**Estimação de modelos de
duração condicional estocástica
por meio da
função característica empírica**

José Euclides de Melo Ferraz

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

São Paulo, março de 2008

**Estimação de modelos de
duração condicional estocástica
por meio da
função característica empírica**

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por José Euclides de Melo Ferraz
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin (orientador) - IME-USP.
- Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Toloi - IME-USP.
- Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira - IBMEC-SP.
- Prof. Dr. Cristiano Fernandes - PUC-RJ.
- Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro - UFRPE.

Resumo

Neste trabalho propomos a utilização do método da *função característica empírica* (ECF), para estimar os parâmetros do modelo de *duração condicional estocástica* (SCD). Para determinação das variáveis latentes do processo utilizamos três alternativas: um filtro de Kalman, um filtro obtido por integração numérica e um filtro baseado na expansão de Gram-Charlier até quarta ordem. Os resultados são então aplicados em séries de duração da GE, Microsoft e USD/EUR.

Abstract

We propose the use of the Empirical Characteristic Function (ECF) method to estimate the parameters of the Stochastic Conditional Duration (SCD) model. In order to estimate the latent variables we propose the use of three alternatives: a Kalman filter, a filter based on numerical integration (quadrature) and a filter based on the 4th-order Gram-Charlier expansion. The results are applied to the estimation of the parameters of the duration process for GE, Microsoft and USD/EUR.

Dedico esta tese a Vitorina, ao Thiago e ao Gabriel, e deixo para vocês um poema do Fernando Pessoa:

*Ó mar salgado, quanto do teu sal
São lágrimas de Portugal!
Por te cruzarmos, quantas mães choraram,
Quantos filhos em vão rezaram!
Quantas noivas ficaram por casar
Para que fosses nosso, ó mar!*

*Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.*

Fernando Pessoa

Agradecimentos

Esta tese é resultado da ajuda de muitas pessoas, a quem eu gostaria de manifestar o meu profundo reconhecimento, pois sem elas eu não teria conseguido terminá-la.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha muito amada e querida esposa Victorina e aos meus dois amados e queridos filhos, Thiago e Gabriel, pelo suporte, carinho e companheirismo, e principalmente pela compreensão do tempo perdido em que simplesmente não pudemos estar juntos.

Gostaria também de agradecer ao professor Morettin pelo constante apoio e inspiração, desde a primeira vez que vim a ele me aconselhar sobre meu interesse em iniciar um doutorado, passando pelas matérias de séries de tempo e análise espectral, que despertaram meu interesse pelo assunto, até agora, no final do trabalho, pela sua atenção aos detalhes e pela sua infinita paciência com meus longos desaparecimentos. Também devo ao professor Morettin a sugestão de trabalhar com modelos de duração condicional estocástica.

A todos os professores do departamento de Estatística do IME-USP deixo meu agradecimento por suas aulas muitas vezes inspiradoras, e que sempre abriam nossa visão sobre algum tema importante da Estatística.

Finalmente, gostaria de agradecer aos meus colegas de Banco Itaú, Christian, Erlei e Lola, que muitas vezes tiveram que cobrir as inúmeras horas que estive ausente cursando as aulas ou simplesmente buscando livros na biblioteca. Também gostaria de agradecer ao Carlos Henrique Mussolini e ao Fábio Oliveira, por permitirem que eu fizesse o doutorado e até mesmo o colocasse como meta de desenvolvimento pessoal.

A todos vocês, muito obrigado!

Sumário

Lista de abreviaturas	xxv
1 Introdução	1
2 A Função Característica Empírica	5
2.1 A Função Característica (CF)	5
2.1.1 Algumas propriedades da CF	6
2.2 A Função Característica Empírica (ECF)	7
2.3 Propriedades da ECF	8
2.3.1 Séries de v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.)	8
2.3.2 Séries estacionárias	9
2.4 Sumário	12
3 Métodos de Estimação utilizando a ECF	13
3.1 O método da ECF contínua (CECF)	14
3.2 O método da ECF discreta (DECF)	16
3.3 Extensão do GMM para um contínuo de momentos	19
3.4 Sumário	22
4 O modelo de Duração Condicional Estocástica (SCD)	23
4.1 O modelo de duração condicional autorregressiva (ACD)	24
4.2 O modelo de duração condicional estocástica (SCD)	25
4.3 Formulação do modelo de interesse	27
4.4 Funções características para as distribuições dos log-erros ε_j	31
4.5 Cumulantes e momentos das distribuições dos log-erros ε_j	33
4.6 Função característica conjunta (“função poli-característica”)	37
4.7 Verossimilhança amostral para o modelo SCD	39
4.8 Sumário	40
5 Estimação do modelo SCD utilizando a ECF	43
5.1 Estimação dos parâmetros através da CECF	43
5.2 Estimação dos parâmetros através da DECF	50
5.3 Derivadas da função poli-característica em relação ao vetor de parâmetros	53

5.4	Restrições impostas pelo espaço paramétrico	54
5.5	Sumário	55
6	Estimação das variáveis latentes no modelo SCD	57
6.1	Relações recursivas de previsão e filtragem	58
6.1.1	Previsão um passo adiante (atualização do tempo)	58
6.1.2	Filtro (atualização após observação)	58
6.1.3	Suavização	59
6.2	Filtro e suavizador de Kalman	59
6.2.1	Estimativa por quase-verossimilhança (QML)	61
6.3	Procedimento recursivo baseado na expansão de Gram-Charlier (“filtro Gram-Charlier”)	62
6.3.1	Restrição do espaço paramétrico	68
6.4	Sumário	70
7	Simulação	71
7.1	Número de nós para quadratura de Gauss-Hermite	75
7.2	Resultados da simulação	77
7.2.1	Desempenho dos estimadores	77
7.2.2	Desempenho dos filtros	79
7.3	Sumário	90
8	Aplicação empírica	91
8.1	Descrição e tratamento dos dados	91
8.2	Duração de volume da GE	94
8.3	Duração de volume da Microsoft	99
8.4	Sumário	104
9	Conclusão	105
A	Propriedades de algumas classes de estimadores	107
A.1	Propriedades assintóticas dos estimadores <i>extremos</i>	107
A.2	O método generalizado dos momentos (GMM)	111
A.3	Um Teorema Central Limite para processos estacionários	114
B	Covariância do processo Y_n	117
B.1	Caso i.i.d.	117
B.2	Caso estacionário (não necessariamente i.i.d.)	122
B.2.1	Convergência da sequência $\Omega_n(r, s)$	129
C	Demonstrações dos Capítulos 4 e 5	135
D	Matriz de covariância assintótica do estimador CECF	151

E	Matriz de covariância assintótica do estimador DECF	161
F	Filtro de Gram-Charlier	167
G	Estimativa das matrizes de covariância dos estimadores CECF e DECF	183
H	Aplicação empírica - outras estimativas	189
H.1	Resultados para a GE	189
H.1.1	Duração de negócio	189
H.1.2	Duração de preço	194
H.2	Resultados para a Microsoft	198
H.2.1	Duração de negócio	198
H.2.2	Duração de preço	202
H.3	Resultados para USD/EUR	206
H.3.1	Duração de negócio	206
H.3.2	Duração de preço	211
H.3.3	Ln duração de negócio	215
	Referências Bibliográficas	221

Lista de Figuras

4.1	Funções densidade de probabilidade da log-exponencial (Gumbel), log-Weibull e log-gama, para $\lambda = 0.5$	32
4.2	Funções densidade de probabilidade da log-exponencial (Gumbel), log-Weibull e log-gama, para $\lambda = 2$	32
4.3	Coefficiente de assimetria γ_1 em função de λ , para as distribuições log-exponencial, log-Weibull e log-gama.	38
4.4	Coefficiente de excesso de curtose γ_2 em função de λ , para as distribuições log-exponencial, log-Weibull e log-gama.	38
5.1	Matriz de covariância $\Omega_n(r, s)$ para o processo de duração estocástica condicional, em função do tamanho da amostra (n). Os parâmetros do processo SCD são $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, com distribuição Weibull. Os pontos para cálculo da função característica (sorteados aleatoriamente) são $r = (0.891299, 0.762097)'$ e $s = (0.456468, 0.018504)'$. Para fim de comparação a figura também ilustra a matriz $\Omega_n^{iid}(r, s)$ do processo IID	49
6.1	Aproximação de Gram-Charlier para a densidade, sem imposição de restrições (à esquerda) e com imposição de restrições nos parâmetros (γ_1, γ_2) conforme Jondeau e Rockinger (1999) (à direita), para as seguintes distribuições: log-exponencial (4.38) em cima, log-Weibull (4.39), $\lambda = 0.5$, no meio, e log-gama (4.40), $\lambda = 0.5$, em baixo.	64
6.2	Espaço paramétrico (γ_1, γ_2) para a expansão de Gram-Charlier. A linha cheia indica o “envelope” como indicado pelas equações (6.66) e (6.67), e a região hachurada representa o espaço paramétrico para que a expansão de Gram-Charlier constitua uma densidade de probabilidade.	69
7.1	Amostras simuladas da duração (à esquerda) e log-duração (à direita) com distribuições condicionais exponencial (cima), Weibull $\lambda = 0.5$ (meio) e gama $\lambda = 0.5$ (baixo), e parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$	72

7.2	Partes reais (à esquerda) e imaginárias (à direita) da função característica empírica (ECF), $\text{Re } \varphi_{z_n}(r)$, para amostras de tamanho 100 (cima), 1 000 (meio) e 10 000 (baixo), em função de $r = (r_1, r_2)$, com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 1$ (distribuição exponencial), $p = 1$, e usando para r_ζ os nós da quadratura de Gauss-Hermite de 39 pontos.	73
7.3	Partes reais (à esquerda) e imaginárias (à direita) da função característica empírica (ECF), $\text{Re } \varphi_{z_n}(r)$, para amostra de tamanho 100.000 (cima) e para a função característica (CF), $\text{Re } \varphi_z(r)$, (baixo) em função de $r = (r_1, r_2)$, com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 1$ (distribuição exponencial), $p = 1$, e usando para r_ζ os nós da quadratura de Gauss-Hermite de 39 pontos.	74
7.4	Número de nós a uma distância da origem (abscissas) em função do número de nós da quadratura de Gauss-Hermite (ordenadas): na figura de cima a distância máxima é 3, e na de baixo a distância máxima é 10.	75
7.5	Resultado da integral $\int \varphi(r) e^{-r'r} dr$, em função do número de nós da quadratura de Gauss-Hermite.	76
7.6	Histograma das estimativas do parâmetro δ obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (\delta, \phi, \sigma_\eta, \lambda)' = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$	80
7.7	Histograma das estimativas do parâmetro ϕ obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$	81
7.8	Histograma das estimativas do parâmetro σ_η obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$	82
7.9	Histograma das estimativas do parâmetro λ obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$	83
7.10	Variável latente ψ (“psi”) da distribuição exponencial com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 1$ (distribuição exponencial), e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.	85
7.11	Variável latente ψ (“psi”) da distribuição Weibull com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 2$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.	86

7.12	Variável latente ψ (“psi”) da distribuição gama com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 2$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.	87
7.13	Variável latente ψ (“psi”) da distribuição Weibull com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 0.5$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.	88
7.14	Variável latente ψ (“psi”) da distribuição gama com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 0.5$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.	89
8.1	Dados da GE: Cima: duração de volume (<i>volume duration</i>) e respectiva componente diurna. Baixo: duração de volume dessazonalizada e respectivo logaritmo.	95
8.2	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de volume (<i>volume duration</i>) da GE, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	96
8.3	Estimativa da variável latente para a duração de volume (<i>volume duration</i>) da GE. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	97
8.4	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de volume da GE: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	98
8.5	Dados da Microsoft: Cima: duração de volume (<i>volume duration</i>) e respectiva componente diurna. Baixo: duração de volume dessazonalizada e respectivo logaritmo.	100

8.6	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de volume (<i>volume duration</i>) da Microsoft, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	101
8.7	Estimativa da variável latente para a duração de volume (<i>volume duration</i>) da Microsoft. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	102
8.8	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de volume da Microsoft: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	103
H.1	Dados da GE: Cima: duração de negócio (<i>trade duration</i>) e respectiva componente diurna. Baixo: duração de negócio dessazonalizada e respectivo logaritmo.	190
H.2	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) da GE, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	191
H.3	Estimativa da variável latente para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) da GE. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	192
H.4	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio da GE: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	193
H.5	Dados da GE: Cima: duração de preço (<i>price duration</i>) e respectiva componente diurna. Baixo: duração de preço dessazonalizada e respectivo logaritmo.	194

H.6	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de preço (<i>price duration</i>) da GE, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	195
H.7	Estimativa da variável latente para a duração de preço (<i>price duration</i>) da GE. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	196
H.8	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de preço da GE: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	197
H.9	Dados da Microsoft: Cima: duração de negócio (<i>trade duration</i>) e respectiva componente diurna. Baixo: duração de negócio dessazonalizada e respectivo logaritmo.	198
H.10	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) da Microsoft, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	199
H.11	Estimativa da variável latente para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) da Microsoft. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	200
H.12	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio da Microsoft: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	201
H.13	Dados da Microsoft: Cima: duração de preço (<i>price duration</i>) e respectiva componente diurna. Baixo: duração de preço dessazonalizada e respectivo logaritmo.	202
H.14	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de preço (<i>price duration</i>) da Microsoft, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	203

H.15 Estimativa da variável latente para a duração de preço (<i>price duration</i>) da Microsoft.	
Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.	
Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	204
H.16 De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de preço da Microsoft: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.	
À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	205
H.17 Dados de USD/EUR:	
Cima: duração de negócio (<i>trade duration</i>) e respectiva componente diurna.	
Baixo: duração de negócio dessazonalizada e respectivo logaritmo.	206
H.18 Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) de USD/EUR, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	208
H.19 Estimativa da variável latente para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) de USD/EUR.	
Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.	
Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	209
H.20 De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio de USD/EUR: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.	
À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	210
H.21 Dados de USD/EUR:	
Cima: duração de preço (<i>price duration</i>) e respectiva componente diurna.	
Baixo: duração de preço dessazonalizada e respectivo logaritmo.	211
H.22 Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de preço (<i>price duration</i>) de USD/EUR, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	212

H.23	Estimativa da variável latente para a duração de preço (<i>price duration</i>) de USD/EUR. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	213
H.24	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de preço de USD/EUR: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	214
H.25	Dados de USD/EUR: Cima: duração de negócio (<i>trade duration</i>) e respectivo logaritmo. Baixo: componente diurno do logaritmo da duração de negócio e logaritmo da duração de negócio dessazonalizado.	216
H.26	Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) de USD/EUR, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.	217
H.27	Estimativa da variável latente para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) de USD/EUR. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.	218
H.28	De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio de USD/EUR: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman. À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.	219

Lista de Tabelas

7.1	Resumo dos resultados (média, desvio padrão, erro quadrático médio e desvio absoluto médio) das estimativas amostrais dos parâmetros de 1 000 simulações usando os algoritmos QML, CECF e DECF, para distribuições exponencial, Weibull e gama com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, λ variável conforme tabela, tamanho de amostra 10 000 e ponto inicial $\theta = (0, 0.5, 0.5, 1)'$. O algoritmo de otimização utilizado foi o <i>fminsearch</i> do Matlab para os métodos QML e CECF e o <i>lsqnonlin</i> para o método DECF, com parâmetros $tolX = 10^{-6}$ (tolerância da variável de decisão) e $tolFun = 10^{-6}$ (tolerância da função objetivo). Para os algoritmos CECF e DECF foram usados 130 nós da quadratura de Gauss-Hermite, limitados a uma distância 3 da origem. EQM = erro quadrático médio e DAM = desvio absoluto médio.	77
7.2	Estimativa dos desvios padrão do estimador CECF para o modelo SCD de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, com λ e distribuições variáveis conforme a tabela, para amostras de tamanho 10 000. Mais detalhes sobre as estimativas podem ser encontrados no texto e no apêndice G.	78
7.3	Estimativa dos desvios padrão do estimador DECF para o modelo SCD de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, com λ e distribuições variáveis conforme a tabela, para amostras de tamanho 10 000. Mais detalhes sobre as estimativas podem ser encontrados no texto e no apêndice G.	78
7.4	Erro quadrático médio (EQM), desvio absoluto médio (DAM) e mediana dos desvios absolutos (MDA) dos filtros de Kalman, Bayesiano e de Gram-Charlier utilizados para estimação da variável latente, obtidos com simulações de amostras de tamanho 1 000, calculados nos parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.10, \lambda)$ e $\lambda = 0.5, 1$ (dist. exponencial) e 2.	84
8.1	Resumo dos dados das amostras de durações dessazonalizadas de GE, Microsoft e USD/EUR. Veja o texto para mais detalhes da base de dados e respectivo tratamento.	93
8.2	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de volume (<i>volume duration</i>) da GE, considerando distribuições Weibull e gama para os erros. . . .	95
8.3	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de volume (<i>volume duration</i>) da Microsoft, considerando distribuições Weibull e gama para os erros. . . .	100

G.1	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição exponencial de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.	184
G.2	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.	184
G.3	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.	185
G.4	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.	185
G.5	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.	186
G.6	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição exponencial de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.	186
G.7	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.	187
G.8	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.	187
G.9	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.	188
G.10	Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.	188
H.1	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) da GE, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.	190
H.2	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de preço (<i>price duration</i>) da GE, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.	194
H.3	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) da Microsoft, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.	198
H.4	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de preço (<i>price duration</i>) da Microsoft, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.	202
H.5	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) de USD/EUR, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.	207

H.6	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de preço (<i>price duration</i>) de USD/EUR, considerando distribuições Weibull e gama para os erros. . .	211
H.7	Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (<i>trade duration</i>) de USD/EUR, considerando distribuições Weibull e gama para os erros. .	216

Lista de abreviaturas

ACD	duração condicional autoregressiva (<i>Autoregressive Conditional Duration</i>)
a.s.	quase certamente (<i>almost surely</i>)
CECF	método da ECF contínua (<i>Continuous ECF</i>)
CF	função característica (<i>Characteristic Function</i>)
d.	em distribuição (<i>in distribution</i>)
DAM	desvio absoluto médio
DECF	método da ECF discreta (<i>Discrete ECF</i>)
ECF	função característica empírica (<i>Empirical Characteristic Function</i>)
EPCF	função poli-característica empírica (<i>Empirical Poly-Characteristic Function</i>)
EQM	erro quadrático médio
GLS	mínimos quadrados generalizados (<i>Generalized Least Squares</i>)
GMM	método generalizado dos momentos (<i>Generalized Method of Moments</i>)
MDA	mediana dos desvios absolutos
p.	em probabilidade (<i>in probability</i>)
PCF	função poli-característica (<i>Poly-Characteristic Function</i>)
QML	quase máxima verossimilhança (<i>Quasi-Maximum Likelihood</i>)
SCD	duração condicional estocástica (<i>Stochastic Conditional Duration</i>)

Capítulo 1

Introdução

Em Probabilidade e Estatística é comum o uso de transformações para facilitar a solução de problemas considerados difíceis. Em particular, a transformada de Fourier da função densidade, a chamada *função característica* (CF), é uma das ferramentas mais utilizadas, pois permite a obtenção de resultados analíticos para diversos problemas, como a convolução de variáveis i.i.d., a obtenção de distribuições assintóticas de funções de variáveis aleatórias, etc. Por sua vez, a aplicação desta transformação à função de distribuição amostral resulta na chamada *função característica empírica* (ECF - *Empirical Characteristic Function*), que apresenta também várias vantagens, sumarizadas por Feuerverger e Mureika (1977):

“The range of problems to which the ecf seems applicable appears to be quite wide. This is because Fourier-Stieltjes transformation often results in easy translation of properties that are important in problems of inference. The characteristic function behaves simply under shifts, scale changes and summation of independent variables; it allows an easy characterization of independence and of symmetry. It is therefore not difficult to suggest ecf procedures for areas of inference such as testing for goodness of fit, testing for independence, parameter estimation, etc. Further, although it is true that there exist other functionals in one-to-one correspondence with the distributions, it may be argued that the characteristic function is a uniquely important concept for which a large body of theory is available. The ecf retains all information present in the sample and lends itself conveniently to computation. Finally, there are situations where a characterization of some property or of a class of distributions exists in terms of characteristic functions. One example is the problem of inference on the parameters of the stable laws. Here traditional methods have not led to a solution and an ecf approach seems likely to lead to useful procedures.”

O uso da ECF em problemas de estimação parece ser bastante antigo: Montfort e Mooijart (1989) citam um trabalho de Darmois (1940)¹, que teria usado

¹Darmois, G., **Les mathématiques de la psychologie**, Memorial des sciences mathématiques, fasc. 48, Gautier-Villars, Paris, 1940.

a ECF para estimação dos coeficientes em alguns modelos estatísticos simples, e citam outros autores que teriam usado a ECF para problemas com erros nas variáveis, como Neyman (1951) e Wolfowitz (1952)². Na nossa pesquisa, entretanto, o documento mais antigo que obtivemos com citação da ECF foi o artigo de Rubin (1956), que aplica o resultado de um teorema de convergência de funções de variáveis aleatórias para ilustrar a convergência com probabilidade um da função característica empírica (amostral, na sua notação) para a função característica populacional no caso i.i.d. A citação seguinte que encontramos foi em Parzen (1962), em um problema de estimação não paramétrica da função densidade. Desde então a faixa de problemas de estimação para os quais a ECF tem sido utilizada é bastante ampla. Citamos por exemplo:

- Mistura de normais, como em Carrasco e Florens (2000a);
- Distribuições estáveis, como em Press (1972), Paulson et al. (1975), Leitch e Paulson (1975), Arad (1980), Koutrouvelis (1982), Feuerverger e McDunnough (1981a), Brockwell e Brown (1981), Paulson e Delehanty (1985), Brockwell e Liu (1992) e Kogon e Williams (1998);
- Processos ARMA estáveis, como em Knight e Yu (2002);
- Modelos de volatilidade estocástica, como em Knight et al. (2002) e Silva et al. (2004);
- Modelos *afins* de difusão, como em Singleton (2001), Jiang e Knight (2002), Chacko e Viceira (2003), Yu (2004) e Rockinger e Semenova (2005);
- Modelos com erros de medida, como em Montfort e Mooijaart (1989) e Hu e Ridder (2006);
- Modelos lineares generalizados, como em Li e Hsiao (2004).
- Distribuições elípticas simétricas, como em Nakamura et al. (1996).
- Análise de Componentes Independentes (ICA - *Independent Component Analysis*), como em Chen e Bickel (2003).

A ECF também tem sido utilizada em problemas de teste de aderência de distribuições, como por exemplo:

- Forma de uma distribuição, como em Murota e Takeuchi (1981).
- Dados agrupados, como em Meintanis e Ushakov (2004);
- Mistura de normais, como em Klar e Meintanis (2005);

²Neyman, J., Existence of consistent estimates of the directional parameter in a linear structural relation between two variables, *Annals of Mathematical Statistics*, 22, 497-512, 1951.

Wolfowitz, J., Consistent estimators of the parameters of a linear structural relation, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 35, 132-151, 1952.

- Distribuições simétricas estáveis, como em Meintanis (2005);
- Distribuição Weibull e de valor extremo tipo I, como em Cabaña e Quiroz (2005).

Além desta modalidade, a ECF tem sido empregada em outras modalidades de testes:

- Simetria, como em Csörgo e Heathcote (1987);
- Normalidade, como em Epps e Pulley (1983) e Epps (1987);
- Independência e dependência serial, como em Hong (1999, 2000), Murata (2001), Bilodeau e de Micheaux (2005).

Feuerverger e Mureika (1977) examinam certas propriedades probabilísticas da ECF. Quase simultaneamente Heathcote (1977) e Thorton e Paulson (1977) obtêm a distribuição assintótica para o estimador que minimiza uma distância entre a ECF e a CF, a mesma distância utilizada por Press (1972) e Paulson et al. (1975) para estimação dos parâmetros de distribuições estáveis. O uso deste método neste caso justifica-se pela ausência de uma fórmula explícita para a função densidade de funções de distribuição estáveis (a não ser nos casos particulares $\alpha = 1/2, 1$ ou 2), tornando difícil o uso do método da máxima verossimilhança.

Uma revisão bastante completa do método da ECF para estimação encontra-se em Yu (2004), tanto para o caso i.i.d., quanto para o caso estacionário. O autor revê também diversas aplicações da ECF, variando de modelos de mistura até modelos de processos em tempo contínuo.

O objetivo deste trabalho é o de utilizar o método de estimação pela ECF, conforme proposto por Knight e Yu (2002), para estimar o modelo de *duração condicional estocástica* (SCD) proposto por Bauwens e Veredas (2004). A vantagem do uso deste método neste caso é permitir a eliminação das variáveis latentes de uma maneira natural ao calcularmos a função característica do processo (estacionário). Naturalmente as variáveis latentes também precisam ser estimadas, e para isso propusemos algumas alternativas.

O trabalho está estruturado em 9 capítulos, e diversos apêndices. No primeiro capítulo, revisamos a literatura sobre o uso da ECF em diversas áreas de aplicação. No segundo capítulo, apresentamos alguns resultados obtidos na literatura sobre a função característica (CF) e sua contraparte empírica (ECF). No terceiro capítulo, revemos os métodos propostos na literatura para uso da ECF em problemas de estimação. No quarto capítulo apresentamos o particular problema de duração estocástica condicional (SCD) que queremos estimar, e obtemos diversos resultados relativos ao processo. No quinto capítulo particularizamos os métodos de estimação da ECF para o nosso processo SCD. No sexto capítulo debruçamo-nos sobre o problema de estimação das variáveis latentes, propondo três alternativas: o filtro de Kalman, um filtro obtido por integração numérica (Bayesiano), e um filtro baseado na expansão de Gram-Charlier até quarta ordem. No sétimo capítulo aplicamos os resultados obtidos em amostras simuladas fixando-se os parâmetros. No oitavo capítulo aplicamos os

resultados obtidos em uma amostra de durações de volume da GE (General Electric) e Microsoft, proveniente de dados disponíveis publicamente. Concluimos o trabalho no capítulo 9, e acrescentamos nos apêndices diversos resultados e demonstrações.

Capítulo 2

A Função Característica Empírica

Neste capítulo vamos inicialmente rever a definição e algumas propriedades da função característica, que poderão vir a ser úteis no desenvolvimento do texto. Em seguida, vamos definir a *função característica empírica* e apresentar algumas de suas propriedades, separadas em duas categorias: processos independentemente igualmente distribuídos (i.i.d.) e processos estacionários.

2.1 A Função Característica (CF)

A Função Característica (CF - *Characteristic Function*) é definida como a transformada de Fourier-Stieltjes da função distribuição de probabilidade. Como uma transformação da distribuição de probabilidade sua maior vantagem reside no fato de sempre existir, ao contrário, por exemplo, da Função Geratriz de Momentos.

A seguir vamos rever sua definição e algumas de suas propriedades, seguindo para isso o texto de Shiryaev (1991). Ao longo do texto vamos denotar o número imaginário por $i = \sqrt{-1}$.

Definição 2.1 (Shiryaev (1991), pg. 274) *Seja $F = F(x_1, \dots, x_k)$ uma função distribuição k -dimensional em $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$. Sua função característica é dada por*

$$\varphi(r) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{ir'x} dF(x), \quad r \in \mathbb{R}^k. \quad (2.1)$$

Alternativamente, se $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)'$ for um vetor aleatório definido no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com valores em $\mathbb{R}^k$, sua função característica é

$$\varphi_\xi(r) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{ir'x} dF_\xi(x), \quad r \in \mathbb{R}^k. \quad (2.2)$$

onde $F_\xi = F_\xi(x_1, \dots, x_k)$ é a função distribuição do vetor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)'$, i.e., $F_\xi(x_1, \dots, x_k) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k]$.

Se $F(x)$ possuir uma densidade $f = f(x)$ então

$$\varphi(r) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{ir'x} f(x) dx, \quad r \in \mathbb{R}^k. \quad (2.3)$$

Neste caso, a função característica é simplesmente a transformada de Fourier de $f(x)$. Note também que a função característica pode ser definida como o seguinte valor esperado

$$\varphi_\xi(r) = E \left[e^{ir'\xi} \right], \quad r \in \mathbb{R}^k. \quad (2.4)$$

2.1.1 Algumas propriedades da CF

Vamos rever agora algumas propriedades básicas das funções características. Seja $\xi = \xi(\omega)$ uma variável aleatória com função distribuição $F = F_\xi(x)$ e com função característica $\varphi_\xi(r) = E \left[e^{ir'\xi} \right]$. Seja A uma matriz $m \times k$ e b um vetor $m \times 1$. Para uma variável aleatória dada por $\eta = A\xi + b$ então

$$\varphi_\eta(r) = E \left[e^{ir'\eta} \right] = E \left[e^{ir'(A\xi+b)} \right] = e^{ir'b} E \left[e^{ir'A\xi} \right] = e^{ir'b} E \left[e^{i(A'r)'\xi} \right].$$

Portanto,

$$\varphi_\eta(r) = e^{ir'b} \varphi_\xi(A'r). \quad (2.5)$$

Se $\xi_1, \dots, \xi_n$ forem variáveis aleatórias independentes e $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, então

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(r) &= E \left[e^{ir'S_n} \right] = E \left[e^{ir'(\xi_1 + \dots + \xi_n)} \right] = E \left[e^{ir'\xi_1 + \dots + ir'\xi_n} \right] = \\ &= E \left[e^{ir'\xi_1} \right] \dots E \left[e^{ir'\xi_n} \right] = \varphi_{\xi_1}(r) \dots \varphi_{\xi_n}(r). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi_{S_n}(r) = \prod_{j=1}^n \varphi_{\xi_j}(r). \quad (2.6)$$

Ou seja, a função característica de uma soma de variáveis aleatórias independentes é dada pelo produto das funções características de cada uma delas.

Outras propriedades da função característica são apresentadas no seguinte teorema de Shiryaev (1991), que apresentaremos sem a demonstração.

Teorema 2.1 (Shiryaev (1991), pg. 278) *Seja ξ uma variável aleatória com função distribuição $F = F(x)$ e função característica $\varphi(r) = E \left[e^{ir'\xi} \right]$. Então φ tem as seguintes propriedades:*

- (a) $|\varphi(r)| \leq |\varphi(0)| = 1$;
- (b) $\varphi(r)$ é uniformemente contínua para $r \in \mathbb{R}$;

$$(c) \varphi(r) = \overline{\varphi(-r)};$$

$$(d) \varphi(r) \text{ é real se e somente se } F \text{ for simétrica } (\int_A dF(x) = \int_{-A} dF(x), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), -A = \{-x : x \in A\});$$

$$(e) \text{ Se } E[|\xi|^n] < \infty \text{ para algum } n \geq 1, \text{ então } \varphi^{(k)}(r) \text{ existe para todo } k \leq n, \text{ e}$$

$$\varphi^{(k)}(r) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} dF(x),$$

$$E[\xi^k] = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k},$$

$$\varphi(r) = \sum_{k=0}^n \frac{(ir)^k}{k!} E[\xi^k] + \frac{(ir)^n}{n!} \varepsilon_n(r),$$

$$\text{onde } |\varepsilon_n(r)| \leq 3E[\xi^n] \text{ e } \varepsilon_n(r) \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow 0;$$

$$(f) \text{ Se } \varphi^{(2n)}(0) \text{ existir e for finito então } E[\xi^{2n}] < \infty.$$

Prova. Ver Shiryaev (1991), pg. 278. ■

Para uma revisão de outras propriedades da função característica e de suas diversas aplicações sugerimos Lukacs (1970) e, também, Lukacs (1983).

2.2 A Função Característica Empírica (ECF)

A Função Caraterística Empírica (ECF - *Empirical Characteristic Function*), também chamada de *função característica amostral*, é simplesmente a transformada de Fourier-Stieltjes da Função Distribuição Empírica (ou amostral). Assim, vamos inicialmente definir a função distribuição empírica:

Definição 2.2 (Billingsley (1995), pg. 268) *Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias com função distribuição $F(x)$. A função distribuição empírica (ou amostral) é dada por*

$$F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{(-\infty, x]}(X_j(\omega)). \quad (2.7)$$

Na definição acima usamos a função indicadora definida por:

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Dada uma amostra de variáveis aleatórias com mesma distribuição F , podemos estimar a sua função característica em (2.1) se utilizarmos a função distribuição empírica F_n em (2.7) como estimador de F .

Definição 2.3 (Função Característica Empírica - ECF) *Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias k -dimensionais com distribuição $F(x)$. A função característica empírica (ou amostral) é uma variável aleatória complexa, função de $r \in \mathbb{R}^k$, dada por*

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ir'X_j}. \quad (2.8)$$

É interessante notar que (2.8) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi_n(r) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r'X_j) + i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(r'X_j) \\ &= \operatorname{Re} \varphi_n(r) + i \operatorname{Im} \varphi_n(r). \end{aligned}$$

Podemos notar pela relação (2.8) que existe uma correspondência biunívoca entre a função distribuição empírica e a função característica empírica. Como a ECF contém toda a informação da amostra, é natural utilizá-la para estimação de parâmetros. Para isso, vamos examinar a seguir algumas das propriedades da ECF como obtidas por Feuerverger e Mureika (1977) e Feuerverger (1990). Outros resultados de convergência para a ECF podem ser encontrados em Kellermeier (1980), Csörgö (1981), Marcus (1981), Stute (1983), Yukich (1985), Lacey (1989), Hesse (1990) e Wells (1992).

2.3 Propriedades da ECF

2.3.1 Séries de v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.)

Para variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ identicamente distribuídas (não necessariamente independentes) o valor esperado da função característica empírica coincide com a função característica de X_j , pois

$$E[\varphi_n(r)] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[e^{ir'X_j}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(r) = \varphi(r). \quad (2.9)$$

Seja agora $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de variáveis i.i.d. Para r fixo, $\varphi_n(r)$ é uma média de variáveis aleatórias limitadas i.i.d., com média $\varphi(r)$. Logo, segue da Lei Forte dos Grandes Números que $\varphi_n(r)$ converge quase certamente para $\varphi(r)$:

$$\varphi_n(r) \xrightarrow{a.s.} \varphi(r),$$

isto é,

$$\Pr \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(r) = \varphi(r) \right] = 1.$$

Além disso, Feuerverger e Mureika (1977) obtiveram os seguintes resultados:

Teorema 2.2 (Feuerverger e Mureika (1977), Teor. 2.1) Para fixo $R < \infty$,

$$\sup_{|r| \leq R} |\varphi_n(r) - \varphi(r)| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

isto é,

$$\Pr \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|r| \leq R} |\varphi_n(r) - \varphi(r)| = 0 \right] = 1.$$

Prova. Ver Feuerverger e Mureika (1977), teorema 2.1, pg.89. ■

Teorema 2.3 (Feuerverger e Mureika (1977), Teor. 3.1) Seja $Y_n(r)$ o processo aleatório complexo dado por:

$$Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r)). \quad (2.10)$$

Note que $E[Y_n(r)] = 0$, $Cov[Y_n(r), Y_n(s)] = E[Y_n(r) \cdot \overline{Y_n(s)}] = \varphi(r-s) - \varphi(r) \cdot \varphi(-s)$, ou analogamente, $E[Y_n(r) \cdot Y_n(s)] = \varphi(r+s) - \varphi(r) \cdot \varphi(s)$. Também:

$$\begin{aligned} Cov[Re Y(r), Re Y(s)] &= \frac{1}{2} [Re \varphi(r+s) + Re \varphi(r-s)] - Re \varphi(r) Re \varphi(r), \\ Cov[Re Y(r), Im Y(s)] &= \frac{1}{2} [Re \varphi(r+s) - Im \varphi(r-s)] - Re \varphi(r) Im \varphi(r), \\ Cov[Im Y(r), Im Y(s)] &= \frac{1}{2} [-Re \varphi(r+s) + Re \varphi(r-s)] - Im \varphi(r) Im \varphi(r). \end{aligned}$$

Defina $Y(r)$ como o processo estocástico Gaussiano complexo de média zero, com mesma estrutura de covariância de $Y_n(r)$ e satisfazendo $Y(r) = \overline{Y(-r)}$. Então, o processo $Y_n(r)$ converge fracamente para $Y(r)$ em cada intervalo finito.

Prova. A demonstração deste teorema encontra-se em Feuerverger e Mureika (1977), teorema 3.1, pg.92. No apêndice B obtemos a estrutura de covariância para processos i.i.d. apresentada no teorema. ■

2.3.2 Séries estacionárias

Os resultados da seção anterior foram obtidos para o caso de variáveis aleatórias identicamente e independentemente distribuídas, o que limita o seu emprego para análise de séries temporais, onde comumente observamos dependência serial entre as observações. Para lidar com o caso de séries univariadas ergódicas estritamente estacionárias Feuerverger e McDunnough (1981a) propuseram o uso de uma “função poli-característica” e correspondente “função poli-característica empírica”, obtida da seguinte forma: seja $\{X_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ uma série temporal univariada estritamente estacionária cuja distribuição depende de um vetor de parâmetros θ . Defina o seguinte vetor $(p+1) \times 1$, construído como um bloco sequencial de tamanho p das variáveis X_j :

$$Z_j = (X_j, X_{j+1}, \dots, X_{j+p})'. \quad (2.11)$$

Sua “função poli-característica” (PCF - *Poly-Characteristic Function*) é definida em função de $r = (r_0, \dots, r_p)' \in \mathbb{R}^{p+1}$ por:

$$\varphi(r; \theta) = E \left[e^{ir'Z_j} \right]. \quad (2.12)$$

A correspondente “função poli-característica empírica” (EPCF - *Empirical Poly-Characteristic Function*) é definida por:

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ir'Z_j}. \quad (2.13)$$

Como a sequência $\{Z_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ possui dependência serial por construção, não é possível aplicar os resultados de Feuerverger e Mureika (1977). Para obter resultados de convergência para a EPCF Feuerverger (1990) exige algumas condições *mixing*, que descrevemos a seguir. Defina a correlação máxima $\rho(q)$ como o supremo da correlação entre variáveis aleatórias de quadrado integrável mensuráveis com relação às sigma-álgebras $\sigma\{\dots, X_{-1}, X_0\}$ e $\sigma\{X_q, X_{q+1}, \dots\}$ respectivamente, i.e., $\rho(q)$ é a correlação máxima possível entre funções de X_j 's separadas no tempo por uma distância q . Feuerverger (1990) requer a condição abaixo nos teoremas que apresentaremos a seguir, mas enfatiza que esta condição poderia ser trocada pela condição mais fraca de ergodicidade e *mixing* “forte”¹:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \rho(q) < \infty \quad (2.14)$$

Teorema 2.4 (Feuerverger (1990), Teor.2.1) *Se $\{X_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ for uma série temporal estacionária satisfazendo (2.14), então*

- (a) $\varphi_n(r) \rightarrow \varphi(r; \theta)$ quase certamente, para todo $r \in \mathbb{R}^{p+1}$.
- (b) $\sup_{-T < r^0, \dots, r^p < T} |\varphi_n(r) - \varphi(r; \theta)| \rightarrow 0$ quase certamente, para todo T fixo, $0 < T < \infty$.

Prova. Ver Feuerverger (1990), Teor.2.1. ■

Feuerverger (1990) também obtém o seguinte resultado de convergência em distribuição para a EPCF:

Teorema 2.5 (Feuerverger (1990), Teor.2.2) *Assuma que $\{X_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ satisfaça (2.14), e seja $Y(r)$, $r \in \mathbb{R}^{p+1}$, um processo Gaussiano complexo de média zero e com estrutura de covariância dada por*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}[Y_n(r), Y_n(s)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{cov} \left[e^{ir'Z_0}, e^{is'Z_k} \right],$$

¹No apêndice A revisamos alguns conceitos de *mixing*.

onde $Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r))$. Então $(Y_n(r_1), \dots, Y_n(r_m))$ converge em distribuição para $(Y(r_1), \dots, Y(r_m))$, para todo m e todos $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}^{p+1}$.

Prova. Ver Feuerverger (1990), Teor.2.2. ■

Podemos obter também a matriz de covariância do processo $Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r))$, através da seguinte proposição, análoga a apresentada por Knight e Satchell (1997):

Proposição 2.1 (Covariância de Y_n) *Seja $\{Z_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ um processo estocástico estritamente estacionário $p+1$ variado, com função característica $\varphi(r)$ e respectiva função característica empírica $\varphi_n(r)$, e seja $Y_n(r)$ o processo aleatório complexo dado por*

$$Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r)). \quad (2.15)$$

Note que $E[Y_n(r)] = 0$. Seja $\Lambda_k : \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1} \mapsto \mathbb{C}$ a função definida por

$$\Lambda_k(r, s) = E \left[e^{ir'Z_j + is'Z_{j+k}} \right]. \quad (2.16)$$

A covariância entre as partes real e imaginária de Y_n é dada por

$$\Omega_n(r, s) = \begin{pmatrix} \Omega_{RR,n}(r, s) & \Omega_{RI,n}(r, s) \\ \Omega_{IR,n}(r, s) & \Omega_{II,n}(r, s) \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{RR,n}(r, s) &= \text{Cov} [\text{Re } Y(r), \text{Re } Y(s)] \\ \Omega_{RI,n}(r, s) &= \text{Cov} [\text{Re } Y(r), \text{Im } Y(s)] \\ \Omega_{IR,n}(r, s) &= \text{Cov} [\text{Im } Y(r), \text{Re } Y(s)] \\ \Omega_{II,n}(r, s) &= \text{Cov} [\text{Im } Y(r), \text{Im } Y(s)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Omega_{RR,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) + \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{RI,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ -\operatorname{Im} \varphi(r-s) + \operatorname{Im} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ -\operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) - \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{IR,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r-s) + \operatorname{Im} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{II,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) - \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) - \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice B. ■

2.4 Sumário

Neste capítulo relembramos a definição da função característica $\varphi(r)$ e algumas de suas propriedades. Vimos também a definição da função característica empírica (ECF), $\varphi_n(r)$, e apresentamos alguns resultados obtidos por Feuerverger e Mureika (1977), Feuerverger (1990) e Knight e Satchell (1997) para a convergência do processo $\sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r))$. No capítulo seguinte vamos revisar alguns métodos de estimação de parâmetros que empregam a ECF.

Capítulo 3

Métodos de Estimação utilizando a ECF

Os métodos de estimação que utilizam a ECF citados na literatura adotam basicamente duas abordagens: maximização de função verossimilhança ou minimização de alguma distância entre a ECF e a CF.

Entre as abordagens que adotam maximização de função verossimilhança encontramos o método “ k - L ” de Feuerverger e McDunnough (1981b) e o método “ML-CCF” de Singleton (2001). O método “ k - L ” de Feuerverger e McDunnough (1981b) procura maximizar a verossimilhança obtida a partir da distribuição assintótica de $Y_n(r)$ que, como vimos no capítulo anterior, tem distribuição assintótica conhecida. Já o método “ML-CCF” de Singleton (2001, 2006) procura maximizar a função de verossimilhança obtida a partir da inversão de Fourier da função característica condicional (CCF).

No entanto a maior parte dos autores revisados procura minimizar alguma distância entre a ECF e CF, utilizando uma abordagem de estimadores *extremos* (Amemiya (1985)), quando o parâmetro r é contínuo (e.g., Press (1972), Paulson et al. (1975), Heathcote (1977), Knight e Yu (2002), Knight et al. (2002), Yu (2004)), ou uma abordagem de método dos momentos, quando o parâmetro r é discreto (e.g., Feuerverger e McDunnough (1981b), Singleton (2001), Jiang e Knight (2001), Chacko e Viceira (2003)), e até usando ambas abordagens como por exemplo, Jiang e Knight (2002). Knight e Yu (2002) denominam o caso de r contínuo de método da ECF *contínua* (CECF- *Continuous ECF*) e o caso de r discreto de método da ECF *discreta* (DECF - *Discrete ECF*).

Mais recentemente, entretanto, Carrasco e Florens (2000b), estendem o *método generalizado dos momentos* (GMM) de Hansen (1982) para um “contínuo” de momentos, e empregam este estimador em Carrasco e Florens (2002) para obter estimadores “eficientes” utilizando a ECF.

No apêndice A revisamos alguns resultados para estimadores *extremos* seguindo para isso Amemiya (1985). Como o método da ECF discreta é um caso particular do método dos momentos, revisamos também no mesmo apêndice o *método generalizado dos momentos*

(GMM) de Hansen (1982).

No seção a seguir vamos revisar os resultados obtidos por Knight e Yu (2002) para o caso de séries estacionárias (não necessariamente i.i.d.)¹. Na outra seção vamos abordar o problema segundo o método dos momentos, e a seguir vamos também rever os resultados obtidos por Carrasco e Florens (2002).

3.1 O método da ECF contínua (CECF)

Press (1972) e Paulson et al. (1975) aparentemente foram os primeiros autores a propor um estimador que minimizasse uma distância entre a função característica empírica e a função característica, de maneira a eliminar o parâmetro r :

$$Q_n(\theta) = \int |\varphi_n(r) - \varphi(r; \theta)|^\nu dG(r). \quad (3.1)$$

Quando $\nu = 2$ (erro quadrático médio integrado) Heathcote (1977) obtém resultados de convergência para o caso de processos identicamente e independentemente distribuídos, enquanto Knight e Yu (2002) obtém resultados para o caso de processos estacionários.

Knight e Yu (2002) propõem o estimador da ECF contínua (CECF - *Continuous ECF*) que minimiza a integral

$$Q_n(\theta) = \int |\varphi_n(r) - \varphi(r; \theta)|^2 dG(r) \quad (3.2)$$

ou

$$Q_n(\theta) = \int |\varphi_n(r) - \varphi(r; \theta)|^2 g(r) dr \quad (3.3)$$

ou que resolve a seguinte equação de estimação

$$\int w_\theta(r) (\varphi_n(r) - \varphi(r; \theta)) dr = 0, \quad (3.4)$$

em que $G(r)$, $g(r)$ e $w_\theta(r)$ são funções de peso apropriadas. Sob condições de regularidade apropriadas os três métodos são equivalentes. Feuerverger (1990) mostra que é possível escolher uma função de peso $w_\theta^*(r)$ de maneira que o estimador em (3.4) alcance eficiência arbitrariamente alta, desde que p seja suficientemente grande:

$$w_\theta^*(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p+1} \int \dots \int e^{-ir'X_j} \frac{\partial \ln f(y_{j+p}|y_j, \dots, y_{j+p-1})}{\partial \theta} dy_1 \dots dy_{j+p}, \quad (3.5)$$

Note que o peso ótimo $w_\theta^*(r)$ depende da função densidade de probabilidade condicional $f(y_{j+p}|y_j, \dots, y_{j+p-1})$, que pode não ser conhecida ou ser de difícil obtenção.

Entretanto a escolha de $G(r)$, $g(r)$ e $w_\theta(r)$ é feita na maioria das vezes de maneira a facilitar o procedimento de integração numérica. Em particular, se escolhermos $g(r) =$

¹O caso i.i.d. é tratado por Heathcote (1977) e Thorton e Paulson (1977).

$\exp(-r'r)$ podemos empregar o método da *quadratura de Gauss-Hermite* (veja, por exemplo, Press et al. (1997)).

