**Modelos mistos
para populações finitas
com erros de medida
endógenos e exógenos**

Germán Moreno Arenas

Tese apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: **Estatística**
Orientador: **Prof. Dr. Julio da Motta Singer**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e da
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colômbia

São Paulo, Setembro de 2009

**Modelos mistos
para populações finitas
com erros de medida
endógenos e exógenos**

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Germán Moreno Arenas
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Julio da Motta Singer (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Heleno Bolfarine - IME-USP.
- Prof. Dr. Mario de Castro - ICMC-USP.
- Prof. Dr. Marcel de Toledo Vieira - UFJF.
- Prof. Dr. Cristiano Ferraz - UFP.

Dedico este trabalho às mulheres de minha vida e coração:
María Luzdím (minha mãe), Alba Lucía (minha esposa),
Laura Catalina e Juliana Lucía (minhas filhas).

Ao Carlos Augusto e Vladimir *In Memoriam*,
meus sobrinhos que foram embora muito cedo.

Resumo

Consideramos a predição ótima de valores latentes com base em dados sujeitos a erros de medida endógenos e exógenos, obtidos a partir de uma amostra aleatória de uma população finita. Consideramos o modelo misto para populações finitas (MMPF) com erros de medida exógenos e endógenos usando o enfoque proposto por Stanek III, Singer & Lencina (2004) e Stanek III & Singer (2004), e calculamos o melhor preditor linear não enviesado (BLUP) do valor latente da i -ésima unidade selecionada na amostra. Quando as variâncias endógenas são heterocedásticas, o preditor obtido sob o MMPF é diferente do preditor obtido sob o modelo misto usual, pois a constante de encolhimento depende da média das variâncias individuais. Utilizamos simulação para comparar o preditor obtido sob o modelo misto usual (utilizado conforme a interpretação usual) com o preditor obtido sob o MMPF, mostrando que apesar do primeiro ser enviesado, ele geralmente apresenta erro quadrático médio (EQM) menor (ou ligeiramente maior) do que aquele obtido sob o MMPF. Adicionalmente, mostramos como utilizar dois pacotes de *software* estatístico (Proc MIXED do SAS e lme(nlme) do R), construídos sob o modelo misto usual, para ajustar corretamente modelos em situações com erros exógenos e endógenos, heterocedásticos ou homocedásticos.

Abstract

We consider optimal estimation and prediction of latent values based on data subject to endogenous and exogenous measurement errors, obtained via simple random sample from a finite population. We consider a finite population mixed model (FPMM) with endogenous and exogenous measurement errors proposed by Stanek III et al. (2004) and Stanek III & Singer (2004) and obtained the best linear unbiased predictor (BLUP) of the latent value of the i -th unit selected in the sample. When the endogenous variances are heteroscedastic, the predictor obtained under the FPMM is different than the predictor obtained with the usual mixed model, because the shrinkage constant depends on the average of the individual variances. We consider simulation studies to compare the predictor obtained under the usual mixed model (used according to the usual interpretation) with the predictor obtained under the FPMM, and show that the former is biased, but usually presents smaller (or slightly larger) mean squared error (MSE) than the predictor obtained under the FPMM. Additionally, we indicate how two commonly used statistical software packages (SAS's Proc MIXED and R's lme(nlme)) may be employed to fit mixed models in situations with heteroscedastic or homoscedastic exogenous and endogenous errors.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

À família Sobral Singer: Julio, Maria Lucia, Carolina e Alice, pela amizade e carinho oferecido às minhas três mulheres do coração: Alba Lucía, Laura Catalina e Juliana Lucía. Literalmente abriram as portas de sua casa e fizeram mais tranquila e agradável nossa permanência em São Paulo.

Ao meu orientador, mestre e amigo Julio da Motta Singer, pela grande oportunidade de ser seu orientando, pelo apoio, paciência, firmeza, tranquilidade e força transmitida durante a elaboração deste trabalho e pelos domingos de bicicleta, apesar do frio.

À minha esposa Alba Lucía, pela paciência, compreensão, ternura, experiências compartilhadas nesta grande cidade, pelo amor e apoio nos momentos mais difíceis desta etapa. Alba Lucía tu és a pessoa mais importante na minha vida.

Às irmãs Luna Sanchez, por acreditar em mim e confiar seu patrimônio no sucesso de minha comissão inicial de estudos de mestrado.

Aos professores do Departamento de Estatística do IME-USP, em especial aos professores com os quais tive o prazer de manter um contato maior: Julio, Antônio Carlos, Clélia Maria, Nelson, Heleno e Pedro.

Aos meus amigos Ricardo Monturiol e Luis Carlos Oñate, professores da Escuela de Matemáticas da Universidad Industrial de Santander UIS, por acreditar em mim e confiar seu patrimônio no sucesso de minha comissão de estudos de doutorado.

Ao meu amigo e novo irmão Alexandre Patriota, pela ajuda nas disciplinas, pelas discussões sobre meu trabalho, pelo interesse em aprender comigo algo sobre populações finitas, pela motivação e ajuda com minha tese. Certamente algumas partes deste trabalho também são dele; ah e também pelos constantes “vamos no forrô”.

Ao meu amigo e irmão negado Artur Lemonte, pelas sacanagens compartilhadas, pela motivação nos momentos em que estava mais triste e desanimado; ele sempre usou psicologia inversa, por exemplo, quando falava “por acaso tenho escrito help na minha testa”, “já terminou seu trabalho de iniciação científica” e outras expressões que não podem ser escritas neste documento.

Ao meu amigo Rafael Braz, pela ajuda nas disciplinas e porque precisei de paciência quando falava que era “bonitão”, sendo que é o patinho feio dos quatro de nossa turma.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação, especialmente aqueles que se desprenderam de seus computadores portáteis por uma semana para fazer o processo de simulação deste trabalho, tenho um carinho especial por aqueles que compartilharam disciplinas comigo, por suportar minhas piadas sem graça, pelos momentos de distração, pelos grandes churrascos que compartilhamos juntos, pelas pizzas e cervejas às sextas-feiras. Sempre os levarei no meu coração; minha casa na Colômbia é sua casa.

Talvez, eu possa servir como testemunho para muitos meninos de favela; sair do “Barrio la Transición” de Bucaramanga, Colômbia para a grande São Paulo, parecia impossível, mas graças ao apoio financeiro dos sistemas educacionais colombiano e brasileiro consegui concretizar este propósito de ser doutor. Por isso, dedico este trabalho a todos os habitantes de favela. Crianças, vocês podem acreditar, podem chegar bem longe, ainda que seja demorado.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelos mistos	10
2.1	Modelo misto usual	10
2.1.1	Notação e terminologia	10
2.1.2	BLUP e BLUE no modelo misto usual quando $k = 1$	11
2.1.3	BLUP e BLUE no modelo misto usual quando $k \neq 1$	13
2.2	Modelos mistos para populações finitas	13
2.2.1	Notação e terminologia	14
2.2.2	Modelos mistos para população finita com erros de medida endógenos e exógenos	15
2.2.3	Cálculo do BLUP usando as variáveis $\tilde{\mathbf{Y}}$	19
2.2.4	Modelo misto expandido para população finita com erros de medida endógenos e exógenos	23
2.2.5	Cálculo do BLUP usando as variáveis expandidas $\vec{\mathbf{Y}}$	24
2.2.6	Unicidade do BLUP de $Y_i = \mu + B_i$ usando as variáveis aleatórias $\tilde{\mathbf{Y}}$	29
2.3	Discussão	33
3	Comparação entre preditores obtidos sob os modelos mistos usual e para populações finitas	35
3.1	Exemplo	35
3.2	Simulação para $N = 3$ e $n = 2$	39
3.3	Simulação para outros valores de N e n	43

4 Aspectos computacionais	50
4.1 Modelos com erros de medida endógenos apenas	52
4.2 Modelos com erros de medida exógenos apenas	57
4.3 Modelos com presença simultânea de erros de medida endógenos e exógenos homocedásticos	60
4.4 Modelos com presença simultânea de erros de medida endógenos e exógenos heterocedásticos: análise do exemplo <i>Seasons Study</i>	64
4.5 Discussão	68
5 Conclusões	69
A Detalhes sob cálculo dos BLUP	71
A.1 Valor esperado e variância das variáveis aleatórias $\vec{Y}$	71
A.2 Valor esperado e variância das variáveis aleatórias $\tilde{Y}$	73
A.3 Obtenção do BLUP usando as variáveis $\vec{Y}$	74
A.4 Obtenção da variância de $\hat{P}$ usando as variáveis $\tilde{Y}$	76
B Dados do Nível de Colesterol	78
C Códigos R do Capítulo 3	83
C.1 R	83
C.2 Resultados da Simulação para $N = 3$ e $n = 2$	85
D Resultados da Simulação para outros valores de N e n	93
E Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal	98
F Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme	108
G Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica	118
H Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica	128

I	Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial	138
J	Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama	148
K	Códigos R do Capítulo 4	158
	Referências Bibliográficas	160

Lista de Tabelas

1.1	Exemplo de dados do <i>Seasons Study</i>	3
1.2	Valores latentes e variâncias do erro de medida endógeno.	5
1.3	Variâncias dos erros de medida exógenos induzidas por cada examinador em cada trimestre.	6
1.4	Variâncias dos erros de medida exógenos.	7
2.1	Matrizes de definição dos parâmetros ou variáveis de interesse.	25
3.1	Nível de colesterol, variâncias endógenas, constantes de encolhimento e de ponderação na população ($N = 3$).	36
3.2	Preditor obtido a partir dos modelos mistos usuais com variâncias hete- rocedásticas.	37
3.3	Preditor obtido a partir dos modelos mistos para populações finitas com variâncias heterocedásticas.	38
3.4	Número de populações (num total de 1000) em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$	40
3.5	Estatísticas descritivas para os quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Normal para $N = 3$ e $n = 2$	43
3.6	Número de populações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ de um total de 500 populações simuladas com valores latentes seguindo uma distribuição uniforme.	46
3.7	Valor máximo do quociente $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ com valores latentes seguindo uma distribuição uniforme.	47
4.1	Valores latentes e variâncias endógenas do nível de colesterol.	51

B.1	Dados do nível de colesterol.	79
B.2	Continuação: dados do nível de colesterol.	80
C.1	Estatísticas descritivas para os quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Uniforme para $N = 3$ e $n = 2$	85
C.2	Estatísticas descritivas para os quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta simétrica para $N = 3$ e $n = 2$.	91
C.3	Estatísticas descritivas para os quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta assimétrica para $N = 3$ e $n = 2$	91
C.4	Estatísticas descritivas para os quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Exponencial para $N = 3$ e $n = 2$. .	91
C.5	Estatísticas descritivas para os quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Gama para $N = 3$ e $n = 2$	92
D.1	Número de populações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ de um total de 500 populações simuladas com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à esquerda	94
D.2	Número de populações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ de um total de 500 populações simuladas com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à direita	95
D.3	Valor máximo do quociente $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à esquerda	96
D.4	Valor máximo do quociente $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à direita	97

Lista de Figuras

1.1	Dados das medições de colesterol do indivíduo número 13.	4
3.1	Boxplot para quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos para $N = 3$ e $n = 2$	41
3.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Uniforme para $N = 3$ e $n = 2$	42
3.3	Boxplot para o viés da média populacional quando usamos o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ para $N = 3$ e $n = 2$	44
B.1	Dados das medições de <i>Colesterol</i> dos indivíduos 1, 2, 3 e 4.	81
B.2	Dados das medições de <i>Colesterol</i> dos indivíduos 5, 6, 7 e 8.	81
B.3	Dados das medições de <i>Colesterol</i> dos indivíduos 9, 10, 11 e 12.	82
C.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Normal para $N = 3$ e $n = 2$	86
C.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta simétrica para $N = 3$ e $n = 2$	87
C.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta assimétrica para $N = 3$ e $n = 2$	88
C.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Exponencial para $N = 3$ e $n = 2$	89
C.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Gama para $N = 3$ e $n = 2$	90

E.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 50$ e $n = 5$	99
E.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 50$ e $n = 10$	100
E.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 50$ e $n = 25$	101
E.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 100$ e $n = 10$	102
E.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 100$ e $n = 30$	103
E.6	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 100$ e $n = 50$	104
E.7	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 300$ e $n = 30$	105
E.8	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 300$ e $n = 50$	106
E.9	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 300$ e $n = 100$	107
F.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 50$ e $n = 5$	109
F.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 50$ e $n = 10$	110
F.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 50$ e $n = 25$	111
F.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 100$ e $n = 10$	112
F.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 100$ e $n = 30$	113
F.6	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 100$ e $n = 50$	114
F.7	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 300$ e $n = 30$	115

F.8	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 300$ e $n = 50$	116
F.9	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 300$ e $n = 100$	117
G.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 50$ e $n = 5$	119
G.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 50$ e $n = 10$	120
G.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 50$ e $n = 25$	121
G.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 100$ e $n = 10$	122
G.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 100$ e $n = 30$	123
G.6	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 100$ e $n = 50$	124
G.7	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 300$ e $n = 30$	125
G.8	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 300$ e $n = 50$	126
G.9	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 300$ e $n = 100$	127
H.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 50$ e $n = 5$	129
H.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 50$ e $n = 10$	130
H.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 50$ e $n = 25$	131
H.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 100$ e $n = 10$	132

H.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 100$ e $n = 30$	133
H.6	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 100$ e $n = 50$	134
H.7	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 300$ e $n = 30$	135
H.8	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 300$ e $n = 50$	136
H.9	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 300$ e $n = 100$	137
I.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 50$ e $n = 5$	139
I.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 50$ e $n = 10$	140
I.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 50$ e $n = 25$	141
I.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 100$ e $n = 10$	142
I.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 100$ e $n = 30$	143
I.6	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 100$ e $n = 50$	144
I.7	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 300$ e $n = 30$	145
I.8	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 300$ e $n = 50$	146
I.9	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 300$ e $n = 100$	147
J.1	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 50$ e $n = 5$	149

J.2	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 50$ e $n = 10$	150
J.3	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 50$ e $n = 25$	151
J.4	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 100$ e $n = 10$	152
J.5	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 100$ e $n = 30$	153
J.6	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 100$ e $n = 50$	154
J.7	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 300$ e $n = 30$	155
J.8	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 300$ e $n = 50$	156
J.9	Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 300$ e $n = 100$	157

Capítulo 1

Introdução

Predizer o valor latente (valor esperado) de uma ou mais características de unidades amostrais em que são realizadas algumas medições é um dos objetivos da análise estatística. Algumas vezes, essas medições são afetadas por diferentes fontes de variabilidade, gerando erros de medida [Cochran (1977)], também chamados de erros de observação por Sukhatme (1984). Erros de medida podem ser provenientes de duas fontes. A primeira está associada à variabilidade natural da resposta em torno de um valor fixo (valor latente), chamada de variabilidade inerente por Buonaccorsi (2006), ou erro de resposta por Särndal, Swensson & Wretman (1992). A segunda está associada às condições de medição; e corresponde à variabilidade das medidas em torno do valor latente, gerada, por exemplo, pelos instrumentos de medição ou pela intervenção de examinadores. Para diferenciar claramente os dois tipos de erros de medida, chamaremos o primeiro de erro de medida endógeno e o segundo de erro de medida exógeno.

Erros de medida endógenos podem acontecer mesmo que a medição seja feita com absoluta precisão (erro de medida exógeno nulo). A despesa familiar mensal com alimentos, por exemplo, pode variar de mês a mês em torno de um valor latente, mas pode ser medida sem erro em cada mês. A medição da altura de um indivíduo num determinado instante por diferentes observadores pode servir como exemplo de uma situação onde existe apenas erro de medida exógeno. Medidas do nível de colesterol, por outro lado, variam com o tempo e, além disso, dependem da precisão dos instrumentos e dos produtos químicos usados para produzi-las e, portanto, podem estar sujeitas aos dois tipos de erros simultaneamente. Existem diferentes estratégias para diminuir esses tipos de erros. Em exames médicos, por

exemplo, protocolos de medição são especificados para diminuir a variabilidade endógena e, além disso, sempre se procura utilizar instrumentos mais precisos e produtos químicos que produzem menores erros de medida exógenos. Nosso interesse é propor métodos estatísticos adequados para analisar dados em que os dois tipos de erros estão presentes.

Como exemplo, podemos considerar um subconjunto de indivíduos da pesquisa *Seasons Study* [Merriam, Ockene, Hebert, Rosal & Matthews (1999)], cujo principal objetivo era avaliar padrões sazonais dos níveis de vários tipos de gorduras no corpo humano, como o colesterol total; além disso, pretendia-se estabelecer qual é o impacto da dieta alimentícia, do peso, da exercitação e exposição à luz solar na variação do nível de gorduras. A resposta (nível de colesterol para este trabalho) é obtida mediante uma análise de sangue, preferivelmente depois de 12 horas de jejum para poder reduzir o efeito imediato produzido pelos alimentos. Nesse estudo, o nível de colesterol em cada indivíduo foi medido pelo mesmo examinador três vezes num período curto de tempo (com no máximo duas semanas de diferença). As três medidas foram repetidas quatro vezes em diferentes trimestres, sem ter necessariamente o mesmo examinador do período anterior. Reproduzimos uma parte dos dados na Tabela 1.1. Nas Tabelas B.1 e B.2 do Apêndice B, apresentamos os dados completos para $N = 13$ indivíduos, que para efeito ilustrativo, representarão a população alvo neste trabalho.

Se denotamos o nível latente de colesterol para o indivíduo s no dia d por y_{sd} , a r -ésima medição do nível de colesterol no sangue do indivíduo s no dia d pode ser representada por $Y_{sdr} = y_{sd} + \epsilon_{sdr}$. Se assumimos que ϵ_{sdr} é uma variável aleatória com valor esperado igual a zero e variância σ_{sdr}^2 , correspondente à soma da variabilidade natural do colesterol com a variabilidade do erro de medida induzido pela condição de medição (examinador, por exemplo), temos que y_{sd} é o valor esperado do nível de colesterol no dia d para o indivíduo s .

O nível latente de colesterol para o indivíduo s , denotado por y_s , é o valor esperado num determinado período de tempo fixo,¹ $s = 1, \dots, N$. A média populacional dos níveis latentes de colesterol individuais é $\mu = N^{-1} \sum_{s=1}^N y_s$ e sua variância populacional é $\gamma^2 = (N - 1)^{-1} \sum_{s=1}^N (y_s - \mu)^2$.

Suponhamos que a variabilidade das três medidas de cada trimestre seja devida ao erro de medida (exógeno) introduzido pelo examinador. Se o indivíduo s foi medido no

¹Podemos definir diferentes períodos de tempo, por exemplo, 365 dias, 12 meses ou 4 trimestres. Por simplicidade, supomos aqui que o valor latente é o valor esperado do nível de colesterol durante 4 trimestres.

Tabela 1.1: Exemplo de dados do *Seasons Study*.

Nome	Data	Examinador	Colesterol	Trimestre
1	13/05/1996	CS	180,6	1
1	15/05/1996	CS	206,9	1
1	17/05/1996	CS	234,8	1
1	12/08/1996	CS	171,3	2
1	16/08/1996	CS	174,3	2
1	20/08/1996	CS	185,7	2
1	09/11/1996	SU	288,0	3
1	13/11/1996	SU	342,9	3
1	17/11/1996	SU	278,4	3
1	13/02/1997	SU	276,2	4
1	21/02/1997	SU	305,3	4
1	23/02/1997	SU	260,5	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	01/03/1996	SU	166,1	1
13	04/03/1996	SU	118,1	1
13	09/03/1996	SU	142,0	1
13	20/05/1996	KL	110,9	2
13	21/05/1996	KL	115,7	2
13	24/05/1996	KL	99,2	2
13	26/08/1996	KL	182,0	3
13	28/08/1996	KL	104,5	3
13	29/08/1996	KL	118,5	3
13	22/11/1996	SU	107,1	4
13	24/11/1996	SU	192,9	4
13	27/11/1996	SU	89,1	4

trimestre q pelo i -ésimo examinador, representamos a resposta observada por $y_{sq} + \tilde{W}_i$, em que y_{sq} é o nível médio de colesterol para o indivíduo s no trimestre q e $\tilde{W}_i$ representa o erro de medida exógeno, com valor esperado igual a zero e variância $\tilde{\sigma}_i^2$. Para nosso

exemplo podemos escrever a resposta correspondente como

$$Y_{sqi} = y_{sq} + \tilde{W}_i = y_s + W_{sq} + \tilde{W}_i = \mu + \beta_s + W_{sq} + \tilde{W}_i, \quad (1.1)$$

em que $\beta_s = y_s - \mu$ e W_{sq} representa o erro de medida endógeno, que assumimos ter valor esperado igual a zero e variância σ_s^2 .

Na Figura 1.1 apresentamos os dados do indivíduo 13; ele foi medido nos trimestres 1 e 4 pelo examinador *SU* e nos trimestres 2 e 3 pelo examinador *KL*. Os dados estão representados por “o”. O símbolo “+” representa o nível latente de colesterol nesse trimestre. Nas Figuras B.1, B.2 e B.3 do Apêndice B estão representados os dados correspondentes aos outros indivíduos da população alvo.²

Figura 1.1: Dados das medições de colesterol do indivíduo número 13.

As medidas feitas nos quatro primeiros trimestres contêm a informação para obtermos as variâncias γ^2 , σ_s^2 , $s = 1, \dots, 13$ e $\tilde{\sigma}_i^2$, $i = 1, 2, 3$. Na Tabela 1.2 apresentamos os valores latentes trimestrais, y_{sq} , $s = 1, \dots, 13$, $q = 1, 2, 3, 4$ (sendo a média das três medidas em cada trimestre) e as variâncias endógenas para cada indivíduo, $\sigma_s^2 = \sum_{q=1}^4 (y_{sq} - y_s)^2 / 3$.

²Para efeito de ilustração, assumimos que os valores representados por “+” são os verdadeiros valores latentes.

Tabela 1.2: Valores latentes e variâncias do erro de medida endógeno.

Indivíduo	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4	Variância endógena σ_s^2
s	y_{s1}	y_{s2}	y_{s3}	y_{s4}	
1	207,4	177,1	303,1	280,7	3545,1
2	301,6	235,9	230,6	284,8	1250,1
3	112,1	163,4	130,3	212,2	1932,9
4	251,8	183,4	302,5	192,9	3083,2
5	253,1	189,2	168,7	197,8	1299,4
6	260,8	264,0	327,9	268,8	1013,8
7	282,7	319,7	206,8	264,5	2216,9
8	201,5	257,4	171,6	163,2	1815,2
9	212,5	280,2	374,2	346,5	5222,3
10	268,8	212,2	237,4	232,5	548,9
11	159,3	93,2	165,9	148,7	1099,4
12	189,4	228,2	244,1	199,4	639,1
13	142,1	108,6	135	129,7	207,8

Na Tabela 1.3 apresentamos as variâncias dos erros de medida exógenos (induzidos pelo examinador) em cada trimestre. As médias dessas variâncias por examinador correspondem às variâncias dos erros de medida exógenos e estão apresentadas na Tabela 1.4.

Para efeitos de ilustração, tomamos esses valores como as verdadeiras variâncias γ^2 , σ_s^2 e $\tilde{\sigma}_i^2$. Nosso interesse está centrado nos seguintes problemas:

- i) estimar o nível latente de colesterol para cada indivíduo de uma amostra selecionada aleatoriamente da população sob investigação;
- ii) estimar o nível latente de colesterol para os indivíduos que não foram selecionados na amostra;
- iii) estimar outras combinações lineares dos níveis latentes de colesterol como a média ou total populacional.

Em geral, centros médicos (clínicas, hospitais, laboratórios, etc.) oferecem somente

Tabela 1.3: Variâncias dos erros de medida exógenos induzidas por cada examinador em cada trimestre.

Indivíduo	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
1	734,6 CS	57,7 CS	1211,1 SU	516,7 SU
2	353,0 CS	650,3 KL	484,8 KL	1220,7 SU
3	3313,9 KL	457,3 KL	415,4 SU	2151,7 CS
4	992,6 CS	3012,4 CS	8527,0 KL	2906,8 CS
5	5185,2 KL	1220,1 KL	169,9 SU	374,8 CS
6	238,0 CS	1550,4 CS	470,1 SU	833,7 SU
7	412,7 CS	934,8 CS	1071,1 CS	995,7 SU
8	3869,1 SU	1885,9 KL	1596,2 SU	250,9 SU
9	241,0 KL	1668,1 KL	2009,1 SU	9870,0 SU
10	1192,9 KL	1246,8 SU	132,1 CS	474,5 CS
11	552,9 SU	65,9 KL	93,3 SU	1073,9 SU
12	1044,2 SU	3346,6 KL	3004,6 SU	1410,7 SU
13	576,0 SU	72,0 KL	1705,8 KL	3076,7 SU

Tabela 1.4: Variâncias dos erros de medida exógenos.

