

**Processos de *burn-in* e de garantia  
em sistemas coerentes sob o modelo  
de tempo de vida geral**

Nelfi Gertrudis González Alvarez

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro  
do CNPq, processo No. 140903/2007-0

São Paulo, outubro de 2009



# Processos de *burn-in* e de garantia em sistemas coerentes sob o modelo de tempo de vida geral

Este exemplar corresponde à redação final  
da tese devidamente corrigida e defendida  
por Nelfi Gertrudis González Alvarez  
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Ernesto Julian Goldberg Birgin - IME-USP
- Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa - EP-USP
- Prof. Dr. José Mario Martinez Peres - UNICAMP
- Profa. Dra. Chang Chung Yu Dorea - UnB



---

# Dedicatória

À memória de meus pais, Luis e Nelly:

*... Pois estou persuadido de que nem a morte, nem a vida, nem os anjos, nem os principados, nem o presente, nem o futuro, nem as potestades, nem as alturas, nem os abismos, nem outra qualquer criatura nos poderá apartar do amor que Deus nos testemunha em Cristo Jesus, nosso Senhor.*

*Romanos 8: 38-39*



---

# Agradecimentos

A Deus Todo Poderoso, por sua infinita bondade e misericórdia, pela qual tudo tem sido possível na minha vida.

Também gostaria de expressar minha gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno, pelo constante apoio no desenvolvimento desta tese, pela confiança e motivação que me brindou nos momentos difíceis que vivi durante minha estadia no Brasil.

À CAPES e à CNPq, pelo apoio financeiro recebido durante o primeiro e os três últimos anos, respectivamente, de meus estudos de doutorado.

Aos professores e ao Departamento de Estatística do IME-USP. Também à Universidade Nacional de Colômbia, Sede Medellín, e especialmente, à Faculdade de Ciências e à Escola de Estatística e meus colegas, que possibilitaram minha comissão de estudos para a realização deste doutorado.

A meus pais, Sr. Luis Eduardo González Upegui e Sra. María Nelly Alvarez de González, quem até seus últimos momentos de vida, foram compreensivos com minha ausência, deram motivação e força para continuar com meus estudos e mantiveram a sua Fe em mim. E a meus irmãos e irmãs, por seu apoio, paciência e incondicionalidade, a todo eles muito obrigado.

Finalmente, às minhas amigas no Brasil, Marina, Núbia, Mary, Paola e Betsabé e aos meus amigos na Colômbia, Glória e Carlos, pelo carinho, amizade e apoio tanto nos momentos gratos como nos de tristeza e dificuldade. Deus os abençoe.

---

# Resumo

Neste trabalho consideramos três tópicos principais. Nos dois primeiros generalizamos alguns dos resultados clássicos da Teoria da Confiabilidade na otimização dos procedimentos de *burn-in* e de políticas de garantia, respectivamente, sob o *modelo de tempo de vida geral*, quando um sistema coerente é observado ao nível de seus componentes, e estendemos os conceitos de intensidade de falha na forma de banheira e do *modelo de falha geral* através da definição de processos progressivamente mensuráveis sob a *pré- $t$ -história* completa dos componentes do sistema. Uma regra de parada monótona é usada na metodologia de otimização proposta. No terceiro tópico modelamos os custos de garantia descontados por reparo mínimo de um sistema coerente ao nível de seus componentes, propomos o estimador martingal do custo esperado para um período de garantia fixado e provamos as suas propriedades assintóticas mediante o Teorema do Limite Central para Martingais.

**Palavras chaves:** *Burn-in*, modelo de falha geral, garantia, regra de parada monótona, reparo mínimo, semimartingal regular, sistema coerente, taxa de falha na forma de banheira.



---

# Abstract

In this work we consider three main topics. In the first two, we generalize some classical results on Reliability Theory related to the optimization in burn-in procedures and warranty policies, using the general lifetime model of a coherent system observed on the component level and extending the definitions of bathtub shaped failure rate and general failure model to progressively measurable processes under the complete pre- $t$ -history. A monotone stopping rule is applied within the proposed methodology. In the third topic, we define the discounted warranty cost process for a coherent system minimally repaired on the component level and we propose a martingale estimator to the expected warranty cost for a fixed period and setting its asymptotic properties by means of Martingale Central Limit Theorem.

**Keywords:** Burn-in, bathtub shaped failure rate, coherent system, general failure model, minimal repair, monotone stopping rule, smooth semimartingale, warranty.



---

# Sumário

Lista de Abreviaturas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações preliminares . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	5
1.3 Contribuições . . . . .	6
1.4 Organização do trabalho . . . . .	7
<b>2 Tempo ótimo de <i>burn-in</i> para sistemas coerentes</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução . . . . .	11
2.2 Otimização usando a representação semimartingal . . . . .	14

---

2.3	Minimizando a probabilidade de falha . . . . .	15
2.3.1	Probabilidade incondicional . . . . .	15
2.3.2	Probabilidade condicional . . . . .	20
2.3.3	Exemplo ilustrativo . . . . .	22
2.3.4	Exemplo. Optimização sob informação parcial . . . . .	26
2.4	Maximizando o lucro unitário por operação sem falha . . . . .	30
2.4.1	Caso A . . . . .	35
2.4.2	Caso B . . . . .	36
2.4.3	Exemplo ilustrativo . . . . .	40
2.5	Tempo ótimo de <i>burn-in</i> sob o <i>modelo de falha geral</i> . . . . .	45
2.5.1	Problema de otimização considerado . . . . .	48
2.5.2	Exemplos ilustrativos . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Tempo ótimo de garantia para sistemas coerentes</b>	<b>63</b>
3.1	Custo de garantia sob o processo de falha geral . . . . .	65
3.2	Problema de otimização . . . . .	67
3.3	Aplicação às políticas <i>FRW</i> e <i>PRW</i> . . . . .	71
3.3.1	Política de garantia <i>FRW</i> com renovação . . . . .	71
3.3.2	Política de garantia <i>PRW</i> . . . . .	77
3.3.3	Exemplo ilustrativo . . . . .	80
3.4	Tempo ótimo de garantia baseado na regra <i>ILA</i> . . . . .	82
3.4.1	Exemplo ilustrativo 1 . . . . .	87
3.4.2	Exemplo ilustrativo 2 . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Um problema de otimização adicional em <i>burn-in</i> e garantia</b>	<b>95</b>

---

<b>5</b>	<b>Estimação dos custos de garantia sob reparo mínimo</b>	<b>111</b>
5.1	Modelo de reparo mínimo de um sistema coerente . . . . .	114
5.2	Processo de custo de garantia . . . . .	118
5.3	Estimação martingal do custo de garantia . . . . .	124
5.3.1	Resultados preliminares . . . . .	124
5.3.2	Modelo estatístico para a estimação . . . . .	128
5.3.3	Teorema do limite central . . . . .	133
5.3.4	Estimação do custo de garantia esperado, $w$ fixado . .	146
5.4	Exemplo ilustrativo . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Conclusões e pesquisa futura</b>	<b>159</b>
6.1	Considerações finais . . . . .	159
6.2	Sugestões para pesquisa futura . . . . .	162
<b>A</b>	<b>Definições e resultados preliminares</b>	<b>165</b>
A.1	Conceitos e resultados básicos da teoria dos martingais . . . .	165
A.2	Modelo de falha geral . . . . .	168
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>171</b>



---

# Lista de Abreviaturas

- DFR* Função de taxa de falha decrescente (*Decreasing Failure Rate*)
- FRW* Política de garantia de substituição sem custo para o comprador (*Free-Replacement Warranty*)
- IFR* Função de taxa de falha crescente (*Increasing Failure Rate*)
- IID* Independente(s) e identicamente distribuído(s)
- ILA* Olhada infinitesimal para frente (*Infinitesimal-Look Ahead*)
- PRW* Política de garantia de substituição *pro rata* (*Pro Rata Warranty*)
- SSM* Semimartingal regular (*Smooth Semimartingale*)



---

# Lista de Símbolos

$\omega$	Ponto amostral ou resultado no espaço amostral $\Omega$
$w$	Período de garantia
$b$	Período de <i>burn-in</i>
$\tau$	Período de operação
$x \wedge y$	$\min\{x, y\}$
$x \vee y$	$\max\{x, y\}$
$1_A$	Indicador do conjunto $A$
$\mathcal{M}_0$	A classe de martingais integráveis de média zero, contínuos à direita e com limite à esquerda
$\mathcal{M}_0^2$	A classe de martingais quadrado integráveis de média zero, contínuos à direita e com limite à esquerda
$\lambda_t$	Processo de intensidade de falha
$\lambda_t^i$	Processo de intensidade de falha do componente $i$
$\lambda^i(t)$	Função de risco ou taxa de falha do componente $i$
$\Phi$	Função de estrutura de um sistema coerente