Vamos apresentar agora o resultado obtido por Knight e Yu (2002) para séries estacionárias (não necessariamente i.i.d.). Para isso, seja $\{X_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ uma série temporal univariada estritamente estacionária cuja distribuição depende de um vetor de parâmetros θ e seja Y_j o vetor de tamanho $p+1$, formado por blocos de X_j , definido em (2.11) como:

$$Y_j = (X_j, X_{j+1}, \dots, X_{j+p})'.$$

Fixado um p , Knight e Yu (2002) definem as seguintes condições de regularidade:

- (a) $\theta \in \Theta$, onde o espaço paramétrico $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ é um conjunto compacto com $\theta_0 \in \text{interior}(\Theta)$.
- (b) Com probabilidade um, $Q_n(\theta)$ é diferenciável continuamente duas vezes sob o sinal de integração com respeito a θ em Θ .
- (c) A sequência $\{Y_n\}$ é estritamente estacionária e ergódica.
- (d) Seja

$$Q_0(\theta) = \int |\varphi(r; \theta_0) - \varphi(r; \theta)|^2 dG(r)$$

e $Q_0(\theta) = 0$ somente se $\theta = \theta_0$.

- (e) $K(y; \theta)$ é uma função mensurável e limitada de y para todo θ , onde

$$\begin{aligned} K(y; \theta) = & \int \left\{ (\cos(r'y) - \text{Re } \varphi(r; \theta)) \frac{\partial \text{Re } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + (\sin(r'y) - \text{Im } \varphi(r; \theta)) \frac{\partial \text{Im } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \right\} dG(r). \end{aligned} \quad (3.6)$$

- (f) $B(\theta_0)$ é não singular, onde

$$B(\theta_0) = \int \frac{\partial \varphi(r; \theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi(r; \theta_0)}{\partial \theta'} dG(r) \quad (3.7)$$

e $\partial^2 \varphi(r; \theta_0) / \partial \theta \partial \theta'$ é limitada uniformemente por uma função G -integrável em Θ .

- (g) Seja $\mathcal{F}_j$ uma σ -álgebra tal que $\{K_j, \mathcal{F}_j\}$ seja uma sequência estocástica adaptada, onde $K_j = K(Y_j; \theta)$. Podemos pensar em $\mathcal{F}_j$ como a σ -álgebra gerada pela história completa corrente e passada de K_j . Seja $\nu_j = E[K_0 | K_{-j}, K_{-j-1}, \dots] - E[K_0 | K_{-j-1}, K_{-j-2}, \dots]$ para $j \geq 0$. Suponha que $E[K_0 | \mathcal{F}_{-m}]$ convirja em média quadrática para 0 quando $m \rightarrow \infty$ e $\sum_{j=0}^{\infty} E[\nu_j' \nu_j]^{1/2} < \infty$.

- (h) $G(r)$ é uma função não decrescente com variação total limitada igual a 1.

As condições de regularidade acima são justificadas por Knight e Yu (2002) da seguinte maneira: (a) garante que o espaço paramétrico seja compacto, enquanto (b) garante a continuidade de $Q_n(\theta)$. As hipóteses (c) e de (e) a (g) fornecem condições suficientes para uma lei dos grandes números e um teorema central do limite. De acordo com (h), $G(r)$ pode ser uma função distribuição; entretanto, uma função de peso constante não pode ser usada (por exemplo, $G(r) = ar$, para uma constante fixa a). A hipótese (g) é análoga à hipótese (3.5) em Hansen (1982) e vale sob condições *mixing* adequadas. A hipótese (d) é uma condição de identificação; sem ela, o estimador poderia ser inconsistente. Por exemplo para um processo MA(10), $X_t = \varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-10}$, os blocos móveis de tamanho $p < 10$ não contém informação sobre ϕ , e assim o método leva a estimativas inconsistentes. Este caso é eliminado pela hipótese (d), mas a identificação somente é possível com uma escolha apropriada de p , que no caso do exemplo é $p \geq 10$. Sob estas condições os autores obtém o seguinte resultado de convergência assintótica para seu estimador:

Teorema 3.1 (Knight e Yu (2002), Teor. 2.1) *Seja $\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} Q_n(\theta)$. Suponha que sejam válidas as hipóteses (a) a (d) e (h); então $\hat{\theta}_n \xrightarrow{a.s.} \theta_0$.*

Se além disso as hipóteses (e) a (g) forem válidas, então

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N\left(0, B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}\right), \quad (3.8)$$

em que

$$A(\theta_0) = \text{var}(K(X_1; \theta_0)) + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \text{cov}(K(X_1; \theta_0), K(X_j; \theta_0)). \quad (3.9)$$

Prova. Ver Knight e Yu (2002), Teor. 2.1, pg. 714. No apêndice D utilizamos os resultados de estimadores extremos para verificar a convergência do estimador CECF. ■

Para calcular uma estimativa para a matriz de covariância do estimador CECF é necessário obter estimativas para $A(\theta_0)$ e $B(\theta_0)$. Knight e Yu (2002) sugerem que a matriz $B(\theta_0)$ possa ser estimada consistentemente por $B(\hat{\theta}_n)$, enquanto que um estimador consistente de $A(\theta_0)$ possa ser obtido com estimadores robustos a heteroscedasticidade e autocorrelação como em Andrews (1991) e Newey e West (1994). Não está claro no texto, mas possivelmente os autores estão sugerindo o uso de $K(y_j; \hat{\theta}_n)$ para estimação de $A(\theta_0)$. No apêndice D sugerimos algumas alternativas para estimação da matriz $A(\theta_0)$.

3.2 O método da ECF discreta (DECF)

O método da ECF discreta (DECF) procura minimizar uma distância entre a ECF e a CF, fixada uma malha de q pontos $r_1, \dots, r_q$, constituindo-se em uma aplicação do método generalizado dos momentos (GMM). Para empregar este método vamos denotar:

$$h(r, X_j; \theta) = e^{ir'X_j} - \varphi(r; \theta). \quad (3.10)$$

Note que $E \left[e^{ir'X_j} - \varphi(r; \theta) \right] = 0, \forall r \in \mathbb{R}^p$. Vamos definir agora o seguinte vetor $2q \times 1$:

$$f(X_j; \theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h(r_1, X_j; \theta) \\ \vdots \\ \operatorname{Re} h(r_q, X_j; \theta) \\ \operatorname{Im} h(r_1, X_j; \theta) \\ \vdots \\ \operatorname{Im} h(r_q, X_j; \theta) \end{pmatrix}_{2q \times 1} \quad (3.11)$$

Para obter o estimador GMM vamos definir os seguintes vetores $2q \times 1$:

$$V_n = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi_n(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \operatorname{Re} \varphi_n(r_q; \theta) \\ \operatorname{Im} \varphi_n(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \operatorname{Im} \varphi_n(r_q; \theta) \end{pmatrix}_{2q \times 1} \quad (3.12)$$

$$V_\theta = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \operatorname{Re} \varphi(r_q; \theta) \\ \operatorname{Im} \varphi(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \operatorname{Im} \varphi(r_q; \theta) \end{pmatrix}_{2q \times 1} \quad (3.13)$$

Note que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta) = V_n - V_\theta. \quad (3.14)$$

O estimador GMM é obtido por

$$\widehat{\theta}_n^* = \arg \min_{\theta} (V_n - V_\theta)' W_n (V_n - V_\theta), \quad (3.15)$$

em que W_n é uma seqüência de matrizes positivas e definidas que convergem quase certamente para uma matriz de constantes W_0 positiva e definida.

Se $W_n = I_{2q}$ então o estimador é basicamente uma regressão não linear de V_n em V_θ , ou seja pode-se obter θ a partir do método dos mínimos quadrados. Mas como a matriz de covariância de V_n não é diagonal o estimador obtido, embora consistente, não é eficiente no sentido GMM. Para isso, basta utilizar $W_n = \widehat{\Omega}^{-1}$, em que $\widehat{\Omega}$ é algum estimador consistente

da matriz de covariâncias de V_n , dado por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{RR} & \Omega_{RI} \\ \Omega_{IR} & \Omega_{II} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Para o caso i.i.d. os elementos das partições associados com r_j e r_k são dados em Knight e Satchell (1997), com base nos resultados de Feuerverger e McDunnough (1981b), por

$$(\Omega_{RR})_{jk} = \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r_j + r_k) + \operatorname{Re} \varphi(r_j - r_k) \} - \operatorname{Re} \varphi(r_j) \operatorname{Re} \varphi(r_k), \quad (3.17)$$

$$(\Omega_{RI})_{jk} = \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r_j + r_k) - \operatorname{Im} \varphi(r_j - r_k) \} - \operatorname{Re} \varphi(r_j) \operatorname{Im} \varphi(r_k), \quad (3.18)$$

$$(\Omega_{IR})_{jk} = \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r_j + r_k) + \operatorname{Im} \varphi(r_j - r_k) \} - \operatorname{Im} \varphi(r_j) \operatorname{Re} \varphi(r_k), \quad (3.19)$$

$$(\Omega_{II})_{jk} = \frac{1}{2} \{ -\operatorname{Re} \varphi(r_j + r_k) + \operatorname{Re} \varphi(r_j - r_k) \} - \operatorname{Im} \varphi(r_j) \operatorname{Im} \varphi(r_k). \quad (3.20)$$

Sob condições de regularidade apropriadas Feuerverger e McDunnough (1984) mostram que para o caso $W_n = \widehat{\Omega}^{-1}$ temos

$$\sqrt{n} (\widehat{\theta}_n^* - \theta_0) \xrightarrow{d} N \left(0, \left(\frac{\partial V_\theta(\theta_0)'}{\partial \theta} W_0 \frac{\partial V_\theta(\theta_0)}{\partial \theta} \right)^{-1} \right). \quad (3.21)$$

A dificuldade básica deste método refere-se a escolha do número de pontos q e de sua particular malha. Schmidt (1982) sugere que, fixado um q , deve-se escolher uma malha de pontos que minimiza o determinante da matriz de covariâncias assintótica do estimador. Knight e Satchell (1997) por sua vez sugerem o seguinte procedimento:

- (a) Defina q e um conjunto arbitrário de pontos $r_1, \dots, r_q$. Os autores afirmam que obtiveram bons resultados com q igual a 2 ou 3 vezes o tamanho da amostra.
- (b) Calcule a regressão não linear $V_n = V_\theta + u$. Com o estimador $\theta_n^{(1)}$ assim obtido calcule $\Omega_n^{(1)}$, um estimador consistente da matriz Ω , utilizando $\theta = \theta_n^{(1)}$ e os r_j 's escolhidos.
- (c) Considere Σ_θ a matriz de covariâncias do estimador θ_n calculada em $\theta_n^{(1)}$ para um conjunto $r_j^* = \tau \cdot r_j$. Obtenha τ^* de maneira a minimizar o determinante de Σ_θ . Note que este procedimento de otimização é univariado (τ). Alternativamente pode-se também procurar obter todo o vetor $(r_1^*, \dots, r_q^*)'$ através do procedimento de minimização de Σ_θ .
- (d) Refaça o passo (b) utilizando $r_j^* = \tau^* \cdot r_j$ (ou o vetor r^* obtido da otimização), obtendo assim novos estimadores $\theta_n^{(2)}$ e $\Omega_n^{(2)}$.
- (e) Usando os r_j^* 's e $\Omega_n^{(2)}$ calcule uma regressão de mínimos quadrados generalizados (GLS - *Generalized Least Squares*) e obtenha o estimador desejado $\widehat{\theta}_n$.

Feuerverger e McDunnough (1981b) sugerem que se q for suficientemente grande e a malha suficientemente fina, pode-se obter matriz de covariâncias arbitrariamente próxima do limite de Cramér-Rao (i.e., pode-se alcançar eficiência de máxima verossimilhança). Entretanto Carrasco e Florens (2002) afirmam que esta passagem para o limite pode ser problemática, e sugerem o emprego do seu procedimento GMM estendido para uma condição contínua de momentos, que passamos a descrever a seguir.

3.3 Extensão do GMM para um contínuo de momentos

Carrasco e Florens (2000b) estendem o método de estimação GMM para o caso de um contínuo de condições de momentos, usando para isso uma abordagem de espaços de Hilbert. A aplicação deste método para o problema de estimação usando a ECF é feita por Carrasco e Florens (2002).

Para apresentar os resultados de Carrasco e Florens (2002) suponhamos que $X_1, \dots, X_n$ sejam realizações de uma mesma variável aleatória $X \in \mathbb{R}^p$ com função distribuição $F(x; \theta_0)$, com parâmetro $\theta_0 \in \mathbb{R}^q$. Seja π uma função densidade de probabilidade em $\mathbb{R}^p$ e seja $L^2(\pi)$ o espaço de Hilbert das funções complexas de quadrado do módulo integrável:

$$L^2(\pi) = \left\{ f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |f(r)|^2 \pi(r) dr < \infty \right\}.$$

Para f e g vetores $l \times 1$ de elementos em $L^2(\pi)$, vamos denotar o produto interno por:

$$\langle f, g \rangle = \int f(r) \overline{g(r)}' \pi(r) dr.$$

A norma de g neste espaço é denotada por $\|g\|$, sendo obtida por:

$$\|g\|^2 = \int g(r) \overline{g(r)}' \pi(r) dr.$$

Seja a condição de momento dada por:

$$h(r, X_j; \theta) = e^{ir'X_j} - \varphi(r; \theta) \quad (3.22)$$

e seja

$$h_n(r; \theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(r, X_j; \theta) \quad (3.23)$$

Seja agora $H = L^2(\pi)$ o espaço de Hilbert de referência. Seja B um operador linear limitado definido em H , e seja B_n uma sequência de operadores lineares limitados em H , ou em um subespaço de H , que convirjam para B . O estimador GMM é definido como

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta} \|B_n h_n(\cdot; \theta)\| \quad (3.24)$$

e sob as condições listadas em Carrasco e Florens (2000b) é consistente e assintoticamente normal. Além disso, Carrasco e Florens (2002) mostram que, dentro da classes dos operadores B , existe um operador $K^{-1/2}$ que fornece estimadores de mínima variância, em que $K : f \in H \rightarrow g \in H$ é o operador de covariância associado com $h(r, X_j; \theta)$:

$$Kf(r) = g(s) = \int k(s, r) f(r) \pi(r) dr,$$

em que

$$k(s, r) = E_{\theta_0} \left[h(s, X; \theta) \overline{h(r, X; \theta)} \right].$$

Para o caso do estimador usando a ECF, Carrasco e Florens (2002) propõem o núcleo

$$k(s, r) = \varphi(s - r; \theta_0) - \varphi(s; \theta_0) \cdot \varphi(-r; \theta_0).$$

O operador K é *auto-adjunto*, isto é, $\langle Kf, g \rangle = \langle f, Kg \rangle$, já que $k(s, r) = \overline{k(r, s)}$, e daí decorre que, segundo Carrasco e Florens (2000b), K tem um número (infinito) contável de auto-valores positivos decrescendo para zero; como conseqüência, sua inversa não é limitada. Assim, $K^{-1/2}$ não existe em todo o espaço H , mas apenas em um subconjunto chamado *núcleo reprodutivo do espaço de Hilbert* (RKHS - *Reproducing Kernel Hilbert Space*) associado com K , denotado $\mathfrak{R}(K)$.

A escolha do estimador ótimo está associada com a obtenção do operador inverso do operador K , o que equivale a encontrar ϕ , solução de uma *equação integral de Fredholm de primeiro tipo*²:

$$K\phi = f. \quad (3.25)$$

Este problema é tipicamente mal colocado: em particular, a solução ϕ de (3.25) é instável a pequenas mudanças em f . Para estabilizar a solução os autores utilizam a *aproximação de Tikhonov*, que consiste em introduzir um parâmetro de regularização α_n que vai para zero quando n vai para o infinito:

$$(K^2 + \alpha_n I) \phi_n = Kf. \quad (3.26)$$

Através da solução da equação acima os autores obtém o seguinte estimador consistente para $K^{-1/2}$:

$$\left(\hat{K}_n^{\alpha_n} \right)^{-1/2} f = \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{\hat{\mu}_j}}{\sqrt{\hat{\mu}_j^2 + \alpha_n}} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \quad (3.27)$$

onde μ_j e ϕ_j são estimadores dos *autovalores* e das *autofunções* associadas a K , isto é, satisfazem a equação:

$$K\phi = \mu\phi. \quad (3.28)$$

²Segundo Kreyszig (1978, pg. 319), uma equação da forma

$$\int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau = v(t)$$

é dita *equação de Fredholm do primeiro tipo*. Aqui $[a, b]$ é um dado intervalo e $x(\cdot)$ é uma função desconhecida em $[a, b]$.

Segundo os autores os autovalores μ_j podem ser obtidos diretamente a partir dos autovalores da matriz M , cujos elementos m_{ij} são dados por:

$$m_{ij} = \frac{1}{n} \int \overline{h\left(r, X_i; \theta_n^{(1)}\right)} h\left(r, X_j; \theta_n^{(1)}\right) \pi(r) dr, \quad (3.29)$$

sendo $\beta_j = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})'$ o j -ésimo autovetor, μ_j o j -ésimo autovalor de M , $j = 1, \dots, n$, e $\theta_n^{(1)}$ um estimador consistente de θ_0 .

As autofunções de K_n por sua vez podem ser estimadas por:

$$\hat{\phi}_j(r) = h^*(r) \beta_j, \quad (3.30)$$

em que

$$h^*(r) = \begin{pmatrix} h\left(r, X_1; \theta_n^{(1)}\right) \\ \vdots \\ h\left(r, X_n; \theta_n^{(1)}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

O estimador GMM ótimo de Carrasco e Florens (2002) é dado, finalmente, por:

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{j=1}^n \frac{\hat{\mu}_j}{\hat{\mu}_j^2 + \alpha_n} \left| \left\langle h_n(\theta), \hat{\phi}_j \right\rangle \right|^2 \quad (3.32)$$

Carrasco e Florens (2002) utilizam o seguinte conjunto de hipóteses para obter o resultado de convergência assintótica do seu estimador:

- (a) Os dados observados $\{x_1, \dots, x_n\}$ são realizações i.i.d. de X . A variável aleatória X assume valores em $\mathbb{R}^p$ e tem uma função densidade de probabilidade $f(x; \theta)$ com $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$ e Θ compacto.
- (b) π é uma função densidade de probabilidade absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^p$. $\pi(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.
- (c) A equação

$$E_{\theta_0} \left[e^{ir'X} - \varphi(r; \theta) \right] = 0 \text{ a.s.}$$

tem uma solução única θ_0 que é ponto interior de Θ .

- (d) Valem as seguintes condições:

- a) $f(x; \theta)$ é continuamente diferenciável com respeito a $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$ em Θ ,
- b) $\int \sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right\| dx < \infty$,
- c) $I_{\theta_0} = E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right] \Big|_{\theta=\theta_0}$ é positiva definida.

Com estas hipóteses os autores obtêm o seguinte resultado de convergência.

Proposição 3.1 (Prop. 4.3, Carrasco e Florens (2002)) *Seja $\hat{\theta}_n$ o estimador definido por (3.32). Sob hipóteses (a) a (d), temos*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, I_{\theta_0}^{-1}),$$

onde

$$I_{\theta_0} = E_{\theta} \left[\left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)' \right] \Big|_{\theta=\theta_0}$$

à medida que n e $n\alpha_n^2$ vão para o infinito e α_n vai para zero.

Ou seja, o estimador proposto alcança o limite de Cramér-Rao, e, portanto, é eficiente (no sentido de máxima verossimilhança). Observe, entretanto, que o método proposto exige a obtenção dos autovalores e autovetores da matriz M , que é potencialmente de ordem muito grande (da ordem de $T \times T$, em que T é o tamanho da amostra).

3.4 Sumário

Neste capítulo revisamos alguns estimadores propostos na literatura que se utilizam da ECF:

- Estimador CECF de Knight e Yu (2002);
- Estimador de método dos momentos (DECF);
- Extensão do GMM para contínuo de momentos, de Carrasco e Florens (2002)

Também foram apresentados os resultados de convergência assintótica para os estimadores acima. Convém ressaltar que os resultados obtidos valem apenas para séries estacionárias, para o caso dos dois primeiros estimadores (CECF e DECF), e apenas para séries i.i.d. para o caso do terceiro estimador (extensão do GMM para contínuo de momentos).

Neste trabalho decidimos utilizar os estimadores CECF e DECF para o problema da duração condicional estocástica. No capítulo seguinte vamos formular o problema de interesse, e vamos procurar obter os elementos necessários para emprego dos métodos CECF e DECF.

Capítulo 4

O modelo de Duração Condicional Estocástica (SCD)

Atualmente nos mercados financeiros é possível coletar-se dados de alta-frequência, isto é, dados relativos a cada operação (negócio) efetuada ou coletados a intervalos curtos de tempo (5 min, por exemplo). Esta abundância de dados permite o estudo de fenômenos relacionados a micro-estrutura de mercado, como, por exemplo, o impacto das transações nos preços (o chamado *impacto de mercado*) e a volatilidade intra-diária (por exemplo, através da medida chamada *volatilidade realizada*). Em particular, pretendemos trabalhar com os chamados modelos de duração, que tem como objetivo a estimação da distribuição de probabilidade do intervalo de tempo entre eventos¹.

Em Finanças os eventos que estamos interessados podem ser, por exemplo, o intervalo de tempo entre o fechamento de transações (*trade duration*) ou o intervalo de mudança de preço do ativo (*price duration*). A distribuição da duração está intimamente relacionada ao conceito de “liquidez”: ativos mais “líquidos” usualmente possuem intervalos de negociação menores do que ativos menos líquidos. Outra medida da “liquidez” é o *spread* entre o preço de compra (*bid*) e o de venda (*ask*). Evidentemente, o intervalo de tempo para efetuar um negócio depende das condições de oferta e demanda do mercado, mas, fixadas as outras condições, quanto menor o preço de venda ou maior o preço de compra, mas “rápido” a negociação ocorrerá. A situação parece mais complicada em mercados organizados com a presença de *especialistas*², que não necessariamente desejam carregar uma posição no ativo. Isto é, ao abrir uma posição indesejada (digamos que ele tenha comprado o ativo), o especialista corre o risco da mudança de preço do ativo até que consiga se desfazer da posição (neste caso, vendê-la). Assim, parece natural que os especialistas estabeleçam *spreads* de compra e venda de maneira a remunerar o risco da posição, o que está intimamente ligado a duração que a

¹Outro tipo de modelo de duração é aquele associado com cadeias de Markov, e que procura estimar o tempo que o indivíduo permanece em cada estado da cadeia. Para mais detalhes veja, por exemplo, Amemiya (1985).

²*Especialista* são figuras em determinados mercados (e.g., a bolsa de valores de New York - NYSE) que mantém um mercado em um ou mais ativos listados. A função do especialista é oferecer *spreads* de compra e venda do ativo sob sua responsabilidade (a NYSE, por exemplo, designa cada ação listada a um especialista para a função de *market-making*).

posição permanece em seu estoque³.

Neste capítulo vamos rever brevemente dois modelos propostos para estudar a duração. Na seção seguinte vamos especificar o modelo de duração condicional autoregressiva (ACD) proposto por Engle e Russell (1998). A seguir vamos especificar o modelo de duração condicional estocástica (SCD) proposto por Bauwens e Veredas (2004), que é o nosso objeto de estudo. Nas seções posteriores, vamos obter algumas de suas propriedades que nos serão úteis no processo de estimação utilizando a ECF.

4.1 O modelo de duração condicional autorregressiva (ACD)

Para estudar o fenômeno da duração entre negócios, Engle e Russell (1998) propõem o modelo de duração condicional autorregressiva (ACD - *Autoregressive Conditional Duration*). No modelo ACD(p, q), a duração X_j , calculada pela diferença entre os instantes de negociação t_j e t_{j-1} , é dada por

$$X_j = \psi_j \xi_j, \quad (4.1)$$

em que $\{\xi_j\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não negativas identicamente distribuídas tais que $E[\xi_j] = 1$, e ψ_j é especificado como um processo autoregressivo

$$\psi_j = \delta + \sum_{k=1}^p \phi_k X_{j-k} + \sum_{k=1}^q \delta_k \psi_{j-k}. \quad (4.2)$$

Engle e Russell (1998) utilizam para ε_j a distribuição de Weibull com média 1, dada por

$$f(\xi_j) = \begin{cases} \lambda [\Gamma(1 + \frac{1}{\lambda})]^\lambda \xi_j^{\lambda-1} e^{-[\Gamma(1+\frac{1}{\lambda})\xi_j]^\lambda}, & \text{se } \xi_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi_j < 0 \end{cases}. \quad (4.3)$$

Um caso particular ocorre para $\lambda = 1$, quando a distribuição em (4.3) reduz-se à distribuição exponencial.

Nesta especificação ψ_j é o valor esperado da duração, condicional na informação I_{j-1} disponível até $j - 1$, i.e., $\psi_j = E[X_j | I_{j-1}]$. Desta forma a evolução do valor esperado da duração neste modelo é determinada pela variável latente ψ_j . Note, também, que a especificação do modelo ACD(p, q) é análoga a de um modelo GARCH(p, q); sendo assim, o modelo é facilmente estimável através do método da máxima verossimilhança (veja Engle e Russell (1998) ou Tsay (2002) para mais detalhes).

Bauwens e Veredas (2004) fazem uma revisão bibliográfica das possíveis extensões do modelo ACD. Por exemplo, a fim de evitar restrições nos parâmetros que garantam que ψ_j seja positivo, pode-se utilizar e^{ψ_j} na eq. (4.1), de forma que $X_j = e^{\psi_j} \xi_j$. Outra revisão bastante completa do modelo ACD e suas extensões pode ser encontrada em Pacurar (2006).

³Mais detalhes sobre a organização e o funcionamento dos mercados podem ser encontrados em Bodie et al. (2002), sob o aspecto descritivo do seu funcionamento, e em Madhavan (2000), sob o ponto de vista de modelagem teórica e empírica. Também Engle e Russell (1998) examinam alguns aspectos da microestrutura do mercado relacionados com a duração entre negócios.

4.2 O modelo de duração condicional estocástica (SCD)

Bauwens e Veredas (2004) propõem o modelo de duração condicional estocástica (SCD - *Stochastic Conditional Duration*) no qual a variável latente ψ_j , que determina as durações como no modelo ACD, passa a ser uma variável aleatória seguindo um processo autoregressivo AR(1)⁴, de maneira que o modelo possa ser escrito por

$$X_j = e^{\psi_j} \xi_j, \quad (4.4)$$

$$\psi_j = \delta + \phi \psi_{j-1} + \sigma_\eta \eta_j, \quad |\phi| < 1, \quad (4.5)$$

com as seguintes hipóteses distribucionais

$$\eta_j | I_{j-1} \sim N(0, 1), \quad (4.6)$$

$$\xi_j | I_{j-1} \sim \text{alguma distribuição com suporte positivo} \quad (4.7)$$

$$\eta_k \text{ independente de } \xi_j | I_{j-1}, \forall j, k. \quad (4.8)$$

Em particular, Bauwens e Veredas (2004) assumem as seguintes distribuições para ξ_j :

- distribuição Weibull padrão, $\xi_j \sim W(\lambda, 1)$, com densidade

$$f(\xi_j) = \begin{cases} \lambda \xi_j^{\lambda-1} e^{-\xi_j^\lambda}, & \text{se } \xi_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi_j < 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

e com momentos não centrados dados por

$$E(\xi_j^n) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{\lambda}\right). \quad (4.10)$$

- distribuição gama padrão, $\xi_j \sim G(\lambda, 1)$, com densidade

$$f(\xi_j) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \xi_j^{\lambda-1} e^{-\xi_j}, & \text{se } \xi_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi_j < 0 \end{cases}, \quad (4.11)$$

e com momentos não centrados dados por

$$E(\xi_j^n) = \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)}. \quad (4.12)$$

Note que ambas as distribuições propostas reduzem-se à distribuição exponencial de média 1 quando $\lambda = 1$.

Comparando (4.4)-(4.5) com (4.1)-(4.2) podemos notar que a principal diferença do modelo SCD em relação ao modelo ACD é a presença de uma choque aleatório adicional η_j na variável latente ψ_j .

⁴O processo para ψ_j poderia seguir um processo de ordem maior, AR(p), mas para manter a comparabilidade com os artigos originais, vamos manter AR(1).

Da mesma forma que o modelo ACD é análogo a um modelo GARCH, o modelo SCD é análogo ao modelo de volatilidade estocástica. Em particular, Bauwens e Veredas (2004) discutem diversos métodos de estimação de volatilidade estocástica que podem ser utilizados para estimar o modelo SCD. Os autores também obtiveram os dois primeiros momentos e a função de autocorrelação das durações, utilizando a notação $\Psi_j = e^{\psi_j}$ nos seguintes teoremas:

Teorema 4.1 (Bauwens e Veredas (2004), Teor. 1) *As durações e as variáveis latentes do modelo (4.4)-(4.8) têm os seguintes momentos:*

$$\begin{aligned} E[\Psi_j] &= e^{\frac{\delta}{1-\phi} + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}}, \\ E[X_j] &= E[\xi_j] \cdot E[\Psi_j], \\ Var[\Psi_j] &= (E[\Psi_j])^2 \left(e^{\frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} - 1 \right), \\ Var[X_j] &= (E[X_j])^2 \left(\kappa e^{\frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

em que

$$\kappa = \frac{E[\xi_j^2]}{(E[\xi_j])^2}.$$

Prova. Ver Bauwens e Veredas (2004), Teor.1, pg. 386. ■

Teorema 4.2 (Bauwens e Veredas (2004), Teor. 2) *A função de autocorrelação (ACF) do modelo (4.4)-(4.8) é dada por*

$$\rho_s = \frac{e^{\frac{\sigma_\eta^2 \phi^s}{1-\phi^s}} - 1}{\kappa e^{\frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^s}} - 1}.$$

Prova. Ver Bauwens e Veredas (2004), Teor.2, pg. 386. ■

Antes de prosseguirmos note que, como a variável ψ_j segue um processo AR(1), pode ser representada como estabelecido na proposição abaixo.

Proposição 4.1 (Representação da variável latente ψ_j) *A sequência de variáveis latentes $\{\psi_j\}$ definidas em (4.4)-(4.8) constitui um processo (fracamente) estacionário, com a seguinte representação:*

$$\psi_j = \frac{\delta}{1-\phi} + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{\infty} \phi^l \eta_{j-l}. \quad (4.13)$$

Além disso, ψ_j tem a seguinte distribuição marginal:

$$\psi_j \sim N\left(\frac{\delta}{1-\phi}, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right). \quad (4.14)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Esta representação é útil para obtenção da função característica de ψ_j . Para isso, lembremos que os η_j são identicamente e independentemente distribuídos como $N(0, 1)$, cuja função característica é dada por:

$$\varphi_\eta(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (4.15)$$

Podemos agora obter a função característica de ψ_j a partir de (4.13), através da seguinte proposição:

Proposição 4.2 (Função característica da variável latente ψ_j) A função característica da variável latente definida em (4.5) do modelo (4.4)-(4.8) é dada por:

$$\varphi_\psi(t) = \exp\left(\frac{it\delta}{1-\phi} - \frac{\sigma_\eta^2 t^2}{2(1-\phi^2)}\right). \quad (4.16)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

A seguir vamos formular o modelo SCD de interesse, obter algumas propriedades das distribuições envolvidas, e obter a verossimilhança amostral, ilustrando assim a dificuldade que este modelo possui para estimação de seus parâmetros.

4.3 Formulação do modelo de interesse

Vamos definir as seguintes variáveis: τ_j instante da ocorrência da j -ésima transação, $X_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ a j -ésima duração entre transações sucessivas e $X = (X_1, X_2, \dots, X_T)'$ vetor $T \times 1$ das durações, e τ_0 o instante de abertura do mercado. Vamos assumir que $X_j > 0$, ou seja, que não possam ocorrer duas transações no mesmo instante. O nosso modelo de interesse é dado por⁵:

$$X_j = e^{\psi_j} \xi_j, \quad (4.17)$$

$$\psi_j = \delta + \phi\psi_{j-1} + \sigma_\eta\eta_j, \quad (4.18)$$

em que $|\phi| < 1$, $\sigma_\eta < \infty$, e com as seguintes hipóteses distribucionais

$$\eta_j | I_{j-1} \sim N(0, 1), \quad (4.19)$$

$$\eta_k \text{ independente de } \xi_j | I_{j-1}, \forall j, k, \quad (4.20)$$

⁵Na especificação de Strickland et al. (2006) aparece uma variável exógena W_{j-1} de dimensão $k \times 1$ da seguinte forma: $\psi_j = \delta' W_{j-1} + \phi\psi_{j-1} + \sigma_\eta\eta_j$. Entretanto, a presença desta variável torna o processo ψ_j não estacionário. Assim, não pretendemos tratar este problema aqui neste trabalho.

e o erro ξ_j com as distribuições dadas por (4.9) ou por (4.11), mas “padronizadas” de forma que $E[\xi_j] = 1$, de maneira a permitir a comparação dos ψ_j obtidos com as diversas distribuições⁶. Como as distribuições propostas em (4.9) e (4.11) tem valor esperado diferente de 1 precisamos “padronizar” as distribuições utilizando a seguinte proposição:

Proposição 4.3 *Seja ζ uma variável aleatória com distribuição Weibull padrão $\zeta \sim W(\lambda, 1)$ ou com distribuição gama padrão $\zeta \sim G(\lambda, 1)$, e seja ξ a variável aleatória “padronizada”, definida por*

$$\xi = \frac{\zeta}{E[\zeta]}.$$

*Caso ζ tenha densidade **Weibull** $\zeta \sim W(\lambda, 1)$, então ξ tem densidade dada por*

$$f_{\xi}(\xi) = \begin{cases} \lambda [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^{\lambda} \xi^{\lambda-1} e^{-[\Gamma(1+\lambda^{-1})\xi]^{\lambda}}, & \text{se } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi < 0 \end{cases}. \quad (4.21)$$

*Caso ζ tenha densidade **gama** $\zeta \sim G(\lambda, 1)$, então ξ tem densidade dada por*

$$f_{\xi}(\xi) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \xi^{\lambda-1} e^{-\lambda\xi}, & \text{se } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi < 0 \end{cases}. \quad (4.22)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Como as durações X_j , condicionais em variáveis latentes estocásticas ψ_j , são independentes entre si, podemos obter a probabilidade condicional conjunta do vetor X por:

$$p(x|\psi) = \prod_{j=1}^T p(x_j|\psi_j). \quad (4.23)$$

Assumindo as densidades (4.21) ou (4.22) para ξ_j podemos obter a distribuição de probabilidade da duração X_j condicional em ψ_j , através da seguinte proposição:

Proposição 4.4 (Densidade condicional de X_j dado ψ_j) *Seja $X_j = e^{\psi_j}\xi_j$, sendo a distribuição de ξ_j dada por (4.21) ou (4.22). Neste caso, a densidade de X_j condicional em ψ_j é dada para o caso **Weibull** por:*

$$f(x_j|\psi_j) = \begin{cases} \lambda \left[\frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{e^{\psi_j}} \right]^{\lambda} x_j^{\lambda-1} e^{-\left[\frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{e^{\psi_j}} x_j \right]^{\lambda}}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}, \quad (4.24)$$

*e para o caso da distribuição **gama** por*

$$f(x_j|\psi_j) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{e^{\psi_j}} \right)^{\lambda} x_j^{\lambda-1} e^{-\frac{\lambda}{e^{\psi_j}} x_j}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}. \quad (4.25)$$

⁶Naturalmente, outras distribuições com suporte positivo também poderiam ser utilizadas, como, por exemplo, a distribuição exponencial generalizada (Gupta e Kundu, 2000).

Caso $\lambda = 1$ em qualquer das distribuições acima, obtemos o caso da distribuição **exponencial**

$$f(x_j|\psi_j) = \begin{cases} e^{-x_j e^{-\psi_j}} e^{-\psi_j}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}. \quad (4.26)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Proposição 4.5 (Distribuição condicional de X_j dado ψ_j) Seja $X_j = e^{\psi_j} \xi_j$, sendo a distribuição de ξ_j dada por (4.21) ou (4.22). Neste caso, a função distribuição de probabilidade de X_j condicional em ψ_j é dada para o caso **Weibull** por:

$$F_{X_j|\psi_j}(x_j) = \begin{cases} 1 - e^{-\left[\frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{e^{\psi_j}} x_j\right]^\lambda}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}, \quad (4.27)$$

e para o caso da distribuição **gama** por

$$F_{X_j|\psi_j}(x_j) = \begin{cases} \frac{\Gamma_{\lambda x_j/c}(\lambda)}{\Gamma(\lambda)}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}, \quad (4.28)$$

em que $\Gamma_{\lambda x_j/c}(\lambda)$ é a **função gama incompleta** dada por

$$\Gamma_{\lambda x_j/c}(\lambda) = \int_0^{\lambda x_j/c} y^{\lambda-1} e^{-y} dy \quad (4.29)$$

e

$$c = \frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{e^{\psi_j}}.$$

Caso $\lambda = 1$ em qualquer das distribuições acima, obtemos o caso da distribuição **exponencial**

$$F_{X_j|\psi_j}(x_j) = \begin{cases} 1 - e^{-x_j e^{-\psi_j}} e^{-\psi_j}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}. \quad (4.30)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

As distribuições condicionais obtidas acima coincidem com as distribuições propostas em Strickland et al. (2006)⁷.

⁷Para facilitar a comparação reescrevemos abaixo as equações como utilizadas por Strickland et al. (2006):

- **Exponencial:**

$$p(x_j|\psi_j) = \exp\{-\psi_j\} \exp\{-x_j \exp(-\psi_j)\}$$

- **Weibull:**

$$p(x_j|\psi_j) = \lambda \left(\frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{\exp(\psi_j)} \right)^\lambda x_j^{\lambda-1} \exp\left\{-\left[\frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{\exp(\psi_j)} x_j\right]^\lambda\right\}$$

- **Gama:**

$$p(x_j|\psi_j) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\exp(\psi_j)} \right)^\lambda x_j^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\exp(\psi_j)} x_j\right\}$$

As distribuições (4.24) a (4.26) mostram que a relação entre X_j e ψ_j é não linear e bastante complicada. Para facilitar o tratamento, ao invés de trabalharmos diretamente com as durações vamos trabalhar com o seu logaritmo:

$$Y_j = \ln X_j. \quad (4.31)$$

Neste caso o modelo (4.4)-(4.5) fica

$$Y_j = \psi_j + \varepsilon_j, \quad (4.32)$$

$$\psi_j = \delta + \phi\psi_{j-1} + \sigma_\eta\eta_j, \quad |\phi| < 1, \quad (4.33)$$

onde

$$\varepsilon_j = \ln \xi_j. \quad (4.34)$$

As distribuições de Y_j e de ε_j podem ser facilmente obtidas através do método do jacobiano. A seguir vamos obter as distribuições de probabilidade condicionais de Y_j resultantes dessa transformação através da seguinte proposição:

Proposição 4.6 (Densidade condicional de Y_j dado ψ_j) *Seja $Y_j = \ln X_j$, tendo X_j as distribuições condicionais estabelecidas na prop. 4.4. Neste caso, a densidade de Y_j condicional em ψ_j é dada para o caso **exponencial** por:*

$$f(y_j|\psi_j) = e^{y_j - \psi_j - e^{y_j - \psi_j}}. \quad (4.35)$$

Para o caso da distribuição **Weibull** temos

$$f(y_j|\psi_j) = \lambda [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda(y_j - \psi_j) - [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda(y_j - \psi_j)}}. \quad (4.36)$$

E para o caso da distribuição **gama**

$$f(y_j|\psi_j) = \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{\lambda(y_j - \psi_j) - \lambda e^{y_j - \psi_j}}. \quad (4.37)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Os log-erros ε_j , por sua vez, são distribuídos identicamente e independentemente de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 4.7 (Densidade de ε_j) *Seja $\varepsilon_j = \ln \xi_j$, tendo ξ_j as distribuições condicionais estabelecidas na prop. 4.3. Neste caso, a função densidade de probabilidade de ε_j é dada para o caso **exponencial** por*

$$f(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j - e^{\varepsilon_j}}, \quad (4.38)$$

que chamaremos de **log-exponencial**.

Para o caso da distribuição **Weibull** temos

$$f(\varepsilon_j) = \lambda [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda \varepsilon_j - [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda \varepsilon_j}}, \quad (4.39)$$

que chamaremos de **log-Weibull**.

Para o caso da distribuição **gama** temos

$$f(\varepsilon_j) = \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{\lambda \varepsilon_j - \lambda e^{\varepsilon_j}}, \quad (4.40)$$

que chamaremos de **log-gama**⁸.

Prova. Observando as equações (4.35), (4.36) e (4.37) notamos que as distribuições são função da diferença entre y_j e ψ_j , que por (4.32) é dada por

$$\varepsilon_j = y_j - \psi_j. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41) nas equações (4.35), (4.36) e (4.37) obtemos o resultado desejado. ■

A distribuição log-Weibull é a distribuição de **Gumbel** ou **valor extremo tipo I**, a menos de uma translação e uma mudança de sinal da variável. A densidade desta distribuição é geralmente apresentada na seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)} - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}. \quad (4.42)$$

Tomando

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\lambda} \\ \mu &= \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}) \\ x &= -\varepsilon \end{aligned}$$

obtemos a densidade (4.39). A densidade de Gumbel padronizada é uma caso particular, tomando $\mu = 0$ e $\beta = 1$ em (4.42). As figs. 4.1 e 4.2 ilustram as densidades das três distribuições para dois valores de λ .

4.4 Funções características para as distribuições dos log-erros ε_j

Vamos chamar de “log-erro” a variável $\varepsilon_j = \ln \xi_j$. As funções características dos log-erros, para as distribuições dos erros ξ_j dadas pela proposição (4.3), são apresentadas na proposição

⁸Kleiber e Kotz (2003) denominam de “log-gama” a distribuição de $X = e^Y$, em que Y tem distribuição gama, que é exatamente a operação inversa que fizemos na proposição. Elucidada esta possível fonte de confusão, vamos entretanto manter neste texto o nome “log-gama” para a distribuição explicitada na proposição.

Figura 4.1: Funções densidade de probabilidade da log-exponencial (Gumbel), log-Weibull e log-gama, para $\lambda = 0.5$.

Figura 4.2: Funções densidade de probabilidade da log-exponencial (Gumbel), log-Weibull e log-gama, para $\lambda = 2$.

abaixo.

Proposição 4.8 (Função característica de ε_j) *Seja ε_j uma variável aleatória com as distribuições estabelecidas na prop. 4.7. Neste caso, a **função característica** de ε_j é dada para o caso **log-exponencial** por*

$$\varphi_\varepsilon(t) = \Gamma(1 + it). \quad (4.43)$$

Para o caso da distribuição **log-Weibull** temos

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{it}{\lambda}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \lambda^{-1}\right)\right]^{it}}. \quad (4.44)$$

E para o caso da distribuição **log-gama**

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma(\lambda + it)}{\lambda^{it} \Gamma(\lambda)}. \quad (4.45)$$

Nas expressões acima temos que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta \quad (4.46)$$

representa a **função gama** com argumento complexo⁹.

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

4.5 Cumulantes e momentos das distribuições dos log-erros

ε_j

Uma vez conhecida a função característica da distribuição de ε_j , podemos obter seus cumulantes a partir da *função geratriz de cumulantes* $G(t)$:

$$G(t) = \ln \varphi(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{(it)^r}{r!} \quad (4.47)$$

Expandindo $G(t)$ em uma série de Taylor em torno de $t = 0$ obtemos:

$$G(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial^r G}{\partial t^r} \bigg|_{t=0} \frac{t^r}{r!} \quad (4.48)$$

Comparando (4.47) e (4.48) podemos obter o r -ésimo cumulante por:

$$\kappa_r = \frac{1}{i^r} \frac{\partial^r G}{\partial t^r} \bigg|_{t=0} = \frac{1}{i^r} G^{(r)}(0) \quad (4.49)$$

Assim, para obter o r -ésimo cumulante precisamos da r -ésima derivada da função geratriz de cumulantes. A seguir vamos apresentar as funções geratrizes de cumulantes para ε_j e suas respectivas derivadas através da seguinte proposição.

Proposição 4.9 (Função geratriz de cumulantes de ε_j) *Seja ε_j uma variável aleatória com as distribuições condicionais estabelecidas na prop. 4.7. Neste caso, a **função geratriz***

⁹Para mais detalhes consulte, por exemplo, Abramowitz e Stegun (1972).

de cumulantes de ε_j é dada para o caso **log-exponencial** por

$$G_\varepsilon(t) = \ln \Gamma(1 + it), \quad (4.50)$$

com derivadas dadas por

$$G'_\varepsilon(t) = i\psi(1 + it), \quad (4.51)$$

$$G_\varepsilon^{(r)}(t) = i^r \psi^{(r-1)}(1 + it), \quad r > 1. \quad (4.52)$$

Para o caso da distribuição **log-Weibull** temos

$$G_\varepsilon(t) = \ln \Gamma(1 + it\lambda^{-1}) - it \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}), \quad (4.53)$$

com derivadas dadas por

$$G'_\varepsilon(t) = \frac{i}{\lambda} \psi(1 + it\lambda^{-1}) - i \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}) \quad (4.54)$$

$$G_\varepsilon^{(r)}(t) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^r \psi^{(r-1)}(1 + it\lambda^{-1}), \quad r > 1. \quad (4.55)$$

E para o caso da distribuição **log-gama**

$$G_\varepsilon(t) = \ln \Gamma(\lambda + it) - it \ln \lambda - \ln \Gamma(\lambda), \quad (4.56)$$

com derivadas dadas por

$$G'_\varepsilon(t) = i\psi(\lambda + it) - i \ln \lambda \quad (4.57)$$

$$G_\varepsilon^{(r)}(t) = i^r \psi^{(r-1)}(\lambda + it), \quad r > 1. \quad (4.58)$$

Nas expressões acima temos que

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (4.59)$$

representa a **função digama** com argumento complexo, e

$$\psi^{(r)}(z) = \frac{d^r}{dz^r} \psi(z) \quad (4.60)$$

representa a **função poligama** com argumento complexo¹⁰.

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Podemos agora obter os cumulantes através da seguintes proposição.

¹⁰Para mais detalhes destas funções consulte, por exemplo, Abramowitz e Stegun (1972).