Examinador	Variância do erro de medida exógeno
CS	$\tilde{\sigma}_{CS}^2 = 1012,8$
SU	$\tilde{\sigma}_{SU}^2 = 1623,3$
KL	$\tilde{\sigma}_{KL}^2 = 2001,1$

a leitura individual, Y_{sdr} , como estimador do nível latente de colesterol do indivíduo. Stanek III, Well & Ockene (1999) compararam o comportamento do melhor estimador linear não enviesado (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE) e o melhor preditor linear não enviesado (Best Linear Unbiased Predictor, BLUP) do nível latente de colesterol dos indivíduos selecionados na amostra em diferentes cenários de simulação e mostraram empiricamente que em certos casos é possível incluir informação adicional de outros indivíduos com o intuito de melhorar a estimação. Utilizando a notação semelhante desses autores, a resposta do indivíduo medido no trimestre q pelo i -ésimo examinador é expressa como

$$Y_{qi} = Y_i + W_{qi} + \tilde{W}_i = \mu + B_i + W_{qi} + \tilde{W}_i, \quad (1.2)$$

em que Y_i é o valor latente do indivíduo medido pelo i -ésimo examinador, W_{qi} representa o erro de medida endógeno do indivíduo medido pelo i -ésimo examinador, e $\tilde{W}_i$ representa o erro de medida exógeno associado ao i -ésimo examinador. O modelo (1.2) é diferente do modelo (1.1), dado que substituímos o índice s que identifica o indivíduo pelo índice i que identifica o examinador e β_s por B_i . No modelo (1.1), β_s é um efeito fixo e no modelo (1.2) B_i é um efeito aleatório porque não conhecemos qual unidade amostral é selecionada para ser entrevistada pelo i -ésimo examinador. Formalmente, $B_i = \sum_{s=1}^N U_{is}\beta_s$, em que U_{is} são variáveis aleatórias indicadoras, que tomam o valor 1 se o indivíduo s é selecionado pelo i -ésimo examinador e zero caso contrário.

Os métodos usuais para estimar valores latentes são baseados em modelos lineares mistos (ver Goldberger (1962), Robinson (1991), McCulloch & Searle (2001), entre outros). Para usar essa metodologia, usamos o modelo (1.2) na forma $Y_{qi} = \mu + B_i + E_{qi}$, em que $E_{qi} = W_{qi} + \tilde{W}_i$ agrupa os erros de medida, e nesse caso não é possível separar e identificar os dois tipos de erros (exógeno e endógeno).

Stanek III et al. (2004) e Stanek III & Singer (2004) definiram modelos mistos para populações finitas (MMPF) que permitem distinguir as duas fontes de variabilidade, mas

não as incluíram simultaneamente. Esses autores mostraram que o melhor preditor linear não enviesado (BLUP) para o valor latente de uma unidade amostral observada consiste da média amostral mais o desvio entre o valor observado na unidade amostral e a média amostral multiplicado por uma constante de encolhimento (*shrinkage constant*). Quando o erro de medida é associado exclusivamente às condições de medição (erros exógenos), a constante de encolhimento depende das variâncias associadas com cada posição amostral (*e.g.*, com cada examinador). Quando o erro de medida é associado à variabilidade endógena, a constante de encolhimento depende da média populacional das variâncias endógenas das unidades. Nosso alvo é desenvolver um preditor do valor latente individual que leve em conta sua própria variabilidade endógena. Nesse contexto, nossos objetivos específicos são:

1. Descrever a limitação dos modelos mistos usuais quando as respostas incluem erros de medida endógenos e exógenos e apresentar uma solução usando o modelo misto para populações finitas (MMPF) proposto por Stanek III & Singer (2004).
2. No contexto de amostragem aleatória simples, obter estimadores e/ou preditores para combinações lineares de variáveis aleatórias que definem modelos com erros de medida exógenos e endógenos e discutir suas propriedades.

No Capítulo 2 descrevemos o modelo misto usual e apresentamos a metodologia para a obtenção de preditores ou estimadores ótimos em função de diferentes estruturas de covariância adotadas. Também definimos o modelo misto para populações finitas com presença simultânea de erros de medida endógenos e exógenos, desenvolvemos estimadores/preditores usando uma metodologia equivalente àquela dos modelos mistos usuais e mostramos sua relação com os preditores obtidos a partir de modelos mistos usuais com diferentes estruturas de covariância. Para obter um preditor do valor latente que leve em conta a variabilidade endógena individual, consideramos o modelo misto expandido para populações finitas apresentado por Stanek III et al. (2004), em que tanto os indivíduos quanto sua posição na amostra são representadas. Expressamos os parâmetros ou variáveis aleatórias de interesse como combinações lineares destas novas variáveis, e com base nesse modelo, cujas suposições envolvem apenas aquelas referentes a um processo de amostragem aleatória simples e os primeiros e segundos momentos da distribuição dos erros de medida, obtemos um preditor ótimo para o valor latente de unidades amostrais selecionadas da

população finita e mostramos suas limitações. No Capítulo 3 apresentamos a comparação do BLUP obtido a partir do modelo misto para população finita com o BLUP obtido a partir do modelo misto usual. Mostramos que mesmo não sendo BLUP, o preditor obtido a partir do modelo misto usual apresenta erro quadrático médio menor do que o BLUP baseado no MMPF.

No Capítulo 4 finalizamos o trabalho mostrando como utilizar dois pacotes de *software* estatístico (Proc MIXED do SAS³ e lme(nlme) do R⁴), que são construídos sob o modelo misto usual, para ajustar corretamente modelos em situações com erros exógenos ou endógenos heterocedásticos e homocedásticos, erros exógenos e endógenos heterocedásticos e homocedásticos, erros exógenos heterocedásticos e endógenos homocedásticos, erros exógenos homocedásticos e endógenos heterocedásticos. Também apresentamos uma análise dos dados do exemplo *Seasons Study* e descrevemos alguns resultados e propriedades do preditor obtido a partir do MMPF.

³www.sas.com

⁴www.r-project.org

Capítulo 2

Modelos mistos

2.1 Modelo misto usual

Os modelos lineares mistos têm alta relevância em diversas aplicações estatísticas, não só porque constituem alternativas flexíveis para incluir simultaneamente tanto efeitos fixos quanto efeitos aleatórios, mas também porque permitem analisar dados com diferentes estruturas de dependência, dados não balanceados¹ e dados com distribuições diferentes. Diversas aplicações dos modelos mistos podem ser encontradas em Robinson (1991), Verbeke & Molenberghs (2000), Diggle, Heagerty, Liang & Zeger (2002), Demidenko (2004) e Fitzmaurice, Davidian, Verbeke & Molenberghs (2008), entre outros.

2.1.1 Notação e terminologia

Consideramos uma população (universo ou população alvo) finita ou infinita, definida como o conjunto de unidades sobre o qual desejamos obter informação. Uma amostra é um subconjunto de elementos (unidades amostrais) retirados da população cujas características serão medidas e utilizadas para fazer inferências.

Seja Y_{ik} uma variável aleatória correspondente à k -ésima medição da resposta de interesse para a i -ésima unidade amostral, $i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, n_i$. O vetor de variáveis aleatórias associadas à i -ésima unidade amostral é $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i})^\top$. O modelo misto usual para k -ésima medida da i -ésima unidade selecionada na amostra é

$$Y_{ik} = \mu + B_i + E_{ik}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n_i, \quad (2.1)$$

¹Quando as unidades amostrais não são medidas necessariamente o mesmo número de vezes.

em que μ é a resposta média populacional, B_i representa o efeito aleatório correspondente à i -ésima unidade selecionada, ou seja, é o desvio entre o valor latente da unidade selecionada e μ , e E_{ik} é o erro de medida. Se W_{ik} representa o erro de medida endógeno e $\tilde{W}_{ik}$ o erro de medida exógeno, então $E_{ik} = W_{ik} + \tilde{W}_{ik}$ e esses erros estarão confundidos. Se assumimos que não existe erro exógeno, então E_{ik} representa o erro de medida endógeno. Por outro lado, se assumimos que não existe erro de medida endógeno, então E_{ik} representa o erro de medida exógeno.

Supondo que só temos uma medição para cada unidade amostral ($k = 1$ para todo i), o índice k pode ser eliminado. Em forma matricial podemos escrever o modelo (2.1) como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{1}_n \mu + \mathbf{I}_n \mathbf{B} + \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{1}_n$ é um vetor n -dimensional com todos os elementos iguais a 1, $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n , $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)^\top$, com $\mathbb{E}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ e $\mathbb{V}(\mathbf{B}) = \gamma^2 \mathbf{I}_n$, e $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n)^\top$, com $\mathbb{E}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ e $\mathbb{V}(\mathbf{E}) = \Sigma$.

2.1.2 BLUP e BLUE no modelo misto usual quando $k = 1$

Seguindo a notação de Robinson (1991) os modelos mistos podem ser expressos na forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Z}\mathbf{B} + \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{Y}$ é um vetor de n variáveis aleatórias observáveis, $\boldsymbol{\alpha}$ é um vetor de p parâmetros desconhecidos representando os efeitos fixos, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ são matrizes conhecidas, e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ são vetores q e n -dimensionais, respectivamente, de variáveis aleatórias não observáveis tais que $\mathbb{E}(\mathbf{B}) = \mathbb{E}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$,

$$\mathbb{V} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

com $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Sigma}$ indicando matrizes definidas positivas conhecidas. Para este modelo $\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Z}\mathbf{\Gamma}\mathbf{Z}^\top + \mathbf{\Sigma}$. Note que o modelo (2.2) pode ser expresso como (2.3) com $\mathbf{X} = \mathbf{1}_n$, $\boldsymbol{\alpha} = \mu$ e $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_n$. Consequentemente, $\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{1}_n \mu$ e $\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \gamma^2 \mathbf{I}_n + \Sigma$.

O melhor preditor linear não enviesado (BLUP) da variável aleatória $\mathbf{B}$ deve ser uma combinação linear dos elementos de $\mathbf{Y}$, não enviesado e com o menor erro quadrático médio na classe de estimadores lineares não enviesados. Quando o alvo é o vetor dos efeitos fixos $\boldsymbol{\alpha}$, ele é o melhor estimador linear não enviesado (BLUE).

Seguindo o desenvolvimento de Goldberger (1962), o BLUE de α e o BLUP de B são, respectivamente, as soluções $\hat{\alpha}$ e $\hat{B}$ para as seguintes equações simultâneas:

$$\begin{aligned} X^\top \Sigma^{-1} X \hat{\alpha} + X^\top \Sigma^{-1} Z \hat{B} &= X^\top \Sigma^{-1} Y, \\ Z^\top \Sigma^{-1} X \hat{\alpha} + (Z^\top \Sigma^{-1} Z + \Gamma^{-1}) \hat{B} &= Z^\top \Sigma^{-1} Y, \end{aligned} \quad (2.5)$$

que podem ser expressas como

$$\begin{pmatrix} X^\top \Sigma^{-1} X & X^\top \Sigma^{-1} Z \\ Z^\top \Sigma^{-1} X & Z^\top \Sigma^{-1} Z + \Gamma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^\top \Sigma^{-1} Y \\ Z^\top \Sigma^{-1} Y \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Usando o mesmo processo apresentado em Robinson (1991), podemos mostrar que o BLUP de qualquer combinação linear da forma $k_1^\top \alpha + k_2^\top B$, com k_1 e k_2 denotando vetores de constantes conhecidas, é $k_1^\top \hat{\alpha} + k_2^\top \hat{B}$, em que $\hat{\alpha}$ e $\hat{B}$ são as soluções do sistema de equações (2.6). Por exemplo, suponha que desejamos prever

$$Q = x_0^\top \alpha + z_0^\top B, \quad (2.7)$$

em que $x_0^\top$ e $z_0^\top$ são vetores de constantes conhecidas. Então, o BLUP de Q deve

- ser linear na amostra, i.e., da forma $P = c^\top Y$,
- ser não enviesado, i.e., $c^\top X \alpha = x_0^\top \alpha$,
- ter mínimo erro quadrático médio, i.e., deve ser tal que minimize

$$\mathbb{V}(P - Q) = c^\top \Omega c - 2c^\top Z \Sigma c + z_0^\top \Sigma z_0, \quad (2.8)$$

em que $\Omega = \mathbb{V}(Y)$.

Admitindo a existência de todas as matrizes inversas envolvidas (supostamente conhecidas), o resultado da minimização da variância corresponde a

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= (X^\top \Omega^{-1} X)^{-1} X^\top \Omega^{-1} Y, \\ \hat{B} &= \Gamma Z^\top \Omega^{-1} (Y - X \hat{\alpha}), \\ \hat{Q} &= x_0^\top \hat{\alpha} + z_0^\top \hat{B}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dado o modelo (2.2), suponhamos, por exemplo, que desejamos prever o nível de colesterol para a i -ésima unidade amostral (i.e., para a unidade amostral selecionada na

i -ésima posição na amostra), ou seja com $\mathbf{x}_0 = 1$ e $\mathbf{z}_0 = \mathbf{e}_i$, em que $\mathbf{e}_i$ é um vetor n -dimensional com i -ésimo elemento igual a 1 e todos os outros iguais a zero.

Se $\mathbf{\Omega} = \gamma^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{\Sigma}$ e $\mathbf{\Sigma} = \bigoplus_{i=1}^n \sigma_i^2$, o preditor resultante de Q_i é

$$\hat{Q}_i = \hat{\mu} + k_i(Y_i - \hat{\mu}), \quad (2.10)$$

em que $\hat{\mu} = \hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n w_i Y_i / \sum_{i=1}^n w_i$, $w_i = (\gamma^2 + \sigma_i^2)^{-1}$ e $k_i = \gamma^2 / (\gamma^2 + \sigma_i^2)$. Quando a estrutura de covariância proposta é $\mathbf{\Omega} = \gamma^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{\Sigma}$ e $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$, obtemos

$$\hat{Q}_i = \bar{Y} + k(Y_i - \bar{Y}), \quad (2.11)$$

em que $\hat{\mu} = \hat{\alpha} = \bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i / n$ e $k = \gamma^2 / (\gamma^2 + \sigma^2)$.

2.1.3 BLUP e BLUE no modelo misto usual quando $k \neq 1$

Para medições desbalanceadas, *i.e.* com n_i medições na i -ésima unidade amostral, $i = 1, \dots, n$, com $\mathbf{\Gamma} = \gamma^2 \mathbf{I}_n$, $\mathbf{\Omega} = \gamma^2 \bigoplus_{i=1}^n (\mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^\top) + \bigoplus_{i=1}^n \sigma_i^2 \mathbf{I}_{n_i}$, o preditor resultante é

$$\hat{Q}_i = \hat{\mu} + k_i(\bar{Y}_i - \hat{\mu}), \quad \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} / n_i, \quad (2.12)$$

em que $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n w_i \bar{Y}_i / \sum_{i=1}^n w_i$, $w_i = (\gamma^2 + \sigma_i^2 / n_i)^{-1}$ e $k_i = \gamma^2 / (\gamma^2 + \sigma_i^2 / n_i)$. Quando a estrutura de covariância é $\mathbf{\Omega} = \gamma^2 \bigoplus_{i=1}^n (\mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^\top) + \sigma^2 \mathbf{I}_r$, em que $M = \sum_{i=1}^n n_i$, obtemos

$$\hat{Q}_i = \bar{Y} + k w_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}), \quad (2.13)$$

em que $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n w_i \bar{Y}_i / \sum_{i=1}^n w_i$, $w_i = (1 + 1/n_i)^{-1}$ e $k = \gamma^2 / (\gamma^2 + \sigma^2)$. Assim, os resultados da Seção 2.1.2 são caso particular quando $n_i = 1$, $\forall i$.

Na próxima seção mostramos a relação que essas estruturas de covariância têm com os modelos mistos para populações finitas.

2.2 Modelos mistos para populações finitas

Nos modelos mistos usuais é possível calcular o BLUE de μ e o BLUP de $\mu + B_i$, o valor latente da i -ésima unidade selecionada na amostra. Sob esse enfoque, as unidades não são identificáveis, e conseqüentemente não é possível estimar o valor y_s , isto é, o valor latente da unidade com etiqueta s na população. Além disso, as estruturas de covariância

não estão relacionadas com os erros de medida e sua escolha, em geral, não leva em conta nem características físicas do processo de seleção das unidades amostrais nem aspectos inerentes ao processo de medida.

Para contornar essa deficiência, usamos a proposta de Stanek III et al. (2004) para representar simultaneamente no modelo as etiquetas das unidades populacionais e suas posições na amostra, adicionando também os erros de medida endógeno e exógeno. Para obtenção de preditores e estimadores usamos a estratégia básica de Scott & Smith (1969), Royall (1970), Bolfarine & Zacks (1992) e Stanek III et al. (2004), que consiste em separar as variáveis aleatórias em dois conjuntos, um representando a amostra e outro representando as unidades não amostradas, que chamaremos de remanescentes. Com base nessa separação, escrevemos o preditor como combinação linear das variáveis aleatórias amostrais, usamos os métodos padrão de otimização para obter o BLUP de $\mu + B_i$ e o BLUE de y_s e mostramos sua relação com as estruturas de covariância adotadas nos modelos (2.10) e (2.11).

2.2.1 Notação e terminologia

Definimos uma população finita como uma coleção $\mathfrak{S}$ de N elementos distintos (unidades) para as quais algumas características de interesse podem ser observadas. Consideramos que as N unidades da população finita são identificadas por etiquetas $s = 1, \dots, N$. Vamos associar à unidade s , o elemento y_s do vetor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^\top$, além disso, assumimos que ao selecionar a unidade s , observamos também o valor da variável de interesse, y_s , como definido no Capítulo 1. Definimos a amostra $\mathfrak{s}$ como um subconjunto ordenado de $\mathfrak{S}$. O número total de unidades amostrais em $\mathfrak{s}$ será chamado de tamanho amostral e denotado por n . As n posições na amostra serão identificadas por $i = 1, \dots, n$.

Para ilustrar estas definições, consideremos uma população $\mathfrak{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ composta por 5 unidades da qual selecionamos uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 3$ sem reposição. Uma amostra em que as unidades com etiquetas 1, 4 e 5 foram selecionadas, respectivamente, na terceira, segunda e primeira posição na amostra, pode ser representada como $\mathfrak{s} = (5, 4, 1)^\top$. Por exemplo, seja $\mathbf{y} = (23, 12, 17, 16, 20)^\top$ os valores observáveis da característica de interesse, então para a amostra $\mathfrak{s} = (5, 4, 1)^\top$ a informação

amostral é

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 4 & 16 \\ 1 & 23 \end{pmatrix}; \quad (2.14)$$

que pode ser obtido pelo produto das matrizes

$$\mathfrak{I}_{(n \times 2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 2 & 12 \\ 3 & 17 \\ 4 & 16 \\ 5 & 20 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_{(n \times N)} \mathbf{Z}_{(N \times 2)}, \quad (2.15)$$

com

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 2 & 12 \\ 3 & 17 \\ 4 & 16 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{u}$ é uma realização da matriz aleatória

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \end{pmatrix}_{(n \times N)}, \quad (2.16)$$

com U_{is} igual a 1 quando a unidade s está na posição i da amostra, e zero caso contrário. Com essa idéia, descrevemos a seguir o modelo de permutação aleatória e o modelo misto para populações finitas.

2.2.2 Modelos mistos para população finita com erros de medida endógenos e exógenos

Consideramos permutações aleatórias da população finita e atribuímos a cada permutação a mesma probabilidade. Denotamos por $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)^\top$, o vetor aleatório dos valores latentes permutados. Associamos os valores $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^\top$ e $\mathbf{Y}$ incluindo variáveis aleatórias indicadoras, U_{is} , que tomam o valor 1 com probabilidade $1/N$ se a

unidade s é selecionada na posição i da permutação, e zero caso contrário. Então o modelo de permutação aleatória é definido como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{y}, \text{ com } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \dots & U_{NN} \end{pmatrix}_{(N \times N)} \quad \text{i.e., } Y_i = \sum_{s=1}^N U_{is}y_s. \quad (2.17)$$

Note que a matriz $\mathbf{U}$ contém as primeiras n linhas da matriz $\mathbf{U}$, representando exclusivamente as unidades selecionadas e a ordem de seleção, já a matriz $\mathbf{U}$ contém a informação de todas as unidades permutadas.

Usando combinações lineares da forma $\mathbf{L}^\top \mathbf{Y}$, podemos definir diferentes parâmetros populacionais ou variáveis aleatórias de interesse. Por exemplo,

- i. se $\mathbf{L} = N^{-1}\mathbf{1}_N$, temos $\mathbf{L}^\top \mathbf{Y} = N^{-1} \sum_{i=1}^N Y_i = \mu$, a média populacional;
- ii. se $\mathbf{L} = \mathbf{1}_N$, temos $\mathbf{L}^\top \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^N Y_i = \tau$, o total populacional;
- iii. se $\mathbf{L} = \mathbf{e}_i$, com $\mathbf{e}_i$ denotando um vetor N -dimensional com i -ésimo elemento igual a 1 e todos os outros iguais a zero, temos $\mathbf{L}^\top \mathbf{Y} = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{Y} = Y_i = \mu + B_i$, a variável aleatória que representa o valor latente da unidade na i -ésima posição das unidades permutadas.

Nosso objetivo é obter estimadores de μ e T e preditores do valor latente da unidade selecionada na i -ésima posição da amostra num modelo em que há erro de medida endógeno e exógeno.

O modelo com erros de medida exógeno e endógeno para a resposta na i -ésima posição é definido como

$$\tilde{Y}_i = \sum_{s=1}^N U_{is}(y_s + W_s) + \tilde{W}_i, \quad (2.18)$$

em que $\tilde{Y}_i$ é a resposta observada na i -ésima posição, W_s representa o erro de medida endógeno associado à unidade s e $\tilde{W}_i$ representa o erro de medida exógeno associado à condição de medida i , $i = 1, \dots, n$.

Fazendo $y_s = \mu + \beta_s$, de forma que β_s represente o desvio entre o valor latente da

unidade s nomeadamente y_s e $\mu = N^{-1} \sum_{s=1}^N y_s$ e partindo de (2.18) podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_i &= \sum_{s=1}^N U_{is}(\mu + \beta_s + W_s) + \tilde{W}_i \\
 &= \mu + \sum_{s=1}^N U_{is}\beta_s + \sum_{s=1}^N U_{is}W_s + \tilde{W}_i \\
 &= \mu + B_i + W_i^* + \tilde{W}_i \\
 &= \mu + B_i + E_i,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

em que $B_i = \sum_{s=1}^N U_{is}\beta_s$, $i = 1, \dots, N$, são efeitos aleatórios e correspondem ao desvio do valor latente da unidade que ficou na i -ésima posição da permutação e μ , $W_i^* = \sum_{s=1}^N U_{is}W_s$ é o erro de medida endógeno associado à unidade que ficou na i -ésima posição da permutação e $E_i = W_i^* + \tilde{W}_i$. Aqui, E_i representa a soma dos dois erros. O modelo (2.19) não distingue estes dois erros de medida (W_i^* e $\tilde{W}_i$), pois i indexa apenas a posição na amostra. Além disso, note que não é possível obter a expressão (2.18) a partir de (2.19).

Como $\sum_{s=1}^N U_{is} = 1$ para todo $i = 1, \dots, N$, e em cada linha da matriz $\mathbf{U}$ existe um único valor de $U_{is} = 1$ com todos os outros iguais a zero, segue que $\tilde{W}_i = \sum_{s=1}^N U_{is}\tilde{W}_s$. Então, definimos o modelo misto para populações finitas (MMPF) com erros de medida endógenos e exógenos como

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \mu + \sum_{s=1}^N U_{1s}\beta_s + \sum_{s=1}^N U_{1s}(W_s + \tilde{W}_1) \\ \mu + \sum_{s=1}^N U_{2s}\beta_s + \sum_{s=1}^N U_{2s}(W_s + \tilde{W}_2) \\ \vdots \\ \mu + \sum_{s=1}^N U_{Ns}\beta_s + \sum_{s=1}^N U_{Ns}(W_s + \tilde{W}_N) \end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Z}\mathbf{B} + \mathbf{E}^*, \tag{2.20}$$

em que $\mathbf{X} = \mathbf{1}_N$, $\boldsymbol{\alpha} = \mu$, $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_N$, $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_N)^\top$ e $\mathbf{E}^* = (E_1^*, \dots, E_N^*)^\top$. O modelo (2.20) difere do modelo (2.2), pois aqui representamos todas as unidades da população permutadas, e não apenas as unidades amostradas.

Utilizando ξ_1 para indexar a esperança com relação à medida de probabilidade induzida pelas permutações aleatórias, equivalente ao processo de amostragem aleatória

simples, temos

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \mathbb{E}_{\xi_1}(U_{is}) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N \text{ e } s = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{V}_{\xi_1}(U_{is}) = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right), \quad i = 1, \dots, N \text{ e } s = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{C}\mathbb{V}_{\xi_1}(U_{is}, U_{i^*s^*}) = -\frac{1}{N^2}, \quad i = i^* \text{ e } s \neq s^*, \\ & \bullet \mathbb{C}\mathbb{V}_{\xi_1}(U_{is}, U_{i^*s^*}) = -\frac{1}{N^2}, \quad i \neq i^* \text{ e } s = s^*, \\ & \bullet \mathbb{C}\mathbb{V}_{\xi_1}(U_{is}, U_{i^*s^*}) = \frac{1}{N^2(N-1)}, \quad i \neq i^* \text{ e } s \neq s^*, \\ & \bullet \mathbb{E}_{\xi_1}[\text{vec}(\mathbf{U}^\top)] = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N), \\ & \bullet \mathbb{V}_{\xi_1}[\text{vec}(\mathbf{U}^\top)] = \frac{1}{N-1}\mathbf{P}_N \otimes \mathbf{P}_N, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

em que $\mathbf{P}_N = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N}\mathbf{J}_N$, $\mathbf{J}_N = \mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^\top$, $\text{vec}(\mathbf{A})$ é o vetor formado pelo empilhamento das colunas da matriz $\mathbf{A}$ e $\otimes$ denota o produto de Kronecker [ver Harville (1997)].

