**Transição de fase para
um modelo de percolação de discos
em grafos**

Pablo Martín Rodríguez

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. Élcio Lebensztayn**

São Paulo, 15 de fevereiro de 2007.

O autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo N. 133147/2005-3).

**Transição de fase para
um modelo de percolação de discos
em grafos**

Este exemplar corresponde à
dissertação defendida por Pablo Martín Rodríguez
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 15 de fevereiro de 2007.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Élcio Lebensztayn (IME-USP)

Prof. Dr. Fabio Prates Machado (IME-USP)

Prof. Dr. Rafael A. Rosales Mitrowsky (FFCLRP-USP)

*A minha família,
e Paula.*

Agradecimentos

Ao grupo de probabilidade do IME-USP por ter-me concedido ótimas condições para minha iniciação na pesquisa, em especial a Fabio Prates Machado por sugerir-me o estudo deste problema e a Élcio Lebensztayn pela sua orientação para resolvê-lo com êxito.

A todos os colegas e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Associamos independentemente a cada vértice v de um grafo infinito $\mathcal{G}$ um raio de infecção aleatório R_v e definimos um modelo de percolação sujeito às seguintes regras: (1) no tempo zero só a raiz (um vértice fixado do grafo) é declarada infectada, (2) um vértice é declarado infectado no instante t , $t \geq 1$, se está a uma distância no máximo R_v de algum vértice v previamente infectado, e (3) vértices infectados permanecem infectados para sempre. Dizemos que há *sobrevivência* em uma realização particular do modelo se o número final de vértices infectados é infinito.

Neste trabalho damos condições suficientes sobre o grafo $\mathcal{G}$ para a transição de fase deste modelo, estabelecendo limitantes não triviais para o parâmetro crítico quando os raios R_v têm distribuição geométrica de parâmetro $1 - p$. Além disto, restringindo nosso estudo para o caso das árvores esfericamente simétricas, obtemos um melhor limitante superior para este parâmetro. Finalmente, concluímos que o parâmetro crítico para o modelo nas árvores homogêneas de grau $d + 1$ se comporta assintoticamente como $1/(2d)$.

Palavras-chave: modelo epidêmico, parâmetro crítico, transição de fase, percolação.

Abstract

We assign independently to each vertex v of an infinite graph $\mathcal{G}$, a random radius of infection R_v and define a percolation model subject to the following rules: (1) at time zero, only the root (a fixed vertex of the graph) is declared infected, (2) a vertex is declared infected at time t , $t \geq 1$, if it is at distance at most R_v of some vertex v previously infected, and (3) infected vertices stay infected forever. We say that there is survival in a particular realization of the model if the final number of infected vertices is infinite.

In this work, we give sufficient conditions on the graph $\mathcal{G}$ for the phase transition of this model, by stating non-trivial bounds for the critical parameter when the radii have geometric distribution with parameter $1 - p$. In addition, restricting our study to the case of the spherically symmetric trees, we obtain an improved upper bound for this critical parameter. Finally, we conclude that the critical parameter for the model on homogeneous trees of degree $(d + 1)$ behaves asymptotically as $1/(2d)$.

Key words: epidemic model, critical parameter, phase transition, percolation.

Sumário

Introdução	1
1 O modelo	3
1.1 Descrição do modelo	3
1.2 Transição de fase	6
1.3 Prova do Teorema 1.1	7
1.4 $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$ como um modelo de percolação orientada	9
1.5 Outros exemplos	9
2 Árvores esfericamente simétricas	12
2.1 Definições e resultados principais	12
2.2 Prova do Teorema 2.1	15
2.2.1 Comparação com processos de Galton-Watson em meios variáveis	16
2.2.2 Sobrevivência dos processos	18
Apêndice	20
Percolação independente de sítios	20
Processos de Galton-Watson em meios variáveis	21
Referências Bibliográficas	23

Introdução

A difusão de uma infecção ou informação em grafos tem sido estudada extensivamente por muitos probabilistas. Destacamos alguns tipos de difusão: no primeiro todos os indivíduos são susceptíveis e existe uma probabilidade p de que um indivíduo infectado transmita a infecção para um vizinho; no segundo só uma fração p de indivíduos são susceptíveis mas se um indivíduo é infectado todos os seus vizinhos susceptíveis ficarão infectados e finalmente, no terceiro, todos os indivíduos são susceptíveis e existe uma certa probabilidade de que um indivíduo infectado transmita a infecção para todos os indivíduos em uma vizinhança aleatória dele.

Exemplos deste último caso são os modelos de sistemas de passeios aleatórios estudados recentemente por Alves *et al.* em [1], Popov em [9] e Lebensztayn *et al.* em [4, 5, 6] como forma de modelar a difusão de uma informação em grafos infinitos. Nesses trabalhos, cada indivíduo portador de uma informação começa um passeio aleatório e transmite a informação a todos os indivíduos que estejam em sítios visitados durante o passeio. Em geral para esses modelos, cada indivíduo dá um número de passos aleatório com distribuição geométrica de parâmetro $1-p$ e morre. Então, neste caso a vizinhança de um indivíduo são os vértices visitados por esse passeio aleatório.

Em termos de percolação, o primeiro modelo é percolação por elos, onde elos são abertos com probabilidade p e fechados com probabilidade $1-p$. O segundo é percolação de sítios, onde a aleatoriedade é aplicada a sítios em vez de elos. Para o terceiro existem muitas abordagens em termos de percolação que dependem das regras de difusão e das vizinhanças consideradas. Em [4] e [6] por exemplo, os autores descrevem os modelos como modelos de percolação orientada.