Proposição 4.10 (Cumulantes de ε_j) *Seja ε_j uma variável aleatória com as funções densidade de probabilidade estabelecidas na prop. 4.7. Neste caso, os **cumulantes** da distribuição de ε_j são dados para o caso **log-exponencial** por*

$$\kappa_1 = \psi(1) = -\gamma, \quad (4.61)$$

$$\kappa_r = \psi^{(r)}(1), \quad r > 1. \quad (4.62)$$

*Para o caso da distribuição **log-Weibull** temos*

$$\kappa_1 = \frac{\psi(1)}{\lambda} - \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}), \quad (4.63)$$

$$\kappa_r = \frac{\psi^{(r)}(1)}{\lambda^{r+1}}, \quad r > 1. \quad (4.64)$$

*E para o caso da distribuição **log-gama***

$$\kappa_1 = \psi(\lambda) - \ln \lambda, \quad (4.65)$$

$$\kappa_r = \psi^{(r)}(\lambda), \quad r > 1. \quad (4.66)$$

*Nas expressões acima temos que $\gamma \approx 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ \dots$ é a **constante de Euler**, e $\psi^{(1)}(1) = \pi^2/6$.*

Prova. *Para obter o r -ésimo cumulante basta utilizar o resultado (4.49), isto é, o r -ésimo cumulante é dado pelo r -ésima derivada da função geratriz de cumulantes calculada em $t = 0$ dividido por i^r . ■*

Os momentos não centrais $\mu'_r = E[\varepsilon^r]$ podem ser obtidos a partir dos cumulantes através da seguinte relação¹¹:

$$\mu'_r = \sum_{m=1}^r \sum_{\pi} \left(\frac{\kappa_{p_1}}{p_1!} \right)^{\pi_1} \left(\frac{\kappa_{p_2}}{p_2!} \right)^{\pi_2} \cdots \left(\frac{\kappa_{p_m}}{p_m!} \right)^{\pi_m} \frac{r!}{\pi_1! \pi_2! \cdots \pi_m!},$$

onde o segundo somatório se estende para todos os valores não negativos dos π 's tais que

$$p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \cdots + p_m \pi_m = r.$$

Aqui, vamos apresentar somente as relações para os quatro primeiros momentos não centrais,

¹¹Para mais detalhes veja Stuart e Ord (1994), §3.14, pg. 87.

como obtidos por Stuart e Ord (1994):

$$\mu'_1 = \kappa_1, \quad (4.67)$$

$$\mu'_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2, \quad (4.68)$$

$$\mu'_3 = \kappa_3 + 3\kappa_2\kappa_1 + \kappa_1^3, \quad (4.69)$$

$$\mu'_4 = \kappa_4 + 4\kappa_3\kappa_1 + 3\kappa_2^2 + 6\kappa_2\kappa_1^2 + \kappa_1^4. \quad (4.70)$$

Entretanto é mais conveniente obter os momentos centrais $\mu_r = E[(\varepsilon - \mu_\varepsilon)^r]$, $\mu_\varepsilon = \mu'_1 = \kappa_1$, em função dos cumulantes, como obtidos por Stuart e Ord (1994):

$$\mu_2 = \kappa_2, \quad (4.71)$$

$$\mu_3 = \kappa_3, \quad (4.72)$$

$$\mu_4 = \kappa_4 + 10\kappa_2^2. \quad (4.73)$$

Proposição 4.11 (4 primeiros momentos de ε_j) *Seja ε_j uma variável aleatória com as funções densidade de probabilidade estabelecidas na prop. 4.7. Neste caso, os **quatro primeiros momentos centrais** da distribuição de ε_j são dados para o caso **log-exponencial** por*

$$\mu_1 = \psi(1) = -\gamma, \quad (4.74)$$

$$\mu_2 = \psi^{(1)}(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (4.75)$$

$$\mu_3 = \psi^{(2)}(1), \quad (4.76)$$

$$\mu_4 = \psi^{(3)}(1) + \frac{5\pi^4}{18}. \quad (4.77)$$

*Para o caso da distribuição **log-Weibull** temos*

$$\mu_1 = \frac{\psi(1)}{\lambda} - \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}) = -\frac{\gamma}{\lambda} - \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}), \quad (4.78)$$

$$\mu_2 = \frac{\psi^{(1)}(1)}{\lambda^2} = \frac{\pi^2}{6\lambda^2}, \quad (4.79)$$

$$\mu_3 = \frac{\psi^{(2)}(1)}{\lambda^3}, \quad (4.80)$$

$$\mu_4 = \frac{\psi^{(3)}(1)}{\lambda^4} + \frac{5\pi^4}{18\lambda^4}. \quad (4.81)$$

*E para o caso da distribuição **log-gama***

$$\mu_1 = \psi(\lambda) - \ln \lambda, \quad (4.82)$$

$$\mu_2 = \psi^{(1)}(\lambda), \quad (4.83)$$

$$\mu_3 = \psi^{(2)}(\lambda), \quad (4.84)$$

$$\mu_4 = \psi^{(3)}(\lambda) + 10 \left[\psi^{(1)}(\lambda) \right]^2. \quad (4.85)$$

Prova. Para obter as relações acima basta aplicar os resultados da prop. 4.10 aos resultados (4.71) a (4.73). ■

O coeficiente de assimetria γ_1 e o coeficiente de excesso de curtose γ_2 são dados por

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \\ \gamma_2 &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3. \end{aligned}$$

Note que, para o caso da distribuição log-Weibull, tanto o coeficiente de assimetria, quanto o coeficiente de excesso de curtose, independem do parâmetro λ , e coincidem com os respectivos coeficientes da distribuição log-exponencial:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\frac{\psi^{(2)}(1)}{\lambda^3}}{\left(\frac{\pi^2}{6\lambda^2}\right)^{3/2}} = \frac{\psi^{(2)}(1)}{(\pi^2/6)^3}, \\ \gamma_2 &= \frac{\frac{\psi^{(3)}(1)}{\lambda^4} + \frac{5\pi^4}{18\lambda^4}}{\left(\frac{\pi^2}{6\lambda^2}\right)^2} - 3 = \frac{\psi^{(3)}(1)}{(\pi^2/6)^2} + 7. \end{aligned}$$

As Figuras (4.3) e (4.4) ilustram os coeficientes de assimetria e excesso de curtose em função de λ para as distribuições log-exponencial, log-Weibull e log-gama.

4.6 Função característica conjunta (“função poli-característica”)

Para estimar o modelo SCD utilizando o método da ECF precisamos calcular a “função poli-característica” (PCF) associada com a distribuição conjunta de um bloco sequencial de tamanho $p + 1$ das log-durações. Mas antes de obter este resultado, vamos calcular os ψ_j para blocos de tamanho $p + 1$, através da seguinte proposição:

Figura 4.3: Coeficiente de assimetria γ_1 em função de λ , para as distribuições log-exponencial, log-Weibull e log-gama.

Figura 4.4: Coeficiente de excesso de curtose γ_2 em função de λ , para as distribuições log-exponencial, log-Weibull e log-gama.

Proposição 4.12 (Variável latente ψ_{j+k} , k passos adiante de ψ_j) A variável latente ψ_{j+k} , k passos adiante de ψ_j definida em (4.5) do modelo (4.4)-(4.8), é dada por:

$$\psi_{j+k} = \frac{1 - \phi^k}{1 - \phi} \delta + \phi^k \psi_j + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{k-1} \phi^l \eta_{j+k-l}, \quad j = 1, \dots, T - k. \quad (4.86)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Seguindo o procedimento de ECF conjunta sugerido por Knight e Yu (2002), vamos chamar de Z_j o vetor de blocos sobrepostos de log-durações $(Y_j, Y_{j+1}, \dots, Y_{j+p})'$, $j = 1, \dots, T-p$. A função característica conjunta do bloco é dada por:

$$\varphi_z(r) = E[\exp(ir'Z_j)],$$

em que r é um vetor real $(p+1) \times 1$. Para o modelo SCD temos a seguinte proposição

Proposição 4.13 (Função poli-característica do modelo SCD) *Seja o modelo SCD definido pelas equações (4.4)-(4.5), e seja Z_j o vetor de blocos sobrepostos de log-durações $(Y_j, Y_{j+1}, \dots, Y_{j+p})'$. Neste caso, a função poli-característica do vetor Z_j é dada por*

$$\begin{aligned} \varphi_z(r) = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_j), \end{aligned} \quad (4.87)$$

onde $r = (r_1, \dots, r_{p+1})' \in \mathbb{R}^{p+1}$ e $\varphi_\varepsilon(s)$ é a função característica de $\varepsilon_j = \ln \xi_j$, fornecida pela proposição (4.8).

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

4.7 Verossimilhança amostral para o modelo SCD

A maneira mais natural de estimar os parâmetros do modelo SCD seria através da maximização da função de verossimilhança. Para obtê-la, vamos assumir que possuímos uma amostra de tamanho T das durações. Vamos chamar de $X = (X_1, \dots, X_T)'$ e de $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_T)'$. Pela hipótese de independência condicional temos que a função densidade de probabilidade condicional de X dado Ψ é

$$p(x|\psi, \theta) = \prod_{j=1}^T p(x_j|\psi_j). \quad (4.88)$$

A função densidade de probabilidade conjunta de X e Ψ pode ser obtida através do condicionamento de ψ_j em ψ_{j-1}

$$p(x, \psi|\theta) = \prod_{j=1}^T p(x_j|\psi_j) p(\psi_j|\psi_{j-1}, \theta) p(\psi_1|\theta). \quad (4.89)$$

Finalmente, a função de densidade da amostra pode ser obtida através da eliminação do vetor de variáveis latentes Ψ através da seguinte integração T -dimensional

$$p(x|\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \psi|\theta) d\psi_1 \dots d\psi_T. \quad (4.90)$$

Bauwens e Veredas (2004) colocam que “a principal dificuldade com o modelo SCD é a sua estimação, porque ao contrário do modelo ACD, não é fácil calcular sua função de verossimilhança: a variável latente tem que ser integrada.” A equação (4.90) indica que a obtenção da verossimilhança amostral requer uma integração T -dimensional. A questão fundamental é que, com as distribuições propostas, a integral em (4.90) não pode ser calculada analiticamente, e, portanto, métodos numéricos de integração devem ser utilizados. Acontece que, como T é potencialmente muito grande (da ordem de milhares, ou maior), os métodos numéricos de quadratura são muito lentos e acumulam erros, dado que as funções integrandas são estritamente positivas. Para lidar com este problema, métodos mais sofisticados de integração multidimensional devem ser empregados. Em particular, Strickland et al. (2006) empregam um método de MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) para estimar o modelo SCD.

Para estimação do modelo SCD Bauwens e Veredas (2004) empregam o método de *quase-máxima verossimilhança* (QML - *quasi maximum likelihood*), que consiste basicamente em utilizar o método da máxima verossimilhança como se as distribuições fossem Gaussianas, de maneira a poder utilizar o filtro de Kalman para estimação da variável latente. Note que o uso das equações (4.32) e (4.33) permite escrever o modelo no formato de *espaço de estados*:

$$\psi_j = \delta + \phi\psi_{j-1} + \sigma_\eta\eta_t, \quad (4.91)$$

$$y_j = \psi_j + \varepsilon_j, \quad (4.92)$$

em que (4.91) é a equação de *estado* ou *transição*, e (4.92) é a equação de *observação* ou de *mensuração*. A vantagem da colocação do modelo neste formato é permitir o uso do algoritmos especializados (como o filtro de Kalman) para estimação das variáveis latentes. Esta abordagem será tratada no Capítulo 6, em que aplicamos o algoritmo do filtro de Kalman para o modelo de interesse, utilizando o algoritmo QML como estimador.

4.8 Sumário

Neste capítulo revimos o modelo ACD de Engle e Russell (1998) e o modelo SCD de Bauwens e Veredas (2004). Especificamos o particular modelo SCD de interesse e para suas distribuições dos log-erros obtivemos uma série de resultados:

- função característica;
- função geratriz de cumulantes;
- cumulantes;
- quatro primeiros momentos centrais.

Obtivemos, também, a função “poli-característica” para o modelo SCD de interesse e relatamos a dificuldade do uso do método da verossimilhança para estimação dos parâmetros, devido à necessidade de uma integração T -dimensional.

Finalmente, notamos que o uso das log-durações fornece um modelo no formato de espaço de estados linear, o que permitiria o uso de algoritmos como o filtro de Kalman para estimação das variáveis latentes.

O foco deste trabalho, no entanto, é a estimação do modelo SCD através do método da função característica empírica (ECF), o que será feito no próximo capítulo.

Capítulo 5

Estimação do modelo SCD utilizando a ECF

No capítulo anterior obtivemos a função poli-característica do modelo de duração condicional estocástica. Neste capítulo vamos obter algumas propriedades dos estimadores calculados através dos métodos CECF e DECF para estimação do modelo SCD.

5.1 Estimação dos parâmetros através da CECF

Para estimar os parâmetros usando o método CECF proposto por Knight e Yu (2002), temos que resolver o seguinte problema de otimização:

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} |\varphi_n(r) - \varphi_z(r, \theta)|^2 g(r) dr. \quad (5.1)$$

O estimador $\hat{\theta}_n$ é um estimador *extremo*¹, pois é obtido através da minimização de uma função $Q_n(\theta)$ da distância ponderada entre a função característica empírica e a função característica:

$$Q_n(\theta) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} |\varphi_n(r) - \varphi_z(r, \theta)|^2 g(r) dr. \quad (5.2)$$

Utilizando (2.8) podemos reescrever (5.2) acima como:

¹Veja apêndice A.

$$\begin{aligned}
Q_n(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^{p+1}} |\varphi_n(r) - \varphi_z(r, \theta)|^2 g(r) dr \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ir'z_j} - \varphi_z(r, \theta) \right|^2 g(r) dr \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ir'z_j} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_z(r, \theta) \right|^2 g(r) dr \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ e^{ir'z_j} - \varphi_z(r, \theta) \right\} \right|^2 g(r) dr \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ \cos(r'z_j) - \operatorname{Re} \varphi_z(r, \theta) + i(\sin(r'z_j) - \operatorname{Im} \varphi_z(r, \theta)) \right\} \right|^2 g(r) dr.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Em particular vamos utilizar $g(r) = \exp(-r'r)$, de maneira a podermos efetuar a integração multidimensional acima através do método de *quadratura de Gauss-Hermite* (ver Press et al. (1997)), mas limitando r à uma esfera multidimensional como sugerido por Jäckel (2005), de maneira a aumentar a eficiência computacional.

Knight e Yu (2002) estabelecem algumas condições de regularidade, descritas no Capítulo 3, sob as quais o estimador acima é consistente e assintoticamente normalmente distribuído para o caso dependente com o seguinte resultado:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, B(\theta)^{-1} A(\theta) B(\theta)^{-1}), \tag{5.4}$$

em que a matriz $B(\theta)$ é dada pela integral $p+1$ -dimensional:

$$B(\theta) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \theta)}{\partial \theta'} + \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \theta)}{\partial \theta'} \right) g(r) dr. \tag{5.5}$$

Knight et al. (2002) fornecem a seguinte expressão para $A(\theta)$:

$$A(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K(z_j, \theta) K(z_k, \theta)' \right\}, \tag{5.6}$$

em que o vetor aleatório $K(z_j, \theta)$ é uma variável auxiliar proveniente da derivação de $Q_n(\theta)$ em relação a θ :

$$\frac{\partial Q_n(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K(z_j, \theta), \tag{5.7}$$

sendo:

$$K(z_j, \theta) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left\{ (\cos(r'z_j) - \operatorname{Re} \varphi_z(r, \theta)) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \theta)}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + (\sin(r'z_j) - \operatorname{Im} \varphi_z(r, \theta)) \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \theta)}{\partial \theta} \right\} g(r) dr. \quad (5.8)$$

A derivação de (5.4) a (5.8) é feita no apêndice D. Infelizmente a equação (5.6) não fornece diretamente um estimador para a matriz $A(\theta)$. Knight e Yu (2002) não explicitam o estimador utilizado para $A(\theta)$, mas sugerem a obtenção de um estimador consistente utilizando os métodos de Andrews (1991) e Newey e West (1994), isto é, um estimador consistente e robusto à heteroscedasticidade e à autocorrelação para a matriz de covariâncias de $K(z_j, \theta)$, possivelmente através do estimador $\hat{K}(z_j, \theta) = K(z_j, \hat{\theta}_n)$:

$$\hat{K}(z_j, \theta) = K(z_j, \hat{\theta}_n) \\ = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left\{ (\cos(r'z_j) - \operatorname{Re} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + (\sin(r'z_j) - \operatorname{Im} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)) \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right\} g(r) dr. \quad (5.9)$$

Um outro possível estimador para a matriz $A(\theta_0)$ é dado na proposição a seguir.

Proposição 5.1 (estimador para $A(\theta_0)$) *Um estimador para a matriz $A(\theta_0)$ é dado por*

$$\hat{A}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(s, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta'} \Omega_{RR,m}(r, s) + \right. \\ + \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(s, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta'} \Omega_{RI,m}(r, s) + \\ + \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(s, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta'} \Omega_{IR,m}(r, s) \\ \left. + \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(s, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta'} \Omega_{II,m}(r, s) \right) g(r) g(s) dr ds, \quad (5.10)$$

em que a matriz $\Omega(r, s)$ é formada pela seguinte partição:

$$\Omega(r, s) = \begin{bmatrix} \Omega_{RR,m}(r, s) & \Omega_{RI,m}(r, s) \\ \Omega_{IR,m}(r, s) & \Omega_{II,m}(r, s) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

e

$$\begin{aligned}\Omega_{RR,m}(r,s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) + \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - m \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \},\end{aligned}\tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{RI,m}(r,s) &= \frac{1}{2} \{ -\operatorname{Im} \varphi(r-s) + \operatorname{Im} \varphi(r+s) \} - m \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \{ -\operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) - \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r) \},\end{aligned}\tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{IR,m}(r,s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r-s) + \operatorname{Im} \varphi(r+s) \} - m \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r) \},\end{aligned}\tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{II,m}(r,s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) - \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - m \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) + \\ &\quad + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) - \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

em que

$$\Lambda_k(r, s) = E \left[e^{ir'Z_j + is'Z_{j+k}} \right], \tag{5.16}$$

e $m \leq n$ é um número suficientemente grande para que as séries acima tenham convergido aproximadamente.

Prova. A obtenção deste estimador encontra-se no apêndice D, onde é chamado de $A_n^{(3)}(\theta_0)$.

■

Finalmente, se chamarmos de $V = B(\theta)^{-1} A(\theta) B(\theta)^{-1}$, podemos obter um estimador consistente para V através de:

$$\widehat{V} = \widehat{B}(\theta)^{-1} \widehat{A}(\theta) \widehat{B}(\theta)^{-1}, \tag{5.17}$$

em que $\widehat{B}(\theta) = B(\widehat{\theta}_n)$, isto é, a matriz B calculada no estimador CECF de θ :

$$B(\widehat{\theta}_n) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \widehat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_z(r, \widehat{\theta}_n)}{\partial \theta'} + \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \widehat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi_z(r, \widehat{\theta}_n)}{\partial \theta'} \right) g(r) dr, \tag{5.18}$$

e $\widehat{A}(\theta)$ pode ser estimada por (5.10).

Para o caso específico do modelo de duração condicional estocástica podemos calcular as funções $\Lambda_k(r, s)$ através da seguinte proposição:

Proposição 5.2 (Função $\Lambda_k(r, s)$ para o modelo SCD) *Seja o modelo SCD definido por (4.4) a (4.8). Chamemos $w(r, s)$ o vetor $(p+k+1) \times 1$ dado por*

$$w(r, s) = \begin{cases} (r_1, \dots, r_k, r_{k+1} + s_1, \dots, r_{p+1} + s_{p-k+1}, s_{p-k+2}, \dots, s_{p+1})' & \text{se } k \leq p \\ (r_1, \dots, r_{p+1}, 0, \dots, 0, s_1, \dots, s_{p+1})' & \text{se } k > p \end{cases}$$

em que $r, s \in \mathbb{R}^{k+1}$. Utilizando a função poli-característica (4.87) podemos escrever (5.16) como:

$$\begin{aligned} \Lambda_k(r, s) = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+k+1} w_{\zeta} - \frac{\sigma_{\eta}^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+k+1} \phi^{\zeta-1} w_{\zeta} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+k+1} \frac{\sigma_{\eta}^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+k+1} \phi^{\zeta-j} w_{\zeta} \right)^2 \right\} \prod_{\zeta=1}^{p+k+1} \varphi_{\varepsilon}(w_{\zeta}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

em que w_{ζ} designa o ζ -ésimo elemento do vetor $w(r, s)$.

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Vamos agora verificar qual o comportamento assintótico de $\Omega_n(r, s)$ para o modelo SCD. Para isso vamos inicialmente verificar qual o comportamento da variável ψ_{j+k} . Utilizando (4.86) podemos escrever:

$$\psi_{j+k} = \frac{1-\phi^k}{1-\phi} \delta + \phi^k \psi_j + \sigma_{\eta} \sum_{l=0}^{k-1} \phi^l \eta_{j+k-l}$$

A função característica de ψ_{j+k} pode então ser calculada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{\psi_{j+k}}(t) &= E[\exp(it\psi_{j+k})] = \\ &= E\left[\exp\left\{it\frac{1-\phi^k}{1-\phi}\delta + it\phi^k\psi_j + it\sigma_{\eta}\sum_{l=0}^{k-1}\phi^l\eta_{j+k-l}\right\}\right] = \\ &= \exp\left(it\delta\frac{1-\phi^k}{1-\phi}\right) \cdot E[\exp(it\phi^k\psi_j)] \cdot \prod_{l=0}^{k-1} E[\exp(it\sigma_{\eta}\phi^l\eta_{j+k-l})] = \\ &= \exp\left(it\delta\frac{1-\phi^k}{1-\phi}\right) \cdot \varphi_{\psi_j}(t\phi^k) \cdot \prod_{l=0}^{k-1} \varphi_{\eta}(t\sigma_{\eta}\phi^l\eta_{j+k-l}) = \\ &= \exp\left(it\delta\frac{1-\phi^k}{1-\phi}\right) \cdot \exp\left(\frac{it\delta\phi^k}{1-\phi} - \frac{\sigma_{\eta}^2 t^2 \phi^{2k}}{2(1-\phi^2)}\right) \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \exp\left(-\frac{t^2 \sigma_{\eta}^2 \phi^{2l}}{2}\right) = \\ &= \exp\left(it\delta\frac{1-\phi^k}{1-\phi} + \frac{it\delta\phi^k}{1-\phi} - \frac{\sigma_{\eta}^2 t^2 \phi^{2k}}{2(1-\phi^2)} - \frac{t^2 \sigma_{\eta}^2}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \phi^{2l}\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Podemos observar por (5.20) que o limite de $\varphi_{\psi_{j+k}}(t)$ quando $k \rightarrow \infty$, isto é, quando o intervalo entre j e $j+k$ fica muito grande, é dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\psi_{j+k}}(t) = \exp \left(\frac{it\delta}{1-\phi} - \frac{t^2\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \right) = \varphi_\psi(t).$$

Vamos agora obter a função característica de ψ_{j+k} dado ψ_j . Neste caso temos

$$\begin{aligned} \varphi_{\psi_{j+k}|\psi_j}(t) &= E[\exp(it\psi_{j+k})|\psi_j] = \\ &= E \left[\exp \left\{ it \frac{1-\phi^k}{1-\phi} \delta + it\phi^k \psi_j + it\sigma_\eta \sum_{l=0}^{k-1} \phi^l \eta_{j+k-l} \right\} \right] = \\ &= \exp \left(it\delta \frac{1-\phi^k}{1-\phi} \right) \cdot \exp(it\phi^k \psi_j) \cdot \prod_{l=0}^{k-1} E[\exp(it\sigma_\eta \phi^l \eta_{j+k-l})] = \\ &= \exp(it\phi^k \psi_j) \cdot \exp \left(it\delta \frac{1-\phi^k}{1-\phi} \right) \cdot \prod_{l=0}^{k-1} \varphi_\eta(t\sigma_\eta \phi^l) = \\ &= \exp \left(it\delta \frac{1-\phi^k}{1-\phi} \right) \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \exp \left(-\frac{t^2\sigma_\eta^2 \phi^{2l}}{2} \right) = \\ &= \exp \left(it\phi^k \psi_j + it\delta \frac{1-\phi^k}{1-\phi} - \frac{t^2\sigma_\eta^2}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \phi^{2l} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Note que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\psi_{j+k}|\psi_j}(t) = \exp \left(\frac{it\delta}{1-\phi} - \frac{t^2\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \right) = \varphi_\psi(t).$$

Logo, como a função característica de ψ_{j+k} dado ψ_j , e, conseqüentemente, sua distribuição, não dependem de ψ_j quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que ψ_{j+k} e ψ_j são assintoticamente independentes. Neste caso, podemos definir $\Lambda_\infty(r, s)$ por:

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty(r, s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k(r, s) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[\exp(ir'z_j + is'z_{j+k})] = \\ &= E[\exp(ir'z_j)] \cdot E[\exp(is'z_{j+k})] = \\ &= \varphi_z(r) \varphi_z(s). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A fim de visualizar o comportamento da matriz de covariâncias $\Omega_n(r, s)$ no modelo SCD graficamos na figura (5.1) as partições de $\Omega_n(r, s)$ conforme as equações (D.13) a (D.16). Para finalidade de comparação graficamos, também, o estimador para o caso i.i.d., $\Omega_n^{iid}(r, s)$, dado pelas equações (3.17) a (3.20), que repetimos abaixo por conveniência:

Figura 5.1: Matriz de covariância $\Omega_n(r, s)$ para o processo de duração estocástica condicional, em função do tamanho da amostra (n). Os parâmetros do processo SCD são $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, com distribuição Weibull. Os pontos para cálculo da função característica (sorteados aleatoriamente) são $r = (0.891299, 0.762097)'$ e $s = (0.456468, 0.018504)'$. Para fim de comparação a figura também ilustra a matriz $\Omega_n^{iid}(r, s)$ do processo IID.

$$\Omega_{RR}^{i.i.d.}(r, s) = \frac{1}{2} [\operatorname{Re} \varphi_z(r - s) + \operatorname{Re} \varphi_z(r + s)] - \operatorname{Re} \varphi_z(r) \operatorname{Re} \varphi_z(s), \quad (5.23)$$

$$\Omega_{RI}^{i.i.d.}(r, s) = \frac{1}{2} [-\operatorname{Im} \varphi_z(r - s) + \operatorname{Im} \varphi_z(r + s)] - \operatorname{Re} \varphi_z(r) \operatorname{Im} \varphi_z(s), \quad (5.24)$$

$$\Omega_{IR}^{i.i.d.}(r, s) = \frac{1}{2} [\operatorname{Im} \varphi_z(r - s) + \operatorname{Im} \varphi_z(r + s)] - \operatorname{Im} \varphi_z(r) \operatorname{Re} \varphi_z(s), \quad (5.25)$$

$$\Omega_{II}^{i.i.d.}(r, s) = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} \varphi_z(r - s) - \operatorname{Re} \varphi_z(r + s)) - \operatorname{Im} \varphi_z(r) \operatorname{Im} \varphi_z(s). \quad (5.26)$$

5.2 Estimação dos parâmetros através da DECF

O estimador DECF $\hat{\theta}_n$ é definido por

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} Q_n, \quad (5.27)$$

sendo a função Q_n dada por

$$Q_n = (V_n - V_\theta)' W_n (V_n - V_\theta), \quad (5.28)$$

em que W_n é uma matriz $2q \times 2q$ simétrica, de posto $\text{rank}(W_n) \leq 2q$, e

$$V_n - V_\theta = \begin{pmatrix} u_n(r_1) - u(r_1) \\ \vdots \\ u_n(r_q) - u(r_q) \\ v_n(r_1) - v(r_1) \\ \vdots \\ v_n(r_q) - v(r_q) \end{pmatrix}_{2q \times 1}, \quad (5.29)$$

em que u_n , v_n , u e v são definidos como

$$u_n(r) = \text{Re } \varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r' X_j), \quad (5.30)$$

$$v_n(r) = \text{Im } \varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(r' X_j), \quad (5.31)$$

$$u(r) = \text{Re } \varphi(r) = E[\cos(r' X_j)], \quad (5.32)$$

$$v(r) = \text{Im } \varphi(r) = E[\sin(r' X_j)], \quad (5.33)$$

e sendo $R = \{r_1, \dots, r_q\}$ uma malha fixa, onde cada elemento $r_i \in \mathbb{R}^{p+1}$. Também podemos escrever

$$V_n - V_\theta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j; \theta), \quad (5.34)$$

sendo

$$f(Z_j; \theta) = \begin{pmatrix} \cos(r_1' Z_j) - u(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \cos(r_q' Z_j) - u(r_q; \theta) \\ \sin(r_1' Z_j) - v(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \sin(r_q' Z_j) - v(r_q; \theta) \end{pmatrix}_{2q \times 1}. \quad (5.35)$$

Podemos notar que estimador DECF pertence à classe dos estimadores *extremos*, como no caso do estimador CECF. Em particular, este estimador é um estimador do tipo GMM

(*Generalized Method of Moments*). Antes de obter as propriedades deste estimador, vamos apresentar a propriedade de convergência do processo $\sqrt{n}(V_n - V_\theta)$, que aparece como um lema em Knight e Satchell (1997):

Proposição 5.3 (Convergência $V_n - V_\theta$) *O vetor $\sqrt{n}(V_n - V_\theta)$ definido em (5.29) converge em distribuição para*

$$\sqrt{n}(V_n - V_\theta) \xrightarrow{d} N_{2q}(0, \Omega_0),$$

sendo a matriz Ω_0 dada pela seguinte partição

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{RR} & \Omega_{RI} \\ \Omega_{IR} & \Omega_{II} \end{bmatrix}_{2q \times 2q},$$

e os elementos das matrizes Ω_{RR} , Ω_{RI} , Ω_{IR} e Ω_{II} são dados por:

$$\begin{aligned} \{\Omega_{RR}\}_{i,j} &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r_i - r_j) + \operatorname{Re} \varphi(r_i + r_j) \} - n \operatorname{Re} \varphi(r_i) \operatorname{Re} \varphi(r_j) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r_i, -r_j) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r_i, r_j) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-r_j, r_i) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r_j, r_i) \}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \{\Omega_{RI}\}_{i,j} &= \frac{1}{2} \{ -\operatorname{Im} \varphi(r_i - r_j) + \operatorname{Im} \varphi(r_i + r_j) \} - n \operatorname{Re} \varphi(r_i) \operatorname{Im} \varphi(r_j) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ -\operatorname{Im} \Lambda_k(r_i, -r_j) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r_i, r_j) - \operatorname{Im} \Lambda_k(-r_j, r_i) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r_j, r_i) \}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \{\Omega_{IR}\}_{i,j} &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r_i - r_j) + \operatorname{Im} \varphi(r_i + r_j) \} - n \operatorname{Im} \varphi(r_i) \operatorname{Re} \varphi(r_j) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k(r_i, -r_j) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r_i, r_j) + \operatorname{Im} \Lambda_k(-r_j, r_i) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r_j, r_i) \}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \{\Omega_{II}\}_{i,j} &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r_i - r_j) - \operatorname{Re} \varphi(r_i + r_j) \} - n \operatorname{Im} \varphi(r_i) \operatorname{Im} \varphi(r_j) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r_i, -r_j) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r_i, r_j) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-r_j, r_i) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r_j, r_i) \}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Prova. Para demonstrar esta proposição basta aplicar a proposição 2.1 para os pares gerados pelo produto cartesiano $(r_1, \dots, r_q) \times (r_1, \dots, r_q)$. Note que $\Omega_0 = nE[(V_n - V_\theta)(V_n - V_\theta)']$.

■

Teorema 5.1 (Convergência do estimador DECF) *Seja $\{\hat{\theta}_n\}$ a seqüência de estimadores DECF obtida através da otimização em (5.27), de tal forma que $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$. Sejam, também, as seguintes hipóteses:*

- (a) A sequência $\{Z_j\}$ é estacionária e α -mixing.
- (b) A sequência de matrizes simétricas positivas definidas W_n converge em probabilidade para uma matriz simétrica positiva definida W_0 , $W_n \xrightarrow{p} W_0$.
- (c) A matriz $\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'}$ e sua inversa existem e são contínuas em uma vizinhança aberta e convexa de θ_0 .

Então, temos:

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{p} B(\theta_0) = 2 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0}, \quad (5.40)$$

e

$$\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0)),$$

em que

$$A(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[n \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right] = 4 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} W_0 \Omega_0 W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0}. \quad (5.41)$$

Além disso, a distribuição limite do estimador DECF $\hat{\theta}_n$ é dada por

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}), \quad (5.42)$$

sendo

$$B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1} = \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right)^{-1} \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_0 \Omega_0 W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right)^{-1}. \quad (5.43)$$

Prova. A demonstração deste teorema encontra-se no apêndice E. ■

O resultado anterior é análogo ao obtido para estimadores GMM, como encontrado, por exemplo, em Hansen (1982) ou Hayashi (2000). Note que a eficiência do estimador DECF depende da particular escolha de matrizes de peso W_n . Podemos calcular uma matriz de pesos de maneira a obter um estimador eficiente no sentido GMM, isto é, que minimiza a matriz de covariância (5.43), através da seguinte proposição (Knight e Satchell (1997)).

Proposição 5.4 (Estimador DECF eficiente GMM) *Seja Ω_n um estimador consistente de Ω_0 , i.e., $\Omega_n \xrightarrow{p} \Omega_0$. Se tomarmos a matriz de peso $W_n = \Omega_n^{-1}$, obteremos o estimador DECF eficiente no sentido GMM (isto é, um estimador do tipo DECF com a menor variância em (5.43)), que possui a seguinte distribuição assintótica*

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N \left(0, \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right)^{-1} \right). \quad (5.44)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Nas duas últimas seções obtivemos as propriedades dos estimadores CECF e DECF. A única dificuldade remanescente é calcular as derivadas da função característica em relação ao vetor de parâmetros, o que faremos a seguir.

5.3 Derivadas da função poli-característica em relação ao vetor de parâmetros

Para obter um estimador para a matriz de covariância assintótica de $\hat{\theta}$ precisamos obter as derivadas da função poli-característica φ_z em relação ao vetor de parâmetros $\theta = (\delta, \phi, \sigma_\eta, \lambda)'$. Lembrando que φ_z é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_z(r) = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_j), \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(t) &= \exp \left(\frac{it\delta}{1-\phi} - \frac{\sigma_\eta^2 t^2}{2(1-\phi^2)} \right), \\ \varphi_\eta(t) &= \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \Gamma(1+it) & , \text{ se exponencial} \\ \frac{\Gamma(1+it\lambda^{-1})}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} & , \text{ se Weibull} \\ \frac{\Gamma(\lambda+it)}{\lambda^{it}\Gamma(\lambda)} & , \text{ se gama.} \end{cases}$$

Nas derivadas a seguir vamos utilizar a função *digama* definida por:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (5.45)$$

Antes de calcular as derivadas da função poli-característica φ_z , vamos calcular as derivadas da função característica dos log-erros φ_ε .

Proposição 5.5 (Derivadas parciais de φ_ε) *As derivadas da função característica dos log-erros, $\varphi_\varepsilon(r)$, em relação a λ (parâmetro do modelo SCD) são dadas por:*

- **Exponencial:**

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(r)}{\partial \lambda} = 0. \quad (5.46)$$

• **Weibull:**

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(r)}{\partial \lambda} = \frac{it}{\lambda^2} \frac{\Gamma(1 + ir\lambda^{-1})}{[\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^{it}} \left\{ -\psi(1 + ir\lambda^{-1}) + \psi(1 + \lambda^{-1}) \right\}. \quad (5.47)$$

• **Gama:**

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(r)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^{it}} \frac{\Gamma(\lambda + ir)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \psi(\lambda + ir) - \frac{ir}{\lambda} - \psi(\lambda) \right\}. \quad (5.48)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

Proposição 5.6 (Derivadas parciais de φ_z) As derivadas parciais da função polí-característica, $\varphi_z(r)$, em relação aos parâmetros do modelo SCD, $\theta = (\delta, \phi, \sigma_\eta, \lambda)'$, são dadas por

$$\frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \delta} = \varphi_z(r) \left(\frac{i}{1 - \phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta \right), \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \phi} = & \varphi_z(r) \left\{ \frac{i\delta}{(1 - \phi)^2} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2 \phi}{(1 - \phi^2)^2} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \right. \\ & - \frac{\sigma_\eta^2}{(1 - \phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right) \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} (\zeta - 1) \phi^{\zeta-2} r_\zeta \right) - \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \sigma_\eta^2 \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right) \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} (\zeta - j) \phi^{\zeta-j-1} r_\zeta \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \sigma_\eta} = \varphi_z(r) \left\{ -\frac{\sigma_\eta}{(1 - \phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \sum_{j=2}^{p+1} \sigma_\eta \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\}, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \lambda} = \varphi_z(r) \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{\varphi_\varepsilon(r_j)} \frac{\partial \varphi_\varepsilon(r_j)}{\partial \lambda}. \quad (5.52)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice C. ■

5.4 Restrições impostas pelo espaço paramétrico

A otimização em (5.1) ou (5.27) está sujeita às restrições impostas pelo espaço paramétrico Θ . Para o nosso caso temos que $\theta = (\delta, \phi, \sigma_\eta, \lambda)'$, com as restrições $\sigma_\eta > 0$ e $-1 < \phi < 1$ (para que o processo seja estacionário). Mas como a otimização sujeita às restrições é um problema notoriamente difícil, é conveniente transformar as variáveis de maneira a eliminar as restrições. Em particular, vamos empregar as seguintes transformações:

$$\sigma_\eta = e^\zeta, \quad -\infty < \zeta < \infty \quad (5.53)$$

e

$$\phi = \frac{\chi}{\sqrt{1+\chi^2}}, \quad -\infty < \chi < \infty. \quad (5.54)$$

De uma maneira geral podemos denotar o vetor de transformações por $\theta = g(\xi)$. Para o nosso caso se denotarmos o vetor de parâmetros transformados de $\xi = (\delta, \chi, \zeta, \lambda)'$ podemos escrever

$$\theta = g(\xi) = \begin{pmatrix} \delta \\ \frac{\chi}{\sqrt{1+\chi^2}} \\ e^\zeta \\ \lambda \end{pmatrix}_{4 \times 1}. \quad (5.55)$$

Neste caso, a otimização (5.1) ou (5.27) pode ser efetuada utilizando-se um algoritmo de busca irrestrita para a solução do problema

$$\hat{\xi}_n = \arg \min_{\xi \in \mathbb{R}^4} Q_n(g(\xi)), \quad (5.56)$$

obtendo-se $\hat{\theta}_n = g(\hat{\xi}_n)$.

5.5 Sumário

Neste capítulo vimos como utilizar a função poli-característica do modelo SCD para sua estimação através dos métodos CECF e DECF, revendo também os resultados de convergência assintótica destes estimadores. Também obtivemos as derivadas da função poli-característica, que são utilizadas na estimação das matrizes de covariância dos estimadores.

No próximo capítulo vamos utilizar modelos de espaço de estados para estimação das variáveis latentes (ψ_j) . Em particular, vamos utilizar uma aproximação Gaussiana para o modelo SCD, permitindo o uso do chamado filtro de Kalman. Este algoritmo permite a estimação dos parâmetros do modelo pela maximização da verossimilhança “aproximada” (já que o verdadeiro modelo é não Gaussiano), resultando no método da “quase-verossimilhança” (QML - *Quasi Maximum Likelihood*).

Capítulo 6

Estimação das variáveis latentes no modelo SCD

Nos capítulos anteriores vimos como utilizar o método da função característica empírica para eliminar a variável latente e, assim, estimarmos os parâmetros do modelo SCD. Entretanto, muitas vezes estamos interessados justamente na variável latente (é o caso, também, do modelo de volatilidade estocástica).

Para obter estimativas das variáveis latentes é necessário inicialmente colocar o modelo SCD no formato de *modelo de espaço de estados*, como vimos no Capítulo 4:

$$\psi_t = \delta + \phi\psi_{t-1} + \sigma_\eta\eta_t, \quad (6.1)$$

$$y_t = \psi_t + \varepsilon_t, \quad (6.2)$$

em que (6.1) é a equação de *estado* ou *transição*, (6.2) é a equação de *observação* ou de *mensuração* e y_t é o logaritmo da duração.

Vamos adotar a seguinte notação $y_{1:t} = \{y_1, \dots, y_t\}$ para indicar o vetor de observações disponíveis até o instante t . A análise de espaço de estados busca obter estimativas para a variável latente ψ_t , dado o vetor de observações $y_{1:s}$. Quando $s < t$ o problema é chamado *previsão*. Quando $s = t$ temos o problema de *filtragem*. Finalmente, quando $s > t$ temos o problema de *suavização*.

Uma revisão sobre modelos de espaço de estados não Gaussianos pode ser encontrada, por exemplo, em Fearnhead (1998), Durbin e Koopman (2000) e Briers et al. (2004). Neste capítulo vamos utilizar dois métodos propostos na literatura para obter estimativas para as variáveis latentes:

- Solução Bayesiana através de integração numérica;
- Filtro de Kalman, utilizado por Bauwens e Veredas (2004).

Além dos dois métodos acima, vamos desenvolver um algoritmo recursivo, baseado na expansão de Gram-Charlier da densidade dos erros (“filtro Gram-Charlier”).

Na seção abaixo vamos rever a relações recursivas de previsão e filtragem para o modelo de espaço de estados, como desenvolvido por Kitagawa (1987). A seguir vamos rever o filtro de Kalman como aproximação para o modelo SCD. Finalmente, vamos apresentar o “filtro de Gram-Charlier”.

6.1 Relações recursivas de previsão e filtragem

6.1.1 Previsão um passo adiante (atualização do tempo)

Vamos assumir que estejamos em $t-1$, e que possuamos a distribuição condicional da variável latente neste momento dadas as observações disponíveis, $\psi_{t-1}|y_{1:t-1}$. A previsão um passo adiante para a variável latente pode ser obtida a partir da distribuição conjunta de ψ_t e ψ_{t-1} integrando-se ψ_{t-1} :

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t-1}) &= \int p_{\theta}(\psi_t, \psi_{t-1}|y_{1:t-1}) d\psi_{t-1} \\ p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t-1}) &= \int p_{\theta}(\psi_t|\psi_{t-1}) p_{\theta}(\psi_{t-1}|y_{1:t-1}) d\psi_{t-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.1.2 Filtro (atualização após observação)

Após a observação dos dados no instante t , y_t , atualizamos a estimativa da variável latente através do método Bayesiano, sendo a *priori* dada pela equação de previsão um passo adiante de $t-1$ (6.3) e sendo $p_{\theta}(y_t|\psi_t)$ a densidade condicional dos dados:

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t}) &= p_{\theta}(\psi_t|y_t, y_{1:t-1}) \\ &= \frac{p_{\theta}(\psi_t, y_t|y_{1:t-1})}{p_{\theta}(y_t|y_{1:t-1})} \\ &= \frac{p_{\theta}(y_t|\psi_t) p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t-1})}{p_{\theta}(y_t|y_{1:t-1})} \\ p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t}) &= c^{-1} p_{\theta}(y_t|\psi_t) p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t-1}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde,

$$c = p_{\theta}(y_t|y_{1:t-1}) = \int p_{\theta}(y_t|\psi_t) p_{\theta}(\psi_t|y_{1:t-1}) d\psi_t \quad (6.5)$$

6.1.3 Suavização

Para obter a densidade após a observação de todos os dados (suavização), vamos inicialmente considerar a expressão da densidade conjunta para ψ_t e ψ_{t+1} , dada a sequência de dados $y_{1:T}$:

$$\begin{aligned}
 p_\theta(\psi_t, \psi_{t+1} | y_{1:T}) &= p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:T}) p_\theta(\psi_t | \psi_{t+1}, y_{1:T}) \\
 &= p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:T}) p_\theta(\psi_t | \psi_{t+1}, y_{1:t}) \\
 &= p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:T}) \frac{p_\theta(\psi_t, \psi_{t+1} | y_{1:t})}{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:t})} \\
 &= \frac{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:T}) p_\theta(\psi_{t+1} | \psi_t) p_\theta(\psi_t | y_{1:t})}{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:t})} \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Obtemos a densidade suavizada para a variável latente ψ_t integrando-se (6.6) em ψ_{t+1} :

$$\begin{aligned}
 p_\theta(\psi_t | y_{1:T}) &= \int p_\theta(\psi_t, \psi_{t+1} | y_{1:T}) d\psi_{t+1} \\
 &= \int \frac{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:T}) p_\theta(\psi_{t+1} | \psi_t) p_\theta(\psi_t | y_{1:t})}{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:t})} d\psi_{t+1} \\
 p_\theta(\psi_t | y_{1:T}) &= p_\theta(\psi_t | y_{1:t}) \int \frac{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:T}) p_\theta(\psi_{t+1} | \psi_t)}{p_\theta(\psi_{t+1} | y_{1:t})} d\psi_{t+1} \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Geralmente não é possível efetuar analiticamente as integrais em (6.5) a (6.7) e assim temos que recorrer a algum método de integração numérica. Em particular, podemos utilizar a já mencionada *quadratura de Gauss-Hermite*, que será utilizada no capítulo seguinte para testar o algoritmo.

Caso as distribuições condicionais envolvidas nas integrais em (6.5) a (6.7) permitam sua integração analítica, pode-se obter explicitamente as funções densidade de probabilidade para a variável latente. Em particular, quando as distribuições de probabilidade associadas com (4.91) e (4.92) são Gaussianas, as densidades das variáveis latentes, também, são distribuições normais, o que permite o uso do *filtro de Kalman* (ver, por exemplo, Brockwell e Davis (1991), Shumway e Stoffer (2000) ou Lütkepohl (2005)). A estrutura Gaussiana do filtro de Kalman permite que estas distribuições sejam caracterizadas por apenas dois momentos: a média e a covariância. A seguir vamos particularizar a solução do filtro de Kalman para o modelo SCD.

6.2 Filtro e suavizador de Kalman

O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo utilizado para estimar as variáveis latentes de um modelo de espaço de estados quando as equações de mensuração e de observação são lineares e os choques dessas equações são normais (Gaussianos). Para obter as relações de recursão do filtro de Kalman para o modelo SCD vamos utilizar a seguinte notação, adaptada

de Lütkepohl (2005):

$$\begin{aligned}\psi_{t|s} &:= E[\psi_t | y_{1:s}], \\ \sigma_\psi^2(t|s) &:= Cov[\psi_t | y_{1:s}], \\ y_{t|s} &:= E[y_t | y_{1:s}], \\ \sigma_y^2(t|s) &:= Cov[y_t | y_{1:s}].\end{aligned}$$

A solução genérica do filtro de Kalman pode ser encontrada, por exemplo, em Brockwell e Davis (1991), Shumway e Stoffer (2000) ou Lütkepohl (2005). Particularizando o filtro de Kalman para o nosso problema, como posto pelas equações (4.91) e (4.92), obtemos a seguinte solução:

Proposição 6.1 (Filtro de Kalman para o modelo SCD) *Seja o modelo no formato de espaço de estados definido pelas equações (6.1) e (6.2). Se assumirmos que o choque aleatório ε_t seja independentemente e identicamente normalmente distribuído*

$$\varepsilon_t \sim NIID(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2),$$

então as relações de recursão do filtro de Kalman são dadas por:

- *Previsão um passo adiante (atualização do tempo, $1 \leq t \leq T$)*

$$\psi_{t|t-1} = \delta + \phi\psi_{t-1|t-1}, \quad (6.8)$$

$$\sigma_\psi^2(t|t-1) = \phi^2\sigma_\psi^2(t-1|t-1) + \sigma_\eta^2, \quad (6.9)$$

$$y_{t|t-1} = \psi_{t|t-1} + \mu_\varepsilon, \quad (6.10)$$

$$\sigma_y^2(t|t-1) = \sigma_\psi^2(t|t-1) + \sigma_\varepsilon^2, \quad (6.11)$$

sendo que $\mu_\varepsilon = E[\varepsilon_t]$ e $\sigma_\varepsilon^2 = Var[\varepsilon_t]$ são dados pelos resultados da proposição 4.11.

- *Filtragem (atualização após observação, $1 \leq t \leq T$)*

$$\psi_{t|t} = \psi_{t|t-1} + P_t(y_t - y_{t|t-1}), \quad (6.12)$$

$$\sigma_\psi^2(t|t) = \sigma_\psi^2(t|t-1) - P_t^2\sigma_y^2(t|t-1), \quad (6.13)$$

em que

$$P_t = \frac{\sigma_\psi^2(t|t-1)}{\sigma_y^2(t|t-1)}. \quad (6.14)$$

- *Suavização ($t < T$)*

$$\psi_{t|T} = \psi_{t|t} + S_t(\psi_{t+1|T} - \psi_{t+1|t}) \quad (6.15)$$

$$\sigma_\psi^2(t|T) = \sigma_\psi^2(t|t) - S_t^2[\sigma_\psi^2(t+1|t) - \sigma_\psi^2(t+1|T)] \quad (6.16)$$

$$S_t = \phi \frac{\sigma_\psi^2(t|t)}{\sigma_\psi^2(t+1|t)} \quad (6.17)$$

Prova. A prova desta proposição consiste simplesmente em aplicar os resultados de Lütkepohl (2005), pg. 626 a 630, ao modelo de espaço de estados definido por (6.1) e (6.2), tomando-se apenas o cuidado de notar que a variável ε_t tem média μ_ε diferente de 0. ■

É importante notar que no nosso presente caso, a distribuição de ε_t é não Gaussiana, de forma que o uso do filtro de Kalman é apenas uma aproximação para o problema de estimação do vetor de estado. As grandes vantagens deste filtro são a sua solução analítica, o que permite computação extremamente rápida, e a possibilidade de escrever a função de verossimilhança explicitamente.

