Modelo de cointegração variando com o tempo: Abordagem via ondaletas

Eder Lucio da Fonseca

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa de Pós-Graduação em Estatística
Orientador: Profa. Dra. Airlane Pereira Alencar
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

São Paulo, Novembro de 2016.

Modelo de cointegração variando com o tempo: Abordagem via ondaletas

Esta versão da tese de Eder Lucio da Fonseca contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 06/03/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

COMISSÃO JULGADORA:

- Profa. Dra. Airlane Pereira Alencar - IME-USP (Presidente)
- Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin - IME-USP
- Profa. Dra. Thelma Safadi - UFLA
- Prof. Dr. Rogério de Faria Porto - Banco do Brasil
- Prof. Dr. Denisard Cneio de Oliveira Alves - FEA-USP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar conforto e esperança nos momentos em que mais precisei. Por sempre ouvir minhas preces e por ser um importante guia que impulsiona a minha vida. Agradeço por me trazer até aqui.

Agradeço carinhosamente meus pais Osvaldir Lucio da Fonseca e Sônia Aparecida Borges Fonseca, por apoiarem incondicionalmente os meus projetos de vida. Agradeço pelo amor, dedicação e zelo para com a nossa família. Agradeço principalmente por serem exemplos de caráter, honestidade e integridade. A eles todo o meu amor, respeito e gratidão.

Aos meus dois amados irmãos Eber Lucio da Fonseca e Franciele Borges Fonseca, por serem presenças constantes e queridas em minha vida. Agradecimento à minha cunhada Cristina Silva e à Yasmin Vitória Fonseca, minha querida sobrinha.

Aos meus queridos sogros Plínio Teixeira da Silva e Maria das Graças P. da Silva, por serem pessoas maravilhosas e por me tratarem como a um filho. Agradeço às minhas duas cunhadas/irmãs Adriana Almeida P. da Silva e Ângela P. da Silva (eterna Man) pelo apoio e pelas risadas despendidas gratuitamente.

Especial agradecimento à Andréa Almeida P. da Silva, amor da minha vida, por me apoiar em todos os momentos, incondicionalmente. Razão do meu viver, luz da minha vida! Agradeço também ao nosso cãozinho Malik, por continuar ao meu lado, sempre vigilante, principalmente nas solitárias madrugadas de estudo.

Agradeço à minha orientadora Airlane Pereira Alencar, por sempre me apoiar e contribuir para o meu crescimento científico, intelectual e profissional. Por sempre estar aberta ao diálogo e por sempre estar disposta a ouvir as minhas ideias. Por sempre poder contar com a sua ajuda. Agradeço pelo privilégio de ter sido seu orientado.

Aos Professores do IME Airlane Pereira Alencar, Pedro Alberto Morettin, Chang Chiann, Julio da Motta Singer, Silvia Nagib Elia e Carlos Alberto de Bragança Pereira (Carlinhos) por serem exemplos de conhecimento científico e excelência, fazendo jus ao grande instituto e à grande universidade que representam. A eles todo o meu respeito e admiração pelos profissionais que são.

Aos funcionários da secretaria de Pós-Graduação do IME, por toda a assistência prestada. À Universidade de São Paulo e ao IME, pela oportunidade e insumos fornecidos durante a realização do meu doutorado. À CAPES agradeço pelo apoio financeiro.

Modelos são, em sua maior parte, caricaturas da realidade. Se eles são bons, então como boas caricaturas, eles retratam, embora de uma maneira distorcida, algumas das características do mundo real. O principal papel dos modelos não é apenas explicar e prever - embora estas sejam as principais funções da ciência - é também polarizar o pensamento e fazer perguntas pertinentes.

Mark Kak, Some mathematical models in Science.

Resumo

FONSECA, E. L. **Modelo de cointegração variando com o tempo: Abordagem via ondaletas**. 2016. 123 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Duas ou mais séries não estacionárias são cointegradas se existir uma relação de equilíbrio de longo prazo entre elas. Nas últimas décadas, o interesse na literatura sobre o tema cointegração aumentou de maneira expressiva. Os modelos tradicionais supõem que o vetor de cointegração não varia ao longo do tempo. Entretanto, existem evidências na literatura de que esta suposição pode ser considerada muito restritiva. Utilizando o conceito de ondaletas, propomos um modelo de correção de erros vetorial em que é permitido ao vetor de cointegração variar ao longo do tempo. Diferente de trabalhos similares, é permitido ao vetor de cointegração variar suave ou abruptamente, dependendo da família de ondaletas considerada. Experimentos de Monte Carlo foram utilizados para estudar os quantis e o poder do teste de razão de verossimilhanças entre as hipóteses de cointegração usual e a de cointegração variando com o tempo. Os experimentos sugerem que o teste possui poder contra alternativas que variam ao longo do tempo. Foi demonstrada a capacidade do modelo em lidar satisfatoriamente com séries cointegradas simuladas, que apresentavam mudança de regime para o vetor de cointegração. O modelo foi empregado ainda para testar a validade da hipótese de paridade de poder de compra entre Estados Unidos e doze países da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD): Canadá, Japão e mais dez países europeus. Assim como em trabalhos similares, foram verificadas evidências de cointegração variando com o tempo entre os países. Foram utilizados valores-*p* bootstrap para verificar a significância da estatística do teste.

Palavras-chaves: Modelo Autorregressivo Vetorial Cointegrado (VAR), Modelo de Correção de Erros (VEC), Ondaletas, Cointegração Dinâmica, Paridade de Poder de Compra dinâmica, Métodos Bootstrap.

Abstract

FONSECA, E. L. **Time varying cointegration model: Approach using wavelets.** 2016. 123 f. Doctoral Thesis - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Two or more non-stationary time series are cointegrated if there is a long-run equilibrium relationship between them. In recent decades, interest in the literature on the subject of cointegration increased expressively. Traditional models that address this issue assume that the cointegration vector does not vary over time. However, there is evidence in the literature that this assumption can be considered very restrictive. Using the concept of wavelets, we propose a vector error correction model in which is allowed to the cointegration vector vary over time. Unlike similar works, the cointegration vector is allowed to vary smoothly or abruptly, depending on the considered family of wavelets. Monte Carlo experiments were used to study the quantiles and the power of the likelihood ratio test of the hypotheses of usual cointegration versus the time-varying cointegration. The experiments suggest that the test has power against alternatives that vary over time. It was demonstrated the ability of the model to deal satisfactorily with simulated cointegrated series, which presented regime change for the cointegration vector. The model was also used to test the validity of the Purchasing Power Parity hypothesis between United States and twelve countries of the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD): Canada, Japan and ten other European countries. As in similar works, evidence of time-varying cointegration was verified among countries. Bootstrap p-values were used to verify the significance of the likelihood ratio of the test.

Key-words: Cointegrated Vectorial Autoregressive Models (VAR), Error Correction Models (VEC), Wavelets, Dynamic Cointegration, Dinamic Purchasing Power Parity, Bootstrap Methods.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	x
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xvi
1 Introdução	1
2 Processos cointegrados e Modelo VEC	4
2.1 Processos cointegrados	4
2.2 Modelo VAR na forma de correção de erros	7
2.3 Função de verossimilhança condicional	9
2.4 Estimadores de máxima verossimilhança	11
2.5 Paridade de Poder de Compra	16
3 Representação de sinais utilizando ondaletas	19
3.1 Ondaletas	19
3.2 Famílias de ondaletas	20
3.2.1 Família de ondaletas Haar	20
3.2.2 Família de ondaletas Daublet	22
3.2.3 Família de ondaletas Symmlet	23
3.3 Limiarização de ondaletas - contexto univariado	24
3.4 Limiarização de ondaletas - contexto multivariado	26
4 Modelo VEC variando com o tempo	29
4.1 Construção do modelo	29
4.2 Função de verossimilhança condicional	32
4.3 Estimadores de máxima verossimilhança	33
4.4 Construindo os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros	38
4.4.1 Estimadores normalizados	40
4.4.2 Caso especial - Modelo sem diferenças defasadas	42
4.5 Teste de razão de verossimilhanças	43

4.6	Testes bootstrap - Propriedades empíricas dos estimadores	44
4.7	Paridade de Poder de Compra variando com o tempo	46
4.7.1	Modelo desconsiderando o intercepto	46
4.7.2	Modelo considerando o intercepto variando com o tempo e matriz de cointegração fixa	46
5	Relações de cointegração simuladas	51
5.1	Quantis empíricos e poder empírico do teste de razão de verossimilhanças .	51
5.2	Exemplos sem defasagem	56
5.2.1	Primeiro exemplo: Inversão de sinal ao longo do tempo com Haar .	56
5.2.2	Segundo exemplo: Vetor de cointegração constante com Haar	63
5.2.3	Terceiro exemplo: Três escalas ao longo do tempo com Haar	68
5.2.4	Quarto exemplo: Decrescimento linear com Daubechies $D2$	73
5.2.5	Quinto exemplo: Transição suave entre duas escalas considerando limiarização e ondaleta Haar	79
5.3	Exemplo com defasagem	90
5.3.1	Sexto exemplo: Decrescimento logarítmico com Symmlet $S8$ (con- siderando defasagem do modelo)	90
6	Aplicação a dados reais	97
6.1	PPC variando com o tempo - sem intercepto	100
6.1.1	Ajuste com defasagem $p = 13$ e ondaletas Daubechies $D10$	109
6.2	PPC variando com o tempo - com intercepto	114
7	Conclusão	116
7.1	Considerações finais	116
7.2	Pesquisas futuras	118
A	Resultados matriciais	119
B	Demonstrações e passagens omissas no texto	120
B.1	Demonstrações do Capítulo 2 - Seção 2.3, Equação 2.27:	120
B.2	Tabelas longas do Capítulo 5	121
B.2.1	Quarto exemplo: Decrescimento linear com Daubechies $D2$	121
B.2.2	Sexto exemplo: Decrescimento logarítmico com Symmlet $S8$ (con- siderando defasagem do modelo)	124
C	Elementos computacionais utilizados no trabalho	127
C.1	O software R e o pacote wavethresh	127
C.2	Rotina para simular modelos com cointegração variando com o tempo . . .	127
	Referências Bibliográficas	145

Lista de Abreviaturas

- VAR Modelo Autorregressivo Vetorial (*Vector Autoregressive Model*)
- VEC Modelo de Correção de Erros Vetorial (*Vector Error Correction Model*)
- PPC Paridade de Poder de Compra (*Purchasing Power Parity - PPP*)
- RCE Resíduos de cointegração estimados
- R.V. Razão de verossimilhanças
- v.a. Variáveis aleatórias
- i.i.d. Independentes e identicamente distribuídos
- Ex. Exemplo
- CVT Cointegração variando com o tempo

Lista de Símbolos

$=$	: Igual
$:=$	: Igual por definição
$\boldsymbol{\mu}_t$	: Vetor de médias para um processo multivariado não estacionário
$\boldsymbol{\gamma}(t + \tau, t)$	: Matriz de covariâncias para um processo multivariado não estacionário
$\gamma_{i,j}(t + \tau, t)$	: Componentes da matriz $\boldsymbol{\gamma}(t + \tau, t)$
$\boldsymbol{\mu}$	: Vetor de médias para um processo multivariado fracamente estacionário
$\boldsymbol{\gamma}(\tau)$	: Matriz de covariâncias para um processo multivariado fracamente estacionário
$\gamma_{i,j}(\tau)$	: Componentes da matriz $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$
Δ	: Operador diferença aplicado sobre uma série temporal
$tr(\cdot)$	: Traço de uma matriz
$\rho(\cdot)$	: Posto de uma matriz
$ \cdot $	: Determinante de uma matriz
$\boldsymbol{\alpha}$	: Matriz de carregamentos de um modelo VEC
$\boldsymbol{\beta}$	: Matriz de cointegração de um modelo VEC
$\boldsymbol{\Pi} := \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$	: Matriz $\boldsymbol{\Pi}$ de um modelo VEC
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Matriz de coeficientes de curto prazo de um modelo VEC
$RV_{CVT}^{(J)}$	: Estatística do teste de R.V. para cointegração variando com o tempo

Lista de Figuras

2.1	Esquema PPC teórica versus estimada.	18
3.1	Comportamento da ondaleta Haar pai $\phi_{00}(t)$ e mãe $\psi_{jk}(t)$, para $j = 0, 1$ e 2. . . .	21
3.2	Comportamento da ondaleta Daublet D2 pai $\phi_{00}(t)$ e mãe $\psi_{jk}(t)$, para $j = 0, 1$ e 2. . . .	22
3.3	Comportamento da ondaleta Symmlet S4 pai $\phi_{00}(t)$ e mãe $\psi_{jk}(t)$, para $j = 0, 1$ e 2. . . .	23
3.4	(a) Limiar duro (hard) com $\lambda = 1$, (b) Limiar suave (soft) com $\lambda = 1$	24
3.5	Exemplo de <i>threshold</i> universal para o contexto multivariado. Valores de $\theta_{j,k}$ abaixo do limiar devem ser excluídos do modelo.	28
4.1	Esquema PPC teórica invariante como tempo versus estimada variando com o tempo.	47
5.1	Primeiro exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t^{*'} Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1})$	58
5.2	Primeiro exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$	59
5.3	Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2, 5% e 97, 5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (inversão de sinal ao longo do tempo) (b).	60
5.4	Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2, 5% e 97, 5% sob H_A (inversão de sinal ao longo do tempo) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \ \hat{\alpha}_{21}^*]'$	60
5.5	Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2, 5% e 97, 5% sob H_A (inversão de sinal ao longo do tempo) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$	61
5.6	Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2, 5% e 97, 5% sob H_A (inversão de sinal ao longo do tempo) para as componentes $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$ (a) e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ (b) de $\hat{W}_J^* = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$	61
5.7	Segundo exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t^{*'} Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1})$	64

5.8	Segundo exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$	65
5.9	Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante).	66
5.10	Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_0 (vetor de cointegração constante) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$	66
5.11	Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_0 (vetor de cointegração constante) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a) , componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}$	67
5.12	Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_0 (vetor de cointegração constante) para as componentes $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$ (a) e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ (b) de $\hat{W}_J = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$	67
5.13	Terceiro exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^*]'$, para $J = 0$, (c) resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t^{*'} Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1})$ para $J = 1$ e (d) componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^*]'$, para $J = 1$	69
5.14	Terceiro exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$	70
5.15	Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (três escalas ao longo do tempo) (b)	71
5.16	Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (três escalas ao longo do tempo) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$	71
5.17	Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (três escalas ao longo do tempo) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a) , componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$	72
5.18	Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (três escalas ao longo do tempo) para as componentes $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$ (a) e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ (b) de $\hat{W}_J = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} & d_{1,0}^{*(1,1)} & d_{1,0}^{*(2,1)} & d_{1,1}^{*(1,1)} & d_{1,1}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$	72
5.18	Terceiro exemplo (continuação): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (três escalas ao longo do tempo) para as componentes $\hat{d}_{1,0}^{*(2,1)}$ (c) e $\hat{d}_{1,1}^{*(2,1)}$ (d) de $\hat{W}_J = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} & d_{1,0}^{*(1,1)} & d_{1,0}^{*(2,1)} & d_{1,1}^{*(1,1)} & d_{1,1}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$	73
5.19	Quarto exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t^{*'} Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1})$	74
5.20	Quarto exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$	75

5.21	Quarto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob HA (decréscimo linear) (b)	76
5.22	Quarto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (decréscimo linear) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$	76
5.23	Quarto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (decréscimo linear) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a) , componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$	77
5.24	Quinto exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) componente teórico β_{2t} de $\beta_t = [\beta_{1t} \text{ e } \beta_{2t}]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}$ de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t}]'$	79
5.24	Quinto exemplo (continuação): (c) Resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t' Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t' Y_{t-1})$	80
5.25	Quinto exemplo (completo): Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$	80
5.26	Quinto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H0 (transição suave entre duas escalas) (a) e sob HA (transição suave entre dois regimes) (b)	82
5.27	Quinto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (transição suave entre duas escalas) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}$ (b) de $\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_{11} \hat{\alpha}_{21}]'$	83
5.28	Quinto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (transição suave entre duas escalas) para a componente $\hat{\sigma}_{11}$ (a) , componentes $\hat{\sigma}_{12}$ e $\hat{\sigma}_{21}$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}$ (c) de $\hat{\Sigma}$	83
5.29	Threshold para o modelo completo, considerando $J = 3$	84
5.30	Componente $\hat{\beta}_{2t}$ de $\hat{\beta}_t = (\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t})$ e teórico β_{2t} para referência: Modelos 01, 02, 03, 04 e 05 considerados.	85
5.31	(a) Componente $\hat{\beta}_{2t}$ de $\hat{\beta}_t = (\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t})$ e teórico β_{2t} para referência (J=3), (b) Resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t' Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t' Y_{t-1})$	86
5.32	Quinto exemplo (limiarizado): Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$	87
5.33	Quinto exemplo (limiarizado): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob HA (transição suave entre dois regimes) (b)	88
5.34	Quinto exemplo (limiarizado): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para as componentes $\hat{\alpha}_{11}$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}$ (b) de $\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_{11} \hat{\alpha}_{21}]'$	89
5.35	Quinto exemplo (limiarizado): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (transição suave entre duas escalas) para a componente $\hat{\sigma}_{11}$ (a) , componentes $\hat{\sigma}_{12}$ e $\hat{\sigma}_{21}$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}$ (c) de $\hat{\Sigma}$	89
5.36	Sexto exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \text{ e } \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos $(\beta_t^{*'} Y_{t-1})$ e estimados $(\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1})$	91

5.37	Quarto exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.	92
5.38	Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (decrecimento logarítmico) (b) .	93
5.39	Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (decrecimento logarítmico) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$.	93
5.40	Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (decrecimento logarítmico) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a) , componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$.	94
5.41	Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (decrecimento logarítmico) para as componentes $\hat{\Gamma}_{11}^{*(1)}$ (a) e $\hat{\Gamma}_{12}^{*(1)}$ (b) de $\hat{\Gamma}_1^*$.	94
5.41	Sexto exemplo (continuação): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (decrecimento logarítmico) para as componentes $\hat{\Gamma}_{21}^{*(1)}$ (c) e $\hat{\Gamma}_{22}^{*(1)}$ (d) de $\hat{\Gamma}_1^*$.	95
6.1	Gráficos com índices de preços dos EUA (país local) e dos países estrangeiros Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Itália, Japão e Holanda, juntamente com as respectivas taxas de câmbio.	99
6.1	(continuação) Gráficos com índices de preços dos EUA (país local) e dos países estrangeiros Noruega, Espanha, Suécia e Reino Unido, juntamente com as respectivas taxas de câmbio.	100
6.2	PPC entre Estados Unidos e Bélgica, tomando $J = 0$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a) , $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d) .	106
6.3	PPC entre Estados Unidos e Japão, tomando $J = 1$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a) , $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d) .	106
6.4	PPC entre Estados Unidos e Noruega, tomando $J = 2$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a) , $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d) .	107
6.5	PPC entre Estados Unidos e Alemanha, tomando $J = 3$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a) , $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d) .	107
6.6	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t} \hat{u}_{2t} \hat{u}_{3t}]'$.	109

6.7	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t} \ \hat{u}_{2t} \ \hat{u}_{3t}]'$	110
6.8	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Série de resíduos de cointegração não normalizados $\hat{e}_t$ (a) e normalizados $\hat{e}_t^*$ (b)	110
6.9	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a) , $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \ \hat{\beta}_{2t} \ \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d)	111
6.10	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a) , $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \ \hat{\beta}_{2t} \ \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d)	111
6.11	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (b)	112
6.12	PPC entre Estados Unidos e Canadá: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) , $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) e $\hat{\alpha}_{31}^*$ (c) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \ \hat{\alpha}_{21}^* \ \hat{\alpha}_{31}^*]'$	112
6.13	Gráficos com quantidade e^{η_t} estimada, juntamente com bandas de confiança, para os países estrangeiros Bélgica, Canadá, Dinamarca, França.	114
6.14	Gráficos com quantidade e^{η_t} estimada, juntamente com bandas de confiança, para os países estrangeiros Bélgica, Canadá, Dinamarca, França.	115

Lista de Tabelas

5.1	Quantis, média e erros padrão empíricos e teóricos para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, utilizando a ondaleta <i>Haar</i> , obtidos sob H_0 (cointegração invariante com o tempo).	52
5.2	Quantis, média e erros padrão empíricos e teóricos para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, utilizando a ondaleta <i>Daubechies D2</i> , obtidos sob H_0 (cointegração invariante com o tempo).	53
5.3	Quantis, média e erros padrão empíricos e teóricos para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, utilizando a ondaleta <i>Symmlet S8</i> , obtidos sob H_0 (cointegração invariante com o tempo).	54
5.4	Poder empírico do teste de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$	55
5.5	Ex.01: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).	59
5.6	Ex.01: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_A (inversão de sinal).	59
5.7	Ex.01: Estatísticas das estimativas dos parâmetros normalizados, obtidas por meio de 1000 processos cointegrados bivariados simulados (inversão de sinal ao longo do tempo).	62
5.8	Ex.02: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).	65
5.9	Ex.02: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).	65
5.10	Ex.03: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).	70
5.11	Ex.03: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_A (três escalas ao longo do tempo).	71
5.12	Ex.04: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).	75
5.13	Ex.04: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_A (decréscimento linear)	77
5.14	Ex.05: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante) para o modelo completo.	81

5.15	Ex.05: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (transição suave entre duas escalas) para o modelo completo.	81
5.16	Modelos candidatos: Exclusão sequencial de parâmetros matriciais $\mathbf{d}_{jk}$. . .	84
5.17	Ex.05: Resultados bootstrap sob H0 (vetor de cointegração constante) para o modelo limiarizado.	87
5.18	Ex.05: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (transição suave entre duas escalas) para o modelo limiarizado.	87
5.19	Ex.06: Estimativa e medidas bootstrap* sob H0 (vetor de cointegração constante).	92
5.20	Ex.06: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decréscimento linear) . .	95
6.1	Estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ e medidas bootstrap (*) para testar a PPC constante ao longo do tempo <i>versus</i> PPC variando com o tempo.	101
6.2	Resultados dos testes de raiz unitária (H_0) e de normalidade (H_0) para os resíduos de cointegração estimados $\hat{e}_t = \hat{\beta}'_t Y_t$	104
6.3	Estimativa e medidas bootstrap (*) para a matriz de cargas α	108
6.4	Estimativa e medidas bootstrap* sob H0 (vetor de cointegração constante). . .	113
6.5	Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (três escalas ao longo do tempo). . .	113
6.6	Modelos de PPC: combinação de parâmetros do modelo, valores- p para o teste de normalidade de Shapiro-Wilk para resíduos do modelo $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})'$ e estatística de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$	115
B.1	Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decréscimento linear para β_{2t}) - continuação da Tabela 5.13.	121
B.2	Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decréscimento logarítmico para β_{2t}) - continuação da Tabela 5.20.	124

Capítulo 1

Introdução

Inúmeros modelos econométricos clássicos são construídos sob a hipótese de que os dados observados tem como origem um processo estacionário, com média e variância constantes ao longo do tempo. Como exemplo, podemos citar os modelos autorregressivos vetoriais de ordem p ou VAR(p). No entanto, ao inspecionar alguns dados econômicos históricos, é possível perceber que a economia evolui, cresce e muda ao longo do tempo, seja em termos reais ou nominais. Algumas vezes, tais mudanças ocorrem de maneira bastante abrupta (Hendry e Juselius, 2000). Nestes casos, a suposição de estacionariedade não é mais válida, motivando a busca por novos modelos para dados não estacionários.

Conforme aponta Zivot e Wang (2006), as teorias de regressão e de modelos multivariados são apropriadas para modelar conjuntos de dados estacionários, $I(0)$, como os retornos de ativos financeiros e as taxas de crescimento de séries temporais macroeconômicas. A teoria econômica no entanto, sugere a existência de relações de equilíbrio entre os níveis de uma série temporal, que são melhor descritos como sendo processos $I(1)$, isto é, processos não estacionários com diferença estacionária. Além disso, argumentos de arbitragem implicam que os preços de certos ativos financeiros, que são processos $I(1)$, estão conectados. Com base nestas ideias, estaremos interessados no conceito de *cointegração* para duas ou mais séries temporais. Este conceito é necessário para dar sentido a modelos de regressão e modelos VAR com conjuntos de dados $I(1)$.

Johansen (1995) argumenta que uma teoria econômica é muitas vezes formulada como um conjunto de relações comportamentais ou equações estruturais entre os níveis das variáveis, possivelmente permitindo defasagens. Se as variáveis são $I(1)$, é conveniente reformulá-las em termos de níveis e diferenças, de forma que se uma relação estrutural é modelada por uma relação estacionária, então somos levados a considerar relações estacionárias entre os níveis, isto é, as relações de cointegração.

De modo intuitivo, duas ou mais séries não estacionárias, em particular integradas de ordem $d > 0$, denotadas por $I(d)$, são cointegradas se existir uma relação linear de equilíbrio de longo prazo entre elas. Podemos notar a existência destas relações de equilíbrio em variáveis econômicas, como por exemplo, o preço de um mesmo produto

em diferentes mercados ou taxas de juros com diferentes prazos (Hendry e Juselius, 2000; Morettin, 2011).

Baltagi (2008) destaca que não é uma boa ideia apenas tomar diferenças nas séries temporais não estacionárias $I(1)$, uma vez que este processo acaba por destruir informações potenciais valiosas sobre a relação de longo prazo entre as variáveis econômicas. Tsay (2010) corrobora esta ideia, argumentando que em um sistema cointegrado existem mais componentes não estacionárias (com raiz unitária) do que o número de raízes unitárias. Tomar diferenças individualmente nas séries componentes pode levar à sobre-diferenciação, o que pode trazer problemas na estimação dos parâmetros do modelo. Desta forma, a teoria da cointegração procura estimar esta relação de longo prazo das séries não estacionárias em seus níveis, em vez de trabalhar com suas primeiras diferenças.

Conforme aponta Johansen (1995), o conceito de cointegração é interessante pelo fato desta relação ser capaz de capturar a noção econômica de relação de longo prazo. Por outro lado, cabe ao analista a escolha cuidadosa das variáveis que devem entrar no estudo e discutir com cuidado a teoria econômica que a motiva.

Neste sentido, vamos trabalhar com um modelo difundido na literatura e que leva em consideração as relações de cointegração entre as séries que compõem o modelo. Trabalharemos com o modelo de Paridade de Poder de Compra (PPC). Falk e Wang (2003) apontam que a determinação das taxas de câmbio é de suma importância no estudo das finanças internacionais e em macroeconomia de economias abertas. Além disso, grande parte da literatura moderna sobre a determinação da taxa de câmbio depende da hipótese de PPC. O desenvolvimento da análise de cointegração tem gerado uma série de estudos empíricos, com base na premissa de que a hipótese deve ser vista como uma relação de equilíbrio de longo prazo entre as taxas de câmbio. De acordo com este ponto de vista, se o logaritmo das taxas de câmbio e os níveis de preços nacionais são processos integrados, então eles também devem ser processos cointegrados que se mantêm no longo prazo.

Hayashi (2000) nos informa que podemos utilizar testes de raiz unitária para testar a hipótese de PPC, que segundo o autor, é uma proposição fundamental em estudos de economia internacional, em que as taxas de juros se ajustam aos níveis de preços nacionais.

O presente trabalho tem como foco a análise estatística de séries temporais multivariadas não estacionárias, no âmbito de modelo autorregressivos vetoriais cointegrados (VAR) com erros gaussianos, além de sua reformulação na forma de correção de erros (VEC).

Desde os trabalhos seminais de Engle e Granger (1987) e Johansen (1988), o interesse na literatura sobre o tema cointegração aumentou de maneira expressiva. No entanto, os modelos que tratam deste tema levam em consideração a suposição de que o vetor de cointegração não varia com o tempo. Conforme aponta Bierens e Martins (2010), esta suposição pode ser considerada muito restritiva.

Utilizando os conceitos de cointegração e tendências comuns, o objetivo principal do trabalho será, diferentemente dos modelos de cointegração tradicionais, analisar a hipótese

econômica de Paridade de Poder de Compra (PPC) variando com o tempo. A abordagem é semelhante à empregada em [Bierens e Martins \(2010\)](#), que modelam o vetor de cointegração temporalmente por meio de polinômios de Chebyshev. Diferentemente de [Bierens e Martins \(2010\)](#), desejamos permitir ao modelo capturar mudanças bruscas nos coeficientes do vetor de cointegração. Com este objetivo, escrevemos o vetor de cointegração na forma de decomposição por ondaletas, que são funções adequadas a este propósito.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: No Capítulo 2 apresentamos uma revisão de modelos cointegrados e sua relação com modelos Autorregressivos Vetoriais (VAR), escritos na forma de correção de erros. Além disso, apresentamos o conceito de PPC e sua relação com o conceito de cointegração e com modelos VAR.

No Capítulo 3, apresentamos o conceito de ondaletas. Além disso, apresentamos a representação de um conjunto de dados por meio de decomposição em ondaletas. Descrevemos a seguir as bases de ondaletas *Haar*, *Daublet* e *Symmlet*, empregadas no trabalho.

O Capítulo 4, dedica-se à construção do modelo VAR cointegrado com vetor de cointegração variando com o tempo. São apresentados os passos para a construção da função de verossimilhança condicional e os estimadores de máxima verossimilhança do modelo. O capítulo ainda apresenta a estatística para o teste de razão de verossimilhanças, com o intuito de testar a hipótese de cointegração variando com o tempo. Por fim, o capítulo trata da PPC variando com o tempo para duas situações: considerando e não considerando o intercepto no modelo. Para a segunda, apenas o intercepto varia com o tempo.

O Capítulo 5 dedica-se ao estudo dos quantis empíricos e do poder empírico do teste de razão de verossimilhanças para testar a hipótese de cointegração variando com o tempo. Além disso, apresenta estudos de simulação para avaliar a distribuição dos estimadores e da estatística de razão de verossimilhanças em diferentes casos: cinco modelos sem defasagem e um com defasagem. Para os casos sem defasagem, o primeiro é um exemplo de modelo bivariado simulado que contempla a cointegração variando com o tempo. Para checar a convergência numérica da simulação, apresentamos para o exemplo os resultados de simulações de Monte Carlo para os parâmetros utilizados na simulação. O segundo exemplo por sua vez, contempla um modelo bivariado em que não há cointegração variando com tempo. Do terceiro ao quinto exemplos são consideradas situações mais gerais para o vetor de cointegração variando com o tempo. Por fim, apresentamos no sexto exemplo um caso com defasagem.

O Capítulo 6 dedica-se à apresentação de um conjunto de dados reais utilizados em [Falk e Wang \(2003\)](#) e [Bierens e Martins \(2010\)](#), juntamente com os resultados referentes à aplicação dos modelos apresentados no Capítulo 4 e ao modelo de PPC. Os dados corroboram a hipótese de que os coeficientes de cointegração variam ao longo do tempo, tal qual observado por [Bierens e Martins \(2010\)](#).

O Capítulo 7 dedica-se às considerações finais, onde apresentamos alguns comentários sobre os resultados obtidos, juntamente com direcionamentos para futuras pesquisas.

Capítulo 2

Processos cointegrados e Modelo de Correção de Erros Vetorial (VEC)

Neste capítulo, apresentamos uma revisão de modelos cointegrados e sua relação com modelos Autorregressivos Vetoriais (VAR), escritos na forma de correção de erros. Apresentamos a função de verossimilhança condicional do modelo e os estimadores de máxima verossimilhança. Além disso, apresentamos o conceito de Paridade de Poder de Compra (PPC) e sua relação com o conceito de cointegração. Seguimos de perto os conceitos e definições enunciados em [Hendry e Juselius \(2001\)](#), [Falk e Wang \(2003\)](#), [Lutkepohl \(2005\)](#), [Zivot e Wang \(2006\)](#), [Morettin \(2011\)](#) e [Tsay \(2013\)](#).

2.1 Processos cointegrados

Estamos interessados em estabelecer modelos para uma série temporal vetorial Y_t n -variada, ou seja, com n componentes $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}$, observadas em $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Utilizamos a notação $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt})'$, com $t \in \mathbb{Z}$ e Y_{it} ou $Y_{i,t}$ indistintamente para a i -ésima componente de Y_t , com $i = 1, \dots, n$.

Definição 2.1. *O vetor de médias μ_t e a matriz de covariâncias $\gamma(t + \tau, t)$ descrevem as propriedades de segunda ordem das séries $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}$. Estas medidas, em geral, dependem do tempo e são definidas como:*

$$\mu_t = E(Y_t) = (\mu_{1t}, \mu_{2t}, \dots, \mu_{nt})' \quad (2.1)$$

e

$$\gamma(t + \tau, t) = E \{ (Y_{t+\tau} - \mu_{t+\tau})(Y_t - \mu_t)' \}, \quad (2.2)$$

que é uma matriz de ordem $n \times n$.

Na diagonal principal de $\gamma(t + \tau, t)$ temos as autocovariâncias das séries individuais, calculadas nos instantes $t + \tau$ e t , enquanto fora da diagonal principal estão as *covariâncias cruzadas* entre as séries $Y_{i,t+\tau}$ e $Y_{j,t}$, para $i \neq j$.

Denotando por $\gamma_{i,j}(t + \tau, t)$ as componentes da matriz $\gamma(t + \tau, t)$, temos que

$$\gamma_{i,j}(t + \tau, t) = \text{Cov} \{Y_{i,t+\tau} Y_{j,t}\} := E \{(Y_{i,t+\tau} - \mu_{i,t+\tau})(Y_{j,t} - \mu_{j,t})\} \quad (2.3)$$

é a covariância entre as variáveis $Y_{i,t+\tau}$ e $Y_{j,t}$, para $i, j = 1, \dots, n$.

Estamos interessados, no entanto, no caso em que tanto o vetor de médias μ_t quanto a matriz de covariâncias $\gamma(t + \tau, t)$ não dependem de t . Neste caso, estamos trabalhando com séries estacionárias, ou fracamente estacionárias, cuja definição é dada a seguir:

Definição 2.2. *Uma série temporal n -variada Y_t é dita fracamente estacionária se ela possui média μ_t e matriz de covariâncias $\gamma(t + \tau, t)$ que não dependem do instante de tempo t , para $t, \tau \in \mathbb{Z}$. Nesta situação, temos que*

$$\mu = E(Y_t) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)' \quad (2.4)$$

e

$$\gamma(\tau) = E \{(Y_{t+\tau} - \mu)(Y_t - \mu)'\} = \{\gamma_{i,j}(\tau)\}_{(i,j)=1}^n, \quad (2.5)$$

$\forall \tau \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $\gamma_{ii}(\tau)$ será a função de autocovariância da série estacionária Y_{it} e $\gamma_{ij}(\tau)$ será a função de covariância cruzada de Y_{it} e Y_{jt} .

Da Definição 2.2, podemos notar que em geral, $\gamma_{ij}(\tau) \neq \gamma_{ji}(\tau)$. Além disso, para o caso particular em que $\tau = 0$ na Equação 2.5, temos que

$$\gamma(0) = E \{(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)'\}, \quad (2.6)$$

que é a *matriz de covariâncias contemporâneas*. Notamos ainda que $\gamma_{i,i}(0) = \text{Var}(X_{it})$ e que $\gamma_{i,j}(0) = \text{Cov}(X_{it}, X_{jt})$.

Definição 2.3. *Seja Δ^d o operador diferença usual de séries temporais. Um processo Y_t é integrado de ordem d se $\Delta^d Y_t$ for estacionário, e neste caso, utilizamos a seguinte notação: $Y_t \sim I(d)$. Em particular um processo estacionário é $I(0)$.*

Se Y_{1t} e Y_{2t} forem processos $I(d)$, então a combinação linear $Y_t = Y_{1t} - \beta Y_{2t}$ será, em geral, também $I(d)$. Mas é possível que Y_t seja integrado de ordem menor, digamos $I(d - b)$, com $0 < b \leq d$. Se tivermos uma situação em que $d = b = 1$, temos que Y_{1t} e Y_{2t} são $I(1)$ e conseqüentemente, Y_t será $I(0)$. Neste caso, diremos que Y_{1t} e Y_{2t} são *cointegrados*.

Seja Y_t um vetor $(n \times 1)$. Diremos que Y_t é integrado de ordem d , $I(d)$, se d for a maior ordem de integração das séries individuais. Em outras palavras, se $Y_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{nt})'$, com

$Y_{it} \sim I(d_i)$, então $d = \max(d_1, \dots, d_n)$. Podemos resumir estas afirmações na Definição 2.4 a seguir:

Definição 2.4. As componentes do vetor Y_t são cointegradas de ordem (d, b) se todas as componentes de Y_t são $I(d)$ e se existe um vetor $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$, de ordem $(n \times 1)$ não nulo, tal que

$$\beta'Y_t = \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 Y_{2t} + \dots + \beta_n Y_{nt} \sim I(d - b), \quad (2.7)$$

com $0 < b \leq d$. O vetor β de ordem $(n \times 1)$ é chamado de vetor cointegrado ou vetor de cointegração.

A teoria usual de mínimos quadrados ordinários também se aplica a séries $I(0)$. Neste caso, os resultados estatísticos para a regressão linear também são válidos. Se uma ou todas as variáveis na regressão são $I(1)$, então os resultados estatísticos podem não valer. Um caso importante em que os resultados estatísticos não valem é o da *regressão espúria*, onde todas as séries são $I(1)$ e não cointegradas. Logo, fazer uma regressão linear com séries $I(1)$ só faz sentido se estas forem cointegradas (Zivot e Wang, 2006).

O vetor de cointegração β não é único, pois se para $c \neq 0$, o novo vetor $\beta^* = c\beta$ também será um vetor de cointegração. Consequentemente, a combinação linear $c\beta'Y_t = \beta^{*'}Y_t$ também será $I(0)$. Desta forma, alguma normalização é requerida para identificar β unicamente.

Se alguns elementos de β são iguais a zero, então somente o subconjunto das séries em Y_t cujos coeficiente são não nulos é cointegrado. A combinação $\beta'Y_t$ é geralmente motivada pela teoria econômica e se refere às *relações de equilíbrio de longo prazo*. Assume-se que séries $I(1)$ com relações de equilíbrio de longo prazo não podem se distanciar muito do equilíbrio, uma vez que as forças econômicas irão agir para restaurar a relação de equilíbrio (Zivot e Wang, 2006).