---

# Lista de Figuras

2.1	Funções no Exemplo 2.3.3 . . . . .	23
2.2	Processo $\lambda_t$ em $\{t_1 < T_1 \wedge T_2\}$ , Exemplo 2.3.3. . . . .	24
2.3	Processo $\lambda_t$ em $\{t_1 \geq T_1 \wedge T_2\}$ , Exemplo 2.3.3. . . . .	24
2.4	Processo $\hat{\lambda}_t$ em $\{T_1 \leq t_1\}$ , Exemplo 2.3.4 . . . . .	28
2.5	Processo $\hat{\lambda}_t$ em $\{T_1 > t_1\}$ , Exemplo 2.3.4 . . . . .	28
2.6	Funções para a análise das soluções no Exemplo 2.4.3 . . . . .	41
2.7	Função $h(t) = g(t)/(C + K)$ , Exemplo 2.4.3 . . . . .	43
2.8	Funções para a análise das soluções no Exemplo 2.4.3 . . . . .	43
2.9	Processo $\lambda_t$ em $\{T_1 \wedge T_2 \leq t_3\}$ , Exemplo 2.5.2-A . . . . .	56
2.10	Processo $\lambda_t$ em $\{T_1 \wedge T_2 > t_3\}$ , Exemplo 2.5.2-A . . . . .	56
2.11	Processo $\lambda_t^I$ em $\{T_1 \wedge T_2 \leq t_1\}$ , Exemplo 2.5.2-A . . . . .	58
2.12	Processo $\lambda_t^I$ em $\{T_1 \wedge T_2 > t_1\}$ , Exemplo 2.5.2-A . . . . .	58
3.1	Funções para análise dos resultados no Exemplo 3.3.3 . . . . .	81
3.2	Função $K^g(w)$ e limites $k_l^g$ e $k_u^g$ , Exemplo 3.4.1 . . . . .	88

---

3.3	$w_x$ em $T_1 \wedge T_2 > W_x^1$ , Exemplo 3.4.1 . . . . .	89
3.4	$w_x$ em $T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2$ , Exemplo 3.4.1 . . . . .	89
3.5	$w_x$ em $W_x^2 < T_1 \wedge T_2 \leq W_x^1$ , Exemplo 3.4.1 . . . . .	90
3.6	Função $K^g(w)$ e limites $k_l^g$ e $k_u^g$ , Exemplo 3.4.2 . . . . .	92
3.7	Processo $r_t^g$ e limites $k_l^g$ e $k_u^g$ , Exemplo 3.4.2 . . . . .	93
5.1	Intervalos de confiança dos dados simulados, $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ . . . . .	153
5.2	Histogramas dos custos médios, $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ , $n = 100, 200$ . . . . .	155
5.3	Intervalos de confiança dos dados simulados, $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ . . . . .	157
5.4	Histogramas dos custos médios, $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ , $n = 100, 200$ . . . . .	158

---

## Lista de Tabelas

5.1	Estimações com $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ , $w = 5$ , $\alpha = 0,05$ . . . . .	152
5.2	Custos esperados, $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ , $w = 5$ . . . . .	154
5.3	Estatísticas simulação Monte Carlo, $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ , $w = 5$ . . . . .	154
5.4	Estimações com $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ , $w = 5$ , $\alpha = 0,05$ . . . . .	156
5.5	Custos esperados, $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ , $w = 5$ . . . . .	156
5.6	Estatísticas simulação Monte Carlo, $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ . . . . .	157



# Introdução

## 1.1 Considerações preliminares

Vários assuntos referentes aos procedimentos de *burn-in* e das políticas de garantia têm sido estudados extensivamente na literatura da Confiabilidade. Em termos gerais, o *burn-in* consiste na pré-operação do objeto, sob condições normais ou estressantes, a fim de eliminar itens defeituosos e reduzir as falhas precoces, enquanto que uma garantia é um tipo de obrigação mediante a qual o fabricante assegura a qualidade e o funcionamento apropriado dos produtos durante um tempo fixado. Devido a seus efeitos sobre o lucro obtido na fabricação e comercialização de um produto (sistema ou componente), é necessário determinar os períodos ótimos e estimar os custos associados com cada um destes processos.

Na Teoria Clássica da Confiabilidade, a modelagem e a análise dos processos associados ao *burn-in* e às políticas de garantia, não levam em consideração o relacionamento entre o sistema e seus componentes na dinâmica do tempo.

A abordagem é conhecida como *estatística* ou denominada de *caixa preta*.

Segundo Blischke e Murthy [14], na aproximação *estatística* o tempo até a primeira falha do sistema é descrito através de uma distribuição univariada conhecida  $F(z)$ , ou mediante uma distribuição bivariada  $F(z, y)$ , que associa a idade do sistema  $\zeta$  e seu uso  $\mathcal{Y}$ , até a primeira falha. Quando as falhas dos componentes são estatisticamente dependentes, a abordagem *estatística* modela as falhas dos componentes usando uma distribuição multivariada da qual são obtidas as distribuições marginais dos tempos de vida para cada componente. Nesta modelagem, a filtragem, ou história, é gerada pelo tempo de vida do sistema  $\zeta$ , isto é, por  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ , onde  $\mathcal{G}_t = \sigma(\zeta \wedge t) = \sigma\{1_{\{\zeta > s\}}, 0 \leq s \leq t\}$ , e  $\lambda(t)$  é a função de taxa de falha ordinária no conjunto  $\{\zeta > t\}$ ; além disso, se a função de distribuição de  $\zeta$  é absolutamente contínua, o processo indicador  $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$  tem a representação

$$N_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda(s) ds + M'_t,$$

onde  $M'_t$  é um  $\mathcal{G}_t$ -martingal quadrado integrável de média zero.

Em um procedimento *físico* Blischke e Murthy [14] observam separadamente as falhas de cada componente e compõem as garantias individuais em uma garantia total. Contudo, esta última abordagem é menos usada pela complexidade e dificuldades de validação dos modelos.

Na análise de sistemas coerentes na dinâmica do tempo, podemos usar o

*modelo de tempo de vida geral* representado por um semimartingal regular do processo de contagem das falhas do sistema em relação à  $\sigma$ -álgebra gerada pelas falhas dos componentes (Aven e Jensen [2]). Seja  $\zeta$  o tempo de vida do sistema, uma variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  com a filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t \geq 0}$ . Na abordagem *física*  $\mathbb{F}$  é chamada a pré- $t$ -história dos componentes ou filtragem completa, definida por  $\mathcal{F}_t = \sigma\{1_{\{T_i > s\}}, 0 \leq s \leq t, i = 1, \dots, m\}$ , onde  $m$  é o número de componentes do sistema e a variável aleatória  $T_i$  corresponde ao tempo de vida do componente  $i$ . Segundo Aven e Jensen [2], o *modelo de tempo de vida geral* é definido pelo processo indicador  $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$  correspondente ao processo de contagem relativo ao processo pontual simples  $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ , onde  $\zeta = \zeta_1$  e  $\zeta_n = \infty$  para  $n \geq 2$ . Este processo tem a representação semimartingal regular,

$$1_{\{\zeta \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_t,$$

onde o processo  $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$ , chamado a  $\mathcal{F}_t$ -intensidade de falha, é um processo estocástico progressivamente mensurável, tal que  $E\left\{\int_0^t \lambda_s ds\right\} < \infty, \forall t \geq 0$ , e o processo  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal de média zero. Uma condição necessária e suficiente para que  $1_{\{\zeta \leq t\}}$  tenha uma representação semimartingal regular é que  $\zeta$  seja um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível.