6.2.1 Estimativa por quase-verossimilhança (QML)

Como as distribuições dos log-erros não são Gaussianas, a verossimilhança obtida ao utilizar-se o filtro de Kalman é apenas uma aproximação da verdadeira verossimilhança. Por isso, a obtenção de estimadores pela maximização da verossimilhança com o filtro de Kalman é conhecida como estimativa de “quase-verossimilhança” (QML - *Quasi-Maximum Likelihood*).

Podemos escrever a função de log-verossimilhança para o modelo SCD através da seguinte proposição:

Proposição 6.2 (Quase-verossimilhança para o modelo SCD) *Para o modelo de espaço de estados (6.1) a (6.2) temos que a função de verossimilhança é dada por*

$$\ln l(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{e_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \right], \quad (6.18)$$

em que explicitamos a dependência de $e_t(\theta)$ e $\sigma_t^2(\theta)$ do vetor de parâmetros θ , sendo que

$$e_t(\theta) = y_t - y_{t|t-1}, \quad (6.19)$$

$$\sigma_t^2(\theta) = \sigma_y^2(t|t-1), \quad (6.20)$$

e $y_{t|t-1}$ e $\sigma_y^2(t|t-1)$ são obtidos através da proposição 6.1.

Prova. Para demonstrar a proposição acima, basta aplicar o resultado de Lütkepohl (2005), pg.633, ao modelo SCD. ■

A matriz de informação associada à função de verossimilhança do filtro de Kalman é dada em Lütkepohl (2005), pg. 635, que adaptada ao modelo SCD fornece a seguinte proposição:

Proposição 6.3 (Matriz de informação do filtro de Kalman para o modelo SCD)

Para o modelo de espaço de estados (6.1) a (6.2) temos que a matriz de informação é dada

por

$$\begin{aligned} I(\theta_0) &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln l}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta'} \frac{1}{(\sigma_t^2)^2} + 2E \left[\frac{\partial e_t'}{\partial \theta} \frac{\partial e_t}{\partial \theta'} \frac{1}{\sigma_t^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

sendo que $e_t(\theta)$ e $\sigma_t(\theta)$ são obtidos através da proposição 6.2.

Prova. Para demonstrar a proposição acima, basta aplicar o resultado de Lütkepohl (2005), pg. 635, ao modelo SCD. ■

Naturalmente como o verdadeiro parâmetro θ_0 envolvido na proposição acima é desconhecido, podemos obter uma estimativa da matriz de informação utilizando seu estimador e desprezando o operador valor esperado na expressão acima. Sob o conjunto de hipóteses explicitado em Lütkepohl (2005), pg. 636, o estimador de máxima verossimilhança θ_n converge em distribuição para uma distribuição normal

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\theta_n}),$$

em que

$$\Sigma_{\theta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} nI(\theta_0)^{-1}.$$

6.3 Procedimento recursivo baseado na expansão de Gram-Charlier (“filtro Gram-Charlier”)

Como o filtro de Kalman só utiliza os dois primeiros momentos, vamos apresentar agora um método para utilizar os quatro primeiros momentos - ao invés de apenas os dois primeiros - com a expectativa de obter um estimador mais robusto para distribuições “distantes” da normal (com assimetria e excesso de curtose). Mas para isso, precisamos obter uma aproximação para a densidade, dados os momentos. Uma abordagem natural seria utilizar uma aproximação da densidade não Gaussiana por alguma expansão em séries de polinômios ortogonais (para facilitar as integrais envolvidas), tais como a expansão de Gram-Charlier ou Edgeworth. Sorenson e Stubberud (1968) parecem ter sido os primeiros a desenvolver um procedimento recursivo baseado na expansão de Edgeworth, truncada até quarta ordem¹, enquanto Srinivasan (1970) emprega a expansão de Gram-Charlier no seu filtro recursivo. Mais recentemente Challa et al. (2000) utilizam um procedimento baseado em uma expansão “generalizada” de Edgeworth em conjunto com quadratura de Gauss-Hermite. Aqui neste trabalho, entretanto, vamos utilizar a expansão de Gram-Charlier até quarta-ordem pelos motivos que explicaremos logo a seguir. Esta expansão permite aproximar a densidade de

¹Sorenson (1988) indica também a referência abaixo para filtros não gaussianos utilizando expansão de Edgeworth, que infelizmente não conseguimos obter:

Kizner, W., *Optimal nonlinear estimation based on orthogonal expansions*, Technical Report 32-1366, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 1969.

uma variável aleatória X usando os quatro primeiros momentos por (veja, por exemplo, Stuart e Ord (1994))²:

$$f(x) \approx \frac{z(w)}{\sigma} \left\{ 1 + \frac{\gamma_1}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_2}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\} \quad (6.21)$$

onde, $w = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $z(w) = \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ é a densidade da normal padrão (0,1), $\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3$, $\gamma_2 = \mu_4/\sigma^4 - 3$, $\sigma = \sqrt{\mu_2}$ e $\mu_j = E[(X - \mu)^j]$.

As aproximações sugeridas são formadas por séries de polinômios; assim, elas costumam ter um comportamento ruim nas caudas e não constituem densidades, a não ser que sejam impostas restrições no espaço paramétrico (Barton e Dennis (1952) e Draper e Tierney (1972)). Como Jondeau e Rockinger (1999) já obtiveram estas restrições para o caso da expansão de Gram-Charlier, vamos utilizar esta expansão ao invés da expansão de Edgeworth³. A figura (6.1) ilustra a aproximação de Gram-Charlier até o 4º momento para as distribuições do modelo SCD. Note pelas figuras à esquerda que, sem a imposição de restrições no espaço paramétrico para (γ_1, γ_2) , as aproximações não constituem funções densidade de probabilidade. Já as figuras à direita ilustram o efeito da aplicação das restrições derivadas por Jondeau e Rockinger (1999) (que explicitaremos em uma subseção a seguir).

²A expansão de Edgeworth até 4ª ordem contém um termo adicional:

$$f(x) \approx \frac{z(w)}{\sigma} \left\{ 1 + \frac{\gamma_1}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_2}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) + \frac{\gamma_1^2}{72} (w^6 - 15w^4 + 45w^2 - 15) \right\}.$$

³Notamos entretanto que Balitskaya e Zolotuhina (1988) obtiveram as condições para assimetria e curtose para que uma expansão em série de Edgeworth truncada possa constituir uma densidade em um intervalo finito.

Figura 6.1: Aproximação de Gram-Charlier para a densidade, sem imposição de restrições (à esquerda) e com imposição de restrições nos parâmetros (γ_1, γ_2) conforme Jondeau e Rockinger (1999) (à direita), para as seguintes distribuições: log-exponencial (4.38) em cima, log-Weibull (4.39), $\lambda = 0.5$, no meio, e log-gama (4.40), $\lambda = 0.5$, em baixo.

Seja então o seguinte modelo de espaço de estados univariado:

$$X_t = \delta + \phi X_{t-1} + \eta_t, \quad (6.22)$$

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, \quad (6.23)$$

$$\eta_t \sim NIID(0, \sigma_\eta^2), \quad (6.24)$$

$$\varepsilon_t \sim \text{alguma distribuição i.i.d. com momentos finitos até } 4^a \text{ ordem.} \quad (6.25)$$

Adotaremos a seguinte notação, análoga à empregada em Shumway e Stoffer (2000):

$$\mu_t^s = E[X_t | y_{1:s}], \quad (6.26)$$

$$v_t^s = (\sigma_t^s)^2 = E[(X_t - \mu_t^s)^2 | y_{1:s}], \quad (6.27)$$

$$\gamma_{1,t}^s = \frac{E[(X_t - \mu_t^s)^3 | y_{1:s}]}{(\sigma_t^s)^3}, \quad (6.28)$$

$$\gamma_{2,t}^s = \frac{E[(X_t - \mu_t^s)^4 | y_{1:s}]}{(\sigma_t^s)^4} - 3, \quad (6.29)$$

Proposição 6.4 (Filtro Gram-Charlier) *Seja o modelo de espaço de estados definido por (6.22) a (6.25). Neste caso temos*

- **Previsão um passo adiante** (atualização do tempo): a distribuição da variável latente, $X_t | y_{1:t-1}$, pode ser aproximada por

$$p(x_t | y_{1:t-1}) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta_t^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_t^{t-1}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} (\zeta_t^3 - 3\zeta_t) + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} (\zeta_t^4 - 6\zeta_t^2 + 3) \right\}, \quad (6.30)$$

onde

$$\mu_t^{t-1} = \delta + \phi \mu_{t-1}^{t-1}, \quad (6.31)$$

$$v_t^{t-1} = (\sigma_t^{t-1})^2 = \phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2, \quad (6.32)$$

$$\gamma_{1,t}^{t-1} = \gamma_{1,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}} \right)^3 = \gamma_{1,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sigma_t^{t-1}} \right)^3, \quad (6.33)$$

$$\gamma_{2,t}^{t-1} = \gamma_{2,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}} \right)^4 = \gamma_{2,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sigma_t^{t-1}} \right)^4, \quad (6.34)$$

$$\zeta_t = \frac{x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}} = \frac{x_t - \mu_t^{t-1}}{\sigma_t^{t-1}}. \quad (6.35)$$

- **Filtragem** (atualização após observação): a distribuição da variável latente após a

observação, $X_t|y_{1:t}$, pode ser aproximada por:

$$p(x_t|y_{1:t}) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi_t^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_t^t} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t}^t}{6} (\xi_t^3 - 3\xi_t) + \frac{\gamma_{2,t}^t}{24} (\xi_t^4 - 6\xi_t^2 + 3) \right\}, \quad (6.36)$$

onde

$$\xi_t = \frac{x_t - \mu_t^t}{\sigma_t^t}, \quad (6.37)$$

$$\mu_t^t = \mu_t^{t-1} + \sigma_t^{t-1} \frac{g_1}{g_0}, \quad (6.38)$$

$$v_t^t = (\sigma_t^t)^2 = v_t^{t-1} \left[\frac{g_2}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^2 \right], \quad (6.39)$$

$$\gamma_{1,t}^t = \frac{\mu_3}{(\sigma_t^t)^3}, \quad (6.40)$$

$$\gamma_{2,t}^t = \frac{\mu_4}{(\sigma_t^t)^4} - 3, \quad (6.41)$$

sendo que

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2, \quad (6.42)$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3, \quad (6.43)$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4, \quad (6.44)$$

e

$$\mu_r' = \frac{1}{g_0} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (\sigma_t^{t-1})^j (\mu_t^{t-1})^{r-j} g_j, \quad (6.45)$$

em que

$$g_k = (1 + b_0) m_k' + \sum_{i=1}^8 b_i m_{k+i}', \quad (6.46)$$

e os m_j' são os momentos não centrais de uma distribuição normal de média μ_d e variância σ_d^2 , $N(\mu_d, \sigma_d^2)$,

$$m_j' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta - \mu_d}{\sigma_d}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \zeta^j d\zeta, \quad (6.47)$$

$$\mu_d = \frac{\rho_t \beta \sigma_t^{t-1}}{\beta v_t^{t-1} + \sigma_\varepsilon^2}, \quad (6.48)$$

$$\sigma_d^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\beta^2 v_t^{t-1} + \sigma_\varepsilon^2}, \quad (6.49)$$

$$\rho_t = y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta \mu_t^{t-1}. \quad (6.50)$$

Os momentos centrais m'_j são obtidos a partir da seguinte relação recursiva:

$$\begin{aligned} m'_0 &= 1, \\ m'_1 &= \mu_d, \\ m'_j &= \mu_d m'_{j-1} + (j-1) \sigma_d^2 m'_{j-2}, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Os coeficientes b_i em (6.46) são dados por:

$$b_0 = \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} + a_0 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (6.52)$$

$$b_1 = -(1 + a_0) \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_1 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (6.53)$$

$$b_2 = -(1 + a_0) \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_1 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_2 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (6.54)$$

$$b_3 = (1 + a_0) \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_1 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_2 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_3 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (6.55)$$

$$b_4 = (1 + a_0) \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_1 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_2 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_3 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_4 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (6.56)$$

$$b_5 = a_1 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_2 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_3 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_4 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2}, \quad (6.57)$$

$$b_6 = a_2 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_3 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_4 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4}, \quad (6.58)$$

$$b_7 = a_3 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_4 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6}, \quad (6.59)$$

$$b_8 = a_4 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24}. \quad (6.60)$$

Finalmente, os coeficiente a_i nas expressões acima são dados por:

$$a_0 = \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^3 - 3 \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^4 - 6 \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 + 3 \right], \quad (6.61)$$

$$a_1 = -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{2} \frac{\beta \sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 - 1 \right] - \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{6} \frac{\beta \sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^3 - 3 \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right], \quad (6.62)$$

$$a_2 = \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{2} \frac{\beta^2 \sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right) + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{4} \frac{\beta^2 \sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 - 1 \right], \quad (6.63)$$

$$a_3 = -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \frac{\beta^3 \sigma_\zeta^3}{\sigma_\varepsilon^3} - \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{6} \frac{\beta^3 \sigma_\zeta^3}{\sigma_\varepsilon^3} \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right), \quad (6.64)$$

$$a_4 = \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \frac{\beta^4 \sigma_\zeta^4}{\sigma_\varepsilon^4}. \quad (6.65)$$

Prova. A demonstração desta proposição encontra-se no apêndice F. ■

6.3.1 Restrição do espaço paramétrico

Nesta seção obtivemos um procedimento recursivo para cálculo da distribuição de probabilidades da variável latente, assumindo que esta densidade seja aproximada pela expansão de Gram-Charlier até a 4ª ordem. Entretanto, para que esta expansão de fato possa representar uma densidade é necessário impor restrições ao espaço paramétrico (veja Barton e Dennis (1952) e Jondeau e Rockinger (1999)). Em particular precisamos impor a condição que o polinômio $p_4(z)$ da expansão seja sempre positivo, $\forall z$, isto é:

$$p_4(z) = 1 + \frac{\gamma_1}{6} He_3(z) + \frac{\gamma_2}{24} He_4(z) \geq 0,$$

em que $He_i(z)$ representa o polinômio de Hermite de ordem i ⁴.

Para obter o “envelope”, isto é, a fronteira da região paramétrica, Jondeau e Rockinger (1999) encontram os valores de γ_1 e γ_2 que resolvem o seguinte sistema

$$\begin{aligned} p_4(z) &= 1 + \frac{\gamma_1}{6} He_3(z) + \frac{\gamma_2}{24} He_4(z) = 0, \\ \frac{\partial p_4(z)}{\partial z} &= \frac{\gamma_1}{2} He_2(z) + \frac{\gamma_2}{6} He_3(z) = 0. \end{aligned}$$

A solução deste sistema, parametrizada em função de z , é dada por

$$\gamma_1(z) = -24 \frac{He_3(z)}{d(z)} = -24 \frac{(z^3 - 3z)}{d(z)}, \quad (6.66)$$

$$\gamma_2(z) = 72 \frac{He_2(z)}{d(z)} = 72 \frac{(z^2 - 1)}{d(z)}, \quad (6.67)$$

⁴O polinômio de Hermite de ordem i é definido em função da i -ésima derivada da densidade da normal padrão $\varphi(z)$:

$$\begin{aligned} He_i(z) &= \frac{(-1)^i}{\varphi(z)} \frac{\partial^i \varphi(z)}{\partial z^i}, \\ \varphi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}. \end{aligned}$$

Os seis primeiros polinômios são dados por

$$\begin{aligned} He_0(z) &= 1 \\ He_1(z) &= z \\ He_2(z) &= z^2 - 1 \\ He_3(z) &= z^3 - 3z \\ He_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3 \\ He_5(z) &= z^5 - 10z^3 + 15z \\ He_6(z) &= z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} d(z) &= 4He_3^2(z) - 3He_2(z)He_4(z) \\ &= z^6 - 3z^4 + 9z^2 + 9. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Figura 6.2: Espaço paramétrico (γ_1, γ_2) para a expansão de Gram-Charlier. A linha cheia indica o “envelope” como indicado pelas equações (6.66) e (6.67), e a região hachurada representa o espaço paramétrico para que a expansão de Gram-Charlier constitua uma densidade de probabilidade.

A região hachurada da figura 6.2 indica o espaço paramétrico para (γ_1, γ_2) , que é dado para $|z| \geq \sqrt{3}$. O valor máximo para o coeficiente de assimetria γ_1 é alcançado no ponto $M_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}, \sqrt{6} \right) = (1.0493, 2.4508)$ e o mínimo no ponto $M_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}, \sqrt{6} \right) = (-1.0493, 2.4508)$. O coeficiente de excesso de curtose γ_2 máximo é alcançado no ponto $(0, 4)$.

Para implementar a restrição de positividade adotamos o seguinte procedimento *ad hoc*:

- Discretizamos $|z| \geq \sqrt{3}$, de maneira a aproximar o espaço paramétrico de (γ_1, γ_2) por segmentos de reta.
- Caso $\gamma_1 \in \left[-\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}, \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]$ e $\gamma_2 \notin [0, 4]$, fixamos γ_1 e obtemos $\gamma_2^{\min}$ e $\gamma_2^{\max}$ por interpolação linear. Se $\gamma_2 \notin [\gamma_2^{\min}, \gamma_2^{\max}]$, fixamos γ_2 no limite apropriado do intervalo.
- Caso $\gamma_1 \notin \left[-\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}, \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]$ e $\gamma_2 \in [0, 4]$, fixamos γ_2 e obtemos $\gamma_1^{\min}$ e $\gamma_1^{\max}$ por interpolação linear. Se $\gamma_1 \notin [\gamma_1^{\min}, \gamma_1^{\max}]$, fixamos γ_1 no limite apropriado do intervalo.
- Caso $\gamma_1 \notin \left[-\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}, \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]$ e $\gamma_2 \notin [0, 4]$ fixamos arbitrariamente γ_1 e γ_2 conforme o quadrante
 - (a) se $\gamma_1 > \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$ e $\gamma_2 > 4$, fixamos (γ_1, γ_2) correspondentes à $z = -2$, i.e., $(\gamma_1, \gamma_2) = (48/61, 216/61) \cong (0.79, 3.54)$;
 - (b) se $\gamma_1 < -\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$ e $\gamma_2 > 4$, fixamos (γ_1, γ_2) correspondentes à $z = 2$, i.e., $(\gamma_1, \gamma_2) = (-48/61, 216/61) \cong (-0.79, 3.54)$;
 - (c) se $\gamma_1 < -\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$ e $\gamma_2 < 0$, fixamos (γ_1, γ_2) correspondentes à $z = 3$, i.e., $(\gamma_1, \gamma_2) = (-3/4, 1) = (-0.75, 1)$;
 - (d) se $\gamma_1 > \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$ e $\gamma_2 < 0$, fixamos (γ_1, γ_2) correspondentes à $z = -3$, i.e., $(\gamma_1, \gamma_2) = (3/4, 1) = (0.75, 1)$.

Assim, em cada passo do algoritmo recursivo delineado na prop. (6.4) aplicamos o procedimento descrito acima, de maneira a manter $(\gamma_{1,t}^{t-1}, \gamma_{2,t}^{t-1})$ e $(\gamma_{1,t}^t, \gamma_{2,t}^t)$ dentro do espaço paramétrico da “densidade” de Gram-Charlier até 4ª ordem.

6.4 Sumário

Neste capítulo vimos como obter estimativas para a variável latente ψ_t do modelo SCD através de um método recursivo Bayesiano de integração numérica, através do filtro de Kalman (aproximação Gaussiana da distribuição dos erros) e através de um método recursivo baseado na expansão de Gram-Charlier até 4ª ordem (filtro de Gram-Charlier). Todos estes métodos assumem que o vetor de parâmetros θ seja conhecido. Mas o filtro de Kalman também permite a implementação de um algoritmo de estimação (QML - quase verossimilhança) para estimação de θ .

No próximo capítulo vamos analisar o desempenho dos diferentes métodos de estimação vistos no capítulo anterior e neste capítulo, através de simulação de processos de duração condicional estocástica.

Capítulo 7

Simulação

Neste capítulo vamos verificar o desempenho dos métodos de estimação, conhecendo os verdadeiros parâmetros. Para isso vamos efetuar um conjunto de simulações de processos SCD, conhecido o vetor de parâmetros. Estas simulações podem ser facilmente efetuadas através do método da transformada inversa (veja, por exemplo, Robert e Casella (2004)), conhecida a função de distribuição da duração condicionada na variável latente, $x_j|\psi_j$, obtida na proposição 4.5.

Para visualizar o comportamento da variável duração e da log-duração (y), efetuamos um conjunto de simulações utilizando os parâmetros utilizados por Strickland et al. (2006): $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$. A Figura 7.1 ilustra amostras das durações e respectivas log-durações com distribuições condicionais exponencial, Weibull e gama.

Podemos observar o comportamento de convergência da função característica empírica através das Figuras 7.2 e 7.3. As figuras ilustram o comportamento das partes real e imaginária da função característica empírica quando se aumenta o tamanho da amostra para 100, 1.000, 10.000 e 100.000, e a Figura 7.3 (baixo) ilustra a função característica calculada por (4.87). Podemos notar pelo exame das figuras, que mesmo em amostras reduzidas é possível distinguir o padrão da função característica, com concentração da informação em torno da origem. À medida que a amostra aumenta, as ondulações aleatórias se reduzem até praticamente desaparecerem para amostras de tamanho 100 000.

Figura 7.1: Amostras simuladas da duração (à esquerda) e log-duração (à direita) com distribuições condicionais exponencial (cima), Weibull $\lambda = 0.5$ (meio) e gama $\lambda = 0.5$ (baixo), e parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$.

Figura 7.2: Partes reais (à esquerda) e imaginárias (à direita) da função característica empírica (ECF), $\text{Re } \varphi_{z_n}(r)$, para amostras de tamanho 100 (cima), 1 000 (meio) e 10 000 (baixo), em função de $r = (r_1, r_2)$, com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 1$ (distribuição exponencial), $p = 1$, e usando para r_ζ os nós da quadratura de Gauss-Hermite de 39 pontos.

Figura 7.3: Partes reais (à esquerda) e imaginárias (à direita) da função característica empírica (ECF), $\text{Re } \varphi_{z_n}(r)$, para amostra de tamanho 100.000 (cima) e para a função característica (CF), $\text{Re } \varphi_z(r)$, (baixo) em função de $r = (r_1, r_2)$, com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 1$ (distribuição exponencial), $p = 1$, e usando para r_ζ os nós da quadratura de Gauss-Hermite de 39 pontos.

7.1 Número de nós para quadratura de Gauss-Hermite

As integrações necessárias para o método CECF foram efetuadas através do método de quadratura de Gauss-Hermite, que depende de um parâmetro: o número de “nós” para a integração. Na figura 7.4 plotamos o número de nós a uma distância da origem (3 e 10), em função do número de nós da quadratura. Note que o algoritmo utilizado para a geração dos nós¹ fica instável a partir de 198 nós. Assim, o número máximo de nós que poderemos usar nas integrações é 197.

Figura 7.4: Número de nós a uma distância da origem (abscissas) em função do número de nós da quadratura de Gauss-Hermite (ordenadas): na figura de cima a distância máxima é 3, e na de baixo a distância máxima é 10.

Para procurar um valor inferior para o número de nós, efetuamos a integral

$$\int_{\mathbb{R}^{p+1}} |\varphi(r)| e^{-r'r} dr,$$

¹Press et al. (1997), algoritmo *gauher*, pg. 154.

para o caso da distribuição de Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$. Evidentemente a integral acima não é a função objetivo que precisamos para obter os estimadores CECF; mesmo assim, nós a utilizamos para ter uma “idéia” do número de nós necessários para obter uma certa “qualidade” na integração. A figura 7.5 ilustra o resultado da integral acima em função do número de nós, mas limitada aos nós a uma distância de no máximo 3 da origem. Pode-se notar que a integral se estabiliza a partir de cerca de 50 nós de quadratura.

Figura 7.5: Resultado da integral $\int |\varphi(r)| e^{-r'r} dr$, em função do número de nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Tabela 7.1: Resumo dos resultados (média, desvio padrão, erro quadrático médio e desvio absoluto médio) das estimativas amostrais dos parâmetros de 1 000 simulações usando os algoritmos QML, CECF e DECF, para distribuições exponencial, Weibull e gama com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, λ variável conforme tabela, tamanho de amostra 10 000 e ponto inicial $\theta = (0, 0.5, 0.5, 1)'$.

O algoritmo de otimização utilizado foi o *fminsearch* do Matlab para os métodos QML e CECF e o *lsqnonlin* para o método DECF, com parâmetros $tolX = 10^{-6}$ (tolerância da variável de decisão) e $tolFun = 10^{-6}$ (tolerância da função objetivo). Para os algoritmos CECF e DECF foram usados 130 nós da quadratura de Gauss-Hermite, limitados a uma distância 3 da origem. EQM = erro quadrático médio e DAM = desvio absoluto médio.

		QML				CECF				DECF			
		δ	ϕ	σ_η	λ	δ	ϕ	σ_η	λ	δ	ϕ	σ_η	λ
Exponencial $\lambda = 1$	Média	0.034	0.948	0.101	1.000	0.041	0.938	0.103	1.000	0.035	0.948	0.100	1.000
	Desvio padrão	0.008	0.012	0.015	0.000	0.045	0.069	0.043	0.000	0.011	0.016	0.016	0.000
	EQM	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	DAM	0.006	0.009	0.011	0.000	0.016	0.024	0.022	0.000	0.007	0.010	0.012	0.000
Weibull $\lambda = 2$	Média	0.033	0.949	0.100	2.000	0.033	0.949	0.100	2.000	0.033	0.949	0.100	2.000
	Desvio padrão	0.004	0.006	0.006	0.022	0.004	0.006	0.006	0.022	0.004	0.006	0.006	0.023
	EQM	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	DAM	0.003	0.005	0.005	0.018	0.003	0.005	0.005	0.018	0.003	0.005	0.005	0.019
Gama $\lambda = 2$	Média	0.034	0.949	0.101	2.001	0.034	0.949	0.101	2.001	0.034	0.949	0.101	2.001
	Desvio padrão	0.005	0.007	0.008	0.031	0.005	0.007	0.008	0.034	0.005	0.007	0.009	0.041
	EQM	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001
	DAM	0.004	0.006	0.007	1.501	0.004	0.006	0.007	1.501	0.004	0.006	0.007	1.501
Weibull $\lambda = 0.5$	Média	0.157	0.749	0.202	0.503	0.141	0.782	0.142	0.501	0.144	0.780	0.151	0.501
	Desvio padrão	0.228	0.352	0.188	0.018	0.250	0.376	0.140	0.007	0.202	0.307	0.123	0.008
	EQM	0.067	0.164	0.046	0.000	0.074	0.170	0.021	0.000	0.053	0.123	0.018	0.000
	DAM	0.131	0.209	0.112	0.006	0.120	0.186	0.086	0.006	0.116	0.178	0.084	0.006
Gama $\lambda = 0.5$	Média	0.087	0.866	0.140	0.502	0.062	0.906	0.114	0.501	0.063	0.904	0.121	0.501
	Desvio padrão	0.164	0.252	0.117	0.020	0.101	0.157	0.081	0.008	0.084	0.129	0.061	0.009
	EQM	0.030	0.071	0.015	0.248	0.011	0.027	0.007	0.249	0.008	0.019	0.004	0.249
	DAM	0.060	0.094	0.055	0.007	0.043	0.067	0.048	0.006	0.037	0.056	0.038	0.007

7.2 Resultados da simulação

7.2.1 Desempenho dos estimadores

Com o objetivo de avaliar o desempenho dos diversos métodos de estimação efetuamos 1 000 simulações de tamanho 10 000, para durações com distribuições condicionais exponencial, Weibull e gama, de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$ e 0.5 . Para cada simulação utilizamos os algoritmos QML, CECF e DECF, apresentando um resumo dos resultados na Tabela 7.1. Note que para $\lambda = 2$ os três métodos fornecem resultados parecidos, tanto em erro quadrático médio (EQM) quanto em desvio absoluto médio (DAM), mas para $\lambda = 0.5$ os métodos CECF e DECF apresentam menor EQM e DAM que o método QML, com o DECF com desempenho ligeiramente superior ao CECF.

Para melhor visualizar o comportamento dos estimadores apresentamos, também, os his-

Tabela 7.2: Estimativa dos desvios padrão do estimador CECF para o modelo SCD de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, com λ e distribuições variáveis conforme a tabela, para amostras de tamanho 10 000. Mais detalhes sobre as estimativas podem ser encontrados no texto e no apêndice G.

		Desvio padrão				Tempo (h)
		δ	ϕ	σ_η	λ	
Exponencial	$\lambda = 1$	0.109	0.166	0.167		35.5
Weibull	$\lambda = 2$	0.074	0.112	0.115	0.039	43.1
Gama	$\lambda = 2$	0.095	0.145	0.148	0.049	47.5
Weibull	$\lambda = 0.5$	0.650	0.986	1.003	0.007	39.2
Gama	$\lambda = 0.5$	0.264	0.400	0.403	0.007	43.1

Tabela 7.3: Estimativa dos desvios padrão do estimador DECF para o modelo SCD de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, com λ e distribuições variáveis conforme a tabela, para amostras de tamanho 10 000. Mais detalhes sobre as estimativas podem ser encontrados no texto e no apêndice G.

		Desvio padrão				Tempo (h)
		δ	ϕ	σ_η	λ	
Exponencial	$\lambda = 1$	0.127	0.193	0.192		32.9
Weibull	$\lambda = 2$	0.118	0.179	0.185	0.090	43.1
Gama	$\lambda = 2$	0.179	0.272	0.278	0.128	39.3
Weibull	$\lambda = 0.5$	1.135	1.722	1.741	0.010	40.1
Gama	$\lambda = 0.5$	0.324	0.491	0.494	0.010	38.0

togramas das estimativas amostrais dos parâmetros obtidos com a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (\delta, \phi, \sigma_\eta, \lambda)' = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$ nas figuras 7.6 a 7.9. Para fins de comparação com os resultados simulados ilustramos nas tabelas 7.2 e 7.3 as estimativas dos desvios padrão dos estimadores dos métodos CECF e DECF, calculados de acordo com os resultados do capítulo 5. Estes desvios padrão foram calculados como a raiz quadrada da diagonal da matriz V/n , onde a matriz $V = B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}$. As matrizes $A(\theta_0)$ foram estimadas por (5.10) para CECF e (5.41) para DECF, e as matrizes $B(\theta_0)$ foram estimadas por (5.18) para CECF e (5.40) para DECF. Para todas as integrações usamos 50 nós da quadratura de Gauss-Hermite e para cálculo da matriz Ω_n utilizamos truncamos a série em $m = 100$ em (5.11). Note, em particular, os elevados tempos de processamento (cerca de 2 dias), apesar do truncamento aparentemente “curto” da série, principalmente se observarmos o comportamento de Ω_n obtido na figura 5.1.

Nas figuras 7.6 a 7.9 ilustramos o histograma das 1 000 simulações do processo SCD com distribuição Weibull e $\lambda = 0.5$. Note como os estimadores CECF e DECF “suavizaram” a bimodalidade apresentada pelo estimador QML. Note também que, apesar do grande tamanho da amostra (10 000 observações), as distribuições dos estimadores é acentuadamente assimétrica e com excesso de curtose, sugerindo que a velocidade de convergência dos estimadores

para a distribuição normal é possivelmente bastante lenta.

7.2.2 Desempenho dos filtros

Para avaliar o comportamento dos diversos filtros testamos os métodos para as distribuições exponencial, Weibull e gama, com parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.10, \lambda)$ e $\lambda = 0.5$ e 2 . Os resultados encontram-se nas figuras 7.10 a 7.14, respectivamente.

Na Tabela 7.4 apresentamos o erro quadrático médio amostral (EQM), o desvio absoluto médio (DAM) e a mediana dos desvios absolutos (MDA) para a variável latente ψ_t , obtidos com cada um dos filtros propostos no capítulo 6, i.e., filtros de Kalman, Bayesiano e de Gram-Charlier. Nota-se que o método de integração numérica (Bayesiano) apresentou menor EQM, DAM e MDA para praticamente todas as distribuições simuladas.

Figura 7.6: Histograma das estimativas do parâmetro δ obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (\delta, \phi, \sigma_\eta, \lambda)' = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$.

Figura 7.7: Histograma das estimativas do parâmetro ϕ obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$.

Figura 7.8: Histograma das estimativas do parâmetro σ_η obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$.

Figura 7.9: Histograma das estimativas do parâmetro λ obtidas com os métodos QML, CECF e QML em 1 000 simulações para a distribuição Weibull de parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.1, 0.5)'$.

Tabela 7.4: Erro quadrático médio (EQM), desvio absoluto médio (DAM) e mediana dos desvios absolutos (MDA) dos filtros de Kalman, Bayesiano e de Gram-Charlier utilizados para estimação da variável latente, obtidos com simulações de amostras de tamanho 1 000, calculados nos parâmetros $\theta = (0.033, 0.95, 0.10, \lambda)$ e $\lambda = 0.5, 1$ (dist. exponencial) e 2.

EQM	Kalman	Bayesian	Gram-Charlier
Exponencial	0.069	0.060	0.107
Weibull $\lambda = 2$	0.047	0.037	0.057
Gama $\lambda = 2$	0.057	0.058	0.091
Weibull $\lambda = 0.5$	0.092	0.087	0.165
Gama $\lambda = 0.5$	0.052	0.049	0.092

DAM	Kalman	Bayesian	Gram-Charlier
Exponencial	0.211	0.195	0.261
Weibull $\lambda = 2$	0.175	0.156	0.194
Gama $\lambda = 2$	0.187	0.188	0.241
Weibull $\lambda = 0.5$	0.240	0.233	0.336
Gama $\lambda = 0.5$	0.185	0.182	0.244

MDA	Kalman	Bayesian	Gram-Charlier
Exponencial	0.177	0.160	0.208
Weibull $\lambda = 2$	0.150	0.133	0.172
Gama $\lambda = 2$	0.150	0.151	0.207
Weibull $\lambda = 0.5$	0.194	0.186	0.300
Gama $\lambda = 0.5$	0.156	0.164	0.208

Figura 7.10: Variável latente ψ (“psi”) da distribuição exponencial com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 1$ (distribuição exponencial), e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier.

A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.

Figura 7.11: Variável latente ψ (“psi”) da distribuição Weibull com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 2$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier.

A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.

Figura 7.12: Variável latente ψ (“psi”) da distribuição gama com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 2$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier.

A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.

Figura 7.13: Variável latente ψ (“psi”) da distribuição Weibull com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 0.5$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.

Figura 7.14: Variável latente ψ (“psi”) da distribuição gama com parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, $\lambda = 0.5$, e filtragem obtida através de procedimento de integração numérica (“Bayesian”), através do filtro de Kalman e através do filtro de Gram-Charlier. A figura de cima é de uma amostra de tamanho 1 000, enquanto que a figura de baixo é uma ampliação dos 100 primeiros dados.

7.3 Sumário

Neste capítulo aplicamos os resultados dos capítulos anteriores a conjuntos de dados obtidos por simulação, conhecidos os parâmetros do processo SCD. De uma maneira geral observamos que os algoritmos CECF e DECF apresentaram menor desvio absoluto médio do que o algoritmo QML. Entretanto, para distribuições de cauda muito pesada ($\lambda = 0.5$) todos os três estimadores apresentaram distribuições bastante distantes da normal, mesmo em amostras de tamanho 10 000.

Com relação aos métodos de filtragem para a variável latente do processo SCD, observamos que o filtro Bayesiano foi o que apresentou melhor desempenho em todas as medidas: menor erro quadrático médio, menor desvio absoluto médio e menor mediana dos desvios absolutos.

No próximo capítulo vamos aplicar os métodos de estimação em um conjunto de dados reais.

Capítulo 8

Aplicação empírica

Neste capítulo vamos procurar aplicar os métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores para um conjunto de dados reais. Para isso utilizamos os dados disponibilizados por Eric Zivot na sua *webpage* <http://faculty.washington.edu/ezivot/ezresearch.htm>, sob o item “Analysis of High-Frequency Financial Data with S-Plus”. Uma descrição pormenorizada dos dados, por sua vez, dados pode ser encontrada em Yan e Zivot (2003).

8.1 Descrição e tratamento dos dados

Os dados consistem em dados de negociação registrados pelo sistema TAQ (*Trade and Quotes*) da bolsa de Nova York (NYSE - *New York Stock Exchange*) das ações da General Eletric (GE) e Microsoft (MSFT) entre 01/05/1997 e 15/05/1997, e dados de cotações de compra (*bid*) e venda (*ask*) da taxa de câmbio *spot* USD/EUR (dólares americanos por Euro) entre 11/03/2001 e 17/03/2001.

Como observado por Yan e Zivot (2003) os dados de alta-frequência contém uma série de problemas que precisam ser resolvidos antes de iniciarmos a análise. Aqui procuramos seguir, na medida do possível, os procedimentos utilizados por Bauwens e Veredas (2004).

Inicialmente eliminamos os registros de GE e MSFT fora do horário do pregão da NYSE, que funciona entre 9:30 (34 200 s) e 16:00 (57 600 s).

Em seguida, tratamos os registros com horários de negociação iguais, isto é, de duração 0. Bauwens e Veredas (2004) eliminam os registros de mesmo horário, sob a hipótese que este efeito decorreria de negociações “em bloco” (*block trades*), isto é, um lote grande é particionado em lotes menores para facilitar a negociação, gerando várias transações com mesmo horário. Salientamos, entretanto, que o problema real é que a menor unidade de tempo do sistema TAQ é o segundo, mas diversas operações acontecem em intervalos menores que 1 segundo, principalmente nestas ações, que são extremamente líquidas. Aqui neste trabalho não vamos tratar explicitamente este problema de “truncamento” dos dados, e vamos prosseguir a análise utilizando o procedimento adotado por Bauwens e Veredas (2004).

Para o caso de USD/EUR, obtivemos os preços médios entre os preços de compra e venda, e eliminamos os dados relativos ao sábado (17/03/2001), que correspondiam a apenas uma

pequena fração do dia.

Para a GE notamos que no dia 12/03/1997 houve um evento de *split* de ações na proporção de 1:2, isto é, cada ação foi desmembrada em 2, e naturalmente o preço caiu pela metade. Assim, para obter uma série “contínua”, dividimos por 2 os preços anteriores a 12/03/2001 e multiplicamos por 2 os tamanhos de lote.

Bauwens e Veredas (2004) definem três tipos de duração:

- **Negócio** (*trade duration*): é o intervalo de tempo entre operações consecutivas.
- **Preço** (*price duration*): é o intervalo de tempo mínimo necessário para observar uma mudança de preço não menor do que um certo valor. Como explicado em Engle e Russell (1998), esta é uma medida da volatilidade instantânea do mercado. Para os dados de GE e MSFT utilizamos o valor de US\$ 0.125 para mudança de preço, e para os dados de USD/EUR utilizamos US\$0.0005 (moda do *bid/ask spread*).
- **Volume** (*volume duration*): é o intervalo de tempo para que o volume total negociado não seja menor do que 25 000 ações. Esta é uma medida indireta da liquidez do papel, pois indica o tempo necessário para negociar um certo volume de ações (25 000, no caso). Para os dados USD/EUR não é possível calcular esta medida, pois não dispomos dos dados de negociação.

Bauwens e Veredas (2004) observam que os dados apresentam dois tipo de variação “sazonal” (sistemática): uma variação que ocorre durante o dia, chamado efeito “diurno”, e uma variação que ocorre entre os dias, chamada efeito “dia da semana”.

O conhecido o efeito “diurno” nos dados de alta frequência é resultante da variação sistemática da atividade de mercado durante o dia. Vamos tratar este efeito decompondo a duração em duas partes: uma estocástica (a ser explicada pelo modelo SCD) e uma determinística, determinada pelo efeito “diurno”. Para eliminar este efeito vamos seguir Bauwens e Veredas (2004) definindo

$$d_i = \frac{D_i}{\phi(\tau_i)} \quad (8.1)$$

como a duração ajustada (estocástica), sendo D_i a duração original e $\phi(\tau_i)$ o efeito diurno em τ_i . O efeito diurno é calculado através de uma regressão não-paramétrica da duração original contra o instante do dia através do estimador de Nadaraya-Watson

$$\phi(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{\tau - \tau_i}{h}\right) D_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{\tau - \tau_i}{h}\right)}, \quad (8.2)$$

onde h é um parâmetro para controle da suavização, chamado de largura de banda (*bandwidth*), e $K(\cdot)$ é uma função *kernel* apropriada. Utilizamos em todas as amostras o *kernel* normal (Gaussiano)

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

Tabela 8.1: Resumo dos dados das amostras de durações dessazonalizadas de GE, Microsoft e USD/EUR. Veja o texto para mais detalhes da base de dados e respectivo tratamento.

	Trade			Price			Volume	
	GE	Microsoft	USD/EUR	GE	Microsoft	USD/EUR	GE	Microsoft
Amostra	38,670	68,771	101,171	819	5,358	461	2,090	3,150
Mediana	0.531	0.602	0.616	0.079	0.188	0.581	0.781	0.758
Média	0.987	0.976	0.998	1.000	0.953	0.988	0.973	0.968
Desv.pad.	1.352	1.130	0.972	2.637	2.212	1.188	0.734	0.756
Assimetria	6.518	4.337	9.659	5.650	6.820	2.399	1.521	2.264
Curtose	173.871	38.745	378.760	40.757	83.251	7.978	3.188	7.832
Min	0.126	0.198	0.023	0.003	0.014	0.001	0.007	0.009
Max	67.907	30.056	67.862	30.251	45.296	9.014	4.923	6.574
Bandwidth	3,507	3,510	1,000	3,507	3,510	1,000	3,507	3,510

Para os dados da NYSE utilizamos largura de banda dada pela sugestão do *EViews*, $h = 0.15 (T_{\max} - T_{\min})$, sendo que $T_{\min} = 34200$, correspondente a 9:30, e $T_{\max} = 57600$, correspondente a 16:00, o que fornece o valor de $h = 3510$. Já para os dados de USD/EUR utilizamos largura de banda $h = 1000$ com o objetivo de tentar capturar mais detalhes (o período de amostragem é de 24h).

Bauwens e Veredas (2004) observam também uma “sazonalidade” devido ao dia da semana, calculando desta forma um fator diurno diferente para cada dia da semana. Na nossa amostra acreditamos que este efeito deva ser mais pronunciado nos dados de USD/EUR, já que este mercado é operado no mundo inteiro. Por exemplo, em Londres no domingo podem aparecer operações decorrentes das operações em Tokyo, onde já é segunda-feira. Infelizmente como a nossa base de dados contém apenas 2 semanas de dados, não é possível calcular este efeito. Assim, vamos assumir que o efeito diurno seja igual para todos os dias da semana.

A tabela 8.1 apresenta um resumo das características das amostras. Nas seções seguintes vamos apresentar os resultados das estimações obtidos para a duração de volume da GE e da Microsoft, pois são os processos que parecem ser mais bem comportados (estacionários). Os resultados para as durações de negócio (altamente não estacionária) e de preço encontram-se no apêndice H.

8.2 Duração de volume da GE

Podemos notar pelo exame da figura 8.1 o perfil característico de “U” invertido do efeito diurno da duração de volume.

Os parâmetros do processo SCD obtidos com os diferentes métodos de estimação (QML, CECF e DECF) encontram-se ilustrados na tabela 8.2, considerando-se as distribuições Weibull e gama para os erros.

Na figura 8.2 apresentamos a função característica empírica e as funções características para distribuição gama, com as estimativas dos métodos QML e CECF. Analisando a tabela 8.2, note como para a distribuição Weibull os três métodos apresentam resultados muito parecidos, enquanto que para distribuição gama o método DECF parece estimar melhor (comparando com os resultados para a distribuição Weibull) que o método QML, que subestima a persistência do processo ($\phi = 0.805$ para QML contra 0.986 do DECF), e o método CECF, que superestima ligeiramente a persistência (0.996 do CECF).

A figura 8.3 apresenta os resultados dos diferentes filtros, aplicados à estimativa obtida com o método CECF, enquanto a figura 8.4 apresenta os gráficos de quantis (“QQ-plots”) das estimativas dos resíduos (tanto da equação de observação, quanto da equação de estado) obtidas com os diferentes filtros, e um gráfico da autocorrelação dos resíduos utilizando o filtro de Kalman. Note que o filtro de Kalman foi o que apresentou resíduos mais bem comportados, tanto para a equação de observação, quanto para equação de estado, embora alguma autocorrelação ainda permaneça nos mesmos.

Figura 8.1: Dados da GE:

Cima: duração de volume (*volume duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de volume dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	0.001	0.001	0.001	-0.020	0.000	-0.001
ϕ	0.987	0.987	0.986	0.805	0.996	0.986
σ_η	0.076	0.082	0.089	0.277	0.037	0.072
λ	1.976	1.956	1.915	2.296	2.381	2.746
Tempo (s)	11.1	12.4	877.9	11.1	293.3	844.4

Tabela 8.2: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de volume (*volume duration*) da GE, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

Figura 8.2: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de volume (*volume duration*) da GE, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura 8.3: Estimativa da variável latente para a duração de volume (*volume duration*) da GE.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura 8.4: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de volume da GE: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

8.3 Duração de volume da Microsoft

A série de duração de volume, de duração dessazonalizada, seu logaritmo e o efeito diurno para a Microsoft estão ilustradas na figura 8.5. Uma inspeção da figura de duração dessazonalizada parece indicar um aumento sistemático das durações, o que tornaria a série não estacionária. Mesmo assim, vamos prosseguir com a análise como na seção anterior.

Os parâmetros do processo SCD obtidos com os diferentes métodos de estimação (QML, CECF e DECF) encontram-se ilustrados na tabela 8.3, considerando-se as distribuições Weibull e gama para os erros.

Na figura 8.6 apresentamos a função característica empírica e as funções características para distribuição gama, com as estimativas do método QML e CECF. Note que, tanto para a distribuição Weibull quanto para a distribuição gama, os três métodos apresentam resultados razoavelmente parecidos.

A figura 8.7 apresenta os resultados dos diferentes filtros, aplicados à estimativa obtida com o método CECF, enquanto a figura 8.8 apresenta os gráficos de quantis (“QQ-plots”) das estimativas dos resíduos (tanto da equação de observação, quanto da equação de estado) obtidas com os diferentes filtros, e um gráfico da autocorrelação dos resíduos utilizando o filtro de Kalman. Note que o filtro de Kalman foi o que apresentou resíduos mais bem comportados para a equação de observação, mas o filtro de Gram-Charlier apresenta resíduos mais bem comportados para a equação de estado. Também os resíduos obtidos parecem limpos de autocorrelação.