Uma das variáveis é geralmente utilizada para normalizar β , fixando-se seu coeficiente igual a um. Usualmente, toma-se $\beta = (1, -\beta_2, \dots, -\beta_n)'$, de modo que

$$\beta'Y_t = Y_{1t} - \beta_2 Y_{2t} - \dots - \beta_n Y_{nt}.$$

Se por exemplo, $\beta'Y_t \sim I(0)$, temos que

$$Y_{1t} = \beta_2 Y_{2t} + \dots + \beta_n Y_{nt} + u_t,$$

com $u_t \sim I(0)$. Dizemos que u_t é o *resíduo de cointegração* ou *erro de desequilíbrio*. Em equilíbrio de longo prazo temos que $u_t = 0$ e a *relação de equilíbrio de longo prazo* é

$$Y_{1t} = \beta_2 Y_{2t} + \dots + \beta_n Y_{nt}.$$

Se Y_t possuir $n > 2$ componentes, podem existir infinitos vetores de cointegração. Se existirem exatamente r vetores de cointegração linearmente independentes, com $0 < r < n$, então eles podem ser reunidos na *matriz de cointegração* β de ordem $(n \times r)$ de posto r , chamado de *posto de cointegração*. Neste caso, a matriz

$$\beta' Y_t = \begin{bmatrix} \beta_1' Y_t \\ \vdots \\ \beta_r' Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{rt} \end{bmatrix}$$

é estacionária, ou seja, $I(0)$. Note ainda que

$$\beta' = \begin{bmatrix} \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_r' \end{bmatrix}_{r \times n}$$

forma uma *base para o espaço de vetores de cointegração*. Além disso, os vetores linearmente independentes $\beta_1, \dots, \beta_r$ na base de cointegração β não é única, a menos que alguma suposição de normalização seja feita. Isto é, qualquer combinação linear de $\beta_1, \dots, \beta_r$, por exemplo, $\beta_s = c_1 \beta_1 + \dots + c_r \beta_r$ também será um vetor de cointegração.

Séries cointegradas apresentam uma tendência estocástica comum. Isto quer dizer que séries cointegradas caminham juntas no longo prazo, dado que uma combinação linear delas é reversível à média (estacionária). De modo geral, se o vetor Y_t for cointegrado com r vetores de cointegração e $0 < r < n$, existirão então $n - r$ *tendências estocásticas comuns*.

2.2 Modelo VAR na forma de correção de erros

Nesta seção, apresentamos os conceitos e definições apresentados em [Lutkepohl \(2005\)](#), [Zivot e Wang \(2006\)](#) e [Morettin \(2011\)](#).

O modelo autorregressivo vetorial de ordem p , VAR(p), é um dos mais bem sucedidos e flexíveis para séries temporais multivariadas estacionárias, tendo se mostrado útil para descrever o comportamento dinâmico destas séries.

Sejam n séries temporais alocadas em um vetor aleatório $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt})'$ de ordem $(n \times 1)$. Um modelo autorregressivo vetorial VAR(p) n -dimensional para Y_t é dado por

$$Y_t = \nu + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + u_t, \quad (2.8)$$

onde Φ_s são matrizes de coeficientes $(n \times n)$ fixas com elementos $\phi_{ij,s}$, com $i, j = 1, \dots, n$

e $s = 1, \dots, p$. Por sua vez, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)'$ é um vetor $(n \times 1)$ fixo de interceptos, permitindo que $E(Y_t)$ seja diferente de zero. Além disso, $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})'$ é um ruído branco ou processo de inovações n -dimensional, ou seja, $E(u_t) = \mathbf{0}$, $E(u_t u_t') = \Sigma_u$ e $E(u_t u_s') = \mathbf{0}$ para $s \neq t$.

Proposição 2.1. *Para o modelo VAR(p) dado na Equação 2.8, temos os seguintes resultados:*

O processo Y_t será estacionário se as soluções de

$$|\mathbf{I}_n - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p| = 0, \quad (2.9)$$

estiverem fora do círculo unitário. Além disso, se Y_t for estacionário, então

$$\boldsymbol{\mu} = E(Y_t) = (\mathbf{I}_n - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p)^{-1} \boldsymbol{\nu}. \quad (2.10)$$

Demonstração: Veja Morettin (2011).

Podemos ver que a cointegração pode ocorrer em um processo VAR(p) n -dimensional, como o dado na Equação 2.8. Suponha que o processo Y_t seja não estacionário, com uma ou mais soluções da Equação 2.9 sobre o círculo unitário. Como $|\mathbf{I}_n - \Phi_1 - \dots - \Phi_p| = 0$, a matriz $\boldsymbol{\Pi} = -(\mathbf{I}_n - \Phi_1 - \dots - \Phi_p)$ é singular. Suponha que $\boldsymbol{\Pi}$ possua posto $\rho(\boldsymbol{\Pi}) = r < n$. Desta forma, $\boldsymbol{\Pi}$ pode ser decomposta como

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}', \quad (2.11)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são matrizes de ordem $n \times r$.

Vamos supor ainda que todas as componentes de Y_t sejam $I(1)$, sendo desta forma estacionárias sob primeira diferença. Assim, podemos reescrever a Equação 2.8 na forma de correção de erros, aqui chamado de modelo VEC, como

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Pi} Y_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t, \\ &= \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\boldsymbol{\Gamma}_i = -(\Phi_{i+1} + \dots + \Phi_p)$ são matrizes $(n \times n)$, para $i = 1, \dots, p-1$ e $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$.

A forma como o modelo VAR está escrito na Equação 2.12 é chamada de *forma de correção de equilíbrio* ou *forma de correção de erros*. Podemos ainda reescrever esta equação como

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{t-1} = \Delta Y_t - \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta Y_{t-1} - \dots - \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} - u_t. \quad (2.13)$$

Note que o segundo termo de 2.13 é $I(0)$. Logo, $\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{t-1}$ também será $I(0)$. Além disso, é possível obter um processo $I(0)$ ao multiplicar $[(\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha})^{-1} \boldsymbol{\alpha}']$ por $\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{t-1}$. Desta

forma, temos que

$$[(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha']\alpha\beta'Y_{t-1} = \beta'Y_{t-1} \sim I(0).$$

Segue então que cada linha de $\beta'Y_{t-1}$ representará uma relação de cointegração. Neste caso, diremos que o sistema é cointegrado de posto r , com *matriz de cointegração* β e *matriz de cargas* α .

Se a representação de um processo cointegrado é dada na Equação 2.12, é fácil recuperar a representação VAR na forma da Equação 2.8, utilizando as expressões

$$\begin{cases} \Phi_1 &= \Pi + \Gamma_1 + \Gamma_1, \\ \Phi_i &= \Gamma_i - \Gamma_{i-1}, i = 2, \dots, p-1, \\ \Phi_p &= -\Gamma_{p-1}. \end{cases} \quad (2.14)$$

2.3 Função de verossimilhança condicional

Vamos considerar inicialmente o modelo dado na Equação 2.12 sem o vetor de termos determinísticos

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t, \quad (2.15)$$

onde Y_t é um processo de dimensão n , onde cada variável individual Y_{it} é $I(1)$, para $i = 1, \dots, n$, embora r combinações lineares de Y_t sejam estacionárias. Conforme visto anteriormente, esta suposição nos permite escrever $\Pi = \alpha\beta'$, $\forall t = 1, \dots, T$, sendo $\rho(\Pi) = r$ e $0 < r < n$, α e β matrizes $(n \times r)$, com posto $\rho(\alpha) = \rho(\beta) = r$ e T sendo o número de observações da amostra n variada. Vamos supor ainda que na Equação 2.12, u_t são i.i.d. e seguem uma distribuição $N_n(\mathbf{0}, \Sigma_u)$.

Reescrevendo o modelo VEC dado na Equação 2.15 em notação matricial, temos

$$\Delta Y = \Pi Y_{-1} + \Gamma \Delta X + U, \quad (2.16)$$

onde

$$\Delta Y := \begin{bmatrix} \Delta Y_1 & \Delta Y_2 & \dots & \Delta Y_T \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$Y_{-1} := \begin{bmatrix} Y_0 & Y_1 & \dots & Y_{T-1} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{p-1} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_0 & \Delta X_1 & \dots & \Delta X_{T-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \Delta X_{t-1} = \begin{bmatrix} \Delta Y_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta Y_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & \dots & U_T \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Considere uma amostra de $(T + p)$ observações para $\Delta Y = (\Delta Y_{1t}, \dots, \Delta Y_{nt})'$, para $t = 1 - p, \dots, 0, 1, \dots, T$, denotada por

$$\left(\underbrace{\Delta Y_{1-p}, \Delta Y_{2-p}, \dots, \Delta Y_0}_{p \text{ obs.}}, \underbrace{\Delta Y_1, \dots, \Delta Y_T}_{T \text{ obs.}} \right).$$

Vamos basear nossa estimação nas últimas T observações das séries de ΔY_t , condicionando nas primeiras p observações. O objetivo será construir a verossimilhança condicional

$$l(\boldsymbol{\theta}) = f(\Delta Y_T, \Delta Y_{T-1}, \dots, \Delta Y_1 | \Delta Y_0, \dots, \Delta Y_{1-p}; \boldsymbol{\theta}), \quad (2.22)$$

e maximizar com respeito a $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_{p-1}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$.

Condicional às observações até o instante $t - 1$, ΔY_t é igual a um termo constante acrescido de um termo com distribuição normal, ou seja

$$\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p} = \underbrace{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}\Delta X_{t-1}}_{\text{constante}} + u_t, \quad (2.23)$$

com $u_t \sim \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$.

Pela Equação 2.15, temos ainda que $E(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}\Delta X_{t-1}$, enquanto $Var(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}) = \boldsymbol{\Sigma}_u$. Podemos então concluir que

$$\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}\Delta X_{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_u). \quad (2.24)$$

A densidade da t -ésima observação, será dada então por

$$\begin{aligned} f(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}; \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_u|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} (\Delta Y_t - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{t-1} - \boldsymbol{\Gamma}\Delta X_{t-1})' \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \cdot (\Delta Y_t - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{t-1} - \boldsymbol{\Gamma}\Delta X_{t-1}) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Logo, a verossimilhança condicional para a amostra completa $\Delta Y_T, \Delta Y_{T-1}, \dots, \Delta Y_1 |$

$\Delta Y_0, \dots, \Delta Y_{1-p}$ é dada por

$$f(\Delta Y_T, \Delta Y_{T-1}, \dots, \Delta Y_1 | \Delta Y_0, \dots, \Delta Y_{1-p}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^T f(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}; \boldsymbol{\theta}). \quad (2.26)$$

Estamos interessados no entanto na função de log-verossimilhança $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ para o modelo dado na Equação 2.16. Substituindo a Equação 2.25 em 2.26, mostramos no Apêndice B.1, página 120, que a log-verossimilhança, em notação matricial, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = & -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left((\Delta Y - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{-1} - \boldsymbol{\Gamma}\Delta X)' \cdot \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \cdot \right. \\ & \left. \cdot [\Delta Y - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'Y_{-1} - \boldsymbol{\Gamma}\Delta X] \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nosso objetivo então será escolher $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_{p-1}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$ que maximiza 2.27 sujeito à restrição de que $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$.

2.4 Estimadores de máxima verossimilhança

Uma vez obtida a função de verossimilhança para o caso gaussiano, estamos interessados em obter os estimadores de máxima verossimilhança para o modelo VEC dado na Equação 2.16. Vamos concentrar a função de verossimilhança com respeito ao termo de correção de erros, substituindo a matriz de parâmetros $\boldsymbol{\Gamma}$ (de curto prazo) pelo seu estimador de mínimos quadrados, dada uma matriz $\boldsymbol{\Pi}$ fixa (Lutkepohl, 2005):

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Pi}) = (\Delta Y - \boldsymbol{\Pi}Y_{-1})\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}. \quad (2.28)$$

Substituindo $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Pi})$ por $\boldsymbol{\Gamma}$ na Equação 2.16, temos que

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \boldsymbol{\Pi}Y_{-1} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Pi})\Delta X + U^* \\ \Delta Y &= \boldsymbol{\Pi}Y_{-1} + (\Delta Y - \boldsymbol{\Pi}Y_{-1})\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X + U^* \\ \Delta Y &= \boldsymbol{\Pi}Y_{-1} + \Delta Y\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X - \boldsymbol{\Pi}Y_{-1}\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X + U^* \\ \Delta Y &= \boldsymbol{\Pi}Y_{-1} \underbrace{[\mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X]}_M + \Delta Y\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X + U^* \\ \Delta Y &= \boldsymbol{\Pi}Y_{-1}\mathbf{M} + \Delta Y\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X + U^*. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Rearranjando os termos da igualdade em 2.29, temos que

$$\begin{aligned}
 \Delta Y \underbrace{[\mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X]}_{\mathbf{M}} &= \Pi Y_{-1} \mathbf{M} + U^* \\
 \underbrace{\Delta Y \mathbf{M}}_{R_0} &= \Pi \underbrace{Y_{-1} \mathbf{M}}_{R_1} + U^* \\
 R_0 &= \Pi R_1 + U^*,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

com $\mathbf{M} = [\mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X]$, $R_0 = \Delta Y \mathbf{M}$ e $R_1 = Y_{-1} \mathbf{M}$.

Conforme aponta [Lutkepohl \(2005\)](#), devemos notar que R_0 é o resíduo de uma regressão multivariada de ΔY em ΔX . Por outro lado, R_1 é o resíduo de uma regressão multivariada de Y_{-1} em ΔX .

Enunciamos a seguir a Proposição 2.2 ([Johansen, 1988](#); [Lutkepohl, 2005](#)) que nos dá os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo VEC.

Proposição 2.2. (*Estimadores de máxima verossimilhança de um modelo VEC*)

Sejam as matrizes $\mathbf{M} := [\mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X]$, $R_0 := \Delta Y \mathbf{M}$ e $R_1 := Y_{-1} \mathbf{M}$, apresentadas em 2.30. Definimos as matrizes de covariância amostrais:

$$\mathbf{S}_{i,j} := \frac{1}{T} R_i R_j', \text{ com } i, j = 0, 1. \tag{2.31}$$

Em seguida, ao resolver o problema de autovalores

$$|\lambda \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{10} \mathbf{S}_{00}^{-1} \mathbf{S}_{01}| = 0, \tag{2.32}$$

obtemos os autovalores ordenados $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n$ e autovetores associados $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n$, que satisfazem

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_i \mathbf{S}_{11} \hat{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{S}_{10} \mathbf{S}_{00}^{-1} \mathbf{S}_{01} \\
 \hat{\mathbf{V}} \mathbf{S}_{11} \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{I}_n
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

com $\hat{\mathbf{V}} = [\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n]$. Desta forma, a log-verossimilhança do modelo VEC dado na Equação 2.16 é maximizada para

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}' = [\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_r] \mathbf{S}_{11}^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \Delta Y \mathbf{M} Y_{-1}' \hat{\boldsymbol{\beta}} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}' Y_{-1} \mathbf{M} Y_{-1}' \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^{-1} = \mathbf{S}_{01} \hat{\boldsymbol{\beta}} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{S}_{11} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^{-1}, \tag{2.35}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \left(\Delta Y - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\boldsymbol{\beta}}' Y_{-1} \right) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1}, \tag{2.36}$$

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T} \left(\Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\beta}' Y_{-1} - \hat{\Gamma} \Delta X \right) \left(\Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\beta}' Y_{-1} - \hat{\Gamma} \Delta X \right)' . \quad (2.37)$$

Além disso, o máximo de 2.16 é atingido em

$$\max \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \left[\ln |\mathbf{S}_{00}| + \sum_{i=1}^r \ln (1 - \lambda_i) \right] - \frac{nT}{2} . \quad (2.38)$$

Demonstração:

Para $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ fixos (Π fixo), o máximo de $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ em 2.27 é atingido para

$$\hat{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}') = (\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \quad (2.39)$$

e

$$\hat{\Sigma}_u(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}') = \frac{1}{T} (\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} \mathbf{M}) (\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} \mathbf{M})' . \quad (2.40)$$

Substituindo Γ de 2.27 por $\hat{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}')$ de 2.39, temos a log-verossimilhança concentrada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\Sigma_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} - \hat{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}') \Delta X \right)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} - \hat{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}') \Delta X \right) \right], \\ &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\Sigma_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} - (\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X \right)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} - (\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X \right) \right], \\ &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\Sigma_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left((\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1}) \underbrace{(\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X)}_{\mathbf{M}} \right)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left((\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1}) \underbrace{(\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X)}_{\mathbf{M}} \right) \right], \\ &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\Sigma_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} \mathbf{M})' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot (\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} \mathbf{M}) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

A seguir, vamos maximizar 2.41 com relação à Σ_u . Substituindo Σ_u de 2.41 por $\hat{\Sigma}_u(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}')$ de 2.40, temos que

$$\mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \hat{\Sigma}_u(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}') \right| \right) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\underbrace{(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} \mathbf{M})' \cdot \hat{\Sigma}_u^{-1}(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}') \cdot (\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' Y_{-1} \mathbf{M})}_{TI_n} \right]. \quad (2.42)$$

Note ainda que o termo que está no interior de $\text{tr}[\cdot]$ na Equação 2.42 é igual ao produto de T por uma matriz identidade de ordem n (I_n), pois

$$\begin{aligned}
 & (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \cdot \hat{\Sigma}_u^{-1}(\alpha\beta') \cdot (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) = \\
 & (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \cdot \left(\frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \right)^{-1} \cdot (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) = \\
 & T \underbrace{(\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \cdot (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})^{-1}}_{I_n} \cdot \underbrace{(\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})^{-1} \cdot (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})}_{I_n} = TI_n.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Consequentemente, usando 2.43 a Equação 2.42 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \right| \right) - \frac{1}{2} \text{tr}(TI_n) \\
 &= \underbrace{-\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{Tn}{2}}_{\text{escalar}} - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \right| \right).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Desconsiderando a soma de termos escalares em 2.44, para maximizar $\mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta})$ temos que maximizar

$$-\frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \right| \right), \tag{2.45}$$

ou equivalentemente, minimizar

$$\left| \frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \right| \tag{2.46}$$

com respeito a α e β .

Para demonstrar este resultado, vamos aplicar a Proposição A.1 em 2.46, tomando $Y = \Delta Y\mathbf{M}$, $X = Y_{-1}\mathbf{M}$, $A = \alpha$ e $B = \beta'$. Além disso, vamos considerar as matrizes de covariância amostrais $\mathbf{S}_{i,j}$ definidas em 2.31. Neste caso, de A.1, temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}' &= \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \dots & \hat{v}_r \end{bmatrix}' (XX')^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \dots & \hat{v}_r \end{bmatrix}' ((Y_{-1}\mathbf{M})(Y_{-1}\mathbf{M})')^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \dots & \hat{v}_r \end{bmatrix}' (R_1 R_1')^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \dots & \hat{v}_r \end{bmatrix}' \mathbf{S}_{11}^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Além disso, também por A.1, temos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= YX'\hat{B}'\left(\hat{B}XX'\hat{B}'\right)^{-1} \\
 &= (\Delta Y\mathbf{M})(Y_{-1}\mathbf{M})'\hat{\beta}\left(\hat{\beta}'(Y_{-1}\mathbf{M})(Y_{-1}\mathbf{M})'\hat{\beta}\right)^{-1} \\
 &= R_0R_1'\hat{\beta}\left(\hat{\beta}'R_1R_1'\hat{\beta}\right)^{-1} \\
 &= S_{01}\hat{\beta}\left(\hat{\beta}'S_{11}\hat{\beta}\right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Estimamos em seguida os demais parâmetros do modelo, substituindo $\hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}$ das Equações 2.47 e 2.48 nas Equações 2.39 e 2.40. Desta forma, temos:

$$\hat{\Gamma} = (\Delta Y - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1})\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1} \tag{2.49}$$

e

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T} \left(\Delta Y\mathbf{M} - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1}\mathbf{M} \right) \left(\Delta Y\mathbf{M} - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1}\mathbf{M} \right)'. \tag{2.50}$$

Substituindo $\mathbf{M} = \mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X$ no termo $(\Delta Y\mathbf{M} - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1}\mathbf{M})$ da Equação 2.50, nos dá:

$$\begin{aligned}
 (\Delta Y\mathbf{M} - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1}\mathbf{M}) &= \Delta Y(\mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X) - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1}(\mathbf{I}_T - \Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X) \\
 &= \Delta Y - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1} - \underbrace{(\Delta Y - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1})\Delta X'(\Delta X\Delta X')^{-1}\Delta X}_{\hat{\Gamma}} \\
 &= \Delta Y - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1} - \hat{\Gamma}\Delta X.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Desta forma, substituindo 2.51 em 2.50, temos:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T} \left(\Delta Y - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1} - \hat{\Gamma}\Delta X \right) \left(\Delta Y - \hat{\alpha}\hat{\beta}'Y_{-1} - \hat{\Gamma}\Delta X \right)' \tag{2.52}$$

Pelo Apêndice A.1, o mínimo da expressão 2.46 é dado por:

$$\min_{\alpha, \beta} \left| \frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M}) (\Delta Y\mathbf{M} - \alpha\beta'Y_{-1}\mathbf{M})' \right| = \left| \frac{1}{T} (\Delta Y\mathbf{M})(\Delta Y\mathbf{M})' \right| \prod_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i), \tag{2.53}$$

que é equivalente a maximizar 2.46.

Substituindo 2.53 em 2.44, temos que o máximo da log-verossimilhança é atingido em:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{nT}{2} - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} (\Delta Y \mathbf{M}) (\Delta Y \mathbf{M})' \right| \prod_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i) \right) \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{nT}{2} - \frac{T}{2} \ln \left(|\mathbf{S}_{00}| \prod_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i) \right) \\
 &= -\frac{T}{2} \sum_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i) - \frac{T}{2} \ln(|\mathbf{S}_{00}|) - \frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{nT}{2} \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \left[\ln |\mathbf{S}_{00}| + \sum_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i) \right] - \frac{nT}{2}, \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar em 2.38. $\square$

2.5 Paridade de Poder de Compra

Seguimos de perto a definição de PPC, enunciadas em Patel (1990), Hayashi (2000) e Falk e Wang (2003). De acordo com os autores, a teoria da PPC afirma que para dois países quaisquer, a taxa de câmbio é igual à razão entre os níveis de preços dos dois países. Conforme aponta Rogoff (1996), a PPC é uma proposição empírica simples atestando que, uma vez convertido em uma moeda comum, os níveis de preços nacionais devem ser iguais.

Seja P_t representando o índice de preços do país local, P_t^* representando o índice de preços para o país estrangeiro e S_t representando a taxa de câmbio em moeda do país local por unidade da moeda estrangeira. A teoria da PPC afirma que

$$P_t = S_t \cdot P_t^*. \tag{2.55}$$

Tomando o logaritmo em ambos os membros da Equação 2.55, temos que

$$p_t = s_t + p_t^*, \tag{2.56}$$

com $p_t = \log P_t$, $s_t = \log S_t$ e $p_t^* = \log P_t^*$.

Tanto a Equação 2.55 quanto a Equação 2.56 se referem à *paridade de poder de compra “absoluta”*. A chamada *paridade de poder de compra “relativa”* exige apenas que a primeira diferença da Equação 2.56 se mantenha, isto é, a taxa de crescimento da taxa de câmbio deve compensar o diferencial entre a taxa de crescimento dos preços domésticos e estrangeiros (Falk e Wang, 2003).

Devido a uma variedade de fatores que limitam a arbitragem de preços internacionais, a PPC não se sustenta exatamente em cada instante de tempo t . Desta forma, conforme aponta Hayashi (2000), costuma-se trabalhar com uma versão mais fraca da PPC, dada por

$$s_t = p_t - p_t^* + u_t, \quad (2.57)$$

com u_t sendo um processo estacionário e que considera desvios de curto prazo da PPC.

Mesmo que esta versão não se cumpra no curto prazo, a arbitragem internacional deverá garantir que a hipótese da PPC se cumpra no longo prazo. Além disso, se s_t , p_t e p_t^* são processos $I(1)$, então estas séries serão cointegradas com vetor de cointegração igual a

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}'. \quad (2.58)$$

Falk e Wang (2003) por outro lado, tratam a Equação 2.57 como a versão forte da PPC, trabalhando então com uma forma mais versátil da hipótese, enunciada em Patel (1990) e descrita como

$$\beta_0 s_t = \eta + \beta_1 p_t + \beta_2 p_t^* + u_t, \quad (2.59)$$

onde u_t também é um processo estacionário como em 2.57 e os β 's são constantes irrestritas.

Neste caso, assumindo também que s_t , p_t e p_t^* são processos $I(1)$, temos que as séries são cointegradas, assim como em 2.57. A vantagem da Equação 2.59 é não restringirmos o vetor de cointegração. Por outro lado, quando tomamos $\beta_1 = -\beta_2 = 1$ (*simetria de preços*), $\eta = 0$ (*homogeneidade*) e $\beta_0 = 1$ (*modelo normalizado*), recuperamos a versão absoluta da PPC dada em 2.57. Além disso, conforme aponta Patel (1990), a desvantagem de utilizar a hipótese da PPC apresentada na Equação 2.57 é que esta pode não se manter devido a diferenças na construção dos índices de preços dos países, custos de transação, tarifas, entre outros.

Podemos reescrever a Equação 2.59 como em 2.55, levando em consideração o termo u_t :

$$\begin{aligned} \beta_0 \log S_t &= \eta + \beta_1 \log P_t + \beta_2 \log P_t^* + u_t \Rightarrow \\ \log [S_t^{\beta_0}] &= \eta + \log [P_t^{\beta_1}] + \log [P_t^{*\beta_2}] + u_t \Rightarrow \\ S_t^{\beta_0} &= e^\eta \cdot P_t^{\beta_1} \cdot P_t^{*\beta_2} \cdot e^{u_t}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Vamos supor inicialmente o modelo normalizado ($\beta_0 = 1$) e simetria de preços ($\beta_1 = -\beta_2 = 1$). Por outro lado, vamos supor homogeneidade, ou seja $\eta = 0$. Logo, substituindo os valores $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$ e $\eta = 0$ na última Equação de 2.60, temos que

$$S_t = e^\eta \cdot (P_t) \cdot (P_t^*)^{-1} \cdot e^{u_t}. \quad (2.61)$$

Desta forma, rearranjando os termos de 2.61, obtivemos a expressão

$$\underbrace{\left(\frac{S_t}{e^{u_t}} \cdot \frac{P_t^*}{P_t} \right)}_{E_t} = e^\eta. \quad (2.62)$$

A Figura 2.1 mostra um exemplo de esquema para a quantidade e^η teórica e estimada $e^{\hat{\eta}}$. Para este modelo, devemos esperar que a quantidade e^η oscile em torno do valor teórico igual a 1. Qualquer desvio deste referencial indica a necessidade de considerarmos o intercepto no modelo, ou seja, $\eta \neq 0$.

Figura 2.1: Esquema PPC teórica versus estimada.

Outra opção é reescrever a Equação 2.59 de maneira similar à apresentada na Equação 2.12. Neste caso no entanto, vamos tomar α e β como sendo matrizes fixas de ordem $(n \times r)$.

Além disso, sem perda de generalidade, vamos considerar a matriz de observações ΔY_t tomando $n = 3$, $r = 1$ e $t = 1, \dots, T$:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_t \\ p_t \\ p_t^* \end{bmatrix} \text{ e } \Delta Y_t = \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta s_t \\ \Delta p_t \\ \Delta p_t^* \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Podemos então escrever o modelo dado na Equação 2.59 na forma de correção de erros, conforme descrito na Equação 2.12:

$$\Delta Y_t = \alpha \beta' Y_{t-1} + \Gamma \Delta X_{t-1} + u_t. \quad (2.64)$$

Note que para o modelo apresentado em 2.64, estamos desconsiderando o intercepto η no modelo. Logo, para estimar os parâmetros de um modelo cointegrado, basta utilizar os procedimentos apresentados na Seção 2.4. O caso com intercepto é tratado de maneira detalhada em Lutkepohl (2005).

Capítulo 3

Representação de sinais utilizando ondaletas

3.1 Ondaletas

Conforme aponta [Nason \(2008\)](#), como o próprio nome sugere, as ondaletas são “pequenas ondas” que oscilam em determinada região, mas decaem rapidamente para zero. Por meio das ondaletas, podemos representar uma grande quantidade de funções de maneira esparsa, incluindo aquelas que apresentam descontinuidade. Elas nos permitem fazer um “zoom” na função analisada, possibilitando a visualização e a manipulação de escalas. As ondaletas ainda nos permitem detectar, criar e representar características localizadas de funções de interesse.

As ondaletas são funções que satisfazem determinadas propriedades. Elas podem ser suaves (ou não), simétricas (ou não) e podem ter expressões matemáticas simples (ou não), dependendo da base de ondaletas utilizada. Além disso, elas são localizadas no tempo ou espaço. Este comportamento torna estas funções ideais para analisar sinais não estacionários, permitindo aproximar uma função qualquer por meio de uma combinação linear de ondaletas ([Morettin, 2014](#)). As características descritas acima são extremamente úteis para o presente trabalho, uma vez que vamos considerar o vetor de cointegração variando com tempo, sendo desta forma, assumido como sendo não constante.

Conforme aponta [Shumway e Stoffer \(2011\)](#), as ondaletas são caracterizadas em família, sendo geradas por uma ondaleta pai ϕ e uma ondaleta mãe ψ . A ondaleta pai é utilizada para capturar a natureza suave e de baixa frequência dos dados, enquanto a ondaleta mãe é utilizada para capturar os detalhes e a natureza de alta frequência dos dados. A ondaleta pai integra um, enquanto a ondaleta mãe integra zero:

$$\int \phi(t)dt = 1 \text{ e } \int \psi(t)dt = 0. \quad (3.1)$$

De maneira geral, um sinal ou função de quadrado integrável $f(t)$ pode ser representado

por meio de uma combinação linear de funções de ondaletas (mãe) e funções de escala (pai), para algum $j_0 \in \mathbb{Z}$ fixo, conforme apresentado na Equação 3.2 (Nason, 2008):

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (3.2)$$

Conforme aponta Morettin (2014), geralmente não tomamos todos os níveis de resolução J . Neste caso, tomamos um valor J que corresponde à escala mais fina 2^J . Assim, reescrevendo a Equação 3.2, temos que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j_0,0}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (3.3)$$

onde 2^{j_0} indica o número de escalas para a ondaleta pai e $J = J_{max} - 1$ representa o nível de detalhe desejado, sendo J_{max} o nível máximo permitido para o conjunto de dados diático utilizado (Nason, 2008; Morettin, 2014).

Note que ao tomar $j_0 = 0$ na Equação 3.3, o sinal $f(t)$ pode ser reescrito de maneira conveniente, com apenas uma escala para a ondaleta pai:

$$f(t) = c_{0,0} \phi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (3.4)$$

Além disso, os coeficientes $c_{0,0}$ e $d_{j,k}$ na Equação 3.4 devem ser estimados.

3.2 Famílias de ondaletas

Existe na literatura uma vasta quantidade de bases de ondaletas. Diversas delas são apresentadas em Mallat (1999), Nason (2008), Shumway e Stoffer (2011), Morettin (2014), entre outros. A seguir, apresentamos algumas destas bases, empregadas no presente trabalho.

3.2.1 Família de ondaletas Haar

A função de $\psi(t)$ definida em 3.5 é chamada de ondaleta mãe na base *Haar*. Esta ondaleta dá origem a uma família inteira de ondaletas por meio de duas operações: dilatações diádicas e translações inteiras.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } t \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right) \\ -1 & , \text{ se } t \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right) \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Denotamos j como o *índice de dilatação* e k o *índice de translação*. Cada ondaleta

“gerada” pela ondaleta mãe é indexada pelos dois índices, conforme indicado em 3.6:

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & , \text{ se } t \in \left[2^{-j}k ; 2^{-j} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \\ -2^{\frac{j}{2}} & , \text{ se } t \in \left[2^{-j} \left(k + \frac{1}{2} \right) ; 2^{-j}(k+1) \right) \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.6)$$

A ondaleta pai na base Haar por sua vez, será dada por:

$$\phi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & , \text{ se } t \in [2^{-j}k ; 2^{-j}(k+1)) \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

Na Figura 3.1, apresentamos a representação gráfica destas funções para esta base de ondaletas.

Figura 3.1: Comportamento da ondaleta Haar pai $\phi_{00}(t)$ e mãe $\psi_{jk}(t)$, para $j = 0, 1$ e 2 .

3.2.2 Família de ondaletas Daublet

Conforme apontam [Bruce e Gao \(1996\)](#), as ondaletas Daublet foram as primeiras ondaletas ortogonais contínuas com suporte compacto. Elas receberam este nome como homenagem à sua criadora, Ingrid Daubechies. Estas ondaletas são bastante assimétricas.

Figura 3.2: Comportamento da ondaleta Daublet D2 pai $\phi_{00}(t)$ e mãe $\psi_{jk}(t)$, para $j = 0, 1$ e 2 .

3.2.3 Família de ondaletas Symmlet

As ondaletas Symmlet também possuem suporte compacto e foram construídas para serem aproximadamente simétricas, ou menos assimétricas possíveis (Bruce e Gao, 1996).

Figura 3.3: Comportamento da ondaleta Symmlet S4 pai $\phi_{00}(t)$ e mãe $\psi_{jk}(t)$, para $j = 0, 1$ e 2.

3.3 Limiarização de ondaletas - contexto univariado

O conceito de limiarização (Morettin, 2014) ou *thresholding* foi introduzido nos artigos seminais de Donoho (1993), Donoho e Johnstone (1994) e Donoho et al. (1995). Um dos pontos considerados pelos autores é o fato de que a energia de um sinal é geralmente concentrada em alguns coeficientes da transformada de ondaletas. Logo, um sinal pode ser suavizado ao ser descrito por um número relativamente pequeno de coeficientes.

Conforme aponta Downie e Silverman (1998), um método de suavização adapta os coeficientes de ondaletas utilizando alguma regra que depende da magnitude dos coeficientes. O objetivo é encontrar uma versão mais suave do sinal original.

Para aplicar uma limiarização na transformada de ondaletas, deve-se definir inicialmente o tipo de limiar a ser empregado. Conforme apontam Nason (2008) e Morettin (2014), são comumente utilizados na literatura dois esquemas de limiares:

1. Limiar duro (*hard thresholding*):

$$\delta_H(x, \lambda) = \begin{cases} x & , \text{ se } |x| > \lambda \\ 0 & , \text{ se } |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.8)$$

2. Limiar suave (*soft thresholding*):

$$\delta_S(x, \lambda) = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \lambda) & , \text{ se } |x| > \lambda \\ 0 & , \text{ se } |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.9)$$

Conforme aponta Morettin (2014), a Equação 3.8 é do tipo “mata ou preserva” enquanto que a Equação 3.9 é do tipo “mata ou encolhe”. Apresentamos na Figura 3.4 um exemplo de limiar duro e limiar suave, para $\lambda = 1$.

Figura 3.4: (a) Limiar duro (hard) com $\lambda = 1$, (b) Limiar suave (soft) com $\lambda = 1$.

Existem na literatura, diversos métodos para a escolha do limiar λ (Equações 3.8 e 3.9), conforme descritos em Nason (2008) e Morettin (2014).

Os métodos *adaptativos* são aqueles que dependem do nível j , ou seja, temos um limiar λ_j diferente para cada escala. Os métodos *globais* por sua vez são aqueles aplicados a todos os níveis. Um exemplo é o método de limiarização *universal*, proposto por Donoho e Johnstone (1994). O método é baseado no seguinte resultado:

Proposição 3.1. *Sejam $Z_1, \dots, Z_n$ variáveis aleatórias normais padrão. Defina:*

$$A_n = \left\{ \max_{i=(1,\dots,n)} |Z_i| \leq \sqrt{2 \log(n)} \right\}, \quad (3.10)$$

logo, $\Pi_n = P(A_n) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Por outro lado, se

$$B_n(t) = \left\{ \max_{i=(1,\dots,n)} |Z_i| > t + \sqrt{2 \log(n)} \right\}, \quad (3.11)$$

então $P(B_n(t)) < e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Demonstração: Este resultado foi demonstrado em Donoho e Johnstone (1994).

Conforme aponta Morettin (2014), o resultado da Proposição 3.1 garante (informalmente) que as variáveis aleatórias Z_i 's (independentes ou não) são quase limitadas por $\pm \sqrt{2 \log(n)}$. Logo, com base nos resultados da Proposição 3.1, podemos definir o limiar

$$\lambda_n = \lambda_{j,n} = \sigma \sqrt{2 \log(n)}, \quad (3.12)$$

que não depende da escala e é chamado de “universal”. O termo σ é estimado a partir dos dados.

Donoho et al. (1995) definem uma nova versão de 3.12, dado em 3.13

$$\lambda_n = \lambda_{j,n} = \sigma \sqrt{\frac{2 \log(n)}{n}}. \quad (3.13)$$

Conforme apresentado em Donoho et al. (1995), estimamos σ por meio da Equação 3.14

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{mediana}\{|d_{J-1,k}| : 0 \leq k < 2^J\}}{0,6745}, \quad (3.14)$$

onde $J - 1$ refere-se à escala mais fina.

3.4 Limiarização de ondaletas - contexto multivariado

Desejamos aplicar um método de limiarização para o modelo 4.4, utilizando algum método com o apresentado na Seção 3.3 para ondaletas univariadas. No caso multivariado, devemos fazer algumas considerações:

1. Uma vez escolhido o valor máximo para J , desejamos excluir os coeficientes que não contribuam para estimar os parâmetros do modelo, ou que causem algum ruído;
2. Devemos considerar que em $\mathbf{W}_J$, definido no Capítulo 4, na Equação 4.8, os coeficientes $\mathbf{c}_{0,0}$ e $\mathbf{d}_{j,k}$ são matrizes de ordem $n \times r$, com representação dada na Equação 4.2. Por exemplo, para o caso em que $n = 2$, $r = 1$, temos que

$$\mathbf{d}_{j,k} = \begin{bmatrix} d_{j,0}^{(1,1)} \\ d_{k,0}^{(2,1)} \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad (3.15)$$

para índices $j = 0, 1, \dots, J$ e $k = 0, 1, \dots, 2^J - 1$, sendo J o nível de detalhe desejado. Logo, excluir o coeficiente $\mathbf{d}_{j,k}$ implica desconsiderar as contribuições de $d_{j,k}^{(1,1)}$ e $d_{j,k}^{(2,1)}$ simultaneamente;

3. Assim, antes de aplicar algum método de limiarização, precisamos de uma medida que resuma a contribuição global da escala, de preferência contribuição do nível ao longo do tempo.

Os conceitos apresentados na Seção 3.3 são aplicados costumeiramente no contexto univariado. No entanto, no contexto multivariado (modelo 4.4), os coeficientes de ondaletas para o modelo não são escalares e sim matrizes ($n \times r$).

Conforme apontam Downie e Silverman (1998), a extensão imediata para aplicar as técnicas de *threshold* universal a coeficientes de ondaletas múltiplas (caso multivariado) é aplicar as técnicas individualmente para cada coeficiente. Strela et al. (1999) se valeram desta estratégia.