Para apreciar a diferença entre a *abordagem estatística* e a *abordagem física* usando o *modelo de tempo de vida geral*, considere um sistema coerente de  $m = 2$  componentes em paralelo, isto é, o tempo de vida do sistema é

$\zeta = T_1 \vee T_2$ . Suponha que  $T_1$  e  $T_2$  são variáveis aleatórias exponenciais independentes, com parâmetro de intensidade de falha  $\alpha_i$ , respectivamente. Sob a *abordagem estatística*,  $\zeta$  tem uma taxa de falha ordinária dada por

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}.$$

Esta fórmula bastante complicada não revela nada sobre a estrutura do sistema nem incorpora a informação do estado dos componentes no instante  $t$ . Só pelo cálculo diferencial podemos ver que para  $\alpha_i \neq \alpha_2$ ,  $\lambda(t)$  é crescente em  $(0, t^*)$  e decrescente em  $(t^*, \infty)$ , para algum  $t^* > 0$ . Pelo contrário, na *abordagem física* sob o *modelo de tempo de vida geral*, a taxa de falha do sistema é o processo estocástico definido por  $\lambda_t = \alpha_1 1_{\{T_2 \leq t < T_1\}} + \alpha_2 1_{\{T_1 \leq t < T_2\}}$ , em  $\{\zeta > t\}$ , isto é

$$\lambda_t = \begin{cases} 0, & \text{em } \{T_1 > t, T_2 > t\} \\ \alpha_1 & \text{em } \{T_1 > t, T_2 \leq t\} \\ \alpha_2 & \text{em } \{T_1 \leq t, T_2 > t\} \end{cases}.$$

Assim, enquanto ambos componentes funcionam, nenhuma falha do sistema pode ocorrer, e quando um dos componentes falha a taxa de falha do sistema é igual à taxa de falha do componente que ainda não falhou. Este resultado é claramente mais simples do que aquele obtido na *abordagem estatística*, e usa a informação sobre o estado dos componentes no instante  $t$ , representada pela filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , sob a qual o sistema coerente é observado ao nível de seus componentes. Com esta abordagem também é possível trocar o nível de informação e a taxa de falha ordinária pode ser derivada de  $\lambda_t$  no menor

nível de informação possível, isto é, quando não se tem informação sobre os tempos de vida dos componentes na dinâmica do tempo.

Aven e Jensen [2] (pág. 65-69) apresentam um método para derivar processos de intensidade de sistemas complexos sob condições gerais. Neste enfoque o  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade de falha para o tempo de vida  $\zeta$  de um sistema complexo é definido como

$$\lambda_t = \sum_{J \in \Gamma_\Phi(t)} \lambda_t(J),$$

onde, cada  $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subset \{1, \dots, m\}$  é um conjunto de componentes que podem falhar simultaneamente, chamado bloco;  $\Gamma_\Phi(t)$  é a classe dos blocos que são críticos para o sistema no instante  $t$ , isto é, aqueles cuja falha em  $dt$  resultaria na falha do sistema em  $t$ , e  $\lambda_t(J)$ , é o  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade de falha correspondente a  $T_J$ , o tempo de ocorrência do bloco  $J$ .

## 1.2 Objetivos

Basicamente, consideramos os dois objetivos a seguir

1. O uso da teoria dos martingais para processos pontuais na determinação dos tempos ótimos de *burn-in* e de garantia para sistemas coerentes, considerando as relações estruturais e estatísticas entre os componentes e o sistema, na dinâmica do tempo, isto é, quando o sistema é observado ao nível de seus componentes.

2. A modelagem dos processos dos custos de garantia para sistemas coerentes reparáveis, sob reparos mínimos ao nível dos componentes, a fim de formular um estimador pontual e seus intervalos de confiança para o custo de garantia esperado para um período fixado.

Para tais fins usamos o *modelo de tempo de vida geral* para os processos de contagem das falhas do sistema em relação à sigma álgebra gerada pela história dos componentes.

### 1.3 Contribuições

Com os resultados apresentados nos Capítulos 2 a 5 os objetivos indicados previamente foram alcançados da seguinte maneira.

1. Generalizamos alguns dos resultados clássicos da Teoria da Confiabilidade relativos à otimização em processos de *burn-in* e políticas de garantia, através da modelagem de processos estocásticos para a representação do desempenho e dos custos associados, incorporando as dependências estruturais e estatísticas na dinâmica do tempo, e aplicamos o método de otimização estocástico baseado na regra de parada monótona *ILA* (*Infinitesimal-Look-Ahead*, Aven e Jensen [2] e Jensen [31]) acompanhado da análise e interpretação prática dos resultados.
2. Estendemos os conceitos clássicos de intensidade de falha na forma de banheira e do *modelo de falha geral* (Apêndice, Seção A.2) a processos estocásticos progressivamente mensuráveis sob o *modelo de tempo de*

*vida geral*, de forma a considerar a pré- $t$ -história do sistema e seus componentes.

3. Formulamos um modelo estocástico para os processos dos custos de garantia descontados quando um sistema coerente é reparado minimamente ao nível de seus componentes, através do conceito do nível crítico de um componente do sistema no instante  $t$ . A partir dessa modelagem, desenvolvemos um estimador pontual martingal e provamos as suas propriedades assintóticas mediante o Teorema do Limite Central para Martingais.

## 1.4 Organização do trabalho

Esta Tese se divide em três partes. A primeira parte é formada pelos Capítulos 2 a 4. Nos Capítulos 2 e 3 são desenvolvidos alguns problemas de otimização formulados na Teoria Clássica da Confiabilidade, relativos ao *burn-in* (Capítulo 2) e a garantia (Capítulo 3), usando o *modelo de tempo de vida geral* para a modelagem das falhas de sistemas coerentes observados ao nível de seus componentes. No Capítulo 4 introduzimos um problema adicional de otimização das primeiras idéias para se obter simultaneamente o tempo ótimo de *burn-in* e de garantia. A análise das soluções ótimas é desenvolvida baseada na informação trivial sobre o sistema. A segunda parte consta do Capítulo 5, onde abordamos o problema da estimação dos custos de garantia descontados para um sistema coerente submetido a reparos mínimos ao nível de seus componentes. Na terceira parte, Capítulo 6, apresentamos algumas considerações adicionais com respeito aos resultados apresentados nos capítulos anteriores,

e propomos alguns itens para pesquisa futura.

Especificamente, o conteúdo por capítulos é como segue.

No Capítulo 2 abordamos o problema da determinação do tempo ótimo de *burn-in* para um sistema coerente. Para isso, estendemos o conceito de intensidade de falha na forma de banheira em termos de um processo progressivamente mensurável com respeito à sigma álgebra completa gerada pela informação sobre os componentes do sistema. Consideramos como funções objetivo na otimização a probabilidade de falha (incondicional e condicional) durante um período de operação adicional fixado, após o *burn-in*, e também o lucro por sobrevivência sem falha durante esse mesmo período. Neste último caso, definimos um processo geral de lucro unitário devido ao *burn-in*. No final do Capítulo, tratamos o problema de maximização do lucro unitário sob o *modelo de falha geral*, definindo o *processo de falha geral de um sistema coerente*, e analisamos a solução ótima sob a condição dos processos de intensidade de falha na forma de banheira. Em todos os casos, a regra de parada monótona *ILA* é usada para a definição dos tempos ótimos. Exemplos são dados para ilustrar e interpretar os resultados.

No Capítulo 3, consideramos o problema da determinação do período ótimo de garantia que minimize o custo esperado por unidade de tempo, em particular, para as políticas *FRW* (*Free-Replacement Warranty*) com renovação e a política *PRW* (*Pro-Rata Warranty*). Adotando a definição do *processo de*

*falha geral de um sistema coerente* introduzido no Capítulo 2, propomos dois procedimentos para achar a solução ótima: O primeiro, baseado no método de minimização da função objetivo através da análise do cálculo diferencial, quando pode ser assumido a condição de independência entre os processos de falha que caracterizam o modelo. O segundo método, mais geral, baseado na regra de parada *ILA* que, sob certas condições, pode ser aplicado e que deve ser acompanhado de uma análise adicional das probabilidades de certos eventos indicados na aplicação a casos específicos.

No Capítulo 4, consideramos o problema no qual são procurados simultaneamente os tempos ótimos de *burn-in* e de garantia que minimizam a função do custo de garantia unitário por unidade de tempo, para uma política *FRW* com renovação, quando o processo de falha do sistema segue o modelo de *falha geral* e a filtragem ou informação é gerada pelo estado do sistema (a sigma-álgebra trivial). A solução é analisada sob a condição de taxa de falha do sistema na forma de banheira.