Figura 8.5: Dados da Microsoft:

Cima: duração de volume (*volume duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de volume dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	-0.010	-0.012	-0.019	-0.009	-0.010	-0.009
ϕ	0.928	0.928	0.905	0.928	0.928	0.947
σ_η	0.175	0.181	0.207	0.175	0.180	0.151
λ	2.069	2.296	2.454	3.071	3.814	4.332
Tempo (s)	0.6	8.9	857.7	0.5	9.4	874.0

Tabela 8.3: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de volume (*volume duration*) da Microsoft, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

Figura 8.6: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de volume (*volume duration*) da Microsoft, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura 8.7: Estimativa da variável latente para a duração de volume (*volume duration*) da Microsoft.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura 8.8: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de volume da Microsoft: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

8.4 Sumário

Nesta seção aplicamos os resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores para séries reais de dados de alta frequência. Em particular estimamos os parâmetros do modelo SCD aplicado às séries de duração de volume de General Eletric e de Microsoft, e relatamos os resultados obtidos.

Capítulo 9

Conclusão

A função característica empírica (ECF) tem sido utilizada em problemas estimação nos quais é difícil aplicar-se o método da máxima verossimilhança, tais como:

- distribuições estáveis;
- processos *afins* de difusão com saltos (ver por exemplo Duffie et al. (2000));
- mistura de normais
- processos com variáveis latente, como o modelo de volatilidade estocástica.

Neste trabalho utilizamos a ECF para estimação do modelo de duração condicional estocástica (SCD), que é um modelo análogo ao modelo de volatilidade estocástica. Para isso, obtivemos alguns resultados relativos ao processo, e obtivemos também as distribuições assintóticas dos estimadores CECF e DECF.

De uma maneira geral, tanto o estimador CECF quanto o estimador DECF parecem melhorar a distribuição do estimador QML, usado como ponto inicial. Entretanto a convergência para a distribuição assintótica normal parece muito lenta, mesmo para amostras de tamanho 10 000. Também observamos lenta convergência dos estimadores das matrizes de covariâncias dos estimadores CECF e DECF, causada pela convergência da matriz Ω_n .

Após a obtenção dos parâmetros do modelo SCD, obtivemos estimativas para as variáveis latentes. Para isso implementamos um filtro de Kalman, um filtro Bayesiano obtido através de integração numérica (quadratura), e um filtro baseado na expansão de Gram–Charlier. Observamos nas simulações que o filtro de Kalman, apesar de Gaussiano, é razoavelmente robusto, enquanto que o filtro Bayesiano foi o que apresentou melhor desempenho em todas as medidas (erro quadrático médio, desvio absoluto médio e mediana dos desvios absolutos).

Quanto a possíveis extensões deste trabalho poderíamos indicar, por exemplo:

- Extensão do modelo SCD para ordens maior do que 1, com obtenção da respectiva função poli-característica.

- Desenvolvimento de análise de diagnóstico do método da ECF, tanto para identificar problemas de amostragem, quanto para identificar problemas de especificação do modelo.
- Desenvolvimento dos métodos de integração numérica por métodos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) como em Strickland et al. (2005), tanto para a obtenção dos parâmetros do modelo SCD, quanto para filtragem (obtenção das variáveis latentes).

Apêndice A

Propriedades de algumas classes de estimadores

A.1 Propriedades assintóticas dos estimadores *extremos*

Um estimador $\hat{\theta}$ é chamado de estimador *extremo* (“*extremum estimator*”) se existir uma função escalar $Q_n(z, \theta)$ tal que $\hat{\theta}$ minimize (ou maximize) $Q_n(z, \theta)$ sujeito a $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, onde $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$, sendo cada z_j um vetor de observações na amostra de tamanho n . Hayashi (2000) identifica duas classes especiais de estimadores de extremos:

- (a) Estimadores *M*, i.e., do tipo *M*áxima verossimilhança (Huber (1981), Serfling (1980) ou der Vaart (1998)), são obtidos quando a função objetivo for uma média amostral, i.e.,

$$Q_n(z, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m(z_j; \theta),$$

onde m é uma função real de (z_j, θ) . Estimadores de máxima verossimilhança (ML) e estimadores de mínimos quadrados não lineares (NLS) são dois exemplos de estimadores desta classe.

- (b) Estimadores **GMM** - método generalizado dos momentos (Hansen (1982) ou Hayashi (2000)), são obtidos quando a função objetivo puder ser escrita como

$$Q_n(z, \theta) = g_n(z, \theta)' W_n g_n(z, \theta),$$

com

$$g_n(z, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(z_j, \theta)$$

um vetor $q \times 1$, e W_n uma matriz simétrica positiva definida $q \times q$, possivelmente dependente dos dados, e que define a distância de $g_n(z, \theta)$ ao zero. Um exemplo de estimador nesta classe é o estimador DECF.

Note que existem estimadores extremos que não caem em nenhuma das duas classes acima, como por exemplo o estimador CECF.

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados para determinação da distribuição assintótica destes estimadores, conforme estabelecido em Amemiya (1985). Uma discussão interessante sobre as propriedades assintóticas deste estimadores, principalmente da classe GMM, pode ser encontrada também em Singleton (2006). Como basicamente não há diferença essencial entre procedimentos de maximização ou de minimização (basta trocar o sinal da função), vamos considerar apenas o caso da minimização. No que segue vamos enunciar praticamente *ipsis verbis* os resultados apresentados em Amemiya (1985).

Seja $Q_n(Z, \theta)$ a função a ser minimizada, onde $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$ é o conjunto das variáveis aleatórias, e θ é um vetor $k \times 1$ dos parâmetros que caracterizam a distribuição de Z . Denotemos por Θ o espaço paramétrico de θ , e por θ_0 o verdadeiro valor do vetor de parâmetros.

Teorema A.1 (Amemiya (1985), Teor. 4.1.1, pg. 106) *Sejam as seguintes hipóteses:*

- (a) *O espaço paramétrico Θ é um subconjunto compacto do espaço Euclidiano k -dimensional ($\mathbb{R}^k$). Note que $\theta_0 \in \Theta$.*
- (b) *$Q_n(Z, \theta)$ é contínua em $\theta \in \Theta$ para todo Z e é uma função mensurável de Z para todo $\theta \in \Theta$.*
- (c) *$n^{-1}Q_n(Z, \theta)$ converge uniformemente em probabilidade em $\theta \in \Theta$ para uma função não estocástica $Q(\theta)$ a medida que n vai para ∞ , e alcança o único mínimo global em θ_0 . A continuidade de $Q(\theta)$ decorre das hipóteses.*

Defina $\hat{\theta}_n$ o valor que satisfaz

$$Q_n(Z, \hat{\theta}_n) = \min_{\theta \in \Theta} Q_n(Z, \theta)$$

ou seja,

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} Q_n(Z, \theta)$$

Subentende-se que caso $\hat{\theta}_n$ não seja único, escolhemos apropriadamente um deles, de maneira que $\hat{\theta}_n(Z)$ seja uma função mensurável de Z . Isto é possível através de um teorema de Jennrich (1969), pg. 637.

Então $\hat{\theta}_n$ converge em probabilidade para θ_0 .

Prova. Ver Amemiya (1985), teorema 4.1.1, pg. 106. ■

Teorema A.2 (Existência de raiz consistente, Amemiya (1985), Teor. 4.1.2, pg. 110)

Façamos as seguintes hipóteses:

- (a) Seja Θ um conjunto aberto do espaço Euclidiano k -dimensional. Assim, o valor verdadeiro θ_0 é um ponto interior de Θ .
- (b) $Q_n(Z, \theta)$ é uma função mensurável de Z para todo $\theta \in \Theta$, e $\partial Q_n / \partial \theta$ existe e é contínua em uma vizinhança aberta $N_1(\theta_0)$. Note que isto implica que Q_n é contínua para $\theta \in N_1$.
- (c) Existe uma vizinhança aberta $N_2(\theta_0)$ de θ_0 de maneira que $n^{-1}Q_n(z, \theta)$ converge uniformemente em probabilidade em θ em $N_2(\theta_0)$ para uma função não estocástica $Q(\theta)$, e $Q(\theta)$ atinge um mínimo local estrito em θ_0 .

Seja Θ_n o conjunto das raízes da equação

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.1})$$

correspondentes aos mínimos locais. Se este conjunto for vazio, faça $\Theta_n = \{\emptyset\}$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[\inf_{\theta \in \Theta_n} (\theta - \theta_0)' (\theta - \theta_0) > \epsilon \right] = 0.$$

Prova. Ver Amemiya (1985), teorema 4.1.2, pg. 110. ■

A conclusão do teorema anterior simplesmente diz que um dos mínimos locais (raízes da eq. A.1) é consistente.

Teorema A.3 (Normalidade assintótica, Amemiya (1985), Teor. 4.1.3, pg. 111)

Façamos as seguintes hipóteses adicionais às estabelecidas no teorema anterior:

- (a) $\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta'$ existe e é contínua em uma vizinhança aberta e convexa de θ_0 .
- (b) $n^{-1} (\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta')_{\theta_n^*}$ converge em probabilidade para uma matriz não singular $B(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[n^{-1} (\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta')_{\theta_0} \right]$ para toda sequência θ_n^* tal que $\theta_n^* \xrightarrow{p} \theta_0$.
- (c) $n^{-1/2} (\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0))$, onde $A(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[n^{-1} (\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0} \cdot (\partial Q_n / \partial \theta')_{\theta_0} \right]$.

Seja $\{\hat{\theta}_n\}$ a sequência obtida pela escolha de um elemento de Θ_n definido no teorema anterior, de tal forma que $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$ (chamamos $\hat{\theta}_n$ de raiz consistente).

Então,

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N \left(0, B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1} \right) \quad (\text{A.2})$$

Prova. Vamos apresentar a demonstração apresentada por Amemiya (1985), teorema 4.1.3, pg.111, pois vamos utilizá-la na demonstração das propriedades assintóticas do estimador

CECF. O estimador de extremo $\hat{\theta}_n$ é obtido resolvendo-se o conjunto de equações (A.1). Assim, expandindo $\partial Q_n / \partial \theta$ em uma série de Taylor obtemos

$$\left. \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_n} = \left. \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} + \left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta^*} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \quad (\text{A.3})$$

onde θ^* fica entre $\hat{\theta}_n$ e θ_0 . Como $\left. \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_n} = 0$ pela definição de $\hat{\theta}_n$, obtemos

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) = - \left[\frac{1}{n} \left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta^*} \right]^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left. \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} \right). \quad (\text{A.4})$$

Como $\theta^* \xrightarrow{p} \theta_0$, então pela hipótese (b) do enunciado,

$$\frac{1}{n} \left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta^*} \xrightarrow{p} B(\theta_0).$$

Finalmente da hipótese (c) do enunciado, e aplicando o teorema de Slutsky em (A.4), obtemos

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}).$$

■

Note que o resultado do teorema anterior fica inalterado se alterarmos as hipóteses (b) e (c) do enunciado para

- (a) $\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta'$ existe e é contínua em uma vizinhança aberta e convexa de θ_0 .
- (b) $(\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta')_{\theta_n^*}$ converge em probabilidade para uma matriz não singular $B(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[(\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta')_{\theta_0} \right]$ para toda sequência θ_n^* tal que $\theta_n^* \xrightarrow{p} \theta_0$.
- (c) $n^{1/2} (\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0))$, onde $A(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[n (\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0} \cdot (\partial Q_n / \partial \theta')_{\theta_0} \right]$.

Para verificar que o resultado (A.2) permanece válido basta observar que podemos alterar a expansão em série de Taylor (A.4) para

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) = - \left[\left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta^*} \right]^{-1} \left(\sqrt{n} \left. \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} \right). \quad (\text{A.5})$$

Como $\theta^* \xrightarrow{p} \theta_0$, então pela hipótese (b),

$$\left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta^*} \xrightarrow{p} B(\theta_0).$$

Finalmente da hipótese (c), e aplicando o teorema de Slutsky em (A.5), obtemos o resultado (A.4).

A.2 O método generalizado dos momentos (GMM)

O *método dos momentos* foi introduzido por Karl Pearson em 1895 para obter estimadores dos parâmetros, e consiste essencialmente em resolver o sistema de equações obtido ao igualar-se um conjunto de momentos amostrais aos respectivos momentos populacionais (Stuart e Ord (1994)). Para que o sistema tenha solução única utilizamos um número de condições de momentos igual ao número de parâmetros que queremos estimar, ou seja, resolvemos um sistema *determinado*. Quando possuímos um número maior de condições de momentos do que o número de parâmetros que queremos estimar (ou seja, quando o sistema é *sobredeterminado*) devemos empregar o *método generalizado dos momentos* (GMM), cujo objetivo é o de minimizar uma distância entre os momentos amostrais e os momentos teóricos.

Seguindo o texto de Yu (2004) vamos supor que possuamos as seguintes q condições de momentos:

$$E[f(X_j; \theta_0)] = 0,$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^q$. Assumamos adicionalmente que possamos invocar a lei forte dos grandes números de maneira a obtermos o seguinte resultado para os momentos amostrais:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta) \xrightarrow{a.s.} E[f(X_j; \theta)].$$

A idéia básica da estimação GMM é minimizar a distância entre os momentos amostrais e os momentos populacionais, isto é,

$$\min_{\theta} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta)' W_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta),$$

onde W_n é uma matriz de pesos positiva definida que converge quase certamente para uma matriz positiva definida W_0 . Sob algumas condições de regularidade, o estimador GMM é consistente e distribuído assintoticamente normal para matrizes de peso arbitrárias. Quando o sistema é identificado ($k = q$), o estimador GMM não depende da escolha de W_n e basicamente resolve as equações de estimação do *método dos momentos*: $1/n \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta) = 0$. Quando o sistema é sobre-identificado ($k < q$), Hansen (1982) mostra que se $W_0 = \Sigma^{-1}$, o estimador GMM é assintoticamente eficiente no sentido que a matriz de covariância do estimador GMM é minimizada, sendo Σ a matriz de covariância assintótica de $f(X_j; \theta)$.

Agora vamos rever as hipóteses e o resultado de convergência assintótica do estimador GMM como obtido por Hansen (1982). Inicialmente vamos usar as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} f_n(\omega, \beta) &= f[x_n(\omega, \beta)], \\ g_N(\omega, \beta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(\omega, \beta), \\ h_N(\omega, \beta) &= a_N(\omega) g_N(\omega, \beta) \end{aligned}$$

$$B_N(\omega) = \left\{ \beta \in S : |h_N(\omega, \beta)|^2 = \inf_{\beta \in S} |h_N(\omega, \beta)|^2 \right\},$$

$$w_n = f(x_n, \beta_0), \quad -\infty < n < +\infty,$$

$$v_j = E[w_0 | w_{-j}, w_{-j-1}, \dots] - E[w_0 | w_{-j-1}, w_{-j-2}, \dots], \quad j \geq 0.$$

Vamos agora replicar as hipóteses utilizadas por Hansen (1982), utilizando a notação $d_0 = E[\partial f / \partial \beta(x_1, \beta_0)]$:

- (a) $\{x_n : -\infty < n < +\infty\}$ é estacionário e ergódico.
- (b) S é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^q$ que contém β_0 .
- (c) $f(\cdot, \beta)$ e $\partial f / \partial \beta(\cdot, \beta)$ são Borel-mensuráveis para cada $\beta \in S$ e $\partial f / \partial \beta(x, \beta)$ é contínuo em S para cada $x \in \mathbb{R}^p$.
- (d) $\partial f_1 / \partial \beta$ tem primeiro momento contínuo em β_0 , e $E[\partial f / \partial \beta(x_1, \beta_0)]$ existe, é finito, e tem posto completo.
- (e) $E[w_0 w'_0]$ existe e é finita, $E[w_0 | w_{-j}, w_{-j-1}, \dots]$ converge em média quadrática para zero, e $\sum_{j=0}^{\infty} E[v'_j v_j]^{1/2}$ é finito.
- (f) $\{a_N^* : N \geq 1\}$ converge em probabilidade para uma matriz de constantes a_0^* que tem posto completo.

O estimador GMM $\{b_N^* : N \geq 1\}$ deve satisfazer assintoticamente o seguinte conjunto de equações:

$$a_0^* E f(x_n, \beta) = 0.$$

Definição A.1 (Estimador GMM, def. 3.1 Hansen (1982)) *O estimador GMM $\{b_N^* : N \geq 1\}$ é uma sequência de vetores aleatórios que converge em probabilidade para β_0 para o qual $\left\{ \sqrt{N} a_N^* g_N(b_N^*) : N \geq 1 \right\}$ converge em probabilidade para zero.*

Lema A.1 (Lema 3.2, Hansen (1982)) *Suponha que as hipóteses (a) a (d) estejam satisfeitas. Se (i) $\{b_N : N \geq 1\}$ converge em probabilidade para β_0 ; (ii) $\{a_N : N \geq 1\}$ converge em probabilidade para a_0 ; então $\{(\partial g_N / \partial \beta)(b_N) : N \geq 1\}$ converge em probabilidade para d_0 e $\{a_N^* : N \geq 1\}$ definido abaixo converge em probabilidade para $a_0^* = d_0' a_0'$*

$$a_N^* = \frac{\partial g_N}{\partial \beta}(b_N)' a_N' a_N.$$

Teorema A.4 (Teor. 3.1, Hansen (1982)) *Suponha que as hipóteses (a) a (f) estejam satisfeitas. Então $\left\{ \sqrt{N} (b_N^* - \beta_0) : N \geq 1 \right\}$ converge em distribuição para um vetor aleatório normalmente distribuído com média zero e matriz de covariância $(a_0^* d_0)^{-1} a_0^* S_w a_0^{*'} (a_0^* d_0)^{-1'}$, sendo que pelas hipóteses (a) e (e)*

$$S_w = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} E [w_0 w'_{-j}]$$

é bem definido e finito.

Prova. *A prova deste teorema encontra-se em Hansen (1982), pg. 1051 (apêndice). ■*

Podemos observar pelo resultado acima que a matriz de covariância do estimador GMM é geralmente diferente do inverso da matriz de informação de Fisher. Assim, geralmente o estimador GMM não possui a mesma eficiência assintótica que o estimador de máxima verossimilhança.

A.3 Um Teorema Central Limite para processos estacionários

O objetivo desta seção é apresentar um teorema central limite para seqüências dependentes, utilizado na demonstração da convergência do estimador CECF. Inicialmente vamos definir algumas condições de dependência da seqüência, conhecidas como condições *mixing*. Para isso vamos seguir o texto de White (2000), embora outra referência interessante sobre o assunto seja Davidson (1994), cap. 13 e 14.

Definição A.2 A σ -álgebra de Borel gerada por $\{X_t, t = n, \dots, n+m\}$, denotada por $\mathcal{B}_n^{n+m} = \sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$, é a menor σ -álgebra de Ω que inclui

- (a) todos os conjuntos da forma $\times_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}^q \times_{i=n}^{n+m} B_i \times_{i=n+m+1}^{\infty} \mathbb{R}^q$, onde cada $B_i \in \mathcal{B}^q$;
- (b) o complemento A^c de qualquer conjunto A em $\mathcal{B}_n^{n+m}$;
- (c) a união $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ de qualquer seqüência $\{A_i\}$ em $\mathcal{B}_n^{n+m}$.

Definição A.3 Seja $\mathcal{B}_{-\infty}^n \equiv \sigma(\dots, X_n)$ a menor coleção de subconjuntos de Ω que contenha a união das σ -álgebras $\mathcal{B}_a^n$ quando $a \rightarrow -\infty$; seja $\mathcal{B}_{n+m}^{\infty} \equiv \sigma(X_{n+m}, \dots)$ a menor coleção de subconjuntos de Ω que contenha a união das σ -álgebras $\mathcal{B}_{n+m}^a$ quando $a \rightarrow \infty$.

Intuitivamente podemos pensar em $\mathcal{B}_{-\infty}^n$ como toda a informação contida no passado da seqüência $\{X_t\}$, até o instante n , enquanto que $\mathcal{B}_{n+m}^{\infty}$ representa a a informação contida no futuro da seqüência $\{X_t\}$ a partir de $n+m$.

Definição A.4 Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ σ -álgebras e defina

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{G}, \mathcal{H}) &\equiv \sup_{G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}, P(G) > 0} |P(H|G) - P(H)| \\ \alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H}) &\equiv \sup_{G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}} |P(G \cap H) - P(G)P(H)| \end{aligned}$$

Note que os eventos em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são independentes se e somente se $\phi(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ e $\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ são iguais a zero. Assim, a função α fornece uma medida absoluta, enquanto ϕ fornece uma medida relativa, da dependência entre eventos em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Definição A.5 Para uma seqüência de vetores aleatórios $\{X_t\}$ definimos os coeficientes *mixing* como

$$\begin{aligned} \phi(m) &\equiv \sup_n \phi(\mathcal{B}_{-\infty}^n, \mathcal{B}_{n+m}^{\infty}) \\ \alpha(m) &\equiv \sup_n \alpha(\mathcal{B}_{-\infty}^n, \mathcal{B}_{n+m}^{\infty}). \end{aligned}$$

Se $\phi(m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, então a sequência $\{X_t\}$ é dita ϕ -mixing, ou mixing uniforme. Se $\alpha(m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, então a sequência $\{X_t\}$ é dita α -mixing, ou mixing forte.

O conceito de mixing forte (α) é mais fraco do que o conceito de *mixing* uniforme (ϕ) no sentido de que ϕ -mixing implica em α -mixing, uma vez que

$$|P(G \cap H) - P(G)P(H)| \leq |P(H|G) - P(H)| \leq \phi(G, H)$$

para todo $G \in \mathcal{G}$ e $H \in \mathcal{H}$, e portanto $\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \leq \phi(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Vamos a seguir apresentar um teorema central limite para sequências com *mixing* forte.

Teorema A.5 (Teorema 18.5.4, Ibragimov e Linnik, 1971) *Seja a sequência estacionária mixing forte X_j , com*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) < \infty,$$

X_j limitada, $\Pr(|X_j| < c_0) = 1$. Então

$$\sigma^2 = E(X_0^2) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} E(X_0 X_j) < \infty$$

e, se $\sigma \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sigma^{-1} n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j < z \right\} = \Phi(z).$$

Prova. Ver Ibragimov e Linnik (1971), teorema 18.5.4, pg. 347. ■

Apêndice B

Covariância do processo Y_n

É comum vermos em artigos a frase “é fácil ver que...”, ou então a frase “depois de uma álgebra simples, mas tediosa...”, com as quais os autores justificam o “salto” de passagens da demonstração para ir direto ao ponto desejado. Quando nos deparamos com este tipo de frase, imaginamos imediatamente que vamos demorar várias horas e muitas páginas para chegar ao resultado final...

Assim, com o espírito de procurar não pular passagens, mas sim apresentar os detalhes da tediosa álgebra, vamos apresentar neste apêndice as demonstrações das matrizes de covariância Ω_n do processo da função característica empírica, tanto para o caso de variáveis aleatórias i.i.d., quanto para o caso estacionário.

B.1 Caso i.i.d.

Nesta seção vamos obter a estrutura de covariância do processo $Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r))$ indicada no teorema 2.3, que se aplica ao caso i.i.d.. Para isso, notemos que:

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ir'X_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\cos(r'X_j) + i \sin(r'X_j)]. \quad (\text{B.1})$$

Chamemos

$$u_n(r) = \text{Re } \varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r'X_j) \quad (\text{B.2})$$

$$v_n(r) = \text{Im } \varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(r'X_j) \quad (\text{B.3})$$

$$u(r) = \text{Re } \varphi(r) = E[\cos(r'X_j)] \quad (\text{B.4})$$

$$v(r) = \text{Im } \varphi(r) = E[\sin(r'X_j)] \quad (\text{B.5})$$

Também é conveniente recordarmos as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \} \quad (\text{B.6})$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) + \cos(A + B) \} \quad (\text{B.7})$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A - B) + \sin(A + B) \} \quad (\text{B.8})$$

Podemos calcular a covariância $\text{cov}[Y_n(r), Y_n(s)]$ por:

$$\begin{aligned} \text{cov}[Y_n(r), Y_n(s)] &= E[Y_n(r) \overline{Y_n(s)}] \\ &= E\left\{ \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r)) \overline{\sqrt{n}(\varphi_n(s) - \varphi(s))} \right\} \\ &= nE\left\{ (\varphi_n(r) - \varphi(r)) (\overline{\varphi_n(s) - \varphi(s)}) \right\} \\ &= nE\left\{ \varphi_n(r) \overline{\varphi_n(s)} - \varphi_n(r) \overline{\varphi(s)} - \varphi(r) \overline{\varphi_n(s)} + \varphi(r) \overline{\varphi(s)} \right\} \\ &= n\left\{ E[\varphi_n(r) \overline{\varphi_n(s)}] - \varphi(r) \overline{\varphi(s)} - \varphi(r) \overline{\varphi(s)} + \varphi(r) \overline{\varphi(s)} \right\} \\ &= n\left\{ E[\varphi_n(r) \overline{\varphi_n(s)}] - \varphi(r) \overline{\varphi(s)} \right\} \\ &= n\{E[\varphi_n(r) \varphi_n(-s)] - \varphi(r) \varphi(-s)\} \\ &= nE[\varphi_n(r) \varphi_n(-s)] - n\varphi(r) \varphi(-s) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde utilizamos a propriedade $\varphi(r) = \overline{\varphi(-r)}$. Agora, como por hipótese X_j é independente de X_k para $j \neq k$, temos

$$\begin{aligned} E[\varphi_n(r) \varphi_n(-s)] &= E\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{ir'X_j} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-is'X_k} \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} E\left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e^{ir'X_j} e^{-is'X_k} \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} E\left\{ \sum_{j=1}^n e^{i(r-s)'X_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n e^{ir'X_j} e^{-is'X_k} \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{j=1}^n E[e^{i(r-s)'X_j}] + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n E[e^{ir'X_j}] E[e^{-is'X_k}] \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \{ n\varphi(r-s) + n(n-1)\varphi(r)\varphi(-s) \} \\ &= \frac{1}{n} \{ \varphi(r-s) + (n-1)\varphi(r)\varphi(-s) \} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.10) em (B.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{cov}[Y_n(r), Y_n(s)] &= nE[\varphi_n(r)\varphi_n(-s)] - n\varphi(r)\varphi(-s) \\
 &= \varphi(r-s) + (n-1)\varphi(r)\varphi(-s) - n\varphi(r)\varphi(-s) \\
 &= \varphi(r-s) - \varphi(r)\varphi(-s)
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Vamos agora obter as covariâncias entre as partes reais e imaginárias de $Y_n(r)$ e $Y_n(s)$:

$$\begin{aligned}
 \text{cov}[\text{Re } Y_n(r), \text{Re } Y_n(s)] &= E[\text{Re } Y_n(r) \cdot \text{Re } Y_n(s)] = \\
 &= E[\text{Re } Y_n(r) \cdot \text{Re } Y_n(s)] \\
 &= E\{\sqrt{n} \text{Re}(\varphi_n(r) - \varphi(r)) \sqrt{n} \text{Re}(\varphi_n(s) - \varphi(s))\} \\
 &= nE\{\text{Re } \varphi_n(r) \text{Re } \varphi_n(s) - \text{Re } \varphi_n(r) \text{Re } \varphi(s) - \text{Re } \varphi(r) \text{Re } \varphi_n(s) + \text{Re } \varphi(r) \text{Re } \varphi(s)\} \\
 &= nE\{\text{Re } \varphi_n(r) \text{Re } \varphi_n(s)\} - n \text{Re } \varphi(r) \text{Re } \varphi(s) \\
 &= nE\{u_n(r) u_n(s)\} - nu(r) u(s) \\
 &= nE\left\{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r' X_j) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(s' X_k)\right\} - nu(r) u(s) \\
 &= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{j=1}^n \cos(r' X_j) \cos(s' X_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \cos(r' X_j) \cos(s' X_k)\right\} - nu(r) u(s) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E\{\cos(r' X_j) \cos(s' X_j)\} + \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E\{\cos(r' X_j) \cos(s' X_k)\} - nu(r) u(s) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E\{\cos(r' X_1) \cos(s' X_1)\} + \\
 &\quad + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E\{\cos(r' X_1) \cos(s' X_{1+k})\} - nu(r) u(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \{ \cos(r'X_1) \cos(s'X_1) \} + \frac{2n(n-1)}{n-2} E \{ \cos(r'X_1) \cos(s'X_2) \} - nu(r)u(s) \\
&= E \{ \cos(r'X_1) \cos(s'X_1) \} + (n-1) E \{ \cos(r'X_1) \} E \{ \cos(s'X_2) \} - nu(r)u(s) \\
&= E \left\{ \frac{1}{2} [\cos((r-s)'X_1) + \cos((r+s)'X_1)] \right\} + \\
&\quad + (n-1) E \{ \cos(r'X_1) \} E \{ \cos(s'X_2) \} - nu(r)u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{u(r-s) + u(r+s)\} + (n-1)u(r)u(s) - nu(r)u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{u(r-s) + u(r+s)\} - u(r)u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r+s) + \operatorname{Re} \varphi(r-s) \} - \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov} [\operatorname{Re} Y_n(r), \operatorname{Im} Y_n(s)] &= E [\operatorname{Re} Y_n(r) \cdot \operatorname{Im} Y_n(s)] \\
&= nE \{u_n(r)v_n(s)\} - nu(r)v(s) = \\
&= \frac{1}{2} \{v(s-r) + v(r+s)\} + (n-1)u(r)v(s) - nu(r)v(s) \\
&= \frac{1}{2} \{-v(r-s) + v(r+s)\} - u(r)v(s) \\
&= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r+s) - \operatorname{Im} \varphi(r-s) \} - \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov} [\operatorname{Im} Y_n(r), \operatorname{Re} Y_n(s)] &= E [\operatorname{Im} Y_n(r) \cdot \operatorname{Re} Y_n(s)] \\
&= nE \{v_n(r)u_n(s)\} - nv(r)u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{v(r-s) + v(r+s)\} + (n-1)v(r)u(s) - nv(r)u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{v(r-s) + v(r+s)\} - v(r)u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r+s) + \operatorname{Im} \varphi(r-s) \} - \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) \tag{B.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov} [\operatorname{Im} Y_n(r), \operatorname{Im} Y_n(s)] &= E [\operatorname{Im} Y_n(r) \cdot \operatorname{Im} Y_n(s)] \\
&= nE \{v_n(r)v_n(s)\} - nv(r)v(s) \\
&= \frac{1}{2} \{u(r-s) - u(r+s)\} + (n-1)v(r)v(s) - nv(r)v(s) \\
&= \frac{1}{2} \{u(r-s) - u(r+s)\} - v(r)v(s) \\
&= \frac{1}{2} \{-\operatorname{Re} \varphi(r+s) + \operatorname{Re} \varphi(r-s)\} - \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Resumindo:

$$\text{cov} [\text{Re } Y_n(r), \text{Re } Y_n(s)] = \frac{1}{2} \{ \text{Re } \varphi(r+s) + \text{Re } \varphi(r-s) \} - \text{Re } \varphi(r) \text{Re } \varphi(s) \quad (\text{B.16})$$

$$\text{cov} [\text{Re } Y_n(r), \text{Im } Y_n(s)] = \frac{1}{2} \{ \text{Im } \varphi(r+s) - \text{Im } \varphi(r-s) \} - \text{Re } \varphi(r) \text{Im } \varphi(s) \quad (\text{B.17})$$

$$\text{cov} [\text{Im } Y_n(r), \text{Re } Y_n(s)] = \frac{1}{2} \{ \text{Im } \varphi(r+s) + \text{Im } \varphi(r-s) \} - \text{Im } \varphi(r) \text{Re } \varphi(s) \quad (\text{B.18})$$

$$\text{cov} [\text{Im } Y_n(r), \text{Im } Y_n(s)] = \frac{1}{2} \{ -\text{Re } \varphi(r+s) + \text{Re } \varphi(r-s) \} - \text{Im } \varphi(r) \text{Im } \varphi(s) \quad (\text{B.19})$$

Como $Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r))$ podemos escrever

$$\text{cov} \left[\begin{pmatrix} \text{Re } \varphi_n(r) \\ \text{Im } \varphi_n(r) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Re } \varphi_n(s) \\ \text{Im } \varphi_n(s) \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{n} \Omega(r, s) \quad (\text{B.20})$$

onde $\Omega(r, s) = \begin{pmatrix} \Omega_{RR}(r, s) & \Omega_{RI}(r, s) \\ \Omega_{IR}(r, s) & \Omega_{II}(r, s) \end{pmatrix}$, e os elementos da partição são dados pelas equações (B.16) a (B.19):

$$\Omega_{RR}(r, s) = \frac{1}{2} \{ \text{Re } \varphi(r+s) + \text{Re } \varphi(r-s) \} - \text{Re } \varphi(r) \text{Re } \varphi(s) \quad (\text{B.21})$$

$$\Omega_{RI}(r, s) = \frac{1}{2} \{ \text{Im } \varphi(r+s) - \text{Im } \varphi(r-s) \} - \text{Re } \varphi(r) \text{Im } \varphi(s) \quad (\text{B.22})$$

$$\Omega_{IR}(r, s) = \frac{1}{2} \{ \text{Im } \varphi(r+s) + \text{Im } \varphi(r-s) \} - \text{Im } \varphi(r) \text{Re } \varphi(s) \quad (\text{B.23})$$

$$\Omega_{II}(r, s) = \frac{1}{2} \{ -\text{Re } \varphi(r+s) + \text{Re } \varphi(r-s) \} - \text{Im } \varphi(r) \text{Im } \varphi(s) \quad (\text{B.24})$$

As equações (B.21) a (B.24) coincidem com o caso de amostras i.i.d., como obtido, por exemplo, em Heathcote (1977).

B.2 Caso estacionário (não necessariamente i.i.d.)

Seja $\{Z_j\}$ um processo estacionário de v.a. não necessariamente independentes e identicamente distribuídas, com função característica empírica $\varphi_n(r)$ e função característica $\varphi(r)$. Neste caso a covariância entre $Y_n(r)$ e $Y_n(s)$ ainda é dada por (B.9),

$$\text{cov}[Y_n(r), Y_n(s)] = nE[\varphi_n(r)\varphi_n(-s)] - n\varphi(r)\varphi(-s),$$

mas já não podemos utilizar (B.11) devido a não independência entre Z_j e Z_{j+k} . Vamos utilizar então a seguinte função auxiliar

$$\Lambda_k(r, s) = E\left[e^{ir'Z_j + is'Z_{j+k}}\right]. \quad (\text{B.25})$$

Note também que podemos escrever (B.25) como

$$\begin{aligned} \Lambda_k(r, s) &= E\left[\exp(ir'Z_j + is'Z_{j+k})\right] \\ &= E\left[\cos(r'Z_j + s'Z_{j+k})\right] + iE\left[\sin(r'Z_j + s'Z_{j+k})\right] \\ &= E\left[\cos(r'Z_j)\cos(s'Z_{j+k}) - \sin(r'Z_j)\sin(s'Z_{j+k})\right] + \\ &\quad + iE\left[\sin(r'Z_j)\cos(s'Z_{j+k}) + \cos(r'Z_j)\sin(s'Z_{j+k})\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

onde utilizamos as relações trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B, \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B. \end{aligned}$$

Utilizando (B.1) podemos escrever $E[\varphi_n(r)\varphi_n(-s)]$ como

$$\begin{aligned} &E[\varphi_n(r)\varphi_n(-s)] = \\ &= E\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{ir'Z_j} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{-is'Z_k}\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}E\left\{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e^{ir'Z_j} e^{-is'Z_k}\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}E\left\{\sum_{j=1}^n e^{i(r-s)'Z_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n e^{ir'Z_j - is'Z_k}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} E \left[e^{i(r-s)' Z_j} \right] + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n E \left[e^{ir' Z_j - is' Z_k} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{n^2} \left\{ n E \left[e^{i(r-s)' Z_1} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left[e^{ir' Z_1 - is' Z_{1+k}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n (n-k) E \left[e^{ir' Z_{1+k} - is' Z_1} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \varphi(r-s) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)}{n} \Lambda_k(r, -s) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)}{n} \Lambda_k(-s, r) \right\} \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese de estacionaridade de Z_j na passagem da 4^a para a 5^a linha.

Substituindo (B.27) em (B.9) obtemos

$$\begin{aligned}
\text{cov}[Y_n(r), Y_n(s)] &= \varphi(r-s) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)}{n} \Lambda_k(r, -s) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)}{n} \Lambda_k(-s, r) - n\varphi(r)\varphi(-s) \\
&= \varphi(r-s) - n\varphi(r)\varphi(-s) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)}{n} [\Lambda_k(r, -s) + \Lambda_k(-s, r)] \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

Vamos agora obter as covariâncias entre as partes reais e imaginárias de $Y_n(r)$ e $Y_n(s)$. A covariância entre as partes reais é dada por:

$$\begin{aligned}
& \text{cov} [\text{Re } Y_n(r), \text{Re } Y_n(s)] = E [\text{Re } Y_n(r) \cdot \text{Re } Y_n(s)] = \\
&= E \{ \sqrt{n} \text{Re}(\varphi_n(r) - \varphi(r)) \sqrt{n} \text{Re}(\varphi_n(s) - \varphi(s)) \} \\
&= nE \{ \text{Re} \varphi_n(r) \text{Re} \varphi_n(s) \} - n \text{Re} \varphi(r) \text{Re} \varphi(s) \\
&= nE \{ u_n(r) u_n(s) \} - nu(r) u(s) \\
&= nE \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r' X_j) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(s' X_k) \right\} - nu(r) u(s) \\
&= \frac{1}{n} E \left\{ \sum_{j=1}^n \cos(r' X_j) \cos(s' X_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \cos(r' X_j) \cos(s' X_k) \right\} - nu(r) u(s) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \cos(r' X_j) \cos(s' X_j) \} + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E \{ \cos(r' X_j) \cos(s' X_k) \} - nu(r) u(s) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \cos(r' X_1) \cos(s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos(r' X_1) \cos(s' X_{1+k}) \} + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos(r' X_{1+k}) \cos(s' X_1) \} - nu(r) u(s) \\
&= E \{ \cos(r' X_1) \cos(s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos(r' X_1) \cos(s' X_{1+k}) \} + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos(r' X_{1+k}) \cos(s' X_1) \} - nu(r) u(s) \\
&= E \left\{ \frac{1}{2} [\cos((r-s)' X_1) + \cos((r+s)' X_1)] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\cos(r' X_1 - s' X_{1+k}) + \cos(r' X_1 + s' X_{1+k})] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\cos(r' X_{1+k} - s' X_1) + \cos(r' X_{1+k} + s' X_1)] \right\} - nu(r) u(s) \\
&= \frac{1}{2} \{ u(r-s) + u(r+s) \} - nu(r) u(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \text{Re} \Lambda_k(r, -s) + \text{Re} \Lambda_k(r, s) + \text{Re} \Lambda_k(-s, r) + \text{Re} \Lambda_k(s, r) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \text{Re} \varphi(r-s) + \text{Re} \varphi(r+s) \} - n \text{Re} \varphi(r) \text{Re} \varphi(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \text{Re} \Lambda_k(r, -s) + \text{Re} \Lambda_k(r, s) + \text{Re} \Lambda_k(-s, r) + \text{Re} \Lambda_k(s, r) \} \quad (\text{B.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& cov [\operatorname{Re} Y_n (r) , \operatorname{Im} Y_n (s)] = E [\operatorname{Re} Y_n (r) \cdot \operatorname{Im} Y_n (s)] = \\
& = E \{ \sqrt{n} \operatorname{Re} (\varphi_n (r) - \varphi (r)) \sqrt{n} \operatorname{Im} (\varphi_n (s) - \varphi (s)) \} \\
& = n E \{ \operatorname{Re} \varphi_n (r) \operatorname{Im} \varphi_n (s) \} - n \operatorname{Re} \varphi (r) \operatorname{Im} \varphi (s) \\
& = n E \{ u_n (r) v_n (s) \} - n u (r) v (s) \\
& = n E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos (r' X_j) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin (s' X_k) \right\} - n u (r) v (s) \\
& = \frac{1}{n} E \left\{ \sum_{j=1}^n \cos (r' X_j) \sin (s' X_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \cos (r' X_j) \sin (s' X_k) \right\} - n u (r) v (s) \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \cos (r' X_j) \sin (s' X_j) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E \{ \cos (r' X_j) \sin (s' X_k) \} - n u (r) v (s) \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \cos (r' X_1) \sin (s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos (r' X_1) \sin (s' X_{1+k}) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos (r' X_{1+k}) \sin (s' X_1) \} - n u (r) v (s) \\
& = E \{ \cos (r' X_1) \sin (s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos (r' X_1) \sin (s' X_{1+k}) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \cos (r' X_{1+k}) \sin (s' X_1) \} - n u (r) v (s) \\
& = E \left\{ \frac{1}{2} [\sin ((-r+s)' X_1) + \sin ((r+s)' X_1)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\sin (-r' X_1 + s' X_{1+k}) + \sin (r' X_1 + s' X_{1+k})] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\sin (-r' X_{1+k} + s' X_1) + \sin (r' X_{1+k} + s' X_1)] \right\} - n u (r) v (s) \\
& = \frac{1}{2} \{ v (-r+s) + v (r+s) \} - n u (r) v (s) + \\
& \quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k (-r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (s, -r) + \operatorname{Im} \Lambda_k (s, r) \} \\
& = \frac{1}{2} \{ -\operatorname{Im} \varphi (r-s) + \operatorname{Im} \varphi (r+s) \} - n \operatorname{Re} \varphi (r) \operatorname{Im} \varphi (s) + \\
& \quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ -\operatorname{Im} \Lambda_k (r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (r, s) - \operatorname{Im} \Lambda_k (-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k (s, r) \} \quad (\text{B.30})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& cov [\operatorname{Im} Y_n (r) , \operatorname{Re} Y_n (s)] = E [\operatorname{Im} Y_n (r) . \operatorname{Re} Y_n (s)] = \\
& = E \left\{ \sqrt{n} \operatorname{Im} (\varphi_n (r) - \varphi (r)) \sqrt{n} \operatorname{Re} (\varphi_n (s) - \varphi (s)) \right\} \\
& = n E \{ \operatorname{Im} \varphi_n (r) \operatorname{Re} \varphi_n (s) \} - n \operatorname{Im} \varphi (r) \operatorname{Re} \varphi (s) \\
& = n E \{ v_n (r) u_n (s) \} - n v (r) u (s) \\
& = n E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin (r' X_j) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos (s' X_k) \right\} - n v (r) u (s) \\
& = \frac{1}{n} E \left\{ \sum_{j=1}^n \sin (r' X_j) \cos (s' X_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sin (r' X_j) \cos (s' X_k) \right\} - n v (r) u (s) \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \sin (r' X_j) \cos (s' X_j) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E \{ \sin (r' X_j) \cos (s' X_k) \} - n v (r) u (s) \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \sin (r' X_1) \cos (s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_1) \cos (s' X_{1+k}) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_{1+k}) \cos (s' X_1) \} - n v (r) u (s) \\
& = E \{ \sin (r' X_1) \cos (s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_1) \cos (s' X_{1+k}) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_{1+k}) \cos (s' X_1) \} - n v (r) u (s) \\
& = E \left\{ \frac{1}{2} [\sin ((r-s)' X_1) + \sin ((r+s)' X_1)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\sin (r' X_1 - s' X_{1+k}) + \sin (r' X_1 + s' X_{1+k})] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\sin (r' X_{1+k} - s' X_1) + \sin (r' X_{1+k} + s' X_1)] \right\} - n v (r) u (s) \\
& = \frac{1}{2} \{ v (r-s) + v (r+s) \} - n v (r) u (s) + \\
& \quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k (r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k (s, r) \} \\
& = \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi (r-s) + \operatorname{Im} \varphi (r+s) \} - n \operatorname{Im} \varphi (r) \operatorname{Re} \varphi (s) + \\
& \quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k (r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k (-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k (s, r) \} \quad (\text{B.31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& cov [\operatorname{Im} Y_n (r) , \operatorname{Im} Y_n (s)] = E [\operatorname{Im} Y_n (r) \cdot \operatorname{Im} Y_n (s)] = \\
& = E \{ \sqrt{n} \operatorname{Im} (\varphi_n (r) - \varphi (r)) \sqrt{n} \operatorname{Im} (\varphi_n (s) - \varphi (s)) \} \\
& = n E \{ \operatorname{Im} \varphi_n (r) \operatorname{Im} \varphi_n (s) \} - n \operatorname{Im} \varphi (r) \operatorname{Im} \varphi (s) \\
& = n E \{ v_n (r) v_n (s) \} - n v (r) v (s) \\
& = n E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin (r' X_j) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin (s' X_k) \right\} - n v (r) v (s) \\
& = \frac{1}{n} E \left\{ \sum_{j=1}^n \sin (r' X_j) \sin (s' X_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sin (r' X_j) \sin (s' X_k) \right\} - n v (r) v (s) \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \sin (r' X_j) \sin (s' X_j) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E \{ \sin (r' X_j) \sin (s' X_k) \} - n v (r) v (s) \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \{ \sin (r' X_1) \sin (s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_1) \sin (s' X_{1+k}) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_{1+k}) \sin (s' X_1) \} - n v (r) v (s) \\
& = E \{ \sin (r' X_1) \sin (s' X_1) \} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_1) \sin (s' X_{1+k}) \} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \{ \sin (r' X_{1+k}) \sin (s' X_1) \} - n v (r) v (s) \\
& = E \left\{ \frac{1}{2} [\cos ((r-s)' X_1) - \cos ((r+s)' X_1)] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\cos (r' X_1 - s' X_{1+k}) - \cos (r' X_1 + s' X_{1+k})] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) E \left\{ \frac{1}{2} [\cos (r' X_{1+k} - s' X_1) - \cos (r' X_{1+k} + s' X_1)] \right\} - n v (r) v (s) \\
& = \frac{1}{2} \{ u (r-s) - u (r+s) \} - n v (r) v (s) + \\
& \quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k (r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_k (r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k (-s, r) - \operatorname{Re} \Lambda_k (s, r) \} \\
& = \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi (r-s) - \operatorname{Re} \varphi (r+s) \} - n \operatorname{Im} \varphi (r) \operatorname{Im} \varphi (s) + \\
& \quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k (r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_k (r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k (-s, r) - \operatorname{Re} \Lambda_k (s, r) \} \quad (\text{B.32})
\end{aligned}$$

Resumindo:

$$\begin{aligned}\Omega_{RR,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) + \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned}\Omega_{RI,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ -\operatorname{Im} \varphi(r-s) + \operatorname{Im} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ -\operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) - \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned}\Omega_{IR,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Im} \varphi(r-s) + \operatorname{Im} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned}\Omega_{II,n}(r, s) &= \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) - \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - n \operatorname{Im} \varphi(r) \operatorname{Im} \varphi(s) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) - \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}\end{aligned}\quad (\text{B.36})$$

Assim, analogamente ao caso i.i.d. da seção anterior (eq. B.20), como $Y_n(r) = \sqrt{n}(\varphi_n(r) - \varphi(r))$ podemos escrever que

$$\operatorname{cov} \left[\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi_n(r) \\ \operatorname{Im} \varphi_n(r) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi_n(s) \\ \operatorname{Im} \varphi_n(s) \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{n} \Omega_n(r, s) \quad (\text{B.37})$$

onde $\Omega_n(r, s) = \begin{pmatrix} \Omega_{RR,n}(r, s) & \Omega_{RI,n}(r, s) \\ \Omega_{IR,n}(r, s) & \Omega_{II,n}(r, s) \end{pmatrix}$ e os elementos da partição são dados pelas equações (B.33) a (B.36).