Downie e Silverman (1998) propuseram outra técnica para o contexto multivariado, que se mostrou mais eficiente que a estratégia anterior. Os passos necessários para aplicar o limiar neste contexto são descritos a seguir.

Assim como no caso univariado, precisamos definir inicialmente o tipo de limiar a ser empregado. Para um limiar λ , são apresentados a seguir os respectivos esquemas de limiares para o caso multivariado:

1. Limiar duro (*hard thresholding*):

$$\delta_d(\theta_{j,k}, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{d}_{j,k} & , \text{ se } \theta_{j,k} \geq \lambda \\ 0 & , \text{ se } \theta_{j,k} < \lambda \end{cases} \quad (3.16)$$

2. Limiar suave (*soft thresholding*):

$$\delta_S(\theta_{j,k}, \lambda) = \mathbf{d}_{j,k} \cdot \left(\frac{\max(\theta_{j,k} - \lambda, 0)}{\theta_{j,k}} \right) \quad (3.17)$$

Em quaisquer dos limiares utilizados (3.16 ou 3.17), $\theta_{j,k}$ são os valores que deverão ser limiarizados. Para o cálculo de $\theta_{j,k}$, utilizamos decomposição

$$\theta_{j,k} = \mathbf{d}_{j,k}' V_j^{-1} \mathbf{d}_{j,k}. \quad (3.18)$$

Conforme apontam [Downie e Silverman \(1998\)](#), $\theta_{j,k}$ segue uma distribuição qui-quadrado χ_L^2 , onde L representa a quantidade de coeficientes de ondaletas utilizada na decomposição.

Na Equação 3.18, $\mathbf{d}_{j,k}$ são as matrizes de coeficientes, conforme exemplificado em 3.15. Para cada combinação de j e k , obtemos um escalar $\theta_{j,k}$, sendo o termo V_j a variância dentro da matriz $\mathbf{d}_{j,k}$:

$$V_j = \text{Var}(\mathbf{d}_{j,k}). \quad (3.19)$$

Nos resta apenas encontrar o limiar λ universal para o contexto multivariado. Temos que $\theta_{j,k} \sim \chi_L^2$. Logo, para encontrar o limiar universal, deve-se encontrar o máximo assintótico de n variáveis aleatórias χ_L^2 i.i.d.. Este resultado é apresentado no Teorema 3.4.1:

Teorema 3.4.1. *Seja M_n o máximo de n variáveis aleatórias χ_L^2 i.i.d., com $L > 1$ e seja λ o ínfimo de todas as sequências a_n que satisfazem*

$$P(M_n \leq a_n) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Desta forma,

$$\lambda = 2 \log n + (L - 2) \log \log n. \quad (3.21)$$

Demonstração: Este resultado foi demonstrado em [Downie e Silverman \(1998\)](#).

Quando $L = 2$, temos que $\lambda = 2 \log n$. No entanto, conforme sugerem os autores, para $L > 2$ ainda é conveniente omitir o termo $(L - 2) \log \log n$, visto que a Expressão 3.21 superestima o verdadeiro valor do limiar λ . Desta forma, em todos os casos, utilizamos o seguinte limiar universal para o contexto multivariado:

$$\lambda = 2 \log n. \quad (3.22)$$

Assim, uma vez calculados $\theta_{j,k}$ para cada uma das matrizes de coeficientes $\mathbf{d}_{j,k}$, construímos medidas que resumem a contribuição de cada escala ao modelo. Em seguida, é possível compará-los com relação à sua magnitude e excluir aqueles que porventura não contribuem ou causam algum ruído à estimação dos parâmetros do modelo. Basta então comparar os valores dos $\theta_{j,k}$ com o limiar universal obtido na Equação 3.22. Na Figura 3.5 é apresentado um exemplo, onde são plotados os valores de $\theta_{j,k}$ de cada coeficiente juntamente com o limiar. Valores de $\theta_{j,k}$ abaixo do limiar devem ser excluídos do modelo.

Figura 3.5: Exemplo de *threshold* universal para o contexto multivariado. Valores de $\theta_{j,k}$ abaixo do limiar devem ser excluídos do modelo.

Capítulo 4

Modelo de Correção de Erros Vetorial com vetor de cointegração variando com o tempo

O modelo básico considerado será o modelo VAR na forma de correção de erros (VEC) com erros gaussianos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.). Assim, como em [Johansen \(1995\)](#), trabalhamos com a hipótese de posto reduzido, ou seja, a hipótese de existência de vetores de cointegração em uma forma paramétrica simples, permitindo a aplicação do método de máxima verossimilhança e testes de razão de verossimilhanças. Neste sentido, vamos seguir a metodologia apresentada em [Bierens e Martins \(2010\)](#), que permite ao vetor de cointegração variar com o tempo. Desta forma, utilizando ondaletas, podemos derivar estimadores para os parâmetros do modelo e a estatística do teste de razão de verossimilhanças para a hipótese de cointegração variando com o tempo.

4.1 Construção do modelo

Desejamos generalizar o modelo VEC dado na Equação [2.12](#), permitindo que o vetor de cointegração β do modelo varie com o tempo. Nosso interesse reside em substituir o parâmetro β do modelo pela sua representação por meio de ondaletas β_t , para $t = 1, \dots, T$. Utilizando a Equação [3.4](#), a expansão em ondaletas do parâmetro β do modelo é dada por

$$\begin{aligned}
 \beta_t &= \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(t) & \dots & \beta_{1,r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1}(t) & \dots & \beta_{n,r}(t) \end{pmatrix}_{n \times r} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{0,0}^{(1,1)} \phi(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^{(1,1)} \psi_{j,k}(t) & \dots & c_{0,0}^{(1,r)} \phi(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^{(1,r)} \psi_{j,k}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,0}^{(n,1)} \phi(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^{(n,1)} \psi_{j,k}(t) & \dots & c_{0,0}^{(n,r)} \phi(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}^{(n,r)} \psi_{j,k}(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t) & \psi_{0,0}(t) & \psi_{1,0}(t) & \dots & \psi_{J,2^J-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{0,0} \\ \mathbf{d}_{0,0} \\ \mathbf{d}_{1,0} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{J,2^J-1} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

onde $\psi_{j,k}(t)$ e $\phi(t)$, representam as funções de ondaletas mãe e pai respectivamente. Como exemplo, podemos citar a base Haar, onde estas funções são dadas nas Equações 3.6 e 3.7. Exemplos de funções de outras bases foram apresentadas no Capítulo 3.

Note ainda que as matrizes $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}_{j,k}$, para $j = (1, \dots, J)$ e $k = (1, \dots, 2^j - 1)$, possuem ordem $(n \times r)$ e carregam os coeficientes de ondaletas para cada nível da decomposição. Neste caso, as matrizes são representadas como

$$\mathbf{c}_{0,0} = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{(1,1)} & \dots & c_{0,0}^{(1,r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,0}^{(n,1)} & \dots & c_{0,0}^{(n,r)} \end{bmatrix}_{n \times r} \quad \text{e} \quad \mathbf{d}_{j,k} = \begin{bmatrix} d_{j,k}^{(1,1)} & \dots & d_{j,k}^{(1,r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{j,k}^{(n,1)} & \dots & d_{j,k}^{(n,r)} \end{bmatrix}_{n \times r} \tag{4.2}$$

Assim como fizemos para o modelo VEC, vamos tomar α como uma matriz fixa de ordem $(n \times r)$. Além disso, vamos supor que a matriz $\Pi = \Pi_t$ pode ser escrita como $\alpha \beta'_t$, para todo $t = 1, \dots, T$. Logo, desconsiderando o intercepto, podemos reescrever o modelo VEC da Equação 2.12 como

$$\begin{aligned}
 \Delta Y_t &= \Pi_t Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t \\
 &= \alpha \beta'_t Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + u_t. \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Em seguida, substituímos β_t da Equação 4.1 na Equação 4.3, obtendo modelo VEC com vetor de cointegração decomposto por ondaletas e, conseqüentemente, variando com

o tempo. Esse modelo será chamado de WAVEC.

$$\begin{aligned}
 \Delta Y_t &= \alpha \left(\begin{bmatrix} \phi(t) & \psi_{0,0}(t) & \psi_{1,0}(t) & \dots & \psi_{J,2^J-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{0,0} \\ \mathbf{d}_{0,0} \\ \mathbf{d}_{1,0} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{J,2^J-1} \end{bmatrix} \right)' Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + u_t \\
 &= \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_{0,0} & \mathbf{d}'_{0,0} & \mathbf{d}'_{1,0} & \dots & \mathbf{d}'_{J,2^J-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t)Y_{t-1} \\ \psi_{0,0}(t)Y_{t-1} \\ \psi_{1,0}(t)Y_{t-1} \\ \vdots \\ \psi_{J,2^J-1}(t)Y_{t-1} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + u_t \\
 \Delta Y_t &= \alpha \mathbf{W}'_J Y_{t-1}^{(J)} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + u_t. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Reescrevendo a Equação 4.4 em notação matricial, temos:

$$\Delta Y = \alpha \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} + \Gamma \Delta X + U, \tag{4.5}$$

onde

$$\Delta Y := \begin{bmatrix} \Delta Y_1 & \Delta Y_2 & \dots & \Delta Y_T \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,r} \end{bmatrix}_{n \times r}, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{W}'_J := \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_{0,0} & \mathbf{d}'_{0,0} & \mathbf{d}'_{1,0} & \dots & \mathbf{d}'_{J,2^J-1} \end{bmatrix}_{r \times (n2^{J+1})}, \tag{4.8}$$

$$Y_{-1}^{(J)} := \begin{bmatrix} \phi(t)Y_{-1} \\ \psi_{0,0}(t)Y_{-1} \\ \vdots \\ \psi_{J,(2^J-1)}(t)Y_{-1} \end{bmatrix}_{n2^{J+1} \times 1}, \text{ com } Y_{-1} = \begin{bmatrix} Y_0 & Y_1 & \dots & Y_{T-1} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{p-1} \end{bmatrix}_{n \times n(p-1)}, \tag{4.10}$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_0 & \Delta X_1 & \dots & \Delta X_{T-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \Delta X_{t-1} = \begin{bmatrix} \Delta Y_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta Y_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_T \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.2 Função de verossimilhança condicional

Seja Y_t um vetor de ordem $(n \times 1)$ seguindo um modelo VEC com vetor de cointegração β escrito na forma de decomposição por ondaletas, conforme descrito na Equação 4.5. Vamos supor que cada variável individual Y_{it} seja $I(1)$, $i = 1, \dots, n$, embora $r < n$ combinações lineares dos elementos de Y_t sejam estacionárias. Além disso, $t = 1, \dots, T$, sendo T o número de observações da série n variada. Conforme visto anteriormente na Equação 4.5, esta suposição nos permite escrever $\Pi_J = \alpha \mathbf{W}'_J$, sendo α uma matriz $(n \times r)$ e $\mathbf{W}'_J$ definida na Equação 4.8. Vamos supor ainda que na Equação 4.5, u_t são i.i.d. e seguem uma distribuição $N_n(\mathbf{0}, \Sigma_u)$.

Considere uma amostra de $(T + p)$ observações para $\Delta Y_t = (\Delta Y_{1t}, \dots, \Delta Y_{nt})'$, com $t = 1 - p, \dots, 0, 1, \dots, T$, denotada por

$$\left(\underbrace{\Delta Y_{1-p}, \Delta Y_{2-p}, \dots, \Delta Y_0}_{p \text{ obs.}}, \underbrace{\Delta Y_1, \dots, \Delta Y_T}_{T \text{ obs.}} \right).$$

Vamos basear nossa estimação nas últimas T observações das séries de ΔY , condicionando nas primeiras p observações. O objetivo será construir a verossimilhança condicional

$$l(\theta_J) = f(\Delta Y_T, \Delta Y_{T-1}, \dots, \Delta Y_1 | \Delta Y_0, \dots, \Delta Y_{1-p}; \theta_J), \quad (4.13)$$

e maximizar com respeito a $\theta_J = (\Pi_J, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}, \Sigma_u)$.

Condicional às observações até o instante $t - 1$, ΔY_t é igual a um termo constante acrescido de um termo com distribuição normal, ou seja

$$\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p} = \underbrace{\alpha \mathbf{W}'_J Y_{t-1}^{(J)} + \Gamma \Delta X_{t-1}}_{\text{constante}} + u_t, \quad (4.14)$$

com $u_t \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma_u)$.

Pela Equação 4.14, temos ainda que $E(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}) = \alpha \mathbf{W}'_J Y_{t-1}^{(J)} + \Gamma \Delta X_{t-1}$, enquanto $Var(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}) = \Sigma_u$. Podemos então concluir que

$$\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p} \sim N_n \left(\alpha \mathbf{W}'_J Y_{t-1}^{(J)} + \Gamma \Delta X_{t-1}, \Sigma_u \right). \quad (4.15)$$

A densidade da t -ésima observação, para $t = 1, \dots, T$, é dada então por

$$\begin{aligned} f(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}; \theta_J) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_u|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\Delta Y_t - \alpha \mathbf{W}'_J Y_{t-1}^{(J)} - \Gamma \Delta X_{t-1} \right)' \right. \\ &\quad \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot \left. \left(\Delta Y_t - \alpha \mathbf{W}'_J Y_{t-1}^{(J)} - \Gamma \Delta X_{t-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Logo, a verossimilhança condicional para a amostra completa $\Delta Y_T, \Delta Y_{T-1}, \dots, \Delta Y_1 | \Delta Y_0, \dots, \Delta Y_{1-p}$ é dada por

$$f(\Delta Y_T, \Delta Y_{T-1}, \dots, \Delta Y_1 | \Delta Y_0, \dots, \Delta Y_{1-p}; \theta_J) = \prod_{t=1}^T f(\Delta Y_t | \Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{1-p}; \theta_J). \quad (4.17)$$

Estamos interessados no entanto na função log-verossimilhança $\mathcal{L}(\theta_J)$ para o modelo dado na Equação 4.4. Utilizando as Equações 4.16 e 4.17, podemos mostrar que a log-verossimilhança, em notação matricial, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_J) &= -\frac{nT}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(|\Sigma_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\left(\Delta Y - \alpha \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} - \Gamma \Delta X \right)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\Delta Y - \alpha \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} - \Gamma \Delta X \right) \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nosso objetivo então será escolher $\theta_J = (\Pi_J, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}, \Sigma_u)$ que maximiza 4.18, sujeito à restrição de que $\Pi_J = \alpha \mathbf{W}'_J$.

4.3 Estimadores de máxima verossimilhança

Uma vez obtida a função de verossimilhança para o caso gaussiano, estamos interessados em obter os estimadores de máxima verossimilhança para o modelo VEC com vetor de cointegração variando com o tempo, dado na Equação 4.5. Assim como fizemos para o modelo VEC invariante com o tempo, vamos concentrar a função de verossimilhança com respeito ao termo de correção de erros. Para isso, vamos substituir a matriz de parâmetros Γ (de curto prazo) pelo seu estimador de mínimos quadrados, dada uma matriz $\Pi_J = \alpha \mathbf{W}'_J$ fixa:

$$\hat{\Gamma}(\alpha \mathbf{W}'_J) = (\Delta Y - \alpha \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1}, \quad (4.19)$$

ou equivalentemente,

$$\hat{\Gamma}(\Pi_J) = (\Delta Y - \Pi_J Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1}. \quad (4.20)$$

Substituindo $\hat{\Gamma}(\Pi_J)$ por Γ na Equação 4.5, temos que

$$\begin{aligned}
 \Delta Y &= \Pi_J Y_{-1}^{(J)} + \hat{\Gamma}(\alpha \mathbf{W}_J') \Delta X + U^* \\
 \Delta Y &= \Pi_J Y_{-1}^{(J)} + (\Delta Y - \Pi_J Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X + U^* \\
 \Delta Y &= \Pi_J Y_{-1}^{(J)} + \Delta Y \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X - \Pi_J Y_{-1}^{(J)} \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X + U^* \\
 \Delta Y &= \Pi_J Y_{-1}^{(J)} \underbrace{[\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X]}_M + \Delta Y \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X + U^* \\
 \Delta Y &= \Pi_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} + \Delta Y \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X + U^*.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Rearranjando os termos da igualdade em 4.21, temos que

$$\begin{aligned}
 \Delta Y \underbrace{[\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X]}_M &= \Pi_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} + U^* \\
 \underbrace{\Delta Y \mathbf{M}}_{R_0} &= \Pi_J \underbrace{Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M}}_{R_1^{(J)}} + U^* \\
 R_0 &= \Pi_J R_1^{(J)} + U^*.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Assim como feito para o modelo VEC da Equação 2.16, devemos notar que R_0 é o resíduo de uma regressão multivariada de ΔY em ΔX (Lutkepohl, 2005). Por outro lado, $R_1^{(J)}$ é o resíduo de uma regressão multivariada de $Y_{-1}^{(J)}$ em ΔX . Conforme apresentado na Equação 4.9, o termo $Y_{-1}^{(J)}$ incorpora as bases de ondaletas.

Enunciamos a seguir a Proposição 4.1, que nos fornece os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo VEC com vetor de cointegração variando com o tempo.

Proposição 4.1. *(Estimadores de máxima verossimilhança de um modelo VEC com vetor de cointegração variando com tempo e decomposto via ondaletas)*

Sejam as matrizes $\mathbf{M} := [\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X]$, $R_0 = \Delta Y \mathbf{M}$ e $R_1^{(J)} := Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M}$, apresentadas em 4.22. Definimos as matrizes de covariância amostrais:

$$\mathbf{S}_{00,T} = \frac{1}{T} R_0 R_0', \tag{4.23}$$

$$\mathbf{S}_{11,T}^{(J)} := \frac{1}{T} R_1^{(J)} R_1^{(J)'}, \tag{4.24}$$

$$\mathbf{S}_{10,T}^{(J)} := \frac{1}{T} R_1^{(J)} R_0 := \mathbf{S}_{01,T}^{(J)'} \tag{4.25}$$

Em seguida, ao resolver o problema de autovalores

$$\left| \lambda^{(J)} \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} - \mathbf{S}_{10,T}^{(J)} (\mathbf{S}_{00,T})^{-1} \mathbf{S}_{01,T}^{(J)} \right| = 0, \quad (4.26)$$

obtemos os autovalores ordenados $\hat{\lambda}_1^{(J)} \geq \hat{\lambda}_2^{(J)} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n^{(J)}$ e autovetores associados $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n$, que satisfazem

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i^{(J)} \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \hat{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{S}_{10,T}^{(J)} \mathbf{S}_{00}^{-1} \mathbf{S}_{01,T}^{(J)} \\ \hat{\mathbf{V}} \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (4.27)$$

com $\hat{\mathbf{V}} = [\hat{\mathbf{v}}_1 \ \hat{\mathbf{v}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{v}}_n]$. Desta forma, a log-verossimilhança do modelo dado na Equação 4.18 é maximizada para

$$\hat{\mathbf{W}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1^{(J)} & \hat{\mathbf{v}}_2^{(J)} & \dots & \hat{\mathbf{v}}_r^{(J)} \end{bmatrix}' \left(\mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \Delta Y \mathbf{M} Y_{-1}^{(J)} \hat{\mathbf{W}}_J \left(\hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} Y_{-1}^{(J)} \hat{\mathbf{W}}_J \right)^{-1} = S_{01,T}^{(J)} \hat{\mathbf{W}}_J \left(\hat{\mathbf{W}}_J' \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \hat{\mathbf{W}}_J \right)^{-1}, \quad (4.29)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \left(\Delta Y - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} \right) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1}, \quad (4.30)$$

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T} \left(\Delta Y - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} - \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \Delta X \right) \left(\Delta Y - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} - \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \Delta X \right)'. \quad (4.31)$$

Além disso, o máximo de 4.18 é atingido em

$$\max \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_J) = -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \left[\ln |\mathbf{S}_{00}| + \sum_{i=1}^r \ln (1 - \lambda_i^J) \right] - \frac{nT}{2}. \quad (4.32)$$

Demonstração:

Para $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{W}_J'$, o máximo de $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ em 4.18 é atingido para

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J') = (\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J' Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \quad (4.33)$$

e

$$\hat{\Sigma}_u(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J') = \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J' Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J' Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)'. \quad (4.34)$$

Substituindo $\boldsymbol{\Gamma}$ de 4.18 por $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J')$ de 4.33, temos a log-verossimilhança concentrada

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} - \hat{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J) \Delta X \right)' \cdot \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left. \left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} - \hat{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J) \Delta X \right) \right], \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} - (\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X \right)' \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left. \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \cdot \left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} - (\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X \right) \right], \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \right) \underbrace{(\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X)}_{\mathbf{M}} \right)' \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left. \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \cdot \left(\left(\Delta Y - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \right) \underbrace{(\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X)}_{\mathbf{M}} \right) \right], \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \cdot \boldsymbol{\Sigma}_u^{-1} \cdot \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \right] \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

A seguir, vamos maximizar 4.35 com relação à $\boldsymbol{\Sigma}_u(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J)$. Substituindo $\boldsymbol{\Sigma}_u(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J)$ de 4.35 por $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_u(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J)$ de 4.34, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_u(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J) \right| \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\underbrace{\left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_u^{-1}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J) \cdot \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)}_{TI_n} \right] \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Note ainda que o termo que está no interior de $\text{tr}[\cdot]$ na Equação 4.36 é igual ao produto de T por uma matriz identidade de ordem n (TI_n), pois

$$\begin{aligned}
 &\left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_u^{-1}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J) \cdot \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) = \\
 &\left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \cdot \left(\frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right)^{-1} \cdot \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) = \\
 &\underbrace{T \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \cdot \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)^{-1}}_{I_n} \cdot \underbrace{\left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)}_{I_n} = \\
 &TI_n. \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Consequentemente, usando 4.37, a Equação 4.36 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right| \right) - \frac{1}{2} \text{tr}(TI_n) \\
 &= \underbrace{-\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{Tn}{2}}_{\text{escalar}} - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right| \right) \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Desconsiderando a soma de termos escalares em 4.38, para maximizar $\mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta})$ temos que maximizar

$$-\frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right| \right), \quad (4.39)$$

ou equivalentemente, minimizar

$$\left| \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right| \quad (4.40)$$

com respeito a $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{W}_J$.

Para demonstrar este resultado, vamos aplicar a Proposição A.1 em 4.40, tomando $Y = \Delta Y \mathbf{M}$, $X = Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M}$, $A = \boldsymbol{\alpha}$ e $B = \mathbf{W}'_J$. Além disso, vamos considerar as matrizes de covariância amostrais $\mathbf{S}_{i,j}$ definidas em 4.23, 4.24 e 4.25. Neste caso, de A.1, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}'_J &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 & \dots & \hat{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix}' (X X')^{-\frac{1}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 & \dots & \hat{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix}' \left(\left(Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 & \dots & \hat{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix}' \left(R_1^{(J)} R_1^{(J)'} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2 & \dots & \hat{\mathbf{v}}_r \end{bmatrix}' \left(\mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Além disso, ainda pelo resultado apresentado em A.1, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}} &= Y X' \hat{B}' \left(\hat{B} X X' \hat{B}' \right)^{-1} \\ &= (\Delta Y \mathbf{M}) \left(Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \mathbf{W}_J \left(\mathbf{W}'_J \left(Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \mathbf{W}_J \right)^{-1} \\ &= R_0 R_1^{(J)'} \mathbf{W}_J \left(\mathbf{W}'_J R_1^{(J)'} R_1^{(J)} \mathbf{W}_J \right)^{-1} \\ &= \mathbf{S}_{01,T}^{(J)} \mathbf{W}_J \left(\mathbf{W}'_J \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \mathbf{W}_J \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Estimamos em seguida os demais parâmetros do modelo, substituindo $\hat{\mathbf{W}}_J$ e $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ das Equações 4.41 e 4.42 nas Equações 4.33 e 4.34. Desta forma, temos:

$$\hat{\Gamma} = (\Delta Y - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}'_J Y_{-1}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \quad (4.43)$$

e

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}'_J Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}'_J Y_{-1} \mathbf{M} \right)'. \quad (4.44)$$

Substituindo $\mathbf{M} = \mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X$ no termo $(\Delta Y \mathbf{M} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\mathbf{W}}'_J Y_{-1} \mathbf{M})$ da Equação 4.44, obtemos:

$$\begin{aligned}
 (\Delta Y \mathbf{M} - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M}) &= \Delta Y (\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X) - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} (\mathbf{I}_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X) \\
 &= \Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} - \underbrace{(\Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)}) \Delta X' (\Delta X \Delta X')^{-1} \Delta X}_{\hat{\mathbf{r}}} \\
 &= \Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} - \hat{\mathbf{r}} \Delta X.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Desta forma, substituindo 4.45 em 4.44, temos:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T} \left(\Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} - \hat{\mathbf{r}} \Delta X \right) \left(\Delta Y - \hat{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} - \hat{\mathbf{r}} \Delta X \right)' \tag{4.46}$$

Pelo Apêndice A.1, o mínimo da expressão 4.40 é dado por:

$$\min_{\alpha, \beta} \left| \frac{1}{T} \left(\Delta Y \mathbf{M} - \alpha \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right) \left(\Delta Y \mathbf{M} - \alpha \hat{\mathbf{W}}_J' Y_{-1}^{(J)} \mathbf{M} \right)' \right| = \left| \frac{1}{T} (\Delta Y \mathbf{M}) (\Delta Y \mathbf{M})' \right| \prod_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i), \tag{4.47}$$

que é equivalente a maximizar 4.39.

Substituindo 4.47 em 4.38, temos que o máximo da log-verossimilhança é atingido em:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_c(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{nT}{2} - \frac{T}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{T} (\Delta Y \mathbf{M}) (\Delta Y \mathbf{M})' \right| \prod_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i^J) \right) \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{nT}{2} - \frac{T}{2} \ln \left(|\mathbf{S}_{00}| \prod_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i^J) \right) \\
 &= -\frac{T}{2} \sum_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i^J) - \frac{T}{2} \ln(|\mathbf{S}_{00}|) - \frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{nT}{2} \\
 &= -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \left[\ln |\mathbf{S}_{00}| + \sum_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i^J) \right] - \frac{nT}{2},
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

conforme queríamos demonstrar em 4.32. $\square$

4.4 Construindo os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros

Para o cálculo dos estimadores de máxima verossimilhança, utilizamos os passos empregados no artigo seminal de [Johansen \(1988\)](#), aplicando as adaptações necessárias para o caso com ondaletas. Seguimos de perto os desdobramentos de [Lutkepohl \(2005\)](#), [Moret-tin \(2011\)](#), além dos métodos empregados por [Bierens e Martins \(2010\)](#).

Construímos inicialmente as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{00,T} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Y_t (\Delta Y_t)' - \widehat{\Sigma}'_{X\Delta Y} \left(\widehat{\Sigma}_{XX} \right)^{-1} \widehat{\Sigma}_{X\Delta Y}, \\
 \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^{(J)} \left(Y_{t-1}^{(J)} \right)' - \widehat{\Sigma}'_{XY^{(J)}} \left(\widehat{\Sigma}_{XX} \right)^{-1} \widehat{\Sigma}_{XY^{(J)}}, \\
 \mathbf{S}_{01,T}^{(J)} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Y_t \left(Y_{t-1}^{(J)} \right)' - \widehat{\Sigma}'_{X\Delta Y} \left(\widehat{\Sigma}_{XX} \right)^{-1} \widehat{\Sigma}_{XY^{(J)}}, \\
 \mathbf{S}_{10,T}^{(J)} &= \left(\mathbf{S}_{01,T}^{(J)} \right)',
 \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Sigma}_{XX} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t (\Delta X_t)', \\
 \widehat{\Sigma}_{X\Delta Y} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t (\Delta Y_t)', \\
 \widehat{\Sigma}_{XY^{(J)}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t \left(Y_{t-1}^{(J)} \right)'.
 \end{aligned}$$

Portanto, seguindo a metodologia de [Johansen \(1988\)](#), os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo, bem como o teste de razão de verossimilhanças, são obtidos ao resolvermos o problema de autovalores

$$\left| \lambda \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} - \mathbf{S}_{10,T}^{(J)} \left(\mathbf{S}_{00,T} \right)^{-1} \mathbf{S}_{01,T}^{(J)} \right| = 0, \quad (4.49)$$

ou equivalentemente ([Johansen, 1995](#)),

$$\left| \lambda \mathbf{I} - \left(\mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{10,T}^{(J)} \left(\mathbf{S}_{00,T} \right)^{-1} \mathbf{S}_{01,T}^{(J)} \left(\mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right| = 0. \quad (4.50)$$

Sejam $\hat{\lambda}_1^{(J)} \geq \hat{\lambda}_2^{(J)} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n^{(J)}$ os autovalores obtidos ao resolvermos a Equação 4.4, com respectivos autovetores ortonormais $\hat{\mathbf{v}}_1^{(J)}, \hat{\mathbf{v}}_2^{(J)}, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n^{(J)}$. O estimador de máxima verossimilhança de $\mathbf{W}_J$ é dado por

$$\hat{\mathbf{W}}_J = \left[\hat{\mathbf{v}}_1^{(J)} \hat{\mathbf{v}}_2^{(J)} \dots \hat{\mathbf{v}}_r^{(J)} \right]' \left(\mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.51)$$

com $0 < r < n$ ([Lutkepohl, 2005](#)).

Assim, ao resolvermos o problema de autovalores na Equação 4.50, encontramos o estimador de máxima verossimilhança de $\mathbf{W}_J$, que representa os estimadores de máxima verossimilhança de $\mathbf{c}_{0,0}, \mathbf{d}_{0,0}, \mathbf{d}_{1,0}, \dots, \mathbf{d}_{J,2^J-1}$, conforme mostrado na Equação 4.8.

Com base nestes estimadores, podemos obter o estimador de máxima verossimilhança de β_t , tomando $n = 2$, $r = 1$ e utilizando a decomposição por ondaletas, para $J = 0$ inicialmente:

$$\hat{\beta}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1(t) \\ \hat{\beta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{0,0}^{(1,1)} \phi_{0,0}(t) + \hat{d}_{0,0}^{(1,1)} \psi_{0,0}(t) \\ \hat{c}_{0,0}^{(2,1)} \phi_{0,0}(t) + \hat{d}_{0,0}^{(2,1)} \psi_{0,0}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Por outro lado, se tomarmos $n = 2$, $r = 1$ e parâmetro de ondaleta $J = 1$, o estimador de máxima verossimilhança de β_t será obtido por

$$\hat{\beta}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1(t) \\ \hat{\beta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{0,0}^{(1,1)} \phi_{0,0}(t) + \hat{d}_{0,0}^{(1,1)} \psi_{0,0}(t) + \hat{d}_{1,0}^{(1,1)} \psi_{1,0}(t) + \hat{d}_{1,1}^{(1,1)} \psi_{1,1}(t) \\ \hat{c}_{0,0}^{(2,1)} \phi_{0,0}(t) + \hat{d}_{0,0}^{(2,1)} \psi_{0,0}(t) + \hat{d}_{1,0}^{(2,1)} \psi_{1,0}(t) + \hat{d}_{1,1}^{(2,1)} \psi_{1,1}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

4.4.1 Estimadores normalizados

Um modo de obter a unicidade do estimador de máxima verossimilhança (identificabilidade) está condicionada à suposição de que β_t tem a forma (Lutkepohl, 2005)

$$\beta^*(t) = \begin{bmatrix} \beta_1(t) \beta_1^{-1}(t) \\ \beta_2(t) \beta_1^{-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ \beta_{n-r}^*(t) \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Diremos que se β_t estiver na forma da Equação 4.54, ele estará normalizado. Caso não tenha esta forma, é possível ordená-lo para garantir que suas primeiras linhas sejam linearmente independentes. Nesta normalização, temos que $\beta_{n-r}^*(t)$ é uma matriz de dimensões $(n - r) \times r$ (Lutkepohl, 2005).

Para apresentar a estimação de β_t normalizado, consideramos exemplos em que $n = 2$, $r = 1$ e apenas uma mudança para $\beta^*(t)$ ao longo do tempo. Logo, $\beta^*(t) := \beta_t^*$ poderá ser escrito da seguinte maneira:

$$\beta_t^* = \begin{bmatrix} \beta_1^*(t) \\ \beta_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \beta_{n-r}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{n-r}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_{21}^* & \dots & \beta_{21}^* & \beta_{22}^* & \dots & \beta_{22}^* \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Note que os termos normalizados β_{2t}^* da Equação 4.55 podem ser representado por

$$\beta_{2t}^* = \begin{cases} \beta_{21}^* & , \text{ se } 1 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \beta_{22}^* & , \text{ se } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}. \quad (4.56)$$

Utilizando a Equação 4.52 e supondo que $\hat{\beta}_t$ é escrito como na Equação 4.55, podemos encontrar os valores normalizados de $\hat{c}_{0,0}^{*(1,1)}$, $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$, $\hat{d}_{0,0}^{*(1,1)}$ e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ ao resolvermos conjuntamente os sistemas:

$$\begin{cases} c_{0,0}^{*(1,1)} + d_{0,0}^{*(1,1)} = \hat{\beta}_{11}^* = 1 \\ c_{0,0}^{*(1,1)} - d_{0,0}^{*(1,1)} = \hat{\beta}_{12}^* = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c_{0,0}^{*(2,1)} + d_{0,0}^{*(2,1)} = \hat{\beta}_{21}^* \\ c_{0,0}^{*(2,1)} - d_{0,0}^{*(2,1)} = \hat{\beta}_{22}^* \end{cases}. \quad (4.57)$$

Resolvendo o primeiro sistema da Equação 4.52, verificamos que

$$\hat{c}_{0,0}^{*(1,1)} = 1 \text{ e } \hat{d}_{0,0}^{*(1,1)} = 0, \quad (4.58)$$

para todo t tal que $1 \leq t < T$.

Da mesma forma, ao resolvermos o segundo sistema da Equação 4.52, verificamos que

$$\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)} = \frac{\hat{\beta}_{21}^* + \hat{\beta}_{22}^*}{2}, \quad (4.59)$$

$$\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)} = \frac{\hat{\beta}_{21}^* - \hat{\beta}_{22}^*}{2}. \quad (4.60)$$

Note que a expressão 4.59 é média de $\hat{\beta}_{21}^*$ e $\hat{\beta}_{22}^*$ (aproximação), enquanto 4.60 consiste na diferença entre $\hat{\beta}_{21}^*$ e $\hat{\beta}_{22}^*$ (detalhe). Isto faz sentido, já que consideramos apenas uma mudança para o vetor de cointegração ao longo do tempo, a partir de dois regimes distintos. Note também que estamos adotando a base Haar de ondaletas.

De uma maneira mais geral, considerando T mudanças ao longo do tempo e parâmetro wavelet $J = 0$, podemos mostrar que $\hat{c}_{0,0}^{*(1,1)} = 1$ e $\hat{d}_{0,0}^{*(1,1)} = 0$, para todo t tal que $1 \leq t < T$, assim como na Equação 4.58. Além disso,

$$\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \hat{\beta}_{2i} = \overline{\hat{\beta}_{2t}}, \quad (4.61)$$

$$\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)} = \frac{1}{T} \left(\sum_{i=1}^{\frac{T}{2}} \hat{\beta}_{2i} - \sum_{i=\frac{T}{2}+1}^T \hat{\beta}_{2i} \right). \quad (4.62)$$

Logo, das Equações 4.58, 4.59 e 4.60 (ou 4.58, 4.61 e 4.62), temos que estimador de máxima verossimilhança de $\mathbf{W}_J$ normalizado é dado por

$$\hat{\mathbf{W}}_J^* = \begin{bmatrix} \hat{c}_{0,0}^{*(1,1)} & \hat{c}_{0,0}^{*(2,1)} & \hat{d}_{0,0}^{*(1,1)} & \hat{d}_{0,0}^{*(2,1)} \end{bmatrix}'. \quad (4.63)$$

Se for considerado um caso ainda mais geral, conforme o apresentado na Equação 4.53, com $n = 2$, $r = 1$ e parâmetro wavelet $J = 1$, é possível mostrar que

$$\hat{c}_{0,0}^{*(1,1)} = 1, \hat{d}_{0,0}^{*(1,1)} = 0, \hat{d}_{1,0}^{*(1,1)} = 0 \text{ e } \hat{d}_{1,1}^{*(1,1)} = 0. \quad (4.64)$$

Além disso, os termos $c_{0,0}^{*(2,1)}$ e $d_{0,0}^{*(2,1)}$ são estimados respectivamente pelas Equações 4.61 e 4.62. Os termos $d_{1,0}^{*(2,1)}$ e $d_{1,1}^{*(2,1)}$ por sua vez, são estimados pelas Equações 4.65 e 4.66 a seguir:

$$\hat{d}_{1,0}^{*(2,1)} = \frac{1}{T} \left(2^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{T}{4}} \hat{\beta}_{2i} - 2^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{T}{2}} \hat{\beta}_{2i} \right), \quad (4.65)$$

$$\hat{d}_{1,1}^{*(2,1)} = \frac{1}{T} \left(2^{\frac{3}{2}} \sum_{i=\frac{T}{2}+1}^{\frac{3T}{4}} \hat{\beta}_{2i} - 2^{\frac{1}{2}} \sum_{i=\frac{T}{2}+1}^T \hat{\beta}_{2i} \right). \quad (4.66)$$

Assim, das Equações 4.64, 4.61, 4.62, 4.65 e 4.66, temos que o estimador de máxima verossimilhança de $\mathbf{W}_J$ normalizado, utilizando $J = 1$, é dado por:

$$\hat{\mathbf{W}}_J^* = \begin{bmatrix} \hat{c}_{0,0}^{*(1,1)} & \hat{c}_{0,0}^{*(2,1)} & \hat{d}_{0,0}^{*(1,1)} & \hat{d}_{0,0}^{*(2,1)} & \hat{d}_{1,0}^{*(1,1)} & \hat{d}_{1,0}^{*(2,1)} & \hat{d}_{1,1}^{*(1,1)} & \hat{d}_{1,1}^{*(2,1)} \end{bmatrix}'. \quad (4.67)$$

De maneira geral, para $n = 2$, $r = 1$ e J qualquer, teremos:

$$\hat{\mathbf{W}}_J^* = \begin{bmatrix} \hat{c}_{0,0}^{*(1,1)} & \hat{c}_{0,0}^{*(2,1)} & \hat{d}_{0,0}^{*(1,1)} & \hat{d}_{0,0}^{*(2,1)} & \dots & \hat{d}_{J,2^J-1}^{*(1,1)} & \hat{d}_{J,2^J-1}^{*(2,1)} \end{bmatrix}'. \quad (4.68)$$

Os estimadores normalizados dos demais parâmetros do modelo são dados a seguir, independente do valor de J escolhido:

$$\hat{\alpha}^* = S_{01,T}^{(J)} \hat{\mathbf{W}}_J^* \left(\hat{\mathbf{W}}_J^{*'} \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \hat{\mathbf{W}}_J^* \right)^{-1}, \quad (4.69)$$

$$\hat{\Gamma}^* = \left(\Delta Y - \hat{\alpha}^* \hat{\mathbf{W}}_J^{*'} Y_{-1}^{(J)} \right) \Delta X' (\Delta X_t \Delta X')^{-1}, \quad (4.70)$$

$$\hat{\Sigma}_u^* = \frac{1}{T} \left(\Delta Y - \hat{\alpha}^* \hat{\mathbf{W}}_J^{*'} Y_{-1}^{(J)} - \hat{\Gamma}^* \Delta X \right) \left(\Delta Y - \hat{\alpha}^* \hat{\mathbf{W}}_J^{*'} Y_{-1}^{(J)} - \hat{\Gamma}^* \Delta X \right)'. \quad (4.71)$$

Vale ressaltar que, para obter os estimadores não normalizados α , Γ e Σ_u , basta substituir $\mathbf{W}_J^*$ por $\mathbf{W}_J$ nas expressões 4.69, 4.70 e 4.71.