Utilizando ξ_2 para indexar esperança, variância e covariância com relação ao erro de medida endógeno e ξ_3 para esperança, variância e covariância com relação ao erro de medida exógeno, vamos considerar as seguintes suposições:

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \mathbb{E}_{\xi_2}(W_s) = 0, \quad s = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{V}_{\xi_2}(W_s) = \sigma_s^2, \quad s = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{C}\mathbb{V}_{\xi_2}(W_s, W_{s^*}) = 0, \quad s = 1, \dots, N \text{ e } s^* = 1, \dots, N, \text{ e } s \neq s^*, \\ & \bullet \mathbb{E}_{\xi_3}(\tilde{W}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{V}_{\xi_3}(\tilde{W}_i) = \tilde{\sigma}_i^2, \quad i = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{C}\mathbb{V}_{\xi_3}(\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i^*}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad i^* = 1, \dots, N, \text{ e } i \neq i^*, \\ & \bullet \mathbb{E}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(W_s + \tilde{W}_i) = 0, \quad s = 1, \dots, N \text{ e } i = 1, \dots, N, \\ & \bullet \mathbb{V}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(W_s + \tilde{W}_i) = \sigma_s^2 + \tilde{\sigma}_i^2, \quad s = 1, \dots, N \text{ e } i = 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Consequentemente,

$$\mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \mathbf{1}_N \mu, \quad (2.23)$$

e

$$\mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \gamma^2\mathbf{P}_N + \bar{\sigma}^2\mathbf{I}_N + \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2, \quad (2.24)$$

em que $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \sigma_s^2$ e $\gamma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N (y_s - \mu)^2$. Veja Apêndice A.2 para detalhes.

2.2.3 Cálculo do BLUP usando as variáveis $\tilde{\mathbf{Y}}$

Consideramos a estratégia de Scott & Smith (1969), Royall (1970), Bolfarine & Zacks (1992) e Valliant, Dorfman & Royall (2000) que consiste em particionar o vetor de variáveis aleatórias $\tilde{\mathbf{Y}}$ em dois conjuntos. Sem perda de generalidade tomamos os elementos nas primeiras n posições de $\tilde{\mathbf{Y}}$ como a amostra e aquelas nas restantes $(N - n)$ posições como a parte não amostrada ou unidades remanescentes, *i.e.*, consideramos o vetor particionado $\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{\mathbf{Y}}_I^\top \ \tilde{\mathbf{Y}}_{II}^\top)^\top$, com $\tilde{\mathbf{Y}}_I$ representando um vetor n -dimensional e $\tilde{\mathbf{Y}}_{II}$ representando um vetor $(N - n)$ -dimensional.

As quantidades de interesse (como aquelas definidas em i, ii e iii) podem ser escritas na forma $P = \mathbf{g}^\top \mathbf{Y}$, em que $\mathbf{g}^\top = (\mathbf{g}_I^\top \ \mathbf{g}_{II}^\top)$ é um vetor de constantes conhecidas, *i.e.*, $P = \mathbf{g}_I^\top \mathbf{Y}_I + \mathbf{g}_{II}^\top \mathbf{Y}_{II}$. O BLUP de P deve ser linear na amostra, *i.e.*, $\hat{P} = (\mathbf{g}_I^\top + \mathbf{a}^\top) \tilde{\mathbf{Y}}_I$, não enviesado e minimizar $\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P)$. Inicialmente, observemos que

$$\hat{P} - P = \left((\mathbf{g}_I^\top + \mathbf{a}^\top), -\mathbf{g}_I^\top, -\mathbf{g}_{II}^\top \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \mathbf{Y}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

e

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P) = \left((\mathbf{g}_I^\top + \mathbf{a}^\top), -\mathbf{g}_I^\top, -\mathbf{g}_{II}^\top \right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{pmatrix} \mu, \quad (2.26)$$

em que $\mathbf{X}_I = \mathbf{1}_n$, $\mathbf{X}_{II} = \mathbf{1}_{N-n}$ e

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_I & \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_{I,II} \\ \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_{I,II} \\ \mathbf{V}_{II,I} & \mathbf{V}_{II,I} & \mathbf{V}_{II} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\text{com } \begin{pmatrix} \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_{I,II} \\ \mathbf{V}_{II,I} & \mathbf{V}_{II} \end{pmatrix} = \mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{V}}_I = \mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}_I).$$

A restrição de não enviesamento é $\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P) = (\mathbf{a}^\top - \mathbf{g}_{II}^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{pmatrix} \mu = 0$, e para que esta expressão seja zero para todo μ , devemos ter $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}_I - \mathbf{g}_{II}^\top \mathbf{X}_{II} = 0$.

Utilizando multiplicadores de Lagrange, nosso objetivo é minimizar

$$f(\mathbf{a}, \lambda) = \mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P) + 2\lambda(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}_I - \mathbf{g}_{II}^\top \mathbf{X}_{II})$$

em relação a $\mathbf{a}$ e λ . Diferenciando $f(\mathbf{a}, \lambda)$ com relação a $\mathbf{a}$ e λ , e igualando essas derivadas a zero obtemos o BLUP de P, nomeadamente

$$\hat{P} = \mathbf{g}_I^\top \left[\mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{V}_I \tilde{\mathbf{V}}_I^{-1} \left(\tilde{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right) \right] + \mathbf{g}_{II}^\top \left[\mathbf{X}_{II} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{V}_{II,I} \tilde{\mathbf{V}}_I^{-1} \left(\tilde{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right) \right], \quad (2.28)$$

em que

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\mathbf{X}_I^\top \tilde{\mathbf{V}}_I^{-1} \mathbf{X}_I \right)^{-1} \mathbf{X}_I^\top \tilde{\mathbf{V}}_I^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_I. \quad (2.29)$$

Os detalhes são apresentados no Apêndice A.3.

Como um dos nossos objetivos é estimar o valor latente para a unidade na i -ésima posição da amostra, usamos $\mathbf{g}^\top = \mathbf{e}_i^\top = (\mathbf{g}_I^\top \ \mathbf{g}_{II}^\top)^\top = (\mathbf{e}_{iI}^\top \ \mathbf{e}_{iII}^\top)^\top$; logo, $P_i = \mathbf{e}_{iI}^\top \mathbf{Y}_I + \mathbf{e}_{iII}^\top \mathbf{Y}_{II}$ reduz-se a $Y_i = \mu + B_i$. Então

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_n \\ \tilde{Y}_{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{Y}_N \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

com

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_{N-n} \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{bmatrix} \mu, \quad (2.31)$$

e

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_I & \tilde{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{II,I} & \tilde{\mathbf{V}}_{II} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_I & \tilde{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{II,I} & \tilde{\mathbf{V}}_{II} \end{bmatrix} &= \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n & -\frac{1}{N} \mathbf{J}_{n \times (N-n)} \\ -\frac{1}{N} \mathbf{J}_{(N-n) \times n} & \mathbf{I}_{N-n} - \frac{1}{N} \mathbf{J}_{N-n} \end{bmatrix} \\ &+ \bar{\sigma}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times (N-n)} \\ \mathbf{0}_{(N-n) \times n} & \mathbf{I}_{N-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 & \mathbf{0}_{n \times (N-n)} \\ \mathbf{0}_{(N-n) \times n} & \bigoplus_{i=n+1}^N \tilde{\sigma}_i^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Da equação (2.31), $X_I = \mathbf{1}_n$ e $X_{II} = \mathbf{1}_{N-n}$. De (2.33), temos

$$\begin{aligned}\tilde{V}_I &= \gamma^2 \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right] + \bar{\sigma}^2 \mathbf{I}_n + \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2, \\ V_I &= \gamma^2 \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right], \\ V_{II,I} &= -\frac{\gamma^2}{N} \mathbf{J}_{(N-n) \times n}.\end{aligned}$$

Dado que

$$\tilde{V}_I^{-1} = \bigoplus_{i=1}^n (\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1} + \frac{\gamma^2}{N - \gamma^2 L} \mathbf{m} \mathbf{m}^\top, \quad (2.34)$$

em que $L = \sum_{i=1}^n (\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1}$ e $\mathbf{m}$ é um vetor n -dimensional com a i -ésima componente igual a $(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1}$, então, de (2.29), temos

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \tilde{Y}_i}{\sum_{i=1}^n k_i} = \bar{\bar{Y}}, \quad (2.35)$$

com $k_i = (\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1}$. Consequentemente o BLUP de P_i é

$$\hat{P}_i = \begin{cases} \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2} (\tilde{Y}_i - \bar{\bar{Y}}), & i \leq n \\ \bar{\bar{Y}}, & i > n \end{cases}. \quad (2.36)$$

Quando não há nem erros de medida endógenos nem exógenos, $\tilde{\sigma}_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, n$, e $\sigma_s^2 = 0$, $s = 1, \dots, N$, temos $\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, e o BLUP de P_i é

$$\hat{P}_i = \begin{cases} Y_i, & i \leq n \\ \bar{\bar{Y}}, & i > n \end{cases}. \quad (2.37)$$

Quando não há variabilidade endógena mas há variabilidade exógena, $\sigma_s^2 = 0$, $s = 1, \dots, N$, $\bar{\sigma}^2 = 0$. Então $k_i = (\gamma^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1}$ e o BLUP de P_i reduz-se a

$$\hat{P}_i = \begin{cases} \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \tilde{\sigma}_i^2} (\tilde{Y}_i - \bar{\bar{Y}}), & i \leq n \\ \bar{\bar{Y}}, & i > n \end{cases}. \quad (2.38)$$

Quando não há variabilidade exógena mas há variabilidade endógena, $\tilde{\sigma}_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, n$, o que implica $k_1 = \dots = k_N = \gamma^2 + \bar{\sigma}^2$, então $\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i$ e o BLUP de P_i reduz-se a

$$\hat{P}_i = \begin{cases} \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \bar{\sigma}^2} (\tilde{Y}_i - \bar{\bar{Y}}), & i \leq n \\ \bar{\bar{Y}}, & i > n \end{cases}. \quad (2.39)$$

As expressões (2.38) e (2.39) são similares apenas no caso homocedástico às expressões (2.10) e (2.11) obtidas sob os modelos mistos usuais com erros heterocedásticos e com erros homocedásticos, respectivamente. A diferença é que aqui as estruturas de covariância estão explicitamente relacionadas com os erros de medida exógenos ou endógenos e a escolha do modelo deve levar em conta as características físicas do processo de medida. Pelos resultados anteriores, o preditor obtido sobre o MMPF com erro de medida exclusivamente exógeno heterocedástico é similar ao preditor obtido sobre os modelos mistos usuais com erros de medida heterocedásticos (2.10). O preditor dos modelos mistos usuais com erros de medida homocedásticos (2.11) com $k = \gamma^2/(\gamma^2 + a^2)$ é similar ao preditor obtido do modelo misto para populações finitas com

- erros de medida endógenos homocedásticos em que $a^2 = \sigma_1^2 = \dots = \sigma_N^2$,
- erros de medida endógenos heterocedásticos em que $a^2 = \bar{\sigma}^2$,
- erros de medida exógenos homocedásticos em que $a^2 = \tilde{\sigma}_1^2 = \dots = \tilde{\sigma}_n^2$.

Quando existe erro de medida exclusivamente endógeno, o termo E_{ik} no modelo misto usual (2.1) representa essa fonte de variabilidade. Supondo que as variâncias endógenas são heterocedásticas o preditor é diferente daquele obtido com o MMPF, pois a constante de encolhimento depende das médias das variâncias individuais. Isso mostra que o BLUP obtido sob o MMPF não envolve a identificabilidade das unidades amostrais. Note que não é possível definir o valor latente para a unidade com etiqueta j na população, $y_j = \mu + \beta_j$, como combinação linear das variáveis aleatórias $\mathbf{Y}$. Além disso, se a unidade com etiqueta j tem variabilidade endógena, seria natural esperar que o preditor de y_j dependesse de σ_j^2 . Para tentar contornar esses problemas vamos considerar um modelo mais geral, com variáveis expandidas.

2.2.4 Modelo misto expandido para população finita com erros de medida endógenos e exógenos

Usando a notação similar àquela empregada por Stanek III et al. (2004) definimos um novo conjunto de variáveis aleatórias expandidas $\ddot{\mathbf{Y}} = (\ddot{\mathbf{Y}}_1^\top, \dots, \ddot{\mathbf{Y}}_N^\top)^\top$, com

$$\ddot{\mathbf{Y}}_i = \begin{pmatrix} U_{i1}y_1 \\ U_{i2}y_2 \\ \vdots \\ U_{iN}y_N \end{pmatrix} \text{ e } \ddot{\mathbf{Y}} = \text{vec} \begin{pmatrix} U_{11}y_1 & U_{21}y_1 & \dots & U_{N1}y_1 \\ U_{12}y_2 & U_{22}y_2 & \dots & U_{N2}y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1N}y_N & U_{2N}y_N & \dots & U_{NN}y_N \end{pmatrix},$$

que também pode ser expresso como

$$\ddot{\mathbf{Y}} = \left(\mathbf{I}_N \otimes \bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \text{vec}(\mathbf{U}^\top). \quad (2.40)$$

Os diferentes parâmetros populacionais ou variáveis aleatórias de interesse podem ser expressos como combinações lineares da forma $\mathbf{L}^\top \ddot{\mathbf{Y}}$. Por exemplo,

- i. se $\mathbf{L} = N^{-1}(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N)$, temos $\mathbf{L}^\top \ddot{\mathbf{Y}} = N^{-1} \mathbf{1}_N^\top \mathbf{Y} = \mu$,
- ii. se $\mathbf{L} = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N)$, temos $\mathbf{L}^\top \ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{1}_N^\top \mathbf{Y} = T$,
- iii. se $\mathbf{L} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{1}_N)$, temos $\mathbf{L}^\top \ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{Y} = Y_i = \mu + B_i$,
- iv. se $\mathbf{L} = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{e}_j)$, temos $\mathbf{L}^\top \ddot{\mathbf{Y}} = \mu + \beta_j$, isto é, o valor latente para a unidade com etiqueta j na população.

Note que nos casos (i), (ii) e (iii) é possível expressar os parâmetros ou variáveis aleatórias correspondentes usando as variáveis expandidas $\ddot{\mathbf{Y}}$ ou as variáveis aleatórias $\mathbf{Y}$. No caso (iv), o parâmetro individual y_j só pode ser expresso com as variáveis aleatórias expandidas $\ddot{\mathbf{Y}}$.

Definimos o modelo misto expandido com erros de medida endógeno e exógeno como

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}} = \text{vec} \begin{pmatrix} U_{11}(y_1 + W_1 + \tilde{W}_1) & U_{21}(y_1 + W_1 + \tilde{W}_2) & \dots & U_{N1}(y_1 + W_1 + \tilde{W}_N) \\ U_{12}(y_2 + W_2 + \tilde{W}_1) & U_{22}(y_2 + W_2 + \tilde{W}_2) & \dots & U_{N2}(y_2 + W_2 + \tilde{W}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1N}(y_N + W_N + \tilde{W}_1) & U_{2N}(y_N + W_N + \tilde{W}_2) & \dots & U_{NN}(y_N + W_N + \tilde{W}_N) \end{pmatrix},$$

ou como

$$\vec{\mathbf{Y}} = \left[\mathbf{I}_N \otimes \bigoplus_{s=1}^N (y_s + W_s) + \bigoplus_{i=1}^N \tilde{W}_i \otimes \mathbf{I}_N \right] \text{vec}(\mathbf{U}^\top) = \mathbf{X}\mu + \mathbf{B} + \mathbf{E}^*, \quad (2.41)$$

em que $\mathbf{X} = \text{vec}(\mathbf{U}^\top)$, $\mathbf{B}$ é um vetor N^2 -dimensional com componentes $B_{is} = U_{is}\beta_s$, $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, N$ e o termo $\mathbf{E}^* = \left[\mathbf{I}_N \otimes \bigoplus_{s=1}^N W_s + \bigoplus_{i=1}^N \tilde{W}_i \otimes \mathbf{I}_N \right] \text{vec}(\mathbf{U}^\top)$ corresponde à soma dos dois tipos de erros de medida.

Utilizando (2.21) e (2.22), obtemos

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\vec{\mathbf{Y}}) = \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}), \quad (2.42)$$

e

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\vec{\mathbf{Y}}) = \mathbf{P}_N \otimes \Delta + \mathbf{I}_N \otimes \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N, \quad (2.43)$$

em que $\Delta = \frac{1}{N-1} \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \mathbf{P}_N \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right)$. Veja detalhes no apêndice A.1.

As expressões (2.42) e (2.43) envolvem tanto os parâmetros individuais $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ quanto as variâncias endógenas $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\}$ e não simplesmente a média populacional μ e a média das variâncias dos erros de medida endógenos $\bar{\sigma}^2$, como no caso das variáveis $\tilde{Y}$. Isto sugere que o modelo misto expandido contém mais informação e explicita a presença individual das variâncias endógenas. Por outro lado, tanto em (2.24) quanto em (2.43) as variâncias dos erros de medida exógenos, $\tilde{\sigma}_i^2$, aparecem de forma explícita, indicando que essa fonte de variabilidade é externa dos indivíduos.

2.2.5 Cálculo do BLUP usando as variáveis expandidas $\vec{\mathbf{Y}}$

De forma similar à $\tilde{\mathbf{Y}}$, o vetor $\vec{\mathbf{Y}}$ pode ser dividido como $\vec{\mathbf{Y}} = (\vec{\mathbf{Y}}_I^\top \ \vec{\mathbf{Y}}_{II}^\top)^\top$, sendo $\vec{\mathbf{Y}}_I$ um vetor nN -dimensional representando a amostra, e $\vec{\mathbf{Y}}_{II}$ um vetor $N(N-n)$ -dimensional representando a parte não amostrada. Os parâmetros ou variáveis aleatórias de interesse tem a forma $P = \mathbf{g}_I^\top \ddot{\mathbf{Y}}_I + \mathbf{g}_{II}^\top \ddot{\mathbf{Y}}_{II}$, com os vetores $\mathbf{g}_I$ e $\mathbf{g}_{II}$ apresentados na Tabela 2.1.

Para preditores lineares da forma $\hat{P} = (\mathbf{g}_I^\top + \mathbf{a}^\top) \vec{\mathbf{Y}}_I$ temos

$$\hat{P} - P = \left[(\mathbf{g}_I^\top + \mathbf{a}^\top), -\mathbf{g}_I^\top, -\mathbf{g}_{II}^\top \right] \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

Tabela 2.1: Matrizes de definição dos parâmetros ou variáveis de interesse.

Parâmetro/variável	$\mathbf{g}_I^\top$	$\mathbf{g}_{II}^\top$
T	$(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top)$	$(\mathbf{1}_{N-n}^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top)$
μ	$N^{-1}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top)$	$N^{-1}(\mathbf{1}_{N-n}^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top)$
$Y_i = \mu + B_i$	$(\mathbf{e}_{iI}^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top)$	$(\mathbf{e}_{iII}^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top)$
$y_j = \mu + \beta_j$	$(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{e}_j^\top)$	$(\mathbf{1}_{N-n}^\top \otimes \mathbf{e}_j^\top)$

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P) = \left[(\mathbf{g}_I^\top + \mathbf{a}^\top), -\mathbf{g}_I^\top, -\mathbf{g}_{II}^\top \right] \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad (2.45)$$

em que $\mathbf{X}_I = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_N)$, $\mathbf{X}_{II} = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_{N-n} \otimes \mathbf{I}_N)$ e

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} & \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} & \ddot{\mathbf{V}}_{II} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

em que

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} & \ddot{\mathbf{V}}_{II} \end{pmatrix} = \mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix}$$

e $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I = \mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I)$.

A restrição de não enviesamento é $\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P) = (\mathbf{a}^\top - \mathbf{g}_{II}^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{pmatrix} \mathbf{y} = 0$ e para que esta expressão seja zero para todo $\mathbf{y}$, devemos ter $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}_I - \mathbf{g}_{II}^\top \mathbf{X}_{II} = 0$.

Utilizando multiplicadores de Lagrange, o BLUP pode ser obtido por meio da minimização de $\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P)$ e é dado por

$$\hat{P} = \mathbf{g}_I^\top \left[\mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \ddot{\mathbf{V}}_I \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I^{-1} \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right) \right] + \mathbf{g}_{II}^\top \left[\mathbf{X}_{II} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I^{-1} \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right) \right], \quad (2.47)$$

em que $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I^{-1} \mathbf{X}_I \right)^{-1} \mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I^{-1} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I$. Os detalhes são apresentados no Apêndice A.3.

Para tornar (2.47) operacional precisamos obter a inversa de $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I$. De (2.43) temos

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I = \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \Delta + \mathbf{I}_n \otimes \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N, \quad (2.48)$$

e para calcular sua inversa vamos inicialmente supor que $\tilde{\sigma}_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, n$. Como

$$\Delta = \frac{1}{N-1} \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{J}_N \right) \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) = \frac{1}{N-1} \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s^2 - \frac{1}{N} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \right), \quad (2.49)$$

obtemos

$$\vec{\mathbf{V}}_I = \frac{1}{N-1} \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s^2 - \frac{1}{N} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \right) + \mathbf{I}_n \otimes \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right), \quad (2.50)$$

que pode ser escrita como $\vec{\mathbf{V}}_I = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{B}$, em que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{N-1} \left[\bigoplus_{s=1}^N \left(y_s^2 + \frac{N-1}{N} \sigma_s^2 \right) - \frac{1}{N} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \right], \quad (2.51)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{N(N-1)} \left[\bigoplus_{s=1}^N y_s^2 - \frac{1}{N} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \right], \quad (2.52)$$

para permitir a utilização dos seguintes teoremas sobre inversa de matrizes, no cálculo de sua inversa.

Teorema 2.2.1. *Se existe a inversa da matriz $\mathbf{A}$ e de $(n\mathbf{B} - \mathbf{A})$, e $\mathbf{G} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{B}$, então $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (n\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}$.*

Teorema 2.2.2. *Seja $\mathbf{R}$ uma matriz quadrada de ordem $N \times N$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{u}$ vetores N -dimensionais; se existe $\mathbf{R}^{-1}$, então $(\mathbf{R} + \mathbf{s} \mathbf{u}^\top)^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - (1 + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s})^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{u}^\top \mathbf{R}^{-1}$.*

Fazendo $\mathbf{R} = \bigoplus_{s=1}^N (y_s^2 + \frac{N-1}{N} \sigma_s^2)$, $\mathbf{s} = -N^{-1} \mathbf{y}$, $\mathbf{u}^\top = \mathbf{y}^\top$ e aplicando o Teorema 2.2.2, obtemos

$$\mathbf{A}^{-1} = (N-1) \left(\bigoplus_{s=1}^N \frac{k_s}{y_s^2} \right) \left[\mathbf{I}_N + \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \frac{k_s}{N(1-\bar{k}) y_s^2} \right) \right], \quad (2.53)$$

em que $k_s = y_s^2 [y_s^2 + \frac{N-1}{N} \sigma_s^2]^{-1}$. Aplicando novamente o Teorema 2.2.2, obtemos

$$(n\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{N(N-1)}{n-N} \left(\bigoplus_{s=1}^N \frac{(N-n)k_s}{y_s^2(N-nk_s)} \right) \left[\mathbf{I}_N + \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \frac{(N-n)k_s}{N(N-nk_s)y_s^2 M} \right) \right], \quad (2.54)$$

em que $M = \sum_{s=1}^N \{(1-k_s)/(N-nk_s)\}$.

De (2.43) temos

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{V}}_I &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \Delta, \\ \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} &= -\frac{1}{N} \mathbf{J}_{(N-n) \times n} \otimes \Delta.\end{aligned}\quad (2.55)$$

De (2.45) temos $\mathbf{X}_I^\top = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_N)$, e dado que $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{P}_n = 0$, usamos a expressão alternativa $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I = \mathbf{P}_n \otimes \mathbf{A}^{-1} + \frac{1}{n} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{I}_N - n\mathbf{B}(n\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}]$, para mostrar que

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I \mathbf{X}_I &= \frac{n}{N^2} \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{I}_N - n\mathbf{B}(n\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= \frac{n(N-1)}{N^2} \left[\bigoplus_{s=1}^N \frac{Nk_s}{y_s^2(N-nk_s)} + \frac{N-n}{M} \mathbf{m} \mathbf{m}^\top \right],\end{aligned}\quad (2.56)$$

em que $\mathbf{m}$ é um vetor N -dimensional com s -ésima componente igual a $\frac{N}{(N-1)} \frac{y_s(1-k_s)}{\sigma_s^2(N-nk_s)}$, e que

$$\left(\mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I \mathbf{X}_I \right)^{-1} = \frac{N^2}{n(N-1)} \left[\bigoplus_{s=1}^N \frac{y_s^2(N-nk_s)}{Nk_s} - \frac{N-n}{N^2} \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \right], \quad (2.57)$$

$$\left(\mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I \mathbf{X}_I \right)^{-1} \mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I = \frac{N}{n} (\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_N), \quad (2.58)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I - \left(\mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I \mathbf{X}_I \right)^{-1} \mathbf{X}_I^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I = (N-1) \mathbf{P}_n \otimes \left[\bigoplus_{s=1}^N \frac{k_s}{y_s^2} + \frac{1}{N(1-\bar{k})} \mathbf{r} \mathbf{r}^\top \right], \quad (2.59)$$

em que $\mathbf{r}$ é um vetor N -dimensional com a s -ésima componente igual a $r_s = \frac{N}{N-1} \frac{y_s(1-k_s)}{\sigma_s^2}$.