Vale notar que as equações (B.33) a (B.36) diferem das equações obtidas por Knight e Yu (2002), pg. 716, pois apresentam um n multiplicando o produto das partes real ou imaginária de $\varphi_z(r)$ e $\varphi_z(s)$, além de diferentes sinais nos somatórios. Por outro lado, o resultado acima coincide com o apresentado em Knight e Satchell (1997), pg. 176, tomando-se o cuidado de notar que a nomenclatura Ω^p utilizada ali refere-se ao nosso $\Omega_n(r, s)/n$.

B.2.1 Convergência da seqüência $\Omega_n(r, s)$

Vamos agora verificar se a seqüência $\Omega_n(r, s)$ converge quando $n \rightarrow \infty$. Para isso vamos assumir que a seqüência $\{Z_j\}$ seja α -mixing (forte). Neste caso, temos que

$$|E[\exp(ir'Z_j + is'Z_{j+k})] - E[\exp(ir'Z_j)] \cdot E[\exp(ir'Z_{j+k})]| = \alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Seja então $\Lambda_\infty(r, s)$ definido por:

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty(r, s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k(r, s) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[\exp(ir'Z_j + is'Z_{j+k})] \\ &= E[\exp(ir'Z_j)] \cdot E[\exp(ir'Z_{j+k})] \\ &= \varphi(r) \varphi(s). \end{aligned} \tag{B.38}$$

Podemos escrever $\Lambda_\infty(r, s) = \varphi(r) \varphi(s)$ como

$$\begin{aligned} \varphi(r) \varphi(s) &= (u(r) + iv(r))(u(s) + iv(s)) \\ &= u(r)u(s) + iu(r)v(s) + \\ &\quad + iv(r)u(s) - v(r)v(s) \\ &= u(r)u(s) - v(r)v(s) + \\ &\quad + i(u(r)v(s) + v(r)u(s)). \end{aligned}$$

Logo

$$\operatorname{Re}[\varphi(r) \varphi(s)] = u(r)u(s) - v(r)v(s) \tag{B.39}$$

$$\operatorname{Im}[\varphi(r) \varphi(s)] = u(r)v(s) + v(r)u(s) \tag{B.40}$$

Para o caso de $\Omega_{RR,n}(r, s)$ obtemos:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \Lambda_\infty(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_\infty(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_\infty(s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_\infty(s, -r) \\ &= \operatorname{Re} \varphi(r) \varphi(s) + \operatorname{Re} \varphi(r) \varphi(-s) + \operatorname{Re} \varphi(r) \varphi(s) + \operatorname{Re} \varphi(-r) \varphi(s) \\ &= u(r)u(s) - v(r)v(s) + \\ &\quad + u(r)u(-s) - v(r)v(-s) + \\ &\quad + u(r)u(s) - v(r)v(s) + \\ &\quad + u(-r)u(s) - v(-r)v(s) \\ &= u(r)u(s) - v(r)v(s) + \\ &\quad + u(r)u(s) + v(r)v(s) + \\ &\quad + u(r)u(s) - v(r)v(s) + \\ &\quad + u(r)u(s) + v(r)v(s) \\ &= 4u(r)u(s) \end{aligned} \tag{B.41}$$

Para o caso de $\Omega_{RI,n}(r, s)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \Lambda_{\infty}(-r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_{\infty}(r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_{\infty}(s, -r) + \operatorname{Im} \Lambda_{\infty}(s, r) \\
= & \operatorname{Im} \varphi(-r) \varphi(s) + \operatorname{Im} \varphi(r) \varphi(s) + \operatorname{Im} \varphi(-r) \varphi(s) + \operatorname{Im} \varphi(r) \varphi(s) \\
= & u(-r) v(s) + v(-r) u(s) + \\
& + u(r) v(s) + v(r) u(s) + \\
& + u(-r) v(s) + v(-r) u(s) + \\
& + u(r) v(s) + v(r) u(s) \\
= & u(r) v(s) - v(r) u(s) + \\
& + u(r) v(s) + v(r) u(s) + \\
& + u(r) v(s) - v(r) u(s) + \\
& + u(r) v(s) + v(r) u(s) \\
= & 4u(r) v(s)
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Para o caso de $\Omega_{II,n}(r, s)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \Lambda_{\infty}(r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_{\infty}(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_{\infty}(s, -r) - \operatorname{Re} \Lambda_{\infty}(s, r) \\
= & \operatorname{Re} \varphi(r) \varphi(-s) - \operatorname{Re} \varphi(r) \varphi(s) + \operatorname{Re} \varphi(-r) \varphi(s) - \operatorname{Re} \varphi(r) \varphi(s) \\
= & u(r) u(-s) - v(r) v(-s) - \\
& - u(r) u(s) + v(r) v(s) + \\
& + u(-r) u(s) - v(-r) v(s) - \\
& - u(r) u(s) + v(r) v(s) \\
= & u(r) u(s) + v(r) v(s) - \\
& - u(r) u(s) + v(r) v(s) + \\
& + u(r) u(s) + v(r) v(s) - \\
& - u(r) u(s) + v(r) v(s) \\
= & 4v(r) v(s)
\end{aligned} \tag{B.43}$$

Seja agora um $m > n_0$ suficientemente grande tal que $|\Lambda_m(r, s) - \varphi(r) \varphi(s)| < \varepsilon$. Neste

caso, para $\Omega_{RR,m}(r, s)$ podemos quebrar o somatório em (B.33) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR,m}(r, s) \\ = & \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) + \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - m \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ & + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{n_0-1} (m-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \} \\ & + \frac{1}{2m} \sum_{k=n_0}^{m-1} (m-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}. \end{aligned}$$

Vamos agora obter o elemento seguinte $\Omega_{RR,m+1}(r, s)$ da sequência:

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR,m+1}(r, s) \\ = & \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} \varphi(r-s) + \operatorname{Re} \varphi(r+s) \} - (m+1) \operatorname{Re} \varphi(r) \operatorname{Re} \varphi(s) + \\ & + \frac{1}{2(m+1)} \sum_{k=1}^{n_0-1} (m+1-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \} \\ & + \frac{1}{2(m+1)} \sum_{k=n_0}^m (m+1-k) \{ \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) \}. \end{aligned}$$

Chamemos

$$\Delta_k(r, s) = \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r).$$

Fazendo agora a diferença entre $\Omega_{RR,m+1}(r, s)$ e $\Omega_{RR,m}(r, s)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR,m+1}(r, s) - \Omega_{RR,m}(r, s) \\ = & -u(r)u(s) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \right) \Delta_1(r, s) + \left(\frac{m-1}{m+1} - \frac{m-2}{m} \right) \Delta_2(r, s) + \cdots + \right. \\ & + \left(\frac{m+2-n_0}{m+1} - \frac{m+1-n_0}{m} \right) \Delta_{n_0-1}(r, s) + \left(\frac{m+1-n_0}{m+1} - \frac{m-n_0}{m} \right) \Delta_{n_0}(r, s) + \cdots + \\ & \left. + \left(\frac{2}{m+1} - \frac{1}{m} \right) \Delta_{m-1}(r, s) + \frac{1}{m+1} \Delta_m(r, s) \right\} \\ = & -u(r)u(s) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m(m+1)} \Delta_1(r, s) + \frac{2}{m(m+1)} \Delta_2(r, s) + \cdots \right. \\ & + \frac{n_0-1}{m(m+1)} \Delta_{n_0-1}(r, s) + \frac{n_0}{m(m+1)} \Delta_{n_0}(r, s) + \cdots + \\ & \left. + \frac{m-1}{m(m+1)} \Delta_{m-1}(r, s) + \frac{m}{m(m+1)} \Delta_m(r, s) \right\}. \end{aligned}$$

Sejam

$$\Delta_{\max}(r, s) = \max \{ \Delta_1(r, s), \Delta_2(r, s), \dots, \Delta_{n_0}(r, s) \}$$

e

$$\Delta_{\min}(r, s) = \min \{ \Delta_1(r, s), \Delta_2(r, s), \dots, \Delta_{n_0}(r, s) \}.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR, m+1}(r, s) - \Omega_{RR, m}(r, s) \\ \leq & -u(r)u(s) + \frac{1}{2} \frac{(1 + 2 + \dots + n_0 - 1)}{m(m+1)} \Delta_{\max}(r, s) + \\ & + \frac{n_0}{m(m+1)} \Delta_{n_0}(r, s) + \dots + \frac{m}{m(m+1)} \Delta_m(r, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR, m+1}(r, s) - \Omega_{RR, m}(r, s) \\ \geq & -u(r)u(s) + \frac{1}{2} \frac{(1 + 2 + \dots + n_0 - 1)}{m(m+1)} \Delta_{\min}(r, s) + \\ & + \frac{n_0}{m(m+1)} \Delta_{n_0}(r, s) + \dots + \frac{m}{m(m+1)} \Delta_m(r, s). \end{aligned}$$

Como $|\Lambda_k(r, s) - \varphi(r)\varphi(s)| < \varepsilon$ para $k > n_0$, temos por (B.41) que $|\Delta_k(r, s) - 4u(r)u(s)| < 4\varepsilon$ para $k > n_0$. Assim

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR, m+1}(r, s) - \Omega_{RR, m}(r, s) \\ \leq & -u(r)u(s) + \frac{1}{4} \frac{n_0(n_0 - 1)}{m(m+1)} \Delta_{\max}(r, s) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{m(m+1)} + \dots + \frac{m}{m(m+1)} \right) 4(u(r)u(s) + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR, m+1}(r, s) - \Omega_{RR, m}(r, s) \\ \geq & -u(r)u(s) + \frac{1}{4} \frac{n_0(n_0 - 1)}{m(m+1)} \Delta_{\min}(r, s) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{m(m+1)} + \dots + \frac{m}{m(m+1)} \right) 4(u(r)u(s) - \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR, m+1}(r, s) - \Omega_{RR, m}(r, s) \\ \leq & -u(r)u(s) + \frac{1}{4} \frac{n_0(n_0 - 1)}{m(m+1)} \Delta_{\max}(r, s) + \\ & + \frac{m(m+1) - n_0(n_0 - 1)}{m(m+1)} (u(r)u(s) + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{RR, m+1}(r, s) - \Omega_{RR, m}(r, s) \\ \geq & -u(r)u(s) + \frac{1}{4} \frac{n_0(n_0 - 1)}{m(m+1)} \Delta_{\min}(r, s) + \\ & + \frac{m(m+1) - n_0(n_0 - 1)}{m(m+1)} (u(r)u(s) - \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_{RR,m+1}(r, s) - \Omega_{RR,m}(r, s) \\
\leq & -\frac{n_0(n_0-1)}{m(m+1)}u(r)u(s) + \frac{1}{4}\frac{n_0(n_0-1)}{m(m+1)}\Delta_{\max}(r, s) - \frac{n_0(n_0-1)}{m(m+1)}\varepsilon + \varepsilon \\
& \Omega_{RR,m+1}(r, s) - \Omega_{RR,m}(r, s) \\
\geq & -\frac{n_0(n_0-1)}{m(m+1)}u(r)u(s) + \frac{1}{4}\frac{n_0(n_0-1)}{m(m+1)}\Delta_{\min}(r, s) + \frac{n_0(n_0-1)}{m(m+1)}\varepsilon - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Note agora que quando $m \rightarrow \infty$, fixado n_0 , as três primeiras parcelas tendem a zero. Assim fixados $\varepsilon > 0$ e n_0 , é possível encontrar um m_0 tal que para todo $m > m_0$

$$|\Omega_{RR,m+1}(r, s) - \Omega_{RR,m}(r, s)| \leq \varepsilon.$$

Logo a sequência $\Omega_{RR,n}(r, s)$ é Cauchy e, portanto, convergente (Lima (2002)). Naturalmente o mesmo exercício poderia ser feito para $\Omega_{RI,n}(r, s)$, $\Omega_{IR,n}(r, s)$ e $\Omega_{II,n}(r, s)$, usando (B.42) a (B.43), e obtendo-se resultados análogos.

Apêndice C

Demonstrações dos Capítulos 4 e 5

Demonstração da proposição 4.1. O processo definido em (4.5) constitui um processo AR(1). A hipótese de $|\phi| < 1$ implica que a variável latente ψ_j é estacionária. Se denotarmos por B o operador *backward shift* podemos escrever o processo para ψ_j da seguinte forma:

$$(1 - \phi B) \psi_j = \delta + \sigma_\eta \eta_j$$

Assim podemos escrever ψ_j como

$$\begin{aligned} \psi_j &= (1 - \phi B)^{-1} (\delta + \sigma_\eta \eta_j) \\ &= (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \phi^3 B^3 + \cdots) (\delta + \sigma_\eta \eta_j) \\ &= \delta + \sigma_\eta \eta_j + \phi \delta + \phi \sigma_\eta \eta_{j-1} + \phi^2 \delta + \phi^2 \sigma_\eta \eta_{j-2} + \cdots \\ &= \left(\sum_{l=1}^{\infty} \phi^{l-1} \right) \delta + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{\infty} \phi^l \eta_{j-l} \\ &= \frac{\delta}{1 - \phi} + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{\infty} \phi^l \eta_{j-l}. \end{aligned}$$

Como os η_j são i.i.d. $N(0, 1)$, podemos calcular a média e a variância de ψ_j por

$$\begin{aligned} E[\psi_j] &= \frac{\delta}{1 - \phi} + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{\infty} \phi^l E[\eta_{j-l}] \\ &= \frac{\delta}{1 - \phi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[\psi_j] &= \sigma_\eta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{2l} Var[\eta_{j-l}] \\ &= \sigma_\eta^2 \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{2l} \\ &= \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}, \end{aligned}$$

em que a passagem da penúltima para a última linha decorre de $|\phi| < 1$. Como ψ_j é um somatório de v.a. normais independentes, então também possui distribuição normal com média e variância dadas acima. ■

Demonstração da proposição 4.2. Usando (4.13) e (4.15) e a hipótese de que $|\phi| < 1$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \varphi_\psi(t) &= E[\exp(it\psi_j)] = \\
 &= E\left\{\exp\left[it\frac{\delta}{1-\phi} + it\sigma_\eta \sum_{l=0}^{\infty} \phi^l \eta_{j-l}\right]\right\} \\
 &= \exp\left(\frac{it\delta}{1-\phi}\right) \prod_{l=0}^{\infty} E\left\{\exp\left[it\sigma_\eta \phi^l \eta_{j-l}\right]\right\} \\
 &= \exp\left(\frac{it\delta}{1-\phi}\right) \prod_{l=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_\eta^2 t^2}{2} \phi^{2l}\right) \\
 &= \exp\left(\frac{it\delta}{1-\phi}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_\eta^2 t^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{2l}\right) \\
 &= \exp\left(\frac{it\delta}{1-\phi} - \frac{\sigma_\eta^2 t^2}{2} \left(\frac{1}{1-\phi^2}\right)\right).
 \end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 4.3. Para facilitar a notação seja $a = E[\zeta]$, de onde temos $\xi = \zeta/a$. Queremos obter

$$F_\Xi(\xi) = \Pr(\Xi \leq \xi) = \Pr\left(\frac{\zeta}{a} \leq \xi\right) = \Pr(\zeta \leq a\xi) = F_\zeta(a\xi).$$

Derivando ambos os lados da equação acima em relação a ξ obtemos densidade de ξ :

$$f_\xi(\xi) = \frac{dF_\xi(\xi)}{d\xi} = \frac{dF_\zeta(a\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{d\xi} = f_\zeta(a\xi) a. \quad (C.1)$$

Para o caso da distribuição Weibull $a = \Gamma(1 + \frac{1}{\lambda})$. Substituindo f_ζ por (4.9) em (C.1) obtemos

$$f_\xi(\xi) = \begin{cases} \lambda (a\xi)^{\lambda-1} e^{-(a\xi)^\lambda} a, & \text{se } a\xi \geq 0 \\ 0, & \text{se } a\xi < 0 \end{cases},$$

que pode ser escrita

$$f_\xi(\xi) = \begin{cases} \lambda [\Gamma(1 + \frac{1}{\lambda})]^\lambda \xi^{\lambda-1} e^{-[\Gamma(1 + \frac{1}{\lambda})\xi]^\lambda}, & \text{se } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi < 0 \end{cases}.$$

Para o caso da distribuição gama $a = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)}$. Mas, uma das propriedades da função gama é que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Assim $a = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)}$ pode ser simplificado para $a = \lambda$. Substituindo f_ζ por (4.11) em (C.1) obtemos

$$f_\xi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} (\lambda\xi)^{\lambda-1} e^{-\lambda\xi} \lambda, & \text{se } \lambda\xi \geq 0 \\ 0, & \text{se } \lambda\xi < 0 \end{cases},$$

que pode ser escrita

$$f_\xi(\xi) = \begin{cases} \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \xi^{\lambda-1} e^{-\lambda\xi}, & \text{se } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{se } \xi < 0 \end{cases}.$$

■

Demonstração da proposição 4.4. Podemos obter o resultado facilmente se utilizarmos o resultado (C.1), com $a = 1/e^{\psi_j}$. Para o caso da distribuição Weibull obtemos

$$f(x_j|\psi_j) = \begin{cases} \lambda [\Gamma(1 + \frac{1}{\lambda})]^\lambda \left(\frac{x_j}{e^{\psi_j}}\right)^{\lambda-1} e^{-\left[\Gamma(1 + \frac{1}{\lambda}) \frac{x_j}{e^{\psi_j}}\right]^\lambda} \frac{1}{e^{\psi_j}}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}.$$

Para o caso da distribuição gama

$$f(x_j|\psi_j) = \begin{cases} \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{x_j}{e^{\psi_j}}\right)^{\lambda-1} e^{-\lambda \frac{x_j}{e^{\psi_j}}} \frac{1}{e^{\psi_j}}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}.$$

Caso $\lambda = 1$ em qualquer das distribuições acima, obtemos o caso da distribuição exponencial

$$f(x_j|\psi_j) = \begin{cases} e^{-x_j e^{-\psi_j}} e^{-\psi_j}, & \text{se } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{se } x_j < 0 \end{cases}.$$

■

Demonstração da proposição 4.5. Chamemos $a = \lambda$ e $c = \frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{e^{\psi_j}}$. Assim,

(a) **Exponencial:**

$$\begin{aligned} f(x) &= ae^{-ax} \quad x > 0 \\ F(x) &= \int_0^x ae^{-at} dt = -\frac{a}{a} e^{-at} \Big|_0^x = -e^{-ax} + 1 \\ F_{X_j|\Psi_j}(x_j) &= 1 - e^{-x_j e^{-\psi_j}} \end{aligned} \tag{C.2}$$

Podemos simular x_j dado ψ_j chamando $F_{X_j|\Psi_j}(x_j) = u$, $u \sim U([0, 1])$ e invertendo a eq. (C.2) acima:

$$\begin{aligned} \ln(1 - u) &= -e^{-\psi_j} x_j \\ x_j &= -\frac{\ln(1 - u)}{e^{-\psi_j}} \end{aligned} \tag{C.3}$$

(b) **Weibull:**

$$f(x) = ac^a x^{a-1} e^{-(cx)^a}$$

$$F(x) = \int_0^x ac^a t^{a-1} e^{-(ct)^a} dt = ac^a \int_0^x t^{a-1} e^{-c^a t^a} dt$$

Chamando $e^{-c^a t^a} = e^{-y} \Leftrightarrow -c^a t^a = -y \Rightarrow c^a a t^{a-1} dt = dy$ e substituindo na eq. acima:

$$F(x) = \int_0^{c^a x^a} e^{-y} dy = 1 - e^{-(cx)^a}$$

Para o nosso caso, $a = \lambda$ e $c = \frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{\exp(\psi_j)}$, de onde obtemos:

$$F_{X_j|\Psi_j}(x_j) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{\exp(\psi_j)} x_j \right]^\lambda \right\} \quad (\text{C.4})$$

Podemos simular x_j dado ψ_j invertendo a eq. acima:

$$\begin{aligned} [-\ln(1-u)]^{1/\lambda} &= \frac{\Gamma(1+\lambda^{-1})}{\exp(\psi_j)} x_j \\ x_j &= \frac{\exp(\psi_j) [-\ln(1-u)]^{1/\lambda}}{\Gamma(1+\lambda^{-1})} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

(c) **Gama:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \left(\frac{a}{c}\right)^a x^{a-1} e^{-\frac{a}{c}x} \\ F(x) &= \int_0^x \frac{1}{\Gamma(a)} \left(\frac{a}{c}\right)^a t^{a-1} e^{-\frac{a}{c}t} dt \end{aligned}$$

Chamando $y = \frac{a}{c}t \Rightarrow dy = \frac{a}{c}dt$ e substituindo acima:

$$F(x) = \int_0^{\frac{ax}{c}} \frac{1}{\Gamma(a)} \left(\frac{a}{c}\right)^{a-1} \left(\frac{cy}{a}\right)^{a-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\frac{ax}{c}} y^{a-1} e^{-y} dy$$

A integral acima é a *função gama incompleta* $\Gamma_{ax/c}(a)$ ¹. Assim, podemos escrever:

$$F_{X_j|\Psi_j}(x_j) = \frac{\Gamma_{ax_j/c}(a)}{\Gamma(a)}$$

■

¹Ver por exemplo Abramowitz e Stegun (1972).

Demonstração da proposição 4.6. Note inicialmente que a função inversa de $y = \ln x$, $x = e^y$, é monótona crescente; assim temos:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[\ln X \leq y] = \Pr[X \leq e^y] = F_X(e^y).$$

Derivando a eq. acima em relação a y obtemos

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(e^y)}{dx} \frac{dx(e^y)}{dy} = f_X(e^y) e^y.$$

Aplicando este resultado nas equações (4.24) a (4.26) obtemos:

- **Exponencial:**

$$\begin{aligned} p(y_j | \psi_j) &= e^{-e^{y_j}} e^{-\psi_j} e^{y_j} \\ &= e^{y_j - \psi_j - e^{y_j}}. \end{aligned}$$

- **Weibull:**

$$\begin{aligned} p(y_j | \psi_j) &= \lambda \left(\frac{\Gamma(1 + \lambda^{-1})}{e^{\psi_j}} \right)^\lambda e^{(\lambda-1)y_j} \left[\frac{\Gamma(1 + \lambda^{-1})}{e^{\psi_j}} e^{y_j} \right]^\lambda e^{y_j} \\ &= \lambda [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda(y_j - \psi_j) - [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda(y_j - \psi_j)}}. \end{aligned}$$

- **Gama:**

$$\begin{aligned} p(y_j | \psi_j) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{e^{\psi_j}} \right)^\lambda e^{(\lambda-1)y_j} e^{-\frac{\lambda}{e^{\psi_j}} e^{y_j}} e^{y_j} \\ &= \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{\lambda(y_j - \psi_j) - \lambda e^{y_j - \psi_j}}. \end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 4.8. Calculando a função característica para cada distribuição obtemos:

- **Log-exponencial:**

$$\varphi_\varepsilon(t) = E[e^{it\varepsilon}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{x-e^x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x(it+1)} e^{-e^x} dx$$

Chamando $y = e^x$, temos que $dy = e^x dx$, e substituindo na eq. acima obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x(it+1)} e^{-e^x} dx = \int_0^{\infty} y^{it+1} e^{-y} dy$$

A integral acima é basicamente a função *gamma* com argumento complexo:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \Gamma(1 + it)$$

• **Log-Weibull:**

$$\varphi_\varepsilon(t) = E[e^{it\varepsilon}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lambda [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda x - [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda x}} dx$$

Chamando $e^y = [\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda e^{\lambda x} \Leftrightarrow y = \lambda \ln [\Gamma(1 + \lambda^{-1})] + \lambda x \Rightarrow dy = \lambda dx$. Substituindo na eq. acima obtemos:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^y}{[\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^\lambda} \right)^{\frac{it}{\lambda}} e^y e^{-e^y} dy = \frac{1}{[\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^{it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y(\frac{it}{\lambda} + 1) - e^y} dy$$

Utilizando a mesma transformação que no caso anterior ($z = e^y$) obtemos:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma(1 + \frac{it}{\lambda})}{[\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^{it}}$$

• **Log-gama:**

$$\varphi_\varepsilon(t) = E[e^{it\varepsilon}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{\lambda x - \lambda e^x} dx = \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x(it + \lambda) - \lambda e^x} dx$$

Chamando $\lambda e^x = e^y \Leftrightarrow dx = dy$ temos que:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^y}{\lambda} \right)^{it + \lambda} e^{-e^y} dy = \frac{1}{\lambda^{it} \Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y(it + \lambda) - e^y} dy$$

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma(\lambda + it)}{\lambda^{it} \Gamma(\lambda)}$$

■

Demonstração da proposição 4.9. Para calcular a função geratriz de cumulantes basta calcular o $\ln$ da função característica.

• **Log-exponencial:**

$$G_\varepsilon(t) = \ln \Gamma(1 + it).$$

Derivando em relação a t obtemos

$$G'_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma'(1 + it)}{\Gamma(1 + it)} i = i\Psi(1 + it),$$

$$G_{\varepsilon}^{(r)}(t) = i^r \Psi^{(r-1)}(1 + it), \quad r > 1.$$

• **Log-Weibull:**

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon}(t) &= \ln \left\{ \frac{\Gamma(1 + \frac{it}{\lambda})}{[\Gamma(1 + \lambda^{-1})]^{it}} \right\} \\ &= \ln \Gamma(1 + it\lambda^{-1}) - it \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Derivando em relação a t obtemos:

$$\begin{aligned} G'_{\varepsilon}(t) &= \frac{\Gamma'(1 + it\lambda^{-1})}{\Gamma(1 + it\lambda^{-1})} i\lambda^{-1} - i \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}) \\ &= \frac{i}{\lambda} \Psi(1 + it\lambda^{-1}) - i \ln \Gamma(1 + \lambda^{-1}) \\ G_{\varepsilon}^{(r)}(t) &= \left(\frac{i}{\lambda}\right)^r \Psi^{(r-1)}(1 + it\lambda^{-1}), \quad r > 1. \end{aligned}$$

• **Log-gama:**

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon}(t) &= \ln \left\{ \frac{\Gamma(\lambda + it)}{\lambda^{it} \Gamma(\lambda)} \right\} \\ &= \ln \Gamma(\lambda + it) - it \ln \lambda - \ln \Gamma(\lambda). \end{aligned}$$

Derivando em relação a t obtemos:

$$\begin{aligned} G'_{\varepsilon}(t) &= \frac{\Gamma'(\lambda + it)}{\Gamma(\lambda + it)} i - i \ln \lambda \\ &= i \Psi(\lambda + it) - i \ln \lambda. \\ G_{\varepsilon}^{(r)}(t) &= i^r \Psi^{(r-1)}(\lambda + it), \quad r > 1. \end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 4.12. Escrevendo recursivamente ψ_{j+k} em função de ψ_j obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_{j+1} &= \delta + \phi\psi_j + \sigma_{\eta}\eta_{j+1} \\ \psi_{j+2} &= \delta + \phi\psi_{j+1} + \sigma_{\eta}\eta_{j+2} \\ &= \delta + \phi(\delta + \phi\psi_j + \sigma_{\eta}\eta_{j+1}) + \sigma_{\eta}\eta_{j+2} \\ &= \delta + \phi\delta + \phi^2\psi_j + \phi\sigma_{\eta}\eta_{j+1} + \sigma_{\eta}\eta_{j+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{j+3} &= \delta + \phi\psi_{j+2} + \sigma_\eta\eta_{j+3} \\
&= \delta + \phi(\delta + \phi\delta + \phi^2\psi_j + \phi\sigma_\eta\eta_{j+1} + \sigma_\eta\eta_{j+2}) + \sigma_\eta\eta_{j+3} \\
&= \delta + \phi\delta + \phi^2\delta + \phi^3\psi_j + \phi^2\sigma_\eta\eta_{j+1} + \phi\sigma_\eta\eta_{j+2} + \sigma_\eta\eta_{j+3} \\
&\vdots \\
\psi_{j+k} &= \frac{1-\phi^k}{1-\phi}\delta + \phi^k\psi_j + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{k-1} \phi^l\eta_{j+k-l}, \quad j = 1, \dots, T-k.
\end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 4.13. Utilizando (4.32) temos que $y_j = \psi_j + \varepsilon_j$. Podemos então escrever a função característica do bloco como:

$$\begin{aligned}
\varphi_z(r) &= E \{ \exp(ir_1 y_j + ir_2 y_{j+1} + \dots + ir_{p+1} y_{j+p}) \} = \\
&= E \{ \exp(ir_1 \psi_j + ir_1 \varepsilon_j + ir_2 \psi_{j+1} + ir_2 \varepsilon_{j+1} + \dots + ir_{p+1} \psi_{j+p} + ir_{p+1} \varepsilon_{j+p}) \}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Como os ε_j são independentemente e identicamente distribuídos podemos escrever (C.6) como:

$$\begin{aligned}
\varphi_z(r) &= E \{ \exp(ir_1 \psi_j + ir_2 \psi_{j+1} + \dots + ir_{p+1} \psi_{j+p}) \} \prod_{\zeta=1}^{p+1} E \{ \exp(ir_\zeta \varepsilon_{j+\zeta-1}) \} = \\
&= E \{ \exp(ir_1 \psi_j + ir_2 \psi_{j+1} + \dots + ir_{p+1} \psi_{j+p}) \} \prod_{\zeta=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_\zeta).
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Antes de prosseguirmos note que utilizando (4.12) podemos escrever $r_1 \psi_j + \dots + r_{p+1} \psi_{j+p}$ como:

$$\begin{aligned}
r_1 \psi_j + \dots + r_{p+1} \psi_{j+p} &= r_1 \psi_j + \\
&\quad + r_2 \{ \delta + \phi\psi_j + \sigma_\eta\eta_{j+1} \} + \\
&\quad + r_3 \left\{ \frac{1-\phi^2}{1-\phi}\delta + \phi^2\psi_j + \sigma_\eta [\phi\eta_{j+1} + \eta_{j+2}] \right\} + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + r_{p+1} \left\{ \frac{1-\phi^p}{1-\phi}\delta + \phi^p\psi_j + \sigma_\eta \sum_{l=0}^{p-1} \phi^l \eta_{j+p-l} \right\}.
\end{aligned}$$

$$r_1 \psi_j + \dots + r_{p+1} \psi_{j+p} = \frac{\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=2}^{p+1} (1-\phi^{\zeta-1}) r_\zeta + \psi_j \sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta + \sigma_\eta \sum_{l=2}^{p+1} \eta_{j+l-1} \sum_{\zeta=l}^{p+1} \phi^{\zeta-l} r_\zeta. \tag{C.8}$$

Substituindo agora (C.8) em (C.7), e lembrando que os η_j são identicamente e independen-

temente distribuídos temos:

$$\begin{aligned}\varphi_z(r) &= E \left\{ \exp \left(\frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=2}^{p+1} (1-\phi^{\zeta-1}) r_\zeta + i\psi_j \sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta + i\sigma_\eta \sum_{l=2}^{p+1} \eta_{j+l-1} \sum_{\zeta=l}^{p+1} \phi^{\zeta-l} r_\zeta \right) \right\} \\ &\quad \cdot \prod_{\zeta=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_\zeta), \\ \varphi_z(r) &= \exp \left(\frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=2}^{p+1} (1-\phi^{\zeta-1}) r_\zeta \right) \varphi_\psi \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right) \\ &\quad \cdot \prod_{j=2}^{p+1} \varphi_\eta \left(\sigma_\eta \sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right) \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_j).\end{aligned}$$

Substituindo (4.16) e (4.15) na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}\varphi_z(r) &= \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=2}^{p+1} (1-\phi^{\zeta-1}) r_\zeta + \frac{i\delta}{1-\phi} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right) - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_j), \\ \varphi_z(r) &= \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_j).\end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 5.2. Para o caso específico do problema de duração condicional estocástica podemos escrever a função $\Lambda_k(r, s)$, (B.26), como:

$$\begin{aligned}\Lambda_k(r, s) &= E \left[\exp(i r' Z_j + i s' Z_{j+k}) \right] = \\ &= E \left[\exp \{ i (r_1 Y_j + \dots + r_{p+1} Y_{j+p} + s_1 Y_{j+k} + \dots + s_{p+1} Y_{j+p+k}) \} \right] = \\ &= E \left[\exp \{ i (r_1 \psi_j + \dots + r_{p+1} \psi_{j+p} + s_1 \psi_{j+k} + \dots + s_{p+1} \psi_{j+p+k}) \} + \right. \\ &\quad \left. + \exp \{ i (r_1 \varepsilon_j + \dots + r_{p+1} \varepsilon_{j+p} + s_1 \varepsilon_{j+k} + \dots + s_{p+1} \varepsilon_{j+p+k}) \} \right] \quad (\text{C.9})\end{aligned}$$

Se chamarmos de $w(r, s)$ o vetor $p + k + 1 \times 1$ dado por

$$w(r, s) = \begin{cases} (r_1, \dots, r_k, r_{k+1} + s_1, \dots, r_{p+1} + s_{p-k+1}, s_{p-k+2}, \dots, s_{p+1})' & \text{se } k \leq p \\ (r_1, \dots, r_{p+1}, 0, \dots, 0, s_1, \dots, s_{p+1})' & \text{se } k > p \end{cases}$$

e de $Z_j^* = (Y_j, \dots, Y_{j+p+k})'$ poderemos escrever (C.9) como

$$\Lambda_k(r, s) = E [\exp(iw'Z_j^*)], \quad (\text{C.10})$$

que é simplesmente a função poli-característica para vetores de tamanho $p + k + 1$, calculada em $w \in \mathbb{R}^{p+k+1}$. Assim, utilizando (4.87) podemos escrever (C.10) como:

$$\begin{aligned} \Lambda_k(r, s) = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+k+1} w_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+k+1} \phi^{\zeta-1} w_\zeta \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+k+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+k+1} \phi^{\zeta-j} w_\zeta \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+k+1} \varphi_\varepsilon(w_j) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

■

Demonstração da proposição 5.4. Vamos agora mostrar que a seqüência $W_n = \Omega_n^{-1}$ é eficiente no sentido GMM. Como por hipótese $\Omega_n \xrightarrow{p} \Omega_0$, temos que $W_0 = \Omega_0^{-1}$. Substituindo em (E.9), ver apêndice E, obtemos

$$A(\theta_0) = 4 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0}. \quad (\text{C.12})$$

Substituindo agora (C.12) em (E.12) obtemos

$$\begin{aligned} B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1} &= \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right)^{-1} \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right) \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Logo, o estimador DECF com peso $W_n = \Omega_n^{-1}$ tem a seguinte distribuição assintótica

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N \left(0, \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Omega_0^{-1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right)^{-1} \right), \quad (\text{C.14})$$

que coincide com o resultado obtido por (Knight e Satchell (1997)). Este estimador é eficiente (no sentido GMM), i.e., é aquele de menor variância para o estimador. Para mostrar isto, vamos utilizar o procedimento descrito em Frangakis (2005). Inicialmente façamos a seguinte definição:

Definição C.1 *Sejam A e B matrizes de tamanho $k \times k$. Dizemos que $A \geq B$ se e somente se a matriz $A - B$ for positiva semidefinida. Isto é, para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^k$, $x'(A - B)x \geq 0$.*

Com a finalidade de deixar a notação mais leve vamos chamar de G a matriz $k \times 2q$ dada por $G = \left. \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right|_{\theta_0}$, de W a matriz $2q \times 2q$ dada por $W = W_0$ e de Ω a matriz $2q \times 2q$ dada por $\Omega = \Omega_0$. Para mostrar que o estimador DECF com peso $W_n = \Omega_n^{-1}$ é eficiente (isto é, de mínima variância), queremos mostrar que

$$(G'WG)^{-1} G'W\Omega WG (G'WG)^{-1} \geq (G'\Omega^{-1}G)^{-1}. \quad (\text{C.15})$$

Vamos considerar somente o caso que a matriz Ω é de posto completo $2q$, de modo a possuir inversa. Seja Z uma variável aleatória normal $2q$ -variada com média zero e matriz de covariância Ω ,

$$Z \sim N_{2q}(0, \Omega).$$

Note que $(G'WG)^{-1} G'WZ$ tem a seguinte distribuição

$$(G'WG)^{-1} G'WZ \sim N_k\left(0, (G'WG)^{-1} G'W\Omega WG (G'WG)^{-1}\right),$$

que é a distribuição do estimador DECF. Note agora que podemos escrever

$$\begin{aligned} (G'WG)^{-1} G'WZ &= (G'\Omega^{-1}G)^{-1} G'\Omega^{-1}Z + \\ &\quad \left\{ (G'WG)^{-1} G'W - (G'\Omega^{-1}G)^{-1} G'\Omega^{-1} \right\} Z. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Se chamarmos $A_1 = (G'WG)^{-1} G'W$ e $A_0 = (G'\Omega^{-1}G)^{-1} G'\Omega^{-1}$ então podemos escrever (C.16) como

$$A_1Z = A_0Z + (A_1 - A_0)Z. \quad (\text{C.17})$$

Podemos calcular a variância de A_1Z por

$$\begin{aligned} \text{var}(A_1Z) &= \text{var}[A_0Z] + \text{var}[(A_1 - A_0)Z] + A_0 \text{var}[Z] (A_1 - A_0)' + (A_1 - A_0) \text{var}[Z] A_0'. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Mas

$$\begin{aligned} \text{var}[A_0Z] &= A_0 \Omega A_0' \\ &= (G'\Omega^{-1}G)^{-1} G'\Omega G (G'\Omega^{-1}G)^{-1} \\ &= (G'\Omega^{-1}G)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\text{var}[(A_1 - A_0)Z] = (A_1 - A_0) \Omega (A_1 - A_0)' \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned}
A_0 \text{var}[Z] (A_1 - A_0)' &= A_0 \Omega (A_1 - A_0)' \\
&= \left\{ (G' \Omega^{-1} G)^{-1} G' \Omega^{-1} \right\} \Omega \left\{ (G' W G)^{-1} G' W - (G' \Omega^{-1} G)^{-1} G' \Omega^{-1} \right\}' \\
&= (G' \Omega^{-1} G)^{-1} G' \left\{ (G' W G)^{-1} G' W - (G' \Omega^{-1} G)^{-1} G' \Omega^{-1} \right\}' \\
&= (G' \Omega^{-1} G)^{-1} G' W G (G' W G)^{-1} - (G' \Omega^{-1} G)^{-1} G' \Omega^{-1} G (G' \Omega^{-1} G)^{-1} \\
&= (G' \Omega^{-1} G)^{-1} - (G' \Omega^{-1} G)^{-1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Como $(A_1 - A_0) \text{var}[Z] A_0' = [A_0 \text{var}[Z] (A_1 - A_0)']' = 0$, se substituirmos (C.21) em (C.18) obtemos:

$$A_1 \Omega A_1' = A_0 \Omega A_0' + (A_1 - A_0) \Omega (A_1 - A_0)'.$$

Seja agora $x \in \mathbb{R}^k$. Se pré-multiplicarmos ambos os lados da equação acima por x' e pós-multiplicarmos por x obteremos

$$x' A_1 \Omega A_1' x = x' A_0 \Omega A_0' x + x' (A_1 - A_0) \Omega (A_1 - A_0)' x.$$

Chamando agora $x_1 = A_1' x$, $x_0 = A_0' x$ e $x_{10} = (A_1 - A_0)' x$ podemos reescrever a equação acima como

$$x_1' \Omega x_1 = x_0' \Omega x_0 + x_{10}' \Omega x_{10}.$$

Lembrando que Ω é positiva definida, temos que $x_1' \Omega x_1 \geq 0$, $x_0' \Omega x_0 \geq 0$ e $x_{10}' \Omega x_{10} \geq 0$. Logo, $x_1' \Omega x_1 \geq x_0' \Omega x_0$, ou ainda, $x' A_1 \Omega A_1' x \geq x' A_0 \Omega A_0' x$, o que implica em $A_1 \Omega A_1' \geq A_0 \Omega A_0'$, ou

$$(G' W G)^{-1} G' W \Omega W G (G' W G)^{-1} \geq (G' \Omega^{-1} G)^{-1},$$

que era o que queríamos demonstrar. ■

Demonstração da proposição 5.5. As derivadas da função característica dos log-erros, $\varphi_\varepsilon(t)$, em relação aos parâmetros do modelo SCD são dadas por:

- **Exponencial:**

$$\frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dr} = \varphi'_\varepsilon(t) = i\Gamma'(1+it) = i\Gamma(1+it)\Psi(1+it)$$

$$\frac{\partial\varphi_\varepsilon(t)}{\partial\lambda} = 0$$

• **Weibull:**

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dt} &= \varphi'_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma'(1+it\lambda^{-1})i\lambda^{-1}}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} + \frac{\Gamma(1+it\lambda^{-1})(-i)\ln\Gamma(1+\lambda^{-1})}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} \\
&= i \frac{[\lambda^{-1}\Gamma'(1+it\lambda^{-1}) - \Gamma(1+it\lambda^{-1})\ln\Gamma(1+\lambda^{-1})]}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} \\
&= i \frac{\Gamma(1+it\lambda^{-1})}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma'(1+it\lambda^{-1})}{\Gamma(1+it\lambda^{-1})} - \ln\Gamma(1+\lambda^{-1}) \right\} \\
\varphi'_\varepsilon(t) &= i \frac{\Gamma(1+it\lambda^{-1})}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} \left\{ \frac{1}{\lambda} \Psi(1+it\lambda^{-1}) - \ln\Gamma(1+\lambda^{-1}) \right\} \\
\frac{\partial\varphi_\varepsilon(t)}{\partial\lambda} &= \frac{\Gamma'(1+it\lambda^{-1})it(-1)\lambda^{-2}}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} + \frac{\Gamma(1+it\lambda^{-1})(-it)\Gamma'(1+\lambda^{-1})(-\lambda^{-2})}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it+1}} = \\
&= \frac{it\Gamma(1+it\lambda^{-1})}{\lambda^2 [\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} \left\{ -\frac{\Gamma'(1+it\lambda^{-1})}{\Gamma(1+it\lambda^{-1})} + \frac{\Gamma'(1+\lambda^{-1})}{\Gamma(1+\lambda^{-1})} \right\} \\
\frac{\partial\varphi_\varepsilon(t)}{\partial\lambda} &= \frac{it}{\lambda^2} \frac{\Gamma(1+it\lambda^{-1})}{[\Gamma(1+\lambda^{-1})]^{it}} \{-\Psi(1+it\lambda^{-1}) + \Psi(1+\lambda^{-1})\}
\end{aligned}$$

• **Gama:**

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dt} &= \varphi'_\varepsilon(t) = \frac{\Gamma'(\lambda+it)i}{\lambda^{it}\Gamma(\lambda)} + \frac{\Gamma(\lambda+it)(-i)\ln\lambda}{\lambda^{it}\Gamma(\lambda)} \\
&= i \frac{[\Gamma'(\lambda+it) - \Gamma(\lambda+it)\ln\lambda]}{\lambda^{it}\Gamma(\lambda)} \\
&= \frac{i}{\lambda^{it}} \frac{\Gamma(\lambda+it)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \frac{\Gamma'(\lambda+it)}{\Gamma(\lambda+it)} - \ln\lambda \right\} \\
\varphi'_\varepsilon(t) &= \frac{i}{\lambda^{it}} \frac{\Gamma(\lambda+it)}{\Gamma(\lambda)} \{\Psi(\lambda+it) - \ln\lambda\} \\
\frac{\partial\varphi_\varepsilon(t)}{\partial\lambda} &= \frac{\Gamma'(\lambda+it)}{\lambda^{it}\Gamma(\lambda)} + \frac{\Gamma(\lambda+it)(-it)}{\lambda^{it+1}\Gamma(\lambda)} + \frac{\Gamma(\lambda+it)(-1)\Gamma'(\lambda)}{\lambda^{it}[\Gamma(\lambda)]^2} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+it)}{\lambda^{it}\Gamma(\lambda)} \left\{ \frac{\Gamma'(\lambda+it)}{\Gamma(\lambda+it)} - \frac{it}{\lambda} - \frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \right\} \\
\frac{\partial\varphi_\varepsilon(t)}{\partial\lambda} &= \frac{1}{\lambda^{it}} \frac{\Gamma(\lambda+it)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \Psi(\lambda+it) - \frac{it}{\lambda} - \Psi(\lambda) \right\}
\end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 5.6. As derivadas da função poli-característica, $\varphi_z(r)$, em

relação aos parâmetros do modelo SCD são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \delta} = & \left(\frac{i}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_{\zeta} \right) \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_{\zeta} - \frac{\sigma_{\eta}^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_{\zeta} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_{\eta}^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_{\zeta} \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_{\varepsilon}(r_j) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \delta} = \varphi_z(r) \left(\frac{i}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_{\zeta} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \phi} = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_{\zeta} - \frac{\sigma_{\eta}^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_{\zeta} \right)^2 - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_{\eta}^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_{\zeta} \right)^2 \right\} \\ & \cdot \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_{\varepsilon}(r_j) \cdot \left\{ \frac{i\delta}{(1-\phi)^2} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_{\zeta} - \frac{\sigma_{\eta}^2 \phi}{(1-\phi^2)^2} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_{\zeta} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{\sigma_{\eta}^2}{(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_{\zeta} \right) \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} (\zeta-1) \phi^{\zeta-2} r_{\zeta} \right) - \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \sigma_{\eta}^2 \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_{\zeta} \right) \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} (\zeta-j) \phi^{\zeta-j-1} r_{\zeta} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \phi} = & \varphi_z(r) \left\{ \frac{i\delta}{(1-\phi)^2} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_{\zeta} - \frac{\sigma_{\eta}^2 \phi}{(1-\phi^2)^2} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_{\zeta} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{\sigma_{\eta}^2}{(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_{\zeta} \right) \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} (\zeta-1) \phi^{\zeta-2} r_{\zeta} \right) - \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \sigma_{\eta}^2 \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_{\zeta} \right) \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} (\zeta-j) \phi^{\zeta-j-1} r_{\zeta} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \sigma_\eta} = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \prod_{j=1}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_j) \cdot \\ & \cdot \left\{ -\frac{2\sigma_\eta}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{2\sigma_\eta}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \sigma_\eta} = \varphi_z(r) \left\{ -\frac{\sigma_\eta}{(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \sum_{j=2}^{p+1} \sigma_\eta \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \lambda} = & \exp \left\{ \frac{i\delta}{1-\phi} \sum_{\zeta=1}^{p+1} r_\zeta - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \left(\sum_{\zeta=1}^{p+1} \phi^{\zeta-1} r_\zeta \right)^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{\sigma_\eta^2}{2} \left(\sum_{\zeta=j}^{p+1} \phi^{\zeta-j} r_\zeta \right)^2 \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \frac{\partial \varphi_\varepsilon(r_j)}{\partial \lambda} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+1} \varphi_\varepsilon(r_k) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_z(r)}{\partial \lambda} = \varphi_z(r) \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{\varphi_\varepsilon(r_j)} \frac{\partial \varphi_\varepsilon(r_j)}{\partial \lambda}$$

■

Apêndice D

Matriz de covariância assintótica do estimador CECF

Neste apêndice vamos obter a matriz de covariância assintótica do estimador CECF. Como o estimador CECF pertence à classe dos estimadores extremos podemos, a princípio, tentar aplicar o teorema 4.1.3 de Amemiya (1985) apresentado no apêndice A. A fim de deixar a notação um pouco mais leve vamos usar as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}u_n(r) &= \operatorname{Re} \varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r' Z_j), \\v_n(r) &= \operatorname{Im} \varphi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(r' Z_j).\end{aligned}$$

Lembremos, também, que a função característica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\varphi_z(r) &= E[\exp(ir' Z_j)] = \\&= E[\cos(r' Z_j) + i \sin(r' Z_j)] = \\&= \operatorname{Re} \varphi_z(r) + i \operatorname{Im} \varphi_z(r) \\&= u(r; \theta) + i v(r; \theta),\end{aligned}\tag{D.1}$$

em que explicitamos a dependência das funções u e v do vetor de parâmetros θ :

$$u(r; \theta) = \operatorname{Re} \varphi_z(r) = E[\cos(r' Z_j)],\tag{D.2}$$

$$v(r; \theta) = \operatorname{Im} \varphi_z(r) = E[\sin(r' Z_j)].\tag{D.3}$$

Como o estimador CECF é obtido a partir da minimização da função de distância Q_n , precisamos obter a primeira e a segunda derivadas em relação ao vetor de parâmetros θ , a

fim de aplicarmos o citado teorema de Amemiya (1985). Assim vamos escrever Q_n como

$$\begin{aligned}
Q_n(\theta) &= \int |\varphi_n(r) - \varphi(r; \theta)|^2 dG(r) \\
&= \int |u_n(r) + iv_n(r) - u(r; \theta) - iv(r; \theta)|^2 dG(r) \\
&= \int |(u_n(r) - u(r; \theta)) + i(v_n(r) - v(r; \theta))|^2 dG(r) \\
&= \int [(u_n(r) - u(r; \theta)) + i(v_n(r) - v(r; \theta))] \overline{[(u_n(r) - u(r; \theta)) + i(v_n(r) - v(r; \theta))]} dG(r) \\
&= \int [(u_n(r) - u(r; \theta)) + i(v_n(r) - v(r; \theta))] [(u_n(r) - u(r; \theta)) - i(v_n(r) - v(r; \theta))] dG(r) \\
&= \int [(u_n(r) - u(r; \theta))^2 + (v_n(r) - v(r; \theta))^2] dG(r). \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Assumindo as condições usuais de regularidade para que possamos derivar sob o sinal de integração e derivando (D.4) em relação a θ obtemos

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} = -2 \int \left\{ (u_n(r) - u(r; \theta)) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} + (v_n(r) - v(r; \theta)) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \right\} dG(r) \tag{D.5}$$

Como $E[u_n(r)] = u(r; \theta)$ e $E[v_n(r)] = v(r; \theta)$ temos que $E\left[\frac{\partial Q_n}{\partial \theta}\right] = 0$. Agora, derivando (D.5) em relação a θ obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} &= -2 \int \left\{ (-1) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta'} + (u_n(r) - u(r; \theta)) \frac{\partial^2 u(r; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} + \right. \\
&\quad \left. + (-1) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta'} + (v_n(r) - v(r; \theta)) \frac{\partial^2 v(r; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\} dG(r) \\
&= 2 \int \left\{ \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta'} + \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r) - \\
&\quad -2 \int \left\{ (u_n(r) - u(r; \theta)) \frac{\partial^2 u(r; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} + (v_n(r) - v(r; \theta)) \frac{\partial^2 v(r; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\} dG(r).
\end{aligned}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{1}{n} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'}\right] &= \frac{1}{n} E\left[\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'}\right] \\
&= \frac{2}{n} \int \left\{ \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta'} + \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r).
\end{aligned}$$

Se $\int \left\{ \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta'} + \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r) < \infty$, temos que

$$\tilde{B}(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{n} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta_0}\right] = 0,$$

i.e., $\tilde{B}(\theta_0)$ é uma matriz singular, e, portanto, a condição (2) do teorema 4.1.3 de Amemiya

(1985) não está satisfeita. Para resolver esta dificuldade vamos modificar a equação (A.4) na demonstração do referido teorema, da seguinte maneira:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = - \left[\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta^*} \right]^{-1} \left(\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \right). \quad (\text{D.6})$$

Isto é, vamos admitir que $(\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta')_{\theta_n^*}$ convirja em probabilidade para uma matriz não singular $B(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[(\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta')_{\theta_0} \right]$ para toda seqüência θ_n^* tal que $\theta_n^* \xrightarrow{a.s.} \theta_0$ e que $n^{1/2} (\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0))$, sendo $A(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[n (\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0} \cdot (\partial Q_n / \partial \theta')_{\theta_0} \right]$, obtendo, assim, o mesmo resultado que o teorema 4.1.3 de Amemiya (1985).

