big) &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi,\bar{S}_\xi+\bar{E}_\xi-\bar{N}_\xi\big)\\ &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi,\bar{S}_\xi\big)+\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi,\bar{E}_\xi\big)-\mathrm{Var}\big(\bar{N}_\xi\big)\\ &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi,\bar{S}_\xi\big)+\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\xi,\bar{W}_\xi\big)-\mathrm{Var}\big(\bar{N}_\xi\big)\end{aligned}$$

Vamos justificar esta última igualdade. Da demonstração da proposição anterior, obtemos que o processo multilinha $\alpha_t=(S_{\alpha_1},W_{\alpha_1},S_{\alpha_2},W_{\alpha_2},P,x,t)$ rotacionado em 90 graus no sentido horário gera um novo processo multilinha $\beta_{-x}=(E_{\alpha_2},N_{\alpha_2},E_{\alpha_1},N_{\alpha_1},D(D(P)),t,x)$, onde D(P) denota os duais de P. Daí temos que $\Phi(\beta_{-x})$ é um processo multiclasse (σ',η') e que valem as seguintes igualdades em Lei

$$S_{\sigma'}=W_\eta \qquad W_{\sigma'}=S_\eta \qquad S_{\eta'}=W_\sigma \qquad W_{\eta'}=S_\sigma$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi,\bar{E}_\xi\big) &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\sigma-\bar{N}_\eta,\bar{E}_\sigma-\bar{E}_\eta\big)\\ &= \mathrm{Cov}\big(\bar{W}_{\eta'}-\bar{W}_{\sigma'},\bar{S}_{\eta'}-\bar{S}_{\sigma'}\big)\\ &= \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\sigma-\bar{S}_\eta,\bar{W}_\sigma-\bar{W}_\eta\big)\\ &= \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\xi,\bar{W}_\xi\big)\end{aligned}$$

(Uma maneira mais direta seria escrever $\mathrm{Var}(\bar{N}_\xi + \bar{W}_\xi) = \mathrm{Var}(\bar{S}_\xi + \bar{E}_\xi)$ da onde obtemos $\mathrm{Cov}(\bar{N}_\xi, \bar{E}_\xi) = \mathrm{Cov}(\bar{S}_\xi, \bar{W}_\xi)$).

Agora, sejam $X_\sigma(t)$ e $X_\eta(t)$ as posições de duas partículas de segunda classe isoladas colocadas na origem de duas cópias independentes dos processos σ e η respectivamente. Temos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi, \bar{S}_\xi\big) &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\sigma - \bar{N}_\eta, \bar{S}_\sigma - \bar{S}_\eta\big)\\ &= \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\sigma, \bar{S}_\sigma\big) + \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\eta, \bar{S}_\eta\big) - \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\sigma, \bar{S}_\eta\big) - \mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\eta, \bar{S}_\sigma\big)\end{aligned}$$

Vale que,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\sigma, \bar{S}_\eta\big)}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_{\alpha_2}, \bar{S}_{\alpha_1} - (M_{rt} - M_0)\big)}{t}\\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_{\alpha_2}, \bar{S}_{\alpha_1}\big)}{t} - \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_{\alpha_2}, M_{rt} - M_0\big)}{t}\\ &= 0\end{aligned}$$

pois, $\bar{N}_{\alpha_2} = \mathcal{H}(\bar{S}_{\alpha_2}, \bar{W}_{\alpha_2}, P)$ é independente de $\bar{S}_{\alpha_1}$ e o segundo limite vai a zero pelo mesmo argumento utilizado em (0.2).

Vamos investigar a $\mathrm{Cov}(N_\eta, S_\sigma)$. Como feito em outras demonstrações do texto, acrescentamos ao processo S_σ um processo de poisson de taxa γ independente dos outros processos. Mantemos estes outros processos inalterados. Desta maneira obtemos um novo N_η, o qual denotaremos por N_η^γ, e como antes temos

$$\mathrm{Cov}(N_\eta, S_\sigma) = \lambda \partial\gamma|_{\gamma=0} \mathbb{E}\big(N_\eta^\gamma\big) = \lambda \lim_{\gamma\to 0} \frac{\mathbb{E}(N_\eta^\gamma - N_\eta)}{\gamma}$$