Consequentemente de (2.48)-(2.59) o BLUP de P é

$$\hat{P} = \left\{ \mathbf{g}_I^\top - \frac{N-1}{N} \mathbf{g}_I^\top \mathbf{P}_n^\top \otimes \left[\bigoplus_{s=1}^N \frac{\sigma_s^2 k_s}{y_s^2} + \frac{1}{N(1-\bar{k})} \mathbf{r}^* \mathbf{r}^\top \right] + \mathbf{g}_{II}^\top \left(\frac{1}{n} \mathbf{J}_{(N-n) \times n} \otimes \mathbf{I}_N \right) \right\} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I, \quad (2.60)$$

em que $\mathbf{r}^*$ é um vetor N -dimensional com a s -ésima componente igual a $r_s^* = \frac{N}{N-1} y_s(1-k_s)$.

Usando a expressão (2.60) podemos concluir que:

i) Os estimadores para a média e para o total populacional são respectivamente,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{Nn}^\top \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^N U_{is} (y_s + W_s + \tilde{W}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \quad \text{e} \quad \hat{T} = N\hat{\mu};$$

ii) O estimador do parâmetro individual y_j é

$$\hat{y}_j = \frac{N}{n} (\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{e}_j^\top) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n U_{ij} (y_j + W_j + \tilde{W}_i),$$

ou seja, $\hat{y}_j$ estima o parâmetro com $\frac{N}{n} (y_j + W_j + \tilde{W}_i)$ quando a unidade j é observada na amostra e com zero em caso contrário; este estimador é do tipo Horvitz-Thompson.

iii) O preditor do valor latente da unidade selecionada na i -ésima posição da amostra é

$$\hat{Y}_i = \left\{ \mathbf{e}_{iI}^\top \otimes \mathbf{1}_N^\top - \mathbf{e}_{iI}^\top \mathbf{P}_n^\top \otimes (x_1, x_2, \dots, x_N) \right\} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I, \quad \text{se } i \leq n, \quad (2.61)$$

em que

$$x_s = (1 - k_s) \left[1 + \frac{y_s}{\sigma_s^2} T \right] \quad \text{e} \quad T = \frac{\sum_{s=1}^N y_s (1 - k_s)}{(N - 1)(1 - \bar{k})},$$

ou

$$\hat{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^N U_{is} (y_s + W_s + \tilde{W}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \quad \text{se } i > n. \quad (2.62)$$

Apesar de o preditor (2.61) levar em conta a variabilidade endógena do indivíduo, σ_s^2 , note que para fins práticos sua aplicação é restringida porque também se requer o conhecimento a priori de todos os parâmetros individuais y_s , $s = 1, \dots, N$, para calcular o valor da constante T . Salientamos que mesmo observando a todos os indivíduos da população, o valor do parâmetro individual não será conhecido dado que as medidas são feitas com os dois tipos de erros de medida.

Os coeficientes do estimador/preditor (2.61) mudam para cada população, mostrando que não existe um estimador linear, não enviesado e com variância uniformemente mínima para qualquer população com valores latentes $\mathbf{y}$, obtendo assim uma generalização do resultado de Godambe (1955), que mostrou que para populações finitas não existe um estimador não enviesado com variância uniformemente mínima para o total populacional na classe geral de estimadores lineares, *i.e.*, em que os coeficientes atribuídos às respostas observadas dependem tanto da unidade quanto da ordem de seleção na amostra selecionada, ou seja, exatamente a informação contida no vetor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I$.

2.2.6 Unicidade do BLUP de $Y_i = \mu + B_i$ usando as variáveis aleatórias $\tilde{\mathbf{Y}}$

Quando usamos as variáveis aleatórias $\tilde{\mathbf{Y}}$ para obter o BLUP de $P_i = \mu + B_i$, usamos o critério de otimalidade que consiste em minimizar o erro quadrático médio dos preditores lineares não enviesados. Rao & Bellhouse (1978) estabelecem condições sob as quais um estimador é ótimo na classe dos estimadores lineares não enviesados.² Vamos verificar se $\hat{P}_i$ satisfaz essas condições que são expressas no seguinte teorema.

Teorema 2.2.3. [Teorema 1.1 de Rao & Bellhouse (1978)] Um estimador $\hat{P}_i$ na classe C de estimadores lineares $\xi_1\xi_2\xi_3$ -não enviesados de P_i baseado em $\tilde{\mathbf{Y}}_I$ é ótimo para P_i se e somente se para todo estimador $\hat{e}_d$ de zero, é tal que

$$\mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = 0.$$

Definimos C_0 como a classe de preditores lineares $\hat{e}_d = \mathbf{b}^\top \left[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}_N) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I \right] \xi_1\xi_2\xi_3$ -não enviesados de zero, *i.e.*, tais que $\mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} (\hat{e}_d) = 0$. Identificamos as restrições lineares necessárias para que $\hat{P}_i$ seja não enviesado de P_i , e para que $\hat{e}_d$ seja um predictor linear não enviesado de zero. Em seguida, usamos essas restrições para determinar quando $\mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right]$ é igual a zero.

Como o predictor de P_i é linear na amostra, temos $\hat{P}_i = (\mathbf{e}_{iI}^\top + \mathbf{a}^\top) \tilde{\mathbf{Y}}_I$. Além disso, como $\hat{P}_i$ é não enviesado, então $\mathbf{a}$ deve satisfazer $\mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} \left[(\mathbf{e}_{iI}^\top + \mathbf{a}^\top) \tilde{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{e}_{iI}^\top \mathbf{Y}_I - \mathbf{e}_{iII}^\top \mathbf{Y}_{II} \right] = 0$, implicando que

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{1}_n - \mathbf{e}_{iII}^\top \mathbf{1}_{N-n} = 0. \quad (2.63)$$

Para que $\hat{e}_d$ seja não enviesado para o valor zero, é preciso que $\frac{1}{N} \mathbf{b}^\top (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{y} = 0$ para todo $\mathbf{y}$; isto implica que

$$(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} = 0. \quad (2.64)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] &= \mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} \left[\left((\mathbf{e}_{iI}^\top + \mathbf{a}^\top) \tilde{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{e}_{iI}^\top \mathbf{Y}_I - \mathbf{e}_{iII}^\top \mathbf{Y}_{II} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I^\top (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} \right] \\ &= \left[(\mathbf{e}_{iI}^\top + \mathbf{a}^\top) - \mathbf{e}_{iI}^\top - \mathbf{e}_{iII}^\top \right] \mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3} \left[\left(\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \mathbf{Y}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I^\top \right] (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

²“Ótimo” no sentido de que tem o menor erro quadrático médio.

Dado que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \mathbf{Y}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top & \mathbf{0}_{n \times nN} & \mathbf{0}_{n \times N(N-n)} \\ \mathbf{0}_{n \times nN} & \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top & \mathbf{0}_{n \times N(N-n)} \\ \mathbf{0}_{(N-n) \times nN} & \mathbf{0}_{(N-n) \times nN} & \mathbf{I}_{N-n} \otimes \mathbf{1}_N^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix},$$

temos que

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \mathbf{Y}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I^\top \right] = \mathbf{M} \mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I^\top \right].$$

Lembrando que $\mathbb{V}[\mathbf{x}] = \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^\top] - \mathbb{E}[\mathbf{x}]\mathbb{E}[\mathbf{x}^\top]$, então

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I^\top \right]$$

são as primeiras nN colunas da expressão

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} + \mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} \mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix}^\top \right].$$

Da expressão (A.13) sabemos que

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I & \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_{I,II} \\ \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_{I,II} \\ \mathbf{V}_{II,I} & \mathbf{V}_{II,I} & \mathbf{V}_{II} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_I &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \Delta, \\ \mathbf{V}_{I,II} &= -\frac{1}{N} \mathbf{J}_{n \times (N-n)} \otimes \Delta, \\ \mathbf{V}_{II} &= \left(\mathbf{I}_{N-n} - \frac{1}{N} \mathbf{J}_{N-n} \right) \otimes \Delta, \\ \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I &= \mathbf{V}_I + \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \frac{1}{N} \left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Adicionalmente, como

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{y}) \\ \frac{1}{N} (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{y}) \\ \frac{1}{N} (\mathbf{1}_{N-n} \otimes \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

então

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} \vec{\mathbf{Y}}_I^\top \right] = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{V}}_I \\ \mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_{II,I} \end{pmatrix} + \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \\ \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \\ \mathbf{1}_{N-n} \mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{y} \mathbf{y}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} A &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \Delta + \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \frac{1}{N} \left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N + \frac{1}{N^2} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{y} \mathbf{y}^\top), \\ B &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \Delta + \frac{1}{N^2} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{y} \mathbf{y}^\top), \\ C &= -\frac{1}{N} \mathbf{J}_{(N-n) \times n} \otimes \Delta + \frac{1}{N^2} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{y} \mathbf{y}^\top). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_I \\ \mathbf{Y}_I \\ \mathbf{Y}_{II} \end{pmatrix} \vec{\mathbf{Y}}_I^\top \right] = \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} D &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta + \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \frac{1}{N} \left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{1}_N^\top \\ &\quad + \frac{1}{N^2} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top), \\ E &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right) \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta + \frac{1}{N^2} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top), \\ F &= -\frac{1}{N} \mathbf{J}_{(N-n) \times n} \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta + \frac{1}{N^2} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top). \end{aligned}$$

Agora, determinamos o valor de $\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right]$ sujeito às restrições (2.63) e (2.64).

De (2.65) temos

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = \left((\mathbf{e}_{iI}^\top + \mathbf{a}^\top) | -\mathbf{e}_{iI}^\top | -\mathbf{e}_{iII}^\top \right) \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b}. \quad (2.66)$$

Aplicando (2.63) e (2.64) segue que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} &= (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top)(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} = 0, \\
(\mathbf{J}_{(N-n) \times n} \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} &= (\mathbf{1}_{N-n} \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{y} \mathbf{y}^\top)(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} = 0, \\
(\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} &= (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta)(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} = 0, \\
(\mathbf{J}_{(N-n) \times n} \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} &= (\mathbf{1}_{N-n} \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta)(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} = 0, \\
\left(\left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{1}_N^\top \right) (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_N) \mathbf{b} &= \left(\left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{1}_N^\top \mathbf{P}_N \right) \mathbf{b} = 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{1}_N^\top \mathbf{P}_N = 0$, obtemos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] &= (\mathbf{e}_{iI}^\top) \left\{ \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) \mathbf{P}_N \right\} \mathbf{b} \\
&+ (\mathbf{a}^\top) \left\{ \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta \mathbf{P}_N + \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) \mathbf{P}_N \right\} \mathbf{b}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Quando $i \leq n$, temos $\mathbf{e}_{iI} = \mathbf{0}$, e então $\mathbf{a}^\top = \mathbf{0}$; consequentemente

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = (\mathbf{e}_{iI}^\top) \left\{ \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) \mathbf{P}_N \right\} \mathbf{b}.$$

$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = 0$ se e somente se $\left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) = k \mathbf{I}_N$, *i.e.*, $\hat{P}_i$ será ótimo quando $\sigma_s^2 = k$, $s = 1, \dots, N$. Sabemos que $\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \gamma^2 \mathbf{P}_N + \bar{\sigma}^2 \mathbf{I}_N + \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2$; logo quando usamos as variáveis $\tilde{\mathbf{Y}}$ temos $k = \bar{\sigma}^2 = N^{-1} \sum_{s=1}^N \sigma_s^2$. Portanto, o preditor é ótimo para $i \leq n$.

Quando $i > n$, temos $\mathbf{e}_{iI} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}^\top \mathbf{1}_n = 1$, $\mathbf{a}^\top \neq \mathbf{0}$, e

$$\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = (\mathbf{a}^\top) \left\{ \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \Delta \mathbf{P}_N + \frac{1}{N} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_N^\top \left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) \mathbf{P}_N \right\} \mathbf{b}. \tag{2.68}$$

Então, $\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = 0$ se e somente se $\Delta = m \mathbf{P}_N$ e $\left(\bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) = k \mathbf{I}_N$.

Sabemos que $\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \gamma^2 \mathbf{P}_N + \bar{\sigma}^2 \mathbf{I}_N + \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2$. De forma equivalente, quando usamos as variáveis $\tilde{\mathbf{Y}}$, temos $m = \gamma^2$ e $k = \bar{\sigma}^2$, portanto, $\hat{P}_i$ é ótimo para $i > n$.

Então, $\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left[\left(\hat{P}_i - P_i \right) \hat{e}_d \right] = 0$ para todo i , portanto $\hat{P}_i$ é ótimo para todo i , *i.e.*, $\hat{P}_i$ é o preditor linear não enviesado que tem o menor erro quadrático médio nessa classe de preditores.

2.3 Discussão

O BLUP para $Y_i = \mu + B_i$ obtido a partir das variáveis aleatórias $\tilde{\mathbf{Y}}$ é ótimo, mas não leva em conta a informação da variabilidade endógena individual σ_s^2 . Por outro lado, o BLUP para $Y_i = \mu + B_i$ obtido a partir das variáveis aleatórias expandidas $\vec{\mathbf{Y}}$ usa a informação da variabilidade endógena individual σ_s^2 , mas depende do conhecimento de todos os valores latentes $y_1, \dots, y_N$ e por isso não tem utilidade prática.

Quando usamos o modelo misto expandido com erros de medida endógeno e exógeno, o estimador do valor latente da unidade com etiqueta s na população é $\frac{N}{n}(y_s + W_s + \tilde{W}_i)$ quando a unidade s é observada na posição i da amostra e zero em caso contrário. Este estimador não parece ser atrativo, porque apesar de que os erros de medida endógenos e exógenos sejam nulos ($W_s = \tilde{W}_i = 0$) o estimador para as unidades observadas $\left(\frac{N}{n}y_s\right)$ é diferente do verdadeiro valor latente y_s . Para unidades não observadas o estimador assume um valor nulo, porque o conhecimento de um parâmetro individual não contribui para o conhecimento dos demais parâmetros.

Por outro lado, o modelo misto para populações finitas com erros de medida endógeno e exógeno é gerado a partir das variáveis aleatórias indicadoras U_{is} ; com elas é possível determinar se a unidade com etiqueta s na população está ou não na amostra, isto é, se $s \in \mathfrak{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$, então

$$\sum_{s=1}^N sU_{is} = s_i, \text{ para algum } i,$$

por conseguinte, depois de obter a amostra, o BLUP do valor latente da unidade na i -ésima posição é

$$\hat{Y}_{s_i} = \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2} \left(\tilde{Y}_{s_i} - \bar{\bar{Y}} \right), \quad s_i \in \{s_1, \dots, s_n\}, \quad (2.69)$$

ou $\hat{Y}_{s_i} = \bar{\bar{Y}}$ para $s_i \notin \mathfrak{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$. Isto é, o preditor (2.69) contém a etiqueta da unidade da população seleccionada na i -ésima posição.

Neste capítulo, mostramos que os resultados de Stanek III et al. (2004) e Stanek III & Singer (2004) podem ser estendidos para acomodar erros de medida endógenos e exógenos simultaneamente no modelo misto para populações finitas. O modelo misto para populações finitas pode ser empregado tanto para encontrar estimadores de uma média populacional ou de um total populacional, quanto para predizer o valor latente da unidade

na i -ésima posição numa permutação ou da unidade com etiqueta s na população. Os estimadores/preditores são obtidos via métodos padrão para encontrar preditores lineares não enviesados de variância mínima.

Capítulo 3

Comparação entre preditores obtidos sob os modelos mistos usual e para populações finitas

O objetivo deste capítulo é comparar preditores dos valores latentes das unidades amostrais obtidos a partir do modelo misto usual e do modelo misto para populações finitas com relação ao erro quadrático médio numa situação em que há erros de medida endógenos heterocedásticos.

3.1 Exemplo

Inicialmente, consideramos uma situação análoga àquela apresentada em Singer, Stanek III, Lencina, González, Li & San Martino (2009). Por simplicidade, consideramos uma população de $N = 3$ indivíduos da qual selecionamos uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 2$, fazendo uma única medição do nível de colesterol em cada unidade amostral. Desejamos prever o valor latente de colesterol de cada indivíduo na amostra usando tanto o preditor obtido a partir do modelo misto usual $(\hat{Q}_i^{(1)})$ quanto o preditor obtido a partir do MMPF $(\hat{Q}_i^{(2)})$. A Tabela 3.1 contém os valores latentes y_s , as variâncias do erro de medida endógeno, σ_s^2 , que assumimos conhecidas e as constantes de encolhimento k e k_s , $s = 1, 2, 3$, necessárias para o cálculo dos dois preditores. Assumimos que o erro de medida pode ter somente dois possíveis valores igualmente prováveis e dados por $\pm\sigma_s$.

Tabela 3.1: Nível de colesterol, variâncias endógenas, constantes de encolhimento e de ponderação na população ($N = 3$).

Nome	Nível de colesterol* (valor latente)	Variância	Constante de encolhimento	Constante de Ponderação
Alba	$y_1 = 10$	$\sigma_1^2 = 1$	$k_1 = 0,950$	$w_1=0,491$
Juliana	$y_2 = 3$	$\sigma_2^2 = 100$	$k_2 = 0,160$	$w_2=0,082$
Laura	$y_3 = 2$	$\sigma_3^2 = 4$	$k_3 = 0,826$	$w_3=0,427$
$\mu = 5$				
$\gamma^2 = 19$				
$\bar{\sigma}^2 = 35$				
$k = 0,352$				

*Nível de colesterol depois de subtraídas 200 unidades.

Para todas as possíveis 24 amostras,¹ a resposta observada $y_s \pm \sigma_s$, os valores preditos $\hat{Q}_i^{(1)}$ e o quadrado da diferença entre o valor latente e o valor predito, $(\hat{Q}_i^{(1)} - y_i)^2$, $i = 1, 2$, são apresentados na Tabela 3.2. A média dos valores correspondentes às 24 amostras está apresentada na última linha.

Lembramos aqui que o preditor obtido a partir do modelo misto usual,

$$\hat{Q}_i^{(1)} = \hat{\mu} + \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \sigma_i^2)}(Y_i - \hat{\mu}), \quad (3.1)$$

em que $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n w_i Y_i / \sum_{i=1}^n w_i$, $w_i = (\gamma^2 + \sigma_i^2)^{-1}$ e $k_i = \gamma^2 / (\gamma^2 + \sigma_i^2)$, foi utilizado conforme a interpretação usual (preditor do colesterol do i -ésimo indivíduo selecionado). Essa forma de interpretar esse preditor não é correta, pois σ_i^2 é constante em relação à posição na amostra (i) mas varia de acordo com o indivíduo selecionado nessa posição. Como consequência, a média dos valores preditos por (3.1) para as 24 possíveis amostras é 5,8, o que indica que esse preditor é enviesado pois a média populacional é 5,0. Isto mostra que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ calculado segundo a interpretação usual não é o BLUP.

Na Tabela 3.3, apresentamos novamente a resposta observada $y_s \pm \sigma_s$, os valores preditos em cada posição usando o preditor

$$\hat{Q}_i^{(2)} = \bar{Y} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \bar{\sigma}^2}(Y_i - \bar{Y}), \quad (3.2)$$

¹As 6 combinações de dois indivíduos com as 4 possíveis combinações de erros de medida, $\pm\sigma_{s_1} \pm \sigma_{s_2}$

Tabela 3.2: Preditor obtido a partir dos modelos mistos usuais com variâncias heterocedásticas.

Amostra	y_{s_1}	y_{s_2}	$Y_i = y_{s_i} \pm \sigma_{s_i}$		$\hat{Q}_i^{(1)}$		$(\hat{Q}_i^{(1)} - y_{s_i})^2$	
1	Alba (10)	Juliana (3)	11	13	11,0	11,6	1,03	73,29
2	Alba (10)	Juliana (3)	11	-7	10,9	5,9	0,76	8,70
3	Alba (10)	Juliana (3)	9	13	9,0	10,1	0,94	50,73
4	Alba (10)	Juliana (3)	9	-7	8,9	4,5	1,24	2,28
5	Alba (10)	Laura (2)	11	4	10,8	4,7	0,70	7,03
6	Alba (10)	Laura (2)	11	0	10,7	1,0	0,55	0,95
7	Alba (10)	Laura (2)	9	4	8,9	4,5	1,25	6,08
8	Alba (10)	Laura (2)	9	0	8,8	0,8	1,46	1,35
9	Juliana (3)	Alba (10)	13	11	11,6	11,0	73,29	1,03
10	Juliana (3)	Alba (10)	13	9	10,1	9,0	50,73	0,94
11	Juliana (3)	Alba (10)	-7	11	5,9	10,9	8,70	0,76
12	Juliana (3)	Alba (10)	-7	9	4,5	8,9	2,28	1,24
13	Juliana (3)	Laura (2)	13	4	6,7	4,3	13,41	5,08
14	Juliana (3)	Laura (2)	13	0	3,8	0,4	0,71	2,67
15	Juliana (3)	Laura (2)	-7	4	0,7	3,7	5,08	2,86
16	Juliana (3)	Laura (2)	-7	0	-2,1	-0,2	25,71	4,83
17	Laura (2)	Alba (10)	4	11	4,7	10,8	7,03	0,70
18	Laura (2)	Alba (10)	4	9	4,5	8,9	6,08	1,25
19	Laura (2)	Alba (10)	0	11	1,0	10,7	0,95	0,55
20	Laura (2)	Alba (10)	0	9	0,8	8,8	1,35	1,46
21	Laura (2)	Juliana (3)	4	13	4,3	6,7	5,08	13,41
22	Laura (2)	Juliana (3)	4	-7	3,7	0,7	2,86	5,08
23	Laura (2)	Juliana (3)	0	13	0,4	3,8	2,67	0,71
24	Laura (2)	Juliana (3)	0	-7	-0,2	-2,1	4,83	25,71
	Médias		5,0	5,0	5,8	5,8	9,11	9,11

(*) y_{s_i} representa o valor latente do indivíduo na i -ésima posição, $i = 1, 2$.

Tabela 3.3: Preditor obtido a partir dos modelos mistos para populações finitas com variâncias heterocedásticas.

Amostra	y_{s_1}	y_{s_2}	$Y_i = y_{s_i} \pm \sigma_{s_i}$		$\hat{Q}_i^{(2)}$		$(\hat{Q}_i^{(2)} - y_{s_i})^2$	
1	Alba (10)	Juliana (3)	11	13	11,6	12,4	2,72	87,46
2	Alba (10)	Juliana (3)	11	-7	5,2	-1,2	23,36	17,36
3	Alba (10)	Juliana (3)	9	13	10,3	11,7	0,09	75,75
4	Alba (10)	Juliana (3)	9	-7	3,8	-1,8	38,26	23,18
5	Alba (10)	Laura (2)	11	4	8,7	6,3	1,61	18,22
6	Alba (10)	Laura (2)	11	0	7,4	3,6	6,58	2,45
7	Alba (10)	Laura (2)	9	4	7,4	5,6	6,87	13,11
8	Alba (10)	Laura (2)	9	0	6,1	2,9	15,34	0,84
9	Juliana (3)	Alba (10)	13	11	12,4	11,6	87,46	2,72
10	Juliana (3)	Alba (10)	13	9	11,7	10,3	75,75	0,09
11	Juliana (3)	Alba (10)	-7	11	-1,2	5,2	17,36	23,36
12	Juliana (3)	Alba (10)	-7	9	4,5	8,9	2,28	1,24
13	Juliana (3)	Laura (2)	13	4	10,1	6,9	50,17	24,17
14	Juliana (3)	Laura (2)	13	0	8,8	4,2	33,49	4,90
15	Juliana (3)	Laura (2)	-7	4	-3,4	0,4	41,41	2,45
16	Juliana (3)	Laura (2)	-7	0	-4,7	-2,3	59,78	18,22
17	Laura (2)	Alba (10)	4	11	6,3	8,7	18,22	1,61
18	Laura (2)	Alba (10)	4	9	5,6	7,4	13,11	6,87
19	Laura (2)	Alba (10)	0	11	3,6	7,4	2,45	6,58
20	Laura (2)	Alba (10)	0	9	2,9	6,1	0,84	15,34
21	Laura (2)	Juliana (3)	4	13	6,9	10,1	24,17	50,17
22	Laura (2)	Juliana (3)	4	-7	0,4	-3,4	2,45	41,41
23	Laura (2)	Juliana (3)	0	13	4,2	8,8	4,90	33,49
24	Laura (2)	Juliana (3)	0	-7	-2,3	-4,7	18,22	59,78
	Médias		5,0	5,0	5,0	5,0	23,66	23,66

(*) y_{s_i} representa o valor latente do indivíduo na i -ésima posição, $i = 1, 2$.

em que $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ e $k = \gamma^2/(\gamma^2 + \sigma^2)$. A média para as 24 amostras está calculada na última linha. A média dos valores preditos para as 24 possíveis amostras é 5,0 e é igual à média populacional, ou seja, $\hat{Q}_i^{(2)}$ é o BLUP. No entanto, o erro quadrático médio é 23,66 e corresponde a 2,6 vezes o erro quadrático médio (9,11) obtido quando usamos o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ calculado conforme a interpretação usual. Na realidade, o não enviesamento (em média) não é uma propriedade desejável neste caso, pois seria mais interessante que os preditores fossem não-enviesados para cada valor latente (ver discussão em Robinson (1991), por exemplo). Por esse motivo há interesse em saber se o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ calculado conforme a interpretação usual apresenta erros quadráticos médios (EQM) menores em situações mais gerais. Essencialmente queremos avaliar qual dos dois preditores, (3.1) ou (3.2) comporta-se melhor na presença de variabilidade endógena heterocedástica.