4.4.2 Caso especial - Modelo sem diferenças defasadas

Temos interesse em trabalhar também com um modelo mais simples, onde não incluímos o termo de defasagens $\Gamma \Delta X_t$ na Equação 4.3. Para este caso, trabalhamos com o modelo

$$\Delta Y_t = \alpha \beta_t' Y_{t-1}^{(J)} + u_t. \quad (4.72)$$

Vamos apresentar a seguir os estimadores de máxima verossimilhança para este caso particular, seguindo de perto a metodologia apresentada em Lutkepohl (2005). Aqui, supomos α e Σ_u desconhecidos. Construímos então a seguinte matriz:

$$\left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^{(J)} Y_{t-1}^{(J)'} \right)^{-1/2} \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^{(J)} \Delta Y_t' \right) \left(\sum_{t=1}^T \Delta Y_t \Delta Y_t' \right) \left(\sum_{t=1}^T \Delta Y_t Y_{t-1}^{(J)'} \right) \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^{(J)} Y_{t-1}^{(J)'} \right)^{-1/2}, \quad (4.73)$$

cujos autovalores são $\hat{\lambda}_1^{(J)} \geq \hat{\lambda}_2^{(J)} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n^{(J)}$ e respectivos autovetores ortonormais $\hat{\mathbf{v}}_1^{(J)}, \hat{\mathbf{v}}_2^{(J)}, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n^{(J)}$.

Com base na matriz apresentada na Equação 4.73, temos que o estimador de máxima verossimilhança de $\mathbf{W}_J$ para o modelo apresentado na Equação 4.72 é dado por

$$\hat{\mathbf{W}}_J = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1^{(J)} & \hat{\mathbf{v}}_2^{(J)} & \dots & \hat{\mathbf{v}}_r^{(J)} \end{bmatrix}' \left(Y_{-1}^{(J)} Y_{-1}^{(J)'} \right)^{-1/2}. \quad (4.74)$$

Logo, o estimador de máxima verossimilhança de β_t é o mesmo apresentado na Equação 4.52 (ou 4.53), com os termos $\mathbf{c}_{0,0}$, $\mathbf{d}_{0,0}$, $\mathbf{d}_{1,0}$, $\dots$ $\mathbf{d}_{J,2J-1}$ obtidos na Equação 4.74.

De maneira análoga, utilizando a Equação 4.54, obtemos o estimador normalizado $\hat{\beta}_t^*$. O método utilizado para encontrar o estimador normalizado $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ é o mesmo apresentado anteriormente, dependendo da escolha de J .

O estimador de máxima verossimilhança normalizado de α é dado por

$$\hat{\alpha}^* = \left(\sum_{t=1}^T \Delta Y_t Y_{t-1}^{(J)'} \mathbf{W}_J^* \right) \left(\sum_{t=1}^T \mathbf{W}_J^{*'} Y_{t-1}^{(J)} Y_{t-1}^{(J)'} \mathbf{W}_J^* \right)^{-1}. \quad (4.75)$$

Os demais estimadores do modelo são obtidos via mínimos quadrados irrestritos:

$$\hat{\Pi}^* = \left(\sum_{t=1}^T \Delta Y_t Y_{t-1}^{(J)'} \right) \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^{(J)} Y_{t-1}^{(J)'} \right)^{-1} \quad (4.76)$$

e

$$\hat{\Sigma}_u^* = \sum_{t=1}^T \left(\Delta Y_t - \Pi^* Y_{t-1}^{(J)} \right) \left(\Delta Y_t - \Pi^* Y_{t-1}^{(J)} \right)' \quad (4.77)$$

Vale ressaltar mais uma vez que, para obter os estimadores não normalizados $\hat{\alpha}$, $\hat{\Gamma}$ e $\hat{\Sigma}_u$, basta substituir $\hat{\mathbf{W}}_J^{*'}$ por $\hat{\mathbf{W}}_J$ nas expressões 4.75, 4.76 e 4.77.

4.5 Teste de razão de verossimilhanças

Ao analisar um conjunto de dados cointegrados, sejam simulados ou reais, gostaríamos de verificar se as relações de cointegração variam com o tempo. Semelhante à metodologia empregada em Bierens e Martins (2010), utilizamos um teste de razão de verossimilhanças com este intuito. Desta forma, estamos interessados em testar as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 : & \text{Cointegração invariante com o tempo (C.I.), ou seja, } \Pi_J = \Pi = \alpha \beta' \\ \mathbf{H}_A : & \text{Cointegração variando com o tempo (C.V.), ou seja, } \Pi_J = \alpha \mathbf{W}_J' \end{cases}.$$

Para a hipótese nula $\mathbf{H}_0$, α e β são matrizes fixadas ($n \times r$) de posto r . Já para a hipótese $\mathbf{H}_A$, α é dada como em $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{W}_J'$ é definida em 4.8.

Dada a representação do modelo *WAVEC* da Equação 4.5, com vetor normalizado $\mathbf{W}_J^*$, temos que a hipótese nula $\mathbf{H}_0$ corresponde a

$$\mathbf{W}_J^{*'} = (\boldsymbol{\beta}', \mathbf{0}), \quad (4.78)$$

com a matriz de cointegração invariante com o tempo $\boldsymbol{\beta}$ ($n \times r$) e a matriz nula $\mathbf{0}$ ($r \times n2^J$), tal que $\mathbf{W}_J^{*'} Y_{-1}^{(J)} = \boldsymbol{\beta}' Y_{-1}$.

O maior valor que pode ser alcançado pela log-verossimilhança do modelo, para $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{W}_J, \boldsymbol{\Sigma}_u)$, com a restrição $\boldsymbol{\Pi}_J = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W}_J'$ é dado por:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, r, J) = -\frac{Tn}{2} \ln(2\pi) - \frac{Tn}{2} - \frac{Tn}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^r \ln(1 - \hat{\lambda}_i^{(J)}). \quad (4.79)$$

Além disso, o maior valor que pode ser alcançado pela log-verossimilhança do modelo *VEC*(p), para $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$, com a restrição $\boldsymbol{\Pi}_J = \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}$ é dado por:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, r, 0) = -\frac{Tn}{2} \ln(2\pi) - \frac{Tn}{2} - \frac{Tn}{2} \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_u|) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^r \ln(1 - \hat{\lambda}_i). \quad (4.80)$$

Assim, dados r e J , a estatística do teste de razão de verossimilhanças de H_0 contra H_A , toma a forma

$$\begin{aligned} RV_{CVT}^{(J)} &= -2 [\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, r, 0) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, r, J)] \\ &= -2 \left[-\frac{T}{2} \sum_{i=1}^r \ln(1 - \hat{\lambda}_i) + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^r \ln(1 - \hat{\lambda}_i^{(J)}) \right] \\ &= T \sum_{i=1}^r \left\{ \ln \left(\frac{1 - \hat{\lambda}_i}{1 - \hat{\lambda}_i^{(J)}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde $RV_{CVT}^{(J)}$ é a estatística do teste de razão de verossimilhanças para relações de cointegração variando com o tempo.

4.6 Testes bootstrap - Propriedades empíricas dos estimadores

Conforme apresentado em Martins (2016), foi utilizado o método *wild* do bootstrap para obter intervalos de confiança empíricos dos parâmetros do modelo. O método também foi utilizado em testes de razão de verossimilhanças para testar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo versus cointegração variando com o tempo. Este método

bootstrap é semelhante ao método *sieve*, porém Martins (2005) e Martins (2016) demonstraram que o primeiro método é mais eficiente, principalmente para trabalhar com amostras pequenas.

O teste bootstrap *wild* para a cointegração variando com o tempo (CVT) é obtido ao seguir os seguintes passos (Martins, 2016):

1. Primeiro, geramos B pseudo-perturbações u_t^b para $t = 1, \dots, T$ e $b = 1, \dots, B$ dos resíduos estimados $\hat{u}_t$, de forma que

$$u_t^b = \hat{u}_t \cdot \mathbf{w}_t \quad (4.82)$$

onde $\{\mathbf{w}_t\}_{t=1}^T$ é uma sequência de escalares independentes seguindo uma distribuição $N(0, 1)$.

2. Em seguida, construímos a amostra bootstrap $\{\Delta Y_t^b\}_{t=1}^T$ recursivamente da equação

$$\Delta Y_t^b = \hat{\alpha} \hat{\beta}' Y_{t-1}^b + \hat{\Gamma} \Delta X_t^b + u_t^b, \quad (4.83)$$

com valores iniciais $Y_t^b = Y_t$, para $t = (1 - p), \dots, 0$.

3. Usando a amostra bootstrap $\{\Delta Y_t^b\}_{t=1}^T$, construímos as estatísticas de razão de verossimilhanças

$$RV_{CVT}^{(J,b)} = T \sum_{i=1}^r \ln \left(\frac{1 - \hat{\lambda}_i^b}{1 - \hat{\lambda}_i^{(J,b)}} \right) \quad (4.84)$$

onde os termos $\hat{\lambda}_i^b$'s denotam as versões bootstrap dos autovalores generalizados ordenados $\hat{\lambda}_i$'s.

4. Em seguida, a versão bootstrap para o intervalo de confiança de 95% percentil é usado como valor crítico de teste de 5%. De maneira análoga, é possível calcular a versão bootstrap do valor- p para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ usando a proporção

$$p_b^{(J)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{I}(RV_{CVT}^{(J,b)} > RV_{CVT}^{(J)}), \quad (4.85)$$

5. Por fim, para um nível de significância δ , rejeitamos a hipótese nula de cointegração invariante com o tempo se $p_b^{(J)} < \delta$.

Desta forma, podemos obter intervalos de confiança e a estimação da distribuição dos estimadores dos parâmetros, que podem ser construídos com base na amostra dos estimadores bootstrap.

4.7 Paridade de Poder de Compra variando com o tempo

Tratamos da PPC variando com o tempo em dois casos: considerando e não considerando o intercepto no modelo. No primeiro caso, o vetor de cointegração é assumido como variando com o tempo. Esta abordagem também é empregada por [Bierens e Martins \(2010\)](#). No segundo caso, apenas o intercepto varia com o tempo, sendo o vetor de cointegração assumido como constante. Em ambos os casos, p_t representa o logaritmo do índice de preços do país local, p_t^* representa o logaritmo do índice de preços para o país estrangeiro e s_t representa o logaritmo da taxa de câmbio em moeda do país local por unidade da moeda estrangeira, tal qual definido na Seção 2.5.

4.7.1 Modelo desconsiderando o intercepto

Podemos recriar a Equação 2.59 considerando o vetor de cointegração β variando com o tempo, ou seja, o parâmetro β é representado temporalmente por $\beta_t = [\beta_{0t} \ \beta_{1t} \ \beta_{2t}]$, para $t = 1, \dots, T$. Desta forma, temos

$$\beta_{0t}s_t = \beta_{1t}p_t + \beta_{2t}p_t^* + u_t. \quad (4.86)$$

Podemos reescrever a Equação 4.86 na forma de correção de erros, conforme apresentado em 4.5. Sem perda de generalidade, vamos considerar a matriz de observações ΔY_t tomando $n = 3$, $r = 1$ e $t = 1, \dots, T$:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_t \\ p_t \\ p_t^* \end{bmatrix} \text{ e } \Delta Y_t = \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta s_t \\ \Delta p_t \\ \Delta p_t^* \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Assim, 4.86 escrita na forma de correção de erros, com vetor de cointegração variando com o tempo é dada por:

$$\Delta Y_t = \alpha W_J' Y_{t-1}^{(J)} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + u_t. \quad (4.88)$$

Note que para o modelo apresentado em 4.88, estamos desconsiderando o intercepto no modelo. Logo, para estimar os parâmetros de um modelo cointegrado, basta utilizar os procedimentos apresentados na Seção 4.3.

4.7.2 Modelo considerando o intercepto variando com o tempo e matriz de cointegração fixa

Para este caso, vamos considerar a Equação 2.61, com $\eta = \eta_t$. Desta forma, temos que

$$S_t = e^{\eta_t} \cdot (P_t) \cdot (P_t^*)^{-1} \cdot e^{u_t}, \quad (4.89)$$

de onde podemos extrair

$$\underbrace{\left(\frac{S_t}{e^{u_t}} \cdot \frac{P_t^*}{P_t} \right)}_{E_t} = e^{\eta_t}. \quad (4.90)$$

Note que o modelo apresentado na Equação 4.89 generaliza o caso em η não varia com o tempo (Equação 2.61). A Figura 4.1 mostra um esquema para a quantidade e^η teórica (igual a 1 como referência) e estimada $e^{\hat{\eta}_t}$. Por simplicidade, omitimos o termo e^{u_t} da comparação com o valor teórico.

Para este modelo, podemos interpretar os resultados considerando os seguintes casos para e^{η_t} :

- Se $e^{\hat{\eta}_t}$ oscila em torno de 1, então $\eta_t \approx 0$ para todo $t = 1, \dots, T$. Logo, deveremos trabalhar com outro modelo de cointegração que não contemple o intercepto;
- Se $e^{\hat{\eta}_t}$ oscilar de maneira não estacionária entre 0 e 1 ou oscilar acima de 1, temos indícios de que devemos considerar o modelo com intercepto variando com tempo.

Na Figura 4.1 apresentamos um exemplo hipotético onde tal situação pode ocorrer.

Figura 4.1: Esquema PPC teórica invariante como tempo versus estimada variando com o tempo.

Vamos construir este modelo de maneira similar à apresentada na Equação 4.3. Neste caso no entanto, vamos tomar α e β como sendo matrizes fixas de ordem $(n \times r)$. Note que na Equação 4.3 era permitido ao vetor β variar com o tempo.

Para isso, vamos considerar a matriz de observações ΔY_t , para $n = 3$, $r = 1$ e $t = 1, \dots, T$:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_t \\ p_t \\ p_t^* \end{bmatrix} \text{ e } \Delta Y_t = \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta s_t \\ \Delta p_t \\ \Delta p_t^* \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Podemos então reescrever o modelo dado na Equação 4.89 na forma de correção de erros, conforme descrito na Equação 4.92

$$\Delta Y_t = \alpha \begin{bmatrix} \beta' & \eta_t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} + \Gamma \Delta X_{t-1} + u_t. \quad (4.92)$$

Equivalentemente ao apresentado no Capítulo 4, vamos considerar desta vez o parâmetro η_t variando com o tempo. Na Equação 4.93, reescrevemos η_t como uma combinação de ondaletas pai e mãe:

$$\eta_t = c_{0,0}\phi(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}\psi_{j,k}(t). \quad (4.93)$$

Substituindo 4.93 em 4.92, temos que

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= \alpha \begin{bmatrix} \beta' & c'_{0,0} & d'_{0,0} & \dots & d'_{J,2^J-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ \phi_{0,0}(t) \\ \psi_{0,0}(t) \\ \vdots \\ \psi_{J,2^J-1}(t) \end{bmatrix} + \Gamma \Delta X_{t-1} + u_t \\ &= \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & c'_{0,0} & d'_{0,0} & \dots & d'_{J,2^J-1} \end{bmatrix}}_{W^{+'}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_t \\ p_t \\ p_t^* \\ \phi_{0,0}(t) \\ \psi_{0,0}(t) \\ \vdots \\ \psi_{J,2^J-1}(t) \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}^+} + \Gamma \Delta X_{t-1} + u_t \\ &= \alpha W^{+'} Y_{t-1}^{(J)+} + \Gamma \Delta X_{t-1} + u_t. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Estamos fazendo a suposição de simetria de preços e de normalidade para o modelo, o que é equivalente a trabalhar com β dado em 2.58. Ao fixar o vetor β desta forma, estamos trabalhando com um modelo com restrição de parâmetros. Neste caso, vamos nos valer da teoria apresentada em Lutkepohl (2005) para estimar os demais parâmetros do modelo considerando esta restrição.

Devemos verificar se as restrições para a matriz de cointegração podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (4.95)$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz fixa e conhecida de ordem $n \times \ell$ e $\boldsymbol{\varphi}$ é uma matriz de ordem $\ell \times r$, com $\ell \geq r$. Neste caso, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo podem ser obtidas, bastando apenas considerar (Lutkepohl, 2005)

$$Y_{-1}^{(J)+} = \mathbf{H}' \cdot Y_{-1}^{(J)+} \quad (4.96)$$

na construção das matrizes S_{ij} $i, j = 0, 1$, já construídas na Seção 4.4.

Como estamos trabalhando com o modelo de PPC, fixamos, sem perda de generalidade, $n = 3$ e $r = 1$. Trabalhamos também com as restrições: $\beta_1 = 1$ (modelo normalizado), $\beta_2 = -\beta_1$, $\beta_3 = \beta_1$ e $\eta_t \neq 0$.

Desta forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned} W^+ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{W}_J \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ \vdots \\ d_{J,2^J-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -\beta_1 \\ \beta_1 \\ c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ \vdots \\ d_{J,2^J-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ \vdots \\ d_{J,2^J-1} \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \mathbf{W}_J \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde $\mathbf{R}$ é a matriz de restrições de ordem $n \times r$, $\mathbf{O}_1$ é uma matriz de zeros com ordem $n \times 2^{J+1}$, $\mathbf{O}_2$ é uma matriz de zeros com ordem $2^{J+1} \times r$, $\mathbf{I}_w$ é uma matriz identidade com ordem $2^{J+1} \times 2^{J+1}$ e $\mathbf{W}_J$ é a matriz com coeficientes de ondaletas.

Logo, para estimar os parâmetros do modelo, podemos construir as matrizes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{00,T} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Y_t (\Delta Y_t)' - \hat{\Sigma}'_{X\Delta Y} \left(\hat{\Sigma}_{XX} \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{X\Delta Y}, \\
 \mathbf{S}_{11,T}^{(J)+} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^{(J)+} \left(Y_{t-1}^{(J)+} \right)' - \hat{\Sigma}'_{XY^{(J)}} \left(\hat{\Sigma}_{XX} \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{XY^{(J)+}}, \\
 \mathbf{S}_{01,T}^{(J)+} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Y_t \left(Y_{t-1}^{(J)+} \right)' - \hat{\Sigma}'_{X\Delta Y} \left(\hat{\Sigma}_{XX} \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{XY^{(J)}}, \\
 \mathbf{S}_{10,T}^{(J)+} &= \left(\mathbf{S}_{01,T}^{(J)+} \right)',
 \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}_{XX} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t (\Delta X_t)', \\
 \hat{\Sigma}_{X\Delta Y} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t (\Delta Y_t)', \\
 \hat{\Sigma}_{XY_{t-1}^{(J)+}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t \left(Y_{t-1}^{(J)+} \right)'.
 \end{aligned}$$

Desta forma, utilizando as técnicas apresentadas nos Capítulos 2 e 4, podemos ver que os estimadores dos parâmetros do modelo 4.94 são dados a seguir:

$$\tilde{W}^+ = \mathbf{H}\tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & -\tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{c}_{0,0} & \tilde{d}_{0,0} & \dots & \tilde{d}_{J,2^J-1} \end{bmatrix}' \quad (4.98)$$

onde H é uma matriz de ordem $n + 2^{J+1} \times 2^{J+1} + r$ e $\hat{\varphi}$ é uma matriz de ordem $2^{J+1} + r \times r$.

$$\tilde{\eta}_t = \tilde{c}_{0,0}\phi(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{d}_{j,k}\psi_{j,k}(t), \quad (4.99)$$

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & -\tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\eta}_t \end{bmatrix}'. \quad (4.100)$$

Os estimadores normalizados dos demais parâmetros do modelo são dados a seguir, independente do valor de J escolhido:

$$\tilde{\alpha}^* = S_{01,T}^{(J)} \tilde{\varphi} \left(\tilde{\varphi}' \mathbf{S}_{11,T}^{(J)} \tilde{\varphi} \right)^{-1}, \quad (4.101)$$

$$\tilde{\Gamma}^* = \left(\Delta Y - \tilde{\alpha}^* \tilde{\varphi}' H Y_{t-1}^{(J)+} \right) \Delta X' (\Delta X_t \Delta X')^{-1}, \quad (4.102)$$

$$\tilde{\Sigma}_u^* = \frac{1}{T} \left(\Delta Y - \tilde{\alpha}^* \tilde{\varphi}' H Y_{t-1}^{(J)+} - \tilde{\Gamma}^* \Delta X \right) \left(\Delta Y - \tilde{\alpha}^* \tilde{\varphi}' H Y_{t-1}^{(J)+} - \tilde{\Gamma}^* \Delta X \right)'. \quad (4.103)$$

Capítulo 5

Relações de cointegração simuladas

Este capítulo dedica-se ao estudo dos quantis empíricos e do poder empírico do teste de razão de verossimilhanças para testar a hipótese de cointegração variando com o tempo. Além disso, para ilustrar a aplicação do modelo, são apresentados seis modelos simulados, divididos em dois casos: os cinco primeiros modelos sem defasagem, enquanto o sexto exemplo inclui uma defasagem.

5.1 Quantis empíricos e poder empírico do teste de razão de verossimilhanças

Em [Bierens e Martins \(2010\)](#), os autores modelaram o vetor de cointegração temporalmente utilizando polinômios de Chebyshev. Eles também demonstraram que, assintoticamente, a estatística de razão de verossimilhanças segue uma distribuição Qui-quadrado com $v = mnr$ graus de liberdade, denotado por $\chi^2_{\nu=mnr}$, sendo m o grau do polinômio utilizado, com n e r sendo os parâmetros do modelo cointegrado usual.

Para o modelo apresentado na Seção 4.1, com base em resultados numéricos, vemos a seguir que a estatística de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$ segue aproximadamente uma distribuição χ^2 , com o número de graus de liberdade adaptado ao caso com ondaletas. O número de graus de liberdade, tal como descrito para o caso com polinômios de Chebyshev, deve levar em conta o número de parâmetros n e r do modelo de cointegração usual, além do nível J utilizado na decomposição em ondaletas. Temos um forte indicativo numérico de que $RV_{CVT}^{(J)}$ seguirá uma distribuição χ^2 , com $\nu = (N - 1)nr$, sendo N o número de coeficientes de ondaletas utilizado na decomposição da matriz β_t , considerando um único nível para a ondaleta pai e diversos níveis para a ondaleta mãe.

Como usual para testes de razão de verossimilhanças para hipóteses encaixadas, o número de graus de liberdade corresponde ao número de parâmetros a mais no modelo completo, com relação ao modelo sob a hipótese nula de que o vetor de cointegração é invariante com o tempo ([Sen et al., 2010](#)). Neste caso, temos que $N = 2^{J+1}$ e então rees-

crevemos a expressão para ν como $\nu = (2^{J+1} - 1)nr$.

Para confirmar estes resultados, apresentamos a seguir os quantis empíricos da estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, expressão 4.81, obtidos via simulações de Monte Carlo, sob a hipótese nula de cointegração invariante com o tempo, para diferentes tamanhos amostrais. Além disso, aumentamos de maneira consecutiva a quantidade de níveis, de forma a verificar a aproximação numérica para cada caso.

Nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentamos medidas resumo para a estatística de razão de verossimilhanças, considerando as bases de ondaletas “Haar”, “Daubechies D2” e “Symmlet S8” respectivamente. Em cada caso, consideramos $N = 1000$ séries simuladas, $n = 2$, $r = 1$ e resoluções $J = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Além disso, apresentamos os quantis teóricos, assumindo a validade da aproximação para a distribuição qui-quadrado, apenas para referência. É possível notar que os valores empíricos se aproximam dos valores teóricos à medida que aumentamos o tamanho da amostra nas simulações.

Tabela 5.1: Quantis, média e erros padrão empíricos e teóricos para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, utilizando a ondaleta *Haar*, obtidos sob H_0 (cointegração invariante com o tempo).

		Quantis					Estatísticas	
Haar	Série	50%	90%	95%	97,50%	99%	Média	E.P.
J=0	T = 256	1,5331	5,0808	6,3319	7,8117	9,1519	2,1794	2,0951
	T = 512	1,4650	4,5812	6,4668	7,5291	9,5210	2,0629	2,0922
	T = 1024	1,3715	4,5235	6,0488	7,8135	9,5107	2,0253	2,0478
	T = 4096	1,4307	4,6828	6,0457	7,4279	9,3486	2,0282	2,0070
Referência ($\chi^2_{\nu=2}$)		1,3863	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	2,0000	2,0000
J=1	T = 256	5,3408	10,9814	13,0897	14,6318	17,1862	6,1400	3,6387
	T = 512	5,3358	11,0977	12,9679	14,6323	17,0081	6,0687	3,5901
	T = 1024	5,4828	10,3698	12,2373	13,6369	17,4738	6,0034	3,5383
	T = 4096	5,2561	10,5053	12,4680	14,0449	16,7514	5,9860	3,4043
Referência ($\chi^2_{\nu=6}$)		5,3481	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	6,0000	3,4641
J=2	T = 256	14,0700	21,9893	24,7166	27,3619	29,5692	14,5921	5,5552
	T = 512	13,4342	21,5551	23,9261	27,2112	29,0954	14,1456	5,3745
	T = 1024	13,3982	21,1016	23,3077	25,9582	28,7944	14,0421	5,1675
	T = 4096	13,5789	21,3636	23,5763	25,6958	27,6109	14,1922	5,2199
Referência ($\chi^2_{\nu=14}$)		13,3393	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	14,0000	5,2915
J=3	T = 256	31,1564	43,1603	46,1009	50,4281	53,7648	31,7212	8,5084
	T = 512	29,9182	41,1800	44,8282	47,6313	50,9320	30,8221	7,5527
	T = 1024	29,2182	40,6644	43,6629	46,0810	50,9657	30,0528	7,5623
	T = 4096	29,6263	39,8035	43,5370	47,4515	51,4795	30,2828	7,8070
Referência ($\chi^2_{\nu=30}$)		29,3360	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	30,0000	7,7460
J=4	T = 256	68,1779	84,1041	89,5981	94,5710	101,5639	68,5021	12,3995
	T = 512	64,1821	79,2744	85,4435	89,2097	94,7515	64,6483	11,6602
	T = 1024	62,3479	77,0465	81,1736	85,9954	91,5495	62,9930	10,9880
	T = 4096	60,8178	77,8327	83,8082	88,7453	95,6391	62,5569	12,0995
Referência ($\chi^2_{\nu=62}$)		61,3346	76,6302	81,3810	85,6537	90,8015	62,0000	11,1355
J=5	T = 256	162,2814	190,6147	198,9637	205,8693	217,4858	162,9720	21,3739
	T = 512	136,5297	160,8637	166,5737	173,6013	179,9645	137,7817	17,3981
	T = 1024	130,2180	151,9722	159,4935	165,5070	174,6093	130,9665	16,9904
	T = 4096	127,3415	148,7465	155,4227	160,9546	170,7986	127,8181	16,3328
Referência ($\chi^2_{\nu=126}$)		125,3340	146,7241	153,1979	158,9624	165,8410	126,0000	15,8745

Tabela 5.2: Quantis, média e erros padrão empíricos e teóricos para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, utilizando a ondaleta *Daubechies D2*, obtidos sob H_0 (cointegração invariante com o tempo).

$D2$	Série	Quantis					Estatísticas	
		50%	90%	95%	97,50%	99%	Média	E.P.
J=0	T = 256	1,4469	4,7679	6,2985	7,9434	10,4686	2,0756	2,1220
	T = 512	1,4429	4,5655	5,5706	6,8917	8,2025	1,9681	1,9291
	T = 1024	1,4074	4,6730	6,0493	7,0626	9,2955	2,0645	2,0229
	T = 4096	1,3568	4,6494	5,9239	7,5688	10,0547	2,0036	2,0731
Referência ($\chi^2_{\nu=2}$)		1,3863	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	2,0000	2,0000
J=1	T = 256	5,5584	11,0343	12,8834	15,0627	16,8188	6,2411	3,6037
	T = 512	5,5431	10,7039	12,9457	14,8148	15,9527	6,1758	3,4581
	T = 1024	5,3163	10,9899	12,6366	14,3497	16,8988	6,0668	3,5540
	T = 4096	5,5419	10,8975	12,8406	15,5534	17,9010	6,1712	3,5531
Referência ($\chi^2_{\nu=6}$)		5,3481	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	6,0000	3,4641
J=2	T = 256	14,2075	22,6577	24,7853	27,3610	30,6246	14,8311	5,6439
	T = 512	13,2069	20,4318	23,2855	26,6914	29,0014	13,9270	5,1862
	T = 1024	13,6804	21,0715	23,7497	26,3301	30,0294	14,1737	5,3119
	T = 4096	13,6204	21,3351	24,0338	25,8896	28,9691	14,2017	5,2083
Referência ($\chi^2_{\nu=14}$)		13,3393	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	14,0000	5,2915
J=3	T = 256	30,4361	41,4003	45,4042	48,7466	53,7520	31,0373	8,0686
	T = 512	29,7781	40,0918	43,6366	46,8815	50,3867	30,5845	7,6001
	T = 1024	29,2617	39,5707	43,4769	47,8512	51,8415	30,0128	7,5995
	T = 4096	29,2841	39,6018	43,0733	45,3271	48,5172	29,8547	7,5030
Referência ($\chi^2_{\nu=30}$)		29,3360	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	30,0000	7,7460
J=4	T = 256	67,4666	84,5747	90,7665	94,5624	99,7292	68,3378	12,4530
	T = 512	63,0113	79,8812	85,1758	89,0907	93,5631	64,1146	11,7004
	T = 1024	62,3615	78,2182	82,3188	86,4973	89,5525	62,8876	11,4277
	T = 4096	61,6559	77,6814	82,0570	85,8391	93,2429	62,2104	11,5890
Referência ($\chi^2_{\nu=62}$)		61,3346	76,6302	81,3810	85,6537	90,8015	62,0000	11,1355
J=5	T = 256	164,4959	194,2850	200,5327	209,1355	216,5904	164,9336	21,5837
	T = 512	137,4613	160,2970	167,2624	172,3542	180,5752	138,1466	17,0075
	T = 1024	128,8077	151,1039	157,8569	164,4674	172,6155	129,7655	16,6212
	T = 4096	126,3531	146,4014	154,8341	159,3293	167,0838	127,0892	16,0386
Referência ($\chi^2_{\nu=126}$)		125,3340	146,7241	153,1979	158,9624	165,8410	126,0000	15,8745

Tabela 5.3: Quantis, média e erros padrão empíricos e teóricos para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, utilizando a ondaleta *Symmet S8*, obtidos sob H_0 (cointegração invariante com o tempo).

$S8$	Série	Quantis					Estatísticas	
		50%	90%	95%	97,50%	99%	Média	E.P.
J=0	T = 256	1,3699	4,6927	6,1980	7,6044	9,1463	1,9940	2,0510
	T = 512	1,4319	4,8458	6,7432	7,8683	9,0945	2,0567	2,0885
	T = 1024	1,4278	4,4900	6,1164	7,4844	9,7964	2,0152	2,0146
	T = 4096	1,3294	4,2946	5,4921	7,0027	8,3708	1,9051	1,8610
Referência ($\chi^2_{\nu=2}$)		1,3863	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	2,0000	2,0000
J=1	T = 256	5,3942	11,2611	13,4225	14,9851	16,8302	6,1070	3,5860
	T = 512	5,6685	10,6881	12,4714	14,1678	15,8481	6,2063	3,3853
	T = 1024	5,3798	10,4150	12,2721	14,5549	16,4627	5,9665	3,3978
	T = 4096	5,4048	10,9299	12,6239	14,1889	17,3246	6,0481	3,5072
Referência ($\chi^2_{\nu=6}$)		5,3481	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	6,0000	3,4641
J=2	T = 256	13,6941	21,5723	24,6090	27,0268	29,5715	14,3805	5,3470
	T = 512	13,3904	21,4099	23,8665	26,0190	29,0524	14,1246	5,4351
	T = 1024	13,1929	21,8692	24,5980	27,8842	30,9173	14,1352	5,7088
	T = 4096	13,3461	21,2934	24,2175	26,7251	29,3990	14,0414	5,3736
Referência ($\chi^2_{\nu=14}$)		13,3393	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	14,0000	5,2915
J=3	T = 256	30,0520	42,2974	46,7115	49,9980	54,1043	31,2178	8,3454
	T = 512	30,0290	41,8309	45,7904	48,8059	53,5229	30,9623	8,0997
	T = 1024	29,4354	40,8147	44,6408	48,0286	50,9135	30,3028	7,9237
	T = 4096	29,6982	40,9747	44,6088	48,4852	54,2589	30,5523	8,0681
Referência ($\chi^2_{\nu=30}$)		29,3360	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	30,0000	7,7460
J=4	T = 256	68,8794	84,8912	88,8051	93,7518	99,8415	68,9673	12,0589
	T = 512	64,5060	80,6596	85,8852	89,3158	94,1073	64,9175	11,9715
	T = 1024	61,5096	77,3247	81,6160	84,9427	91,1403	62,3096	11,3643
	T = 4096	61,9107	77,4596	81,9125	85,5765	90,0684	62,3717	11,4675
Referência ($\chi^2_{\nu=62}$)		61,3346	76,6302	81,3810	85,6537	90,8015	62,0000	11,1355
J=5	T = 256	165,2770	194,7596	203,5045	208,9855	220,0811	166,1982	22,0120
	T = 512	135,7438	158,7342	166,4919	172,8982	177,8418	136,6703	17,2265
	T = 1024	130,1606	151,7567	158,7198	166,2436	171,6039	130,7952	16,1854
	T = 4096	127,1858	148,7893	155,6727	162,1183	169,3733	127,2352	16,5721
Referência ($\chi^2_{\nu=126}$)		125,3340	146,7241	153,1979	158,9624	165,8410	126,0000	15,8745

Com base nos quantis apresentados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, parece razoável assumir que a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ segue assintoticamente uma distribuição χ_ν^2 . Assim, podemos fazer testes para determinar se um conjunto de dados apresenta cointegração que varia com o tempo, dado um nível de significância fixado.

A Tabela 5.4, por sua vez, apresenta o poder empírico do teste de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$, calculado via simulações para diferentes valores de T , utilizando ondaleta *Haar* e nível de significância de 5%. Pela tabela, podemos notar que o poder fica cada vez mais próximo de 1 à medida que aumentamos o tamanho da amostra. Como esperado, as exceções são as combinações de β_{21} e β_{22} que correspondem à hipótese nula ($\beta_{21} = -1$ e $\beta_{22} = -1$), caso em que obtemos o tamanho do teste ou quando estamos muito próximas da hipótese nula, como $(\beta_{21} = -1, \beta_{22} = -1, 0005)$ e $(\beta_{21} = -1, \beta_{22} = -0, 9995)$.

Tabela 5.4: Poder empírico do teste de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$.

Poder	T			
Valores dos parâmetros	256	512	1024	10240
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} < -1, 2500$	1,000	1,000	1,000	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -1, 2500$	0,990	1,000	1,000	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -1, 1500$	0,989	1,000	1,000	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -1, 0500$	0,616	0,942	0,999	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -1, 0050$	0,052	0,100	0,198	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -1, 0005$	0,046	0,043	0,048	0,219
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -1, 0000$	0,050	0,050	0,050	0,050
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -0, 9995$	0,040	0,067	0,053	0,234
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -0, 9950$	0,067	0,086	0,198	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -0, 9500$	0,612	0,917	1,000	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -0, 8500$	0,992	1,000	1,000	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} = -0, 7500$	0,999	1,000	1,000	1,000
$\beta_{21} = -1, \quad \beta_{22} > -0, 7500$	1,000	1,000	1,000	1,000

A seguir, avaliamos a distribuição dos estimadores dos parâmetros do modelo de cointegração variando com tempo, definido em 4.3. Consideramos simulações de séries bivariadas ($n = 2$), com uma tendência comum ($r = 1$) e com $T = 1024$ observações. O modelo cointegrado (normalizado) na forma de correção de erros pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \Gamma \Delta X + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

com

$$\Delta Y_t = \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_t = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{2t} \end{bmatrix}, Y_{t-1} = \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix} \text{ e } u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Desconsiderando o termo $\Gamma \Delta X$ (sem defasagem), o modelo cointegrado definido em 5.1 pode ser simulado de acordo com a expressão 5.3, tomando $u_{1t} \sim i.i.d. N(0,1)$ e $u_{2t} \sim i.i.d. N(0,1)$:

$$\begin{cases} Y_{1t} = -\beta_{2t} Y_{2,t-1} + u_{1t} \\ Y_{2t} = Y_{2,t-1} + u_{2t} \end{cases}. \quad (5.3)$$

Consideramos cinco exemplos simulados sem defasagem e um com defasagem. Supomos que β_t está normalizado conforme a Equação 4.54 para garantir a identificabilidade dos estimadores. Em cada exemplo, apresentamos as séries cointegradas simuladas, a componente $\hat{\beta}_{2t}$ do vetor de cointegração normalizado estimado $\hat{\beta}_t^* = [1, \hat{\beta}_{2t}^*]'$, para $t = 1, \dots, T$, além dos resíduos de cointegração estimados $\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$. Também são apresentadas estimativas, médias, desvios padrão e histogramas das estimativas obtidas via simulações bootstrap. Em cada exemplo, apresentamos os resultados para a hipótese nula (cointegração constante) e para a hipótese alternativa (cointegração variando com o tempo).