Antes de prosseguirmos vamos reescrever (D.5) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} &= -2 \int \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(r' Z_j) - u(r; \theta) \right) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin(r' Z_j) - v(r; \theta) \right) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \right\} dG(r) \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \int \left\{ (\cos(r' Z_j) - u(r; \theta)) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} + (\sin(r' Z_j) - v(r; \theta)) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \right\} dG(r) \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K_j(\theta), \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

em que

$$K_j(\theta) = \int \left\{ (\cos(r' Z_j) - \text{Re } \varphi(r; \theta)) \frac{\partial \text{Re } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} + (\sin(r' Z_j) - \text{Im } \varphi(r; \theta)) \frac{\partial \text{Im } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \right\} dG(r). \quad (\text{D.8})$$

Vamos agora mostrar que

$$\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0)).$$

Lembrando que $E[(\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0}] = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
 \text{var} \left[\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] &= n E \left[\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta'} \right] \\
 &= n E \left[\left(-\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K_j(\theta) \right) \left(-\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n K_k(\theta)' \right) \right] \\
 &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_j(\theta) K_k(\theta)' \right] \\
 &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n K_j(\theta) K_j(\theta)' + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) K_1(\theta) K_{1+k}(\theta)' + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) K_{1+k}(\theta) K_1(\theta)' \right] \\
 &= 4 \left\{ E[K_1(\theta) K_1(\theta)'] + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k) (E[K_1(\theta) K_{1+k}(\theta)'] + E[K_{1+k}(\theta) K_1(\theta)']) \right\}.
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

Relembremos que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} &= \sqrt{n} \left[-\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K_j(\theta_0) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[-2 \sum_{j=1}^n K_j(\theta_0) \right].
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Note que (D.10) é uma seqüência de somas de variáveis dependentes (os K_j), limitadas (já que são integrais de senos e cossenos). Se assumirmos a condição de α -mixing para a seqüência $\{Z_j\}$, poderemos aplicar o teorema 18.5.4 de Ibragimov e Linnik (1971), obtendo $A(\theta_0) < \infty$, em que

$$A(\theta_0) = 4 \left\{ E[K_1(\theta_0) K_1(\theta_0)'] + \sum_{k=1}^{\infty} (E[K_1(\theta_0) K_{1+k}(\theta_0)'] + E[K_{1+k}(\theta_0) K_1(\theta_0)']) \right\}, \tag{D.11}$$

e se $A(\theta_0) \neq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[-2 \sum_{j=1}^n K_j(\theta_0) \right] = \sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0)).$$

Finalmente, se chamarmos

$$\begin{aligned}
 B(\theta_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right] \\
 &= 2 \int \left\{ \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta'} + \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r),
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

e usando (D.6) obtemos a distribuição limite do estimador CECF $\hat{\theta}_n$ dada por

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \xrightarrow{d} N \left(0, B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1} \right).$$

Vamos agora obter uma expressão mais explícita para $A(\theta_0)$ dada em (D.11). Substituindo (D.8) em (D.9) obtemos

$$\begin{aligned} \text{var} \left[\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] &= \\ &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_j(\theta) K_k(\theta)' \right] \\ &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int \left\{ (\cos(r'Z_j) - u(r; \theta)) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} + (\sin(r'Z_j) - v(r; \theta)) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \right\} dG(r) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \int \left\{ (\cos(s'Z_j) - u(s; \theta)) \frac{\partial u(s; \theta)}{\partial \theta'} + (\sin(s'Z_j) - v(s; \theta)) \frac{\partial v(s; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(s) \right] \\ &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left\{ \int \int (\cos(r'Z_j) - u(r; \theta)) (\cos(s'Z_k) - u(s; \theta)) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(s; \theta)}{\partial \theta'} dG(r) dG(s) + \right. \right. \\ &\quad + \int \int (\cos(r'Z_j) - u(r; \theta)) (\sin(s'Z_k) - v(s; \theta)) \frac{\partial u(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(s; \theta)}{\partial \theta'} dG(r) dG(s) + \\ &\quad + \int \int (\sin(r'Z_j) - v(r; \theta)) (\cos(s'Z_k) - u(s; \theta)) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(s; \theta)}{\partial \theta'} dG(r) dG(s) + \\ &\quad \left. \left. + \int \int (\sin(r'Z_j) - v(r; \theta)) (\sin(s'Z_k) - v(s; \theta)) \frac{\partial v(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial v(s; \theta)}{\partial \theta'} dG(r) dG(s) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{var} \left[\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] &= 4 \int \int \left\{ \Omega_{RR,n}(r, s) \frac{\partial \text{Re} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Re} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \right. \\ &\quad + \Omega_{RI,n}(r, s) \frac{\partial \text{Re} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Im} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\ &\quad + \Omega_{IR,n}(r, s) \frac{\partial \text{Im} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Re} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\ &\quad \left. + \Omega_{II,n}(r, s) \frac{\partial \text{Im} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Im} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r) dG(s), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\Omega_{RR,n}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E \left[(\cos(r' Z_j) - u(r; \theta)) (\cos(s' Z_k) - u(s; \theta)) \right], \\
\Omega_{RI,n}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E \left[(\cos(r' Z_j) - u(r; \theta)) (\sin(s' Z_k) - v(s; \theta)) \right], \\
\Omega_{IR,n}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E \left[(\sin(r' Z_j) - v(r; \theta)) (\cos(s' Z_k) - u(s; \theta)) \right], \\
\Omega_{II,n}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E \left[(\sin(r' Z_j) - v(r; \theta)) (\sin(s' Z_k) - v(s; \theta)) \right].
\end{aligned}$$

A matriz $\Omega_n(r, s) = \begin{bmatrix} \Omega_{RR,n}(r, s) & \Omega_{RI,n}(r, s) \\ \Omega_{IR,n}(r, s) & \Omega_{II,n}(r, s) \end{bmatrix}$ foi obtida no apêndice (B), e é dada pelas equações (B.33) a (B.36), que rerepresentamos abaixo:

$$\begin{aligned}
\Omega_{RR,n}(r, s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re} \varphi_z(r-s) + \operatorname{Re} \varphi_z(r+s)] - n \operatorname{Re} \varphi_z(r) \operatorname{Re} \varphi_z(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) (\operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, -r)),
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{RI,n}(r, s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Im} \varphi_z(-r+s) + \operatorname{Im} \varphi_z(r+s)] - n \operatorname{Re} \varphi_z(r) \operatorname{Im} \varphi_z(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) (\operatorname{Im} \Lambda_k(-r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, -r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r)),
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{IR,n}(r, s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Im} \varphi_z(r-s) + \operatorname{Im} \varphi_z(r+s)] - n \operatorname{Im} \varphi_z(r) \operatorname{Re} \varphi_z(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) (\operatorname{Im} \Lambda_k(r, -s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(-s, r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s, r)),
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{II,n}(r, s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re} \varphi_z(r-s) - \operatorname{Re} \varphi_z(r+s)] - n \operatorname{Im} \varphi_z(r) \operatorname{Im} \varphi_z(s) + \\
&\quad + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) (\operatorname{Re} \Lambda_k(r, -s) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r, s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s, -r) - \operatorname{Re} \Lambda_k(s, r)).
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Observação: vale notar que as equações (D.13) a (D.16) diferem das equações obtidas por Knight e Yu (2002), pg. 716, pois apresentam um n multiplicando o produto das partes real ou imaginária de $\varphi_z(r)$ e $\varphi_z(s)$, além de diferentes sinais nos somatórios. Por outro lado, o resultado acima coincide com o apresentado em Knight e Satchell (1997), pg. 176, tomando-se o cuidado de notar que a nomenclatura Ω^p utilizada ali refere-se ao nosso $\Omega_n(r, s)/n$.

Podemos, finalmente, escrever $A(\theta_0)$ como

$$\begin{aligned}
 A(\theta_0) = & \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \int \int \left\{ \Omega_{RR,n}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \right. \\
 & + \Omega_{RI,n}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\
 & + \Omega_{IR,n}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\
 & \left. + \Omega_{II,n}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r) dG(s). \quad (\text{D.17})
 \end{aligned}$$

Um estimador natural $A_n^{(1)}(\theta_0)$ para $A(\theta_0)$ é obtido utilizando-se os valores amostrais em (D.17) e eliminando-se o limite

$$\begin{aligned}
 A_n^{(1)}(\theta_0) = & 4 \int \int \left\{ \Omega_{RR,n}^{(1)}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \right. \\
 & + \Omega_{RI,n}^{(1)}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\
 & + \Omega_{IR,n}^{(1)}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\
 & \left. + \Omega_{II,n}^{(1)}(r, s) \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r) dG(s), \quad (\text{D.18})
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \Omega_{RR,n}^{(1)}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\cos(r' Z_j) - u(r; \theta)] [\cos(s' Z_k) - u(s; \theta)], \\
 \Omega_{RI,n}^{(1)}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\cos(r' Z_j) - u(r; \theta)] [\sin(s' Z_k) - v(s; \theta)], \\
 \Omega_{IR,n}^{(1)}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\sin(r' Z_j) - v(r; \theta)] [\cos(s' Z_k) - u(s; \theta)], \\
 \Omega_{II,n}^{(1)}(r, s) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\sin(r' Z_j) - v(r; \theta)] [\sin(s' Z_k) - v(s; \theta)].
 \end{aligned}$$

Entretanto, este estimador é muito ineficiente sob o ponto de vista computacional, pois requer $O(n^2)$ operações para cada par (r, s) , além de exigir a integração numérica $\mathbb{R}^{p+1}$ em (D.18).

Podemos obter outro estimador para $A(\theta_0)$ a partir de (D.11) se utilizarmos a média amostral como um estimador para $E[K_1(\theta) K_{1+k}(\theta)']$, de tal forma que

$$\hat{E}[K_1(\theta) K_{1+k}(\theta)'] = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} K_j(\theta) K_{j+k}(\theta)', \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (\text{D.19})$$

Substituindo (D.19) em (D.11) obtemos o seguinte estimador para $A(\theta_0)$:

$$A_n^{(2)}(\theta_0) = 4 \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_j(\theta) K_j(\theta)' + \sum_{k=1}^m \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} [K_j(\theta) K_{j+k}(\theta)' + K_{j+k}(\theta) K_j(\theta)'] \right\}, \quad (\text{D.20})$$

sendo m um número suficientemente grande de modo que o segundo termo da expressão (D.20) tenha aproximadamente convergido, mas bem menor do que n , para reduzirmos a ordem das operações. Este algoritmo requer $O(nm)$ operações, e pode ser substancialmente mais rápido, mas ainda requer a obtenção dos vetores K_j , que são obtidos através de uma integração em $\mathbb{R}^{p+1}$ para cada ponto amostral como em (D.8).

Por outro lado, se pudermos calcular a função $\Lambda_k(r, s)$ diretamente, poderemos obter um outro estimador $A_n^{(3)}(\theta_0)$ se usarmos em (D.18) os estimadores amostrais dados pelas equações (D.13) a (D.16), sem necessidade da obtenção dos K_j . Neste caso, o estimador é dado por

$$\begin{aligned} A_n^{(3)}(\theta_0) = & 4 \int \int \left\{ \Omega_{RR,n}^{(3)}(r, s) \frac{\partial \text{Re } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Re } \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \right. \\ & + \Omega_{RI,n}^{(3)}(r, s) \frac{\partial \text{Re } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Im } \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\ & + \Omega_{IR,n}^{(3)}(r, s) \frac{\partial \text{Im } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Re } \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} + \\ & \left. + \Omega_{II,n}^{(3)}(r, s) \frac{\partial \text{Im } \varphi(r; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \text{Im } \varphi(s; \theta)}{\partial \theta'} \right\} dG(r) dG(s), \quad (\text{D.21}) \end{aligned}$$

sendo que a matriz $\Omega_n^{(3)}(r, s)$ é formada pela seguinte partição:

$$\Omega_n^{(3)}(r, s) = \begin{bmatrix} \Omega_{RR,n}^{(3)}(r, s) & \Omega_{RI,n}^{(3)}(r, s) \\ \Omega_{IR,n}^{(3)}(r, s) & \Omega_{II,n}^{(3)}(r, s) \end{bmatrix}, \quad (\text{D.22})$$

com elementos dados pelas equações (D.13) a (D.16), para $m \leq n$, de tal forma que

$$\begin{aligned}\Omega_{RR,m}(r,s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re} \varphi_z(r-s) + \operatorname{Re} \varphi_z(r+s)] - m \operatorname{Re} \varphi_z(r) \operatorname{Re} \varphi_z(s) + \\ &+ \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) (\operatorname{Re} \Lambda_k(r,s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(r,-s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s,r) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s,-r)),\end{aligned}\tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{RI,m}(r,s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Im} \varphi_z(-r+s) + \operatorname{Im} \varphi_z(r+s)] - m \operatorname{Re} \varphi_z(r) \operatorname{Im} \varphi_z(s) + \\ &+ \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) (\operatorname{Im} \Lambda_k(-r,s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r,s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s,-r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s,r)),\end{aligned}\tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{IR,m}(r,s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Im} \varphi_z(r-s) + \operatorname{Im} \varphi_z(r+s)] - m \operatorname{Im} \varphi_z(r) \operatorname{Re} \varphi_z(s) + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) (\operatorname{Im} \Lambda_k(r,-s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(r,s) + \operatorname{Im} \Lambda_k(-s,r) + \operatorname{Im} \Lambda_k(s,r)),\end{aligned}\tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{II,m}(r,s) &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re} \varphi_z(r-s) - \operatorname{Re} \varphi_z(r+s)] - n \operatorname{Im} \varphi_z(r) \operatorname{Im} \varphi_z(s) + \\ &+ \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) (\operatorname{Re} \Lambda_k(r,-s) - \operatorname{Re} \Lambda_k(r,s) + \operatorname{Re} \Lambda_k(s,-r) - \operatorname{Re} \Lambda_k(s,r)).\end{aligned}\tag{D.26}$$

Nas equações acima m deve ser escolhido de maneira que a sequência tenha (aproximadamente) convergido.

Apêndice E

Matriz de covariância assintótica do estimador DECF

Neste capítulo vamos demonstrar as proposições do capítulo 5 referentes ao estimador DECF. Inicialmente relembremos que o estimador DECF $\hat{\theta}_n$ é definido por

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} Q_n,$$

sendo a função Q_n dada por

$$Q_n = (V_n - V_\theta)' W_n (V_n - V_\theta), \quad (\text{E.1})$$

onde W_n é uma matriz $2q \times 2q$ simétrica, de posto $\text{rank}(W_n) \leq 2q$, e

$$V_n - V_\theta = \begin{pmatrix} u_n(r_1) - u(r_1) \\ \vdots \\ u_n(r_q) - u(r_q) \\ v_n(r_1) - v(r_1) \\ \vdots \\ v_n(r_q) - v(r_q) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

e u_n , v_n , u e v definidos como em (B.2), (B.3), (B.4) e (B.5) respectivamente. Também podemos escrever

$$V_n - V_\theta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j; \theta), \quad (\text{E.3})$$

sendo

$$f(Z_j; \theta) = \begin{pmatrix} \cos(r'_1 Z_j) - u(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \cos(r'_q Z_j) - u(r_q; \theta) \\ \sin(r'_1 Z_j) - v(r_1; \theta) \\ \vdots \\ \sin(r'_q Z_j) - v(r_q; \theta) \end{pmatrix}_{2q \times 1}, \quad (\text{E.4})$$

Demonstração do teorema 5.1. Para obter suas propriedades assintóticas, vamos utilizar procedimento análogo ao utilizado no capítulo anterior para o estimador CECF, i.e., vamos utilizar os resultados de Amemiya (1985), obtendo inicialmente $\partial Q_n / \partial \theta$ e $\partial^2 Q_n / \partial \theta \partial \theta'$.

Aplicando um resultado de Lütkepohl (2005)¹, obtemos

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta'} = -2 (V_n - V_\theta)' W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'}$$

e

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} = 2 \left\{ \frac{\partial V_\theta'}{\partial \theta} W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} - [(V_n - V_\theta)' W_n \otimes I_m] \frac{\partial}{\partial \theta'} \text{vec} \left(\frac{\partial V_\theta'}{\partial \theta} \right) \right\}, \quad (\text{E.5})$$

onde θ é um vetor de dimensão $m \times 1$. Se utilizarmos (E.3) em (E.5) obtemos

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} = 2 \left\{ \frac{\partial V_\theta'}{\partial \theta} W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} - \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j; \theta)' W_n \otimes I_m \right] \frac{\partial}{\partial \theta'} \text{vec} \left(\frac{\partial V_\theta'}{\partial \theta} \right) \right\}.$$

Por hipótese os Z_j são variáveis aleatórias estacionárias (não independentes) e α -mixing; portanto a sequência $\{Z_j\}$ é *ergódica* (e.g., proposição 3.44, pg. 48, White (2000)). Podemos então aplicar o *teorema ergódico* (e.g., teorema 3, pg. 413, Shiryaev (1991), ou teorema 3.34, pg.44, White (2000)):

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j; \theta) \xrightarrow{a.s.} E[f(Z_j; \theta)] = 0.$$

Como por hipótese $W_n \xrightarrow{p} W_0$ e $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$, empregando o resultado acima podemos obter o seguinte resultado para $\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'}$

$$\left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{p} B(\theta_0) = 2 \left\{ \left. \frac{\partial V_\theta'}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} W_0 \left. \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right|_{\theta_0} \right\}. \quad (\text{E.6})$$

¹Lütkepohl (2005), resultado 5, pg. 667: Seja Ω uma matriz simétrica $n \times n$ e $c(\theta)$ um vetor $n \times 1$ que depende de um vetor θ , de dimensão $m \times 1$. Então

$$\frac{\partial}{\partial \theta'} c(\theta)' \Omega c(\theta) = 2c(\theta)' \Omega \frac{\partial c(\theta)}{\partial \theta'}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} c(\theta)' \Omega c(\theta) = 2 \left\{ \frac{\partial c(\theta)'}{\partial \theta} \Omega \frac{\partial c(\theta)}{\partial \theta'} + [c(\theta)' \Omega \otimes I_m] \frac{\partial}{\partial \theta'} \text{vec} \left(\frac{\partial c(\theta)'}{\partial \theta} \right) \right\},$$

onde $\otimes$ é o produto de Kronecker, I_m é a matriz identidade de dimensão $m \times m$, e $\frac{\partial c(\theta)'}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial c(\theta)}{\partial \theta'} \right)'$.

Com relação a $\partial Q_n / \partial \theta$, note que, devido à simetria de W_n , podemos escrever

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} = -2 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n (V_n - V_\theta). \quad (\text{E.7})$$

Como $E[V_n] = V_\theta$ temos que

$$E \left[\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] = 0$$

e

$$E \left[\frac{\partial Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right] = 2 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'}.$$

Substituindo (E.3) em (E.7) podemos também reescrever $\partial Q_n / \partial \theta$ como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} &= -2 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n (V_n - V_\theta) \\ &= -2 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j; \theta) \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K_j(\theta), \end{aligned}$$

onde

$$K_j(\theta) = \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n f(Z_j; \theta).$$

Como no capítulo anterior vamos agora obter as propriedades da sequência $\sqrt{n} \partial Q_n / \partial \theta$ para que possamos aplicar um teorema central limite para seqüências estacionárias. Lembrando que $E[(\partial Q_n / \partial \theta)_{\theta_0}] = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \text{var} \left[\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] &= n E \left[\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta'} \right] \\ &= n E \left[\left(-\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K_j(\theta) \right) \left(-\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n K_k(\theta)' \right) \right] \\ &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_j(\theta) K_k(\theta)' \right] \\ &= \frac{4}{n} E \left[\sum_{j=1}^n K_j(\theta) K_j(\theta)' + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) [K_1(\theta) K_{1+k}(\theta)' + K_{1+k}(\theta) K_1(\theta)'] \right] \\ &= 4 \left\{ E[K_1(\theta) K_1(\theta)'] + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) [K_1(\theta) K_{1+k}(\theta)' + K_{1+k}(\theta) K_1(\theta)'] \right\}. \end{aligned}$$

Os K_j são funções contínuas e limitadas dos Z_j , que são estacionários; portanto a seqüência $\{K_j(\theta)\}$ também é estacionária. Além disso, assumindo condição de α -mixing para Z_j , podemos aplicar o teorema CLT 18.5.4 de Ibragimov e Linnik (1971), obtendo $A(\theta_0) < \infty$,

sendo

$$A(\theta_0) = 4 \left\{ E[K_1(\theta_0) K_1(\theta_0)'] + \sum_{k=1}^{\infty} (E[K_1(\theta_0) K_{1+k}(\theta_0)'] + E[K_{1+k}(\theta_0) K_1(\theta_0)']) \right\}$$

e se $A(\theta_0) \neq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[-2 \sum_{j=1}^n K_j(\theta_0) \right] = \sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \xrightarrow{d} N(0, A(\theta_0)). \quad (\text{E.8})$$

Note agora que se usarmos (E.7) poderemos escrever

$$\begin{aligned} \text{var} \left[\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] &= n \cdot \text{var} \left[\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \right] \\ &= n \cdot \text{var} \left[-2 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n (V_n - V_\theta) \right] \\ &= 4n \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n \text{var} [V_n - V_\theta] W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \\ &= 4n \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n \left(\frac{1}{n} \Omega_0 \right) W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \\ &= 4 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_n \Omega_0 W_n \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'}. \end{aligned}$$

Lembrando que por hipótese $W_n \xrightarrow{p} W_0$ temos

$$A(\theta_0) = 4 \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} W_0 \Omega_0 W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0}. \quad (\text{E.9})$$

O estimador DECF $\hat{\theta}_n$ é obtido através da minimização de (E.1), que pode ser obtida através da solução do sistema

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\hat{\theta}_n} = 0.$$

Expandindo $\partial Q_n / \partial \theta$ em uma série de Taylor em torno do vetor de parâmetros, θ_0 , obtemos

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\hat{\theta}_n} = \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} + \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta^*} (\hat{\theta}_n - \theta_0),$$

onde θ^* fica entre $\hat{\theta}_n$ e θ_0 . Como $\frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\hat{\theta}_n} = 0$ pela definição de $\hat{\theta}_n$, se multiplicarmos ambos os lados por $\sqrt{n} \left[\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta^*} \right]^{-1}$ obtemos

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) = - \left[\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta^*} \right]^{-1} \left(\sqrt{n} \frac{\partial Q_n}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \right).$$

Agora, como por hipótese $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$, também $\theta^* \xrightarrow{p} \theta_0$, e consequentemente

$$\left. \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta^*} \xrightarrow{p} B(\theta_0). \quad (\text{E.10})$$

Usando os resultados (E.8) e (E.10), obtemos a distribuição limite do estimador DECF $\hat{\theta}_n$ através de

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N\left(0, B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}\right), \quad (\text{E.11})$$

sendo

$$B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1} = \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right)^{-1} \frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_0 \Omega_0 W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial \theta} W_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right)^{-1}. \quad (\text{E.12})$$

■

Apêndice F

Filtro de Gram-Charlier

Seja o seguinte modelo de espaço de estados univariado:

$$X_t = \delta + \phi X_{t-1} + \eta_t, \quad (\text{F.1})$$

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, \quad (\text{F.2})$$

$$\eta_t \sim NIID(0, \sigma_\eta^2), \quad (\text{F.3})$$

$$\varepsilon_t \sim \text{alguma distribuição i.i.d. com momentos finitos até } 4^a \text{ ordem.} \quad (\text{F.4})$$

Adotaremos a seguinte notação, análoga à empregada em Shumway e Stoffer (2000):

$$\mu_t^s = E[X_t | y_{1:s}], \quad (\text{F.5})$$

$$v_t^s = (\sigma_t^s)^2 = E[(X_t - \mu_t^s)^2 | y_{1:s}], \quad (\text{F.6})$$

$$\gamma_{1,t}^s = \frac{E[(X_t - \mu_t^s)^3 | y_{1:s}]}{(\sigma_t^s)^3}, \quad (\text{F.7})$$

$$\gamma_{2,t}^s = \frac{E[(X_t - \mu_t^s)^4 | y_{1:s}]}{(\sigma_t^s)^4} - 3. \quad (\text{F.8})$$

Vamos assumir que a distribuição condicional de $x_{t-1} | y_{1:t-1}$ possa ser aproximada por uma expansão de Gram-Charlier até a 4ª ordem¹, i.e.,

$$p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) \cong \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t-1}^{t-1}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\}, \quad (\text{F.9})$$

¹A expansão de Edgeworth até 4ª ordem possui um termo adicional à expansão de Gram-Charlier, de maneira que a distribuição condicional de $x_{t-1} | y_{1:t-1}$ seria aproximada por:

$$p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) \cong \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t-1}^{t-1}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) + \frac{(\gamma_{2,t-1}^{t-1})^2}{72} (w^6 - 15w^4 + 45w^2 - 15) \right\}.$$

Neste trabalho, entretanto, vamos utilizar a expansão de Gram-Charlier.

onde

$$w = \frac{x_{t-1} - \mu_{t-1}^{t-1}}{\sigma_{t-1}^{t-1}}. \quad (\text{F.10})$$

Por outro lado, a distribuição de $x_t|x_{t-1}$ é dada por hipótese por:

$$p(x_t|x_{t-1}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t - \delta - \phi x_{t-1}}{\sigma_\eta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}. \quad (\text{F.11})$$

Para calcular a distribuição de $x_t|y_{1:t-1}$, isto é, a previsão para o passo seguinte (t) condicional na informação disponível até $t-1$, precisamos efetuar a seguinte integração:

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1}) p(x_{t-1}|y_{1:t-1}) dx_{t-1}. \quad (\text{F.12})$$

Inicialmente vamos calcular

$$\begin{aligned} p(x_t|x_{t-1}) p(x_{t-1}|y_{1:t-1}) &\cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t - \delta - \phi x_{t-1}}{\sigma_\eta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t-1}^{t-1}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_{t-1}^{t-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_t - \delta - \phi x_{t-1}}{\sigma_\eta} \right)^2 - \frac{1}{2} w^2 \right\} \{ \dots \} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_{t-1}^{t-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_t - \delta - \phi (\mu_{t-1}^{t-1} + \sigma_{t-1}^{t-1} w)}{\sigma_\eta} \right)^2 - \frac{1}{2} w^2 \right\} \{ \dots \} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_{t-1}^{t-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1} - \phi \sigma_{t-1}^{t-1} w}{\sigma_\eta} \right)^2 - \frac{1}{2} w^2 \right\} \{ \dots \} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_{t-1}^{t-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\sigma_\eta^2} - 2 \frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1}) \phi \sigma_{t-1}^{t-1} w + \phi^2 \sigma_{t-1}^{t-1} w^2}{\sigma_\eta^2} + w^2 \right] \right\} \{ \dots \} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_{t-1}^{t-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\sigma_\eta^2} - \frac{2\phi \sigma_{t-1}^{t-1} (x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})}{\sigma_\eta^2} w + \frac{\phi^2 \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sigma_\eta^2} w^2 + w^2 \right] \right\} \{ \dots \} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_{t-1}^{t-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\phi^2 \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sigma_\eta^2} + 1 \right) w^2 - 2 \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1} (x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})}{\sigma_\eta^2} \right) w + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\sigma_\eta^2} \right] \right\} \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Observe agora que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 y &= aw^2 - 2bw + c \\
 &= a \left[w^2 - 2\frac{b}{a}w + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(w - \frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left(w - \frac{b}{a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{a},
 \end{aligned}$$

sendo que para (F.13) temos

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1}}{\sigma_\eta^2} + 1 \\
 &= \frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}{\sigma_\eta^2},
 \end{aligned} \tag{F.14}$$

$$b = \frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1} (x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})}{\sigma_\eta^2} \tag{F.15}$$

$$c = \frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\sigma_\eta^2}, \tag{F.16}$$

$$\begin{aligned}
 c - \frac{b^2}{a} &= \frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\sigma_\eta^2} - \frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} (x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2) \sigma_\eta^2} \\
 &= \left(\frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2 - \phi^2 v_{t-1}^{t-1}}{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2} \right) \frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\sigma_\eta^2} \\
 &= \frac{(x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1})^2}{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}.
 \end{aligned} \tag{F.17}$$

Usando (F.14) a (F.16) podemos escrever (F.12) como

$$\begin{aligned}
 p(x_t | y_{1:t-1}) &= \int p(x_t | x_{t-1}) p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) dx_{t-1} \\
 &\cong \int \frac{e^{-\frac{1}{2} \left[a \left(w - \frac{b}{a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{a} \right]}}{2\pi \sigma_\eta \sigma_{t-1}^{t-1}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\} dx_{t-1}.
 \end{aligned} \tag{F.18}$$

Utilizando

$$dw = \frac{dx_{t-1}}{\sigma_{t-1}^{t-1}}, \tag{F.19}$$

podemos escrever (F.18) como

$$\begin{aligned}
 p(x_t|y_{1:t-1}) &\cong \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[a\left(w-\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}\right]}}{2\pi\sigma_\eta} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\} dw \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[c-\frac{b^2}{a}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{a}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{w-\frac{b}{a}}{1/\sqrt{a}}\right)^2\right]}}{\sqrt{2\pi}(1/\sqrt{a})} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\} dw.
 \end{aligned} \tag{F.20}$$

Note que a expressão (F.20) envolve os momentos não centrais da distribuição de w , que é uma normal de média $\frac{b}{a}$ e variância $\frac{1}{a}$, i.e., $w \sim N\left(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$. Para obter estes momentos vamos utilizar uma conhecida relação recursiva entre momentos não centrais e cumulantes (Smith (1995)) dada por:

$$\mu'_n = \kappa_n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} \kappa_i \mu'_{n-i}. \tag{F.21}$$

Para o caso de uma variável aleatória normal, os cumulantes maiores do que 2 são iguais a zero (Stuart e Ord (1994, pg.93)). Assim, se $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ temos que $\kappa_1 = \mu$, $\kappa_2 = \sigma^2$, e $\kappa_i = 0$, $i \geq 3$. Utilizando este resultado em (F.21) obtemos:

$$\mu'_n = \mu\mu'_{n-1} + (n-1)\sigma^2, \quad n \geq 3. \tag{F.22}$$

Os momentos não centrais da normal podem ser facilmente obtidos utilizando-se (F.22). Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \mu'_2 &= \mu^2 + \sigma^2 \\
 \mu'_3 &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \\
 \mu'_4 &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \\
 \mu'_5 &= \mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4 \\
 \mu'_6 &= \mu^6 + 15\mu^4\sigma^2 + 45\mu^2\sigma^4 + 15\sigma^6 \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Aplicando os resultados acima em (F.20) obtemos,

$$\begin{aligned}
p(x_t|y_{1:t-1}) &\cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[c-\frac{b^2}{a}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{a}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{w-\frac{b}{a}}{1/\sqrt{a}}\right)^2\right]}}{\sqrt{2\pi}(1/\sqrt{a})} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} (w^3 - 3w) + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} (w^4 - 6w^2 + 3) \right\} dw \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[c-\frac{b^2}{a}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{a}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} \left[\left(3\frac{b}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right) - 3 \left(\frac{b}{a} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} \left[\left(3 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^4 + 6 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^4 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 6 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) + 3 \right] \right\} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[c-\frac{b^2}{a}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{a}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} \left[3\frac{b}{a^2} + \left(\frac{b}{a} \right)^3 - 3\frac{b}{a} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} \left[\frac{3}{a^2} + 6 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{1}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^4 - \frac{6}{a} - 6 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 3 \right] \right\},
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
p(x_t|y_{1:t-1}) &\cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[c-\frac{b^2}{a}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{a}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} \frac{(3ab + b^3 - 3a^2b)}{a^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} \frac{[b^4 + 3(a^2 + 2ab^2 - 2a^2b^2 - 2a^3 + a^4)]}{a^4} \right\}. \quad (\text{F.23})
\end{aligned}$$

Note agora que podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{3ab + b^3 - 3a^2b}{a^3} &= \left(\frac{b}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{a-1}{a} \right) \left(\frac{b}{a} \right) \\
\frac{b^4 + 3(a^2 + 2ab^2 - 2a^2b^2 - 2a^3 + a^4)}{a^4} &= \left(\frac{b}{a} \right)^4 - 6 \left(\frac{a-1}{a} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 3 \left(\frac{a-1}{a} \right)^2.
\end{aligned}$$

Usando agora (F.14) e (F.15) obtemos

$$\frac{b}{a} = \frac{\phi\sigma_{t-1}^{t-1}(x_t - \delta - \phi\mu_{t-1}^{t-1})}{\phi^2v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2},$$

$$\frac{a-1}{a} = \frac{\phi^2v_{t-1}^{t-1}}{\phi^2v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2},$$

Chamemos

$$\zeta = \frac{x_t - \delta - \phi\mu_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}}; \quad (\text{F.24})$$

Usando as equações acima obtemos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \\
& = \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^3 \zeta^3}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^{3/2}} - 3\left(\frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1}}{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}\right) \frac{\phi\sigma_{t-1}^{t-1} \zeta}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^{1/2}} \\
& = \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^3}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^{3/2}} (\zeta^3 - 3\zeta)
\end{aligned} \tag{F.25}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{b}{a}\right)^4 - 6\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 = \\
& = \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^4 \zeta^4}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^2} - 6\left(\frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1}}{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}\right) \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^2 \zeta^2}{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2} + 3\frac{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1})^2}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^2} \\
& = \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^4}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^2} (\zeta^4 - 6\zeta^2 + 3).
\end{aligned} \tag{F.26}$$

Note também por (F.17) que podemos escrever

$$c - \frac{b^2}{a} = \frac{(x_t - \delta - \phi\mu_{t-1}^{t-1})^2}{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2} = \zeta^2.$$

Substituindo os resultados acima em (F.23) obtemos

$$\begin{aligned}
p(x_t|y_{1:t-1}) \cong & \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sqrt{\frac{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}{\sigma_\eta^2}}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t-1}^{t-1}}{6} \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^3}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^{3/2}} (\zeta^3 - 3\zeta) + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_{2,t-1}^{t-1}}{24} \frac{(\phi\sigma_{t-1}^{t-1})^4}{(\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2)^2} (\zeta^4 - 6\zeta^2 + 3) \right\}.
\end{aligned}$$

Assim obtemos a distribuição de $x_t|y_{1:t-1}$ por

$$p(x_t|y_{1:t-1}) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_t^{t-1}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} (\zeta^3 - 3\zeta) + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} (\zeta^4 - 6\zeta^2 + 3) \right\}, \tag{F.27}$$

onde

$$\mu_t^{t-1} = \delta + \phi \mu_{t-1}^{t-1}, \quad (\text{F.28})$$

$$v_t^{t-1} = (\sigma_t^{t-1})^2 = \phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2, \quad (\text{F.29})$$

$$\gamma_{1,t}^{t-1} = \gamma_{1,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}} \right)^3 = \gamma_{1,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sigma_t^{t-1}} \right)^3, \quad (\text{F.30})$$

$$\gamma_{2,t}^{t-1} = \gamma_{2,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}} \right)^4 = \gamma_{2,t-1}^{t-1} \left(\frac{\phi \sigma_{t-1}^{t-1}}{\sigma_t^{t-1}} \right)^4, \quad (\text{F.31})$$

$$\zeta = \frac{x_t - \delta - \phi \mu_{t-1}^{t-1}}{\sqrt{\phi^2 v_{t-1}^{t-1} + \sigma_\eta^2}} = \frac{x_t - \mu_t^{t-1}}{\sigma_t^{t-1}}. \quad (\text{F.32})$$

Podemos notar pela equação (F.27) que a distribuição de $x_t|y_{1:t-1}$, isto é, a previsão para a variável latente no passo seguinte (t), condicional à informação disponível até $t-1$, também pode ser aproximada por uma expansão de Gram-Charlier, com momentos centrais dados pelas equações (F.28) a (F.32).

A distribuição conjunta de $x_t, y_t|y_{1:t-1}$ pode ser obtida por

$$p(x_t, y_t|y_{1:t-1}) = p(y_t|x_t) p(x_t|y_{1:t-1}). \quad (\text{F.33})$$

Por um lado, podemos aproximar a densidade condicional de $x_t|y_{1:t-1}$ por (F.27). Por outro lado, podemos obter verossimilhança amostral $p(y_t|x_t)$ a partir da distribuição dos erros ε_t , $p(\varepsilon_t)$, através do método do jacobiano:

$$p_y(y_t) = p_\varepsilon(g^{-1}(y_t)) \left| \frac{d}{dy_t} g^{-1}(y_t) \right|, \quad (\text{F.34})$$

onde

$$g(\varepsilon_t) = y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t. \quad (\text{F.35})$$

Como

$$\frac{d}{dy_t} g^{-1}(y_t) = \frac{d}{dy_t} (y_t - \alpha - \beta x_t) = 1,$$

temos que

$$p_y(y_t) = p_\varepsilon(y_t - \alpha - \beta x_t). \quad (\text{F.36})$$

Vamos assumir agora que a densidade dos erros $p(\varepsilon_t)$ também possa ser aproximada por

uma expansão de Gram-Charlier até a 4ª ordem, i.e.,

$$p(\varepsilon_t) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \left\{ 1 + \left[\frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left(\frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right)^3 - 3 \left(\frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\left(\frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right)^4 - 6 \left(\frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 + 3 \right] \right\}. \quad (\text{F.37})$$

Utilizando (F.36) e (F.37) podemos escrever

$$p(y_t|x_t) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \left\{ 1 + \left[\frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left(\frac{y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^3 - 3 \left(\frac{y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\left(\frac{y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^4 - 6 \left(\frac{y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 + 3 \right] \right\}. \quad (\text{F.38})$$

No que segue é conveniente escrevermos (F.38) em função de ζ , conforme (F.32). Assim vamos inicialmente expandir as potências dentro dos colchetes em (F.38):

$$\begin{aligned} y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t &= y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta (\mu_\zeta + \sigma_\zeta \zeta) \\ &= \rho_t - \beta \sigma_\zeta \zeta, \end{aligned}$$

onde, para facilitar a notação, definimos

$$\rho_t = y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta \mu_\zeta, \quad (\text{F.39})$$

$$\mu_\zeta = \mu_t^{t-1}, \quad (\text{F.40})$$

$$\sigma_\zeta = \sigma_t^{t-1}. \quad (\text{F.41})$$

Analogamente para as outras potências temos

$$\begin{aligned} (y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t)^2 &= (\rho_t - \beta \sigma_\zeta \zeta)^2 \\ &= \rho_t^2 - 2\rho_t \beta \sigma_\zeta \zeta + \beta^2 \sigma_\zeta^2 \zeta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t)^3 &= (\rho_t - \beta \sigma_\zeta \zeta)^3 \\ &= \rho_t^3 - 3\rho_t^2 \beta \sigma_\zeta \zeta + 3\rho_t \beta^2 \sigma_\zeta^2 \zeta^2 - \beta^3 \sigma_\zeta^3 \zeta^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y_t - \mu_\varepsilon - \alpha - \beta x_t)^4 &= (\rho_t - \beta \sigma_\zeta \zeta)^4 \\ &= \rho_t^4 - 4\rho_t^3 \beta \sigma_\zeta \zeta + 6\rho_t^2 \beta^2 \sigma_\zeta^2 \zeta^2 - \\ &\quad - 4\rho_t \beta^3 \sigma_\zeta^3 \zeta^3 + \beta^4 \sigma_\zeta^4 \zeta^4. \end{aligned}$$

Utilizando as expansões acima podemos escrever (F.38) como

$$p(y_t|x_t) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_t - \beta\sigma_\zeta\zeta}{\sigma_\varepsilon}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \{1 + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4\}, \quad (\text{F.42})$$

sendo que os termos a_i são dados por

$$a_0 = \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^3 - 3 \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^4 - 6 \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 + 3 \right], \quad (\text{F.43})$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left[\frac{-3\rho_t^2\beta\sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon^3} - 3 \left(\frac{-\beta\sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\frac{-4\rho_t^3\beta\sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon^4} - 6 \frac{(-2\rho_t\beta\sigma_\zeta)}{\sigma_\varepsilon^2} \right] \\ a_1 &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{2} \frac{\beta\sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 - 1 \right] - \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{6} \frac{\beta\sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^3 - 3 \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left[\frac{3\rho_t\beta^2\sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^3} \right] + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\frac{6\rho_t^2\beta^2\sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^4} - 6 \frac{\beta^2\sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right] \\ a_2 &= \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{2} \frac{\beta^2\sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right) + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{4} \frac{\beta^2\sigma_\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2} \left[\left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 - 1 \right], \end{aligned} \quad (\text{F.45})$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \left[\frac{-\beta^3\sigma_\zeta^3}{\sigma_\varepsilon^3} \right] + \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \left[\frac{-4\rho_t\beta^3\sigma_\zeta^3}{\sigma_\varepsilon^4} \right] \\ a_3 &= -\frac{\gamma_{1,\varepsilon}}{6} \frac{\beta^3\sigma_\zeta^3}{\sigma_\varepsilon^3} - \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{6} \frac{\beta^3\sigma_\zeta^3}{\sigma_\varepsilon^3} \left(\frac{\rho_t}{\sigma_\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.46})$$

$$a_4 = \frac{\gamma_{2,\varepsilon}}{24} \frac{\beta^4\sigma_\zeta^4}{\sigma_\varepsilon^4}. \quad (\text{F.47})$$

Podemos agora obter a distribuição conjunta de $x_t, y_t|y_{1:t-1}$ através de (F.33), (F.27) e

(F.42) por

$$\begin{aligned}
p(x_t, y_t | y_{1:t-1}) &= p(y_t | x_t) p(x_t | y_{1:t-1}) \\
&\cong \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_t - \beta \sigma_\zeta \zeta}{\sigma_\varepsilon} \right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon}} \{1 + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_t^{t-1}}} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} (\zeta^3 - 3\zeta) + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} (\zeta^4 - 6\zeta^2 + 3) \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_t - \beta \sigma_\zeta \zeta}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 + \zeta^2 \right] \right\} \{\dots\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\rho_t^2 - 2\rho_t\beta\sigma_\zeta\zeta + \beta^2\sigma_\zeta^2\zeta^2}{\sigma_\varepsilon^2} + \zeta^2 \right] \right\} \{\dots\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (d\zeta^2 - 2e\zeta + f) \right\} \{\dots\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} d \left[\zeta^2 - 2\frac{e}{d}\zeta + \frac{f}{d} \right] \right\} \{\dots\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} d \left[\left(\zeta - \frac{e}{d} \right)^2 - \left(\frac{e}{d} \right)^2 + \frac{f}{d} \right] \right\} \{\dots\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[d \left(\zeta - \frac{e}{d} \right)^2 + f - \frac{e^2}{d} \right] \right\} \{\dots\}, \tag{F.48}
\end{aligned}$$

onde

$$d = \frac{\beta^2\sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}, \tag{F.49}$$

$$e = \frac{\rho_t\beta\sigma_\zeta}{\sigma_\varepsilon^2}, \tag{F.50}$$

$$f = \frac{\rho_t^2}{\sigma_\varepsilon^2}, \tag{F.51}$$

e

$$\begin{aligned}
\{\dots\} &= \{1 + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4\} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} (\zeta^3 - 3\zeta) + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} (\zeta^4 - 6\zeta^2 + 3) \right\} \\
&= 1 + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^i.
\end{aligned}$$