No Capítulo 5 tratamos o problema da estimação dos custos de garantia descontados devido a reparos mínimos realizados durante o período garantido, quando o sistema é reparado minimamente ao nível de seus componentes. Para isto, usando o conceito do nível crítico para cada componente em relação ao sistema, definimos o processo de custo de garantia  $\hat{B}_t$  e seu respectivo compensador  $B_t$ , e provamos a propriedade martingal da diferença  $\hat{B}_t - B_t$ . Em seguida, definimos o estimador martingal dos custos de garan-

tia baseados em  $n$  cópias independentes, e mediante o Teorema do Limite Central para Martingais, estabelecemos as propriedades assintóticas do estimador do custo de garantia esperado para um período fixado.

No Capítulo 6, discutimos os resultados apresentados nos capítulos anteriores. São indicados alguns assuntos para pesquisa futura.

Finalmente, no Apêndice apresentamos algumas definições e resultados da teoria dos martingais. Um resumo do *modelo de falha geral* é apresentado no final.

# Tempo ótimo de *burn-in* para sistemas coerentes

## 2.1 Introdução

O *burn-in* é um procedimento usado na fabricação de alguns produtos, afim de eliminar itens defeituosos com tempos de vida inferiores ao tempo desejado, assegurando que somente aqueles confiáveis e com a qualidade desejada sejam colocados no mercado. Com este objetivo o fabricante submete, por um período de tempo (período de *burn-in*), os itens produzidos a testes que simulam situações típicas de uso ou até mais severas. Aqueles que sobrevivem são colocados em serviço, vendidos ou submetidos a testes adicionais. Os procedimentos de *burn-in* estão relacionados aos custos de produção, dos quais representam uma parte importante.

Jensen e Petersen [32] apresentam muitas das idéias tradicionais desenvolvidas com respeito ao *burn-in*. Entre tais idéias está a que considera apropriado

usar um procedimento de *burn-in* quando o tempo de vida de um produto é modelado como uma mistura de funções de distribuições de probabilidade, representando dois tipos de itens dentro de uma população: aqueles que, segundo sua confiabilidade e sua qualidade, são fracos ou fortes. Assume-se que os tempos de vida dos sistemas têm também este comportamento dicotômico (Block, e Savits [16]), de forma tal que a subpopulação de defeituosos apresenta uma *mortalidade infantil*, isto é, uma taxa de falha inicial alta. Assim, um procedimento de *burn-in* é recomendável quando o tempo de vida de um sistema tem uma taxa de falha inicial alta mas que decresce com o tempo. O sistema que sobrevive ao *burn-in* possui a mesma taxa de falha do sistema original truncada à esquerda, o que elimina a parte do tempo de vida inicial na qual o sistema teria uma alta propensão de falha.

A classe de tempos de vida que têm taxas de falha com a forma de banheira satisfaz a propriedade anterior. Especificamente, para este tipo de distribuição, a taxa de falha inicial é alta (*período de mortalidade infantil*), decresce aproximadamente até uma constante (*período de vida útil*) e finalmente cresce com a idade avançada (*período de desgaste*).

Com respeito aos métodos de *burn-in* sobre um sistema de componentes, existem três procedimentos básicos: Submeter a *burn-in* o componente  $i$  por um período de tempo  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e logo montar o sistema com tais componentes; submeter a *burn-in* o componente  $i$  por um período de tempo  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , montar o sistema com estes componentes e submetê-lo a

*burn-in* adicional por um período de tempo  $b$ , ou montar o sistema com componentes novos e submetê-lo a *burn-in* por um período de tempo  $b$ . Consideraremos o último método.

Na literatura recente encontramos vários trabalhos que condicionam o problema de achar o tempo ótimo de *burn-in* segundo diferentes critérios relativos à operação, manutenção, ou garantia do produto, por exemplo, Cha ([19], [20], [21]), Kar e Nachlas [34], Mi ([40], [41], [42]), Nguyen e Murthy [45], Sheu e Chien [49], Yu, et. al. [51], entre outros. Block e Savits [16] fazem uma revisão dos modelos de mistura e dos critérios para a determinação do tempo ótimo de *burn-in*, que são classificados em dois grandes grupos: os baseados no desempenho sem levar em conta nenhuma estrutura de custo e aqueles baseados em custos. Neste trabalho consideramos alguns destes critérios. Com respeito ao *burn-in* de um sistema coerente, os trabalhos prévios analisam o tempo de vida do sistema na dinâmica do tempo sem considerar o relacionamento entre o sistema e seus componentes, o que na literatura existente caracteriza-se por uma *abordagem estatística ou de caixa preta*. Propomos observar um sistema coerente ao nível de seus componentes, isto é, através da filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, 0 \leq s \leq t \right\},$$

onde  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são os tempos de vida dos componentes que formam o sistema, admitindo que a taxa de falha do sistema é um processo estocástico. Como é indicado na Seção 2.2, a partir da representação semi-

martingal dos processos de contagem envolvidos nos processos de falha considerados é possível definir, sob certas condições, um tempo de parada ótimo baseado na regra de parada monótona *ILA* (*Infinitesimal-Look-Ahead*) (Aven e Jensen [2], Jensen [31]), na qual são necessárias duas propriedades básicas, o chamado *caso monótono*, indicado na equação (2.2), e a integrabilidade uniforme da parte martingal na representação semimartingal regular ou *SSM* (ver Definição A.2) do processo de interesse.

Neste capítulo propomos vários modelos estocásticos de otimização sobre o processo de *burn-in* para sistemas coerentes observados ao nível de seus componentes, e suas soluções baseadas na regra de parada *ILA*, como também a interpretação correspondente em alguns exemplos específicos.

## 2.2 Otimização usando a representação semimartingal.

### Regra de parada monótona

Jensen [31] define uma regra de parada como uma estratégia que determina o tempo de parada com respeito a toda a informação passada sobre um processo aleatório. Assim, as regras de parada podem ser identificadas com tempos de parada, e portanto, sob condições apropriadas, podem ser descritas como o primeiro instante no qual o processo observado atinge o supermartingal minimal dominante. Neste trabalho consideramos a chamada regra de parada *ILA* (*Infinitesimal-Look-Ahead*) que corresponde ao primeiro tempo de entrada, de um processo observado, em um conjunto de Borel conhecido e fixado.

A regra *ILA* é aplicada a processos  $Z = (Z_t)_t$  os quais admitem a representação semimartingal regular (*SSM*) dada em (A.2). Tais processos são definidos no espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com a filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Se  $T > 0$  é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito com  $E[Z_T] > -\infty$  e  $C^{\mathbb{F}}$  é a classe de  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada finitos,

$$C^{\mathbb{F}} = \left\{ \vartheta : \vartheta \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } \vartheta \leq T, E[T] < \infty, E[Z_{\vartheta}] > -\infty \right\}, \quad (2.1)$$

a regra de parada *ILA* é definida como segue. Seja  $Z = (f, M)$ . Se  $f$  satisfaz a condição denominada *caso monótono*,

$$\{f_t \leq 0\} \subseteq \{f_{t+h} \leq 0\} \quad \forall t, h \geq 0, \quad \bigcup_{t \geq 0} \{f_t \leq 0\} = \Omega, \quad (2.2)$$

então a regra *ILA* é dada por,

$$\xi = \inf \left\{ t \geq 0 : f_t \leq 0 \right\}. \quad (2.3)$$

Se o martingal  $M$  é uniformemente integrável, sob o *caso monótono* e a regra *ILA*,  $\xi$  é ótimo no sentido de que (Aven e Jensen [2]),

$$E[Z_{\xi}] = \sup \left\{ E[Z_{\vartheta}] : \vartheta \in C^{\mathbb{F}} \right\}. \quad (2.4)$$

## 2.3 Minimizando a probabilidade de falha durante um período de operação fixado

### 2.3.1 Probabilidade incondicional

Segundo Bueno [18], um sistema coerente com tempo de vida  $\zeta$  é submetido a um procedimento de *burn-in* com tempo de duração  $b$ . Após este procedimento o sistema é colocado em operação por um tempo adicional fixado  $\tau$ .