O propósito deste trabalho é estudar um modelo de difusão do terceiro tipo para o qual as vizinhanças são discos de raio aleatório. Para isto, associamos independentemente a cada vértice v de um grafo infinito $\mathcal{G}$ um raio de infecção aleatório R_v e definimos um modelo de percolação sujeito às seguintes regras: (1) no tempo zero só a raiz (um vértice fixado do grafo) é declarada infectada, (2) um vértice é declarado infectado no instante t , $t \geq 1$, se está a uma distância no máximo R_v de algum vértice v previamente infectado, e (3) vértices infectados permanecem infectados para sempre. Dizemos que há *sobrevivência* em uma realização particular do modelo se o número final de vértices infectados é infinito.

Utilizamos o termo *infectado* para ter sempre presente a semelhança do modelo definido com um modelo de difusão de uma infecção. De fato, com esta interpretação, podemos pensar cada vértice do grafo como um indivíduo que, no caso de ser infectado, começa a emitir germes infectando a todos aqueles indivíduos que se encontram em uma vizinhança finita e aleatória dele.

Estudaremos o comportamento deste modelo com relação à sobrevivência quando os raios R_v têm distribuição geométrica de parâmetro $1 - p$ e para isto, dividimos a dissertação em duas partes. Na primeira, desenvolvida no Capítulo 1, damos condições suficientes sobre o grafo para garantir transição de fase e apresentamos exemplos de grafos para os quais o modelo não apresenta tal transição.

Na segunda parte, Capítulo 2, restringimos nosso estudo ao caso das árvores esfericamente simétricas e estabelecemos um limitante superior para a probabilidade crítica para o modelo nesses grafos. Para isto, utilizamos uma abordagem análoga à utilizada em Lebensztayn *et al.* [4, 6] para obter um limitante superior para a probabilidade crítica no modelo dos sapos em árvores homogêneas, [6], e para uma variante deste modelo com sistemas de passeios aleatórios *self-avoiding*, [4]. Finalmente, estabelecemos nesse capítulo o valor assintótico (em dimensões grandes) da probabilidade crítica quando o modelo é definido nas árvores homogêneas.

Capítulo 1

O modelo

1.1 Descrição do modelo

Com o propósito de fixar notação e terminologia começamos com alguns conceitos da teoria de grafos. Neste trabalho, um grafo é um par $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto de vértices e $\mathcal{E} \subset \{\{u, v\} : u, v \in \mathcal{V} \text{ e } u \neq v\}$ é o conjunto de elos de $\mathcal{G}$. Os grafos considerados não possuem elos dirigidos, não apresentam loops, nem elos múltiplos.

Dizemos que o grafo $\mathcal{G}$ é infinito se os conjuntos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{E}$ são infinitos enumeráveis. Se $\{u, v\} \in \mathcal{E}$ dizemos que u e v são vizinhos, e escrevemos $u \sim v$. Chamamos o grau de um vértice v , e denotamos $d(v)$, ao número de seus vizinhos. Se este é finito para cada vértice, dizemos que o grafo é localmente finito e se é uniformemente limitado para todo vértice dizemos que o grafo é de grau limitado. No último caso, definindo $\Delta = \sup\{d(v) : v \in \mathcal{V}\} < \infty$, dizemos que $\mathcal{G}$ é de grau máximo Δ .

Um caminho γ em um grafo é uma seqüência de vértices distintos onde cada par sucessivo deles é um elo no grafo. Chamamos comprimento do caminho γ , e denotamos $|\gamma|$, ao número destes elos. Dizemos que um grafo é conectado se entre qualquer par de vértices u, v existe pelo menos um caminho $u = u_0, u_1, \dots, u_n = v$ para algum $n \geq 1$. Definimos a distância entre dois vértices u e v como

$$\text{dist}(u, v) := \min\{|\gamma| : \gamma \text{ é um caminho entre } u \text{ e } v\}.$$

Construiremos o modelo em um grafo infinito $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, conectado e localmente finito. Denominamos a raiz do grafo $\mathcal{G}$, e denotamos $\mathbf{0}$, a algum vértice inicialmente fixado. Para cada $v \in \mathcal{V}$ denotamos $|v| := \text{dist}(\mathbf{0}, v)$. Para $d \geq 1$, denotamos por $\mathbb{Z}^d$ a rede hipercúbica d -dimensional e por $\mathbb{T}_d$ a árvore homogênea de grau $d + 1$. Denotamos a uma árvore qualquer (não necessariamente homogênea) por T .

Para definir formalmente o modelo em $\mathcal{G}$ denotamos por $\mathbf{P}$ e $\mathbf{E}$ a medida de probabilidade e a esperança associada e consideramos uma família $\mathcal{R} := \{R_v, v \in \mathcal{V}\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição comum dada por

$$\mathbf{P}(R_v = k) = (1 - p)p^k,$$

para $k = 0, 1, \dots$, onde $p \in [0, 1]$ é um parâmetro fixado.

Para cada realização de $\mathcal{R}$, consideramos a seqüência não-decrescente de conjuntos aleatórios $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ definidos indutivamente por

$$I_0 = \{\mathbf{0}\},$$

$$I_1 = \mathcal{B}_{\mathbf{0}},$$

e, para todo $i \geq 1$,

$$I_{i+1} = \bigcup_{v \in I_i} \mathcal{B}_v,$$

onde, para cada $v \in \mathcal{V}$, $\mathcal{B}_v = \{u \in \mathcal{V} : \text{dist}(v, u) \leq R_v\}$. Seja $\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$.

Deste modo, e voltando à interpretação de um modelo epidêmico, temos definido o raio de infecção do indivíduo v (R_v), o conjunto de indivíduos infectados no tempo i (I_i) e o conjunto total de indivíduos infectados da realização ($\mathcal{C}$). No tempo zero, o único infectado é $\mathbf{0}$, o qual infecta no instante seguinte todos os indivíduos que estão no máximo à distância $R_{\mathbf{0}}$ de $\mathbf{0}$. De maneira análoga, quando $v \neq \mathbf{0}$ é infectado, ele infecta no instante seguinte todos os indivíduos que estão no máximo à distância R_v de v . Os conjuntos I_i fornecem o crescimento no tempo do modelo, em termos do número de infectados. Denotamos o modelo definido em $\mathcal{G}$ e com parâmetro p como $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$ e o denominamos *modelo de percolação de discos* em $\mathcal{G}$.