Por sua vez, os coeficientes b_i são dados por

$$b_0 = \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} + a_0 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \tag{F.52}$$

$$b_1 = -(1 + a_0) \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_1 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (\text{F.53})$$

$$b_2 = -(1 + a_0) \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_1 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_2 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (\text{F.54})$$

$$b_3 = (1 + a_0) \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_1 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_2 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_3 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (\text{F.55})$$

$$b_4 = (1 + a_0) \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_1 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_2 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_3 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2} + a_4 \left(1 + \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{8} \right), \quad (\text{F.56})$$

$$b_5 = a_1 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_2 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_3 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4} - a_4 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{2}, \quad (\text{F.57})$$

$$b_6 = a_2 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_3 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6} - a_4 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{4}, \quad (\text{F.58})$$

$$b_7 = a_3 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24} + a_4 \frac{\gamma_{1,t}^{t-1}}{6}, \quad (\text{F.59})$$

$$b_8 = a_4 \frac{\gamma_{2,t}^{t-1}}{24}. \quad (\text{F.60})$$

Podemos simplificar (F.48) se notarmos que

$$\frac{e}{d} = \frac{\rho_t \beta \sigma_\zeta}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2},$$

$$\begin{aligned} f - \frac{e^2}{d} &= \frac{\rho_t^2}{\sigma_\varepsilon^2} - \frac{\rho_t \beta^2 \sigma_\zeta^2}{(\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2) \sigma_\varepsilon^2} \\ &= \frac{\rho_t^2}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Utilizando as equações acima em (F.48) obtemos

$$\begin{aligned} p(x_t, y_t | y_{1:t-1}) &\cong \frac{1}{2\pi \sigma_\varepsilon \sigma_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[d \left(\zeta - \frac{e}{d} \right)^2 + f - \frac{e^2}{d} \right] \right\} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^i \right\} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\rho_t^2}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon \sigma_\zeta \sqrt{d}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \frac{e}{d}}{1/\sqrt{d}} \right)^2}}{\sqrt{2\pi} (1/\sqrt{d})} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^i \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.61})$$

A distribuição marginal de $y_t | y_{1:t-1}$ pode ser obtida por

$$p(y_t | y_{1:t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_t, y_t | y_{1:t-1}) dx_t.$$

Para efetuar a integral acima lembremos que

$$\zeta = \frac{x_t - \mu_\zeta}{\sigma_\zeta} \Rightarrow d\zeta = \frac{dx_t}{\sigma_\zeta}$$

e portanto

$$p(y_t|y_{1:t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu_\zeta + \sigma_\zeta \zeta, y_t|y_{1:t-1}) \sigma_\zeta d\zeta. \quad (\text{F.62})$$

Logo podemos escrever

$$p(y_t|y_{1:t-1}) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\rho_t^2}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon \sqrt{d}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \frac{e}{d}}{1/\sqrt{d}} \right)^2}}{\sqrt{2\pi} (1/\sqrt{d})} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^i \right\} d\zeta. \quad (\text{F.63})$$

Note agora que o núcleo da integral em (F.63) é uma densidade normal, com média e/d e desvio padrão $1/\sqrt{d}$, $\zeta \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$, onde

$$\mu_d = \frac{e}{d} = \frac{\rho_t \beta \sigma_\zeta}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2},$$

$$\sigma_d = \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}}.$$

O j -ésimo momento não central, m'_j , da distribuição $N(\mu_d, \sigma_d)$ é dado por

$$\begin{aligned} m'_j &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \frac{e}{d}}{1/\sqrt{d}} \right)^2}}{\sqrt{2\pi} (1/\sqrt{d})} \zeta^j d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \mu_d}{\sigma_d} \right)^2}}{\sqrt{2\pi} \sigma_d} \zeta^j d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{F.64})$$

Os momentos não centrais m'_j podem ser obtidos pela relação (F.22), de onde obtemos:

$$m'_0 = 1, \quad (\text{F.65})$$

$$m'_1 = \mu_d, \quad (\text{F.66})$$

$$m'_2 = \sigma_d^2 + \mu_d^2, \quad (\text{F.67})$$

$$m'_3 = 3\mu_d \sigma_d^2 + \mu_d^3, \quad (\text{F.68})$$

$$m'_4 = 3\sigma_d^4 + 6\mu_d^2 \sigma_d^2 + \mu_d^4, \quad (\text{F.69})$$

$$m'_5 = 15\mu_d\sigma_d^4 + 10\mu_d^3\sigma_d^2 + \mu_d^5, \quad (\text{F.70})$$

$$m'_6 = 15\sigma_d^6 + 45\mu_d^2\sigma_d^4 + 15\mu_d^4\sigma_d^2 + \mu_d^6, \quad (\text{F.71})$$

$$m'_7 = 105\mu_d\sigma_d^6 + 105\mu_d^3\sigma_d^4 + 21\mu_d^5\sigma_d^2 + \mu_d^7, \quad (\text{F.72})$$

$$m'_8 = 105\sigma_d^8 + 420\mu_d^2\sigma_d^6 + 210\mu_d^4\sigma_d^4 + 28\mu_d^6\sigma_d^2 + \mu_d^8, \quad (\text{F.73})$$

$$m'_9 = 945\mu_d\sigma_d^8 + 1260\mu_d^3\sigma_d^6 + 378\mu_d^5\sigma_d^4 + 36\mu_d^7\sigma_d^2 + \mu_d^9, \quad (\text{F.74})$$

$$\begin{aligned} m'_{10} = & 945\sigma_d^{10} + 4725\mu_d^2\sigma_d^8 + 3150\mu_d^4\sigma_d^6 + \\ & + 630\mu_d^6\sigma_d^4 + 45\mu_d^8\sigma_d^2 + \mu_d^{10}, \end{aligned} \quad (\text{F.75})$$

$$\begin{aligned} m'_{11} = & 10395\mu_d\sigma_d^{10} + 17325\mu_d^3\sigma_d^8 + 6930\mu_d^5\sigma_d^6 + \\ & + 990\mu_d^7\sigma_d^4 + 55\mu_d^9\sigma_d^2 + \mu_d^{11}, \end{aligned} \quad (\text{F.76})$$

$$\begin{aligned} m'_{12} = & 10395\sigma_d^{12} + 62370\mu_d^2\sigma_d^{10} + 51975\mu_d^4\sigma_d^8 + \\ & + 13860\mu_d^6\sigma_d^6 + 1485\mu_d^8\sigma_d^4 + 66\mu_d^{10}\sigma_d^2 + \mu_d^{12}. \end{aligned} \quad (\text{F.77})$$

No que segue é conveniente utilizar a seguinte notação:

$$g_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-\frac{\sigma}{d}}{1/\sqrt{d}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\left(1/\sqrt{d}\right)} \left\{ 1 + b_0 + \sum_{i=1}^8 b_i \zeta^i \right\} \zeta^k d\zeta. \quad (\text{F.78})$$

Note que podemos escrever (F.78) em função dos momentos não centrais m'_j da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-\frac{\mu_d}{\sigma_d}}{\sigma_d}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \left\{ 1 + b_0 + \sum_{i=1}^8 b_i \zeta^i \right\} \zeta^k d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-\frac{\mu_d}{\sigma_d}}{\sigma_d}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \left\{ (1 + b_0) \zeta^k + \sum_{i=1}^8 b_i \zeta^{k+i} \right\} d\zeta \end{aligned}$$

$$g_k = (1 + b_0) m'_k + \sum_{i=1}^8 b_i m'_{k+i}. \quad (\text{F.79})$$

Por exemplo, utilizando (F.66) a (F.77) podemos obter os escrever os 3 primeiros g_k em (F.79) por

$$g_0 = (1 + b_0) m'_0 + \sum_{i=1}^8 b_i m'_i, \quad (\text{F.80})$$

$$g_1 = m'_1 + \sum_{i=1}^8 b_i m'_{1+i}, \quad (\text{F.81})$$

$$g_2 = m'_2 + \sum_{i=1}^8 b_i m'_{2+i}, \quad (\text{F.82})$$

Assim, utilizando (F.78) podemos escrever a distribuição de $y_t|y_{1:t-1}$ como

$$p(y_t|y_{1:t-1}) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\rho_t^2}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}} g_0. \quad (\text{F.83})$$

Podemos finalmente obter a distribuição de $x_t|y_{1:t}$ através de

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(x_t, y_t|y_{1:t-1})}{p(y_t|y_{1:t-1})}. \quad (\text{F.84})$$

Utilizando (F.61) e (F.83) em (F.84) obtemos

$$p(x_t|y_{1:t}) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\rho_t^2}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon \sigma_\zeta \sqrt{d}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \mu_d}{\sigma_d} \right)^2}}{\sqrt{2\pi} \sigma_d} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^i \right\} \left[\frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\rho_t^2}{\beta^2 \sigma_\zeta^2 + \sigma_\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon \sqrt{d}} g_0 \right]^{-1}, \quad (\text{F.85})$$

Para que possamos desenvolver um procedimento recursivo para atualizar as estimativas para as variáveis latentes, precisamos aproximar a distribuição de $x_t|y_{1:t}$ através da expansão de Gram-Charlier. Para isso, vamos obter inicialmente os momentos não centrais $\mu'_r =$

$E[X_t^r|y_{1:t}]^2$:

$$\begin{aligned}
\mu'_r &= E[X_t^r|y_{1:t}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_t|y_{1:t}) x_t^r dx_t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu_\zeta + \sigma_\zeta \zeta|y_{1:t}) (\mu_\zeta + \sigma_\zeta \zeta)^r \sigma_\zeta d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu_\zeta + \sigma_\zeta \zeta|y_{1:t}) \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sigma_\zeta^j \zeta^j \mu_\zeta^{r-j} \sigma_\zeta d\zeta \\
&\cong \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-\mu_d}{\sigma_d}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta\sigma_d g_0} \left\{1 + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^i\right\} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sigma_\zeta^{j+1} \zeta^j \mu_\zeta^{r-j} d\zeta \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\sigma_\zeta^j \mu_\zeta^{r-j}}{g_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-\mu_d}{\sigma_d}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta\sigma_d} \left\{\zeta^j + \sum_{i=0}^8 b_i \zeta^{i+j}\right\} d\zeta \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\sigma_\zeta^j \mu_\zeta^{r-j}}{g_0} \left(m'_j + \sum_{i=0}^8 b_i m'_{i+j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\sigma_\zeta^j \mu_\zeta^{r-j}}{g_0} \left((1+b_0)m'_j + \sum_{i=1}^8 b_i m'_{i+j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{\sigma_\zeta^j \mu_\zeta^{r-j}}{g_0} g_j.
\end{aligned}$$

Logo

$$\mu'_r \cong \frac{1}{g_0} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sigma_\zeta^j \mu_\zeta^{r-j} g_j. \quad (\text{F.86})$$

Temos assim,

$$\mu'_1 \cong \mu_\zeta + \sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0}, \quad (\text{F.87})$$

$$\mu'_2 \cong \mu_\zeta^2 + 2\mu_\zeta \sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} + \sigma_\zeta^2 \frac{g_2}{g_0}. \quad (\text{F.88})$$

$$\mu'_3 \cong \mu_\zeta^3 + 3\mu_\zeta^2 \sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} + 3\mu_\zeta \sigma_\zeta^2 \frac{g_2}{g_0} + \sigma_\zeta^3 \frac{g_3}{g_0}, \quad (\text{F.89})$$

$$\mu'_4 \cong \mu_\zeta^4 + 4\mu_\zeta^3 \sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} + 6\mu_\zeta^2 \sigma_\zeta^2 \frac{g_2}{g_0} + 4\mu_\zeta \sigma_\zeta^3 \frac{g_3}{g_0} + \sigma_\zeta^4 \frac{g_4}{g_0}. \quad (\text{F.90})$$

Finalmente, podemos obter os momentos centrais da distribuição de $x_t|y_{1:t}$, $\mu_i =$

²A dedução a seguir foi desenvolvida pelo Prof. Gauss Moutinho Cordeiro.

$E \left[(X_t - E[X_t|y_{1:t}])^i | y_{1:t} \right]$, por (veja por exemplo, Stuart e Ord (1994), pg. 75):

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2, \quad (\text{F.91})$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu_1'^3, \quad (\text{F.92})$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4. \quad (\text{F.93})$$

Utilizando agora a nomenclatura do algoritmo recursivo (F.5) a (F.8) escrevemos:

$$\begin{aligned} \mu_t^t &= \mu_1' \\ &\cong \mu_\zeta + \sigma_\zeta \frac{g_1}{1+h}, \\ \mu_t^t &\cong \mu_t^{t-1} + \sigma_t^{t-1} \frac{g_1}{g_0}, \end{aligned} \quad (\text{F.94})$$

$$\begin{aligned} v_t^t &= (\sigma_t^t)^2 = \mu_2 \\ &= \mu_2' - \mu_1'^2 \\ &\cong \mu_\zeta^2 + 2\mu_\zeta\sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} + \sigma_\zeta^2 \frac{g_2}{g_0} - \left(\mu_\zeta + \sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} \right)^2 \\ &= \mu_\zeta^2 + 2\mu_\zeta\sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} + \sigma_\zeta^2 \frac{g_2}{g_0} - \mu_\zeta^2 - 2\mu_\zeta\sigma_\zeta \frac{g_1}{g_0} - \sigma_\zeta^2 \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^2 \\ &= \sigma_\zeta^2 \left[\frac{g_2}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^2 \right], \\ v_t^t &= (\sigma_t^t)^2 \cong v_t^{t-1} \left[\frac{g_2}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{F.95})$$

$$\gamma_{1,t}^t = \frac{\mu_3}{(\sigma_t^t)^3}, \quad (\text{F.96})$$

$$\gamma_{2,t}^t = \frac{\mu_4}{(\sigma_t^t)^4} - 3. \quad (\text{F.97})$$

Apêndice G

Estimativa das matrizes de covariância dos estimadores CECF e DECF

Neste apêndice vamos apresentar os resultados das estimativas das matrizes de covariância dos estimadores CECF e DECF para o modelo SCD, para os processos simulados com parâmetros conhecidos $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$ e 0.5 , aplicando para isso os resultados obtidos no capítulo 5.

As tabelas G.1 a G.5 apresentam os resultados obtidos com o método CECF. As matrizes $A(\theta_0)$ foram estimadas através de (5.10) e as matrizes $B(\theta_0)$ foram estimadas através de (5.18); a matriz $V = B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}$, e a matriz de covariância do estimador é dada por V/n .

As tabelas G.6 a G.10 apresentam os resultados obtidos com o método DECF. As matrizes $A(\theta_0)$ foram estimadas através de (5.41) e as matrizes $B(\theta_0)$ foram estimadas através de (5.40); a matriz $V = B(\theta_0)^{-1} A(\theta_0) B(\theta_0)^{-1}$, e a matriz de covariância do estimador é dada por V/n .

Tabela G.1: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição exponencial de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.

T 10,000 tamanho da amostra
p 1
m 100 tamanho da sequência
n 50 número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo 127,969 s 35.5 h

V	B	A
119.4 -181.2 182.4	203.4 134.3 0.0	250.2 164.4 -0.7
-181.2 274.8 -276.6	134.3 89.3 0.7	164.4 108.2 -0.3
182.4 -276.6 278.8	0.0 0.7 0.7	-0.7 -0.3 0.2

Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.011945 -0.01812 0.018238	1 -0.99998 0.99942	0.109
-0.01812 0.027477 -0.02766	-0.99998 1 -0.99945	0.166
0.018238 -0.02766 0.02788	0.99942 -0.99945 1	0.167

Tabela G.2: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.

T 10,000 tamanho da amostra
p 1
m 100 tamanho da sequência
n 50 número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo 155,290 s 43.1 h

V	B	A
694.5 -1,053.8 1,060.9 9.5	70.8 46.7 0.0 2.2	43.9 28.8 -0.2 1.9
-1,053.8 1,598.9 -1,609.7 -14.5	46.7 31.0 0.2 1.2	28.8 18.9 -0.1 1.2
1,060.9 -1,609.7 1,621.7 14.9	0.0 0.2 0.2 -0.3	-0.2 -0.1 0.0 -0.1
9.5 -14.5 14.9 0.5	2.2 1.2 -0.3 1.3	1.9 1.2 -0.1 0.5

Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.069452 -0.10538 0.106086 0.000955	1 -0.99999 0.99960 0.53595	0.264
-0.10538 0.159886 -0.16097 -0.00145	-0.99999 1 -0.99963 -0.5364	0.400
0.106086 -0.16097 0.162173 0.001487	0.99960 -0.99963 1 0.546186	0.403
0.000955 -0.00145 0.001487 4.57E-05	0.53595 -0.5364 0.546186 1	0.007

Tabela G.3: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.

T	10,000	tamanho da amostra
p	1	
m	100	tamanho da sequência
n	50	número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo	171,110 s	47.5 h

V	B	A
91.0 -138.2 141.0 40.6	410.4 270.8 0.0 1.8	831.5 547.7 -1.1 3.8
-138.2 209.9 -214.2 -61.7	270.8 180.5 1.8 1.0	547.7 361.2 -0.3 2.5
141.0 -214.2 218.7 63.3	0.0 1.8 1.8 -0.2	-1.1 -0.3 0.4 -0.1
40.6 -61.7 63.3 23.9	1.8 1.0 -0.2 0.0	3.8 2.5 -0.1 0.0

Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.0091 -0.01382 0.014104 0.004061	1 -0.99997 0.99967 0.87070	0.095
-0.01382 0.020989 -0.02142 -0.00617	-0.99997 1 -0.99970 -0.87095	0.145
0.014104 -0.02142 0.021872 0.006327	0.99967 -0.99970 1 0.875128	0.148
0.004061 -0.00617 0.006327 0.00239	0.87070 -0.87095 0.875128 1	0.049

Tabela G.4: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.

T	10,000	tamanho da amostra
p	1	
m	100	tamanho da sequência
n	50	número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo	141,073 s	39.2 h

V	B	A
4,221.9 -6,408.9 6,512.4 35.0	34.9 23.0 0.0 5.9	15.4 10.1 -0.1 2.9
-6,408.9 9,729.0 -9,886.3 -53.2	23.0 15.3 0.1 3.6	10.1 6.6 0.0 1.8
6,512.4 -9,886.3 10,050.6 54.6	0.0 0.1 0.1 -0.3	-0.1 0.0 0.0 -0.1
35.0 -53.2 54.6 0.5	5.9 3.6 -0.3 3.3	2.9 1.8 -0.1 1.2

Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.42219 -0.64089 0.651243 0.003503	1 -1.00000 0.99975 0.77855	0.650
-0.64089 0.972898 -0.98863 -0.00532	-1.00000 1 -0.99977 -0.77922	0.986
0.651243 -0.98863 1.005065 0.005462	0.99975 -0.99977 1 0.786952	1.003
0.003503 -0.00532 0.005462 4.79E-05	0.77855 -0.77922 0.786952 1	0.007

Tabela G.5: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.

T 10,000 tamanho da amostra
p 1
m 100 tamanho da sequência
n 50 número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo 155,290 s 43.1 h

V	B	A
694.5 -1,053.8 1,060.9 9.5	70.8 46.7 0.0 2.2	43.9 28.8 -0.2 1.9
-1,053.8 1,598.9 -1,609.7 -14.5	46.7 31.0 0.2 1.2	28.8 18.9 -0.1 1.2
1,060.9 -1,609.7 1,621.7 14.9	0.0 0.2 0.2 -0.3	-0.2 -0.1 0.0 -0.1
9.5 -14.5 14.9 0.5	2.2 1.2 -0.3 1.3	1.9 1.2 -0.1 0.5
Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.069452 -0.10538 0.106086 0.000955	1 -0.99999 0.99960 0.53595	0.264
-0.10538 0.159886 -0.16097 -0.00145	-0.99999 1 -0.99963 -0.5364	0.400
0.106086 -0.16097 0.162173 0.001487	0.99960 -0.99963 1 0.546186	0.403
0.000955 -0.00145 0.001487 4.57E-05	0.53595 -0.5364 0.546186 1	0.007

Tabela G.6: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição exponencial de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.

T 10,000 tamanho da amostra
p 1
m 100 tamanho da sequência
n 50 número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo 118,517 s 32.9 h

V	B	A
162 -245 245	7,279 4,804 0	228,118 141,435 -9,117
-245 371 -370	4,804 3,218 48	141,435 89,151 -4,162
245 -370 369	0 48 48	-9,117 -4,162 1,886
Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.016224 -0.02454 0.02445	1 -0.99999 0.99882	0.127
-0.02454 0.037107 -0.03698	-0.99999 1 -0.99895	0.193
0.02445 -0.03698 0.036934	0.99882 -0.99895 1	0.192

Tabela G.7: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.

T	10,000	tamanho da amostra
p	1	
m	100	tamanho da sequência
n	50	número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo	155,031 s	43.1 h

V				
139	-211	218	104	
-211	322	-332	-158	
218	-332	342	163	
104	-158	163	81	

B				
50,744	33,491	0	59	
33,491	22,744	648	-28	
0	648	657	-69	
59	-28	-69	13	

A				
4,919,803	3,290,464	54,279	-40,694	
3,290,464	2,234,698	70,680	-31,017	
54,279	70,680	35,395	-4,310	
-40,694	-31,017	-4,310	815	

Cov. estimador				
0.013897	-0.02114	0.021796	0.010361	
-0.02114	0.032154	-0.03315	-0.01577	
0.021796	-0.03315	0.034201	0.016313	
0.010361	-0.01577	0.016313	0.008075	

Correl.				
1	-1.00000	0.99975	0.97805	
-1.00000	1	-0.99979	-0.97844	
0.99975	-0.99979	1	0.981603	
0.97805	-0.97844	0.981603	1	

Desv. pad.	
0.118	
0.179	
0.185	
0.090	

Tabela G.8: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 2$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.

T	10,000	tamanho da amostra
p	1	
m	100	tamanho da sequência
n	50	número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo	141,626 s	39.3 h

V				
322	-489	498	221	
-489	743	-757	-336	
498	-757	772	344	
221	-336	344	164	

B				
25,115	16,576	0	34	
16,576	11,189	252	-3	
0	252	255	-26	
34	-3	-26	5	

A				
942,277	623,374	3,159	-6,353	
623,374	432,931	22,963	-6,972	
3,159	22,963	21,235	-2,845	
-6,353	-6,972	-2,845	446	

Cov. estimador				
0.032219	-0.04891	0.049846	0.022127	
-0.04891	0.074254	-0.07567	-0.0336	
0.049846	-0.07567	0.077153	0.034374	
0.022127	-0.0336	0.034374	0.016367	

Correl.				
1	-1.00000	0.99976	0.96356	
-1.00000	1	-0.99979	-0.96395	
0.99976	-0.99979	1	0.967315	
0.96356	-0.96395	0.967315	1	

Desv. pad.	
0.179	
0.272	
0.278	
0.128	

Tabela G.9: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição Weibull de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método DECF. Veja o texto para mais detalhes.

T	10,000	tamanho da amostra
p	1	
m	100	tamanho da sequência
n	50	número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo	144,400 s	40.1 h

V	B	A
12,879	578	6,271
-19,547	382	4,206
19,755	0	66
89	83	539
-19,547	253	4,206
29,669	1	2,834
-29,984	1	58
30,315	-6	15
137	56	-76
-135		539
137		282
1		-76
		584

Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
1.2879	1	1.135
-1.95475	-1.00000	1.722
2.966881	0.99981	1.741
-2.99845	-0.99982	0.010
3.031451	1	
0.013745	0.82140	
0.008906	-0.8219	
0.013745	0.826343	
9.13E-05	1	

Tabela G.10: Estimativa da matriz de covariância do modelo SCD com distribuição gama de parâmetros $\delta = 0.033$, $\phi = 0.95$, $\sigma_\eta = 0.1$ e $\lambda = 0.5$, através do método CECF. Veja o texto para mais detalhes.

T	10,000	tamanho da amostra
p	1	
m	100	tamanho da sequência
n	50	número de nós da quadratura de Gauss-Hermite
tempo	136,813 s	38.0 h

V	B	A
1,048	1,689	33,074
-1,589	1,115	21,466
1,599	743	14,027
17	7	-365
-1,589	0	-140
2,409	7	103
-2,423	7	-186
2,441	-10	-171
26	29	492
-25		
26		
1		

Cov. estimador	Correl.	Desv. pad.
0.104815	1	0.324
-0.15889	-0.99999	0.491
0.240853	0.99947	0.494
-0.24234	-0.99952	0.010
0.244067	1	
0.002596	0.51017	
0.001657	-0.51105	
0.002596	0.523797	
0.000101	1	

Apêndice H

Aplicação empírica - outras estimativas

Neste apêndice apresentamos os resultados obtidos para as durações de negócio e preço para a GE, Microsoft e USD/EUR.

H.1 Resultados para a GE

A figura H.1 ilustra os dados dessazonalizados da GE. Note que o *split* das ações do dia 12/03/1997 (primeira observação 16686) produziu uma “quebra” no regime das durações de negociação (*trade duration*) e de preço (*price duration*), mas que não aparece nas durações de volume (*volume duration*). É possível também notar o perfil característico de “U” invertido para o efeito diurno para as durações de negociação e volume, mas um perfil um pouco diferente para as durações de preço.

H.1.1 Duração de negócio

Figura H.1: Dados da GE:

Cima: duração de negócio (*trade duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de negócio dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001
ϕ	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
σ_η	0.022	0.028	0.031	0.022	0.028	0.030
λ	1.461	1.474	1.381	1.739	1.825	1.732
Tempo (s)	17.2	13.4	51.4	11.9	13.5	7.4

Tabela H.1: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (*trade duration*) da GE, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

Figura H.2: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (*trade duration*) da GE, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.3: Estimativa da variável latente para a duração de negócio (*trade duration*) da GE.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.4: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio da GE: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

Figura H.5: Dados da GE:

Cima: duração de preço (*price duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de preço dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	-0.009	-0.015	-0.015	-0.010	-0.017	-0.017
ϕ	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989
σ_η	0.194	0.247	0.271	0.194	0.265	0.293
λ	0.700	0.613	0.596	0.630	0.534	0.501
Tempo (s)	1.0	10.7	22.7	0.3	10.3	13.5

Tabela H.2: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de preço (*price duration*) da GE, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

H.1.2 Duração de preço

Figura H.6: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de preço (*price duration*) da GE, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.7: Estimativa da variável latente para a duração de preço (*price duration*) da GE. Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier. Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.8: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de preço da GE: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

Figura H.9: Dados da Microsoft:

Cima: duração de negócio (*trade duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de negócio dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	-0.004	-0.008	-0.012	-0.004	-0.007	-0.011
ϕ	0.977	0.977	0.977	0.977	0.978	0.977
σ_{η}	0.072	0.096	0.113	0.071	0.092	0.106
λ	1.678	1.738	1.683	2.165	2.349	2.377
Tempo (s)	334.1	14.1	19.6	332.6	12.2	12.2

Tabela H.3: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (*trade duration*) da Microsoft, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

H.2 Resultados para a Microsoft

A figura H.9 ilustra os dados dessazonalizados de Microsoft, que tem comportamento análogo ao da GE.

H.2.1 Duração de negócio

Figura H.10: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (*trade duration*) da Microsoft, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.11: Estimativa da variável latente para a duração de negócio (*trade duration*) da Microsoft.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.12: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio da Microsoft: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

Figura H.13: Dados da Microsoft:

Cima: duração de preço (*price duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de preço dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	-0.007	-0.010	-0.011	-0.007	-0.011	-0.013
ϕ	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989
σ_{η}	0.072	0.098	0.123	0.072	0.123	0.155
λ	0.807	0.706	0.665	0.753	0.659	0.608
Tempo (s)	1.2	14.6	29.2	2.0	14.4	9.5

Tabela H.4: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de preço (*price duration*) da Microsoft, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

H.2.2 Duração de preço

Figura H.14: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de preço (*price duration*) da Microsoft, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.15: Estimativa da variável latente para a duração de preço (*price duration*) da Microsoft.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.16: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de preço da Microsoft: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

Figura H.17: Dados de USD/EUR:

Cima: duração de negócio (*trade duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de negócio dessazonalizada e respectivo logaritmo.

H.3 Resultados para USD/EUR

A figura H.17 ilustra os dados dessazonalizados de USD/EUR. Note que o perfil do efeito diurno é bastante diferente das ações da NYSE, com menores durações (maior atividade do mercado) entre 8:00 e 16:30, de maneira praticamente uniforme neste intervalo e aumentando a duração fora do intervalo. Além disso, mesmo utilizando uma largura de banda pequena para capturar maiores detalhes, não conseguimos eliminar completamente o efeito diurno nas durações de negociação. Por isso, propomos um outro método de dessazonalização em uma seção a seguir.

H.3.1 Duração de negócio

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000
ϕ	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
σ_{η}	0.010	0.016	0.019	0.010	0.010	0.017
λ	1.799	1.888	1.923	2.428	2.541	2.957
Tempo (s)	495.5	16.3	16.6	495.9	8.2	40.4

Tabela H.5: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (*trade duration*) de USD/EUR, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

Figura H.18: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (*trade duration*) de USD/EUR, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.19: Estimativa da variável latente para a duração de negócio (*trade duration*) de USD/EUR.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.20: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio de USD/EUR: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

Figura H.21: Dados de USD/EUR:

Cima: duração de preço (*price duration*) e respectiva componente diurna.

Baixo: duração de preço dessazonalizada e respectivo logaritmo.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	-0.181	-0.003	-0.081	-0.175	-0.004	-0.052
ϕ	0.600	0.855	0.108	0.600	0.849	0.120
σ_η	0.997	0.228	0.739	0.997	0.233	0.685
λ	1.291	0.956	1.188	1.441	0.932	1.225
Tempo (s)	0.1	47.3	34.3	0.2	40.7	21.5

Tabela H.6: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de preço (*price duration*) de USD/EUR, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

H.3.2 Duração de preço

Figura H.22: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de preço (*price duration*) de USD/EUR, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.23: Estimativa da variável latente para a duração de preço (*price duration*) de USD/EUR.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.24: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de preço de USD/EUR: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

H.3.3 Ln duração de negócio

Podemos observar pela figura H.17, que não conseguimos eliminar a sazonalidade dos dados com a transformação utilizada no capítulo 8. Assim vamos examinar o efeito de uma outra transformação nas durações de preço de USD/EUR. Para isso vamos utilizar a seguinte transformação:

$$Y_j = \ln D_j,$$

onde D_i é a duração. Podemos efetuar a dessazonalização na log-furação Y_j por

$$y_j = \frac{Y_j}{\phi(\tau_j)}$$

onde a variável aleatória y_i é modelada através do modelo SCD. Assim, podemos escrever

$$D_j = e^{\phi(\tau_j)y_j}.$$

Se chamarmos de a duração dessazonalizada de D_j^* , dada por

$$D_j^* = e^{y_j}$$

temos que

$$\begin{aligned} D_j^* &= e^{y_j} \\ &= e^{\frac{Y_j}{\phi(\tau_j)}} \\ &= e^{\frac{\ln D_j}{\phi(\tau_j)}} \\ &= e^{\ln D_j^{1/\phi(\tau_j)}} \\ &= D_j^{1/\phi(\tau_j)}. \end{aligned}$$

Ou seja, neste caso, a dessazonalização é dada por

$$D_j^* = D_j^{1/\phi(\tau_j)}.$$

Para obter a função $\phi(\tau_j)$ utilizamos o estimador não paramétrico de Nadaraya-Watson, com largura de banda de 12 960 (sugestão do EViews) com *kernel* Gaussiano.

Figura H.25: Dados de USD/EUR:

Cima: duração de negócio (*trade duration*) e respectivo logaritmo.

Baixo: componente diurno do logaritmo da duração de negócio e logaritmo da duração de negócio dessazonalizado.

Parâmetro	Weibull			Gamma		
	QML	CECF	DECF	QML	CECF	DECF
δ	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
ϕ	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
$\sigma\eta$	0.016	0.024	0.029	0.016	0.023	0.028
λ	1.271	1.327	1.308	1.407	1.572	1.629
Tempo (s)	488.8	15.8	113.4	96.2	14.3	68.2

Tabela H.7: Estimação dos parâmetros do modelo SCD para a duração de negócio (*trade duration*) de USD/EUR, considerando distribuições Weibull e gama para os erros.

Figura H.26: Partes real (esquerda) e imaginária (direita) da função característica empírica (cima) e das funções características com distribuição gama para a duração de negócio (*trade duration*) de USD/EUR, calculadas em θ_{QML} (meio) e θ_{CECF} (baixo), para a malha de 39 nós da quadratura de Gauss-Hermite.

Figura H.27: Estimativa da variável latente para a duração de negócio (*trade duration*) de USD/EUR.

Cima: de cima para baixo temos os seguinte filtros calculados em θ_{CECF} : (1) Log-durações; (2) filtro de Kalman; (3) filtro Bayesiano; (4) filtro Gram-Charlier.

Baixo: primeiras 200 observações dos filtros.

Figura H.28: De cima para baixo temos os gráficos de quantis dos resíduos obtidos com os filtros calculados em θ_{CECF} com distribuição gama para a duração de negócio de USD/EUR: (1) filtro de Kalman; (2) filtro Bayesiano; (3) filtro Gram-Charlier; (4) função de autocorrelação dos resíduos do filtro de Kalman.

À esquerda vemos os resíduos da equação de observação e à direita os resíduos da equação de estado. As linhas representam os limites do intervalo de 95% de confiança, obtidos através de simulação.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover.
- Amemiya, T. (1985). *Advanced Econometrics*. Harvard University Press.
- Andrews, D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, 59(3):817–858.
- Arad, R. W. (1980). Parameter estimation for symmetric stable distribution. *International Economic Review*, 21(1):209–220.
- Balitskaya, E. O. e Zolotuhina, L. A. (1988). On the representation of a density by an Edgeworth series. *Biometrika*, 75(1):185–187.
- Barton, D. E. e Dennis, K. E. (1952). The conditions under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive and unimodal. *Biometrika*, 39(3/4):425–427.
- Bauwens, L. e Veredas, D. (2004). The stochastic conditional duration model : A latent variable model for the analysis of financial durations. *Journal of Econometrics*, 119:381–412.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, third edição.
- Bilodeau, M. e de Micheaux, P. L. (2005). A multivariate empirical characteristic function test of independence with normal margins. *Journal of Multivariate Analysis*, 95:345–369.
- Bodie, Z.; Kane, A. e Marcus, A. J. (2002). *Investments*. McGraw-Hill/Irwin, fifth edição.
- Briers, M.; Doucet, A. e Maskell, S. (2004). Smoothing algorithms for state-space models. Technical Report CUED/F-INFENG/TR.498, Signal Processing Group - Department of Engineering - University of Cambridge.
- Brockwell, P. J. e Brown, B. M. (1981). High-efficiency estimation for the positive stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, 76(375):626–631.
- Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer, second edition edição.

- Brockwell, P. J. e Liu, J. (1992). Estimating the noise parameters from observations of a linear processes with stable innovations. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 33:175–186.
- Cabaña, A. e Quiroz, A. J. (2005). Using the empirical characteristic function in testing for the Weibull and the type I extreme value distributions. *Test*, 14(2):111–999.
- Carrasco, M. e Florens, J.-P. (2000a). Estimation of a mixture via the empirical characteristic function. Working paper, <http://www.econometricsociety.org/meetings/wc00/pdf/0514.pdf>.
- Carrasco, M. e Florens, J.-P. (2000b). Generalization of GMM to a continuum of moment conditions. *Econometric Theory*, 16:797–834.
- Carrasco, M. e Florens, J.-P. (2002). Efficient GMM estimation using the empirical characteristic function. GREMAQ-University of Toulouse Working Paper, <http://courses.ats.rochester.edu/carrasco/facweb/CarrascoPapers/chara8.pdf>.
- Chacko, G. e Viceira, L. M. (2003). Spectral GMM estimation of continuous-time processes. *Journal of Econometrics*, 116:259–292.
- Challa, S.; Bar-Shalom, Y. e Krishnamurthy, V. (2000). Nonlinear filtering via generalized edgeworth series and gauss hermite quadrature. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(6):1816–1820.
- Chen, A. e Bickel, P. (2003). Efficient Independent Component Analysis (i). TECHNICAL REPORTS n°634, Statistics Department, University of California, Berkeley.
- Csörgö, S. (1981). Limit behavior of the empirical characteristic function. *The Annals of Statistics*, 9(1):130–144.
- Csörgö, S. e Heathcote, C. R. (1987). Testing for symmetry. *Biometrika*, 74(1):177–184.
- Davidson, J. (1994). *Stochastic Limit Theory*. Oxford University Press.
- der Vaart, A. W. V. (1998). *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press.
- Draper, N. R. e Tierney, D. (1972). Regions of positive and unimodal series expansion of the Edgeworth and Gram-Charlier approximations. *Biometrika*, 59(2):463–465.
- Duffie, D.; Pan, J. e Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343–1376.
- Durbin, J. e Koopman, S. J. (2000). Time series analysis of non-gaussian observations based on state space models from both classical and bayesian perspectives. *Journal of the Royal Statistical Society*, 62:3–56.

- Engle, R. F. e Russell, J. R. (1998). Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*, 66(5):1127–1162.
- Epps, T. W. (1987). Testing that a stationary time series is gaussian. *The Annals of Statistics*, 15(4):1683–1698.
- Epps, T. W. e Pulley, L. B. (1983). A test for normality based on the empirical characteristic function. *Biometrika*, 70(3):723–726.
- Fearnhead, P. (1998). *Sequential Monte Carlo Methods in Filter Theory*. PhD thesis, Merton College, University of Oxford.
- Feuerverger, A. (1990). An efficiency result for the empirical characteristic function in stationary time-series models. *The Canadian Journal of Statistics*, 18(2):155–161.
- Feuerverger, A. e McDunnough, P. (1981a). On some Fourier methods for inference. *Journal of the American Statistical Association*, 76(374):379–387. Theory and Methods Section.
- Feuerverger, A. e McDunnough, P. (1981b). On the efficiency of empirical characteristic function procedures. *Journal of the Royal Statistics Society - Series B*, 43(1):20–27.
- Feuerverger, A. e McDunnough, P. (1984). On statistical transform methods and their efficiency. *The Canadian Journal of Statistics*, 12(4):303–317.
- Feuerverger, A. e Mureika, R. A. (1977). The empirical characteristic function and its applications. *The Annals of Statistics*, 5(1):88–97.
- Frangakis, C. F. (2005). Lecture notes on advanced statistical theory I-II. Course 140.771-2, Dep. of Biostatistics, Johns Hopkins School of Public Health.
- Gupta, R. D. e Kundu, D. (2000). Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 41(16):173–188.
- Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50(4):1029–1054.
- Hayashi, F. (2000). *Econometrics*. Princeton University Press.
- Heathcote, C. R. (1977). The integrated squared error estimation of parameters. *Biometrika*, 64(2):255–264.
- Hesse, C. H. (1990). Rates of convergence for the empirical distribution and the empirical characteristic function of a broad class of linear processes. *Journal of Multivariate Analysis*, 35:186–202.
- Hong, Y. (1999). Hypothesis testing in time series via the empirical characteristic function: A generalized spectral density approach. *Journal of the American Statistical Association*, 94(448):1201–1220.

- Hong, Y. (2000). Generalized spectral tests for serial dependence. *Journal of the Royal Statistical Society - Series B*, 62(3):557–574.
- Hu, Y. e Ridder, G. (2006). Estimation of nonlinear models with mismeasured regressors using marginal information. Working paper, <http://www.eco.utexas.edu/faculty/Hu/EIV-marg-final.pdf>.
- Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. John Wiley and Sons.
- Ibragimov, I. A. e Linnik, Y. V. (1971). *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen.
- Jäckel, P. (2005). A note on multivariate Gauss-Hermite quadrature.
- Jennrich, R. I. (1969). Asymptotic properties of non-linear least squares estimators. *The Annals of Mathematical Statistics*, 40:633–643.
- Jiang, G. J. e Knight, J. L. (2001). Efficient estimation of Markov models where the density is unknown. Working paper, <http://www.vanderbilt.edu/econ/sem papers/Knight.pdf>.
- Jiang, G. J. e Knight, J. L. (2002). Estimation of continuous time processes via the empirical characteristic function. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20:198–212.
- Jondeau, E. e Rockinger, M. (1999). Estimating Gram-Charlier expansions with positivity constraints. Technical report, Banque de France, Notes d'Études et de Recherche, NER 56.
- Kellermeier, J. (1980). The empirical characteristic function and large sample hypothesis testing. *Journal of Multivariate Analysis*, 10:78–87.
- Kitagawa, G. (1987). Non-gaussian state-space modelling of nonstationary time series. *Journal of the American Statistical Association*, 82(400):1032–1063.
- Klar, B. e Meintanis, S. G. (2005). Tests for normal mixtures based on the empirical characteristic function. *Computational Statistics and Data Analysis*, 49:227–242.
- Kleiber, C. e Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Science*. Wiley Interscience.
- Knight, J. L. e Satchell, S. E. (1997). The cumulant generating function estimation method. *Econometric Theory*, 13:170–184.
- Knight, J. L.; Satchell, S. E. e Yu, J. (2002). Estimation of the stochastic volatility model by the empirical characteristic function. *Australian New Zealand Journal of Statistics*, 44(3):319–335.
- Knight, J. L. e Yu, J. (2002). Empirical characteristic function in time series estimation. *Econometric Theory*, 18:691–721.

- Kogon, S. M. e Williams, D. B. (1998). *Characteristic Function Based Estimation of Stable Distribution Parameters*, pp. 311–335. Birkhäuser.
- Koutrouvelis, I. A. (1982). Estimation of location and scale in Cauchy distributions using the empirical characteristic function. *Biometrika*, 69(1):205–213.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons.
- Lacey, M. T. (1989). Laws of the iterated logarithm for the empirical characteristic function. *The Annals of Probability*, 17(1):292–300.
- Leitch, R. A. e Paulson, A. S. (1975). Estimation of stable law parameters: Stock price behavior application. *Journal of the American Statistical Association*, 70(351):690–697.
- Li, T. e Hsiao, C. (2004). Robust estimation of generalized linear models with measurement errors. *Journal of Econometrics*, 118:51–65.
- Lima, E. L. (2002). *Curso de Análise*, volume 1. IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 10^a edição.
- Lukacs, E. (1970). *Characteristic Functions*. Griffin, London, 2nd. edição.
- Lukacs, E. (1983). *Developments in Characteristic Functions*. Griffin, London.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- Madhavan, A. (2000). Market microstructure: A survey. *Journal of Financial Markets*, 3:205–258.
- Marcus, M. (1981). Weak convergence of the empirical characteristic function. *The Annals of Probability*, 9(2):194–201.
- Meintanis, S. e Ushakov, N. G. (2004). Binned goodness-of-fit tests based on the empirical characteristic function. *Statistics and Probability Letters*, 69:305–314.
- Meintanis, S. G. (2005). Consistent tests for symmetric stability with finite mean based on the empirical characteristic function. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 128:373–380.
- Montfort, K. V. e Mooijaart, A. (1989). Estimation of regression coefficients with the help of characteristic functions. *Journal of Econometrics*, 41:267–278.
- Murata, N. (2001). Properties of the empirical characteristic function and its application to testing for independence. In *Proceedings of 3rd International Conference on ICA and Blind Source Separation*, pp. 19–24, San Diego, CA.
- Murota, K. e Takeuchi, K. (1981). The studentized empirical characteristic function and its application to test for the shape of distribution. *Biometrika*, 68(1):55–65.

- Nakamura, M.; Pérez, F. J. e Quiroz, A. J. (1996). Estimation of multivariate Box-Cox transformation to elliptical symmetry via the empirical characteristic function. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 48(4):687–709.
- Newey, W. K. e West, K. D. (1994). Automatic lag selection in covariance matrix estimation. *Review of Economic Studies*, 61:631–653.
- Pacurar, M. (2006). Autoregressive conditional duration (ACD) models in finance: A survey of the theoretical and empirical literature. Working paper, <http://neumann.hec.ca/gestiondesrisques/06-10.pdf>.
- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33:1065–1076.
- Paulson, A. S. e Delehanty, T. A. (1985). Modified weighted squared error estimation procedures with special emphasis on the stable laws. *Communications in Partial Differential Equations*, 14(4):927–972.
- Paulson, A. S.; Holcomb, E. W. e Leitch, R. A. (1975). The estimation of the parameters of stable laws. *Biometrika*, 62(1):163–170.
- Press, S. J. (1972). Estimation in univariate and multivariate stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340):842–846.
- Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A. e Vetterling, W. T. (1997). *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press.
- Robert, C. P. e Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, 2nd. edição.
- Rockinger, M. e Semenova, M. (2005). Estimation of jump-diffusion processes via empirical characteristic function. Technical Report 150, FAME - International Center for Financial Asset Management and Engineering, Université de Genève. <http://www.fame.ch/library/EN/RP150.pdf>.
- Rubin, H. (1956). Uniform convergence of random functions with applications to statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, 27:200–203.
- Schmidt, P. (1982). An improved version of the Quandt-Ramsey MGF estimator for mixtures of normal distributions and switching regressions. *Econometrica*, 50(2):501–516.
- Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons.
- Shiryaev, A. N. (1991). *Probability*. Springer, 2nd. edição.
- Shumway, R. H. e Stoffer, D. S. (2000). *Time Series Analysis and its Applications*. Springer.

- Silva, A. C.; Prange, R. E. e Yakovenko, V. M. (2004). Exponential distribution of financial returns at mesoscopic time lags: A new stilized fact. *Physica A*, pp. 227–235.
- Singleton, K. J. (2001). Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *Journal of Econometrics*, 102:111–141.
- Singleton, K. J. (2006). *Empirical Dynamic Asset Pricing: Model Specification and Econometric Assessment*. Princeton University Press.
- Smith, P. J. (1995). A recursive formulation of the old problem of obtaining moments from cumulants and vice-versa. *The American Statistician*, 49(2):217–218.
- Sorenson, H. W. (1988). *Recursive Estimation for Nonlinear Dynamic Systems*, chapter 6, pp. 127–164. CRC.
- Sorenson, H. W. e Stubberud, A. R. (1968). Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density. *International Journal of Control*, 8(1):33–51.
- Srinivasan, K. (1970). State estimation by orthogonal expansion of probability distributions. *IEEE Transactions on Automation Control*, AC-15(1):3–10.
- Strickland, C. M.; Forbes, C. S. e Martin, G. M. (2005). Bayesian analysis of the stochastic conditional duration model. Working paper, http://www-personal.buseco.monash.edu.au/~gmartin/stricklandetal_SCD_2005.pdf.
- Strickland, C. M.; Forbes, C. S. e Martin, G. M. (2006). Bayesian analysis of the stochastic conditional duration model. *Computational Statistics and Data Analysis*, 50:2247–2267.
- Stuart, A. e Ord, J. K. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, volume 1 - Distribution Theory. Arnold, sixth edição.
- Stute, W. (1983). Empirical processes indexed by smooth functions. *Stochastic Processes and their applications*, 14:55–66.
- Thorton, J. C. e Paulson, A. S. (1977). Asymptotic distribution of characteristic function-based estimators for the stable laws. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 39:341–354.
- Tsay, R. S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley and Sons.
- Wells, M. T. (1992). The weak approximation of the empirical characteristic function process when parameters are estimated. *Stochastic Processes and their applications*, 40:83–102.
- White, H. (2000). *Asymptotic Theory for Econometricians*. Academic Press, revised edição.
- Yan, B. e Zivot, E. (2003). Analysis of high-frequency financial data with s-plus. Department of Economics, University of Washington.
- Yu, J. (2004). Empirical characteristic function estimation and its application. *Econometric Reviews*, 23(2):93–123.

Yukich, J. E. (1985). Weak convergence of the empirical characteristic function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(3):470–473.