Suponha que desejamos encontrar  $b$  que minimize  $E[N_b^\tau] = P(b < \zeta \leq b + \tau)$ , onde o processo  $N_b^\tau$  é dado por

$$N_b^\tau = 1_{\{b < \zeta \leq b + \tau\}} = 1_{\{\zeta \leq b + \tau\}} - 1_{\{\zeta \leq b\}}. \quad (2.5)$$

Para isto supomos que  $\zeta$  é um tempo de parada finito totalmente inacessível e usamos a sua representação semimartingal regular. De (A.3), obtemos,

$$\begin{aligned} N_b^\tau &= \int_0^{b+\tau} 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s + M_{b+\tau} - \int_0^b 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - M_b \\ &= N_0^\tau - \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}} \lambda_{s+\tau}] ds + M_b^\tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $N_0^\tau = 1_{\{\zeta \leq \tau\}} = \int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_\tau$ , e o processo  $M_b^\tau = M_{b+\tau} - M_\tau - M_b$ , é um martingal de média zero uniformemente integrável. Portanto,

$$E[N_b^\tau] = E[N_0^\tau] - E\left\{ \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}} \lambda_{s+\tau}] ds \right\}. \quad (2.7)$$

Para  $\tau$  fixo, o  $b$  que minimiza  $E[N_b^\tau]$  é o mesmo que maximiza

$$K(\tau, b) = E\left\{ \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}} \lambda_{s+\tau}] ds \right\}. \quad (2.8)$$

Em particular, procuramos um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada  $B^*$  numa classe apropriada de tempos de parada  $C_\zeta^{\mathbb{F}}$ ,

$$C_\zeta^{\mathbb{F}} = \left\{ B \geq 0 : B \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } B + \tau \leq \zeta, E[\zeta] < \infty, E[B] < \infty \right\}, \quad (2.9)$$

tal que,

$$K(\tau, B^*) = \sup\{K(\tau, B) : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}\}. \quad (2.10)$$

Desde que consideramos tempos de parada  $B \in C_{\zeta}^{\mathbb{F}}$ , temos que  $\zeta > B + \tau$ , e portanto  $\zeta > B$ . Logo,

$$K(\tau, B^*) = \sup \left\{ E \left[ \int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds \right] : B \in C_{\zeta}^{\mathbb{F}} \right\}. \quad (2.11)$$

Vamos resolver este problema supondo que o processo de intensidade de falha do sistema,  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ , tem forma de banheira (P-q.c.).

**Definição 2.1. Processo de intensidade de falha na forma de banheira.** *Um processo de intensidade  $\mathcal{F}_t$ -mensurável  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  tem a forma de banheira (P-q.c.) se existem  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $\lambda_t$  é estritamente decrescente se  $0 \leq t \leq S_1$ ,  $\lambda_t$  é constante se  $S_1 \leq t \leq S_2$ , e  $\lambda_t$  é estritamente crescente se  $t \geq S_2$ . Os tempos de parada  $S_1$  e  $S_2$  são chamados de tempos de mudança (troca) de  $\lambda_t$ .*

**Teorema 2.1.** *Seja  $T > 0$  um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito tal que  $E[T] < \infty$ ,  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  um processo não negativo  $\mathcal{F}_t$ -progressivamente mensurável e o processo  $\tilde{Z}^\tau = (\tilde{f}, \tilde{L})$  um  $\mathcal{F}_t$ -SSM, tal que  $E[\tilde{Z}_t^\tau] < \infty \forall t \geq 0$ ,  $\tilde{f}_s = 1_{\{T > s\}} \lambda_s - 1_{\{T > s+\tau\}} \lambda_{s+\tau}$ , onde  $\tau$  é uma constante, e  $\tilde{L} \in \mathcal{M}_0^2$ , um  $\mathcal{F}_t$ -martingal de média zero uniformemente integrável. Seja também  $C_T^{\mathbb{F}}$  a classe de  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada,*

$$C_T^{\mathbb{F}} = \left\{ B \geq 0 : B \text{ é um } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } B+\tau \leq T, E[T] < \infty, E[B] < \infty \right\}. \quad (2.12)$$

*Suponha que  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  tem a forma de banheira com tempos de mudança  $0 \leq S_1 \leq S_2$ , e  $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ . Então, o tempo de parada ótimo  $B^{0,*} \in C_T^{\mathbb{F}}$*

que maximiza  $K^0(\tau, B) = E[\tilde{Z}_B^\tau] - E[\tilde{Z}_0^\tau]$ ,  $B \in C_T^{\mathbb{F}}$ , isto é,

$$K^0(\tau, B) = E\left[\int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right], \quad B \in C_T^{\mathbb{F}},$$

é tal que

i.  $B^{0,*} = \inf\{B : B \in C_T^{\mathbb{F}}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$  e

ii.  $B^{0,*} \leq S_1$ .

**Nota 2.1.** No teorema anterior,  $T$  é um tempo de parada de referência, o qual é definido segundo o problema específico a resolver.

**Prova.**

i. Considere os dois casos seguintes,

(a)  $\lambda_\tau \geq \lambda_0$ ,

(b)  $\lambda_\tau < \lambda_0$ .

Em (a): Como  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  tem forma de banheira e  $\lambda_0 < \lambda_\infty$ , então  $\tau > S_2$ . Logo,  $\forall s \geq 0$ ,  $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$ , e assim,  $\forall s \geq 0, h \geq 0$ ,  $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$ . Concluimos portanto que neste caso, o processo  $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$  é tal que  $\forall s \geq 0$ ,  $f_s \leq 0$  e

$$\forall s, h \geq 0, \{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\}, \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega.$$

Em (b): Pela forma de banheira de  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  e  $\lambda_0 < \lambda_\infty$ , temos que  $\forall \omega \in \Omega$ , existe  $s^* \geq 0$  tal que  $\lambda_{s^*} \leq \lambda_{s^*+\tau}$ . Então,

(b-1) se  $s^* \leq S_1$ , temos  $s^* + \tau > S_2$  pois  $\lambda_s$  tem forma de banheira. Assim,

$$\forall s \geq s^*, \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}, \text{ logo, } \forall s \geq s^*, h \geq 0, \lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}.$$

(b-2) Se  $s^* \geq S_1$ , então  $\forall s \geq s^*, \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$ , pois  $\lambda_s$  é não decrescente P-q.c.

$$\text{em } \{s \geq S_1\}. \text{ Portanto, } \forall s \geq s^*, h \geq 0, \lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}.$$

De (b-1) e (b-2) conclui-se que se  $\lambda_\tau < \lambda_0$  e  $\lambda_0 < \lambda_\infty$ , para todo  $\omega \in \Omega$  existe  $s^* \geq 0$  tal que para o processo  $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$ ,

$$\forall s \geq s^*, h \geq 0, \{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\}, \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega.$$

Observe que em (a) para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $s^* = 0$ . Assim, de (a) e (b) temos que o processo  $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$  satisfaz as condições do *caso monótono* (2.2) e como o martingal  $\tilde{L}$  é uniformemente integrável, aplicamos a regra *ILA* dada por (ver (2.3) e (2.4)),

$$B^{0,*} = \inf\{B \in C_T^{\mathbb{F}} : \tilde{f}_B \leq 0\} = \inf\{B \in C_T^{\mathbb{F}} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\},$$

tal que

$$K^0(\tau, B^{0,*}) = E\left[\int_0^{B^{0,*}} (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] = \sup\left\{E\left[\int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] : B \in C_T^{\mathbb{F}}\right\}.$$

ii. Da análise feita em i. conclui-se que sob as condições da hipótese,  $\forall \omega \in \Omega$  existe um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada,  $S^*(\omega) = s^* \geq 0$  tal que  $\lambda_{s^*} \leq \lambda_{s^*+\tau}$  e  $\forall s \geq s^*, h \geq 0, \{\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\} \subseteq \{\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+h+\tau}\}$ . Logo, em  $\{S^* \leq S_1\}$  temos que  $B^{0,*} = \inf\{B \in C_T^{\mathbb{F}} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} = \inf\{S^*(\omega) : s^* \leq S_1\}$ , enquanto que em  $\{S^* \geq S_1\}$ ,  $B^{0,*} = S_1$ . Portanto obtemos que  $B^{0,*} \leq S_1$ .  $\square$

Se as condições do Teorema 2.1 são válidas, com  $T = \zeta$ , o tempo ótimo de *burn-in* em (2.11) é igual a,

$$B^* = \inf\{B \in C_{\zeta}^{\mathbb{F}} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\}. \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Probabilidade condicional