5.2 Exemplos sem defasagem

5.2.1 Primeiro exemplo: Inversão de sinal ao longo do tempo com Haar

Desejamos testar a capacidade do modelo em estimar o vetor de cointegração normalizado β_t^* , que assume dois regimes ao longo do tempo para $T = 1024$. Para isso, consideramos o vetor de cointegração teórico:

$$\beta_t^* = \begin{bmatrix} \beta_{1t}^* \\ \beta_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}', \text{ se } 1 \leq t \leq T/2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}', \text{ se } T/2 + 1 \leq t \leq T \end{cases}. \quad (5.4)$$

Utilizando a expressão 4.1 e $J = 0$, podemos escrever o vetor β_t^* por meio da seguinte expressão:

$$\beta_t^* = \phi(t)\mathbf{c}^* + \psi_{0,0}(t)\mathbf{d}_{0,0}^*. \quad (5.5)$$

Pela Equação 4.2 temos que $\mathbf{c}^* = [c_{0,0}^{*(1,1)} \ c_{0,0}^{*(2,1)}]'$ e $\mathbf{d}_{0,0}^* = [d_{0,0}^{*(1,1)} \ d_{0,0}^{*(2,1)}]'$ são matrizes ($n = 2 \times r = 1$), cujos elementos são estimados por $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ (Equação 4.63). Além disso, $\phi(t)$ e $\psi_{0,0}(t)$ são funções da base de ondaletas *Haar*.

Apresentamos na Figura 5.1 (a) os gráficos das séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} . Para estas séries, apresentamos em 5.1 (b) o segundo componente dos vetores de cointegração teórico (β_{2t}^*) e estimado ($\hat{\beta}_{2t}^*$). Pela figura, é possível notar que $\hat{\beta}_{2t}^*$ está muito próximo de β_{2t}^* , sendo que ambos estão dentro das bandas de confiança de 95%. Além disso, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo, juntamente com os valores teóricos em parênteses:

$$\hat{\beta}_t^* = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1,0002 & \dots & -1,0002 & 1,0024 & \dots & 1,0024 \\ (-1,0000) & & (-1,0000) & (1,0000) & & (1,0000) \end{bmatrix}, \hat{\alpha}^* = \begin{bmatrix} -0,9963 \\ (-1,0000) \\ -0,0353 \\ (0,0000) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{c}}^* = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,0009 \\ (0,0000) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{d}}^* = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ -0,9985 \\ (-1,0000) \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\Sigma}_u^* = \begin{bmatrix} 0,9964 & -0,0313 \\ (1,0000) & (0,0000) \\ -0,0313 & 0,9930 \\ (0,0000) & (1,0000) \end{bmatrix}.$$

Apresentamos na Figura 5.1 (c) os resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$). Verificamos que $\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$ correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste *DFA - Dickey-Fuller Aumentado*).

Figura 5.1: Primeiro exemplo: **(a)** Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, **(b)** Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e **(c)** Resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$).

Apresentamos na Figura 5.2 os resíduos $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ do modelo. Ao aplicarmos o teste de *Shapiro-Wilk* individualmente a $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$, verificamos que eles parecem ter uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,7846 e 0,5273 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.2. Além disso, os resíduos parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas apresentados na mesma figura.

Figura 5.2: Primeiro exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.5, existem evidências que nos levam a rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo.

Tabela 5.5: Ex.01: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)}(H_0)$	1283,96	[0,0493 ; 6,9310]	1,9692	2,0206	0,0000

A Tabela 5.6 apresenta as estimativas dos parâmetros, bem como medidas bootstrap de interesse. Podemos notar que as estimativas e as médias bootstrap estão próximas dos valores teóricos dos parâmetros.

Tabela 5.6: Ex.01: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_A (inversão de sinal).

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)}(H_A)$	-	1283,96	[1059,66 ; 2181,40]	1347,32	291,32
α_{11}^*	-1,000	-0,9963	[-1,0413 ; -0,9669]	-1,0006	0,0195
α_{21}^*	0,0000	-0,0353	[-0,0397 ; 0,0371]	-0,0006	0,0200
σ_{11}^*	1,0000	0,9964	[0,9046 ; 1,0755]	0,9920	0,0434
$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*$	0,0000	-0,0313	[-0,0612 ; 0,0559]	-0,0004	0,0301
σ_{22}^*	1,0000	0,9930	[0,9103 ; 1,0703]	0,9912	0,0412
$\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0009	[-0,0059 ; 0,0072]	0,0008	0,0032
$\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$	-1,0000	-0,9985	[-1,0047 ; -0,9918]	-0,9985	0,0034

Apresentamos nas Figuras 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap. Apesar de estarem dentro dos intervalos de confiança bootstrap, percebemos um pequeno desvio entre as estimativas e médias bootstrap para o parâmetro $\hat{\alpha}_{21}^*$.

Figura 5.3: Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (inversão de sinal ao longo do tempo) (b).

Figura 5.4: Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (inversão de sinal ao longo do tempo) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \ \hat{\alpha}_{21}^*]'$.

Figura 5.5: Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (inversão de sinal ao longo do tempo) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$.

Figura 5.6: Primeiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (inversão de sinal ao longo do tempo) para as componentes $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$ (a) e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ (b) de $\hat{W}_J^* = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$.

Por meio da Tabela 5.7, desejamos avaliar a convergência numérica dos estimadores normalizados α^* , β_t^* , Σ_u^* e $\hat{W}_J^*$ do modelo. Os resultados foram obtidos por meio de $N = 1000$ processos cointegrados simulados, considerando séries com tamanhos $T = 256, 512, 1024$ e 10240 . Para T , calculamos os quantis, as médias e desvios padrão das estimativas dos parâmetros. Nas simulações, consideramos os parâmetros normalizados:

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* \\ \alpha_{21}^* \end{bmatrix}, \beta_t^* = \begin{cases} [1 \ \hat{\beta}_{21}^*]' & \text{se } 1 \leq t \leq T/2 \\ [1 \ \hat{\beta}_{22}^*]' & \text{se } T/2 + 1 \leq t \leq T \end{cases}, \Sigma_u^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & \hat{\sigma}_{12}^* \\ \cdot & \hat{\sigma}_{22}^* \end{bmatrix} \text{ e } \hat{W}_J^* = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} \\ c_{0,0}^{*(2,1)} \\ d_{0,0}^{*(1,1)} \\ d_{0,0}^{*(2,1)} \end{bmatrix}'.$$

Tabela 5.7: Ex.01: Estatísticas das estimativas dos parâmetros normalizados, obtidas por meio de 1000 processos cointegrados bivariados simulados (inversão de sinal ao longo do tempo).

Série	Parâmetro	V.T.P.	Quantis					Estatísticas	
			0%	25%	50%	75%	100%	Média	D.P.
T = 256	β_{21}^*	-1	-1,0764	-1,0099	-1,0002	-0,9915	-0,8864	-1,0007	0,0185
	β_{22}^*	1	0,8974	0,9936	0,9999	1,0051	1,0978	0,9993	0,0136
	α_1^*	-1	-1,1206	-1,0253	-1,0022	-0,9779	-0,8745	-1,0023	0,0354
	α_2^*	0	-0,1513	-0,0239	0,0004	0,0211	0,1267	-0,0004	0,0366
	σ_{11}^*	1	0,6972	0,9304	0,9857	1,0461	1,2701	0,9856	0,0861
	σ_{12}^*	0	-0,2110	-0,0404	-0,0009	0,0413	0,2279	0,0004	0,0612
	σ_{22}^*	1	0,6892	0,9270	0,9797	1,0367	1,2804	0,9835	0,0866
	$c_{0,0}^{*(2,1)}$	0	-0,0569	-0,0065	-0,0003	0,0048	0,0691	-0,0007	0,0115
	$d_{0,0}^{*(2,1)}$	-1	-1,0507	-1,0058	-1,0001	-0,9940	-0,9350	-1,0000	0,0115
T = 512	β_{21}^*	-1	-1,0482	-1,0047	-1,0000	-0,9954	-0,9630	-1,0004	0,0096
	β_{22}^*	1	0,9602	0,9971	1,0000	1,0031	1,0448	1,0000	0,0071
	α_1^*	-1	-1,0949	-1,0165	-1,0009	-0,9866	-0,9059	-1,0014	0,0241
	α_2^*	0	-0,1091	-0,0166	-0,0001	0,0162	0,0924	0,0000	0,0258
	σ_{11}^*	1	0,8037	0,9485	0,9897	1,0338	1,2008	0,9918	0,0642
	σ_{12}^*	0	-0,1306	-0,0309	-0,0002	0,0273	0,1462	-0,0008	0,0444
	σ_{22}^*	1	0,8188	0,9540	0,9939	1,0329	1,2109	0,9942	0,0600
	$c_{0,0}^{*(2,1)}$	0	-0,0293	-0,0029	0,0000	0,0029	0,0257	-0,0002	0,0059
	$d_{0,0}^{*(2,1)}$	-1	-1,0378	-1,0031	-1,0000	-0,9972	-0,9792	-1,0002	0,0060
T = 1024	β_{21}^*	-1	-1,0305	-1,0022	-0,9999	-0,9977	-0,9814	-1,0001	0,0047
	β_{22}^*	1	0,9779	0,9984	0,9999	1,0013	1,0229	0,9999	0,0034
	α_1^*	-1	-1,0550	-1,0113	-1,0007	-0,9891	-0,9296	-1,0004	0,0174
	α_2^*	0	-0,0687	-0,0112	0,0001	0,0117	0,0843	0,0000	0,0182
	σ_{11}^*	1	0,8494	0,9648	0,9941	1,0233	1,1402	0,9945	0,0441
	σ_{12}^*	0	-0,0969	-0,0203	-0,0010	0,0214	0,0956	-0,0001	0,0306
	σ_{22}^*	1	0,8536	0,9607	0,9922	1,0207	1,1260	0,9915	0,0439
	$c_{0,0}^{*(2,1)}$	0	-0,0185	-0,0015	-0,0001	0,0014	0,0113	-0,0001	0,0029
	$d_{0,0}^{*(2,1)}$	-1	-1,0214	-1,0014	-1,0000	-0,9986	-0,9874	-1,0000	0,0029
T = 10240	β_{21}^*	-1	-1,0016	-1,0002	-1,0000	-0,9998	-0,9981	-1,0000	0,0004
	β_{22}^*	1	0,9977	0,9999	1,0000	1,0001	1,0012	1,0000	0,0003
	α_1^*	-1	-1,0197	-1,0033	-0,9999	-0,9966	-0,9815	-0,9999	0,0054
	α_2^*	0	-0,0173	-0,0035	0,0000	0,0036	0,0163	0,0001	0,0056
	σ_{11}^*	1	0,9592	0,9898	0,9997	1,0094	1,0418	0,9998	0,0142
	σ_{12}^*	0	-0,0312	-0,0068	-0,0005	0,0067	0,0323	-0,0002	0,0098
	σ_{22}^*	1	0,9483	0,9897	0,9997	1,0097	1,0468	0,9996	0,0140
	$c_{0,0}^{*(2,1)}$	0	-0,0013	-0,0001	0,0000	0,0002	0,0010	0,0000	0,0003
	$d_{0,0}^{*(2,1)}$	-1	-1,0010	-1,0001	-1,0000	-0,9999	-0,9988	-1,0000	0,0003

V.T.P = Valor Teórico do Parâmetro e D.P. = Desvio Padrão.

Como os parâmetros do modelo estão normalizados, conforme apresentado na Equação 4.58, temos que $c_{0,0}^{*(1,1)} = 1$ e $d_{0,0}^{*(1,1)} = 0$, independente do tamanho T das séries considerado nas simulações. Por esta razão, apresentamos na tabela 5.7 apenas os termos $c_{0,0}^{*(2,1)}$ e $d_{0,0}^{*(2,1)}$ de $\hat{\mathbf{W}}_J^*$.

Pela tabela 5.7, podemos notar que à medida que aumentamos o tamanho das séries, os valores médios e medianos dos parâmetros convergem para os valores teóricos. Além disso, observamos que o desvio padrão diminui para todas as estimativas dos parâmetros à medida que aumentamos o tamanho das séries cointegradas simuladas.

5.2.2 Segundo exemplo: Vetor de cointegração constante com Haar

Neste exemplo, o nosso objetivo é verificar se é possível estimar os parâmetros do modelo, sem que hajam alterações em β_t^* ao longo do tempo, com $T = 1024$. Desejamos avaliar também a distribuição da estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 . Consideramos o vetor de cointegração teórico:

$$\beta_t^* = \beta^* = \begin{bmatrix} \beta_{1t}^* \\ \beta_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ para } 1 \leq t \leq T. \quad (5.6)$$

Utilizando a expressão 4.1 e $J = 0$, podemos escrever o vetor β_t^* por meio da seguinte expressão:

$$\beta_t^* = \phi(t)\mathbf{c}^* + \psi_{0,0}(t)\mathbf{d}_{0,0}^*. \quad (5.7)$$

Por 4.2 temos que $\mathbf{c}^* = [c_{0,0}^{*(1,1)} \ c_{0,0}^{*(2,1)}]'$ e $\mathbf{d}_{0,0}^* = [d_{0,0}^{*(1,1)} \ d_{0,0}^{*(2,1)}]'$, cujos elementos são estimados por $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ de 4.63. Além disso, $\phi(t)$ e $\psi_{0,0}(t)$ são funções da base de ondaletas *Haar*.

Apresentamos na Figura 5.7 (a) os gráficos das séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} . Para estas séries, apresentamos em 5.7 (b) o segundo componente dos vetores de cointegração teórico (β_{2t}^*) e estimado ($\hat{\beta}_{2t}^*$). Pela figura, é possível notar que $\hat{\beta}_{2t}^*$ está muito próximo de β_{2t}^* , sendo que ambos estão dentro das bandas de confiança de 95%. Além disso, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo, juntamente com os valores teóricos em parênteses:

$$\hat{\beta}_t^* = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1,0003 & \dots & -1,0003 & -0,9973 & \dots & -0,9973 \\ (-1,0000) & & (-1,0000) & (-1,0000) & & (-1,0000) \end{bmatrix}, \hat{\alpha}^* = \begin{bmatrix} -1,0147 \\ (-1,0000) \\ 0,0226 \\ (0,0000) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{c}}^* = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -0,9988 \\ (-1,0000) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{d}}^* = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ -0,0014 \\ (0,0000) \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\Sigma}_u^* = \begin{bmatrix} 0,9360 & -0,0187 \\ (1,0000) & (0,0000) \\ -0,0187 & 0,9841 \\ (0,0000) & (1,0000) \end{bmatrix}.$$

Apresentamos na Figura 5.7 (c) os resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^* Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$). Verificamos que $\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$ correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste *DFA - Dickey-Fuller Aumentado*).

Figura 5.7: Segundo exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^* Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$).

Apresentamos na Figura 5.8 os resíduos $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ do modelo. Ao aplicarmos o teste de *Shapiro-Wilk* individualmente a $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$, verificamos que eles parecem ter uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,8597 e 0,5514 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.8. Além disso, os resíduos parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas apresentados na mesma figura.

Figura 5.8: Segundo exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.8, existem evidências que nos leva a não rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo.

Tabela 5.8: Ex.02: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)}(H_0)$	1,3706	[0,0363 ; 6,7297]	1,9245	1,8664	0,5100

A Tabela 5.9 apresenta as estimativas dos parâmetros, bem como medidas bootstrap de interesse. Podemos notar que as estimativas e as médias bootstrap estão próximas dos valores teóricos dos parâmetros.

Tabela 5.9: Ex.02: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
α_{11}^*	-1,000	-1,0147	[-1,0458 ; -0,9579]	-1,0012	0,0220
α_{21}^*	0,0000	0,0226	[-0,0395 ; 0,0394]	0,0020	0,0218
σ_{11}^*	1,0000	0,9361	[0,8581 ; 1,0086]	0,9345	0,0400
$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*$	0,0000	-0,0187	[-0,0615 ; 0,0577]	-0,0025	0,0300
σ_{22}^*	1,0000	0,9841	[0,9004 ; 1,0584]	0,9790	0,0409
$\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$	-1,0000	-0,9988	[-1,0072 ; -0,9939]	-0,9992	0,0029
$\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$	0,0000	-0,0015	[-0,0072 ; 0,0055]	-0,0012	0,0033

Apresentamos nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap.

Figura 5.9: Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Figura 5.10: Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_0 (vetor de cointegração constante) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \ \hat{\alpha}_{21}^*]'$.

Figura 5.11: Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_0 (vetor de cointegração constante) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}$.

Figura 5.12: Segundo exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_0 (vetor de cointegração constante) para as componentes $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$ (a) e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ (b) de $\hat{W}_J = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$.

Precisamos considerar a situação mais geral, em que temos um vetor (ou matriz) de cointegração para cada instante de tempo t . Para este caso, precisamos de outras ordens para o modelo VEC com cointegração variando com o tempo, além da ordem $J = 0$ apresentada nos exemplos anteriores. Desta forma, apresentamos a seguir alguns modelos cointegrados simulados onde necessitamos de ordens mais altas para o parâmetro J . Com isso, exploramos a versatilidade do modelo, permitindo estimar outras estruturas para o vetor de cointegração variando com o tempo.

5.2.3 Terceiro exemplo: Três escalas ao longo do tempo com Haar

Neste exemplo, permitimos ao vetor de cointegração β_t^* assumir três regimes ao longo do tempo, com $T = 1024$. Consideramos o vetor de cointegração teórico:

$$\beta_t = \begin{bmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{bmatrix} = \begin{cases} [1 & -1]' , & \text{se } 1 \leq t \leq T/4 \\ [1 & -2]' , & \text{se } T/4 + 1 \leq t \leq T/2 \\ [1 & -4]' , & \text{se } T/2 + 1 \leq t \leq T \end{cases} . \quad (5.8)$$

Utilizando a expressão 4.1 e $J = 1$, podemos escrever o vetor β_t^* por meio da seguinte expressão:

$$\beta_t^* = \phi(t)\mathbf{c}^* + \psi_{0,0}(t)\mathbf{d}_{0,0}^* + \psi_{1,0}(t)\mathbf{d}_{1,0}^* + \psi_{1,1}(t)\mathbf{d}_{1,1}^*. \quad (5.9)$$

Por 4.2 temos que $\mathbf{c}^* = [c_{0,0}^{*(1,1)} \ c_{0,0}^{*(2,1)}]'$, $\mathbf{d}_{0,0}^* = [d_{0,0}^{*(1,1)} \ d_{0,0}^{*(2,1)}]'$, $\mathbf{d}_{1,0}^* = [d_{1,0}^{*(1,1)} \ d_{1,0}^{*(2,1)}]'$ e $\mathbf{d}_{1,1}^* = [d_{1,1}^{*(1,1)} \ d_{1,1}^{*(2,1)}]'$, cujos elementos são estimados por $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ de 4.67. Além disso, $\phi(t)$ e $\psi_{0,0}(t)$ são funções da base de ondaletas *Haar*.

Apresentamos na Figura 5.13 (a) os gráficos das séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} . Para estas séries, apresentamos o segundo componente dos vetores de cointegração teórico (β_{2t}^*) e estimado ($\hat{\beta}_{2t}^*$): com $J = 0$ em 5.13 (b) e com $J = 1$ em 5.13 (d). Para $J = 1$, obtivemos uma melhor estimativa, onde é possível notar que $\hat{\beta}_{2t}^*$ está próximo de β_{2t}^* , com ambos dentro das bandas de confiança de 95%. Além disso, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo, juntamente com os valores teóricos em parênteses, para $J = 1$:

$$\hat{\beta}_t^* = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -0,9918 & \dots & -0,9918 & -2,0051 & \dots & -2,0051 & -4,0016 & \dots & -4,0016 \\ (-1,0000) & & (-1,0000) & (-2,0000) & & (-2,0000) & (-4,0000) & & (-4,0000) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\alpha}^* = \begin{bmatrix} -0,9908 \\ (-1,0000) \\ 0,0057 \\ (0,0000) \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\Sigma}_u^* = \begin{bmatrix} 0,9276 & -0,0177 \\ (1,0000) & (0,0000) \\ -0,0177 & 0,9774 \\ (0,0000) & (1,0000) \end{bmatrix}$$

Apresentamos na Figura 5.13 (c) os resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^* Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$). Verificamos que $\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$ correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste *DFA - Dickey-Fuller Aumentado*). No entanto, verificamos que apesar de o teste apontar para a estacionariedade da série $\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$, com três regimes para o vetor de cointegração β_t , é possível notar que existem variâncias diferentes para cada regime, conforme pode ser observado em 5.13 (c).

Figura 5.13: Terceiro exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^*]'$, para $J = 0$, (c) resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^* Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^* Y_{t-1}$) para $J = 1$ e (d) componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^*]'$, para $J = 1$.

Apresentamos na Figura 5.14 os resíduos $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ do modelo. Ao aplicarmos o teste de *Shapiro-Wilk* individualmente a $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$, verificamos que eles parecem ter uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,8669 e 0,5392 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.14. Além disso, os resíduos parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas apresenta-

dos na mesma figura.

Figura 5.14: Terceiro exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.10, existem evidências que nos levam a rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo.

Tabela 5.10: Ex.03: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)}(H_0)$	2379,43	[1,2061 ; 15,4062]	5,9302	3,6098	0,0000

A Tabela 5.11 apresenta as estimativas dos parâmetros, bem como medidas bootstrap de interesse. Podemos notar que as estimativas e as médias bootstrap estão próximas dos valores teóricos dos parâmetros.

Apresentamos nas Figuras 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap.

Tabela 5.11: Ex.03: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (três escalas ao longo do tempo).

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)} (HA)$	-	2379,43	[2272,01 ; 3235,92]	2627,27	237,89
α_{11}^*	-1,000	-0,9908	[-1,0183 ; -0,9822]	-0,9999	0,0095
α_{21}^*	0,0000	0,0057	[-0,0171 ; 0,0189]	0,0010	0,0093
σ_{11}^*	1,0000	0,9276	[0,7616 ; 1,0799]	0,9275	0,0800
$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*$	0,0000	-0,0177	[-0,0582 ; 0,0501]	-0,0008	0,0289
σ_{22}^*	1,0000	0,9774	[0,8139 ; 1,1885]	0,9795	0,0891
$\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$	-2,7500	-2,7486	[-2,7549 ; -2,7410]	-2,7484	0,0034
$\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$	1,2500	1,2501	[1,2430 ; 1,2576]	1,2503	0,0033
$\hat{d}_{1,0}^{*(2,1)}$	0,3535	0,3582	[0,3489 ; 0,3658]	0,3581	0,0043
$\hat{d}_{1,1}^{*(2,1)}$	0,0000	-0,0021	[-0,0084 ; 0,0044]	-0,0020	0,0029

Figura 5.15: Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob HA (três escalas ao longo do tempo) (b).

Figura 5.16: Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (três escalas ao longo do tempo) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$.

Figura 5.17: Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (três escalas ao longo do tempo) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$.

Figura 5.18: Terceiro exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (três escalas ao longo do tempo) para as componentes $\hat{c}_{0,0}^{*(2,1)}$ (a) e $\hat{d}_{0,0}^{*(2,1)}$ (b) de $\hat{W}_J = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} & d_{1,0}^{*(1,1)} & d_{1,0}^{*(2,1)} & d_{1,1}^{*(1,1)} & d_{1,1}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$.

Figura 5.18: Terceiro exemplo (continuação): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (três escalas ao longo do tempo) para as componentes $\hat{d}_{1,0}^{*(2,1)}$ (c) e $\hat{d}_{1,1}^{*(2,1)}$ (d) de $\hat{\mathbf{W}}_J = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{*(1,1)} & c_{0,0}^{*(2,1)} & d_{0,0}^{*(1,1)} & d_{0,0}^{*(2,1)} & d_{1,0}^{*(1,1)} & d_{1,0}^{*(2,1)} & d_{1,1}^{*(1,1)} & d_{1,1}^{*(2,1)} \end{bmatrix}$.

5.2.4 Quarto exemplo: Decrescimento linear com Daubechies D2

Nesta simulação, consideramos a componente teórica β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ decrescendo um decrescimento linear ao longo do tempo, com $t = 1, \dots, T$ e $T = 1024$. Para isso, consideramos o vetor de cointegração teórico:

$$\beta_t^* = \begin{bmatrix} \beta_{1t}^* \\ \beta_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -\frac{t}{T} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

Utilizando a expressão 4.1 e $J = 5$, podemos escrever o vetor β_t^* por meio da seguinte expressão:

$$\beta_t^* = \phi(t)\mathbf{c}^* + \psi_{0,0}(t)\mathbf{d}_{0,0}^* + \psi_{1,0}(t)\mathbf{d}_{1,0}^* + \psi_{1,1}(t)\mathbf{d}_{1,1}^* + \dots + \psi_{5,31}(t)\mathbf{d}_{5,31}^*. \quad (5.11)$$

Por 4.2 temos que $\mathbf{c}^* = [c_{0,0}^{*(1,1)} \ c_{0,0}^{*(2,1)}]'$ e $\mathbf{d}_{J,2^J-1}^* = [\hat{d}_{J,2^J-1}^{*(1,1)} \ \hat{d}_{J,2^J-1}^{*(2,1)}]'$, cujos elementos são estimados por $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ de 4.68. Além disso, $\phi(t)$ e $\psi_{0,0}(t)$ são funções da base de ondaletas Daubechies D2.

Apresentamos na Figura 5.19 (a) os gráficos das séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} . Para estas séries, apresentamos em 5.19 (b) o segundo componente dos vetores de cointegração teórico (β_{2t}^*) e estimado ($\hat{\beta}_{2t}^*$). Pela figura, é possível notar que $\hat{\beta}_{2t}^*$ está próximo de β_{2t}^* , sendo que ambos estão dentro das bandas de confiança de 95%. Além disso, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo, juntamente com os valores teóricos em parênteses:

$$\hat{\alpha}^* = \begin{bmatrix} -1,0181 \\ (-1,0000) \\ -0,0008 \\ (0,0000) \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\Sigma}_u^* = \begin{bmatrix} 0,8551 & -0,0212 \\ (1,0000) & (0,0000) \\ -0,0212 & 0,8655 \\ (0,0000) & (1,0000) \end{bmatrix}$$

Apresentamos na Figura 5.19 (c) os resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$). Verificamos que $\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$ correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste *DFA - Dickey-Fuller Aumentado*).

Figura 5.19: Quarto exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$).

Apresentamos na Figura 5.20 os resíduos $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ do modelo. Ao aplicarmos o teste de *Shapiro-Wilk* individualmente a $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$, verificamos que eles parecem ter uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,4456 e 0,5232 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.20. Além disso, os

resíduos parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas apresentados na mesma figura.

Figura 5.20: Quarto exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.12, existem evidências que nos levam a rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo.

Tabela 5.12: Ex.04: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)}(H_0)$	855,37	[91,7051; 161,6428]	123,7970	17,3768	0,0000

Apresentamos nas Figuras 5.21, 5.22 e 5.23 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap. Apesar de estarem dentro dos intervalos de confiança bootstrap, percebemos um pequeno desvio entre a estimativa e a média bootstrap para o parâmetro $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_A .

Figura 5.21: Quarto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (decréscimo linear) (b).

Figura 5.22: Quarto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (decréscimo linear) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$.

Figura 5.23: Quarto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (decréscimo linear) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$.

Apresentamos na Tabela 5.13 estimativas dos parâmetros considerados no modelo, bem como medidas bootstrap de interesse. A Tabela B.1 da Seção B.2 anexa apresenta os demais parâmetros estimados. Podemos notar que a maioria das estimativas e as médias bootstrap estão próximas dos valores teóricos dos parâmetros, que por sua vez estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap. As exceções são os parâmetros σ_{11}^* , $d_{31}^{*(2,2)}$ e $d_{32}^{*(2,1)}$.

Tabela 5.13: Ex.04: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decréscimo linear)

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)} \text{ (HA)}$	-	855,37	[779,53 ; 1085,17]	946,80	75,45
α_{11}^*	-1,0000	-1,0181	[-1,0949 ; -0,9634]	-1,0349	0,0592
α_{21}^*	0,0000	-0,0008	[-0,0539 ; 0,0572]	0,0031	0,0285
σ_{11}^*	1,0000	0,8551	[0,6709 ; 0,9571]	0,8197	0,0750
$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*$	0,0000	-0,0212	[-0,0599 ; 0,0502]	-0,0017	0,0275

(Continua na página seguinte)

Tabela 5.13 – Continuação da página anterior

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
σ_{22}^*	1,0000	0,8655	[0,7100 ; 1,0386]	0,8639	0,0802
$c_{00}^{*(1,1)}$	1,0000	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	0,0000
$c_{00}^{*(2,1)}$	-0,5005	-0,4954	[-0,5144 ; -0,4788]	-0,4950	0,0090
$d_{00}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{00}^{*(2,1)}$	0,1678	0,1717	[0,1542 ; 0,1891]	0,1713	0,0081
$d_{10}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{10}^{*(2,1)}$	0,1618	0,1701	[0,1529 ; 0,1897]	0,1700	0,0095
$d_{11}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{11}^{*(2,1)}$	-0,0419	-0,0397	[-0,0559 ; -0,0223]	-0,0398	0,0076
$d_{20}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{20}^{*(2,1)}$	0,1156	0,1197	[0,1009 ; 0,1418]	0,1200	0,0141
$d_{21}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{21}^{*(2,1)}$	-0,0002	0,0138	[-0,0057 ; 0,0317]	0,0136	0,0085
$d_{22}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{22}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0018	[-0,0193 ; 0,0120]	0,0010	0,0074
$d_{23}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{23}^{*(2,1)}$	-0,0282	-0,0222	[-0,0390 ; -0,0080]	-0,0223	0,0070
$d_{30}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{30}^{*(2,1)}$	0,0839	0,0797	[0,0608 ; 0,1021]	0,0804	0,0113
$d_{31}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{31}^{*(2,1)}$	-0,0004	0,0170	[0,0020 ; 0,0343]	0,0173	0,0086
$d_{32}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{32}^{*(2,1)}$	0,0000	-0,0166	[-0,0371 ; -0,0012]	-0,0174	0,0085
$d_{33}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{33}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0045	[-0,0153 ; 0,0209]	0,0039	0,0096
$d_{34}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{34}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0059	[-0,0119 ; 0,0193]	0,0056	0,0078
$d_{35}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{35}^{*(2,1)}$	0,0000	-0,0002	[-0,0130 ; 0,0153]	-0,0003	0,0056
$d_{36}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{36}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0017	[-0,0091 ; 0,0209]	0,0019	0,0063
$d_{37}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{37}^{*(2,1)}$	-0,0174	-0,0132	[-0,0306 ; -0,0006]	-0,0136	0,0071
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$d_{531}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{531}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0012	[-0,0147 ; 0,0110]	-0,0014	0,0082

5.2.5 Quinto exemplo: Transição suave entre duas escalas considerando limiarização e ondaleta Haar

Consideramos novamente dois regimes ao longo do tempo para a componente β_{2t} de $\beta_t = [\beta_{1t} \ \beta_{2t}]'$, com $t = 1, \dots, T$ e $T = 1024$. Na simulação, consideramos β_{2t} semelhante ao utilizado no Primeiro exemplo. No entanto, a transição entre os dois regimes ocorre de maneira suave. Para isso, consideramos o vetor de cointegração teórico:

$$\beta_t^* = \begin{bmatrix} \beta_{1t}^* \\ \beta_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}', & \text{se } 1 \leq t \leq T/4 \\ \begin{bmatrix} 1 & \left(-1 - \frac{4}{T}(t - 256)\right) \end{bmatrix}', & \text{se } T/4 + 1 \leq t \leq T/2 \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}', & \text{se } T/2 + 1 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Utilizando a expressão 4.1 e $J = 3$, podemos escrever o vetor β_t^* por meio da seguinte expressão:

$$\beta_t^* = \phi(t)\mathbf{c}^* + \psi_{0,0}(t)\mathbf{d}_{0,0}^* + \psi_{1,0}(t)\mathbf{d}_{1,0}^* + \psi_{1,1}(t)\mathbf{d}_{1,1}^* + \dots + \psi_{3,7}(t)\mathbf{d}_{3,7}^*. \quad (5.12)$$

Por 4.2 temos que $\mathbf{c}^* = [c_{0,0}^{*(1,1)} \ c_{0,0}^{*(2,1)}]'$ e $\mathbf{d}_{J,2^J-1}^* = [d_{J,2^J-1}^{*(1,1)} \ d_{J,2^J-1}^{*(2,1)}]'$, cujos elementos são estimados por $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ de 4.68. Além disso, $\phi(t)$ e $\psi_{0,0}(t)$ são funções da base de ondaletas Haar.

Apresentamos na Figura 5.24 (a) os gráficos das séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} . Para estas séries, apresentamos em 5.24 (b) o segundo componente dos vetores de cointegração teórico (β_{2t}^*) e estimado ($\hat{\beta}_{2t}^*$). Pela figura, é possível notar que $\hat{\beta}_{2t}^*$ está próximo de β_{2t}^* , sendo que ambos estão dentro das bandas de confiança de 95% entre $1 \leq t \leq T/4$ e $T/2 + 1 \leq t \leq T$. Percebemos que os valores estimados (e bandas de confiança) se desviam dos valores teóricos entre no intervalo $T/4 + 1 \leq t \leq T/2$. Em 5.24 (c), apresentamos os resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$). Verificamos que $\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$ correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste DFA - Dickey-Fuller Aumentado).

Figura 5.24: Quinto exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) componente teórico β_{2t} de $\beta_t = [\beta_{1t} \ \beta_{2t}]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}$ de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \ \hat{\beta}_{2t}]'$.

Figura 5.24: Quinto exemplo (continuação): (c) Resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t' Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t' Y_{t-1}$).

Apresentamos na Figura 5.25 os resíduos $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ do modelo. O teste de *Shapiro-Wilk* indica que $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ parecem ter (individualmente) uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,6607 e 0,5273 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.25. Além disso, os resíduos parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas apresentados na mesma figura.

Figura 5.25: Quinto exemplo (completo): Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.14, existem evidências que nos levam a rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo.

Tabela 5.14: Ex.05: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante) para o modelo completo.

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)} (H_0)$	1287,554	[15,7393 ; 50,93115]	30,23741	8,4141	0,0000

Apresentamos na Tabela 5.15 estimativas dos parâmetros considerados no modelo, bem como medidas bootstrap de interesse. Podemos notar que a maioria das estimativas e as médias bootstrap estão próximas dos valores teóricos dos parâmetros. As excessões são os parâmetros $d_{10}^{*(1,1)}$, $d_{23}^{*(1,1)}$, $d_{32}^{*(1,1)}$ e $d_{32}^{*(2,1)}$.

Tabela 5.15: Ex.05: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_A (transição suave entre duas escalas) para o modelo completo.

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)} (H_A)$	1287,55	[1181,31 ; 1802,49]	1535,35	158,35
α_{11}	-1,9299	[-2,1387 ; -1,7515]	-1,8962	0,4968
α_{21}	0,0264	[-0,0613 ; 0,0666]	0,0042	0,0310
σ_{11}	0,9397	[0,7572 ; 1,0658]	0,9114	0,0806
$\sigma_{12} = \sigma_{21}$	-0,0191	[-0,0568 ; 0,0499]	-0,0008	0,0281
σ_{22}	0,9470	[0,7889 ; 1,1584]	0,9556	0,0870
$c_{00}^{(1,1)}$	0,5194	[0,4637 ; 0,5662]	0,4993	0,1248
$c_{00}^{(2,1)}$	-0,8327	[-0,9095 ; -0,7526]	-0,8065	0,2014
$d_{00}^{(1,1)}$	0,0134	[-0,0154 ; 0,0170]	0,0007	0,0083
$d_{00}^{(2,1)}$	0,1772	[0,1600 ; 0,2211]	0,1884	0,0483
$d_{10}^{(1,1)}$	0,0228	[-0,0186 ; 0,0193]	0,0005	0,0097
$d_{10}^{(2,1)}$	0,0668	[0,0648 ; 0,1120]	0,0862	0,0247
$d_{11}^{(1,1)}$	0,0070	[-0,0134 ; 0,0151]	0,0002	0,0075
$d_{11}^{(2,1)}$	-0,0145	[-0,0311 ; 0,0263]	-0,0010	0,0149
$d_{20}^{(1,1)}$	-0,0086	[-0,0210 ; 0,0212]	0,0004	0,0110
$d_{20}^{(2,1)}$	0,0109	[-0,0206 ; 0,0217]	0,0017	0,0112
$d_{21}^{(1,1)}$	-0,0084	[-0,0164 ; 0,0188]	0,0006	0,0090
$d_{21}^{(2,1)}$	0,0847	[0,0431 ; 0,0996]	0,0725	0,0221
$d_{22}^{(1,1)}$	0,0049	[-0,0164 ; 0,0134]	0,0002	0,0074
$d_{22}^{(2,1)}$	-0,0086	[-0,0258 ; 0,0335]	0,0007	0,0148
$d_{23}^{(1,1)}$	0,0014	[-0,0126 ; 0,0130]	-0,0001	0,0069
$d_{23}^{(2,1)}$	-0,0020	[-0,0261 ; 0,0280]	0,0011	0,0139
$d_{30}^{(1,1)}$	0,0044	[-0,0255 ; 0,0212]	0,0004	0,0116

(Continua na página seguinte)

Tabela 5.15 – Continuação da página anterior

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$d_{30}^{(2,1)}$	-0,0018	[-0,0206 ; 0,0279]	0,0019	0,0118
$d_{31}^{(1,1)}$	-0,0140	[-0,0242 ; 0,0220]	-0,0004	0,0114
$d_{31}^{(2,1)}$	0,0172	[-0,0191 ; 0,0275]	0,0031	0,0117
$d_{32}^{(1,1)}$	-0,0237	[-0,0193 ; 0,0236]	0,0005	0,0104
$d_{32}^{(2,1)}$	0,0414	[-0,0163 ; 0,0378]	0,0128	0,0129
$d_{33}^{(1,1)}$	0,0002	[-0,0171 ; 0,0151]	-0,0003	0,0079
$d_{33}^{(2,1)}$	0,0247	[-0,0098 ; 0,0557]	0,0248	0,0154
$d_{34}^{(1,1)}$	-0,0013	[-0,0147 ; 0,0142]	0,0002	0,0075
$d_{34}^{(2,1)}$	0,0019	[-0,0312 ; 0,0267]	-0,0013	0,0147
$d_{35}^{(1,1)}$	-0,0047	[-0,0134 ; 0,0148]	0,0001	0,0074
$d_{35}^{(2,1)}$	0,0099	[-0,0314 ; 0,0271]	0,0003	0,0149
$d_{36}^{(1,1)}$	0,0119	[-0,0153 ; 0,0136]	0,0000	0,0072
$d_{36}^{(2,1)}$	-0,0228	[-0,0277 ; 0,0303]	0,0009	0,0143
$d_{37}^{(1,1)}$	-0,0033	[-0,0140 ; 0,0154]	0,0003	0,0075
$d_{37}^{(2,1)}$	0,0070	[-0,0313 ; 0,0274]	-0,0003	0,0149

Apresentamos nas Figuras 5.26, 5.27 e 5.28 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap. Apesar de estarem dentro dos intervalos de confiança bootstrap, percebemos um pequeno desvio entre as estimativas e médias bootstrap para o parâmetro $RV_{CVT}^{(J)}$ sob HA.

Figura 5.26: Quinto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H0 (transição suave entre duas escalas) (a) e sob HA (transição suave entre dois regimes) (b).