Figura 1.1: Os primeiros passos de uma realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$. (a) em $t = 0$ só a raiz está infectada. (b) $t = 1$, vértices à distância no máximo 2 da raiz são infectados. (c) e (d) desenvolvimento do modelo nos tempos $t = 2$ e $t = 3$, resp.

Estamos interessados em estudar a criticalidade do modelo e para formalizar isto introduzimos a noção de *sobrevivência*.

Definição 1.1. Dizemos que uma realização particular do modelo sobrevive se $|\mathcal{C}| = \infty$. Caso contrário, dizemos que a realização se extingue.

1.2 Transição de fase

Mostraremos que o modelo apresenta um comportamento crítico com relação à sobrevivência. Para isto, consideramos a quantidade,

$$\theta(\mathcal{G}, p) := \mathbf{P}(\mathcal{M}(\mathcal{G}, p) \text{ sobrevive}),$$

e discutimos sua monotonicidade em p .

Lema 1.1. $\theta(\mathcal{G}, p)$ é não decrescente em p .

Demonstração. Consideramos uma família $\{U_v : v \in \mathcal{V}\}$ de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme no intervalo aberto $(0, 1)$. Para cada $v \in \mathcal{V}$ e $p \in [0, 1]$ definimos a variável aleatória R_p^v por

$$R_p^v = \left\lfloor \frac{\log U_v}{\log p} \right\rfloor,$$

onde $\lfloor a \rfloor$ denota a parte inteira de a e fazemos as identificações

$$\left\lfloor \frac{\log U_v}{\log 0} \right\rfloor := 0 \quad \text{e} \quad \left\lfloor \frac{\log U_v}{\log 1} \right\rfloor := \infty.$$

Evidentemente R_p^v é não-decrescente em p . Além disso, R_p^v tem distribuição geométrica de parâmetro $1 - p$ pois, para $p \in (0, 1)$,

$$\mathbf{P}(R_p^v = k) = \mathbf{P}(k \leq \log_p U_v < k + 1) = \mathbf{P}(p^{k+1} < U_v \leq p^k) = p^k(1 - p),$$

$k = 0, 1, \dots$. Então, se $p_1 < p_2$ temos que $R_{p_1}^v \leq R_{p_2}^v$ para todo $v \in \mathcal{V}$ e portanto $\theta(\mathcal{G}, p_1) \leq \theta(\mathcal{G}, p_2)$. $\square$

Como consequência do lema, podemos definir a *probabilidade crítica* do modelo $p_c(\mathcal{G}) := \inf\{p : \theta(\mathcal{G}, p) > 0\}$, de maneira que

$$\theta(\mathcal{G}, p) = 0, \text{ se } p < p_c(\mathcal{G}),$$

$$\theta(\mathcal{G}, p) > 0, \text{ se } p > p_c(\mathcal{G}).$$

Na próxima seção, provaremos o resultado principal deste capítulo, o qual estabelece a existência de *transição de fase* no modelo $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$ (i.e., $0 < p_c(\mathcal{G}) < 1$) quando $\mathcal{G}$ é um grafo de grau limitado e tal que a probabilidade crítica do modelo de percolação independente de sítios em $\mathcal{G}$, $p_c^{\text{sítios}}(\mathcal{G})$, é menor do que 1.

Mais precisamente provaremos o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Se $\mathcal{G}$ é um grafo de grau limitado e $p_c^{\text{sítios}}(\mathcal{G}) < 1$ então, $0 < p_c(\mathcal{G}) < 1$.*

Em particular, concluimos que o modelo de percolação de discos exibe transição de fase em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, e nas árvores de grau limitado e constante de ramificação maior do que 1, por exemplo em $\mathbb{T}_d$, $d \geq 2$.

1.3 Prova do Teorema 1.1

Para provar o Teorema 1.1, estabelecemos limitantes não triviais para a probabilidade crítica. Começamos provando o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Se $\mathcal{G}$ é um grafo de grau máximo $\Delta (< \infty)$ então*

$$p_c(\mathcal{G}) \geq -1 + \left(1 + \frac{1}{\Delta - 1}\right)^{1/2}.$$

Demonstração. Vamos construir um processo de ramificação de Galton-Watson que domina nosso modelo, no sentido de que não há sobrevivência se este processo de ramificação morre.

Para isto, definimos para qualquer vértice fixo $v \neq \mathbf{0}$, a variável aleatória

$$\begin{aligned} X_v &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i \Delta(\Delta - 1)^{j-1} \right) \mathcal{I}_{\{R_v=i\}} - \mathcal{I}_{\{R_v \geq 1\}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \Delta(\Delta - 1)^{i-1} \mathcal{I}_{\{R_v \geq i\}} - \mathcal{I}_{\{R_v \geq 1\}}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I}_A$ denota a função indicadora do evento A .

Ora, consideramos o processo de ramificação de Galton-Watson que começa com um número de indivíduos distribuído como $|\mathcal{B}_0|$ e para o qual o tamanho da família de

cada descendente é distribuído como X_v . Assim definido, a extinção deste processo de ramificação implica a não sobrevivência do modelo.