Quando γ é suficientemente pequeno temos que $S_\sigma^\gamma - S_\sigma = 1$ a menos de um erro de ordem γ^2. Considere a fila M/M/1 obtida pelo processo multilinha que gera o processo (σ, η). Se esta nova partícula cai num período de desocupação da fila, então o processo η permanece inalterado e $N_\eta^\gamma - N_\eta = 0$. Porém, se a nova partícula cai em um período de ocupação da fila surgem duas discrepâncias entre S_η^γ e S_η. A primeira na posição da nova partícula. Denotamos a posição

no tempo t desta partícula de segunda classe que inicialmente está num ponto z por $X_z(t)$. Além disso, todas as partículas de S_η a direita de $X_z(0)$ e que estão dentro daquele período de ocupação avançam para a posição onde estava a partícula imediatamente a sua esquerda. Como resultado, a última partícula deste periodo de ocupação se tranforma numa partícula de segunda classe e, assim, não pertence a S_η^γ. Isto gera a outra discrepância, cuja posição no tempo t denotaremos por $\bar{X}_{\bar{z}}(t)$, onde $\bar{z} > z$ é sua posição inicial. Acoplando o processo η_t com o processo modificado e observando que $\bar{z}$ é função determinística de z e da fila, obtemos

$$0 \leq N_\eta^\gamma - N_\eta \leq \gamma \int_0^x \mathbf{1}_{[X_z(t)\leq x]} \mathbf{1}_{[\bar{X}_{\bar{z}}(t)>x]} dz$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}(N_\eta, S_\sigma)}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda}{t} \lim_{\gamma\to 0} \frac{\mathbb{E}(N_\eta^\gamma - N_\eta)}{\gamma} \\
&\leq \lambda \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{\int_0^{rt} \mathbf{1}_{[X_z(t)\leq rt]} \mathbf{1}_{[\bar{X}_{\bar{z}}(t)>rt]} dz}{t}\Big) \\
&= \lambda \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{rt} \mathbb{P}\big(X_0(t) \leq rt - z, \bar{X}_0(t) > rt - \bar{z}\big) dz}{t}
\end{aligned}$$

Temos que a última integral é dominada por $\mathbb{E}(rt - X_0(t))_+$ cujo limite rescalonado por t é finito para todo r fixado. Como $\bar{z} - z$ é de ordem 1, pela Lei dos Grandes Números para X_0 e $\bar{X}_0$ obtemos que a probabilidade acima converge a zero para todo $r \neq \rho^2$. Lembrando que para $r = \rho^2$ o limite de $\frac{\mathbb{E}(rt - X_0(t))_+}{t}$ é zero, temos pelo teorema da convergência dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}(N_\eta, S_\sigma)}{t} &\leq \lambda \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{rt} \mathbb{P}\big(X_0(t) \leq rt - z, \bar{X}_0(t) > rt - \bar{z}\big) dz}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi, \bar{S}_\xi\big)}{t} = \lambda \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big(rt - X_\sigma(t)\big)_+}{t} + \frac{1}{\rho} \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big(rt - X_\eta(t)\big)_+}{t}$$

Resta calcular o limite para covariância de $\bar{S}_\xi$ e $\bar{W}_\xi$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\xi, \bar{W}_\xi\big) &= \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\sigma - \bar{S}_\eta, \bar{W}_\sigma - \bar{W}_\eta\big) \\
&= \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\sigma, \bar{W}_\sigma\big) + \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\eta, \bar{W}_\eta\big) - \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\sigma, \bar{W}_\eta\big) - \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\eta, \bar{W}_\sigma\big) \\
&= -\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\sigma, \bar{W}_\eta\big) - \mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\eta, \bar{W}_\sigma\big)
\end{aligned}$$

Pela proposição anterior e pelo argumento utilizado em (0.2),

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\xi, \bar{W}_\xi\big)}{t} &= -\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\sigma, \bar{W}_\eta\big)}{t} - \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\eta, \bar{W}_\sigma\big)}{t} \\
&= -\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_{\alpha_2}, \bar{W}_{\alpha_1}\big)}{t} - \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_{\alpha_1}, \bar{W}_{\alpha_2}\big)}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

esta última igualdade decorre da independência dos processos envolvidos. (De fato, W_{α_1} é função determinística da configuração de $\alpha_1(0)$ à esquerda da origem e dos pontos duais $\bar{P}$ à esquerda da origem. Mas estes últimos, por sua vez, só dependem de P e dos pontos de $\alpha_2(0)$ à esquerda da origem, sendo todos estes processos independentes de $\bar{S}_{\alpha_2}$. Lembrando que W_{α^2} e S_{α^1} são mutuamente independentes, temos que a configuração à esquerda e a configuração à direita de uma partícula de segunda classe são independentes no processo com medida μ.)

Concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi, \bar{W}_\xi\big)}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi, \bar{S}_\xi\big)}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{S}_\xi, \bar{W}_\xi\big)}{t} - \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\big(\bar{N}_\xi\big)}{t} \\
&= \lambda \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big(rt - X_\sigma(t)\big)_+}{t} + \frac{1}{\rho} \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big(rt - X_\eta(t)\big)_+}{t} - \big(\lambda + \frac{1}{\rho}\big) r
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\overline{\xi}(rt,t)}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\bar{N}_\xi)}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(\bar{W}_\xi)}{t} + 2\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Cov}\big(\bar{N}_\xi, \bar{W}_\xi\big)}{t} \\
&= \rho + \frac{1}{\lambda} - \big(\lambda + \frac{1}{\rho}\big)r + 2\lambda \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big(rt - X_\sigma(t)\big)_+}{t} + \frac{2}{\rho}\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\big(rt - X_\eta(t)\big)_+}{t} \\
&= \begin{cases} \big(\rho + \frac{1}{\lambda}\big) - \big(\lambda + \frac{1}{\rho}\big)r & \text{se } r \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ \big(\rho - \frac{1}{\lambda}\big) + \big(\lambda - \frac{1}{\rho}\big)r & \text{se } r \in (\frac{1}{\lambda^2}, \rho^2) \\ \big(\lambda + \frac{1}{\rho}\big)r - \big(\rho + \frac{1}{\lambda}\big) & \text{se } r \geq \rho^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Terminamos este capítulo mostrando uma modelagem para o mercado acionário baseada no TASEP multiclasse. Começamos dando uma descrição simplificada da dinâmica do mercado de ações.

O mercado de ações são os meios pelo qual empresas podem captar recursos para si através da emissão de ações, que são títulos que representam o capital social da empresa, ie, o valor da empresa. O principal constituinte do mercado acionário é a Bolsa de Valores. Nela, as ações das empresas são negociadas diariamente, de forma que o valor das ações de uma certa empresa varia ao longo do tempo. São muitas as variáveis que influenciam no preço de uma ação, de maneira que o comportamento do preço é quase aleatório. Um modelo conhecido que por vezes é utilizado para estudar o comportamento do preço de uma ação ao longo do tempo é o de passeios aleatórios independentes. Por meio de inferências na série de valores da ação no passado, foi constatado que este modelo consegue prever de maneira razoável o comportamento de longo prazo do valor de uma ação. Entretanto, se quisermos estudar o comportamento de duas ou mais ações ele se mostra inadequado, por considerar independente as trajetórias de cada uma.

É claro e amplamente aceito pelos analistas, o fato de que os preços das ações interagem e que o nível de dependência entre os papéis (ações) também varia de acordo com quais empresas estamos analisando. Por exemplo, papéis de empresas

do mesmo ramo possuem forte correlação enquanto papéis de empresas de ramos distintos são menos dependentes um do outro. Descrevemos o modelo a seguir.