Figura 5.27: Quinto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (transição suave entre duas escalas) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}$ (b) de $\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_{11} \ \hat{\alpha}_{21}]'$.

Figura 5.28: Quinto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (transição suave entre duas escalas) para a componente $\hat{\sigma}_{11}$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}$ e $\hat{\sigma}_{21}$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}$ (c) de $\hat{\Sigma}$.

Vamos considerar a seguir ajustes do modelo para as séries simuladas utilizando as técnicas de limiarização apresentadas na Seção 3.4. A Figura 5.29 apresenta a medida $\theta_{j,k}$ da Equação 3.18, para cada D_{jk} . Valores abaixo do limiar (dado pela Equação 3.22) devem ser considerados como candidatos a serem excluídos do modelo. Estamos interessados na característica de que um sinal pode ser suavizado ao ser descrito por um número relativamente pequeno de coeficientes de ondaletas (Morettin, 2014).

Figura 5.29: Threshold para o modelo completo, considerando $J = 3$.

Com base na Figura 5.29, foram considerados modelos em que excluímos, de maneira sequencial, coeficientes de ondaletas do modelo. Para cada modelo considerado, verificamos também o valor atingido para o máximo da log-verossimilhança $\max \mathcal{L}(\theta_J)$, definido em 4.32. Estes resultados são descritos na Tabela 5.16. Priorizamos modelos em que ao excluir $\mathbf{d}_{ij}$'s, não haja grandes variações em $\max \mathcal{L}(\theta_J)$. Pela tabela, notamos que o Modelo 03 é parcimonioso no sentido de permitir a exclusão dos parâmetros sugeridos na Figura 5.29 e não alterar de maneira substancial a $\max \mathcal{L}(\theta_J)$. Note que para os modelos 04 e 05 a variação é maior.

Tabela 5.16: Modelos candidatos: Exclusão sequencial de parâmetros matriciais $\mathbf{d}_{jk}$

Modelos	Parâmetros excluídos	$\max(\log RV_{CVT}^{(J)})$	Variação
Modelo 01	nenhum (modelo completo)	-2868,21	0,00 %
Modelo 02	$\mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{23}, \mathbf{d}_{30}, \mathbf{d}_{31}, \mathbf{d}_{34}, \mathbf{d}_{35}, \mathbf{d}_{36}, \mathbf{d}_{37}$	-2873,28	-0,18 %
Modelo 03	$\mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{22}, \mathbf{d}_{23}, \mathbf{d}_{30}, \mathbf{d}_{31}, \mathbf{d}_{34}, \mathbf{d}_{35}, \mathbf{d}_{36}, \mathbf{d}_{37}$	-2874,24	-0,21 %
Modelo 04	$\mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{21}, \mathbf{d}_{22}, \mathbf{d}_{23}, \mathbf{d}_{30}, \mathbf{d}_{31}, \mathbf{d}_{34}, \mathbf{d}_{35}, \mathbf{d}_{36}, \mathbf{d}_{37}$	-2958,37	-3,14 %
Modelo 05	$\mathbf{d}_{10}, \mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{21}, \mathbf{d}_{22}, \mathbf{d}_{23}, \mathbf{d}_{30}, \mathbf{d}_{31}, \mathbf{d}_{33}, \mathbf{d}_{34}, \mathbf{d}_{35}, \mathbf{d}_{36}, \mathbf{d}_{37}$	-3176,94	-10,76 %

Além disso, podemos notar pela Figura 5.30 que os Modelos 02 e 03 apresentam vetores de cointegração estimados semelhantes ao modelo completo. O mesmo não acontece para os modelos 04 e 05.

Figura 5.30: Componente $\hat{\beta}_{2t}$ de $\hat{\beta}_t = (\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t})$ e teórico β_{2t} para referência: Modelos 01, 02, 03, 04 e 05 considerados.

Com base na discussão subjacente, para o Modelo 03 (limiarizado), apresentamos a Figura 5.31 com β_{2t} teórico, juntamente com sua estimativa e bandas de confiança bootstrap de 95% (a). Em (b), apresentamos os resíduos de cointegração teóricos e estimados.

Figura 5.31: **(a)** Componente $\hat{\beta}_{2t}$ de $\hat{\beta}_t = (\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t})$ e teórico β_{2t} para referência ($J=3$), **(b)** Resíduos de cointegração teóricos ($\beta'_t Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}'_t Y_{t-1}$).

Verificamos que os resíduos de cointegração estimados $\hat{\beta}'_t Y_{t-1}$, apresentados na Figura 5.31 (c), correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste *DFA*).

Ao aplicarmos o teste de *Shapiro-Wilk* individualmente aos resíduos u_{1t} e u_{2t} , apresentados na Figura 5.32, verificamos que eles parecem ter uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,5317 e 0,5484 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.32. Além disso, os resíduos u_{1t} e u_{2t} parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas também apresentados em 5.32.

Figura 5.32: Quinto exemplo (limiarizado): Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.17, existem evidências que nos levam a rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo. Consequentemente, aplicar a limiarização não alterou a decisão já tomada para o modelo completo.

Tabela 5.17: Ex.05: Resultados bootstrap sob H_0 (vetor de cointegração constante) para o modelo limiarizado.

Parâmetro	Estimado	Intervalo de confiança	Média	Erro Padrão	valor- p
$RV_{CVT}^{(J)}(H_0)$	1275,49	[4,5427 ; 23,2584]	11,9564	5,0359	0,0000

A Tabela 5.18 por sua vez apresenta as estimativas dos parâmetros, bem como medidas bootstrap de interesse. Note que os parâmetros que não foram excluídos do modelo foram reestimados considerando a ausência dos demais.

Tabela 5.18: Ex.05: Estimativas e medidas bootstrap* sob H_A (transição suave entre duas escalas) para o modelo limiarizado.

Parâmetro	Estimado	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)}(H_A)$	1275,49	[1157,23 ; 1778,75]	1510,58	158,29
α_{11}	-1,9270	[-2,1430 ; -1,7782]	-1,9572	0,0929
α_{21}	0,0263	[-0,0589 ; 0,0642]	0,0038	0,0308

(Continua na página seguinte)

Tabela 5.18 – Continuação da página anterior

Parâmetro	Estimado	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
σ_{11}	0,9508	[0,7806 ; 1,1003]	0,9389	0,0821
$\sigma_{12} = \sigma_{21}$	-0,0194	[-0,0609 ; 0,0497]	-0,0007	0,0287
σ_{22}	0,9649	[0,8100 ; 1,1753]	0,9731	0,0882
$c_{00}^{(1,1)}$	0,5206	[0,4670 ; 0,5633]	0,5131	0,0234
$c_{00}^{(2,1)}$	-0,8351	[-0,9090 ; -0,7566]	-0,8293	0,0368
$d_{00}^{(1,1)}$	0,0130	[-0,0151 ; 0,0175]	0,0012	0,0085
$d_{00}^{(2,1)}$	0,1787	[0,1674 ; 0,2196]	0,1931	0,0143
$d_{10}^{(1,1)}$	0,0228	[-0,0185 ; 0,0177]	0,0000	0,0096
$d_{10}^{(2,1)}$	0,0670	[0,0661 ; 0,1114]	0,0892	0,0118
$d_{20}^{(1,1)}$	-0,0103	[-0,0218 ; 0,0202]	0,0005	0,0111
$d_{20}^{(2,1)}$	0,0113	[-0,0216 ; 0,0221]	0,0006	0,0112
$d_{21}^{(1,1)}$	-0,0084	[-0,0175 ; 0,0183]	0,0005	0,0091
$d_{21}^{(2,1)}$	0,0848	[0,0469 ; 0,1010]	0,0748	0,0132
$d_{32}^{(1,1)}$	-0,0237	[-0,0198 ; 0,0231]	0,0005	0,0102
$d_{32}^{(2,1)}$	0,0414	[-0,0158 ; 0,0379]	0,0132	0,0124
$d_{33}^{(1,1)}$	0,0002	[-0,0164 ; 0,0146]	-0,0003	0,0079
$d_{33}^{(2,1)}$	0,0247	[-0,0007 ; 0,0546]	0,0255	0,0142

Apresentamos nas Figuras 5.33, 5.34 e 5.35 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Mais uma vez, podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%.

Figura 5.33: Quinto exemplo (limiarizado): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (transição suave entre dois regimes) (b).

Figura 5.34: Quinto exemplo (limiarizado): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para as componentes $\hat{\alpha}_{11}$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}$ (b) de $\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_{11} \ \hat{\alpha}_{21}]'$.

Figura 5.35: Quinto exemplo (limiarizado): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (transição suave entre duas escalas) para a componente $\hat{\sigma}_{11}$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}$ e $\hat{\sigma}_{21}$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}$ (c) de $\hat{\Sigma}$.

5.3 Exemplo com defasagem

5.3.1 Sexto exemplo: Decrescimento logarítmico com Symmlet S8 (considerando defasagem do modelo)

Nesta simulação, consideramos a componente teórica β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ descrevendo um decrescimento logarítmico ao longo tempo, com $t = 1, \dots, T$ e $T = 1024$. Para isso, consideramos o vetor de cointegração teórico:

$$\beta_t^* = \begin{bmatrix} \beta_{1t}^* \\ \beta_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\ln\left(\frac{t}{16} + 32\right) \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

Utilizando a expressão 4.1 e $J = 5$, podemos escrever o vetor β_t^* por meio da seguinte expressão:

$$\beta_t^* = \phi(t)\mathbf{c}^* + \psi_{0,0}(t)\mathbf{d}_{0,0}^* + \psi_{1,0}(t)\mathbf{d}_{1,0}^* + \psi_{1,1}(t)\mathbf{d}_{1,1}^* + \dots + \psi_{5,31}(t)\mathbf{d}_{5,31}^*. \quad (5.14)$$

Por 4.2 temos que $\mathbf{c}^* = [c_{0,0}^{*(1,1)} \ c_{0,0}^{*(2,1)}]'$ e $\mathbf{d}_{J,2^J-1}^* = [\hat{d}_{J,2^J-1}^{*(1,1)} \ \hat{d}_{J,2^J-1}^{*(2,1)}]'$, cujos elementos são estimados por $\hat{\mathbf{W}}_J^*$ de 4.68. Além disso, $\phi(t)$ e $\psi_{0,0}(t)$ são funções da base de ondaletas *Symmlet S8*.

Apresentamos na Figura 5.36 (a) os gráficos das séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} . Para estas séries, apresentamos em 5.36 (b) o segundo componente dos vetores de cointegração teórico (β_{2t}^*) e estimado ($\hat{\beta}_{2t}^*$). Pela figura, é possível notar que $\hat{\beta}_{2t}^*$ está próximo de β_{2t}^* , sendo que ambos estão dentro das bandas de confiança de 95%, com desvio apenas no início de β_{2t}^* . Além disso, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo, juntamente com os valores teóricos em parênteses:

$$\hat{\alpha}^* = \begin{bmatrix} -1,0024 \\ (-1,0000) \\ 0,0003 \\ (0,0000) \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma}_u^* = \begin{bmatrix} 1,0310 & -0,0073 \\ (1,0000) & (0,0000) \\ -0,0073 & 0,9860 \\ (0,0000) & (1,0000) \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0,4971 & 0,4432 \\ (0,5000) & (0,5000) \\ 0,0052 & 0,4633 \\ (0,5000) & (0,5000) \end{bmatrix}.$$

Apresentamos na Figura 5.36 (c) os resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$). Verificamos que $\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$ correspondem a um processo estacionário (valor- $p < 0,01$ para o teste *DFA - Dickey-Fuller Aumentado*).

Figura 5.36: Sexto exemplo: (a) Séries cointegradas simuladas Y_{1t} e Y_{2t} , com $T = 1024$, (b) Componente teórico β_{2t}^* de $\beta_t^* = [\beta_{1t}^* \ \beta_{2t}^*]'$ e estimado $\hat{\beta}_{2t}^*$ de $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^*]'$ e (c) Resíduos de cointegração teóricos ($\beta_t^{*'} Y_{t-1}$) e estimados ($\hat{\beta}_t^{*'} Y_{t-1}$).

Apresentamos na Figura 5.37 os resíduos $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$ do modelo. Ao aplicarmos o teste de *Shapiro-Wilk* individualmente a $\hat{u}_{1t}$ e $\hat{u}_{2t}$, verificamos que eles parecem ter uma distribuição normal (valores- p iguais a 0,1840 e 0,5808 respectivamente). Conforme esperado, validamos a suposição de normalidade do modelo, visto que o modelo foi simulado sob esta condição. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 5.37. Além disso, os resíduos parecem ser não-correlacionados, conforme sugerem os correlogramas apresentados na mesma figura.

Figura 5.37: Quarto exemplo: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}]'$.

Por meio do valor- p bootstrap apresentado na Tabela 5.19, existem evidências que nos levam a rejeitar a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo.

Tabela 5.19: Ex.06: Estimativa e medidas bootstrap* sob H_0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)}(H_0)$	2210,08	[89,0614 ; 147,5431]	117,6828	15,6767	0,0000

Apresentamos nas Figuras 5.38, 5.39, 5.40 e 5.41 os histogramas bootstrap dos parâmetros do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap.

Figura 5.38: Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (decréscimo logarítmico) (b).

Figura 5.39: Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob H_A (decréscimo logarítmico) para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a) e $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \hat{\alpha}_{21}^*]'$.

Figura 5.40: Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (decréscimo logarítmico) para a componente $\hat{\sigma}_{11}^*$ (a), componentes $\hat{\sigma}_{12}^*$ e $\hat{\sigma}_{21}^*$ (b) e componente $\hat{\sigma}_{22}^*$ (c) de $\hat{\Sigma}^*$.

Figura 5.41: Sexto exemplo: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (decréscimo logarítmico) para as componentes $\hat{\Gamma}_{11}^{(1)*}$ (a) e $\hat{\Gamma}_{12}^{(1)*}$ (b) de $\hat{\Gamma}_1^*$.

Figura 5.41: Sexto exemplo (continuação): Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% sob HA (decréscimo logarítmico) para as componentes $\hat{\Gamma}_{21}^{*(1)}$ (c) e $\hat{\Gamma}_{22}^{*(1)}$ (d) de $\hat{\Gamma}_1^*$.

Apresentamos na Tabela 5.20 estimativas dos parâmetros considerados no modelo, bem como medidas bootstrap de interesse. A Tabela B.2 da Seção B.2 anexa apresenta os demais parâmetros estimados. Podemos notar que a maioria das estimativas e as médias bootstrap estão próximas dos valores teóricos dos parâmetros, que por sua vez estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap. As exceções são os parâmetros $\Gamma_{21}^{*(1)}$, $c_{00}^{*(1,1)}$, $d_{00}^{*(1,1)}$, $d_{10}^{*(2,1)}$, $d_{11}^{*(2,1)}$, $d_{20}^{*(2,1)}$, $d_{23}^{*(2,1)}$, $d_{30}^{*(2,1)}$, $d_{37}^{*(2,1)}$, $d_{40}^{*(2,1)}$, $d_{415}^{*(2,1)}$, $d_{50}^{*(2,1)}$ e $d_{531}^{*(2,1)}$.

Tabela 5.20: Ex.06: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decréscimo linear)

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)} (HA)$	-	2210,08	[1854,71 ; 2502,79]	2230,55	171,45
α_{11}^*	-1,0000	-1,0024	[-1,0268 ; -0,9868]	-1,0072	0,0112
α_{21}^*	0,0000	0,0003	[-0,0217 ; 0,0201]	-0,0004	0,0108
σ_{11}^*	1,0000	1,0310	[0,7856 ; 1,1136]	0,9268	0,0855
$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*$	0,0000	-0,0073	[-0,0700 ; 0,0660]	-0,0032	0,0326
σ_{22}^*	1,0000	0,9860	[0,8286 ; 1,1464]	0,9808	0,0839
$\Gamma_{11}^{*(1)}$	0,5000	0,4971	[0,4871 ; 0,5130]	0,4993	0,0067
$\Gamma_{12}^{*(1)}$	0,5000	0,0053	[0,2944 ; 0,5239]	0,4097	0,0581
$\Gamma_{21}^{*(1)}$	0,5000	0,4432	[-0,0064 ; 0,0176]	0,0057	0,0064
$\Gamma_{22}^{*(1)}$	0,5000	0,4633	[0,3570 ; 0,5584]	0,4586	0,0533
$c_{00}^{*(1,1)}$	1,0000	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	0,0000
$c_{00}^{*(2,1)}$	-4,1142	-4,1265	[-4,1381 ; -4,1181]	-4,1274	0,0048
$d_{00}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{00}^{*(2,2)}$	0,0576	0,0435	[0,0321 ; 0,0518]	0,0420	0,0047
$d_{10}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela 5.20 – Continuação da página anterior

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$d_{10}^{*(2,2)}$	-0,1505	-0,1652	[-0,1766 ; -0,1567]	-0,1663	0,0051
$d_{11}^{*(2,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{11}^{*(2,1)}$	0,1716	0,1577	[0,1478 ; 0,1651]	0,1567	0,0041
$d_{20}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{20}^{*(2,1)}$	-0,1025	-0,1214	[-0,1325 ; -0,1118]	-0,1224	0,0050
$d_{21}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{21}^{*(2,1)}$	0,0285	0,0270	[0,0161 ; 0,0375]	0,0273	0,0050
$d_{22}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{22}^{*(2,1)}$	-0,0191	-0,0227	[-0,0323 ; -0,0129]	-0,0228	0,0040
$d_{23}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{23}^{*(2,1)}$	0,0910	0,0702	[0,0596 ; 0,0805]	0,0690	0,0052
$d_{30}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{30}^{*(2,1)}$	-0,0831	-0,0952	[-0,1069 ; -0,0836]	-0,0956	0,0054
$d_{31}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{31}^{*(2,1)}$	0,0179	0,0201	[0,0075 ; 0,0288]	0,0199	0,0049
$d_{32}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{32}^{*(2,1)}$	-0,0046	-0,0001	[-0,0124 ; 0,0080]	-0,0004	0,0048
$d_{33}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{33}^{*(2,1)}$	0,0005	0,0022	[-0,0093 ; 0,0107]	0,0020	0,0045
$d_{34}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{34}^{*(2,1)}$	-0,0008	-0,0045	[-0,0133 ; 0,0046]	-0,0045	0,0039
$d_{35}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{35}^{*(2,1)}$	0,0049	0,0061	[-0,0051 ; 0,0130]	0,0057	0,0038
$d_{36}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{36}^{*(2,1)}$	-0,0093	-0,0090	[-0,0171 ; 0,0009]	-0,0089	0,0041
$d_{37}^{*(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{37}^{*(2,1)}$	0,0541	0,0241	[0,0130 ; 0,0335]	0,0221	0,0050
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$d_{531}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{531}^{(2,1)}$	-0,0025	-0,0074	[-0,0145 -0,0036]	-0,0082	0,0027

Capítulo 6

Aplicação a dados reais

Temos o interesse em investigar a hipótese da Paridade de Poder de Compra (PPC) entre diferentes países. De acordo com [Falk e Wang \(2003\)](#), esta é uma das hipóteses mais detalhadamente examinadas no contexto de finanças internacionais ou até mesmo na própria Economia. Conforme salienta [Johansen \(1995\)](#), é possível encontrar relações de cointegração ao formular hipóteses econômicas simples em termos de parâmetros.

[Falk e Wang \(2003\)](#) investigaram a validade da hipótese de PPC entre índices de preços dos Estados Unidos (tomado como país local) e outros doze países (tomados como países estrangeiros), a saber: Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Itália, Japão, Holanda, Noruega, Espanha, Suécia e Reino Unido. No trabalho, os autores fizeram a suposição de que os índices de preços seguem uma distribuição estável com variância infinita. Em suas análises, foi utilizado um conjunto de dados extraído do *International Financial Statistics - IFS* ([IMF, 2016](#)), que também pode ser acessado na página da revista em que o artigo foi publicado. Este conjunto de dados possui frequência mensal e foi amostrado de janeiro de 1973 a dezembro de 1999, resultando em 324 observações.

Uma condição necessária para que haja cointegração é que as séries componentes sejam integradas de ordem um, $I(1)$. [Falk e Wang \(2003\)](#) fizeram testes de raiz unitária de Phillips-Perron ([Phillips e Perron, 1988](#)) e concluíram que não é possível rejeitar a hipótese de raiz unitária para os índices de preços e para as taxas de câmbio destes países. Além disso, os autores rejeitaram a hipótese de raiz unitária para a primeira diferença das séries. Estes resultados foram obtidos tanto com a suposição de distribuições estáveis quanto a suposição de distribuições normais para os índices de preços e taxas de câmbio. Foram encontradas ainda evidências de cointegração usual (ou invariante com o tempo) entre Estados Unidos e os demais países, exceto para Canadá e Alemanha.

Conforme apontam [Bierens e Martins \(2010\)](#), a presença de fatores, como o custo de transação por exemplo, são razões pelas quais os modelos VEC lineares podem ser incapazes de detectar PPC de longo prazo. Segundo os autores, a presença de tais fatores leva a processos com ajuste não linear na relação de PPC.

Com base nestas idéias, [Martins \(2005\)](#) e [Bierens e Martins \(2010\)](#) consideraram a

PPC sob uma nova perspectiva. Motivados pelo trabalho de [Park e Hahn \(1999\)](#), os autores testaram a hipótese nula de cointegração usual, conforme proposto por [Engle e Granger \(1987\)](#) e [Johansen \(1995\)](#), contra a hipótese de cointegração variando com o tempo. Para isso, eles modelaram o vetor de cointegração temporalmente por meio de polinômios de Chebyshev. Em suas análises, eles utilizaram o mesmo conjunto de dados empregado em [Falk e Wang \(2003\)](#). Conforme justificam [Bierens e Martins \(2010\)](#), trabalhar com um conjunto de dados previamente utilizado em outros contextos garante a relevância empírica das observações. Os autores encontraram evidências de cointegração variando com o tempo entre Estados Unidos e os demais doze países. Os resultados encontrados refutam os achados de [Falk e Wang \(2003\)](#) para Canadá e Alemanha, que afirmam não haver relação de PPC com os Estados Unidos.

Em um trabalho recente, [Martins \(2016\)](#) apresentou um estudo via simulações de Monte Carlo e Bootstrap para o modelo de cointegração variando com o tempo apresentado em [Bierens e Martins \(2010\)](#). O autor aborda novamente o caso da PPC entre Estados Unidos e os doze países citados anteriormente. Refutando os próprios achados em [Bierens e Martins \(2010\)](#), [Martins \(2016\)](#) indica que existem evidências de que a PPC entre Estados Unidos e o Reino Unido parece ser invariante ao longo do tempo. O artigo é interessante no sentido de trazer melhores resultados para casos com pequenas amostras, que apresentam distorção quanto ao tamanho do teste no caso assintótico ([Bierens e Martins, 2010](#)).

Neste trabalho, deseja-se utilizar o mesmo conjunto de dados empregado em [Falk e Wang \(2003\)](#), [Bierens e Martins \(2010\)](#) e em [Martins \(2016\)](#) para testar a hipótese de PPC variando com o tempo. O vetor de cointegração no entanto, será modelado temporalmente por meio de ondaletas, conforme o modelo definido no Capítulo 4. O intuito foi testar a hipótese de PPC entre Estados Unidos e os demais doze países sob esta nova perspectiva de modelagem para o vetor de cointegração. Em contrapartida, foram comparados os resultados obtidos com os resultados apresentados em [Bierens e Martins \(2010\)](#) e [Martins \(2016\)](#). De acordo com estes dois trabalhos, temos o interesse em fazer oposição à versão padrão da PPC utilizada em [Falk e Wang \(2003\)](#).

Na Figura 6.1 são apresentados os índices de preços dos países citados anteriormente, juntamente com a taxa de câmbio em dólares americanos. Em todos os casos, os Estados Unidos foram considerados o país local e os demais países considerados o país estrangeiro. As séries são apresentadas em base logarítmica (natural).

Figura 6.1: Gráficos com índices de preços dos EUA (país local) e dos países estrangeiros Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Itália, Japão e Holanda, juntamente com as respectivas taxas de câmbio.

Figura 6.1: (continuação) Gráficos com índices de preços dos EUA (país local) e dos países estrangeiros Noruega, Espanha, Suécia e Reino Unido, juntamente com as respectivas taxas de câmbio.

6.1 Paridade de Poder de Compra com coeficientes variando com o tempo - caso sem intercepto

Seguindo a notação de Falk e Wang (2003), Bierens e Martins (2010) e Martins (2016), temos que

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln S_t \\ \ln P_t \\ \ln P_t^* \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde S_t representa a taxa de câmbio (expresso em moeda do país local por unidade do país estrangeiro), P_t representa o índice de preços do país local (Estados Unidos) e P_t^* representa o índice de preços do país estrangeiro (demais países considerados). Além disso, $\ln(\cdot)$ representa o logaritmo natural.

Assim como apresentado em Bierens e Martins (2010) e Martins (2016), foi testada a hipótese de cointegração variando com o tempo versus cointegração usual, entre Estados Unidos e os demais países. Para isso, conforme apresentado no Capítulo 4, foi empregado o modelo cointegrado na forma de correção de erros e vetor de cointegração variando com o tempo, decomposto temporalmente por meio de ondaletas, definido a seguir:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1t} & \beta_{2t} & \beta_{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ Y_{3,t-1} \end{bmatrix} + \mathbf{\Gamma} \Delta X + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

onde $\mathbf{\Gamma}$ e ΔX são definidos na forma matricial em 4.10 e 4.11. Note que se não forem incluídas defasagens no modelo, o termo $\mathbf{\Gamma} \Delta X$ é retirado de 6.2.

Em suas análises, Bierens e Martins (2010) e Martins (2016) consideraram apenas as defasagens $p = 1, 6, 10$ e 18 como possíveis escolhas para lidar com a autocorrelação presente nas séries de resíduos para os modelos ajustados. Martins (2016) utiliza o critério HQ (Hannan e Quinn, 1979) para escolher entre as defasagens, tendo decidido por $p = 1$.

Neste trabalho, utilizando ondaletas para a decomposição do vetor de cointegração, foi possível notar a necessidade de incluir defasagens maiores que $p = 1$ para excluir a autocorrelação presente nas séries de resíduos dos modelos ajustados. No entanto, para comparar os resultados obtidos com aqueles apresentados em Bierens e Martins (2010) e Martins (2016), foi utilizada inicialmente a defasagem $p = 1$. Ajustes com defasagens maiores serão considerados posteriormente.

A Tabela 6.1 contém as estimativas do modelo e medidas bootstrap (*) obtidas para a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ de razão de verossimilhanças, dada em 4.81, para testar a hipótese nula de cointegração constante ao longo do tempo *versus* cointegração variando com tempo. Foi considerada a família de ondaletas *Daubechies D2*, com $p = 1$ e $J = 0, 1, 2, 3$ e 4 . Cada linha da tabela foi gerada com base em $B = 399$ simulações bootstrap (método *wild*, Seção 4.6). Esta é a mesma quantidade de simulações utilizada em Martins (2016).

Tabela 6.1: Estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ e medidas bootstrap (*) para testar a PPC constante ao longo do tempo *versus* PPC variando com o tempo.

País estrangeiro	p	J	N.C.O. [†]	$RV_{CVT}^{(J)}$	I.C.*	Média*	Erro Padrão*	Valor- p^*
Bélgica	1	0	2	89,50	[0,15 ; 9,83]	3,28	2,62	0,0000
	1	1	4	142,27	[2,64 ; 20,52]	9,67	4,64	0,0000
	1	2	8	195,88	[12,15 ; 40,76]	24,40	7,31	0,0000
	1	3	16	279,29	[34,11 ; 89,33]	56,29	13,36	0,0000
	1	4	32	403,58	[92,75 ; 181,79]	134,50	23,14	0,0000
Canadá	1	0	2	72,35	[0,29 ; 10,78]	3,30	2,62	0,0000
	1	1	4	84,04	[2,50 ; 20,61]	9,97	4,52	0,0000
	1	2	8	137,80	[12,27 ; 45,53]	25,66	8,74	0,0000
	1	3	16	176,54	[36,95 ; 93,73]	60,48	14,31	0,0000
	1	4	32	284,96	[101,86 ; 192,96]	144,14	23,60	0,0000
Dinamarca	1	0	2	136,92	[0,22 ; 9,09]	3,09	2,44	0,0000
	1	1	4	171,36	[2,58 ; 22,69]	9,91	5,18	0,0000
	1	2	8	193,27	[12,59 ; 41,60]	24,47	7,36	0,0000
	1	3	16	252,79	[33,73 ; 89,22]	58,42	13,68	0,0000
	1	4	32	353,21	[96,08 ; 191,44]	139,93	22,74	0,0000
França	1	0	2	171,30	[0,23 ; 9,54]	3,24	2,65	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela 6.1 – Continuação da página anterior

País estrangeiro	p	J	N.C.O. [†]	$RV_{CVT}^{(J)}$	I.C.*	Média*	Erro Padrão*	Valor-p*
	1	1	4	201,29	[2,46 ; 18,88]	9,33	4,40	0,0000
	1	2	8	226,94	[10,97 ; 40,19]	23,87	7,68	0,0000
	1	3	16	289,59	[35,07 ; 81,89]	56,98	11,91	0,0000
	1	4	32	399,15	[101,10 ; 188,96]	140,39	21,82	0,0000
Alemanha	1	0	2	13,26	[0,24 ; 11,12]	3,41	2,85	0,0125
	1	1	4	49,54	[2,90 ; 21,72]	10,08	4,83	0,0000
	1	2	8	83,37	[12,14 ; 44,71]	25,39	8,37	0,0000
	1	3	16	133,42	[34,63 ; 90,97]	59,69	14,56	0,0000
	1	4	32	254,08	[100,23 ; 195,22]	142,05	25,26	0,0025
Itália	1	0	2	13,19	[0,20 ; 9,69]	2,98	2,40	0,0025
	1	1	4	26,61	[2,44 ; 19,72]	9,25	4,67	0,0025
	1	2	8	48,19	[11,07 ; 41,13]	23,73	7,45	0,0025
	1	3	16	74,31	[35,93 ; 91,65]	59,95	13,52	0,1328
	1	4	32	209,34	[102,31 ; 196,70]	146,36	24,19	0,0125
Japão	1	0	2	45,13	[0,18 ; 8,95]	3,08	2,38	0,0000
	1	1	4	88,77	[3,05 ; 18,66]	9,48	4,69	0,0000
	1	2	8	115,39	[11,44 ; 45,04]	24,53	8,48	0,0000
	1	3	16	156,57	[33,98 ; 85,00]	56,61	12,95	0,0000
	1	4	32	283,47	[93,93 ; 184,79]	132,88	24,39	0,0000
Holanda	1	0	2	10,81	[0,22 ; 9,83]	3,10	2,56	0,0150
	1	1	4	58,86	[3,02 ; 20,87]	9,54	4,50	0,0000
	1	2	8	87,78	[11,07 ; 40,50]	23,87	7,42	0,0000
	1	3	16	134,42	[34,68 ; 91,13]	57,84	14,08	0,0000
	1	4	32	249,86	[95,20 ; 191,40]	140,60	23,95	0,0000
Noruega	1	0	2	75,09	[0,12 ; 10,12]	3,16	2,55	0,0000
	1	1	4	81,30	[2,94 ; 22,03]	9,73	4,72	0,0000
	1	2	8	117,99	[11,12 ; 44,89]	24,39	8,39	0,0000
	1	3	16	172,37	[36,87 ; 81,53]	56,54	12,33	0,0000
	1	4	32	265,02	[93,95 ; 192,49]	139,39	23,83	0,0000
Espanha	1	0	2	2,04	[0,16 ; 10,52]	3,04	2,65	0,5439
	1	1	4	25,24	[2,97 ; 20,78]	9,51	4,51	0,0075
	1	2	8	37,08	[11,53 ; 41,12]	23,63	7,75	0,0627
	1	3	16	91,41	[34,41 ; 81,72]	55,15	12,24	0,0000
	1	4	32	190,48	[96,48 ; 189,92]	136,71	22,03	0,0175
Suécia	1	0	2	9,34	[0,29 ; 9,29]	3,13	2,39	0,0276
	1	1	4	35,68	[2,67 ; 20,97]	9,69	4,64	0,0000
	1	2	8	58,86	[10,12 ; 42,07]	23,56	8,29	0,0025
	1	3	16	122,03	[35,13 ; 80,63]	55,53	12,10	0,0000
	1	4	32	237,83	[90,74 ; 177,51]	129,54	20,77	0,0000
Reino Unido	1	0	2	8,75	[0,12 ; 8,49]	2,86	2,29	0,0175
	1	1	4	47,84	[2,32 ; 21,59]	9,26	4,66	0,0000
	1	2	8	96,01	[10,52 ; 41,42]	23,93	8,30	0,0000
	1	3	16	176,01	[33,54 ; 85,13]	57,50	12,54	0,0000
	1	4	32	287,03	[96,20 ; 187,27]	138,14	21,80	0,0000

(† Número de coeficientes de ondaletas: $N.C.O. = 2^{J+1}$.)

Com base nos resultados obtidos na Tabela 6.1 e tomando um nível de significância de 5%, é possível afirmar que existem fortes evidências em favor de cointegração variando com o tempo entre Estados Unidos e os países: Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Japão, Holanda, Noruega, Suécia e Reino Unido. Note que em todos estes casos, foram obtidos valores- p^* muito próximos de zero, para todos os valores de J considerados. Este achados estão em concordância com os obtidos em Bierens e Martins (2010) e Martins (2016), que também encontraram evidência de cointegração variando com o tempo para estes países. A única ressalva é sobre os resultados obtidos para a relação de cointegração entre Estados Unidos e Reino Unido. Conforme citado anteriormente, Martins (2016) encontrou evidências de cointegração constante entre os dois países, refutando os próprios resultados em Bierens e Martins (2010). Os resultados obtidos na Tabela 6.1 para a relação de cointegração entre Estados Unidos e Reino Unido estão em concordância com os resultados obtidos em Bierens e Martins (2010), que também encontraram evidências de cointegração variando com o tempo para os dois países.

É possível notar ainda pela Tabela 6.1, que existem evidências que nos levam a não rejeitar a hipótese nula de cointegração variando com tempo entre Estados Unidos e os países Itália e Espanha para alguns valores de J . Dependendo da aproximação proposta para β_t , parece haver uma relação de cointegração constante entre estes países. Estes achados diferem daqueles apresentados em Bierens e Martins (2010) e Martins (2016).

Uma vez que os modelos foram estimados, conforme resultados apresentados na Tabela 6.1, temos condições de construir os resíduos de cointegração estimados, dados por $\hat{e}_t = \hat{\beta}'_t Y_t$, com $\beta_t = [\hat{\beta}_{1t} \ \hat{\beta}_{2t} \ \hat{\beta}_{3t}]'$. Seguindo os critérios apresentados em Cheung e Lai (1993), Martins (2016) utiliza as seguintes regras para que haja cointegração entre Estados Unidos e os demais países: $\hat{e}_t$ deve ser estacionário, além de $\beta_{2t} < 0$ e $\beta_{3t} > 0$. Apesar de apresentar os critérios para que a cointegração seja verificada, Martins (2016) e Bierens e Martins (2010), limitam-se a comentar sobre os gráficos de β_t , que seguem as regras descritas em Cheung e Lai (1993) para a maior parte dos valores de t . No entanto, os trabalhos não fazem qualquer teste para testar a estacionariedade de $\hat{e}_t$.

Para testar a estacionariedade dos resíduos de cointegração estimados $\hat{e}_t$, deste ponto em diante chamados de RCE, são apresentados na Tabela 6.2 os valores- p dos testes *Dickey-Fuller aumentado* (ADF) (Said e Dickey, 1984) e de raiz unitária de Phillips-Perron (PP) (Phillips e Perron, 1988) para os RCE's dos modelos estimados na Tabela 6.1. Nos dois testes, a hipótese alternativa H_A é de que as séries são estacionárias. Adicionalmente, foi testada também a suposição de normalidade dos resíduos $\hat{u}_t$ dos modelos ajustados. Para isso foi empregado o teste de normalidade de *Shapiro Wilk* (Shapiro e Wilk, 1965), onde os valores- p referem-se à hipótese nula H_0 de que a série testada segue uma distribuição normal.

Tabela 6.2: Resultados dos testes de raiz unitária (H_0) e de normalidade (H_0) para os resíduos de cointegração estimados $\hat{e}_t = \hat{\beta}'_t Y_t$.