Notemos que $\mathbf{P}(|\mathcal{B}_0| < \infty) = 1$ para todo $p < 1/(\Delta - 1)$, pois neste caso

$$\mathbf{E}(|\mathcal{B}_0|) \leq 1 + \frac{\Delta}{\Delta - 1} \sum_{j=1}^{\infty} ((\Delta - 1)p)^j < \infty.$$

Logo, se $p < 1/(\Delta - 1)$ e

$$\mathbf{E}(X_v) = \frac{p\Delta}{1 - p(\Delta - 1)} - p < 1,$$

então $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$ se extingue com probabilidade 1. Mas $\mathbf{E}(X_v) < 1$ se, e somente se, $(\Delta - 1)p^2 + 2(\Delta - 1)p - 1 < 0$. Isto é, se

$$p < -1 + \left(1 + \frac{1}{\Delta - 1}\right)^{1/2}.$$

Notemos que o valor obtido na desigualdade precedente é menor do que $1/(\Delta - 1)$.

□

Por uma simples comparação com o modelo de percolação independente de sítios, estabelecemos um limitante superior para $p_c(\mathcal{G})$. No Apêndice damos mais detalhes sobre esse modelo de percolação.

Proposição 1.2. *Para qualquer grafo $\mathcal{G}$, vale que $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c^{\text{sítios}}(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Notemos que podemos construir um modelo de percolação independente de sítios em $\mathcal{G}$ a partir do modelo $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$, considerando a família de variáveis aleatórias $\mathcal{S} := \{S_v : v \in \mathcal{V}\}$, onde $S_v = \mathcal{I}_{\{R_v \geq 1\}}$, e declarando cada sítio v aberto se, e somente se, $S_v = 1$. Deste modo,

$$\mathbf{P}(\text{ocorre percolação de sítios}) \leq \mathbf{P}(\mathcal{M}(\mathcal{G}, p) \text{ sobrevive})$$

e portanto $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c^{\text{sítios}}(\mathcal{G})$.

□

1.4 $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$ como um modelo de percolação orientada

Antes de continuar, é importante observar que podemos pensar o modelo definido como um modelo de percolação orientada. Para isto, definimos para um par de vértices u, v de $\mathcal{G}$ o evento “ u está diretamente conectado com v ”, que denotamos $\{u \rightarrow v\}$, da seguinte maneira.

Definição 1.2. Para $u, v \in \mathcal{V}$, $u \neq v$, definimos

$$\{u \rightarrow v\} = \{v \in \mathcal{B}_u\} \text{ e } \{u \nrightarrow v\} = \{v \notin \mathcal{B}_u\}$$

Notemos que para todo par de vértices $u, v \in \mathcal{V}$ distintos,

$$\mathbf{P}(u \rightarrow v) = \mathbf{P}(R_u \geq \text{dist}(u, v)) = p^{\text{dist}(u, v)}.$$

Seja $\vec{\mathcal{G}}$ o grafo orientado com conjunto de vértices $\mathcal{V}$ e com conjunto de elos $\vec{\mathcal{E}} = \{(u, v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : u \neq v\}$. O modelo $\mathcal{M}(\mathcal{G}, p)$ pode ser visto como um modelo de percolação orientada, dependente e de longo alcance em $\vec{\mathcal{G}}$, onde declaramos aberto ao elo $(u, v) \in \vec{\mathcal{E}}$ se, e somente se, $\{u \rightarrow v\}$. Neste contexto, dizemos que uma realização do modelo exhibe percolação se existe uma seqüência infinita de vértices distintos $\mathbf{0} = v_0, v_1, \dots$, tal que $v_j \rightarrow v_{j+1}$ para todo $j \geq 0$. Finalmente, a existência de percolação e a sobrevivência do modelo são equivalentes.

Esta interpretação do modelo será de utilidade na próxima seção (Proposição 1.3) e no Capítulo 2.

1.5 Outros exemplos

Após fornecer condições suficientes para garantir a transição de fase, estamos interessados em pesquisar o que acontece quando estas não estão presentes. Para isto estudamos, por meio de exemplos, o comportamento do modelo em grafos para os quais as hipóteses do Teorema 1.1 não se satisfazem.

Primeiro, consideramos o modelo em um grafo de grau não limitado.

Exemplo 1.1. A árvore fatorial $T_!$.

Na árvore fatorial $T_!$ (Figura 1.2) a raiz tem grau 2 e, para cada $n \geq 1$, existem $(n+1)!$ vértices à distância n da raiz, cada um com grau $n+3$. Neste caso $p_c(T_!) = 0$.

Com efeito, notemos que para todo $d > 1$ podemos encarar a árvore homogênea $\mathbb{T}_d$ contida em $T_!$ e portanto, da monotonicidade no grafo da probabilidade crítica do modelo de percolação de sítios e do Teorema 1 do Apêndice, temos que

$$p_c^{\text{sítios}}(T_!) \leq p_c^{\text{sítios}}(\mathbb{T}_d) = \frac{1}{d}. \quad (1.1)$$

O resultado esperado segue-se da Proposição 1.2 e da relação (1.1), tomando limite quando $d \rightarrow \infty$. ■

Figura 1.2: A árvore fatorial $T_!$.

Outro caso de interesse é o modelo $\mathcal{M}(\mathbb{Z}, p)$. Sabemos que $p_c^{\text{sítios}}(\mathbb{Z}) = 1$ e portanto não podemos aplicar o Teorema 1.1. Provaremos que $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ e para isto utilizamos o seguinte Lema.

Lema 1.2. Se $\{a_n\}$ é uma seqüência de números reais em $(0, 1)$ então,

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n) = 0 \text{ se, e somente se, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty.$$

Na prova da seguinte Proposição, seguimos de fato, o mesmo argumento utilizado em Lebensztayn *et al.* [5] para estudar o comportamento de sistemas de passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.3. $p_c(\mathbb{Z}) = 1$.