3.2 Simulação para $N = 3$ e $n = 2$

A fim de comparar os EQM dos preditores (3.1) e (3.2) realizou-se um estudo de simulação² com as seguintes etapas:

- 1) Definimos 36 cenários de simulação, mantendo fixos os valores latentes (10, 3, 2) dos três indivíduos apresentados na Tabela 3.1 e modificando a relação (6 níveis) entre a média das variâncias dos erros de medida endógenos e a variância dos valores latentes e a distribuição dos erros de medida endógenos (6 distribuições). As variâncias dos erros de medida endógenos foram geradas tais que sua média correspondessem a um dos seguintes seis múltiplos de $\gamma^2 = 19$, 4, 1, 1/4, 1/19 e 1/99. Como consequência, a constante de encolhimento $k = \gamma^2/(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2)^{-1}$ do preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ assume os valores 0,05, 0,20, 0,50, 0,80, 0,95 e 0,99; em particular, $k = 1$ corresponde à situação sem erro de medida endógeno. Para cada valor de $\bar{\sigma}^2/\gamma^2$ consideramos seis diferentes distribuições de probabilidade para os erros de medida endógenos: Normal, Uniforme, Beta simétrica, Beta assimétrica, Exponencial ou Gama.
- 2) Para cada um dos 36 cenários descritos acima, geramos 1.000 conjuntos de variâncias de erros de medida, σ_s^2 , $s = 1, 2, 3$, satisfazendo as relações indicadas.
- 3) Para cada uma das 36.000 situações descritas acima geramos 10.000 réplicas adicio-

²O código escrito no programa R encontra-se no Apêndice C

nando os erros de medida em cada elemento das 24 possíveis amostras de tamanho $n = 2$ da população finita.

- 4) Para cada uma das 36.000 situações descritas acima calculamos os dois preditores, seus vieses e seus respectivos EQM.

Em cada caso calculamos o quociente entre $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]$ e $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(2)}]$. Valores deste quociente maiores que 1 indicam que o EQM do preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ é maior que o EQM do preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$. Quando o valor deste quociente está próximo de 1, os dois preditores produzem EQM muito próximos, quando está perto de zero o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ produz EQM muito menor que o EQM produzido pelo preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$. O coeficiente de variação das variâncias endógenas é utilizado como índice de heterocedasticidade. Quando esse índice está perto de zero, as variâncias endógenas estão próximas da variância média $\bar{\sigma}^2$, logo as constantes de encolhimento k_i do preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ estão próximas da constante de encolhimento k do preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$. Este índice cresce quando as variâncias endógenas são mais dispersas. Também calculamos o número de situações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor EQM que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$.

Tabela 3.4: Número de populações (num total de 1000) em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$.

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Normal	Uniforme	Beta simétrica	Beta assimétrica	Exponencial	Gama
19	991	999	1000	995	992	992
4	989	988	985	998	980	980
1	892	911	905	997	903	899
1/4	779	777	749	991	778	762
1/19	690	706	738	991	737	756
1/99	689	700	718	989	712	713
Total	5030	5081	5095	5961	5102	5102

O estudo de simulação mostrou que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem erro quadrático médio menor que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ em aproximadamente 85% das situações simuladas quando a distribuição do erro de medida endógeno é Normal, Uniforme, Beta simétrica, Exponencial e Gama. Quando o erro de medida endógeno tem distribuição Beta assimétrica esse valor é aproximadamente 99% (veja Tabela 3.4). Nos casos em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem EQM

Figura 3.1: Boxplot para quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos para $N = 3$ e $n = 2$.

Figura 3.2: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Uniforme para $N = 3$ e $n = 2$.

Tabela 3.5: Estatísticas descritivas para os quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Normal para $N = 3$ e $n = 2$.

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Mínimo	Q_1	Mediana	Média	Q_3	Máximo
19	0,318	0,779	0,914	0,865	0,979	1,000
4	0,294	0,848	0,941	0,899	0,985	1,000
1	0,516	0,918	0,969	0,947	0,994	1,006
1/4	0,791	0,971	0,990	0,980	0,999	1,010
1/19	0,939	0,993	0,998	0,995	1,000	1,005
1/99	0,988	0,999	1,000	0,999	1,000	1,001

maior que o EQM do preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$, por exemplo, quando a distribuição do erro de medida endógeno é Normal, a diferença não foi superior ao 1% (veja Tabela (3.5)). Resultados similares podem ser verificados para as outras distribuições dos erros de medida endógenos (veja Tabelas C.1–C.5 no Apêndice C.2).

Independentemente da forma das distribuições dos erros de medida, quanto menor o quociente entre a média das variâncias dos erros de medida endógenos e a variância dos valores latentes ($\bar{\sigma}^2/\gamma^2$), menores são as diferenças entre os EQM dos preditores $\hat{Q}_i^{(1)}$ e $\hat{Q}_i^{(2)}$ (veja Figura 3.1); quando essa relação é pequena os dois preditores tem o EQM muito próximos (veja Figura 3.2 e Figuras C.1–C.5 no Apêndice C.2). Na realidade, quanto maior seja a relação $\bar{\sigma}^2/\gamma^2$ o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ produz estimativas dos valores latentes menos enviesados para cada indivíduo.

Apesar de o preditor obtido a partir do modelo misto usual ($\hat{Q}_i^{(1)}$, utilizado conforme a interpretação usual) ser enviesado em média (veja Figura 3.3), ele apresenta um erro quadrático médio menor que o do preditor ($\hat{Q}_i^{(2)}$) obtido a partir do MMPF. Quando $\hat{Q}_i^{(1)}$ não gera o menor erro quadrático médio, os dois preditores geram EQM muito próximos.

3.3 Simulação para outros valores de N e n

Na maioria das situações simuladas para $N = 3$ e $n = 2$ o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ baseado no modelo misto usual e calculado conforme a interpretação usual apresenta erros quadráticos médios (EQM) menores que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ obtido a partir do modelo misto para populações finitas. A seguir avaliamos qual dos dois preditores, comporta-se melhor em

Figura 3.3: Boxplot para o viés da média populacional quando usamos o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ para $N = 3$ e $n = 2$.

termos de EQM na presença de variabilidade endógena heterocedástica em situações mais gerais com relação ao tamanho de população, ao tamanho amostral e à distribuição dos valores latentes.

Consideramos 972 situações diferindo com relação ao tamanho populacional (3 tamanhos), ao tamanho amostral (3 tamanhos amostrais para cada tamanho populacional), à forma da distribuição dos valores latentes (3 distribuições), ao quociente entre a média das variâncias dos erros de medida endógenos e a variância dos valores latentes (6 níveis) e a distribuição dos erros de medida endógenos (6 distribuições), descritas da seguinte forma.

- 1) Definimos 3 tamanhos para a população finita, a saber, $N = 50, 100$ e 300 .
- 2) Para cada tamanho populacional usamos três tamanhos amostrais diferentes, ou seja, $n = \{5, 10, 25\}$, $\{10, 30, 50\}$ e $\{30, 50, 100\}$, respectivamente.
- 3) Consideramos 3 tipos de distribuição para gerar os valores latentes das unidades da população finita, fixando a média populacional em 180: uma distribuição uniforme no intervalo $(60, 300)$, uma distribuição assimétrica à esquerda usando a transformação $Y = 252X$, com $X \sim \text{Beta}(5, 2)$ e $\mathbb{E}(X) = 5/7$, e uma distribuição assimétrica à direita usando a transformação $Y = 100 + 280X$, com $X \sim \text{Beta}(2, 5)$ e $\mathbb{E}(X) = 2/7$.
- 4) Para cada uma das 27 combinações de tamanho de população, tamanho da amostra e forma da distribuição dos valores latentes, definimos 36 cenários de simulação, mantendo fixos os valores latentes dos indivíduos da população e modificando o quociente entre a média das variâncias dos erros de medida endógenos e a variância dos valores latentes e a distribuição dos erros de medida endógenos.
- 5) Para cada uma das 972 situações descritas acima, geramos 500 conjuntos de variâncias de erros de medida endógenos, σ_s^2 , $s = 1, 2, \dots, N$, satisfazendo as condições acima.
- 6) Para cada uma das $972 \times 500 = 486.000$ situações descritas acima, geramos 1.000 amostras independentes de tamanho n via amostragem aleatória simples. Geramos 100 réplicas adicionando os erros de medida endógenos em cada elemento das 1.000 amostras de tamanho n .
- 7) Para cada uma das 486.000 situações descritas acima calculamos os dois preditores, seus vieses e seus respectivos EQM.

Tabela 3.6: Número de populações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ de um total de 500 populações simuladas com valores latentes seguindo uma distribuição uniforme.

N	n	σ^2/γ^2	Distribuição dos erros de medida endógenos					
			Normal	Uniforme	Beta Simétrica	Beta Assimétrica	Exponencial	Gama
50	5	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	499	500
		1	500	494	498	496	498	498
		1/4	495	494	493	494	497	486
		1/19	480	481	478	475	476	465
		1/99	437	452	444	450	446	436
50	10	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	498	497	496	498	499	496
		1/4	490	489	492	494	492	487
		1/19	481	478	484	483	470	474
		1/99	458	460	453	452	460	464
50	25	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	499	499	499	498	500
		1	491	497	497	495	494	499
		1/4	488	488	487	496	493	485
		1/19	489	480	486	475	480	482
		1/99	468	471	461	461	462	458
100	10	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	500	500	499	500	498	498
		1/4	500	499	498	494	496	499
		1/19	495	488	493	492	491	497
		1/99	468	470	474	474	475	474
100	30	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	500	498	497	499	498	498
		1/4	498	498	500	499	499	499
		1/19	499	495	496	495	495	490
		1/99	483	482	486	484	485	489
100	50	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	499	499	498	498	499	500
		1/4	499	499	499	497	498	499
		1/19	498	493	493	498	492	497
		1/99	488	490	487	490	485	489
300	30	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	500	500	500	500	500	500
		1/4	500	500	500	500	500	500
		1/19	500	500	499	500	499	500
		1/99	496	497	496	495	496	497
300	50	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	500	500	500	500	499	500
		1/4	500	500	499	500	500	500
		1/19	500	500	500	500	500	499
		1/99	500	498	499	498	500	500
300	100	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	499	500	500	500	500
		1	500	500	500	500	500	500
		1/4	500	500	500	500	500	500
		1/19	500	500	499	500	500	500
		1/99	500	500	500	500	499	500

Tabela 3.7: Valor máximo do quociente $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ com valores latentes seguindo uma distribuição uniforme.

N	n	σ^2/γ^2	Distribuição dos erros de medida endógenos					
			Normal	Uniforme	Beta Simétrica	Beta Assimétrica	Exponencial	Gama
50	5	19	0.977	0.974	0.967	0.974	0.984	0.986
		4	0.980	0.984	0.992	0.987	1.002	0.995
		1	0.996	1.011	1.008	1.002	1.019	1.024
		1/4	1.015	1.005	1.028	1.011	1.006	1.032
		1/19	1.011	1.027	1.025	1.025	1.166	1.036
		1/99	1.081	1.035	1.026	1.036	1.068	1.020
50	10	19	0.976	0.985	0.985	0.953	0.970	0.971
		4	0.992	0.988	0.996	0.985	0.991	0.991
		1	1.008	1.030	1.029	1.020	1.007	1.022
		1/4	1.012	1.012	1.027	1.013	1.014	1.015
		1/19	1.030	1.023	1.016	1.012	1.013	1.018
		1/99	1.025	1.023	1.036	1.046	1.033	1.021
50	25	19	0.982	0.979	0.982	0.977	0.989	0.991
		4	0.998	1.004	1.001	1.002	1.018	1.000
		1	1.025	1.009	1.015	1.018	1.018	1.009
		1/4	1.045	1.020	1.018	1.036	1.010	1.027
		1/19	1.046	1.072	1.020	1.033	1.033	1.030
		1/99	1.022	1.044	1.017	1.033	1.028	1.051
100	10	19	0.966	0.977	0.971	0.967	0.981	0.963
		4	0.983	0.985	0.979	0.980	0.994	0.986
		1	0.997	0.999	1.011	0.996	1.010	1.006
		1/4	0.997	1.041	1.010	1.013	1.009	1.007
		1/19	1.008	1.071	1.007	1.013	1.005	1.051
		1/99	1.017	1.066	1.008	1.008	1.022	1.014
100	30	19	0.980	0.984	0.978	0.976	0.976	0.984
		4	0.996	0.997	0.994	0.997	0.994	0.986
		1	0.999	1.014	1.020	1.013	1.017	1.011
		1/4	1.001	1.001	0.998	1.001	1.001	1.001
		1/19	1.002	1.016	1.004	1.004	1.004	1.009
		1/99	1.003	1.014	1.017	1.004	1.026	1.004
100	50	19	0.982	0.980	0.992	0.992	0.981	0.988
		4	0.991	0.997	0.996	0.992	0.995	0.999
		1	1.000	1.005	1.003	1.012	1.001	0.990
		1/4	1.004	1.005	1.001	1.002	1.008	1.002
		1/19	1.001	1.004	1.015	1.003	1.002	1.005
		1/99	1.006	1.004	1.003	1.020	1.010	1.003
300	30	19	0.980	0.984	0.989	0.979	0.982	0.977
		4	0.989	0.985	0.986	0.987	0.988	0.989
		1	0.990	0.990	0.992	0.989	0.988	0.986
		1/4	0.996	0.995	0.995	0.992	0.994	0.996
		1/19	1.000	0.999	1.000	0.998	1.000	0.999
		1/99	1.000	1.000	1.000	1.013	1.001	1.000
300	50	19	0.992	0.986	0.986	0.981	0.986	0.988
		4	0.993	0.990	0.992	0.990	0.991	0.991
		1	0.990	0.987	0.985	0.988	1.001	0.993
		1/4	0.996	0.999	1.001	0.999	0.992	0.993
		1/19	0.999	0.999	0.998	0.998	0.997	1.000
		1/99	1.000	1.000	1.000	1.002	1.000	1.000
300	100	19	0.989	0.986	0.993	0.990	0.988	0.991
		4	0.993	0.989	0.996	0.988	0.991	0.990
		1	0.991	0.999	0.988	0.990	0.994	0.990
		1/4	0.992	0.997	0.997	0.991	0.995	0.996
		1/19	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997
		1/99	1.000	1.000	1.000	1.000	1.002	1.000

Para cada cenário simulado, calculamos o quociente entre $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]$ e $EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$, o índice de heterocedasticidade das variâncias endógenas e o número de situações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor EQM que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$. Foi usado o programa R para as simulações e o tempo de procesamento de cada cenário foi em média de 4 horas, usando computadores com processador *Intel Core Duo T2250* de 1.73 GHz/2MB de Cache.

O estudo de simulação mostrou que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem erro quadrático médio menor que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ em aproximadamente 96% das 486.000 situações simuladas; 99% das 162.000 situações quando os valores latentes foram gerados com distribuição uniforme, 92% das 162.000 situações quando os valores latentes foram gerados com distribuição assimétrica à esquerda e 97% das 162.000 situações quando os valores latentes foram gerados com distribuição assimétrica à direita (veja Tabela 3.6 e Tabelas D.1 e D.2 no Apêndice D).

Nos casos em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem o EQM maior que o EQM do preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$, em média, essa diferença não foi superior a 2% quando os valores latentes são gerados com distribuição uniforme, nem superior a 7% quando os valores latentes foram gerados com distribuição assimétrica (veja Tabela 3.7 e Tabelas D.3 e D.4 no Apêndice D).

Independentemente da forma das distribuições dos erros de medida endógenos e dos valores latentes, quanto maior é o quociente entre a média das variâncias dos erros de medida endógenos e a variância dos valores latentes, maiores são as diferenças entre os EQM de $\hat{Q}_i^{(1)}$ e $\hat{Q}_i^{(2)}$ (veja Figuras E.1–J.9 nos Apêndices E–J). Quando essa relação é pequena ($\bar{\sigma}^2/\gamma^2 = 1/19$ ou $\bar{\sigma}^2/\gamma^2 = 1/99$) os dois preditores tem os EQM muito próximos.

O número de situações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ apresenta menor EQM com relação ao preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ é maior quando os valores latentes foram gerados com distribuição uniforme do que quando foram gerados com distribuição assimétrica à esquerda ou assimétrica à direita.

Quanto maior é o tamanho da população finita, o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ apresenta menores EQM com relação ao preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$. Quanto maior é o tamanho da amostra com relação ao tamanho da população, o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ apresenta menores EQM com relação ao preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$.

Independentemente do tamanho da população, do tamanho da amostra, da forma das distribuições dos erros de medida endógenos e dos valores latentes, do quociente entre a média das variâncias dos erros de medida endógenos e a variância dos valores latentes e

apesar de o preditor obtido a partir do modelo misto usual ($\hat{Q}_i^{(1)}$, utilizado conforme a interpretação usual) ser enviesado em média, ele apresenta menor erro quadrático médio que o preditor ($\hat{Q}_i^{(2)}$) obtido a partir do MMPF na maioria das situações simuladas. Quando $\hat{Q}_i^{(1)}$ não gera o menor erro quadrático médio, em média, essa diferença é menor do que 7%.

Capítulo 4

Aspectos computacionais

Em aplicações práticas, é possível ajustar modelos mistos a dados sujeitos a erros de medida endógenos e exógenos, homocedásticos ou heterocedásticos, utilizando rotinas desenvolvidas com base no modelo misto usual e implementadas nos *Software* estatísticos como SAS (proc MIXED) e R (nlme). Neste capítulo, apresentamos códigos computacionais desenvolvidos com essa finalidade.

O BLUP do valor latente da i -ésima unidade selecionada na amostra, obtido a partir do modelo misto para populações finitas com presença simultânea dos dois erros de medida (2.20), é

$$\hat{Y}_i = \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2} (\tilde{Y}_i - \bar{\bar{Y}}), \quad (4.1)$$

em que $\tilde{\sigma}_i^2$ é a variância do erro de medida exógeno referente à i -ésima condição de medida e $\bar{\sigma}^2$ é a média das variâncias individuais dos erros de medida endógenos. Quando não há variabilidade endógena, isto é, quando $\bar{\sigma}^2 = 0$, o preditor é

$$\hat{Y}_i = \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \tilde{\sigma}_i^2} (\tilde{Y}_i - \bar{\bar{Y}}). \quad (4.2)$$

Quando não há variabilidade exógena, isto é, quando $\tilde{\sigma}_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, n$, o preditor é

$$\hat{Y}_i = \bar{\bar{Y}} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \bar{\sigma}^2} (\tilde{Y}_i - \bar{\bar{Y}}). \quad (4.3)$$

O modelo misto usual para a k -ésima medida da i -ésima unidade selecionada na amostra é escrito como

$$Y_{ik} = \mu + B_i + E_{ik}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n_i, \quad B_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \gamma^2), \quad (4.4)$$

em que E_{ik} é o erro de medida. O BLUP de $Y_i = \mu + B_i$ depende da estrutura de covariância proposta para o modelo (4.4); no caso de erros de medida heterocedásticos, $E_{ik} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_i^2)$ e no caso de erros de medida homocedásticos, $E_{ik} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Os preditores de $Y_i = \mu + B_i$ sob esse modelo têm a forma (4.2) e (4.3) respectivamente. Nesse contexto é possível adaptar as sub-rotinas computacionais disponíveis nos pacotes destinados a análise estatística a fim de acomodar diferentes características de erros de medida endógenos e exógenos.

Como ilustração, consideramos o conjunto de dados apresentado no Capítulo 1. Na Tabela 4.1 apresentamos as médias dos níveis de colesterol de cada indivíduo observados nos quatro trimestres e as tomamos como sendo o valor latente de cada indivíduo; as variâncias correspondentes, calculadas como $\sigma_s^2 = \frac{1}{3} \sum_{q=1}^4 (y_{sq} - y_s)^2$, $s = 1, \dots, 13$, são consideradas como as verdadeiras variâncias dos erros endógenos.

Tabela 4.1: Valores latentes e variâncias endógenas do nível de colesterol.

Indivíduo	Valor latente	Variância endógena
s	y_s	σ_s^2
1	242,1	3545,1
2	263,2	1250,1
3	154,5	1932,9
4	232,6	3083,2
5	202,2	1299,4
6	280,4	1013,8
7	268,4	2216,9
8	198,4	1815,2
9	303,4	5222,3
10	237,7	548,9
11	141,8	1099,4
12	215,3	639,1
13	128,8	207,8

Admitimos que os diferentes examinadores correspondem a diferentes condições de avaliação e conseqüentemente, que os erros de medida associados a eles são erros de medida exógenos. As variâncias correspondentes são aquelas apresentadas na Tabela 1.4. Pode-se notar que tanto os erros de medida endógenos quanto os erros de medida exógenos são heterocedásticos. A variância populacional dos valores latentes é $\gamma^2 = 2939,9$ e a média

das variâncias endógenas é $\bar{\sigma}^2 = 1836,5$.

4.1 Modelos com erros de medida endógenos apenas

Os preditores obtidos sob os modelos mistos usuais e MMPF são diferentes na presença de erros de medida endógenos heterocedásticos. No entanto, o preditor obtido sob o MMPF tem uma forma semelhante àquela do preditor obtido sob o modelo misto usual com erros de medida homocedásticos.

Podemos estimar as duas variâncias do modelo (4.3), γ^2 e $\bar{\sigma}^2$, e calcular os BLUP para os valores latentes correspondentes aos 13 indivíduos usando o seguinte código escrito no PROC MIXED do SAS ou com a função *lme* da sub-rotina *nlme* do R.

• Código SAS

```
proc mixed data=blup;
class Paciente;
model Colesterol=;
random Paciente;
estimate 'BLUP pac1' intercept 1 | Paciente 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac2' intercept 1 | Paciente 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac3' intercept 1 | Paciente 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac4' intercept 1 | Paciente 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac5' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac6' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac7' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac8' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac9' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac10' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
estimate 'BLUP pac11' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
estimate 'BLUP pac12' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
estimate 'BLUP pac13' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
run;
```

• Código R

```
require(nlme)
BLUP<- read.table("colesterol.txt", header=T)
BLUP$Paciente<-as.factor(BLUP$Paciente)
BD1<-groupedData(Colesterol~1|Paciente, data = BLUP)
fit1<- lme(Colesterol~1, data=BD1, random = ~1)
fit1$coefficients$fixed+fit1$coefficients$random$Paciente
```

Os dados: a partir dos valores latentes e das variâncias endógenas apresentadas na Tabela 4.1 geramos um conjunto de 156 observações (13 grupos de 12 observações cada). Cada grupo de 12 observações foi obtido da seguinte forma: dividimos o intervalo $[0, 1]$ em 13 intervalos de igual tamanho e obtivemos os percentis da distribuição normal correspondentes ao limite superior de cada intervalo, transformamos esses valores tal que sua média coincidisse com o valor latente, y_s , e sua variância com a variância endógena correspondente, σ_s^2 , $s = 1, 2, \dots, 13$.

O conjunto de dados no SAS deve ser apresentado em variáveis e observações. Para criar as variáveis usamos a palavra INPUT, aqui as variáveis foram chamadas *Paciente*, *Trim*, *Rep*, *Entrev* e *Colesterol*. A declaração DATALINES indica ao SAS que as observações são completadas linha por linha. Por exemplo, temos o conjunto de dados BLUP com algumas observações.

• Dados no SAS

```
data blup;
input Paciente Trim Rep Entrev Colesterol;
datalines;
1 1 1 1 180.6
1 1 2 1 206.9
1 1 3 1 234.8
1 2 1 1 171.3
1 2 2 1 174.3
1 2 3 1 185.7
1 3 1 2 288
1 3 2 2 342.9
1 3 3 2 278.4
1 4 1 2 276.2
1 4 2 2 305.3
1 4 3 2 260.5
.
.
.
13 3 1 3 182
13 3 2 3 104.5
13 3 3 3 118.5
13 4 1 2 107.1
13 4 2 2 192.9
13 4 3 2 89.1
;
```

• Resultados SAS

The Mixed Procedure

Model Information

Data Set	WORK.BLUP
Dependent Variable	Colesterol
Covariance Structure	Variance Components
Estimation Method	REML
Residual Variance Method	Profile
Fixed Effects SE Method	Model-Based
Degrees of Freedom Method	Containment

Class Level Information

Class	Levels	Values
Paciente	13	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Trim	4	1 2 3 4
Entrev	3	1 2 3

Dimensions

Covariance Parameters	2
Columns in X	1
Columns in Z	13
Subjects	1
Max Obs Per Subject	156

Number of Observations

Number of Observations Read	156
Number of Observations Used	156
Number of Observations Not Used	0

Iteration History

Iteration	Evaluations	-2 Res Log Like	Criterion
0	1	1746.21425159	
1	1	1645.30973001	0.00000000

Covariance Parameter

Estimates

Cov Parm	Estimate
Paciente	2788.25
Residual	1836.47

Fit Statistics

-2 Res Log Likelihood	1645.3
AIC (smaller is better)	1649.3
AICC (smaller is better)	1649.4
BIC (smaller is better)	1650.4

Label	Estimate	St.Error	DF	t Value	Pr > t
BLUP pac1	240.99	12.0702	12	19.97	<.0001
BLUP pac2	260.99	12.0702	12	21.62	<.0001
BLUP pac3	157.94	12.0702	12	13.09	<.0001
BLUP pac4	231.98	12.0702	12	19.22	<.0001
BLUP pac5	203.16	12.0702	12	16.83	<.0001
BLUP pac6	277.29	12.0702	12	22.97	<.0001
BLUP pac7	265.92	12.0702	12	22.03	<.0001
BLUP pac8	199.56	12.0702	12	16.53	<.0001
BLUP pac9	299.10	12.0702	12	24.78	<.0001
BLUP pac10	236.81	12.0702	12	19.62	<.0001
BLUP pac11	145.90	12.0702	12	12.09	<.0001
BLUP pac12	215.58	12.0702	12	17.86	<.0001
BLUP pac13	133.58	12.0702	12	11.07	<.0001

• Resultados R

Linear mixed-effects model fit by REML

Data: BD1

Log-restricted-likelihood: -822.6549

Fixed: Colesterol ~ 1

(Intercept)

220.6769

Random effects:

Formula: ~1 | Paciente

(Intercept) Residual

StdDev: 52.80386 42.85405

Number of Observations: 156

Number of Groups: 13

```
> fit1$coefficients$fixed+fit1$coefficients$random$Paciente
```

(Intercept)

```
13 133.5805
11 145.9041
3 157.9433
12 215.5798
5 203.1614
8 199.5591
10 236.8143
2 260.9875
4 231.9796
6 277.2925
1 240.9853
7 265.9169
9 299.0958
```

- **Comentários sobre os resultados SAS e R**

- Nos dois programas, as estimativas dos componentes de variância são iguais e calculadas por meio do método de máxima verossimilhança restrita (REML), que é o método padrão (*default*). A estimativa da variância populacional dos valores latentes é $\hat{\gamma}^2 = 2788,25 = (52,80386)^2$, sendo 94,8% da verdadeira variância γ^2 . A estimativa da variância média dos erros de medida endógenos é $\hat{\sigma}^2 = 1836,47 = (42,85405)^2$, sendo 99,9% da verdadeira variância σ^2 . No SAS, os BLUP para os valores latentes correspondentes aos 13 indivíduos são dadas conjuntamente com seus desvios padrão; já no R somente temos o BLUP para cada indivíduo.
- Também geramos 1000 conjuntos de 156 observações (13 grupos de 12 observações cada). Cada grupo de 12 observações foi gerado a partir da distribuição normal com média y_s e variância endógena correspondente σ_s^2 , $s = 1, 2, \dots, 13$. Ajustamos o modelo misto usual e obtivemos que a média (dos 1000 conjuntos) da estimativa da variância populacional dos valores latentes é $\hat{\gamma}^2 = 2921,52$ e a média da estimativa da variância dos erros de medida endógenos é $\hat{\sigma}^2 = 1822,89$ (Veja o código R no Apêndice K), sub-estimando em média os verdadeiros valores das variâncias. O desvio percentual dessas estimativas relativamente às verdadeiras variâncias são -0,63% e -0,74% respectivamente.