Seja o processo de *burn-in* descrito na seção anterior. Considere como problema de otimização minimizar a probabilidade condicional de falhar antes de completar o tempo de operação adicional  $\tau$  dado que o sistema sobrevive ao tempo de *burn-in*, isto é, a função,

$$G(\tau, b) = P(\zeta \leq b + \tau | \zeta > b). \quad (2.14)$$

Supondo que  $\zeta$  é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível, da definição da probabilidade condicional e da decomposição de Doob-Meyer em (A.3) e a equação (2.6), em (2.14) temos que,

$$\begin{aligned} G(\tau, b) &= E[N_{b+\tau} | \zeta > b] = \frac{E[N_{b+\tau} \cdot 1_{\{\zeta > b\}}]}{P(\zeta > b)} \\ &= \frac{E[1_{\{b < \zeta \leq b+\tau\}}]}{P(\zeta > b)} = \frac{E[1_{\{\zeta \leq b+\tau\}} - 1_{\{\zeta \leq b\}}]}{P(\zeta > b)} = E\left\{[\bar{F}_{\zeta}(b)]^{-1} \cdot N_b^{\tau}\right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $\bar{F}_{\zeta}(\cdot)$  é a função de sobrevivência de  $\zeta$ . Seja o processo,

$$\tilde{N}_b^{\tau} = [\bar{F}_{\zeta}(b)]^{-1} \cdot N_b^{\tau}. \quad (2.16)$$

Suponha que  $[\bar{F}_{\zeta}(b)]^{-1}$  é uma função absolutamente contínua, de variação limitada em  $[0, b]$ ,  $0 \leq b < +\infty$ . Desde que o processo  $N_b^{\tau}$  é também de

variação limitada e contínuo à direita, podemos usar a fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes para obter a representação semimartingal regular para  $\tilde{N}_b^\tau$ , como segue,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_b^\tau &= \frac{1}{\bar{F}_\zeta(0)} N_0^\tau + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s^-)} dN_s^\tau + \int_0^b N_s^\tau d\left(\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)}\right) \\ &= \tilde{N}_0^\tau + \int_0^b \frac{[1_{\{\zeta > s+\tau\}}\lambda_{s+\tau} - 1_{\{\zeta > s\}}\lambda_s]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds + \int_0^b d\left(\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)}\right) 1_{\{s < \zeta \leq s+\tau\}} + \tilde{M}_b^\tau, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $\tilde{N}_0^\tau = 1_{\{\zeta \leq \tau\}}$  e  $\tilde{M}_b^\tau = \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)} dM_s^\tau$  é um martingal de média zero limitado em  $L^2$ .

Em  $\{b + \tau < \zeta\}$ , a equação anterior simplifica para,

$$\tilde{N}_b^\tau = \tilde{N}_0^\tau - \int_0^b \frac{(1_{\{\zeta > s\}}\lambda_s - 1_{\{\zeta < s+\tau\}}\lambda_{s+\tau})}{\bar{F}_\zeta(s)} ds + \tilde{M}_b^\tau, \quad \text{em } \{b + \tau < \zeta\}. \quad (2.18)$$

Logo, para  $B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$ ,  $\tilde{B}^*$  que minimiza  $G(\tau, B)$  também maximiza a função  $\tilde{K}(\tau, B) = -E[\tilde{N}_B^\tau] + E[\tilde{N}_0^\tau]$ , isto é,

$$\tilde{K}(\tau, B) = E\left[\int_0^B \frac{(\lambda_s - \lambda_{s+\tau})}{\bar{F}_\zeta(s)} ds\right], \quad (2.19)$$

portanto,

$$\tilde{K}(\tau, \tilde{B}^*) = \sup\left\{E\left[\int_0^B \frac{(\lambda_s - \lambda_{s+\tau})}{\bar{F}_\zeta(s)} ds\right] : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}\right\}. \quad (2.20)$$

**Corolário 2.1.** *Sob as condições no Teorema 2.1, com  $T = \zeta$ ,  $\tilde{B}^* = B^*$ , onde  $B^*$  é dado em (2.13).*

**Prova.**

É suficiente observar que para aplicar a regra de parada *ILA*, o processo  $f_s$  a considerar em  $\{B + \tau < \zeta\}$  é igual a  $f_s = \frac{(\lambda_s - \lambda_{s+\tau})}{\bar{F}_\zeta(s)}$  para  $s \leq B \in C_\zeta^{\mathbb{R}}$ , assim,  $\{f_s \leq 0\} \iff \{\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$ . O resultado segue do Teorema 2.1.  $\square$

### 2.3.3 Exemplo ilustrativo

Seja  $\zeta$  o tempo de vida de um sistema coerente de dois componentes em paralelo, isto é,  $\zeta = T_1 \vee T_2$ , onde os tempos de vida dos componentes,  $T_1$  e  $T_2$  são definidos por  $T_1 = Z_1 \wedge Z_{12}$ ,  $T_2 = Z_2 \wedge Z_{12}$ , com  $Z_1, Z_2, Z_{12}$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de taxa de falha  $r(t) = e^{-t} + 0, 1t, t \geq 0$ , a qual tem forma de banheira com um único ponto de mudança em  $t_1 = 2,303$  e  $r(0) = 1 < r(\infty) = +\infty$ . A Figura 2.1 apresenta a função de densidade  $f(t) = r(t)\bar{F}(t)$ , a função de sobrevivência  $\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}$  e a função de taxa de falha  $r(t)$ . Então, em  $\{\zeta > t\}$ , a  $\mathcal{F}_t$ -intensidade de  $\zeta$  é,  $\lambda_t = r(t) + r(t)1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2\}}$ , isto é,

$$\lambda_t = \begin{cases} r(t), & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ 2r(t), & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (2.21)$$

Portanto o processo de intensidade  $\lambda_t$  só tem um único tempo de mudança  $S_1 = S_2 = t_1$ , e  $\lambda_0 < \lambda_\infty = +\infty$ . No conjunto  $\{t_1 < T_1 \wedge T_2\}$  o processo  $\lambda_t$  é como na Figura 2.2, e no conjunto  $\{t_1 \geq T_1 \wedge T_2\}$  o processo  $\lambda_t$  é como na Figura 2.3.