Demonstração. Notemos que os vértices de $\mathbb{Z}$ são os números inteiros. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos o evento $V_n = \{\text{o vértice } n \text{ é infectado}\}$. Como $\theta(\mathbb{Z}, p) \leq 2\mathbf{P}(V_n)$, basta provar que para cada $p < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(V_n) = 0. \quad (1.2)$$

Para isto, consideramos os eventos

$$A_n = \bigcup_{i=-\infty}^{n-1} \{i \rightarrow 2n\} \quad , \quad B_n = \bigcup_{i=n}^{2n-1} \{i \rightarrow 2n\},$$

e notamos que

$$\mathbf{P}(V_{2n}) \leq \mathbf{P}(V_n \cap (A_n \cup B_n)) \leq \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(V_n)\mathbf{P}(B_n).$$

Além disto, fixado $p < 1$, temos que

$$\mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{i=-\infty}^{n-1} p^{2n-i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} p^i \leq cp^n,$$

onde $c = (1 - p)^{-1}$. Por outro lado, como $\mathbf{P}(B_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p^i)$, obtemos do Lema 1.2 que existe um $\delta_0 \in (0, 1)$ tal que $\mathbf{P}(B_n) \leq \delta_0$ para todo n . Deste modo, se $\delta := \max\{p, \delta_0\}$ temos que

$$\mathbf{P}(V_{2n}) \leq c\delta^n + \delta\mathbf{P}(V_n).$$

Em particular, para qualquer $m \geq 1$ resulta ser

$$\mathbf{P}(V_{2^m}) \leq c\delta^{2^{m-1}} + \delta\mathbf{P}(V_{2^{m-1}}),$$

de onde concluímos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(V_{2^m}) = 0$. Daí, segue que vale (1.2) para todo $p < 1$. Com efeito, é só notar que para todo $n \geq 1$ existe um $m(n) \geq 1$ tal que $V_{2^{m(n)+1}} \subset V_n \subset V_{2^{m(n)}}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = \infty$. $\square$

Capítulo 2

Árvores esfericamente simétricas

2.1 Definições e resultados principais

Neste capítulo consideramos o modelo definido nas árvores. Isto é, $\mathcal{G} = T$ é um grafo infinito, conectado, localmente finito e desprovido de circuitos, com um vértice fixado que chamamos raiz e denotamos $\mathbf{0}$.

Notemos que o fato da árvore não ter circuitos implica que para qualquer par de vértices existe um único caminho. Dados dois vértices u e v escrevemos $u \leq v$ se u é um dos vértices do caminho entre $\mathbf{0}$ e v , e $u < v$ se $u \leq v$ e $u \neq v$. Dizemos que v é um *sucessor* de u se $u \leq v$ e $u \sim v$. Dizemos que v é um *descendente* de u se $u \leq v$. Assim, o conjunto de descendentes de u é definido como $T^u := \{v \in \mathcal{V} : u \leq v\}$. Por outro lado definimos, para todo $n \geq 1$, o conjunto $T_n^u := \{v \in T^u; |v| \leq |u| + n\}$ e denotamos

$$M_n(u) := |\partial T_n^u| = |\{v \in T^u; |v| = |u| + n\}|.$$

No que segue definimos uma constante que está intimamente ligada com a dimensão de Hausdorff da fronteira da árvore T .

Definição 2.1. Para uma árvore T , definimos

$$\dim \inf \partial T := \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{n} \log M_n(v). \quad (2.1)$$

É importante salientar que o limite (2.1) sempre existe.

Lema 2.1. *O limite $\dim \inf \partial T$ existe para toda árvore T .*

Demonstração. Para qualquer $v \in \mathcal{V}$ e para todo $m, n \geq 1$ temos

$$M_{m+n}(v) \geq M_m(v) \left(\min_{u \in \partial T_m^v} M_n(u) \right) \geq M_m(v) \left(\min_{u \in \mathcal{V}} M_n(u) \right),$$

e portanto

$$\min_{v \in \mathcal{V}} M_{m+n}(v) \geq \left(\min_{v \in \mathcal{V}} M_m(v) \right) \left(\min_{v \in \mathcal{V}} M_n(v) \right).$$

Assim, $\log \left(\min_{v \in \mathcal{V}} M_n(v) \right)$ é superaditiva e portanto, pelo Lema de Fekete, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\min_{v \in \mathcal{V}} M_n(v) \right) = \sup_n \frac{1}{n} \log \left(\min_{v \in \mathcal{V}} M_n(v) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{n} \log M_n(v).$$

□

Observação 2.1. O leitor pode encontrar mais detalhes sobre $\dim \inf \partial T$ na Seção 13.5 de [8], onde Lyons e Peres apresentam esta e outras constantes baseando-se em idéias não publicadas de Furstenberg. Em particular, para uma árvore de grau limitado $T = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, os autores provam que

$$\dim \inf \partial T = \inf \{ \dim \partial T^* : T^* \in \mathcal{D}(T) \},$$

onde $\dim \partial T^*$ denota a dimensão de Hausdorff da fronteira da árvore T^* e $\mathcal{D}(T)$ denota o fecho do conjunto das árvores descendentes de T , $\{T^v : v \in \mathcal{V}\}$. ■

No que segue, concentramos nossa atenção nas árvores esfericamente simétricas. Uma *árvore esfericamente simétrica* (a.e.s.) é uma árvore obtida a partir de uma seqüência de inteiros positivos $n_1, n_2, \dots$ como segue. Começamos com a raiz $\mathbf{0}$ que tem n_1 sucessores. Então cada um destes n_1 sucessores tem n_2 sucessores e assim por diante. Em outras palavras, dizemos que uma árvore é esfericamente simétrica se vértices à mesma distância da raiz têm o mesmo grau. Um caso particular é a árvore homogênea $\mathbb{T}_d$, para a qual $n_1 = d + 1$ e $n_k = d$ para todo $k \geq 2$.

Figura 2.1: Uma a.e.s. com $n_k = 2$ para k ímpar e $n_k = 3$ caso contrário.