País local: Estados Unidos				Estacionariedade de RCE		Teste de Shapiro-Wilk		
País estrangeiro	p	J	N.C.O. [†]	Teste ADF	Teste PP	u_{1t}	u_{2t}	u_{3t}
Bélgica	1	0	2	0,01	0,01	0,4666	0,0005	0,0558
	1	1	4	0,01	0,01	0,4717	0,0015	0,0045
	1	2	8	0,01	0,01	0,4660	0,0043	0,0000
	1	3	16	0,01	0,01	0,4675	0,0003	0,0033
	1	4	32	0,01	0,01	0,4477	0,0007	0,0009
Canadá	1	0	2	0,13	0,44	0,7329	0,0000	0,0014
	1	1	4	0,01	0,01	0,7279	0,0000	0,0002
	1	2	8	0,01	0,01	0,7353	0,0000	0,0003
	1	3	16	0,01	0,01	0,7517	0,0000	0,0004
	1	4	32	0,01	0,01	0,8060	0,0000	0,0066
Dinamarca	1	0	2	0,01	0,01	0,1421	0,0000	0,0001
	1	1	4	0,01	0,01	0,1400	0,0000	0,0000
	1	2	8	0,01	0,01	0,1489	0,0000	0,0000
	1	3	16	0,01	0,01	0,1489	0,0000	0,0000
	1	4	32	0,01	0,01	0,1956	0,0000	0,0024
França	1	0	2	0,01	0,01	0,2481	0,0109	0,0000
	1	1	4	0,01	0,01	0,2217	0,0020	0,0000
	1	2	8	0,01	0,01	0,2333	0,0016	0,0001
	1	3	16	0,01	0,01	0,2431	0,0924	0,0000
	1	4	32	0,01	0,01	0,2662	0,0103	0,0000
Alemanha	1	0	2	0,01	0,01	0,2977	0,0000	0,0003
	1	1	4	0,01	0,01	0,3002	0,0000	0,0001
	1	2	8	0,01	0,01	0,2957	0,0000	0,0000
	1	3	16	0,01	0,01	0,2992	0,0000	0,0000
	1	4	32	0,01	0,01	0,2647	0,0000	0,0000
Itália	1	0	2	0,75	0,98	0,1702	0,0000	0,0000
	1	1	4	0,01	0,01	0,1717	0,0000	0,0000
	1	2	8	0,01	0,01	0,1626	0,0000	0,0000
	1	3	16	0,01	0,01	0,1690	0,0001	0,0002
	1	4	32	0,01	0,01	0,2107	0,0002	0,0002
Japão	1	0	2	0,01	0,01	0,0005	0,0042	0,0012
	1	1	4	0,01	0,01	0,0004	0,0039	0,0001
	1	2	8	0,01	0,01	0,0004	0,0042	0,0004
	1	3	16	0,01	0,01	0,0004	0,0026	0,0007
	1	4	32	0,01	0,01	0,0004	0,0035	0,0007
Holanda	1	0	2	0,01	0,01	0,2556	0,0002	0,0003
	1	1	4	0,36	0,12	0,2555	0,0008	0,0004
	1	2	8	0,01	0,01	0,2474	0,0004	0,0001
	1	3	16	0,01	0,01	0,2535	0,0001	0,0021
	1	4	32	0,01	0,01	0,2524	0,0002	0,0001
Noruega	1	0	2	0,01	0,01	0,7112	0,0000	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela 6.2 – Continuação da página anterior

País estrangeiro	p	J	N.C.O. [†]	Teste ADF	Teste P.P.	u_{1t}	u_{2t}	u_{3t}
	1	1	4	0,01	0,01	0,7128	0,0000	0,0000
	1	2	8	0,01	0,01	0,7154	0,0000	0,0007
	1	3	16	0,01	0,01	0,7157	0,0000	0,0011
	1	4	32	0,01	0,01	0,7029	0,0000	0,0365
Espanha	1	0	2	0,19	0,39	0,7776	0,0000	0,0001
	1	1	4	0,01	0,01	0,7711	0,0000	0,0003
	1	2	8	0,01	0,01	0,7730	0,0000	0,0001
	1	3	16	0,01	0,01	0,7713	0,0000	0,0027
	1	4	32	0,01	0,01	0,7995	0,0000	0,0014
Suécia	1	0	2	0,69	0,85	0,0000	0,0000	0,0033
	1	1	4	0,01	0,01	0,0000	0,0000	0,0008
	1	2	8	0,01	0,01	0,0000	0,0000	0,0023
	1	3	16	0,01	0,01	0,0000	0,0000	0,0020
	1	4	32	0,01	0,01	0,0000	0,0000	0,5016
Reino Unido	1	0	2	0,53	0,70	0,0065	0,0000	0,0002
	1	1	4	0,01	0,01	0,0063	0,0000	0,0002
	1	2	8	0,04	0,01	0,0065	0,0000	0,0181
	1	3	16	0,01	0,01	0,0058	0,0000	0,0031
	1	4	32	0,01	0,01	0,0069	0,0000	0,0165

([†] Número de coeficientes de ondaletas: $N.C.O. = 2^{J+1}$.)

É possível notar pela Tabela 6.2 que a escolha de parâmetros utilizados leva a resíduos de cointegração (normalizados) que aparentemente são estacionários, conforme apontam os testes ADF e PP, tomando nível de significância de 5%. A estacionariedade dos resíduos não é verificada apenas para Canadá, Itália, Espanha, Suécia e Reino Unido, quando $J = 0$. O mesmo ocorre para a Holanda quando $J = 1$. É possível notar ainda que para o Japão e Suécia, em todos os valores de J considerados, não foi possível verificar a normalidade dos resíduos. Em todos os casos onde a hipótese H_0 de normalidade no teste de Shapiro-Wilk foi rejeitada, os resíduos pareciam apresentar caudas mais pesadas que a distribuição normal.

A seguir, são apresentados os gráficos de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$, assim como em Bierens e Martins (2010). Para apresentar os resultados, cada série foi escalonada, sendo multiplicada por 1/100. Note que esta transformação não altera as relações de cointegração, que se mantém com uma multiplicação por uma constante.

Para o modelo de PPC entre Estados Unidos e Bélgica, tomando $J = 0$, apresentamos na Figura 6.2 os componentes do vetor de cointegração variando com o tempo $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$.

Figura 6.2: PPC entre Estados Unidos e Bélgica, tomando $J = 0$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d).

Para o modelo de PPC entre Estados Unidos e Japão, tomando $J = 1$, apresentamos na Figura 6.3 os componentes do vetor de cointegração variando com o tempo $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$.

Figura 6.3: PPC entre Estados Unidos e Japão, tomando $J = 1$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d).

Para o modelo de PPC entre Estados Unidos e Noruega, tomando $J = 2$, apresentamos na Figura 6.4 os componentes do vetor de cointegração variando com o tempo $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$.

Figura 6.4: PPC entre Estados Unidos e Noruega, tomando $J = 2$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d).

Para o modelo de PPC entre Estados Unidos e Alemanha, tomando $J = 3$, apresentamos na Figura 6.5 os componentes do vetor de cointegração variando com o tempo $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$.

Figura 6.5: PPC entre Estados Unidos e Alemanha, tomando $J = 3$: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d).

A Tabela 6.3 apresenta as estimativas da matriz de cargas $\alpha^* = [\alpha_{11}^* \quad \alpha_{21}^* \quad \alpha_{31}^*]$ para os modelos ajustados na Tabela 6.1, com $J = 4$ (N.C.O. = 32). Pela tabela é possível verificar que em todos os casos, as componentes de α^* são significativamente iguais a zero. É possível ainda concluir que a escolha da defasagem $p = 1$, como em Martins (2016), além de não eliminar a autocorrelação presente na série de resíduos, não parece trazer um bom ajuste para os modelos.

Tabela 6.3: Estimativa e medidas bootstrap (*) para a matriz de cargas α .

País estrangeiro	p	J	$\hat{\alpha}^*$	I.C.*	Média*	Erro Padrão*
Bélgica	1	4	0,0006	[-0,0047 ; 0,0000]	0,0002	0,0015
	1	4	-0,0001	[-0,0034 ; 0,0066]	0,0005	0,0023
	1	4	-0,0001	[-0,0053 ; 0,0101]	0,0008	0,0036
Canadá	1	4	0,0002	[-0,0059 ; 0,0000]	-0,0005	0,0017
	1	4	-0,0002	[-0,0237 ; 0,0102]	-0,0027	0,0075
	1	4	-0,0003	[-0,0247 ; 0,0107]	-0,0029	0,0078
Dinamarca	1	4	-0,00004	[-0,0045 ; 0,0000]	0,00000	0,0016
	1	4	-0,00001	[-0,0058 ; 0,0053]	0,00004	0,0026
	1	4	-0,00001	[-0,0057 ; 0,0053]	0,00004	0,0025
França	1	4	0,0002	[-0,0073 ; 0,0000]	0,0007	0,0026
	1	4	-0,0001	[-0,0078 ; 0,0133]	0,0015	0,0049
	1	4	0,0000	[-0,0069 ; 0,0117]	0,0013	0,0043
Alemanha	1	4	0,0003	[-0,0097 ; 0,0000]	-0,0001	0,0032
	1	4	0,0000	[-0,0107 ; 0,0064]	-0,0001	0,0037
	1	4	0,0000	[-0,0206 ; 0,0126]	-0,0002	0,0072
Itália	1	4	0,0017	[-0,0044 ; 0,0000]	0,0000	0,0016
	1	4	0,0000	[-0,0045 ; 0,0070]	0,0002	0,0027
	1	4	0,0000	[-0,0026 ; 0,0038]	0,0001	0,0015
Japão	1	4	-0,0011	[-0,0043 ; 0,0000]	-0,0004	0,0014
	1	4	0,0009	[-0,0018 ; 0,0079]	0,0012	0,0024
	1	4	0,0021	[-0,0040 ; 0,0177]	0,0027	0,0053
Holanda	1	4	-0,0002	[-0,0031 ; 0,0000]	0,0006	0,0009
	1	4	-0,0001	[-0,0035 ; 0,0194]	0,0039	0,0058
	1	4	-0,0003	[-0,0057 ; 0,0319]	0,0065	0,0096
Noruega	1	4	0,0000	[-0,0050 ; 0,0000]	-0,0001	0,0015
	1	4	0,0000	[-0,0110 ; 0,0110]	0,0002	0,0053
	1	4	0,0000	[-0,0100 ; 0,0101]	0,0002	0,0047
Espanha	1	4	0,0000	[-0,0050 ; 0,0000]	-0,0001	0,0015
	1	4	0,0000	[-0,0110 ; 0,0110]	0,0002	0,0053
	1	4	0,0000	[-0,0100 ; 0,0101]	0,0002	0,0047
Suécia	1	4	-0,0005	[-0,0058 ; 0,0000]	-0,0005	0,0020
	1	4	-0,0011	[-0,0104 ; 0,0063]	-0,0009	0,0038
	1	4	-0,0007	[-0,0105 ; 0,0061]	-0,0009	0,0036
Reino Unido	1	4	-0,0005	[-0,0038 ; 0,0000]	-0,0001	0,0013
	1	4	-0,0010	[-0,0100 ; 0,0112]	-0,0002	0,0044
	1	4	-0,0012	[-0,0073 ; 0,0080]	-0,0002	0,0032

6.1.1 Ajuste com defasagem $p = 13$ e ondaletas Daubechies D10

Conforme comentado anteriormente, [Bierens e Martins \(2010\)](#) e [Martins \(2016\)](#) utilizam apenas a defasagem $p = 1$ em suas análises. No entanto, a escolha de tal defasagem deixa considerável correlação nos resíduos dos modelos ajustados. Tal fato pode ser verificado na Figura 6.6, para o modelo de cointegração entre Estados Unidos e Canadá, tomando $J = 2$, $p = 1$ e base de ondaletas *Daubechies* D10.

Figura 6.6: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t} \ \hat{u}_{2t} \ \hat{u}_{3t}]'$.

Em todos os modelos considerados na Tabela 6.1, a escolha do parâmetro J não influenciou significativamente a correlação presente na série de resíduos. Além disso, [Bierens e Martins \(2010\)](#) e [Martins \(2016\)](#) não deixam claro se modelar o vetor de cointegração utilizando polinômios de Chebyshev é suficiente para eliminar a correlação presente nos resíduos dos modelos ajustados.

Para o modelo de PPC entre Estados Unidos e Canadá, são apresentados na Figura 6.7 os resíduos $\hat{u}_{1t}$, $\hat{u}_{2t}$ e $\hat{u}_{3t}$ de um novo modelo ajustado, considerando $p = 13$ e $J = 2$. O teste de *Shapiro-Wilk* foi aplicado individualmente a $\hat{u}_{1t}$, $\hat{u}_{2t}$ e $\hat{u}_{3t}$, fornecendo os respectivos valores- p : 0,9910, 0,0017 e 0,0000. Desta forma, é possível validar a suposição de normalidade apenas para a componente $\hat{u}_{1t}$. Tal fato é confirmado pelos QQ-plots apresentados em 6.7. Note também que o desvio da normalidade é bastante perceptível nas caudas de $\hat{u}_{2t}$ e $\hat{u}_{3t}$. Os desvios de normalidade dos resíduos apresentados na Tabela 6.1 são similares aos apresentados por $\hat{u}_{2t}$ e $\hat{u}_{3t}$ em 6.7.

Figura 6.7: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Resíduos estimados pelo modelo, quantis amostrais e função de autocorrelação parcial (FACP) de $\hat{u}_t = [\hat{u}_{1t} \ \hat{u}_{2t} \ \hat{u}_{3t}]'$.

Na Figura 6.8 (a), são apresentados os resíduos de cointegração estimados $\hat{e}_t = \hat{\beta}_t' Y_t$, com $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \ \hat{\beta}_{2t} \ \hat{\beta}_{3t}]'$. Para esta série foram obtidos os respectivos valores- p dos testes ADF e PP: 0.2766 e 0.5568. Na Figura 6.8 (b) são apresentados os resíduos normalizados $\hat{e}_t^* = \hat{\beta}_t^{*'} Y_t$, com $\beta_t = [\hat{\beta}_{1t}^* \ \hat{\beta}_{2t}^* \ \hat{\beta}_{3t}^*]'$, com $\hat{\beta}_{1t}^* = 1, \forall t$. Para esta série foram obtidos os respectivos valores- p dos testes ADF e PP: 0,01 e 0.01. Tomando um nível de significância de 5%, foi possível então concluir que $\hat{e}_t^*$ é estacionário.

Figura 6.8: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Série de resíduos de cointegração não normalizados $\hat{e}_t$ (a) e normalizados $\hat{e}_t^*$ (b).

Na Figura 6.9 são apresentadas as estimativas para os componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) do vetor de cointegração variando com o tempo $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$, juntamente com as bandas de confiança geradas a partir de simulações bootstrap. Cada gráfico contém as bandas de confiança bootstrap de 95%. Além disso, em 6.9 (d) apresentamos $\hat{\beta}_{1t}$, $\hat{\beta}_{2t}$ e $\hat{\beta}_{3t}$ conjuntamente, com o objetivo de comparar os componentes ao longo do tempo.

Figura 6.9: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d).

Na Figura 6.10 são apresentadas as estimativas para os componentes $\hat{\beta}_{1t}^*$ (a), $\hat{\beta}_{2t}^*$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}^*$ (c) do vetor de cointegração normalizado $\hat{\beta}_t^* = [\hat{\beta}_{1t}^* \hat{\beta}_{2t}^* \hat{\beta}_{3t}^*]'$, juntamente com as bandas de confiança geradas a partir de simulações bootstrap.

Figura 6.10: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Componentes $\hat{\beta}_{1t}$ (a), $\hat{\beta}_{2t}$ (b) e $\hat{\beta}_{3t}$ (c) de $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{1t} \hat{\beta}_{2t} \hat{\beta}_{3t}]'$ juntamente com bandas bootstrap de 95%. Para efeito comparativo, os três componentes são apresentadas no mesmo gráfico (d).

Na Figura 6.11, apresentamos a estatística $RV_{CVT}^{(J)}$ calculada sob H_0 (a) e sob H_A (b). Rejeitamos a hipótese de cointegração constante ao longo do tempo, com valor- $p^* = 0,0050$ (obtido via bootstrap).

Figura 6.11: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para $RV_{CVT}^{(J)}$ sob H_0 (vetor de cointegração constante) (a) e sob H_A (b).

A Figura 6.12 contém os histogramas bootstrap dos componentes do parâmetro (matricial) $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \ \hat{\alpha}_{21}^* \ \hat{\alpha}_{31}^*]'$ do modelo. Podemos notar em todas as figuras que os valores teóricos dos parâmetros estão dentro dos intervalos de confiança bootstrap de 95%. Pelas figuras ainda é possível comparar a estimativa de cada parâmetro do modelo com sua respectiva média bootstrap.

Figura 6.12: PPC entre Estados Unidos e Canadá: Histograma, densidade e quantis bootstrap 2,5% e 97,5% para as componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ (a), $\hat{\alpha}_{21}^*$ (b) e $\hat{\alpha}_{31}^*$ (c) de $\hat{\alpha}^* = [\hat{\alpha}_{11}^* \ \hat{\alpha}_{21}^* \ \hat{\alpha}_{31}^*]'$.

A Tabela 6.4 apresenta as estimativas da estatística $RV_{CVT}^{(J)}$, os intervalos de confiança e o valor- p bootstrap. Note que a tabela complementa as informações da Figura 6.11.

Tabela 6.4: Estimativa e medidas bootstrap* sob H0 (vetor de cointegração constante).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média *	Erro Padrão *	valor- p *
$RV_{CVT}^{(J)}$ (H0)	111,5649	[50,55002 ; 104,5119]	75,51765	13,4707	0,0050

A Tabela 6.5 apresenta as estimativas dos parâmetros, bem como medidas bootstrap de interesse. Note que a tabela complementa as informações das Figuras 6.11 e 6.12.

Tabela 6.5: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (três escalas ao longo do tempo).

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$RV_{CVT}^{(J)}$ (HA)	111,5649	[100,9266;193,5375]	144,8722	23,35871
α_{11}^*	-0,0309	[-0,2825 ; -0,0003]	-0,0818	0,0777
α_{21}^*	-0,0120	[-0,0270 ; 0,0053]	-0,0055	0,0076
α_{31}^*	0,0182	[0,0004 ; 0,0746]	0,0240	0,0194
$\sigma_{11}^* = (\times 10^4)$	0,8039	[0,4814 ; 0,9576]	0,6939	0,1213
$\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^* (\times 10^4)$	-0,0052	[-0,0129 ; 0,0334]	0,0093	0,0119
$\sigma_{13}^* = \sigma_{31}^* (\times 10^4)$	-0,0150	[-0,0787 ; -0,0044]	-0,0394	0,0192
$\sigma_{22}^* = (\times 10^4)$	0,0416	[0,0232 ; 0,0547]	0,0369	0,0085
$\sigma_{23}^* = \sigma_{32}^* (\times 10^4)$	0,0114	[-0,0102 ; 0,0030]	-0,0032	0,0033
$\sigma_{33}^* = (\times 10^4)$	0,0757	[0,0422 ; 0,1110]	0,0677	0,0184

É possível notar pela Tabela 6.5 que, diferente de $\hat{\alpha}_{21}^*$, os componentes $\hat{\alpha}_{11}^*$ e $\hat{\alpha}_{31}^*$ são significativamente diferentes de zero, considerando um nível de confiança de 5% para a construção do intervalo de confiança bootstrap.

No entanto, vale ressaltar que em diversos modelos ajustados e apresentados na Tabela 6.1, foram encontrados $\hat{\alpha}_{11}^*$, $\hat{\alpha}_{21}^*$ e $\hat{\alpha}_{31}^*$ significativamente iguais a zero, ou seja, dentro dos intervalos de confiança obtidos nas simulações bootstrap. Bierens e Martins (2010) e Martins (2016) sequer apresentam seus resultados para as estimativas destes parâmetros. Logo, não é possível concluir se resultados similares foram obtidos ou se os autores realmente não se preocuparam com as estimativas deste parâmetro.

É possível ainda notar pela Figura 6.10 que as condições empregadas em Martins (2016) para que haja cointegração foram satisfeitas, ou seja: pudemos concluir que $\hat{e}_t^*$ é estacionária e $\beta_{2t} < 0$ e $\beta_{3t} > 0$ para os valores de t considerados.

6.2 Paridade de Poder de Compra com coeficientes variando com o tempo - caso com intercepto

São apresentados a seguir os ajustes de modelos considerando o intercepto para as séries de Canadá e França do conjunto de dados. Em cada caso, foram escolhidos valores de p , parâmetro de ondaleta J e base de ondaletas convenientes, de forma a encontrar séries de resíduos sem correlação serial. A ausência de correlação serial visa a obtenção de melhores resultados para as bandas bootstrap. Em cada caso, desejamos verificar se o intercepto varia com o tempo, de acordo com as interpretações para a estimativa de e^{η_t} , apresentadas na Seção 4.7.

Apresentamos nas Figuras 6.13 e 6.14 as estimativas para o termo e^{η_t} do modelo de PPC cointegrado para os interceptos dos modelos aplicados às séries de Canadá e França. Na Tabela 6.6 por sua vez, verificamos a estacionariedade dos resíduos de cointegração e a suposição de normalidade do modelo. A escolha das defasagens p em cada modelo refere-se a uma das defasagens utilizada em Martins (2016) em seus ajustes.

Intercepto para modelo de contegração: CAN vs. USA

Figura 6.13: Gráficos com quantidade e^{η_t} estimada, juntamente com bandas de confiança, para os países estrangeiros Bélgica, Canadá, Dinamarca, França.

Intercepto para modelo de contegração: FRA vs. USA

Figura 6.14: Gráficos com quantidade e^{η_t} estimada, juntamente com bandas de confiança, para os países estrangeiros Bélgica, Canadá, Dinamarca, França.

A Tabela 6.6 contém a combinação de parâmetros utilizada em cada ajuste. Em todos os casos, foi utilizada a família de ondaletas *Daubechies*. Para testarmos a suposição de normalidade dos resíduos u_t dos modelos, apresentamos os valores- p para o teste de normalidade de Shapiro Wilk, cuja hipótese nula H_0 é de que a série segue uma distribuição normal. Apresentamos também os valores da estatística de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$, para testar a hipótese de intercepto variando com o tempo. Conforme podemos notar pela tabela, existem indícios que nos levam a rejeitar H_0 em todos os casos.

Tabela 6.6: Modelos de PPC: combinação de parâmetros do modelo, valores- p para o teste de normalidade de Shapiro-Wilk para resíduos do modelo $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})'$ e estatística de razão de verossimilhanças $RV_{CVT}^{(J)}$.

	Fam = DaubExPhase	Teste de Shapiro-Wilk			Teste de R.V.
País estrangeiro	Combinação de parâmetros	u_{1t}	u_{2t}	u_{3t}	$RV_{CVT}^{(J)}$
Canadá	J=5, p=18, Filtro=2	0.3366	0.3932	0,0000	272.83
França	J=5, p=13, Filtro=2	0.4998	0.1063	0.0015	275.86

Com base na interpretação apresentada na Seção 4.7 da quantidade e^{η_t} podemos considerar que os casos CAN vs. USA e FRA vs. USA devem modelados considerando o intercepto variando com tempo, com e^{η_t} oscilando entre 0 e 1.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Considerações finais

Nas últimas décadas, o interesse na literatura sobre o tema cointegração aumentou de maneira expressiva. A literatura pertinente a este assunto foi abordada sob inúmeros aspectos e pontos de vista. Trabalhos de revisão como [Taylor e Taylor \(2004\)](#) e suas referências dão conta de como a literatura sobre este tópico é vasta e complexa. O assunto é intensamente debatido e aplicado em livros texto de grande importância na área de séries temporais, como em [Hamilton \(1994\)](#), [Baltagi \(2008\)](#), [Tsay \(2010\)](#), [Morettin \(2011\)](#) e [Tsay \(2013\)](#).

Os modelos tradicionais que tratam deste tópico supõem que o vetor de cointegração não varia ao longo do tempo ([Granger, 1986](#); [Johansen, 1988](#)). Entretanto, conforme apontam os trabalhos de [Park e Hahn \(1999\)](#), [Bierens e Martins \(2010\)](#) e [Martins \(2016\)](#), existem evidências de que esta suposição pode ser considerada muito restritiva. [Bierens e Martins \(2010\)](#), por exemplo, utilizaram polinômios de Chebyshev para modelar o vetor de cointegração β_t variando com o tempo, com a suposição de que β_t é uma função discreta suave do tempo.

Com base nestas idéias, propomos neste trabalho um modelo de correção de erros vetorial em que também é permitido ao vetor de cointegração variar ao longo do tempo. No entanto, modelamos β_t por meio de ondaletas. Dadas as características das ondaletas, que podem ser suaves (ou não) ([Morettin, 2014](#)), relaxamos a condição imposta em [Bierens e Martins \(2010\)](#) de que β_t deve ser uma função discreta suave do tempo.

O Capítulo 4 apresenta a construção do modelo de correção de erros vetorial, com o vetor de cointegração decomposto por meio de ondaletas. O capítulo também se dedica à teoria necessária para deduzir os estimadores dos parâmetros do modelo. As maiores contribuições são a apresentação e a construção do modelo, além da dedução dos estimadores não normalizados e normalizados de seus parâmetros. Com base nos resultados teóricos encontrados, foram implementadas rotinas computacionais para definir, estimar

e apresentar os resultados do modelo. Estas rotinas podem ser visualizadas no Anexo C.

O Capítulo 5 foi dedicado a testar o modelo apresentado no Capítulo 4. Foram propostas diversas situações controladas, em que se verificou a capacidade do modelo de lidar satisfatoriamente com séries cointegradas simuladas, que apresentavam mudança de regime para o vetor de cointegração. Em cada exemplo, foram incluídas uma ou mais mudanças ao longo do tempo. Nos Exemplos 01 e 03, foram consideradas mudanças apenas no nível do vetor de cointegração ao longo do tempo (mudanças lineares abruptas). Nos Exemplos 4 e 5 foram considerados outros tipos de mudanças temporais, persistentes, seguindo decrescimentos linear e logarítmico respectivamente. Neste sentido, o trabalho traz contribuições na área de mudanças de regime, com a apresentação de um modelo capaz de estimar mudanças no vetor de cointegração ao longo do tempo. A metodologia ainda permite testar se as mudanças observadas são estatisticamente significativas.

A utilização de ondaletas agrega versatilidade ao modelo, permitindo o tratamento de mudanças abruptas na relação de cointegração (ao utilizar, por exemplo a base de ondaletas *Haar*) ou mudanças suaves (ao utilizar, por exemplo, a base de ondaletas *Symmlet* S8 ou S10). O Capítulo 5 ainda traz o Exemplo 3, em que não foram consideradas mudanças no vetor de cointegração ao longo do tempo. Claramente a intenção foi testar a capacidade do modelo em diferenciar situações com cointegração dinâmica de situações com cointegração usual. O modelo também se mostrou bastante eficiente para estimar os parâmetros simulados neste caso.

O Capítulo 6 foi dedicado a aplicar o modelo apresentado no Capítulo 4 e testado no Capítulo 5. Para isso, foi utilizado o conjunto de dados empregado em Falk e Wang (2003), Bierens e Martins (2010) e Martins (2016). Neste conjunto de dados, trabalhamos com o modelo de PPC variando com o tempo entre os EUA e doze outros países, considerados estrangeiros. Testamos dois casos específicos: modelo sem intercepto e com intercepto.

Para o primeiro caso, apresentado na Seção 6.1, estimamos β_{1t} , β_{2t} e β_{3t} considerando a base de ondaletas *Daubechies* D2, $p = 1$ e $J = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Os valores das estatísticas $RV_{CVT}^{(J)}$ (e valores-p bootstrap observados) indicam cointegração variando com o tempo entre Estados Unidos e dez dos doze países estrangeiros considerados. Estes resultados estão em concordância com os resultados apresentados em Bierens e Martins (2010). Apenas para Espanha e Itália a relação de PPC não ficou evidente. Foi possível verificar também que utilizar a defasagem $p = 1$ empregada em Bierens e Martins (2010) deixa considerável correlação nas séries de resíduos dos modelos ajustados. Logo, foi apresentado um ajuste completo para a relação de cointegração entre Estados Unidos e Canadá, tomando $p = 13$. Foram verificados ganhos consideráveis em análise, melhores bandas bootstrap para as componentes do vetor de cointegração e respeito às condições necessárias para que haja cointegração, conforme aponta Martins (2016).

Por fim, apresentamos na Seção 6.2 o caso de PPC considerando o intercepto no modelo. Neste caso, o foco foi estimar a quantidade e^{η_t} variando com o tempo, já que

consideramos o vetor β como sendo constante. Notamos mais uma vez a versatilidade do modelo em considerar situações ainda mais gerais.

7.2 Pesquisas futuras

Martins (2005) apresentou um modelo de correção de erros vetorial onde é permitido ao vetor de cointegração variar com tempo, sendo modelado por meio de Polinômios de Chebychev. Desde então, alguns trabalhos foram publicados pelo autor sobre o tema. Em Bierens e Martins (2010) por exemplo, foram deduzidos vários resultados assintóticos, inclusive para a distribuição da estatística de razão de verossimilhança sob a hipótese nula de cointegração usual. Os autores demonstraram que a estatística segue uma distribuição qui-quadrado com graus de liberdade que dependem de um parâmetro m dos Polinômios de Chebychev. Martins e Gabriel (2013) derivam as condições sob as quais a cointegração variando com o tempo leva a espaços de cointegração que podem ser variantes ou invariantes com o tempo. Além disso, eles esclarecem o papel das restrições de identificação e normalização, demonstrando que as rupturas estruturais nos modelos de correção de erros podem realmente corresponder a relações econômicas estáveis a longo prazo, ao contrário de uma configuração com equação única, na qual uma restrição de identificação é imposta. Martins (2016) por sua vez, revisita o problema da PPC variando com o tempo utilizando simulações de Monte Carlo e Bootstrap, encontrando resultados mais refinados. São quase doze anos de pesquisa com artigos publicados em revistas importantes na área, demonstrando a relevância do assunto, mesmo sobre um tópico tão recorrente na literatura (Taylor e Taylor, 2004).

Seguindo o trabalho destes autores, procuramos mostrar as vantagens de se utilizar as ondaletas como uma alternativa aos Polinômios de Chebychev para modelar o vetor de cointegração variando com o tempo. Procuramos enaltecer a versatilidade do novo modelo e a capacidade de gerarmos conhecimento a partir do mesmo. Sentimo-nos confiantes de que, assim como nos trabalhos citados, a metodologia apresentada aqui tem potencial para gerar novas contribuições para a área de pesquisa.

Neste sentido, algumas questões para futuras pesquisas merecem ser destacadas. Dentre elas, citamos o estudo das propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança apresentados no Capítulo 4. Apontamos a necessidade de apresentar as taxas de convergência destes estimadores. Além disso, desejamos aplicar o modelo em séries de dados mais longas, de preferência, englobando o período da crise financeira de 2008. A ideia será testar a capacidade de estimação do modelo frente a conjuntos de dados que apresentem maior volatilidade. Desejamos ainda verificar se a inclusão de variáveis *dummy* e termos determinísticos melhoram as estimativas dos parâmetros do modelo.

Apêndice A

Resultados matriciais

Proposição A.1. *Mínimo de $|T^{-1}(Y - BCX)(Y - BCX)'|$*

Sejam Y e X matrizes de ordem $(n \times T)$ de posto n e sejam A e B matrizes com posto r e dimensões $n \times r$ e $r \times n$ repectivamente. Além disso, sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ os autovalores de

$$(XX')^{-\frac{1}{2}} XY' (YY') YX' (XX')'^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.1})$$

com autovetores ortonormais correspondentes $v_1, v_2, \dots, v_n$ e $(XX')^{-\frac{1}{2}}$ tal que

$$(XX')^{-\frac{1}{2}} XX' (XX')'^{-\frac{1}{2}} = I_n. \quad (\text{A.2})$$

Desta forma,

$$\min_{A,B} |T^{-1}(Y - BCX)(Y - BCX)'| = |T^{-1}YY'| \prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i), \quad (\text{A.3})$$

com o mínimo sendo atingido para

$$B = \hat{B} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_r \end{bmatrix}' (XX')^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4})$$

e

$$A = \hat{A} = YX' \hat{B}' \left(\hat{B}XX' \hat{B}' \right)^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

Demonstração:

Este resultado foi demonstrado em Tso (1981).

□

Conforme aponta Lutkepohl (2005), devemos notar que as matrizes de minimização $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são únicas. Qualquer matriz não singular F de ordem $(r \times r)$ leva a outro conjunto de matrizes de minimização $F\hat{A}$ e $\hat{B}F^{-1}$.

Apêndice B

Demonstrações e passagens omissas no texto

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados que foram omitidos do texto, e que podem ser consultados para complementar a leitura do mesmo.

B.1 Demonstrações do Capítulo 2 - Seção 2.3, Equação 2.27:

Substituindo a Equação 2.25 na Equação 2.26 e tomando o logaritmo em seguida, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta) &= \prod_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_u|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot (\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Tn}{2}} |\Sigma_u|^{\frac{T}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left((\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot (\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t) \right) \right\} \\ &= \frac{Tn}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log |\Sigma_u| - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left((\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot (\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t) \right)}_{escalar}.\end{aligned}$$

Como o somatório na expressão acima é escalar, o seu valor não muda ao aplicarmos o operador *traço* (tr), logo

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{Tn}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log |\Sigma_u| - \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{t=1}^T \left((\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot (\Delta Y_t - \alpha \beta' Y_{t-1} - \Gamma \Delta X_t) \right) \right\}.$$

Em notação matricial, temos que

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{Tn}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log |\Sigma_u| - \frac{1}{2} tr \left((\Delta Y - \alpha \beta' Y_{-1} - \Gamma \Delta X)' \cdot \Sigma_u^{-1} \cdot (\Delta Y - \alpha \beta' Y_{-1} - \Gamma \Delta X) \right).$$

B.2 Tabelas longas do Capítulo 5

B.2.1 Quarto exemplo: Decrescimento linear com Daubechies

$D2$

Tabela B.1: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decrecimento linear para β_{2t}) - continuação da Tabela 5.13.

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$d_{40}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{40}^{(2,1)}$	0,0631	0,0556	[0,0275 ; 0,0872]	0,0566	0,0149
$d_{41}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{41}^{(2,1)}$	-0,0008	0,0115	[-0,0076 ; 0,0337]	0,0102	0,0301
$d_{42}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{42}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0079	[-0,0233 ; 0,0100]	-0,0075	0,0090
$d_{43}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{43}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0044	[-0,0227 ; 0,0171]	-0,0043	0,0089
$d_{44}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{44}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0002	[-0,0191 ; 0,0195]	-0,0001	0,0089
$d_{45}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{45}^{(2,1)}$	0,0000	0,0158	[-0,0008 ; 0,0310]	0,0150	0,0086
$d_{46}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{46}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0091	[-0,0239 ; 0,0053]	-0,0091	0,0085
$d_{47}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{47}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0026	[-0,0175 ; 0,0155]	-0,0023	0,0081
$d_{48}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{48}^{(2,1)}$	0,0000	0,0094	[-0,0035 ; 0,0241]	0,0096	0,0058
$d_{49}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{49}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0007	[-0,0118 ; 0,0109]	-0,0007	0,0077
$d_{410}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{410}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0023	[-0,0196 ; 0,0087]	-0,0026	0,0060
$d_{411}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{411}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0012	[-0,0118 ; 0,0109]	-0,0009	0,0054
$d_{412}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{412}^{(2,1)}$	0,0000	0,0041	[-0,0076 ; 0,0168]	0,0039	0,0053
$d_{413}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{413}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0013	[-0,0109 ; 0,0116]	-0,0009	0,0052
$d_{414}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela B.1 – *Continuação da página anterior*

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$d_{414}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0013	[-0,0165 ; 0,0133]	-0,0013	0,0064
$d_{415}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{415}^{(2,1)}$	-0,0082	-0,0063	[-0,0191 ; 0,0060]	-0,0064	0,0053
$d_{50}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{50}^{(2,1)}$	0,0637	0,0445	[0,0160 ; 0,0822]	0,0464	0,0182
$d_{51}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{51}^{(2,1)}$	-0,0001	0,0087	[-0,0207 ; 0,0328]	0,0080	0,0142
$d_{52}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{52}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0052	[-0,0281 ; 0,0165]	-0,0050	0,0220
$d_{53}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{53}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0032	[-0,0226 ; 0,0196]	-0,0017	0,0182
$d_{54}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{54}^{(2,1)}$	0,0000	0,0015	[-0,0171 ; 0,0176]	0,0010	0,0081
$d_{55}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{55}^{(2,1)}$	0,0000	0,0166	[-0,0013 ; 0,0352]	0,0161	0,0090
$d_{56}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{56}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0065	[-0,0217 ; 0,0145]	-0,0057	0,0082
$d_{57}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{57}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0052	[-0,0208 ; 0,0175]	-0,0044	0,0086
$d_{58}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{58}^{(2,1)}$	0,0000	0,0089	[-0,0075 ; 0,0236]	0,0090	0,0072
$d_{59}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{59}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0047	[-0,0262 ; 0,0124]	-0,0046	0,0085
$d_{510}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{510}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0061	[-0,0190 ; 0,0152]	-0,0050	0,0094
$d_{511}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{511}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0131	[-0,0260 ; 0,0034]	-0,0122	0,0069
$d_{512}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{512}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0072	[-0,0236 ; 0,0073]	-0,0070	0,0080
$d_{513}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{513}^{(2,1)}$	0,0000	0,0008	[-0,0157 ; 0,0190]	0,0013	0,0087
$d_{514}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{514}^{(2,1)}$	0,0000	0,0008	[-0,0149 ; 0,0123]	0,0008	0,0065
$d_{515}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{515}^{(2,1)}$	0,0000	0,0057	[-0,0091 ; 0,0201]	0,0055	0,0085
$d_{516}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela B.1 – *Continuação da página anterior*

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$d_{516}^{(2,1)}$	0,0000	0,0087	[-0,0041 ; 0,0184]	0,0088	0,0053
$d_{517}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{517}^{(2,1)}$	0,0000	0,0035	[-0,0153 ; 0,0164]	0,0038	0,0069
$d_{518}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{518}^{(2,1)}$	0,0000	0,0080	[-0,0054 ; 0,0176]	0,0076	0,0059
$d_{519}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{519}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0060	[-0,0162 ; 0,0105]	-0,0055	0,0080
$d_{520}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{520}^{(2,1)}$	0,0000	0,0014	[-0,0147 ; 0,0137]	0,0015	0,0061
$d_{521}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{521}^{(2,1)}$	0,0000	0,0017	[-0,0107 ; 0,0134]	0,0014	0,0064
$d_{522}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{522}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0017	[-0,0110 ; 0,0084]	-0,0018	0,0047
$d_{523}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{523}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0025	[-0,0150 ; 0,0096]	-0,0026	0,0058
$d_{524}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{524}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0018	[-0,0123 ; 0,0149]	-0,0010	0,0076
$d_{525}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{525}^{(2,1)}$	0,0000	0,0019	[-0,0071 ; 0,0125]	0,0020	0,0063
$d_{526}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{526}^{(2,1)}$	0,0000	0,0006	[-0,0126 ; 0,0080]	0,0001	0,0049
$d_{527}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{527}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0001	[-0,0145 ; 0,0100]	0,0001	0,0055
$d_{528}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{528}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0016	[-0,0142 ; 0,0113]	-0,0013	0,0110
$d_{529}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{529}^{(2,1)}$	0,0000	0,0005	[-0,0092 ; 0,0149]	0,0012	0,0060
$d_{530}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{530}^{(2,1)}$	0,0000	0,0010	[-0,0121 ; 0,0108]	0,0009	0,0050
$d_{531}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{531}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0012	[-0,0147 ; 0,0110]	-0,0014	0,0082

B.2.2 Sexto exemplo: Decrescimento logarítmico com Symmlet S8 (considerando defasagem do modelo)

Tabela B.2: Estimativas e medidas bootstrap* sob HA (decrecimento logarítmico para β_{2t}) - continuação da Tabela 5.20.