Também pode-se verificar que a estimativa da variância dos erros de medida endógenos é igual à média das variâncias endógenas, estimando essas variâncias individuais (Tabela 4.1) com as seguintes opções do PROC MIXED do SAS.

- **Código SAS:**

```
proc mixed;
class Paciente Trim Entrev;
model Colesterol=;
random Paciente;
repeated / group=Paciente;
```

- **Resultados SAS:**

Covariance Parameter Estimates

Cov Parm	Group	Estimate
Paciente		2788.14
Residual	Paciente 1	3521.82
Residual	Paciente 2	1249.01
Residual	Paciente 3	1937.89
Residual	Paciente 4	3062.85
Residual	Paciente 5	1295.81
Residual	Paciente 6	1014.78
Residual	Paciente 7	2215.33
Residual	Paciente 8	1808.72
Residual	Paciente 9	5304.09
Residual	Paciente 10	548.25
Residual	Paciente 11	1103.19
Residual	Paciente 12	638.11
Residual	Paciente 13	208.04

Dado que estamos numa situação balanceada (os 13 indivíduos medidos 12 vezes cada), a média das estimativas das variâncias endógenas individuais é a estimativa da variância dos erros de medida endógenos, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{13} \sum_{s=1}^{13} \hat{\sigma}_s^2$. Para situações desbalanceadas, deve se usar uma média ponderada pelo número de medições feitas em cada indivíduo.

4.2 Modelos com erros de medida exógenos apenas

Os preditores obtidos sob os modelos misto usual e MMPF são iguais na presença de erros de medida exógenos heterocedásticos. Podemos calcular as estimativas das variâncias exógenas e a variância populacional dos valores latentes sob o modelo misto usual com erros heterocedásticos usando os seguintes códigos escritos no PROC MIXED do SAS ou com a função *lme* da sub-rotina *nlme* do R.

• Código SAS

```
proc mixed data=blup;
class Paciente Entrev;
model Colesterol=;
random Paciente;
repeated / group=Entrev;
estimate 'BLUP pac1' intercept 1 | Paciente 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac2' intercept 1 | Paciente 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac3' intercept 1 | Paciente 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac4' intercept 1 | Paciente 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac5' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
```



```

estimate 'BLUP pac6' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac7' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac8' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac9' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac10' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
estimate 'BLUP pac11' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
estimate 'BLUP pac12' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
estimate 'BLUP pac13' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
run;

```

• Código R

```

require(nlme)
BD1<-groupedData(COLEST~1|IND,data = dadoscol)
fit2<- lme(Colesterol~1, data=BD1, random = ~1, weights=varIdent(form = ~1|Entrev))
fit2$coefficients$fixed+fit2$coefficients$random$Paciente

```

A partir dos valores latentes apresentados na Tabela 4.1 e das variâncias exógenas apresentadas na Tabela 1.4 geramos um conjunto de 156 observações. Cada grupo de 12 observações foi obtida como a soma do valor latente (da Tabela 4.1) e de um erro de medida exógeno obtido da seguinte forma: dividimos o intervalo $[0, 1]$ em 13 intervalos de igual tamanho e obtivemos os percentis correspondentes ao limite superior de cada intervalo da distribuição normal; transformamos esses dados tal que sua média seja zero e sua variância coincida com a variância exógena, $\tilde{\sigma}_i^2$, $i = 1, 2, 3$, sendo estes nossos erros exógenos. Somamos a cada valor latente y_s , $s = 1, 2, \dots, 13$, um conjunto dos erros exógenos gerados anteriormente considerando uma ordem particular, neste caso, por exemplo, admitimos que os indivíduos com rótulo $s = \{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$ foram avaliados pelos examinadores, na sequência $\{CS, KL, KL, CS, KL, SU, CS, SU, CS, CS, SU, SU, KL\}$.

• Resultados SAS:

Covariance Parameter Estimates		
Cov Parm	Group	Estimate
Paciente		2797.15
Residual	Entrev 1	1012.35
Residual	Entrev 2	1623.10
Residual	Entrev 3	2004.53
Fit Statistics		
-2 Res Log Likelihood		1610.9
AIC (smaller is better)		1618.9

AICC (smaller is better) 1619.2
 BIC (smaller is better) 1621.2

Label	Estimates		DF	t Value	Pr > t
	Estimate	Standard Error			
BLUP pac1	241.46	9.0601	12	26.65	<.0001
BLUP pac2	260.85	12.5835	12	20.73	<.0001
BLUP pac3	158.25	12.5835	12	12.58	<.0001
BLUP pac4	232.29	9.0601	12	25.64	<.0001
BLUP pac5	203.28	12.5835	12	16.15	<.0001
BLUP pac6	277.61	11.3797	12	24.40	<.0001
BLUP pac7	267.05	9.0601	12	29.47	<.0001
BLUP pac8	199.48	11.3797	12	17.53	<.0001
BLUP pac9	300.94	9.0601	12	33.22	<.0001
BLUP pac10	237.21	9.0601	12	26.18	<.0001
BLUP pac11	145.44	11.3797	12	12.78	<.0001
BLUP pac12	215.52	11.3797	12	18.94	<.0001
BLUP pac13	134.04	12.5835	12	10.65	<.0001

• Resultados R:

```
Linear mixed-effects model fit by REML
Data: BD2
Log-restricted-likelihood: -805.4476
Fixed: colesterol ~ 1
(Intercept)
221.0324
Random effects:
Formula: ~1 | Paciente
(Intercept) Residual
StdDev: 52.88807 44.77196

Variance function:
Structure: Different standard deviations per stratum
Formula: ~1 | Entrev
Parameter estimates:
3 2 1
1.0000000 0.8998419 0.7106595
Number of Observations: 156
Number of Groups: 13

> fit2$coefficients$fixed+fit2$coefficients$random$Paciente
(Intercept)
13 134.0370
11 145.4387
3 158.2494
```

8	199.4837
5	203.2849
12	215.5167
4	232.2937
10	237.2120
1	241.4589
7	267.0456
2	260.8473
6	277.6140
9	300.9399

- **Comentários sobre os resultados SAS e R**

As estimativas dos componentes de variância foram calculadas com o método REML. A estimativa da variância populacional é $\hat{\gamma}^2 = 2797,15 = (52,88807)^2$, sendo 95,1% da verdadeira variância dos valores latentes, γ^2 . Os valores das estimativas das variâncias exógenas são fornecidas diretamente no SAS, já no R existe uma forma diferente de representação,¹ elas são $\hat{\sigma}_{CS}^2 = 1012,4 = (0,7106595 \times 44,77196)^2$, $\hat{\sigma}_{SU}^2 = 1623,1 = (0,8998419 \times 44,77196)^2$ e $\hat{\sigma}_{KL}^2 = 2004,5 = (1,0000 \times 44,77196)^2$, sendo 99,9%, 99,9% e 100,2% respectivamente das verdadeiras variâncias exógenas.

4.3 Modelos com presença simultânea de erros de medida endógenos e exógenos homocedásticos

Podemos ajustar modelos em situações em que há de erros de medida endógenos e exógenos homocedásticos simultaneamente notando que o modelo misto usual para k -ésima medida da i -ésima unidade selecionada na amostra medida com a j -ésima condição de avaliação pode ser escrito como

$$Y_{ijk} = \mu + B_i + E_{ik} + \epsilon_{ijk}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n_i, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (4.5)$$

$$B_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \gamma^2), \quad E_{ik} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \bar{\sigma}^2), \quad \text{e} \quad \epsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \tilde{\sigma}^2),$$

em que E_{ik} representa o erro de medida endógeno com variância homocedástica ($\bar{\sigma}^2$) e ϵ_{ijk} representa o erro de medida exógeno com variância homocedástica ($\tilde{\sigma}^2$).

¹No processo de estimação das variâncias de cada condição de avaliação no R usa-se a expressão $\mathbb{V}(E_{ij}) = \sigma^2 \delta_i^2$ com $\delta_1 = 1$ e δ_l , $l = 2, \dots, n$, representando a razão entre a l -ésima condição e a primeira condição selecionada.

Nesta Seção usamos o conjunto de dados do *Seasons Study*, supondo que os erros de medida exógenos são homocedásticos. Podemos estimar as variâncias γ^2 , σ^2 e $\tilde{\sigma}^2$, e calcular os BLUP para os valores latentes correspondentes aos 13 indivíduos usando os seguintes códigos escritos no PROC MIXED do SAS ou com a função *lme* da sub-rotina *nlme* do R.

• Código SAS

```
proc mixed;
class Paciente Trim Entrev;
model Colesterol=;
random Paciente Trim(Paciente);
estimate 'BLUP pac1' intercept 1 | Paciente 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac2' intercept 1 | Paciente 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac3' intercept 1 | Paciente 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac4' intercept 1 | Paciente 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac5' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac6' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac7' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac8' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac9' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac10' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
estimate 'BLUP pac11' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
estimate 'BLUP pac12' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
estimate 'BLUP pac13' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
run;
```

• Código R

```
require(nlme)
BLUP<- read.table("colesterol.txt", header=T)
BLUP$Paciente<-as.factor(BLUP$Paciente)
BD2<-groupedData(Colesterol~Entrev|Paciente/Trim,data = BLUP)
fit3<- lme(Colesterol~1, data=BD2, random = ~1)
fit3$coefficients$fixed+fit3$coefficients$random$Paciente
```

• Resultados SAS:

```
The Mixed Procedure

                        Model Information
Data Set                  WORK.BLUP
Dependent Variable        Colesterol
Covariance Structure      Variance Components
```

Estimation Method	REML
Residual Variance Method	Profile
Fixed Effects SE Method	Model-Based
Degrees of Freedom Method	Containment

Class Level Information															
Class	Levels	Values													
Paciente	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Trim	4	1	2	3	4										
Entrev	3	1	2	3											

Dimensions	
Covariance Parameters	3
Columns in X	1
Columns in Z	65
Subjects	1
Max Obs Per Subject	156

Number of Observations	
Number of Observations Read	156
Number of Observations Used	156
Number of Observations Not Used	0

Iteration History			
Iteration	Evaluations	-2 Res Log Like	Criterion
0	1	1770.01717225	
1	1	1670.92679345	0.00000000

Covariance Parameter Estimates	
Cov Parm	Estimate
Paciente	2480.78
Trim(Paciente)	1317.72
Residual	1556.19

Fit Statistics	
-2 Res Log Likelihood	1670.9
AIC (smaller is better)	1676.9
AICC (smaller is better)	1677.1
BIC (smaller is better)	1678.6

Estimates					
		Standard			
Label	Estimate	Error	DF	t Value	Pr > t
BLUP pac1	238.73	19.8225	12	12.04	<.0001
BLUP pac2	256.57	19.8225	12	12.94	<.0001

BLUP pac3	164.83	19.8225	12	8.32	<.0001
BLUP pac4	230.77	19.8225	12	11.64	<.0001
BLUP pac5	205.10	19.8225	12	10.35	<.0001
BLUP pac6	271.04	19.8225	12	13.67	<.0001
BLUP pac7	260.98	19.8225	12	13.17	<.0001
BLUP pac8	201.91	19.8225	12	10.19	<.0001
BLUP pac9	290.44	19.8225	12	14.65	<.0001
BLUP pac10	235.04	19.8225	12	11.86	<.0001
BLUP pac11	154.11	19.8225	12	7.77	<.0001
BLUP pac12	216.10	19.8225	12	10.90	<.0001
BLUP pac13	143.18	19.8225	12	7.22	<.0001

• Resultados R:

```
> fit3
Linear mixed-effects model fit by REML
  Data: BD2
Log-restricted-likelihood: -835.4634
Fixed: Colesterol ~ 1
(Intercept)
  220.6782

Random effects:
Formula: ~1 | Paciente
(Intercept)
StdDev:    49.80811

Formula: ~1 | Trim %in% Paciente
(Intercept) Residual
StdDev:    36.30041 39.44855

Number of Observations: 156
Number of Groups:
      Paciente Trim %in% Paciente
      13                52

> fit3$coefficients$fixed+fit3$coefficients$random$Paciente
(Intercept)
1    238.7336
2    256.5737
3    164.8346
4    230.7734
5    205.0997
6    271.0385
7    260.9758
8    201.9072
```

9	290.4397
10	235.0418
11	154.1108
12	216.1047
13	143.1831

• **Comentários sobre os resultados SAS e R**

As estimativas dos componentes de variância foram calculadas com o método REML. A estimativa da variância populacional dos valores latentes é $\hat{\gamma}^2 = (49,80811)^2 = 2480,78$, a estimativa da variância média dos erros de medida endógenos é $\hat{\sigma}^2 = (36,30041)^2 = 1317,72$ e a estimativa da variância dos erros de medida exógenos é $\hat{\sigma}^2 = (39,44855)^2 = 1556,19$.

4.4 Modelos com presença simultânea de erros de medida endógenos e exógenos heterocedásticos: análise do exemplo *Seasons Study*

Para ajustar modelos com presença simultânea de erros de medida exógenos heterocedásticos e endógenos homocedásticos ou heterocedásticos, podemos mudar no modelo misto usual (4.5) a condição $\epsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \tilde{\sigma}^2)$ pela nova condição $\epsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \tilde{\sigma}_j^2)$ para $j = 1, 2, \dots, p$, em que p é o número de diferentes condições de avaliação.

Nas Seções (4.1) e (4.2), utilizamos o mesmo conjunto de dados do *Seasons Study* como base para a simulação num modelo com erro de medida endógeno ou exógeno apenas. Na Seção (4.3), ele foi utilizado supondo presença simultânea dos dois tipos de erros de medida, com erros de medida exógenos homocedásticos. Mas pode-se notar que estamos diante de uma situação em que há presença simultânea dos dois tipos de erros de medida e, além disso, os erros de medida exógenos são heterocedásticos.

Podemos estimar as variâncias γ^2 , $\bar{\sigma}^2$ e $\tilde{\sigma}_j^2$, $j = 1, 2, 3$, e calcular os BLUP para os valores latentes correspondentes aos 13 indivíduos usando o seguinte código escrito no PROC MIXED do SAS ou com a função *lme* da sub-rotina *nlme* do R.

- Código SAS

```
proc mixed;
class Paciente Trim Entrev;
model Colesterol=;
random Paciente Trim(Paciente);
repeated / group=Entrev;
estimate 'BLUP pac1' intercept 1 | Paciente 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac2' intercept 1 | Paciente 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac3' intercept 1 | Paciente 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac4' intercept 1 | Paciente 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac5' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac6' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac7' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac8' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac9' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
estimate 'BLUP pac10' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
estimate 'BLUP pac11' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
estimate 'BLUP pac12' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
estimate 'BLUP pac13' intercept 1 | Paciente 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
run;
```

- Código R

```
BD4<-groupedData(Colesterol~Entrev|Paciente/Trim,data = BLUP)
fit4<- lme(Colesterol~1, data=BD4, random = ~1, weights=varIdent(form = ~1|Entrev))
fit4$coefficients$fixed+fit4$coefficients$random$Paciente
```

- Resultados SAS:

Model Information	
Data Set	WORK.BLUP
Dependent Variable	Colesterol
Covariance Structure	Variance Components
Group Effect	Entrev
Estimation Method	REML
Residual Variance Method	None
Fixed Effects SE Method	Model-Based
Degrees of Freedom Method	Containment

Class Level Information		
Class	Levels	Values
Paciente	13	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Trim	4	1 2 3 4
Entrev	3	1 2 3

Dimensions			
Covariance Parameters		5	
Columns in X		1	
Columns in Z		65	
Subjects		1	
Max Obs Per Subject		156	

Number of Observations			
Number of Observations Read		156	
Number of Observations Used		156	
Number of Observations Not Used		0	

Iteration History				
Iteration	Evaluations	-2 Res Log Like	Criterion	
0	1	1770.01717225		
1	2	1680.58242291	0.00000007	
2	1	1669.51971858	0.00597302	
3	1	1669.07828109	0.00186756	
4	1	1667.53022074	0.00030372	
5	1	1667.29540806	0.00001315	
6	1	1667.28603627	0.00000003	
7	1	1667.28601531	0.00000000	

Covariance Parameter Estimates			
Cov Parm	Group	Estimate	
Paciente		2455.09	
Trim(Paciente)		1312.78	
Residual	Entrev 1	1017.84	
Residual	Entrev 2	1592.82	
Residual	Entrev 3	2055.11	

Fit Statistics			
-2 Res Log Likelihood		1667.3	
AIC (smaller is better)		1677.3	
AICC (smaller is better)		1677.7	
BIC (smaller is better)		1680.1	

Estimates					
Label	Estimate	Standard			
		Error	DF	t Value	Pr > t
BLUP pac1	236.52	19.3672	12	12.21	<.0001
BLUP pac2	258.36	19.9226	12	12.97	<.0001
BLUP pac3	167.01	19.9226	12	8.38	<.0001
BLUP pac4	228.16	19.2911	12	11.83	<.0001
BLUP pac5	203.71	19.9226	12	10.22	<.0001

BLUP pac6	270.52	19.3672	12	13.97	<.0001
BLUP pac7	261.48	19.1427	12	13.66	<.0001
BLUP pac8	201.03	20.0064	12	10.05	<.0001
BLUP pac9	291.75	20.1760	12	14.46	<.0001
BLUP pac10	234.47	19.5209	12	12.01	<.0001
BLUP pac11	155.26	20.0064	12	7.76	<.0001
BLUP pac12	215.91	20.0064	12	10.79	<.0001
BLUP pac13	144.07	20.1760	12	7.14	<.0001

• Resultados R:

```
> fit4
Linear mixed-effects model fit by REML
  Data: BD4
Log-restricted-likelihood: -833.643
Fixed: Colesterol ~ 1
(Intercept)
  220.6346
Random effects:
Formula: ~1 | Paciente
(Intercept)
StdDev:    49.54864
Formula: ~1 | Trim %in% Paciente
(Intercept) Residual
StdDev:    36.23219  31.9038

Variance function:
Structure: Different standard deviations per stratum
Formula: ~1 | Entrev
Parameter estimates:
      CS      SU      KL
1.000000 1.250951 1.420942
Number of Observations: 156
Number of Groups:
      Paciente Trim %in% Paciente
      13          52

> fit4$coefficients$fixed+fit4$coefficients$random$Paciente
(Intercept)
1    236.5246
2    258.3567
3    167.0087
4    228.1593
5    203.7070
6    270.5213
7    261.4838
8    201.0274
9    291.7489
```

10	234.4670
11	155.2619
12	215.9092
13	144.0745

• **Descrição da saída:**

No SAS e no R, temos que as estimativas dos componentes de variância são iguais e foram calculadas com o método REML. A estimativa da variância populacional dos valores latentes é $\hat{\gamma}^2 = 2455,09 = (49,54864)^2$. A estimativa da média das variâncias endógenas é $\hat{\sigma} = 1312,78 = (36,23219)^2$. As estimativas das variâncias exógenas, ou para cada condição de avaliação, são $\hat{\sigma}_{CS}^2 = 1017,84 = (1 \times 31,9038)^2$, $\hat{\sigma}_{SU}^2 = 1592,82 = (1,250951 \times 31,9038)^2$ e $\hat{\sigma}_{KL}^2 = 2055,11 = (1,420942 \times 31,9038)^2$.

4.5 Discussão

O ajuste de modelos mistos com diferentes tipos de erros de medida pode ser realizado por intermédio dos pacotes computacionais disponíveis. Como o MMPF permite incorporar as duas fontes de erro de medida, endógenos e exógenos, ele pode ser utilizado para selecionar a estrutura de covariância adequada para ajustar o modelo no SAS ou no R.

Finalmente, o modelo misto para populações finitas com erros de medida endógenos e exógenos foi desenvolvido supondo uma medição em cada unidade amostral. É claro que dada a equivalência com os modelos mistos usuais, ele também pode ser usado para situações completamente desbalanceadas.

Capítulo 5

Conclusões

Concentramos nosso estudo na estimação e predição ótima de diferentes quantidades populacionais com base em dados afetados por erros de medida endógenos e exógenos, obtidos a partir de amostras de populações finitas. Utilizamos o modelo misto para populações finitas com erros de medida exógenos e endógenos baseado no enfoque proposto por Stanek III et al. (2004) e Stanek III & Singer (2004). A partir desse modelo calculamos o BLUP do valor latente da i -ésima unidade selecionada na amostra supondo conhecidas as variâncias endógenas. Quando as variâncias endógenas são heterocedásticas, o preditor obtido sob o MMPF é diferente daquele preditor obtido com o modelo misto usual, pois a constante de encolhimento depende da média das variâncias individuais. Isto indica que o BLUP obtido sob o MMPF não envolve a identificabilidade das unidades amostrais. Para tentar contornar esse problema consideramos um modelo mais geral com variáveis expandidas. Apesar de termos encontrado um preditor que leva em conta a variabilidade endógena do indivíduo, este não é aplicável pois requer o conhecimento a priori de todos os parâmetros individuais y_s , $s = 1, \dots, N$ e, conseqüentemente, ele muda para cada população, mostrando que não existe um estimador linear não enviesado e com variância uniformemente mínima para qualquer população com valores latentes $\mathbf{y} = (b_1, \dots, b_N)^\top$. Assim, obtivemos uma generalização do resultado de Godambe (1955), que mostrou que para populações finitas não existe um estimador não enviesado com variância uniformemente mínima para o total populacional na classe de estimadores lineares, *i.e.*, em que os coeficientes atribuídos às respostas observadas dependem tanto da unidade quanto da ordem de seleção na amostra selecionada, ou seja, exatamente a informação contida no

vetor de variáveis expandidas.

Comparamos, via simulação, o preditor obtido sob o modelo misto usual (utilizado conforme a interpretação usual) com o preditor obtido sob o MMPF. Na maioria das situações consideradas, o estudo de simulação mostrou que o preditor obtido sob o modelo misto usual é enviesado, mas geralmente apresenta EQM menor (ou pouco maior em alguns casos) do que o EQM do preditor obtido sob o MMPF. Além disso, o desempenho deste preditor melhora à medida que aumentam o tamanho da população finita e a fração de amostragem. Tendo claras as limitações dos estudos de simulação e percebendo que podem ser necessárias pesquisas adicionais para obter conclusões mais definitivas quando existe erro de medida endógeno heterocedástico, os nossos resultados apontam na recomendação do preditor (2.10) obtido sob os modelos mistos usuais utilizado conforme a interpretação usual.

No Capítulo 3 mostramos que existem outras classes de estimadores que são não lineares e que geram EQM menores que os preditores da classe dos preditores lineares não enviesados. Pode-se pensar em outras classes de preditores que incluam o preditor (2.10), definir e avaliar a otimalidade nessas classes.

Finalmente, pode-se ampliar este estudo incorporando ao modelo estruturas diferentes à amostragem aleatória simples, para outros modelos com erros de medida e contemplar a estimação por intervalos e testes de hipótese.