Exemplo 2.1. $\dim \inf \partial T$ em árvores esfericamente simétricas:

1. $\dim \inf \partial \mathbb{T}_d = \log d$. Basta notar que $M_n(\mathbf{0}) = (d+1)d^{n-1}$ e $M_n(v) = d^n$ para todo $v \neq \mathbf{0}$.
2. $\dim \inf \partial T_{\downarrow} = \infty$. Neste caso, notemos que $\min_{v \in \mathcal{V}} M_n(v) = M_n(\mathbf{0}) = (n+1)!$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)!]^{1/n} = \infty$.
3. Se T é uma árvore tal que vértices à distância par de $\mathbf{0}$ têm a sucessores enquanto os restantes têm b sucessores (Figura 2.1), então $\dim \inf \partial T = \log \sqrt{ab}$.

■

Estamos em condições de apresentar o principal resultado deste Capítulo, no qual estabelecemos um limitante superior para $p_c(T)$, quando T é esfericamente simétrica.

Teorema 2.1. *Se T é uma árvore esfericamente simétrica então,*

$$p_c(T) \leq 1 - \left(1 - e^{-\dim \inf \partial T}\right)^{1/2}.$$

Estabelecer o valor exato de uma probabilidade crítica para um modelo de percolação qualquer não é uma tarefa fácil. Já no modelo de percolação independente de elos encontrar o valor crítico em $\mathbb{Z}^2$ requer uma teoria especial que não pode ser

adaptada para dimensões maiores. Uma abordagem comum para o estudo deste valor quando não é possível estabelecê-lo diretamente é encontrar seu valor assintótico para dimensões grandes.

Considerando o modelo nas árvores homogêneas obtemos, em virtude da Proposição 1.1 e do Teorema 2.1, o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Para todo $d \geq 2$,*

$$-1 + \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{1/2} \leq p_c(\mathbb{T}_d) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{1/2}.$$

Como consequência do Teorema 2.2 podemos estabelecer o valor assintótico de $p_c(\mathbb{T}_d)$. Para isto, notemos que para α complexo se satisfaz

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \alpha z + O(z^2),$$

quando $z \rightarrow 0$. Deste modo, considerando $z = \pm 1/d$ na igualdade acima, concluímos que tanto o limitante inferior quanto o limitante superior de $p_c(\mathbb{T}_d)$ são iguais a $1/(2d) + O(1/d^2)$ e portanto a probabilidade crítica para o modelo $\mathcal{M}(\mathbb{T}_d, p)$ é assintoticamente igual a $1/(2d)$ para dimensões grandes. Isto é,

Corolário 2.1. $p_c(\mathbb{T}_d) - 1/(2d) = O(1/d^2)$.

2.2 Prova do Teorema 2.1

Para demonstrar o Teorema 2.1, conforme já comentamos, utilizamos uma abordagem semelhante à utilizada em Lebensztayn *et al.* [4, 6] para construir processos de ramificação que sejam dominados pelo modelo. Para isto, separamos a prova em duas partes.

Primeiro, na Subseção 2.2.1, definimos para cada $n \geq 1$ um processo de Galton-Watson em um meio variável que é dominado pelo modelo $\mathcal{M}(T, p)$ no sentido de que o modelo sobrevive se esse processo sobrevive. O leitor pode encontrar uma breve descrição dos processos de Galton-Watson em meios variáveis no Apêndice.

Na Subseção 2.2.2 estudamos o comportamento supercrítico dos processos construídos combinando um resultado de Biggins e D'Souza [2] com os conceitos da teoria de probabilidade em árvores já apresentados e extraídos de Lyons e Peres [8].

2.2.1 Comparação com processos de Galton-Watson em meios variáveis

Seja $T = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ uma árvore esfericamente simétrica. Para $u \in \mathcal{V}$ e $v \in \partial T_n^u$, consideramos $u = u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = v$ o caminho entre u e v . Denotamos por $\{u \xrightarrow{c} v\}$ o evento que $\{u \rightarrow v\}$ ou existem $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1$ tais que

$$\{u \rightarrow u_{i_1}\} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{u_{i_j} \rightarrow u_{i_{j+1}}\} \right) \cap \{u_{i_k} \rightarrow v\}.$$

Denotamos o complementar deste evento por $\{u \not\xrightarrow{c} v\}$.

Para construir o processo fixamos um inteiro $n \geq 1$, definimos $\mathcal{Z}_0^n = \{\mathbf{0}\}$ e para $j = 1, 2, \dots$ definimos

$$\mathcal{Z}_j^n = \bigcup_{u \in \mathcal{Z}_{j-1}^n} \{v \in \partial T_n^u : u \xrightarrow{c} v\}.$$

Para todo $j = 0, 1, \dots$ consideramos as variáveis aleatórias $Z_j^n = |\mathcal{Z}_j^n|$.

Proposição 2.1. *Para todo $n \geq 1$ fixo, $(Z_j^n)_{j \geq 1}$ é um processo de Galton-Watson em um meio variável cuja sobrevivência implica a sobrevivência do modelo $\mathcal{M}(T, p)$. Além disso, para $j \geq 0$, o número médio de descendentes de um indivíduo da j -ésima geração é*

$$\mu_j := \mu_j^n \geq M_n(v)G_n(p), \quad (2.2)$$

onde $|v| = jn$, e

$$G_n(p) = p^n (2 - p)^{n-1}. \quad (2.3)$$

A primeira parte da Proposição 2.1 é consequência da construção do processo. Por outro lado, a desigualdade (2.2) segue-se dos seguintes dois Lemas.