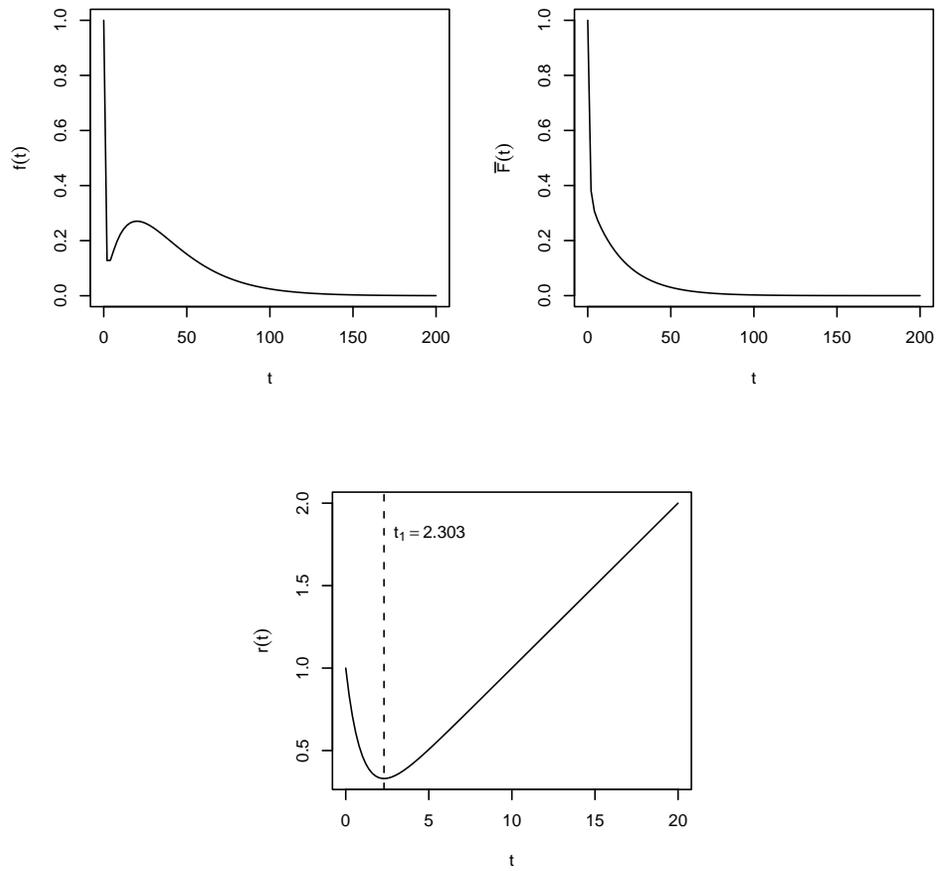


Figura 2.1: Funções no Exemplo 2.3.3

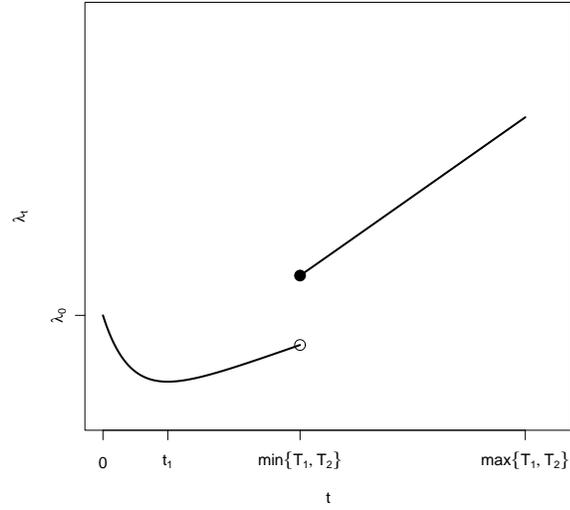


Figura 2.2: Processo  $\lambda_t$  em  $\{t_1 < T_1 \wedge T_2\}$ , Exemplo 2.3.3.

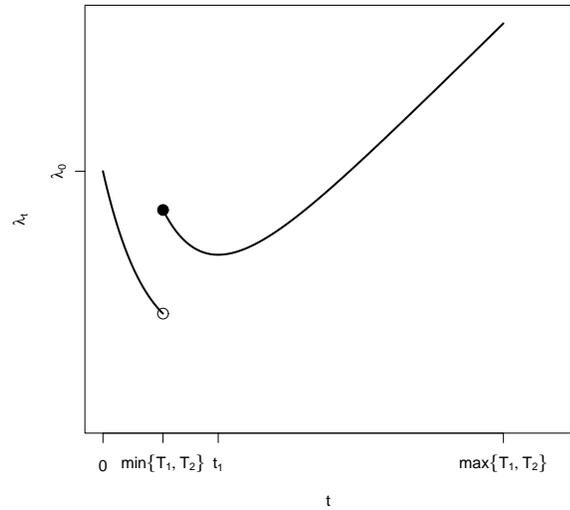


Figura 2.3: Processo  $\lambda_t$  em  $\{t_1 \geq T_1 \wedge T_2\}$ , Exemplo 2.3.3.

Queremos achar  $B^* = \inf\{B \in C_{\zeta}^{\mathbb{F}} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$ . A análise é como segue.

(a) No conjunto  $\{t_1 < T_1 \wedge T_2\}$  consideramos dois casos, identificados olhando na Figura 2.2 e levando em conta a forma de banheira.

(a-1) O conjunto  $\{B + \tau < T_1 \wedge T_2\}$ : Neste caso resolvemos,  $r(B) = r(B + \tau)$ .

(a-2) O conjunto  $\{B + \tau \geq T_1 \wedge T_2\}$ : Neste caso consideramos  $r(B) \leq 2r(B + \tau)$ .

(b) No conjunto  $\{t_1 \geq T_1 \wedge T_2\}$  também consideramos dois casos, identificados olhando na Figura 2.3.

(b-1) O conjunto  $\{B < T_1 \wedge T_2\}$ : Neste caso resolvemos,  $r(B) = 2r(B + \tau)$ . Note que a solução é ótima só se  $B + \tau \geq T_1 \wedge T_2$ .

(b-2) O conjunto  $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$ : Neste caso temos que resolver,  $2r(B) = 2r(B + \tau)$ , isto é,  $r(B) = r(B + \tau)$ .

Para  $\tau = 1$ , a solução da equação  $r(B) = 2r(B + \tau)$  é  $B_1^* = 0,188$ , enquanto que para  $r(B) = r(B + \tau)$  é  $B_2^* = 1,844$ . Observe que  $B_1^* + \tau = 1,188 < t_1$ . Logo, no caso (a-2) teríamos que  $T_1 \wedge T_2 \leq 1,188 < t_1$ , solução que não pertence a  $\{T_1 \wedge T_2 > t_1\}$ . Assim, a única solução ótima no conjunto  $\{T_1 \wedge T_2 > t_1\}$  é  $B_2^*$ , para a qual temos  $r(B) < 2r(B + \tau)$ .

Conforme os casos discutidos acima, interpretamos os resultados como segue: Iniciar o procedimento de *burn-in* com uma unidade nova. Se antes de  $B_1^*$  observamos  $T_1 \wedge T_2$ , então continuamos o procedimento até  $B_2^*$ . Se

até  $t = B_1^*$  não observamos  $T_1 \wedge T_2$ , temos que decidir se paramos em  $B_1^*$  ou continuamos até  $B_2^*$ . Devemos levar em conta que  $B_1^*$  é ótimo em  $A = \{B_1^* < T_1 \wedge T_2 \leq B_1^* + \tau\}$ , mas em  $t = B_1^*$  não sabemos com certeza se  $A$  ocorrerá. Logo, podemos basear nossa decisão na chance do evento  $A$ . Se esta probabilidade é pequena, continuamos com o *burn-in* até  $B_2^*$  e caso observemos  $A$ , paramos imediatamente, isto é, paramos em  $t = T_1 \wedge T_2$ . De outra forma, prosseguimos até  $B_2^*$ .

### 2.3.4 Exemplo. Otimização sob informação parcial

Vamos a considerar o problema de otimização discutido até aqui, quando um sistema com dois componentes em paralelo é observado sob a filtragem  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ,

$$\mathcal{G}_t = \sigma \left\{ 1_{\{\zeta > s\}}, 1_{\{T_1 > s\}}, 0 \leq s \leq t \right\},$$

isto é, quando o observador só tem informação sobre o estado do sistema e do componente 1. Condicionado a  $\mathcal{G}_t$ , o processo de intensidade do sistema é dado por

$$\hat{\lambda}_t = E[\lambda_t | \mathcal{G}_t] = \tilde{r}(t) 1_{\{T_1 > t\}} + 2r(t) 1_{\{T_1 \leq t\}},$$

onde  $\tilde{r}(t) = r(t) \times [2 - \exp(e^{-t} - 0,05t^2 - 1)]$  e  $r(t)$  é como foi dado no Exemplo 2.3.3. A função  $\tilde{r}(t)$  tem um máximo local, aproximadamente, em  $t = 0,04$  e um mínimo absoluto em  $t_1 = 2,103$ , mas desde que  $\tilde{r}(0,04) \approx \tilde{r}(0) = 1$ , podemos considerar  $\tilde{r}(t)$  como sendo uma função na forma de banheira com um ponto de mudança em  $t_1$ . Vimos que  $r(t)$  tem forma de banheira com um único ponto de mudança em  $t_2 = 2,303$ . Note também

que  $r(t) \leq \tilde{r}(t) \leq 2r(t), \forall t \geq 0$  e  $\tilde{r}(t) \rightarrow 2r(t)$ , enquanto  $t \rightarrow +\infty$ . Logo, da análise do processo  $\hat{\lambda}_t$  nos conjuntos  $\{T_1 \leq t_1\}$ ,  $\{T_1 > t_1\}$ , concluímos que  $\hat{\lambda}_t$  tem forma de banheira com um único ponto de mudança  $S_1$  dado por

$$S_1 = t_2 1_{\{T_1 \leq t_1\}} + t_1 1_{\{T_1 > t_1\}}.$$

As Figuras 2.4 e 2.5 apresentam o processo  $\hat{\lambda}_t$  nos conjuntos  $\{T_1 \leq t_1\}$  e  $\{T_1 > t_1\}$ , respectivamente. Seja o processo  $X_t = E[1_{\{\zeta \leq t\}} | \mathcal{G}_t]$ , e suponha de novo que  $\zeta$  é um tempo de parada totalmente inacessível. A partir do Teorema da Projeção da teoria de filtragem, como em Brémaud [17], temos que,

$$X_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \hat{\lambda}_s ds + \bar{M}_t, \quad (2.22)$$

onde  $\bar{M}_t$  é um  $\mathcal{G}_t$ -martingal uniformemente integrável e de média zero, e  $1_{\{\zeta > t\}} \hat{\lambda}_t$  é um processo  $\mathcal{G}_t$ -progressivamente mensurável.