O valor da ação de uma empresa i no tempo t é representado como uma função (que depende de i) da posição de uma partícula $P_i(t)$ do TASEP multiclasse ψ_t. Tomamos esta função de maneira que ela não dependa da posição inical $P_i(0)$. Aqui, o tempo $t \in \mathbb{R}$, mas poderíamos tomá-lo discreto de forma a representar um dia (ver Ferrari e Martin 2005). De acordo com algum critério, determina-se a classe de uma empresa, colocando empresas cujos papéis são altamente correlacionados na mesma classe. Empresas que apresentem históricos de boa valorização recebem classes menores, enquanto empresas que possuem históricos de desvalorização recebem classes maiores. Nenhuma empresa é colocada na primeira classe, mas colocamos uma densidade positiva de partículas de primeira classe. As densidades de cada classe devem ser estimadas (inferidas) segundo algum critério, de forma que melhor ajustem o comportamento de longo prazo dos papéis. Aqui tomamos o número de partículas infinito, mas isto não gera problemas na modelagem, desde que escolhamos indíces sucessivos (lembre-se que a enumeração corresponde a partículas sucessivas) e coloquemos as densidades positivas. Isto garante que, mesmo que após um certo tempo duas partículas de classes k e l (classes distintas) tenham uma depência fraca, cada uma delas interage com outras partículas de classes k e l. Se tomamos a configuração inicial com medida invariante, isto fica bem evidente.
Vamos dar algumas justificativas heurísticas do porque este modelo pode superar o modelo de passeis aleatórios independentes. Fixamos a configuração inicial com medida μ invariante.

1) Por meios númericos é possível ajustar as densidades das classes de forma que o comportamento de longo prazo das partículas do TASEP multiclasse seja aproximadamente o mesmo que do modelo de passeios independentes.

2) No modelo multiclasse consideramos não só a interação entre dois papéis, como o fazemos para a interação conjunta de todos os papéis. Alem disso, é possível simular o comportamento total da bolsa de valores de acordo com as

variáveis macroeconômicas que afetam todos os papéis. Estas variáveis seriam as que determinariam o processo P que influência as trajetórias de todas as partículas.

3) O modelo pode ser útil para estudar o comportamento dos preços no curto, ou pelo menos no médio prazo. Isto porque a determinação dos preços dos papéis são fortemente dependentes um dos outros no curto e médio prazo, o que também ocorre no modelo multiclasse.

Referências Bibliográficas

[1] Baccelli, F. e Bremaud,P. *Element of Queueing Theory* , 1ª ed, Springer, (1994)

[2] Balázs, M., Cator, E. e Seppalainen, T. *Cube root fluctuations for the corner growth model associated to the exclusion process*, Eletronic Journal of Probability vol **11**, 1094-1132, (2006)

[3] Cator, E. e Groeneboom, P. *Second class particles and cube root asymptotics for Hammersley's process*, Annals of Probability vol **34**, 1273-1295, (2006)

[4] Cator, E. e Groeneboom, P. *Hammersley's process with sources and sinks*, Annals of Probability vol **33**, 879-903, (2005)

[5] Coletti, C.F., Ferrari, P.A. e Pimentel, L.P.R. *The variance of the shock in the HAD process*, preprint, (2008)

[6] Ferrari, P.A. *Shocks in the Burgers equation and the asymmetric simple exclusion process*, Automata Networks, Dynamical Systems and Statistical Physics ,25-64, (1992)

[7] Ferrari, P.A. *Limit theorems for tagged particles*, Markov Process and Related Fields vol **2**, 17-40, (1996)

[8] Ferrari, P.A. e Fontes, L. R. G. *Current fluctuations for the asymmetric simple exclusion process*, Annals of Probability vol **22**, 820-832, (1994)

[9] Ferrari, P.A. e Martin, J.B. *Multiclass processes, dual points and M/M/1 queues*, Markov Process and Related Fields vol **12**, 175-201, (2006)

[10] Ferrari, P.A. e Martin, J.B. *Multiclass Hammersley-Aldous-Diaconis process and multiclass-customer queues*, Annales de l'Institut Henri Poincare vol **45**, 250-265, (2007)

[11] Ferrari, P.A. e Pimentel, L.P.R., *Competition interfaces and second class particles*, Annals of Probability vol **33**, 1235-1254, (2005)

[12] Polya, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* , 10ª ed, Interciência, (1978)

[13] Helbing, D. *Traffic and related self-driven many-particle systems*, Reviews od Modern Physics vol **73**, 1067, (2001)

[14] Mattos, M.A.C. e Souza, M.W.A. *Processo de Exclusão e Percolação Orientada*, Monografia de Iniciação Científica, IME-USP (2005)

[15] Rost, H., *Nonequilibrium behavior of a many particle process: Density profile and local equilibria.*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **58**, 41-53, (1981)