Lema 2.2. Temos que $\mathbf{P}(v_0 \xrightarrow{c} v_n) = F_n(p)$, onde F_n é indutivamente dada por

$$F_n(p) = p^n \prod_{k=1}^{n-1} [1 - p^k] + \sum_{j=1}^{n-1} p^{n-j} F_j(p) \prod_{k=1}^{n-j-1} [1 - p^k]$$

Demonstração. O caso $n = 1$ é trivial, pois $\mathbf{P}(v_0 \xrightarrow{c} v_1) = \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_1) = p = F_1(p)$. Seja $n \geq 2$ e para cada $1 \leq j \leq n-1$ denotemos por $\{v_0 \dashv v_j\}$ ao evento $\{v_0 \rightarrow v_j, v_0 \not\xrightarrow{c} v_{j+1}\}$. Notemos que

$$\mathbf{P}(v_0 \xrightarrow{c} v_n) = \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}(v_0 \dashv v_j) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^j \{v_k \xrightarrow{c} v_n\}\right),$$

onde $\mathbf{P}(v_0 \dashv v_j) = \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_j) - \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_{j+1})$.

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(v_0 \xrightarrow{c} v_n) &= \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_n) \mathbf{P}(v_1 \not\xrightarrow{c} v_n, \dots, v_{n-1} \not\xrightarrow{c} v_n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_{n-j}) \mathbf{P}(v_1 \not\xrightarrow{c} v_n, \dots, v_{n-j-1} \not\xrightarrow{c} v_n, v_{n-j} \xrightarrow{c} v_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_1) \mathbf{P}(v_1 \xrightarrow{c} v_n) \\ &= \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_n) \mathbf{P}(v_1 \not\xrightarrow{c} v_n, \dots, v_{n-1} \not\xrightarrow{c} v_n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_{n-j}) \mathbf{P}(v_1 \not\xrightarrow{c} v_{n-j}, \dots, v_{n-j-1} \not\xrightarrow{c} v_{n-j}, v_{n-j} \xrightarrow{c} v_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(v_0 \rightarrow v_1) \mathbf{P}(v_1 \xrightarrow{c} v_n). \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. Para qualquer $n \geq 1$, $F_n(p) \geq G_n(p)$ para todo $p \in [0, 1]$.

Demonstração. Consideremos funções $H_n(p)$ definidas indutivamente por

$$H_n(p) = p^n [1 - p]^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} p^{n-j} H_j(p) [1 - p]^{n-j-1}, \quad n \geq 1.$$

Como $H_1(p) = p = F_1(p)$ e como $\prod_{j=1}^k (1 - p^j) \geq (1 - p)^k$ para todo $k \geq 1$, obtemos por indução em n que $F_n(p) \geq H_n(p)$ para todo $p \in [0, 1]$ e para todo $n \geq 1$. Por outro lado, temos que

$$H_{n+1}(p) = p [2 - p] H_n(p) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Com efeito, para $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} H_{n+1}(p) &= p^{n+1}(1-p)^n + \sum_{j=1}^{n-1} p^{n+1-j} H_j(p) [1-p]^{n-j} + p H_n(p) \\ &= p(1-p) H_n(p) + p H_n(p) \\ &= p(2-p) H_n(p). \end{aligned}$$

Para completar a prova notemos que $H_n(p) = G_n(p)$ para todo $p \in [0, 1]$ e para todo $n \geq 1$, onde G_n é dada por (2.3). $\square$

2.2.2 Sobrevivência dos processos

Para finalizar a prova do Teorema 2.1 basta encontrar, em virtude da Proposição 2.1, valores de p para os quais os processos $(Z_j^n)_{j \geq 0}$ sobrevivem com probabilidade positiva.

Supomos que $\dim \inf \partial T > 0$. Então, dado $0 < \alpha < \dim \inf \partial T$ existe $N = N(\alpha)$ tal que para todo $n \geq N$

$$\min_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{n} \log M_n(v) > \alpha,$$

isto é, $M_n(v) \geq e^{\alpha n}$ para todo $v \in \mathcal{V}$ e todo $n \geq N$.

Da desigualdade (2.2) temos que para todo $n \geq N$

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_j \geq e^{\alpha n} G_n(p).$$

Logo, se definimos para $n \geq N$

$$g_n(p) = [G_n(p)]^{1/n} - e^{-\alpha},$$

concluimos que para valores de p tais que $g_n(p) > 0$, o processo $(Z_j^n)_{j \geq 0}$ sobrevive com probabilidade positiva. Com efeito, neste caso $\liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_j > 1$ e como consequência o processo é uniformemente supercrítico. A sobrevivência resulta da aplicação direta do Teorema 2 do Apêndice.

Por outro lado, notemos que as funções g_n e a função definida por

$$g(p) = p(2-p) - e^{-\alpha}$$

satisfazem as condições do seguinte Lema.

Lema 2.4. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções a valores reais contínuas e crescentes definidas em $[0, 1]$, tais que $f_n(0) < 0$ e $f_n(1) > 0$ para todo n . Suponha que $\{f_n\}$ converge pontualmente quando $n \rightarrow \infty$ para uma função f definida em $[0, 1]$ contínua e crescente e seja r_n a única raiz de f_n em $[0, 1]$. Então, existe $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ e $f(r) = 0$.*

Deste modo, se chamamos r_n a única raiz de $g_n(p)$ em $[0, 1]$, segue-se do Lema 2.4 que existe $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ e que $g(r) = 0$, isto é, r é a única raiz de g em $[0, 1]$. Logo, como $g_n(p) > 0$ para $p > r_n$ temos que $p_c(T) \leq r_n$ para todo $n \geq N$. Portanto, tomando limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$p_c(T) \leq r = 1 - \left(1 - e^{-\alpha}\right)^{1/2}.$$