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$d_{40}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{40}^{(2,1)}$	-0,0735	-0,0553	[-0,0708 ; -0,0381]	-0,0543	0,0082
$d_{41}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{41}^{(2,1)}$	0,0153	0,0176	[0,0056 ; 0,0311]	0,0179	0,0058
$d_{42}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{42}^{(2,1)}$	-0,0039	-0,0071	[-0,0152 ; 0,0039]	-0,0067	0,0048
$d_{43}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{43}^{(2,1)}$	0,0004	0,0029	[-0,0076 ; 0,0119]	0,0027	0,0049
$d_{44}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{44}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0031	[-0,0131 ; 0,0041]	-0,0034	0,0040
$d_{45}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{45}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0010	[-0,0120 ; 0,0114]	-0,0007	0,0051
$d_{46}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{46}^{(2,1)}$	0,0000	0,0061	[-0,0020 ; 0,0166]	0,0061	0,0038
$d_{47}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{47}^{(2,1)}$	0,0000	0,0052	[-0,0041 ; 0,0165]	0,0053	0,0041
$d_{48}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{48}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0031	[-0,0137 ; 0,0052]	-0,0031	0,0042
$d_{49}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{49}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0028	[-0,0121 ; 0,0053]	-0,0028	0,0037
$d_{410}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{410}^{(2,1)}$	0,0000	0,0016	[-0,0068 ; 0,0065]	0,0012	0,0034
$d_{411}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{411}^{(2,1)}$	0,0000	0,0012	[-0,0063 ; 0,0092]	0,0012	0,0032
$d_{412}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{412}^{(2,1)}$	-0,0005	-0,0024	[-0,0102 ; 0,0054]	-0,0023	0,0036
$d_{413}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{413}^{(2,1)}$	0,0032	0,0022	[-0,0077 ; 0,0081]	0,0018	0,0034
$d_{414}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{414}^{(2,1)}$	-0,0065	-0,0032	[-0,0103 ; 0,0044]	-0,0030	0,0034
$d_{415}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela B.2 – *Continuação da página anterior*

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$d_{415}^{(2,1)}$	0,0232	-0,0049	[-0,0154 ; 0,0012]	-0,0070	0,0039
$d_{50}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{50}^{(2,1)}$	-0,0649	0,0114	[-0,0058 ; 0,0313]	0,0162	0,0093
$d_{51}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{51}^{(2,1)}$	0,0169	0,0041	[-0,0105 ; 0,0268]	0,0045	0,0085
$d_{52}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{52}^{(2,1)}$	-0,0041	-0,0013	[-0,0134 ; 0,0097]	-0,0012	0,0050
$d_{53}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{53}^{(2,1)}$	0,0004	0,0024	[-0,0069 ; 0,0119]	0,0024	0,0043
$d_{54}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{54}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0006	[-0,0108 ; 0,0062]	-0,0011	0,0045
$d_{55}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{55}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0040	[-0,0144 ; 0,0072]	-0,0035	0,0052
$d_{56}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{56}^{(2,1)}$	0,0000	0,0021	[-0,0088 ; 0,0104]	0,0019	0,0050
$d_{57}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{57}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0021	[-0,0119 ; 0,0063]	-0,0023	0,0042
$d_{58}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{58}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0051	[-0,0146 ; 0,0023]	-0,0052	0,0037
$d_{59}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{59}^{(2,1)}$	0,0000	0,0013	[-0,0082 ; 0,0087]	0,0010	0,0040
$d_{510}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{510}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0012	[-0,0104 ; 0,0093]	-0,0009	0,0042
$d_{511}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{511}^{(2,1)}$	0,0000	0,0050	[-0,0046 ; 0,0117]	0,0049	0,0049
$d_{512}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{512}^{(2,1)}$	0,0000	0,0067	[-0,0015 ; 0,0123]	0,0066	0,0037
$d_{513}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{513}^{(2,1)}$	0,0000	0,0004	[-0,0078 ; 0,0075]	0,0004	0,0041
$d_{514}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{514}^{(2,1)}$	0,0000	0,0029	[-0,0030 ; 0,0110]	0,0029	0,0036
$d_{515}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{515}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0020	[-0,0096 ; 0,0086]	-0,0017	0,0037
$d_{516}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{516}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0011	[-0,0087 ; 0,0066]	-0,0011	0,0044
$d_{517}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000

(Continua na página seguinte)

Tabela B.2 – *Continuação da página anterior*

Parâmetro	Teórico	Estimativa	Intervalo de confiança*	Média*	Erro Padrão*
$d_{517}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0025	[-0,0104 ; 0,0052]	-0,0025	0,0039
$d_{518}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{518}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0071	[-0,0133 ; 0,0000]	-0,0070	0,0032
$d_{519}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{519}^{(2,1)}$	0,0000	0,0025	[-0,0047 ; 0,0105]	0,0023	0,0044
$d_{520}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{520}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0009	[-0,0089 ; 0,0069]	-0,0010	0,0037
$d_{521}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{521}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0007	[-0,0065 ; 0,0059]	-0,0005	0,0037
$d_{522}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{522}^{(2,1)}$	0,0000	0,0004	[-0,0071 ; 0,0079]	0,0004	0,0030
$d_{523}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{523}^{(2,1)}$	0,0000	0,0007	[-0,0062 ; 0,0069]	0,0007	0,0037
$d_{524}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{524}^{(2,1)}$	0,0000	0,0012	[-0,0078 0,0065]	0,0009	0,0035
$d_{525}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{525}^{(2,1)}$	0,0000	-0,0001	[-0,0064 0,0069]	0,0000	0,0028
$d_{526}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{526}^{(2,1)}$	0,0000	0,0004	[-0,0057 0,0078]	0,0006	0,0029
$d_{527}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{527}^{(2,1)}$	0,0000	0,0004	[-0,0066 0,0054]	0,0003	0,0035
$d_{528}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{528}^{(2,1)}$	-0,0003	0,0004	[-0,0046 0,0055]	0,0005	0,0027
$d_{529}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{529}^{(2,1)}$	0,0017	-0,0002	[-0,0052 0,0058]	-0,0001	0,0036
$d_{530}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{530}^{(2,1)}$	-0,0032	0,0000	[-0,0043 0,0056]	0,0004	0,0028
$d_{531}^{(1,1)}$	0,0000	0,0000	[0,0000 0,0000]	0,0000	0,0000
$d_{531}^{(2,1)}$	-0,0025	-0,0074	[-0,0145 -0,0036]	-0,0082	0,0027

Apêndice C

Elementos computacionais utilizados no trabalho

C.1 O software R e o pacote wavethresh

O software R é simultaneamente linguagem e ambiente para computação estatística e gráfica de alta performance. O software fornece uma ampla variedade de técnicas estatísticas (modelagem linear e não-linear, testes estatísticos clássicos, análise de séries temporais, classificação, análise de cluster, etc). Existem diversos softwares pagos que geralmente são usados como veículos para a disseminação de métodos de pesquisa em Estatística. No entanto, a linguagem R aparece como uma alternativa *Open Source* (gratuita) para o mesmo propósito. ([R-project, 2016](#)).

Como o software R foi construído em torno de uma linguagem computacional, ele permite aos usuários adicionar funcionalidades por meio da construção de novas funções e pacotes. Existem inúmeros pacotes especializados em lidar com diversas áreas de pesquisa em Estatística. Estes pacotes podem ser acrescentados via linhas de comando digitadas diretamente no programa. Dependendo do interesse, o pesquisador pode buscar os pacotes com funções de interesse previamente implementadas por outros pesquisadores.

No presente trabalho, utilizamos pacotes com funções para o cálculo matricial (*geigen*, *car*) e para o tratamento de séries temporais (*tseries*). Além dos pacotes citados, utilizamos o pacote *wavethresh*, cujas funções são descritas no Livro [Nason \(2008\)](#). Utilizamos o pacote para obter bases de ondaletas para testar o modelo definido na Seção 4.

C.2 Rotina para simular modelos com cointegração variando com o tempo

Apresentamos a seguir a rotina utilizada para gerar os modelos simulados apresentados na Seção 5. Por meio da rotina, podemos simular todos os exemplos apresentados na Seção,

bem como estimar os parâmetros de cada modelo e gerar os gráficos apresentados.

```
#####

# Inicializando a rotina:
#####
setwd(" <inserir diretório> ")
# Removendo variáveis previamente compiladas:
rm(list=ls(all=TRUE))
# Carregando libraries:
library(wavethresh)
library(geigen)
library(tseries)
library(car)

#####

# Parâmetros do modelo:
T = 1024*1      # tamanho da série simulada
p = 1           # ordem do modelo VEC(p) (p=1-> sem defasagem; p
               >=2 com defasagem)
r = 1           # número de vetores cointegrados
c = 0           # inclui constante? (1=sim; 0=não)
J = 0           # parâmetro para a ordem wavelet do modelo

# Escolhendo a família de ondaletas: (Ex: DaubExPhase + 1 =>
   Ondaleta Haar)
familia = "DaubExPhase" # (Ex: family = "DaubExPhase" ou
   family = "DaubLeAsymm")
filtro = 1            # (Ex: filtro= 1)
boundary = 'periodic' # bc = periodic ou symmetric

# Threshold: Opção de excluir níveis após análise:
exc = c(); #c("d_42","d_43")

# Parâmetro para vários níveis na ondaleta pai da Haar.
j0 = 0 # j0=0 -> só o nível C_00 para a pai; j0=1 --> vários
      níveis para a pai
sp = 0 # sp=0 --> pai e mãe (default); sp=1 --> somente pai
```

```
#####

# ESTRUTURAS PARA O VETOR DE COINTEGRAÇÃO:

# ESTRUTURA 01: Vetor de cointegração: beta_t = (beta_1,beta_2)
' -> (kxr),
# com beta_2 = (beta_21t,beta_22t), ou seja, uma mudança de
  regime ao longo do tempo
beta_21 = -1;
beta_22 = -2;
#beta_23 = -4;
#beta_24 = -2;
beta_2t = c(rep(beta_21, (T/2)),rep(beta_22, (T/2)))
# = c(rep(beta_21, (T/4)),rep(beta_22, (T/4)),rep(beta_23, (T/2)))
#beta_2t = c(rep(beta_21, (T/4)),rep(beta_22, (T/4)),rep(beta_23
  , (T/4)),rep(beta_24, (T/4)))

# ESTRUTURA 02: decrescimento linear de beta_2t em (0,1]
#beta_2t = -((1/T)*c(1:T))

# ESTRUTURA 03: decrescimento logarítmico de beta_2t em (0,1]
#beta_2t = -log((1/T)*c(1:T))

# ESTRUTURA 04: comportamento beta_2t em (0,1]: função seno
#beta_2t = -sin((40/T)*c(1:T))
#plot(1:T,beta_2t,type="l")

# ESTRUTURA 05: comportamento beta_2t em (0,1]: mix de funções
#beta_2t = c(rep(beta_21, (T/4)), -1-((1/T)*c(1:(T/4))),rep(
  beta_22, (T/2)))
#plot(1:(T),beta_2t,type="l")

#####

# Simulando séries cointegradas:

# Dim. da série simulada, consid. amostra inicial:
TT = T+p
```

```
# Vetor beta_2 variando com o tempo:
beta_2sim = c(rep(beta_2t[1],p),beta_2t)

# Distribuição dos resíduos: N(0,1) independentes
u=matrix(rnorm(TT,0,1),TT,1)
v=matrix(rnorm(TT,0,1),TT,1)

Y2=matrix(0,TT,1)
Y2[1]=rnorm(1,0,1)
for(t in 2:TT){
  Y2[t] = Y2[t-1] + v[t]
}

Y1=matrix(0,TT,1)
Y1[1] = u[1]
for(t in 2:TT){
  Y1[t] = -beta_2sim[t]*Y2[t-1] + u[t]
}

#####

# Construindo matrizes com observações:
Y = cbind(Y1,Y2)
YT = t(Y)
n = dim(YT)[1]

DYT = cbind(matrix(rep(0,n),n,1),t(diff(Y)))

DY = DYT[, (p+1):(TT) ]
Y_1 = YT[, (p):(TT-1)]

if(c==0) {
  if(p>1) {
    XT = matrix(0, (n*(p-1)),T)
    for(i in 1:(p-1)){XT[(i+(n-1)*(i-1)):(n*i),] = rbind(DYT[, (
      p-i+1):(TT-i)])}
  }
} else {
```

```

if(p>1) {
  XT = matrix(0, (n*(p-1)), T)
  for(i in 1:(p-1)) {XT[(i+(n-1)*(i-1)):(n*i), ] = rbind(DYT[, (
    p-i+1):(TT-i)] )}
  XT = rbind(matrix(rep(1, T), 1, T), XT)
}
else {XT = matrix(rep(1, T), 1, T)}
}

#####

# Definindo matriz Y_1jk para a decomposição máxima J:

ifelse(j0!=0,
{
  ifelse(sp==0,
    {

      phi00 <- function(t){
        ifelse ((t>=0)&(t<=1), 1, 0)
      }

      phi_jk <- function(t, j, k){
        ifelse (((t>=(2^(-j)*k))&(t<=(2^(-j)*(k+1))))), 2^(j/2),
          0)
      }

      psi_jk <- function(t, j, k){
        ifelse(((t>=(2^(-j)*k))&(t<(2^(-j)*(k+1/2))))), 2^(j/2),
          ifelse(((t>=(2^(-j)*(k+1/2)))&(t<=(2^(-j)*(k+1))))),
            -2^(j/2), 0))
      }

      # Conversão do tempo em escala wavelet:
      tw = (1/(T-1))*c(0:(T-1))

      # Y_1 * função de escala phi (escala 00), para cada t
      normalizado em [0,1]:
      Y_1.phi00 = t(phi00(tw))*t(Y_1))
    }
  }
}

```



```

# Y_1 * função de detalhe psi (escala jk), para cada t
  normalizado em [0,1]:
Y_1.phijk = function(j,k){t(phi_jk(tw,j,k)*t(Y_1))}

# Y_1 * função de detalhe psi (escala jk), para cada t
  normalizado em [0,1]:
Y_1.psijk = function(j,k){t(psi_jk(tw,j,k)*t(Y_1))}

Y_1jk = matrix(0,n*(2^j0),T)
for(k in (0:(2^(j0)-1))){
  Y_1jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1)),] = Y_1.phijk(j0,k)
}

for(j in (j0:J)){
  for(k in (0:(2^(j)-1))){
    Y_1jk = rbind(Y_1jk,Y_1.psijk(j,k))
  }
}
w = dim(Y_1jk)[1]
},
{
  # Conversão do tempo em escala wavelet:
  tw = (1/(T-1))*c(0:(T-1))

  phi_jk <- function(t,j,k){
    ifelse (((t>=(2^(-j)*k))&(t<=(2^(-j)*(k+1))))),2^(j/2),
            0)
  }

  # Y_1 * função de detalhe psi (escala jk), para cada t
    normalizado em [0,1]:
Y_1.phijk = function(j,k){t(phi_jk(tw,j,k)*t(Y_1))}

Y_1jk = matrix(0,n*(2^J),T)
for(k in (0:(2^(J)-1))){
  Y_1jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1)),] = Y_1.phijk(J,k)
}

```

```

C = matrix(0,n*length(0:(2^(J)-1)),1)
for(k in (0:(2^(J)-1))) {C[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1)),1] =
  paste("c_",J,k,sep="")};
COEF_CD = C

w = dim(Y_1jk)[1]
}
)
},
{
wave_mat = (GenW(T, filter.number=filtro, family=familia,bc=
  boundary))*sqrt(T) # haar

father = draw(family=familia,filter.number=filtro,resolution=
  T,plot.it=F,enhance=T,scaling.function=T)
Fy = father$y[1:T]
wave_mat[,1] = Fy

Y_1jk = matrix(0,n*2,T)
Y_1jk[(1+(n-1)*(1-1)):(n*1),] = t(wave_mat[,1]*t(Y_1))
Y_1jk[(2+(n-1)*(2-1)):(n*2),] = t(wave_mat[,T]*t(Y_1))

MATRIZJK = matrix(0,T,2)
MATRIZJK[,1] = t(wave_mat[,1])
MATRIZJK[,2] = t(wave_mat[,T])

if(J>=1){
  nivel = 2^(seq(1,J,1))
  for(i in (1:length(nivel))) {
    s = sum(nivel[1:i])
    for(j in (1:nivel[i])) {
      Y_1jk = rbind(Y_1jk,t(wave_mat[,T-s]*t(Y_1)))
      MATRIZJK = cbind(MATRIZJK,wave_mat[,T-s])
      s = s-1
    }
  }
}
w = dim(Y_1jk)[1]
}

```

```

)

#####

# Preparando matrizes para a opção de threshold por níveis:

if(sp==0){
C = matrix(0,n*length(1:2^j0),1)
for(k in (0:(2^(j0)-1))){C[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1)),1] = paste
  ("c_",j0,k,sep="");}
D = matrix('',n*(2^(J+1)-2^j0),1);s = 0;
for(j in (j0:J)){for(k in (0:(2^(j)-1))){D[((s+1)+(n-1)*s):(n*(
  s+1)),1] = paste("d_",j,k,sep="");s = s+1}};
COEF_CD = rbind(C,D)
}

rownames(Y_1jk) = COEF_CD
if(sp==0){colnames(MATRIZJK) = unique(COEF_CD)}

if(!(is.null(exc)) & sp==0){
  Y_1jk_FULL = Y_1jk
  Y_1jk = Y_1jk[-which(rownames(Y_1jk) %in% exc),]
  w = dim(Y_1jk)[1]

  MATRIZJK_FULL = MATRIZJK
  MATRIZJK = MATRIZJK[,-which(colnames(MATRIZJK) %in% exc)]
}

#####

# Estimando via Máxima Verossimilhança: (Bierens/Johansen/
  Lutkepohl):

ifelse(p>1,
{
  SH_XTXT = (1/T)*(XT%*%t(XT) )
  SH_XTDY = (1/T)*(XT%*%t(DY) )
  SH_XTY_1 = (1/T)*(XT%*%t(Y_1))
  SH_XTY_1jk = (1/T)*(XT%*%t(Y_1jk))

```

```

SAjk = (t(SH_XTDY ) %%solve(SH_XTXT)%(SH_XTDY));
SBjk = (t(SH_XTY_1jk)%%solve(SH_XTXT)%(SH_XTY_1jk));
SCjk = (t(SH_XTDY ) %%solve(SH_XTXT)%(SH_XTY_1jk));
SB    = (t(SH_XTY_1) %%solve(SH_XTXT)%(SH_XTY_1));
SC    = (t(SH_XTDY ) %%solve(SH_XTXT)%(SH_XTY_1)); },
{SAjk = SBjk = SCjk = SB = SC = 0}
)

S00 = (1/T)*(DY%%t(DY)) - SAjk
S11 = (1/T)*(Y_1%%t(Y_1)) - SB
S01 = (1/T)*(DY%%t(Y_1)) - SC
S10 = t(S01)

S00jk = (1/T)*(DY%%t(DY)) - SAjk
S11jk = (1/T)*(Y_1jk%%t(Y_1jk)) - SBjk
S01jk = (1/T)*(DY%%t(Y_1jk)) - SCjk
S10jk = t(S01jk)

#####

# Resolvendo problema do autovalor e autovetor do modelo VEC:

# Matriz S11^(-1/2)
S11eig <- eigen(S11)
S11_12 <- S11eig$vectors%%diag(sqrt(1/S11eig$values))%%solve(
  S11eig$vectors)

MATRIZ = S11_12%%S10%%solve(S00)%%S01%%S11_12
eigval = eigen(MATRIZ)$values
eigvec = eigen(MATRIZ)$vectors

#####

# Resolvendo problema do autovalor e autovetor do modelo:

# Matriz S11^(-1/2)
S11eigjk <- eigen(S11jk)
S11_12jk <- S11eigjk$vectors%%diag(sqrt(1/S11eigjk$values))%%
  solve(S11eigjk$vectors)

```

```

MATRIZjk = S11_12jk**S10jk**solve(S00jk)**S01jk**S11_12jk
eigvaljk = eigen(MATRIZjk)$values
eigvecjk = eigen(MATRIZjk)$vectors

# Estimativa de M.V. de W_jk:
W_jk = Re(matrix(t(matrix(eigvecjk[,1:r],w,r))**S11_12jk,w,r))
rownames(W_jk) = rownames(Y_1jk)

#####

# Thresholding: Threshold universal

MT_theta_jk = matrix(0,2^(J+1),1)
for(k in c(0:(2^(J+1)-1))) {
  MT_theta_jk[k,1] = t(W_jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1))])**t(t(
    W_jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1))]))*(var(W_jk[((k+1)+(n-1)*k
      ):(n*(k+1))]))^(-1)
}
rownames(MT_theta_jk) = unique(rownames(W_jk))

lambda_n = 2*log(n)

if((is.null(exc)) & sp==0){
  MT_theta_jk = matrix(0,2^(J+1),1)
  for(k in c(0:(2^(J+1)-1))) {
    MT_theta_jk[k,1] = t(W_jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1))])**t(t(
      (W_jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1))]))*(var(W_jk[((k+1)+(n
        -1)*k):(n*(k+1))]))^(-1)
    )
  }
  rownames(MT_theta_jk) = unique(rownames(W_jk))
  lambda_n = 2*log(n)
} else{
  MT_theta_jk = matrix(0,(2^(J+1)-length(exc)),1)
  for(k in c(0:(2^(J+1)-1-length(exc)))) {
    MT_theta_jk[k,1] = t(W_jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1))])**t(t(
      (W_jk[((k+1)+(n-1)*k):(n*(k+1))]))*(var(W_jk[((k+1)+(n
        -1)*k):(n*(k+1))]))^(-1)
    )
  }
}

```

```

    rownames(MT_theta_jk) = unique(rownames(W_jk))
    lambda_n = 2*log(n)
}

matr = cbind(1:n,W_jk)
colnames(matr) <- c("Y_it","VALOR")

#####

# Estimativa dos parâmetros:

coef_wavelet <- function(x){matrix(W_jk[(x+(n-1)*(x-1)):(n*x)
],n,r)}

ifelse(j0!=0,
{
  ifelse(sp==0,
  {
    beta_hat_jk = matrix(0,n*r,T)
    for(j in (0:(2^j0-1))){
      beta_hat_aux = matrix(0,n*r,T)
      for(i in (1:length(tw))){
        beta_hat_aux[,i] = Re(phi_jk(tw[i],j0,j)*coef_wavelet(j))
      }
      beta_hat_jk = beta_hat_jk + beta_hat_aux
    }

    s = 2^j0;
    for(k in (0:(2^(J)-1))){
      beta_hat_aux = matrix(0,n*r,T)
      for(i in (1:length(tw))){
        beta_hat_aux[,i] = psi_jk(tw[i],j0,k)*coef_wavelet(s)
      }
      beta_hat_jk = beta_hat_jk + beta_hat_aux
      s = s+1
    }
  }
},
{

```

```

beta_hat_jk = matrix(0,n*r,T)
for(j in (0:(2^J-1))){
  beta_hat_aux = matrix(0,n*r,T)
  for(i in (1:length(tw))){
    beta_hat_aux[,i] = Re(phi_jk(tw[i],J,j)*coef_wavelet(j+1)
    )
  }
  beta_hat_jk = beta_hat_jk + beta_hat_aux
}
"Feito!"
}
)
},
{
  beta_hat_jk = beta_hat_DSTEP = matrix(0,n,T*r)

  for (j in (1:dim(MATRIZJK)[2])){
    for(i in (1:T)){
      beta_hat_DSTEP[,i] = Re(MATRIZJK[i,j]*coef_wavelet(j))
    }
    beta_hat_jk = beta_hat_jk + beta_hat_DSTEP
  }
  "Feito!"
}
)

# vetor beta_hat wavelet normalizado:
beta_hatnjk = matrix(0,n,T)
beta_hatnjk[1,] = Re(beta_hat_jk[1,] / beta_hat_jk[1,])
beta_hatnjk[2,] = Re(beta_hat_jk[2,] / beta_hat_jk[1,])

beta_hatnjk_D = beta_hatnjk[, (T/2):((T/2)+1)]

if(J==0){
  c_00_11 = 1; d_00_11 = 0
  c_00_21 = mean(beta_hatnjk[2,])
  d_00_21 = (sum(beta_hatnjk[2,1:(T/2)])-sum(beta_hatnjk[2,((T/2)+1):T]))/T
  Wn_jk = matrix(c(c_00_11,c_00_21,d_00_11,d_00_21),w,r)

```

```

} else if (J==1) {
  c_00_11 = 1; d_00_11 = 0; d_10_11 = 0; d_11_11 = 0;
  c_00_21 = mean(beta_hatnjk[2,])
  d_00_21 = (sum(beta_hatnjk[2,1:(T/2)])-sum(beta_hatnjk[2,((T/2)+1):T]))/T
  d_10_21 = ((2^(3/2))*sum(beta_hatnjk[2,1:(T/4)])-(2^(1/2))*sum(beta_hatnjk[2,1:(T/2)]))/T
  d_11_21 = ((2^(3/2))*sum(beta_hatnjk[2,((T/2)+1):((3*T)/4)])-(2^(1/2))*sum(beta_hatnjk[2,((T/2)+1):T]))/T
  Wn_jk = matrix(c(c_00_11,c_00_21,d_00_11,d_00_21,d_10_11,d_10_21,d_11_11,d_11_21),w,r)
}

# Demais quantidades estimadas:
ifelse(p>1,
{
  alpha_hatjk = S01jk%%W_jk%%solve(t(W_jk)%%S11jk%%W_jk);
  alpha_hatnjk = S01jk%%Wn_jk%%solve(t(Wn_jk)%%S11jk%%Wn_jk);
  pi_hatjk = cbind(alpha_hatjk%%t(beta_hatnjk_D[1,]),
    alpha_hatjk%%t(beta_hatnjk_D[2,]));
  gamma_hatjk = (DY-alpha_hatjk%%t(W_jk)%%Y_1jk)%%t(XT)%%solve(XT%%t(XT));
  gamma_hatnjk = (DY-alpha_hatnjk%%t(Wn_jk)%%Y_1jk)%%t(XT)%%solve(XT%%t(XT));
  sigma_hatjk = (1/T)*(DY-alpha_hatjk%%t(W_jk)%%Y_1jk-gamma_hatjk%%XT)%%t(DY-alpha_hatjk%%t(W_jk)%%Y_1jk-gamma_hatjk%%XT);
  sigma_hatnjk = (1/T)*(DY-alpha_hatnjk%%t(Wn_jk)%%Y_1jk-gamma_hatnjk%%XT)%%t(DY-alpha_hatnjk%%t(Wn_jk)%%Y_1jk-gamma_hatnjk%%XT);
  "Feito!"
},
{
  alpha_hatjk = (DY%%t(Y_1jk)%%W_jk)%%solve(t(W_jk)%%Y_1jk%%t(Y_1jk)%%W_jk);
  alpha_hatnjk = (DY%%t(Y_1jk)%%Wn_jk)%%solve(t(Wn_jk)%%Y_1jk%%t(Y_1jk)%%Wn_jk);
  pi_hatjk = DY%%t(Y_1jk)%%solve(Y_1jk%%t(Y_1jk))
}

```



```

pi_hatnjk = DY%%t(Y_1jk)%%solve(Y_1jk%%t(Y_1jk))
sigma_hatjk = (1/T)*(DY-pi_hatjk%%Y_1jk)%%t(DY-pi_hatjk%%
    Y_1jk)
sigma_hatnjk = (1/T)*(DY-pi_hatnjk%%Y_1jk)%%t(DY-pi_hatnjk
    %%Y_1jk);
"Feito!"
}
)

#####

# Estatística de razão de verossimilhanças:

LR = matrix(0,r,1)
for(i in 1:r){
    LR[i] = Re(log((1-eigval[i])/(1-eigvaljk[i])))
}
LR_TVCjk = T*sum(LR)

#####

# Gráficos com resultados:

par(cex=1.3,mar=c(4.8,4.8,1.5,1.5))
ts.plot(Y1,ylim=c(min(Y1-20,Y2-20),max(Y1,Y2)),col=2,lty=1,lwd
    =2,xlab="tempo (t)",ylab="valor",main = "Séries cointegradas
    simuladas")
lines(Y2,col=1,lty=5,lwd=2)
leg1 = expression(paste(Y[1][t]))
leg2 = expression(paste(Y[2][t]))
leg.txt00 = c(leg1,leg2)
legend("bottom",leg.txt00,bty="n",col=c(2,1),lty=c(1,5),lwd=c
    (2,2),horiz = TRUE,cex=1.0)

# Relações de cointegração (RC) variando com o tempo: Estimadas
    (E) e Teóricas(T)
par(mfrow=c(1,1),cex=1.3,mar=c(4.8,5.2,1.5,1.5))
titulo01 = expression(paste("Valores teóricos e estimados para
    ", beta[2][t]))

```

```

plot.ts(beta_2t,lty=1,lwd=2,xlab="tempo t",ylim=c(-2.3,-0.9),
        ylab=expression(hat(beta)[2][t]),col=1,main=titulo01)
lines(beta_hatnjk[2,],lty=4,col=4,lwd=3)
leg.txt01 = c("TEÓRICO","ESTIMADO")
legend("bottomleft",leg.txt01,bty="n",col=c(1,4),lty=c(1,4),lwd
       =c(2,3),horiz=T,cex=1)

RCT = diag(t(rbind(rep(1,T),beta_2t))%%Y_1)
RCE = diag(t(beta_hatjk)%%Y_1)
RCE2 = diag(t(beta_hatnjk)%%Y_1)

par(mfrow=c(1,1),cex=1.3,lwd=2,mar=c(4.8,4.8,1.5,1.5))
titulo02 = expression(paste("Resíduos de cointegração
        normalizados (", beta[t]^{1},Y[t-1],")"))
ts.plot(RCT,col=1,lty=1,lwd=2,ylim=c(min((RCT-1*var(RCT)),(RCE
        -1*var(RCE))),max(RCT,RCE)),ylab="",xlab="tempo",main=
        titulo02)
lines(RCE2,col=4,lty=4,lwd=3)
leg1 = expression(paste(beta[t]^{1}*Y[t-1]))
leg2 = expression(paste(hat(beta)[t]^{1}*Y[t-1]))
leg.txt00 = c(leg1,leg2)
legend("bottom",leg.txt00,bty="n",col=c(1,4),lty=c(1,4),lwd=c
        (2,3),horiz = TRUE,cex=1)

par(mfrow=c(1,1),cex=1.3,lwd=2,mar=c(4.8,4.8,1.5,1.5))
titulo02 = expression(paste("Resíduos de cointegração não
        normalizados (", beta[t]^{1},Y[t-1],")"))
ts.plot(RCT,col=1,ylim=c(min((RCT-1*var(RCT)),(RCE-1*var(RCE))),
        ,max(RCT,RCE)),lty=1,ylab="",xlab="tempo",main=titulo02)
lines(RCE,col=4,lty=4,lwd=2)
leg1 = expression(paste(Y[1][t-1]-beta[2][t]*Y[2][t-1]))
leg2 = expression(paste(Y[1][t-1]-hat(beta)[2][t-1]*Y[2][t-1]))
leg.txt00 = c(leg1,leg2)
legend("bottomleft",leg.txt00,lty=c(1,4),bty="n",col=c(1,4),
        horiz = TRUE,cex=1)

```

#####

Resíduos de cointegração: Testando a estacionariedade

```
# Augmented Dickey-Fuller Test: alternativa é estacionária
adf.test(RCE)

# Teste Phillips-Perron de raiz unitária. Hipótese alternativa:
# Série estacionária.
pp.test(RCE)

# Teste KPSS: for the null hypothesis that x is level or trend
# stationary
kpss.test(RCE)

#####

# Análise de resíduos do modelo:

# Resíduos normalizados:
ifelse(p>1,
{ut = DY - alpha_hatjk%%diag(t(beta_hatnjk)%%Y_1) -
  gamma_hatjk%%XT;"Done!"},
{ut = DY - alpha_hatjk%%diag(t(beta_hatnjk)%%Y_1);"Done!"}
)

par(mfrow=c(3,2),mar=c(4.8,5.2,1.5,1.5),cex.lab=1.3)
plot.ts(ut[1,],ylab=expression(paste(hat(u)[1][t])),xlab="tempo
")
plot.ts(ut[2,],ylab=expression(paste(hat(u)[2][t])),xlab="tempo
")
qqPlot(ut[1,],lwd=1,distribution="norm",envelope=.95,col=1,col.
  lines=4,grid=FALSE,xlab="Quantis teóricos",ylab=expression(
  paste("Quantis amostrais de ",hat(u)[1][t])))
qqline(ut[1,])
qqPlot(ut[2,],lwd=1,distribution="norm",envelope=.95,col=1,col.
  lines=4,grid=FALSE,xlab="Quantis teóricos",ylab=expression(
  paste("Quantis amostrais de ",hat(u)[2][t])))
qqline(ut[2,])
pacf(ut[1,],ylab=expression(paste("FACP de ",hat(u)[1][t])))
pacf(ut[2,],ylab=expression(paste("FACP de ",hat(u)[2][t])))
```

```
# Teste de normalidade:
shapiro.test(ut[1,])
shapiro.test(ut[2,])

#####

# Parâmetros estimados:
beta_hatnjk[, (T/2) : ((T/2)+1)]
if (J<=1) {Wn_jk} else {W_jk}
alpha_hatjk
pi_hatjk
if (p>1) {print(gamma_hatjk)}
sigma_hatjk
LR_TVCjk

# Máx Log-verossimilhança:
max_LV = -(T/2)*sum(log(1-eigval[1:r]))-(T/2)*log(det(S00jk))
        -((n*T)/2)*log(2*pi) -((n*T)/2)
max_LV

# Coeficientes wavelet estimados:
ifelse(!(is.null(exc)),
      {print(matr);paste('Modelo reduzido! Excluídos os níveis:
        ',list(exc))},
      {print(matr);'Modelo completo!'
      }
)

# Threshold universal:
if (J>0) {
par(mfrow=c(1,1),mar=c(4.8,5.5,1.5,1.5),cex.lab=1.8,lwd=1)
plot(MT_theta_jk,type='p',col=1,ylim=c(0,9),ylab=expression(
  paste(theta[j][k],' para níveis ', ' ',d[j][k])),xlab='
  coeficientes',main="Threshold Universal - contexto
  multivariado") # xaxt = 'n',xlab="coeficientes de ondaletas"
text(MT_theta_jk,unique(colnames(MATRIZJK)),pos=3,cex=0.8)
lines(matrix(lambda_n, 2^(J+1),1),col=4,lty=2)
lines(matrix(0,2^(J+1),1),col=1,lty=6) }
```

```
# Relações de cointegração (RC) variando com o tempo: Estimadas
(E) e Teóricas(T)
par(mfrow=c(1,1),cex=1.3,mar=c(4.8,5.2,1.5,1.5))
titulo01 = expression(paste("Valores teóricos e estimados para
", beta[2][t]))
plot.ts(beta_2t,lty=1,lwd=2,xlab="tempo t",ylim=c(-2.3,-0.9),
        ylab=expression(hat(beta)[2][t]),col=1,main=titulo01)
lines(beta_hatnjk[2,],lty=4,col=4,lwd=3)
leg.txt01 = c("TEÓRICO", "ESTIMADO")
legend("bottomleft",leg.txt01,bty="n",col=c(1,4),lty=c(1,4),lwd
       =c(2,3),horiz=T,cex=1)
```

Referências Bibliográficas

- Baltagi, B. H. (2008). *Econometrics*. Springer Texts in Business and Economics, fourth edition.
- Bierens, H. J. e Martins, L. F. (2010). Time-varying cointegration. *Econometric Theory*, 26:1453–1490.
- Bruce, A. e Gao, H.-Y. (1996). *Applied wavelet analysis with S-plus*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Cheung, Y.-W. e Lai, K. S. (1993). Long-run purchasing power parity during the recent float. *Journal of international Economics*, 34(1-2):181–192.
- Donoho, D. L. (1993). Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation. *Applied and computational harmonic analysis*, 1(1):100–115.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkycharian, G., e Picard, D. (1995). Wavelet shrinkage: asymptopia? *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 301–369.
- Donoho, D. L. e Johnstone, J. M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3):425–455.
- Downie, T. e Silverman, B. (1998). The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(9):2558–2561.

- Engle, R. F. e Granger, C. W. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 251–276.
- Falk, B. e Wang, C.-H. (2003). Testing long-run ppp with infinite-variance returns. *Journal of Applied Econometrics*, 18(4):471–484.
- Granger, C. W. (1986). Developments in the study of cointegrated economic variables. *Oxford Bulletin of economics and statistics*, 48(3):213–228.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press, first edition.
- Hannan, E. J. e Quinn, B. G. (1979). The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 190–195.
- Hayashi, F. (2000). *Econometrics*. Princeton University Press, first edition.
- Hendry, D. F. e Juselius, K. (2000). Explaining cointegration analysis: Part 1. *The Energy Journal*, 21:1–42.
- Hendry, D. F. e Juselius, K. (2001). Explaining cointegration analysis: Part II. *The Energy Journal*, 22:75–120.
- IMF (2016). International financial statistics.
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of economic dynamics and control*, 12(2):231–254.
- Johansen, S. (1995). *Likekihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models - Advanced texts in Econometrics*. Oxford University Press, first edition.
- Lutkepohl, H. (2005). *New Introduction to multiple time series analysis*. Springer, First edition.
- Mallat, S. (1999). *A wavelet tour of signal processing*. Academic press.

- Martins, L. F. (2016). Bootstrap tests for time varying cointegration. *Econometric Reviews*, pages 1–18.
- Martins, L. F. e Gabriel, V. J. (2013). Time-varying cointegration, identification, and cointegration spaces. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 17(2):199–209.
- Martins, L. F. F. d. (2005). Structural changes in nonstationary time series econometrics: time varying cointegration and modeling catastrophic events.
- Morettin, P. A. (2011). *Econometria financeira - Um curso em séries temporais financeiras*. Blucher, segunda edição.
- Morettin, P. A. (2014). *Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas de séries temporais*. EDUSP.
- Nason, G. (2008). *Wavelet methods in statistics with R*. Springer.
- Park, J. Y. e Hahn, S. B. (1999). Cointegrating regressions with time varying coefficients. *Econometric Theory*, 15(05):664–703.
- Patel, J. (1990). Purchasing power parity as a long-run relation. *Journal of Applied Econometrics*, 5(4):367–379.
- Phillips, P. C. e Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2):335–346.
- R-project (2016). R-project. <https://www.r-project.org/about.html>. acesso em 01/05/2016.
- Rogoff, K. (1996). The purchasing power parity puzzle. *Journal of Economic Literature*, pages 647–668.
- Said, S. E. e Dickey, D. A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71(3):599–607.
- Sen, P. K., Singer, J. M., e de Lima, A. C. P. (2010). *From finite sample to asymptotic methods in statistics*. Cambridge University Press.

- Shapiro, S. S. e Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3-4):591–611.
- Shumway, R. H. e Stoffer, D. S. (2011). *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer.
- Strela, V., Heller, P. N., Strang, G., Topiwala, P., e Heil, C. (1999). The application of multiwavelet filterbanks to image processing. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 8(4):548–563.
- Taylor, A. M. e Taylor, M. P. (2004). The purchasing power parity debate. *The Journal of Economic Perspectives*, 18(4):135–158.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons.
- Tsay, R. S. (2013). *Multivariate time series analysis: with R and financial applications*. John Wiley & Sons.
- Tso, M.-S. (1981). Reduced-rank regression and canonical analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 183–189.
- Zivot, E. e Wang, J. (2006). *Modeling financial time series with S-PLUS®*, volume 191. Springer.