Apêndice A

Detalhes sob cálculo dos BLUP

A.1 Valor esperado e variância das variáveis aleatórias $\vec{Y}$

Dada a matriz $\mathbf{U}$, usando (2.22), a esperança condicional para as variáveis aleatórias expandidas é

$$\mathbb{E}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(\vec{Y}) = \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \text{vec}(\mathbf{U}^\top). \quad (\text{A.1})$$

Utilizando (2.21), obtemos

$$\mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\vec{Y}) = \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N) = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}). \quad (\text{A.2})$$

Para obter a variância, primeiro note que

$$\mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\vec{Y}) = \mathbb{E}_{\xi_1} \left[\text{var}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(\vec{Y}) \right] + \mathbb{V}_{\xi_1} \left[\mathbb{E}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(\vec{Y}) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Em seguida, observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{\xi_1} \left[\mathbb{E}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}) \right] &= \mathbb{V}_{\xi_1} \left\{ \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \text{vec}(\mathbf{U}^\top) \right\} \\
&= \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \frac{1}{N-1} (\mathbf{P}_N \otimes \mathbf{P}_N) \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \\
&= \frac{1}{N-1} \left[\mathbf{I}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \left[\mathbf{P}_N \otimes \left(\mathbf{P}_N \bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \\
&= \frac{1}{N-1} \left[\mathbf{P}_N \otimes \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \mathbf{P}_N \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \right] \\
&= \mathbf{P}_N \otimes \Delta,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

em que $\Delta = \frac{1}{N-1} \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right) \mathbf{P}_N \left(\bigoplus_{s=1}^N y_s \right)$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}) &= \mathbb{V}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1} \left[\text{vec} \left(\vec{\mathbf{Y}}_1 \ \vec{\mathbf{Y}}_2 \ \dots \ \vec{\mathbf{Y}}_N \right) \right] \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{V}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_1) & \dots & \text{cov}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_1, \vec{\mathbf{Y}}_N^\top) \\ \text{cov}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_2, \vec{\mathbf{Y}}_1^\top) & \dots & \text{cov}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_2, \vec{\mathbf{Y}}_N^\top) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_N, \vec{\mathbf{Y}}_1^\top) & \dots & \mathbb{V}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_N) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

em que $\text{cov}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_i, \vec{\mathbf{Y}}_j^\top) = \mathbf{0}_N$, $i \neq j$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$. Dada a independência entre os dois tipos de erros de medida podemos escrever

$$\mathbb{V}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_i) = \mathbb{V}_{\xi_2 | \xi_1} \left\{ \left(\bigoplus_{s=1}^N U_{is} \right) \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \right\} + \mathbb{V}_{\xi_3 | \xi_1} \left\{ \tilde{W}_i \begin{pmatrix} U_{i1} \\ \vdots \\ U_{iN} \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.6}$$

Então

$$\mathbb{V}_{\xi_2 \xi_3 | \xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_i) = \bigoplus_{s=1}^N (U_{is} \sigma_s^2) + \tilde{\sigma}_i^2 \begin{pmatrix} U_{i1}^2 & U_{i1}U_{i2} & \dots & U_{i1}U_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{iN}U_{i1} & U_{iN}U_{i2} & \dots & U_{iN}^2 \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Dado que $\mathbb{E}_{\xi_1} (U_{ij}^2) = \frac{1}{N}$ e $\mathbb{E}_{\xi_1} (U_{ij}U_{ik}) = 0, j \neq k, i = 1, \dots, N$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi_1} \left[\mathbb{V}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}_i) \right] &= \mathbb{E}_{\xi_1} \left[\bigoplus_{s=1}^N (U_{is}\sigma_s^2) + \tilde{\sigma}_i^2 \begin{pmatrix} U_{i1}^2 & U_{i1}U_{i2} & \dots & U_{i1}U_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{iN}U_{i1} & U_{iN}U_{i2} & \dots & U_{iN}^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \bigoplus_{s=1}^N \left(\frac{1}{N} \sigma_s^2 \right) + \tilde{\sigma}_i^2 \left(\bigoplus_{s=1}^N \frac{1}{N} \right) \\ &= \frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N (\sigma_s^2 + \tilde{\sigma}_i^2). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Então,

$$\mathbb{E}_{\xi_1} \left[\mathbb{V}_{\xi_2\xi_3|\xi_1}(\vec{\mathbf{Y}}) \right] = \mathbf{I}_N \otimes \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N, \quad (\text{A.9})$$

e, finalmente, obtemos

$$\mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\vec{\mathbf{Y}}) = \mathbf{P}_N \otimes \Delta + \mathbf{I}_N \otimes \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Valor esperado e variância das variáveis aleatórias $\tilde{\mathbf{Y}}$

Dado que $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{L} \vec{\mathbf{Y}}$, com $\mathbf{L} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}_N^\top$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}) &= \mathbf{L} \mathbb{E}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\vec{\mathbf{Y}}) \\ &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{1}_N^\top) \left(\frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_N) \right) \mathbf{y} \\ &= \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N^\top) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{1}_N \mu \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\tilde{\mathbf{Y}}) &= \mathbf{L} \mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\vec{\mathbf{Y}}) \mathbf{L}^\top \\ &= \mathbf{L} \left[\mathbf{P}_N \otimes \Delta + \mathbf{I}_N \otimes \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{s=1}^N \sigma_s^2 \right) + \left(\frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2 \right) \otimes \mathbf{I}_N \right] \mathbf{L}^\top \\ &= \gamma^2 \mathbf{P}_N + \bar{\sigma}^2 \mathbf{I}_N + \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

em que $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \sigma_s^2$ e $\gamma^2 = \mathbf{1}_N^\top \Delta \mathbf{1}_N = \frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N (y_s - \mu)^2$.

A.3 Obtenção do BLUP usando as variáveis $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}$

Um estimador linear não enviesado de variância mínima de $T = \mathbf{g}'_I \ddot{\mathbf{Y}}_I + \mathbf{g}'_{II} \ddot{\mathbf{Y}}_{II}$ baseado nas variáveis aleatórias $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}$ deve satisfazer as seguintes três condições:

- i) Deve ser uma função linear das variáveis aleatórias observadas na amostra, i.e.,

$$\hat{T} = (\mathbf{g}'_I + \mathbf{a}') \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I,$$

em que $\mathbf{g}_I$ é um vetor de constantes conhecidas.

- ii) Deve ser não enviesado, i.e., $\mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{T} - T) = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{T} - T) &= \mathbb{E}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}((\mathbf{g}'_I + \mathbf{a}') \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{g}'_I \mathbf{Y}_I - \mathbf{g}'_{II} \mathbf{Y}_{II}) \\ &= \mathbf{g}'_I \mathbf{X}_I \mathbf{y} + \mathbf{a}' \mathbf{X}_I \mathbf{y} - \mathbf{g}'_I \mathbf{X}_I \mathbf{y} - \mathbf{g}'_{II} \mathbf{X}_{II} \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{a}' \mathbf{X}_I - \mathbf{g}'_{II} \mathbf{X}_{II}) \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Para que esta expressão seja zero para todo valor de $\mathbf{y}$, deve-se satisfazer que $(\mathbf{a}' \mathbf{X}_I - \mathbf{g}'_{II} \mathbf{X}_{II}) = 0$, isto introduz uma restrição quando minimizamos o erro quadrático médio.

- iii) Deve minimizar a $\mathbb{V}(\hat{T} - T)$.

Primeiro note que

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} & \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} & \ddot{\mathbf{V}}_{II} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{em que } \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{V}}_I & \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \\ \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} & \ddot{\mathbf{V}}_{II} \end{pmatrix} = \mathbb{V}_{\xi_1} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{Y}}_I \\ \ddot{\mathbf{Y}}_{II} \end{pmatrix} \text{ e } \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}_I = \mathbb{V}_{\xi_1 \xi_3 \xi_3} \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{Y}}_I \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\hat{T} - T) &= ((g'_I + a') - g'_I - g'_{II}) \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I & \ddot{V}_I & \ddot{V}_{I,II} \\ \ddot{V}_I & \ddot{V}_I & \ddot{V}_{I,II} \\ \ddot{V}_{II,I} & \ddot{V}_{II,I} & \ddot{V}_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g_I + a) \\ -g_I \\ -g_{II} \end{pmatrix} \\ &= (a' - g'_{II}) \begin{pmatrix} \ddot{V}_I & \ddot{V}_{I,II} \\ \ddot{V}_{II,I} & \ddot{V}_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -g_{II} \end{pmatrix} + (g'_I + a') \mathbf{V}_I^* (g_I + a),\end{aligned}$$

em que $\mathbf{V}_I^* = \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I - \ddot{\mathbf{V}}_I$. Expandindo esta expressão, temos

$$\mathbb{V}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(\hat{T} - T) = a' \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I a + 2(g'_I \mathbf{V}_I^* - g'_{II} \ddot{\mathbf{V}}_{II,I}) a + g'_{II} \ddot{\mathbf{V}}_{II} g_{II} + g'_I \mathbf{V}_I^* g_I.$$

Incluindo a restrição de não enviesamento via multiplicadores de Lagrange, nosso objetivo é encontrar o valor de a que minimize

$$f(a, \lambda) = a' \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I a + 2(g'_I \mathbf{V}_I^* - g'_{II} \ddot{\mathbf{V}}_{II,I}) a + g'_{II} \ddot{\mathbf{V}}_{II} g_{II} + g'_I \mathbf{V}_I^* g_I + 2\lambda(a' \mathbf{X}_I - g'_{II} \mathbf{X}_{II}).$$

Derivando com relação a a e λ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial a} &= 2 \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I a + 2(\mathbf{V}_I^* g_I - \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} g_{II}) + 2\lambda \mathbf{X}_I \\ \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} &= 2(\mathbf{X}'_I a - \mathbf{X}'_{II} g_{II}).\end{aligned}$$

Igualando a zero simultaneamente as duas equações, temos

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\hat{a}, \hat{\lambda})}{\partial a} \\ \frac{\partial f(\hat{a}, \hat{\lambda})}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I & \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}'_I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_I^* g_I + \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} g_{II} \\ \mathbf{X}'_{II} g_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{V}}_I & \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}'_I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_I^* g_I + \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} g_{II} \\ \mathbf{X}'_{II} g_{II} \end{pmatrix}.$$

Para resolver este sistema de equações, usamos o seguinte resultado de matrizes inversas particionadas:

Se

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

então

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix},$$

em que a matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Em consequência,

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{V}}_I & \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}'_I & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} - \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \mathbf{X}_I \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{X}'_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} & \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \mathbf{X}_I \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{X}'_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} & -\mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix},$$

em que $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} & \mathbf{X}_I \end{pmatrix}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= \left[\vec{\mathbf{V}}_I^{-1} - \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \mathbf{X}_I \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{X}'_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \right] \left(-\mathbf{V}_I^* \mathbf{g}_I + \ddot{\mathbf{V}}_{I,II} \mathbf{g}_{II} \right) \\ &+ \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \mathbf{X}_I \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{X}'_{II} \mathbf{g}_{II}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

e o melhor preditor linear não enviesado obtém-se substituindo $\mathbf{a}$ por $\hat{\mathbf{a}}$. Então,

$$\hat{T} = \mathbf{g}'_I \left[\mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \ddot{\mathbf{V}}_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \left(\vec{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right) \right] + \mathbf{g}'_{II} \left[\mathbf{X}_{II} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \ddot{\mathbf{V}}_{II,I} \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \left(\vec{\mathbf{Y}}_I - \mathbf{X}_I \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right) \right], \quad (\text{A.15})$$

em que $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} & \mathbf{X}_I \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{X}'_I \vec{\mathbf{V}}_I^{-1} \vec{\mathbf{Y}}_I$.

A.4 Obtenção da variância de $\hat{P}$ usando as variáveis $\tilde{Y}$

De forma geral,

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P} - P) = \hat{\mathbf{a}}' \tilde{\mathbf{V}}_I \hat{\mathbf{a}} + 2\hat{\mathbf{a}}' (\mathbf{V}_I^* \mathbf{g}_I - \mathbf{V}_{II,I} \mathbf{g}_{II}) + \mathbf{g}'_I \mathbf{V}_I^* \mathbf{g}_I + \mathbf{g}'_{II} \mathbf{V}_{II} \mathbf{g}_{II}.$$

Usando as variáveis aleatórias $\tilde{Y}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I &= \mathbf{1}_n, \\ \mathbf{X}_{II} &= \mathbf{1}_{N-n}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_I &= \gamma^2 \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right] + \bar{\sigma}^2 \mathbf{I}_n + \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_I &= \gamma^2 \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n \right], \\
\mathbf{V}_{II,I} &= -\frac{\gamma^2}{N} \mathbf{J}_{(N-n) \times n}, \\
\mathbf{V}_I^* &= \bigoplus_{i=1}^n (\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2), \\
\tilde{\mathbf{V}}_I^{-1} &= \bigoplus_{i=1}^n (\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1} + \frac{\gamma^2}{N - \gamma^2 L} \mathbf{m} \mathbf{m}',
\end{aligned}$$

em que $L = \sum_{i=1}^n (\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1}$ e $\mathbf{m}$ é um vetor n dimensional com i -ésima componente igual a $(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^{-1}$.

Quando $i \leq n$, $\mathbf{g}_{II} = \mathbf{0}$ e $\hat{\mathbf{a}}' = \left(0 \cdots \frac{-(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)}{(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)} \cdots 0 \right)' + \frac{(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)}{L(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)} \mathbf{m}'$. Também,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{a}}' \tilde{\mathbf{V}}_I \hat{\mathbf{a}} &= \frac{(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}{(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)} - \frac{(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}{L(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2} \\
\mathbf{g}_I' \mathbf{V}_I^* \mathbf{g}_I &= (\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2) \\
2\hat{\mathbf{a}}' \mathbf{V}_I^* \mathbf{g}_I &= \frac{-2(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}{(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)} + \frac{2(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}{L(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P}_i - P_i) = \frac{(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}{L(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2} - \frac{(\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)^2}{(\gamma^2 + \bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2)} + (\bar{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2), \quad i \leq n.$$

Quando $i > n$, $\mathbf{g}_I = \mathbf{0}$ e $\hat{\mathbf{a}}' = \frac{1}{L} \mathbf{m}'$. Também

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{a}}' \tilde{\mathbf{V}}_I \hat{\mathbf{a}} &= \frac{1}{L} - \frac{\gamma^2}{N}, \\
\mathbf{g}_{II}' \mathbf{V}_{II} \mathbf{g}_{II} &= \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{N}, \\
-2\hat{\mathbf{a}}' \mathbf{V}_{II,I} \mathbf{g}_{II} &= 2\frac{\gamma^2}{N}
\end{aligned}$$

e

$$\mathbb{V}_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(\hat{P}_i - P_i) = \frac{1}{L} + \gamma^2, \quad i > n.$$

Apêndice B

Dados do Nível de Colesterol

```
data blup;
input Paciente Trim Rep Entrev Colesterol;
datalines;
1 1 1 1 180.6
1 1 2 1 206.9
1 1 3 1 234.8
1 2 1 1 171.3
1 2 2 1 174.3
1 2 3 1 185.7
1 3 1 2 288
1 3 2 2 342.9
1 3 3 2 278.4
1 4 1 2 276.2
1 4 2 2 305.3
1 4 3 2 260.5
.
.
.
13 3 1 3 182
13 3 2 3 104.5
13 3 3 3 118.5
13 4 1 2 107.1
13 4 2 2 192.9
13 4 3 2 89.1
;
proc print;
```

Tabela B.1: Dados do nível de colesterol.

Nome	Data	Exam.	Colesterol	Trim.	Nome	Data	Exam.	Colest.	Trim.
1	13/05/1996	CS	180,6	1	4	06/01/1995	CS	235,2	1
1	15/05/1996	CS	206,9	1	4	08/01/1995	CS	288,1	1
1	17/05/1996	CS	234,8	1	4	17/01/1995	CS	232	1
1	12/08/1996	CS	171,3	2	4	28/04/1995	CS	199,9	2
1	16/08/1996	CS	174,3	2	4	02/05/1995	CS	122,2	2
1	20/08/1996	CS	185,7	2	4	04/05/1995	CS	228,2	2
1	09/11/1996	SU	288	3	4	20/07/1995	KL	345,5	3
1	13/11/1996	SU	342,9	3	4	27/07/1995	KL	196,5	3
1	17/11/1996	SU	278,4	3	4	01/08/1995	KL	365,5	3
1	13/02/1997	SU	276,2	4	4	24/10/1995	CS	219,7	4
1	21/02/1997	SU	305,3	4	4	26/10/1995	CS	130,8	4
1	23/02/1997	SU	260,5	4	4	29/10/1995	CS	228,1	4
2	10/07/1996	CS	287,1	1	5	20/01/1995	KL	209,1	1
2	13/07/1996	CS	322,8	1	5	22/01/1995	KL	214	1
2	14/07/1996	CS	294,8	1	5	24/01/1995	KL	336,2	1
2	20/10/1996	KL	241,1	2	5	30/04/1995	KL	164	2
2	22/10/1996	KL	208,2	2	5	02/05/1995	KL	174,6	2
2	23/10/1996	KL	258,4	2	5	04/05/1995	KL	229,1	2
2	15/01/1997	KL	223,3	3	5	30/07/1995	CS	175,6	3
2	17/01/1997	KL	213,1	3	5	06/08/1995	CS	153,7	3
2	22/01/1997	KL	255,3	3	5	08/08/1995	CS	176,9	3
2	04/04/1997	SU	304,2	4	5	21/10/1995	SU	198,5	4
2	08/04/1997	SU	305,8	4	5	22/10/1995	SU	216,8	4
2	14/04/1997	SU	244,5	4	5	27/10/1995	SU	178,1	4
3	22/12/1994	KL	146	1	6	03/05/1995	CS	244,6	1
3	28/12/1994	KL	144,6	1	6	07/05/1995	CS	262,6	1
3	03/01/1995	KL	45,6	1	6	08/05/1995	CS	275,3	1
3	09/04/1995	KL	141	2	6	22/07/1995	CS	248,1	2
3	12/04/1995	KL	183,6	2	6	25/07/1995	CS	308,8	2
3	18/04/1995	KL	165,6	2	6	06/08/1995	CS	235	2
3	09/07/1995	SU	129	3	6	16/10/1995	SU	318,2	3
3	11/07/1995	SU	151,3	3	6	18/10/1995	SU	312,7	3
3	14/07/1995	SU	110,6	3	6	28/10/1995	SU	352,7	3
3	01/10/1995	CS	179,4	4	6	15/01/1996	SU	289	4
3	04/10/1995	CS	265,3	4	6	18/01/1996	SU	235,7	4
3	12/10/1995	CS	192	4	6	27/01/1996	SU	281,6	4

Tabela B.2: Continuação: dados do nível de colesterol.

Nome	Data	Exam.	Colesterol	Trim.	Nome	Data	Exam.	Colest.	Trim.
7	25/05/1995	CS	277	1	11	08/01/1996	SU	133,6	1
7	31/05/1995	CS	265,9	1	11	09/01/1996	SU	164,7	1
7	04/06/1995	CS	305,3	1	11	13/01/1996	SU	179,7	1
7	09/08/1995	CS	288	2	11	30/03/1996	KL	95,1	2
7	12/08/1995	CS	322,2	2	11	31/03/1996	KL	100,2	2
7	20/08/1995	CS	349	2	11	02/04/1996	KL	84,3	2
7	05/11/1995	CS	169,3	3	11	28/06/1996	SU	169,3	3
7	10/11/1995	CS	229,6	3	11	01/07/1996	SU	173,4	3
7	16/11/1995	CS	221,5	3	11	07/07/1996	SU	155	3
7	06/02/1996	SU	245,8	4	11	05/10/1996	SU	110,9	4
7	09/02/1996	SU	300,9	4	11	11/10/1996	SU	167	4
7	19/02/1996	SU	246,7	4	11	14/10/1996	SU	168,3	4
8	31/08/1995	SU	156,6	1	12	06/02/1996	SU	184,6	1
8	04/09/1995	SU	272,5	1	12	16/02/1996	SU	223,8	1
8	08/09/1995	SU	175,4	1	12	18/02/1996	SU	159,7	1
8	18/12/1995	KL	243,4	2	12	09/05/1996	KL	282	2
8	19/12/1995	KL	222,7	2	12	10/05/1996	KL	167	2
8	22/12/1995	KL	306,1	2	12	13/05/1996	KL	235,5	2
8	03/03/1996	SU	211,8	3	12	05/08/1996	SU	305,2	3
8	08/03/1996	SU	171,1	3	12	08/08/1996	SU	199,3	3
8	09/03/1996	SU	131,9	3	12	18/08/1996	SU	227,7	3
8	31/05/1996	SU	154,9	4	12	08/11/1996	SU	178,2	4
8	09/06/1996	SU	181,5	4	12	10/11/1996	SU	177,3	4
8	13/06/1996	SU	153,3	4	12	14/11/1996	SU	242,8	4
9	17/09/1995	KL	223,8	1	13	01/03/1996	SU	166,1	1
9	21/09/1995	KL	218,9	1	13	04/03/1996	SU	118,1	1
9	22/09/1995	KL	194,8	1	13	09/03/1996	SU	142	1
9	17/12/1995	KL	233,3	2	13	20/05/1996	KL	110,9	2
9	20/12/1995	KL	299,7	2	13	21/05/1996	KL	115,7	2
9	22/12/1995	KL	307,7	2	13	24/05/1996	KL	99,2	2
9	04/03/1996	SU	326,1	3	13	26/08/1996	KL	182	3
9	08/03/1996	SU	414,8	3	13	28/08/1996	KL	104,5	3
9	12/03/1996	SU	381,7	3	13	29/08/1996	KL	118,5	3
9	30/05/1996	SU	459,1	4	13	22/11/1996	SU	107,1	4
9	09/06/1996	SU	271,3	4	13	24/11/1996	SU	192,9	4
9	12/06/1996	SU	309	4	13	27/11/1996	SU	89,1	4
10	19/10/1995	KL	292,7	1					
10	22/10/1995	KL	284,5	1					
10	26/10/1995	KL	229,2	1					
10	08/01/1996	SU	183,2	2					
10	10/01/1996	SU	251,5	2					
10	19/01/1996	SU	201,8	2					
10	05/04/1996	CS	226,5	3					
10	09/04/1996	CS	249,4	3					
10	15/04/1996	CS	236,2	3					
10	10/07/1996	CS	225	4					
10	13/07/1996	CS	257	4					
10	15/07/1996	CS	215,4	4

Figura B.1: Dados das medições de *Colesterol* dos indivíduos 1, 2, 3 e 4.

Figura B.2: Dados das medições de *Colesterol* dos indivíduos 5, 6, 7 e 8.

Figura B.3: Dados das medições de *Colesterol* dos indivíduos 9, 10, 11 e 12.