Finalmente, como isto vale para todo $0 < \alpha < \dim \inf \partial T$ concluímos que

$$p_c(T) \leq 1 - \left(1 - e^{-\dim \inf \partial T}\right)^{1/2}.$$

Apêndice

Percolação independente de sítios

Definimos o modelo de percolação independente de sítios em $\mathcal{G}$ da seguinte maneira. Designamos cada sítio do grafo $\mathcal{G}$ *aberto* com probabilidade p e *fechado* com probabilidade $1-p$, sendo que diferentes sítios têm designações independentes. Dizemos que um caminho é *aberto* se todos seus vértices estão abertos. Definimos o aglomerado aberto $C(v)$ do vértice v como o conjunto de todos os vértices que estão conectados a v por meio de um caminho aberto. Notemos que se v é fechado então $C(v) = \emptyset$. Dizemos que o modelo exibe percolação de sítios se existe um caminho aberto infinito ou, de maneira equivalente, se o aglomerado aberto da raiz é de tamanho infinito. Denotamos $C := C(\mathbf{0})$ e definimos a probabilidade crítica de percolação como

$$p_c^{\text{sítios}}(\mathcal{G}) = \inf\{p : \mathbf{P}(|C| = \infty) > 0\}.$$

Podemos encontrar uma descrição mais detalhada deste e de outros modelos de percolação no livro de Grimmett [3]. Quando os grafos considerados são árvores os modelos de percolação independente de sítios e de elos são equivalentes. Para este caso, Lyons prova em [7] o seguinte resultado.

Teorema 1. *Para qualquer árvore T ,*

$$p_c^{\text{sítios}}(T) = \frac{1}{\text{br } T},$$

onde $\text{br } T$ é o número de ramificação de T .

Para mais detalhes sobre a definição de $\text{br}T$, o artigo de Lyons [7] e o livro de Lyons e Peres [8] são as melhores referências. Aqui não vamos discutir sobre esta constante porque escapa aos nossos propósitos, só vamos dizer que o número de ramificação de uma árvore é um número real maior ou igual que 1 e fornece, em certo sentido, o número médio de sucessores por vértice da árvore. Por exemplo, $\text{br}\mathbb{T}_d = d$.

Processos de Galton-Watson em meios variáveis

O processo de Galton-Watson em um meio variável é uma generalização do processo de Galton-Watson que permite à distribuição da descendência depender do número da geração. Em outras palavras, se Z_j é o número de indivíduos na j -ésima geração então

$$Z_{j+1} = \sum_{i=1}^{Z_j} X_{j,i}, \quad \text{para } j \geq 0,$$

onde $(X_{j,i})_i$ são cópias independentes e identicamente distribuídas de X_j . Com essa notação, queremos dizer que a distribuição de X_j depende do número j da geração. Supomos que o processo começa com um indivíduo, isto é, $Z_0 = 1$. Além disso, assumimos um número médio de descendentes finito e positivo, isto é $0 < E(X_j) < \infty$ para todo $j \geq 0$.

Seja $\mu_j = E(X_j)$ e $m_j = E(Z_j)$. Então, $m_0 = 1$ e

$$m_j = \prod_{i=0}^{j-1} \mu_i, \quad \text{para } j \geq 1$$

pois

$$E(Z_j | Z_{j-1} = k) = E\left(\sum_{i=1}^k X_{j-1,i} \middle| Z_{j-1} = k\right) = \sum_{i=1}^k E(X_{j-1,i}) = k\mu_{j-1},$$

e assim $m_j = E(Z_j) = \mu_{j-1}E(Z_{j-1})$.

Para obter um resultado sobre a probabilidade de extinção deste processo vamos impor uma condição sobre o crescimento das médias. Para isto, dizemos que o processo é *uniformemente supercrítico* se existem constantes $a > 0$ e $c > 1$ tais que

$$\prod_{k=i}^{j+i-1} \mu_k \geq ac^j,$$

para todo $i \geq 0$ e $j \geq 0$. Notemos que isto vale se $\liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_j > 1$.

Por outro lado, para controlar o comportamento caudal das X_j , dizemos que a seqüência (X_j) é dominada pela variável aleatória X se, para cada j ,

$$P(X_j > x) \leq P(X > x), \quad \text{para todo } x.$$

Finalmente, denotamos a probabilidade de extinção do processo como q , isto é,

$$q = P\left(\lim_{j \rightarrow \infty} Z_j = 0\right).$$

Ora, temos o seguinte Teorema provado por Biggins e D'Souza em [2].

Teorema 2. *Se o processo é uniformemente supercrítico e a seqüência (X_j/μ_j) é dominada por uma variável aleatória X com $E(X) < \infty$ então $q \leq \eta < 1$, com η dependendo somente de a, c e X .*

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, O. S. M.; MACHADO, F. P.; POPOV, S. Phase transition for the frog model. *Electron. J. Probab.*, v.7, n.16, 21 p., 2002.
- [2] BIGGINS, J.D.; D'SOUZA, J.C. The supercritical Galton-Watson process in varying environments. *Stochastic Process. Appl.*, **42**, pp. 39-47, 1992.
- [3] GRIMMETT, G. *Percolation*. 2nd. ed. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [4] LEBENSZTAYN, E. MACHADO, F. P., MARTINEZ, M. Z. Self-avoiding random walks on homogeneous trees. *Markov Process. Related Fields* **12** (4), 735-745 , 2006.
- [5] LEBENSZTAYN, E. MACHADO, F. P., MARTINEZ, M. Z. Random walk systems on $\mathbb{Z}$, Submetido, 2006.
- [6] LEBENSZTAYN, E. MACHADO, F. P., POPOV, S. An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees. *J. Statist. Phys.*, **119**, no. 1-2, pp. 331-345, 2005.
- [7] LYONS, R. Random walks and percolation on trees. *Ann. Probab.*, v.18, n.3, pp. 931-958, 1990.
- [8] LYONS, R.; PERES, Y. *Probability on trees and networks*. Disponível em: <<http://mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/prbtree.html>>. Livro em preparação, a ser publicado pela Cambridge University Press.
- [9] POPOV, S. Frogs and some other interacting random walks models. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, **AC**:277-288, 2003.