Apêndice C

Códigos R do Capítulo 3

C.1 Código R Seção 3.2

```
require(combinat)
require(xtable)

#DADOS E CONSTANTES DE ENCOLHIMENTO
N=3
n=2
combNn=choose(N,n)
Factn=factorial(n)

#GERAÇÃO DOS INDICES AMOSTRAIS
g<-combn(1:N,n)
C<-D<-matrix(0,combNn*Factn,n)
for(j in 1:combNn){
  amostra<-permn(g[,j])
  for(i in 1:Factn){
    a<-Factn*(j-1)+i
    D[a,]<-amostra[[i]]
  }
}

##99 VEZES GAMMA
#VALORES LATENTES DAS UNIDADES DA POPULAÇÃO
y<-c(10,3,2)
gamma<-var(y)
var_se<-c(1,100,4)
var_e<-gamma

#CENARIOS DE SIMULAÇÃO
```

```

ll=1
sigma<-matrix(0,1000,N)
for(i in 1:1000){
  var_sei <- rbeta(N, shape1=1, shape2=0.5)
  sigma[ll,]<-var_e*(var_sei/mean(var_sei))
  ll<-ll+1
}

#SIMULACAO DAS RESPOSTAS E CÁLCULO DOS PREDITORES
Repli<-10000
AM<-combNn*Factn*Repli
B<-A<-E<-L<-matrix(0,AM,n)
R<-matrix(0,1000,11)
p=0
for(d in 1:1000){
  sigm<-sigma[d,]
  wi=1/(gamma + sigma[d,])
  ki=gamma/(gamma + sigma[d,])
  k=gamma/(gamma + mean(sigma[d,]))
  vse<-sigma[d,]
  dados<-cbind(1:N,y,vse,wi,ki,k)

  h=0
  for(i in 1:(combNn*Factn)){
    for(j in 1:Repli){
      h<-h+1
      L[h,]<-dados[D[i,],2]

      e <- (rgamma(n, shape=2)-2)/sqrt(2)
      B[h,]<-c(dados[D[i,],2]+sqrt(dados[D[i,],3])*e)

      #BLUP MODELOS MISTOS USUAIS (K'S DIFERENTES)
      Yb <-sum((dados[D[i,],5]*B[h,])/sum(dados[D[i,],5]))
      Pred<- Yb + dados[D[i,],5]*(B[h,]-Yb)
      A[h,]<-Pred

      #BLUP MMPF (K CONSTANTE)
      YbH <-sum((dados[D[i,],6]*B[h,])/sum(dados[D[i,],6]))
      PredH<- YbH + dados[D[i,],6]*(B[h,]-YbH)
      E[h,]<-PredH
    }}

  #VIÉS E ERRO QUADRÁTICO MÉDIO EMPIRÍCO BLUP-MM E BLUP-FMMP
  R[d,1]<-d
  R[d,2]<-mean(colMeans(B)) #valores simulados

```

```

R[d,3]<-mean(colMeans(A))
R[d,4]<-mean(colMeans(E))
R[d,5]<-mean(colMeans((A-L)^2))
R[d,6]<-mean(colMeans((E-L)^2))
R[d,7]<-R[d,5]-R[d,6]
R[d,8]<-R[d,5]/R[d,6]
R[d,9]<-(sd(sigm)/mean(sigm))
R[d,10]<-max(100*(A-L)/L)
R[d,11]<-max(100*(E-L)/L)
if(R[d,7]<=0) {p<-p+1}
}

postscript('G232se99s.ps')
plot(R[,9],R[,8], xlab="Índice de heterocedasticidade das variâncias endógenas",
ylab="BLUP/BLUPPF", ylim=c(0,1.1), main="Distribuição Gama para os erros endógenos. N=3, n=2")
mtext(expression(sigma[e]^2==99 * gamma^2),l=0.3)
abline(h=1)
dev.off()

write.matrix(R,"gama232se99s.txt")

```

C.2 Resultados da Simulação para $N = 3$ e $n = 2$

Tabela C.1: Estatísticas descritivas para os quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EQM[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Uniforme para $N = 3$ e $n = 2$

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Mínimo	Q_1	Mediana	Média	Q_3	Máximo
19	0,127	0,789	0,915	0,864	0,980	1,000
4	0,416	0,844	0,938	0,899	0,987	1,000
1	0,524	0,914	0,969	0,943	0,993	1,005
1/4	0,781	0,969	0,990	0,980	0,999	1,008
1/19	0,947	0,993	0,998	0,995	1,000	1,004
1/99	0,988	0,998	1,000	0,999	1,000	1,002

Figura C.1: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Normal para $N = 3$ e $n = 2$

Figura C.2: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta simétrica para $N = 3$ e $n = 2$

Figura C.3: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta assimétrica para $N = 3$ e $n = 2$

Figura C.4: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Exponencial para $N = 3$ e $n = 2$

Figura C.5: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Gama para $N = 3$ e $n = 2$

Tabela C.2: Estatísticas descritivas para os quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta simétrica para $N = 3$ e $n = 2$

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Mínimo	Q_1	Mediana	Média	Q_3	Máximo
19	0,2441	0,8037	0,9186	0,8674	0,9806	1,000
4	0,3543	0,8519	0,9438	0,9023	0,9833	1,000
1	0,5176	0,9152	0,9683	0,9457	0,9933	1,004
1/4	0,7961	0,9713	0,9908	0,9815	1,000	1,010
1/19	0,9522	0,9921	0,9975	0,9949	1,000	1,004
1/99	0,9880	0,9985	0,9996	0,999	1,000	1,001

Tabela C.3: Estatísticas descritivas para os quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Beta assimétrica para $N = 3$ e $n = 2$

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Mínimo	Q_1	Mediana	Média	Q_3	Máximo
19	0,293	0,768	0,920	0,859	0,979	1,000
4	0,222	0,777	0,918	0,860	0,980	1,000
1	0,375	0,863	0,946	0,911	0,984	1,000
1/4	0,743	0,944	0,978	0,965	0,995	1,000
1/19	0,921	0,986	0,994	0,990	0,998	1,000
1/99	0,982	0,997	0,999	0,998	1,000	1,000

Tabela C.4: Estatísticas descritivas para os quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Exponencial para $N = 3$ e $n = 2$

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Mínimo	Q_1	Mediana	Média	Q_3	Máximo
19	0,234	0,787	0,919	0,860	0,975	1,000
4	0,305	0,847	0,935	0,899	0,982	1,001
1	0,607	0,914	0,968	0,945	0,993	1,007
1/4	0,787	0,970	0,990	0,980	1,000	1,011
1/19	0,945	0,993	0,997	0,995	1,000	1,005
1/99	0,987	0,999	1,000	0,999	1,000	1,002

Tabela C.5: Estatísticas descritivas para os quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição Gama para $N = 3$ e $n = 2$

$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Mínimo	Q_1	Mediana	Média	Q_3	Máximo
19	0,227	0,785	0,919	0,862	0,979	1,000
4	0,318	0,835	0,936	0,895	0,986	1,000
1	0,523	0,915	0,969	0,945	0,993	1,005
1/4	0,816	0,972	0,990	0,982	1,000	1,009
1/19	0,938	0,992	0,998	0,995	1,000	1,005
1/99	0,989	0,998	1,000	0,999	1,000	1,001

Apêndice D

Resultados da Simulação para outros valores de N e n

Tabela D.1: Número de populações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ de um total de 500 populações simuladas com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à esquerda

N	n	$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Normal	Uniforme	Beta Simétrica	Beta Assimétrica	Exponencial	Gama
50	5	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	492	493	495	494	488	493
		1/4	476	470	482	470	476	474
		1/19	448	462	454	457	451	453
		1/99	444	423	420	437	422	413
50	10	19	500	500	500	500	500	500
		4	498	500	500	500	500	500
		1	490	489	491	495	487	488
		1/4	465	470	475	467	472	467
		1/19	450	436	457	450	448	462
		1/99	431	443	445	442	439	433
50	25	19	500	500	500	500	500	500
		4	497	499	498	495	499	499
		1	479	485	482	485	482	483
		1/4	464	461	468	470	469	466
		1/19	455	457	453	464	449	438
		1/99	430	439	447	442	435	441
100	10	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	499	498	496	497	499	497
		1/4	488	494	482	492	486	481
		1/19	474	477	469	480	476	469
		1/99	453	465	459	461	442	453
100	30	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	498	499	499	500
		1	494	495	488	492	494	495
		1/4	495	484	489	487	483	493
		1/19	462	470	470	465	482	471
		1/99	463	465	461	463	459	460
100	50	19	500	500	500	500	500	500
		4	499	500	499	499	496	496
		1	489	499	493	493	493	494
		1/4	488	499	493	480	490	488
		1/19	472	497	468	477	468	474
		1/99	472	492	464	462	479	474
300	30	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	499	500	500	500	500
		1	499	492	499	500	499	497
		1/4	496	489	497	498	499	497
		1/19	492	478	498	495	495	495
		1/99	486	466	489	486	485	483
300	50	19	500	500	500	500	500	500
		4	499	500	500	500	499	500
		1	500	499	500	499	498	499
		1/4	497	498	499	499	495	496
		1/19	496	493	496	494	492	496
		1/99	483	492	486	485	484	490
300	100	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	499	500	499	500
		1	499	499	499	499	499	499
		1/4	500	500	496	495	497	499
		1/19	499	495	494	496	492	497
		1/99	498	486	493	490	489	489

Tabela D.2: Número de populações em que o preditor $\hat{Q}_i^{(1)}$ tem menor erro quadrático médio que o preditor $\hat{Q}_i^{(2)}$ de um total de 500 populações simuladas com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à direita

N	n	$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Normal	Uniforme	Beta Simétrica	Beta Assimétrica	Exponencial	Gama
50	5	19	500	500	500	500	499	500
		4	499	500	500	500	500	500
		1	496	491	497	493	497	495
		1/4	493	475	480	476	482	482
		1/19	463	454	461	460	450	457
		1/99	437	428	430	432	433	434
50	10	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	499	500	500	500	500
		1	486	489	492	485	491	485
		1/4	465	476	477	474	472	469
		1/19	460	457	447	462	454	452
		1/99	437	432	446	443	452	440
50	25	19	500	500	500	500	500	500
		4	497	499	492	500	496	499
		1	484	481	488	485	484	482
		1/4	470	478	464	464	476	464
		1/19	459	452	456	455	448	459
		1/99	427	435	451	454	433	452
100	10	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	495	500	499	499	498	498
		1/4	488	491	494	485	487	490
		1/19	478	477	482	474	459	478
		1/99	453	456	456	468	450	449
100	30	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	498	500	498	499	499
		1	495	492	497	495	489	494
		1/4	484	481	489	482	487	486
		1/19	476	468	477	478	462	465
		1/99	464	463	470	465	463	461
100	50	19	500	500	500	500	500	500
		4	497	497	498	499	499	498
		1	496	497	492	491	488	493
		1/4	488	488	491	483	484	486
		1/19	473	473	469	471	474	472
		1/99	467	464	476	463	457	464
300	30	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	499	500	500	500	499	499
		1/4	497	497	499	499	496	498
		1/19	498	495	494	494	494	492
		1/99	481	483	490	485	486	481
300	50	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	500	497	498	498	499	499
		1/4	498	500	500	497	497	497
		1/19	496	494	491	496	489	497
		1/99	492	488	493	488	486	491
300	100	19	500	500	500	500	500	500
		4	500	500	500	500	500	500
		1	498	500	500	500	500	499
		1/4	499	500	499	500	498	498
		1/19	498	495	496	497	498	498
		1/99	493	494	490	490	489	484

Tabela D.3: Valor máximo do quociente $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à esquerda

N	n	$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Normal	Uniforme	Beta Simétrica	Beta Assimétrica	Exponencial	Gama
50	5	19	0.977	0.958	0.973	0.974	0.980	0.973
		4	0.998	0.981	0.988	0.976	0.989	0.980
		1	1.014	1.026	1.035	1.013	1.020	1.096
		1/4	1.068	1.128	1.170	1.184	1.137	1.293
		1/19	1.256	1.140	1.124	1.217	1.084	1.063
		1/99	1.045	1.103	1.048	1.049	1.073	1.054
50	10	19	0.974	0.955	0.967	0.983	0.978	0.968
		4	1.025	0.991	0.992	0.989	0.997	0.995
		1	1.050	1.030	1.072	1.019	1.058	1.025
		1/4	1.089	1.100	1.160	1.125	1.090	1.094
		1/19	1.130	1.279	1.344	1.189	1.272	1.050
		1/99	1.091	1.140	1.031	1.090	1.142	1.159
50	25	19	0.983	0.974	0.985	0.988	0.979	0.987
		4	1.020	1.004	1.022	1.011	1.016	1.002
		1	1.049	1.034	1.095	1.055	1.066	1.042
		1/4	1.103	1.133	1.060	1.282	1.151	1.123
		1/19	1.076	1.106	1.181	1.240	1.603	1.333
		1/99	1.071	1.091	1.065	1.177	1.078	1.041
100	10	19	0.984	0.956	0.974	0.979	1.000	0.990
		4	0.996	0.992	0.982	0.988	0.987	0.986
		1	1.011	1.004	1.027	1.013	1.001	1.019
		1/4	1.078	1.010	1.078	1.054	1.057	1.052
		1/19	1.061	1.071	1.062	1.107	1.349	1.065
		1/99	1.019	1.095	1.068	1.026	1.080	1.177
100	30	19	0.981	0.993	0.973	0.979	0.979	0.974
		4	1.000	1.000	1.010	1.003	1.002	1.000
		1	1.015	1.087	1.038	1.036	1.035	1.014
		1/4	1.017	1.050	1.026	1.039	1.066	1.028
		1/19	1.048	1.115	1.073	1.097	1.121	1.104
		1/99	1.015	1.163	1.029	1.016	1.075	1.049
100	50	19	0.982	0.983	0.984	0.987	0.988	0.989
		4	1.011	1.001	1.001	1.007	1.008	1.010
		1	1.034	1.051	1.013	1.031	1.064	1.024
		1/4	1.050	1.051	1.019	1.076	1.061	1.037
		1/19	1.080	1.075	1.043	1.293	1.134	1.071
		1/99	1.099	1.014	1.102	1.018	1.087	1.099
300	30	19	0.972	0.982	0.981	0.982	0.982	0.990
		4	0.991	0.993	0.996	0.989	0.993	0.993
		1	1.003	1.001	1.000	0.986	1.006	1.006
		1/4	1.006	1.005	1.001	1.004	1.005	1.008
		1/19	1.011	1.010	1.001	1.008	1.019	1.017
		1/99	1.020	1.007	1.007	1.035	1.015	1.026
300	50	19	0.980	0.987	0.985	0.986	0.988	0.983
		4	1.004	0.996	0.995	0.997	1.002	0.998
		1	0.997	1.001	0.993	1.008	1.011	1.001
		1/4	1.004	1.007	1.003	1.001	1.004	1.014
		1/19	1.007	1.011	1.008	1.010	1.041	1.004
		1/99	1.007	1.018	1.003	1.009	1.009	1.025
300	100	19	0.993	0.990	0.988	0.991	0.990	0.991
		4	0.996	0.993	1.000	0.995	1.000	0.996
		1	1.001	1.006	1.005	1.002	1.005	1.016
		1/4	0.997	0.998	1.014	1.016	1.009	1.001
		1/19	1.005	1.051	1.012	1.043	1.042	1.002
		1/99	1.039	1.051	1.016	1.018	1.037	1.081

Tabela D.4: Valor máximo do quociente $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ com valores latentes seguindo uma distribuição assimétrica à direita

N	n	$\bar{\sigma}^2/\gamma^2$	Normal	Uniforme	Beta Simétrica	Beta Assimétrica	Exponencial	Gama
50	5	19	0.976	0.965	0.975	0.979	1.006	0.989
		4	1.000	0.990	0.990	0.990	0.988	0.995
		1	1.010	1.043	1.063	1.039	1.017	1.029
		1/4	1.094	1.166	1.081	1.128	1.047	1.157
		1/19	1.095	1.164	1.243	1.326	1.062	1.355
		1/99	1.051	1.034	1.088	1.125	1.058	1.259
50	10	19	0.972	0.965	0.962	0.984	0.991	0.985
		4	0.985	1.006	0.998	0.993	0.991	0.994
		1	1.055	1.055	1.049	1.039	1.033	1.050
		1/4	1.289	1.105	1.201	1.098	1.220	1.129
		1/19	1.126	1.145	1.312	1.179	1.083	1.369
		1/99	1.157	1.078	1.068	1.217	1.072	1.198
50	25	19	0.983	0.980	0.983	0.981	0.978	0.991
		4	1.026	1.002	1.021	0.997	1.022	1.034
		1	1.052	1.042	1.050	1.066	1.054	1.034
		1/4	1.062	1.162	1.185	1.381	1.106	1.187
		1/19	1.190	1.251	1.237	1.238	1.218	1.102
		1/99	1.241	1.153	1.173	1.071	1.073	1.151
100	10	19	0.973	0.977	0.974	0.987	0.987	0.981
		4	0.993	0.985	0.992	0.991	0.988	0.985
		1	1.017	0.999	1.011	1.009	1.020	1.008
		1/4	1.036	1.041	1.014	1.038	1.031	1.035
		1/19	1.031	1.071	1.026	1.167	1.083	1.024
		1/99	1.036	1.066	1.076	1.024	1.106	1.027
100	30	19	0.985	0.985	0.980	0.981	0.983	0.985
		4	0.997	1.002	0.993	1.009	1.003	1.006
		1	1.033	1.055	1.037	1.015	1.044	1.046
		1/4	1.023	1.034	1.027	1.029	1.084	1.037
		1/19	1.068	1.135	1.048	1.131	1.105	1.095
		1/99	1.064	1.025	1.038	1.112	1.100	1.075
100	50	19	0.991	0.988	0.984	0.986	0.986	0.988
		4	1.009	1.010	1.004	1.017	1.006	1.012
		1	1.046	1.023	1.021	1.035	1.030	1.020
		1/4	1.046	1.116	1.048	1.029	1.086	1.062
		1/19	1.068	1.175	1.110	1.149	1.124	1.069
		1/99	1.054	1.112	1.018	1.053	1.034	1.189
300	30	19	0.978	0.985	0.980	0.981	0.986	0.970
		4	0.997	0.985	0.987	0.992	0.996	0.992
		1	1.008	1.000	0.998	1.000	1.006	1.017
		1/4	1.008	1.004	1.008	1.004	1.019	1.005
		1/19	1.002	1.004	1.041	1.007	1.003	1.048
		1/99	1.011	1.135	1.002	1.018	1.023	1.008
300	50	19	0.986	0.982	0.986	0.986	0.991	0.986
		4	0.997	0.992	0.990	0.994	0.990	0.992
		1	0.998	1.016	1.003	1.013	1.001	1.006
		1/4	1.011	0.998	0.998	1.007	1.005	1.004
		1/19	1.005	1.031	1.045	1.117	1.097	1.006
		1/99	1.028	1.037	1.019	1.054	1.015	1.034
300	100	19	0.995	0.993	0.989	0.993	0.988	0.993
		4	0.998	0.995	0.993	0.999	0.992	0.994
		1	1.008	0.995	0.992	0.995	0.993	1.000
		1/4	1.002	0.999	1.000	1.000	1.008	1.003
		1/19	1.006	1.015	1.001	1.001	1.004	1.002
		1/99	1.003	1.007	1.002	1.015	1.032	1.039

Apêndice E

**Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$
sob erros de medida endógenos
com distribuição normal**

Figura E.1: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 50$ e $n = 5$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.2: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 50$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.3: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 50$ e $n = 25$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.4: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 100$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.5: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 100$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.6: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 100$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.7: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 300$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.8: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 300$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura E.9: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição normal, $N = 300$ e $n = 100$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Apêndice F

**Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$
sob erros de medida endógenos
com distribuição uniforme**

Figura F.1: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 50$ e $n = 5$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.2: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 50$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.3: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 50$ e $n = 25$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.4: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 100$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.5: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 100$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.6: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 100$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.7: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 300$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.8: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 300$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura F.9: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição uniforme, $N = 300$ e $n = 100$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Apêndice G

**Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$
sob erros de medida endógenos
com distribuição beta simétrica**

Figura G.1: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 50$ e $n = 5$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.2: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 50$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.3: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 50$ e $n = 25$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.4: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 100$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.5: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 100$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.6: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 100$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.7: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 300$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.8: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 300$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esqBSUErda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura G.9: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta simétrica, $N = 300$ e $n = 100$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Apêndice H

**Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$
sob erros de medida endógenos
com distribuição beta assimétrica**

Figura H.1: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 50$ e $n = 5$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.2: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 50$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.3: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 50$ e $n = 25$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.4: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 100$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.5: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 100$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.6: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 100$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.7: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 300$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.8: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 300$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura H.9: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição beta assimétrica, $N = 300$ e $n = 100$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Apêndice I

**Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$
sob erros de medida endógenos
com distribuição exponencial**

Figura I.1: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 50$ e $n = 5$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.2: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 50$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.3: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 50$ e $n = 25$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.4: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EQM[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 100$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.5: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 100$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.6: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 100$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.7: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 300$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.8: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 300$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura I.9: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição exponencial, $N = 300$ e $n = 100$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Apêndice J

**Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$
sob erros de medida endógenos
com distribuição gama**

Figura J.1: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 50$ e $n = 5$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.2: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 50$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.3: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 50$ e $n = 25$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.4: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 100$ e $n = 10$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.5: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 100$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.6: Quocientes $\text{EQM}[\hat{Q}_i^{(1)}]/\text{EMQ}[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 100$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.7: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 300$ e $n = 30$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.8: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 300$ e $n = 50$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Figura J.9: Quocientes $EQM[\hat{Q}_i^{(1)}]/EMQ[\hat{Q}_i^{(2)}]$ sob erros de medida endógenos com distribuição gama, $N = 300$ e $n = 100$.

Y's gerados com distribuição uniforme

Y's gerados com distribuição assimétrica à esquerda

Y's gerados com distribuição assimétrica à direita

Apêndice K

Códigos R do Capítulo 4

```
BLUP<- read.table("colesterol.txt", header=T)
require(nlme)

#VALORES LATENTES
y<-c(242.1,263.2,154.5,232.6,202.2,280.4,268.4,198.4,303.4,237.7,141.8,215.3,128.8)
sigmaendog<-c(3545.1,1250.1,1932.9,3083.2,1299.4,1013.8,2216.9,1815.2,5222.3,548.9,1099.4,639.1,207.8)

B<-matrix(0,1000,2)
s=0
for(b in 1:1000){
  s<-s+1
  R<-matrix(0,156,1)
  p=0
  for(d in 1:13){
    p<-p+1
    bn=12
    mu_s <- rnorm(bn, mean=y[p], sd=sqrt(sigmaendog[p]))
    a<-12*p
    R[(a-11):a,1]<-mu_s # Completando o vetor de valores latentes de população
  }

  BLUP$Colesterol<-R
  BLUP$Paciente<-as.factor(BLUP$Paciente)

  BD1<-groupedData(Colesterol~1|Paciente, data = BLUP)
  fit1<- lme(Colesterol~1, data=BD1, random = ~1)

  B[s,1]<-as.numeric(VarCorr(fit1)[1,1])
  B[s,2]<-as.numeric(VarCorr(fit1)[2,1])
}
colMeans(B)
```

Referências Bibliográficas

- Bolfarine, H. (1991), 'Finite-population prediction under error-in-variables superpopulation models', *The Canadian Journal of Statistics* **19**, 191–207.
- Bolfarine, H. & Zacks, S. (1992), *Prediction Theory for Finite Populations*, New York: Springer-Verlag.
- Bolfarine, H., Zacks, S., Elian, S. & Rodrigues, J. (1994), 'Optimal prediction of the finite population regression coefficient', *Sankhyā B* **56**, 1–10.
- Buonaccorsi, J. (2006), 'Estimation in two-stage models with heteroscedasticity', *International Statistical Review* **74**, 403–418.
- Cassel, C. M., Särndal, C. E. & Wretman, J. H. (1977), *Foundations of Inference in Survey Sampling*, New York: Wiley.
- Cochran, W. G. (1977), *Sampling Techniques*, New York: Wiley.
- Demidenko, E. (2004), *Mixed Models: Theory and Applications*, New York: Wiley.
- Diggle, P., Heagerty, P., Liang, K. & Zeger, S. (2002), *Analysis of Longitudinal Data*, New York: Oxford University Press.
- Fitzmaurice, G., Davidian, M., Verbeke, G. & Molenberghs, G. (2008), *Longitudinal Data Analysis: A Handbook of Modern Statistical Methods*, New York: Chapman & Hall.
- Godambe, V. P. (1955), 'A unified theory of sampling from finite populations', *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B* **17**, 269–278.
- Goldberger, A. (1962), 'Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model', *Journal of the American Statistical Association* **57**, 369–375.
- Harville, D. A. (1997), *Matrix Algebra From A Statistician's Perspective*, New York: Springer-Verlag.
- Henderson, H. V. & Searle, S. R. (1981), 'On deriving the inverse of a sum of matrices', *SIAM Review* **23**, 53–60.
- Horvitz, D. G. & Thompson, D. J. (1952), 'A generalization of sampling without replacement from a finite universe', *Journal of the American Statistical Association* **47**, 663–685.
- Lencina, V. B. (2002), 'Modelos de efeitos aleatórios e populações finitas', *Unpublished PhD thesis, Statistics, USP. São Paulo: Universidade de São Paulo*.

- Lencina, V. B., Singer, J. M. & Stanek III, E. J. (2005), 'Much ado about nothing: the mixed models controversy revisited', *International Statistical Review* **73**, 9–20.
- McCulloch, C. E. & Searle, S. R. (2001), *Generalized, Linear, and Mixed Model*, Wiley, New York.
- Merriam, P. A., Ockene, I. S., Hebert, J. R., Rosal, M. C. & Matthews, C. E. (1999), 'Seasonal variation of blood cholesterol levels: Study methodology', *Journal of Biologic Rhythms* **14**, 330–339.
- Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. & Wasserman, W. (1996), *Applied Linear Statistical Models*, Boston: WCB/McGraw-Hill.
- Rao, J. & Bellhouse, D. (1978), 'Optimal estimation of a finite population mean under generalized random permutation models', *Journal of Statistical Planning and Inference* **2**, 125–141.
- Robinson, G. K. (1991), 'That blup is a good thing: The estimation of random effects', *Statistical Science* **6**, 15–51.
- Royall, R. (1968), 'An old approach to finite population sampling theory', *Journal of the American Statistical Association* **63**, 1269–1279.
- Royall, R. (1970), 'On finite population sampling theory under certain linear regression models', *Biometrika* **57**, 377–387.
- Scott, A. J. & Smith, T. M. F. (1969), 'Estimation in multistage surveys', *Journal of the American Statistical Association* **64**, 830–840.
- Searle, S. R. (1982), *Matrix Algebra Useful for Statistics*, New York: Wiley.
- Singer, J. M., Stanek III, E. J., Lencina, V. B., González, L. M., Li, W. & San Martino, S. (2009), 'Prediction with measurement error: do we really understand the blup?', *Submitted*.
- Smith, T. M. F. (1976), 'The foundations of survey sampling: A review', *Journal of the Royal Statistical Society, Serie A* **139**, 183–204.
- Särndal, C. E., Swensson, B. & Wretman, J. (1992), *Model Assisted Survey Sampling*, New York: Springer-Verlag.
- Stanek III, E. J. & Singer, J. M. (2004), 'Predicting random effects from finite population clustered samples with response error', *Journal of the American Statistical Association* **99**, 1119–1130.
- Stanek III, E. J. & Singer, J. M. (2008), 'Predicting random effects with an expanded finite population mixed model', *Journal of Statistical Planning and Inference* **138 (10,1)**, 2991–3004.
- Stanek III, E. J., Well, A. & Ockene, I. (1999), 'Why not routinely use best linear unbiased predictors (blups) as estimates of cholesterol, per cent fat from kcal and physical activity?', *Statistics in Medicine* **18**, 2943–2959.
- Stanek III, E., Singer, J. & Lencina, V. (2004), 'A unified approach to estimation and prediction under simple random sampling', *Journal of Statistical Planning and Inference* **121**, 325–338.
- Sukhatme, P. V., e. a. (1984), *Sampling Theory of Surveys Applications*, Iowa State University Press.
- Valliant, R., Dorfman, H. A. & Royall, R. M. (2000), *Finite Population Sampling and Inference.*, New York: Wiley.
- Verbeke, G. & Molenberghs, G. (2000), *Linear Mixed Models for Longitudinal Data.*, New York: Springer-Verlag.