Seja o processo  $Y_b^\tau = X_{b+\tau} - X_b$ , logo

$$Y_b^\tau = Y_0^\tau - \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \hat{\lambda}_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} \hat{\lambda}_{s+\tau}] ds + \bar{M}_b^\tau, \quad (2.23)$$

onde  $Y_0^\tau = X_\tau$  e  $\bar{M}_b^\tau = \bar{M}_{b+\tau} - \bar{M}_b - \bar{M}_\tau$  é um martingal de média zero, uniformemente integrável. Observe que  $Y_b^\tau$  é um semimartingal regular e  $E[Y_b^\tau] = E[N_b^\tau]$ , com  $N_b^\tau$  como foi definido em (2.5). Queremos minimizar  $E[Y_B^\tau]$  para  $B$  na classe  $C_\zeta^{\mathbb{G}}$ ,

$$C_\zeta^{\mathbb{G}} = \left\{ B \geq 0 : B \text{ é um } \mathcal{G}_t\text{-tempo de parada, } B+\tau \leq \zeta, E[\zeta] < \infty, E[B] < \infty \right\}. \quad (2.24)$$

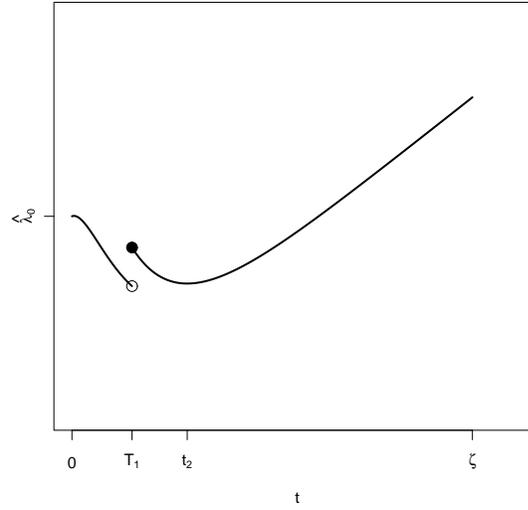


Figura 2.4: Processo  $\hat{\lambda}_t$  em  $\{T_1 \leq t_1\}$ , Exemplo 2.3.4

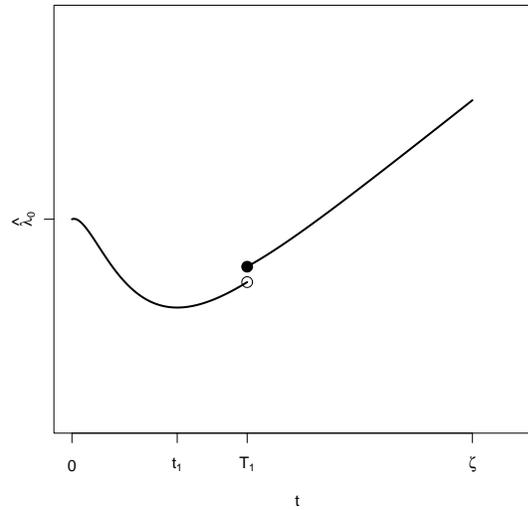


Figura 2.5: Processo  $\hat{\lambda}_t$  em  $\{T_1 > t_1\}$ , Exemplo 2.3.4

Para  $\tau$  fixado,  $\hat{B}^* \in C_\zeta^{\mathbb{G}}$  o qual minimiza  $E[Y_B^T]$  é tal que

$$\hat{K}(\tau, \hat{B}^*) = \sup \left\{ E \left[ \int_0^B (\hat{\lambda}_s - \hat{\lambda}_{s+\tau}) ds \right] : B \in C_\zeta^{\mathbb{G}} \right\}. \quad (2.25)$$

Desde que o processo  $\hat{\lambda}_t$  tem forma de banheira, do Teorema 2.1 temos que  $\hat{B}^* = \inf \{ B \in C_\zeta^{\mathbb{G}} : \hat{\lambda}_B \leq \hat{\lambda}_{B+\tau} \}$ . Para achar  $\hat{B}^*$  procedemos como no Exemplo 2.3.3, considerando os conjuntos  $\{T_1 \leq t_1\}$  and  $\{T_1 > t_1\}$ .

(a) Em  $\{T_1 \leq t_1\}$  (Ver Figura 2.4),

(a-1) No conjunto  $\{B < T_1\}$ : Para obter um  $\hat{B}^*$  viável é necessário que  $T_1 \leq B + \tau$ , isto é,  $B < T_1 \leq B + \tau$  e sob esta condição resolvemos a equação  $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$ .

(a-2) No conjunto  $\{B \geq T_1\}$ : Resolvemos  $2r(B) = 2r(B + \tau)$  ou equivalentemente,  $r(B) = r(B + \tau)$ .

(b) Em  $\{T_1 > t_1\}$  (ver Figura 2.5), consideramos os casos a seguir,

(b-1) No conjunto  $\{B + \tau < T_1\}$ : Neste caso resolvemos a equação  $\tilde{r}(B) = \tilde{r}(B + \tau)$ .

(b-2) No conjunto  $\{B < T_1 \leq B + \tau\}$ , resolvemos  $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$ .

Tomando  $\tau = 1$ , as soluções são como segue: Para a equação  $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$  obtemos  $\hat{B}_1^* = 1,132$ ; para a equação  $\tilde{r}(B) = \tilde{r}(B + \tau)$  a solução é  $\hat{B}_2^* = 1,634$  e para  $r(B) = r(B + \tau)$  a solução é  $\hat{B}_3^* = 1,844$ .

Da análise acima, note que  $\hat{B}_1^*$  é ótimo se este tempo pertence à subclasse de  $B \in C_\zeta^{\mathbb{G}}$  tal que  $\{B < T_1 \leq B + \tau\} \cap \{T_1 \leq t_1\} \cup \{B < T_1 \leq B + \tau\} \cap \{T_1 > t_1\} = \{B < T_1 \leq B + \tau\}$ .  $\hat{B}_2^*$  é ótimo se pertence à subclasse de  $B \in C_\zeta^{\mathbb{G}}$  tal que  $\{T_1 > t_1\} \cap \{T_1 > B + \tau\}$ , enquanto que  $\hat{B}_3^*$  é ótimo se está na subclasse de  $B \in C_\zeta^{\mathbb{G}}$  tal que  $\{T_1 \leq B\} \cap \{T_1 \leq t_1\}$ . Considerando estes fatos, interpretamos os resultados: Iniciamos o procedimento de *burn-in* com um sistema novo. Se observamos  $T_1$  antes de  $t = \hat{B}_1^*$ , continuamos o processo até  $t = \hat{B}_3^*$ . Se não observamos  $T_1$  antes de  $t = \hat{B}_1^*$ , decidimos se paramos o processo nesse tempo ou se o estendemos até  $t = \hat{B}_2^*$ . Seja  $A_1 = \{\hat{B}_1^* < T_1 \leq \hat{B}_1^* + \tau\} = \{1,132 < T_1 \leq 2,132\}$  e  $A_2 = \{T_1 > t_1\} \cap \{T_1 > \hat{B}_2^* + \tau\} = \{T_1 > 2,634\}$ . Se a chance do evento  $A_2$  é maior do que a chance do evento  $A_1$ , sugerimos continuar o procedimento até  $t = \hat{B}_2^*$ , mas no caso em que  $T_1$  é observado antes desse tempo, paramos imediatamente, isto é, em  $t = T_1$ . Observe que se  $1,634 < T_1 \leq 2,634$ ,  $\hat{B}_2^*$  não é ótimo mas  $\hat{\lambda}_{\hat{B}_2^*} = \tilde{r}(\hat{B}_2^*) < 2r(\hat{B}_2^* + \tau) = \hat{\lambda}_{\hat{B}_2^* + \tau}$ .

## 2.4 Maximizando o lucro unitário por operação sem falha durante um período fixado

Durante o *burn-in* e no período de operação adicional, custos e ganhos são causados devido à falha ou à sobrevivência do sistema, respectivamente. Block e Savits [16] discutem vários modelos para o custo ou lucro esperado associado a este processo. Para um sistema coerente observado ao nível de seus componentes, propomos o seguinte modelo geral para o processo do

lucro unitário, representado como um semimartingal regular (ou *SSM*).

**Definição 2.2.** **Processo geral de lucro unitário relativo ao *burn-in* de um sistema coerente.** *Sejam  $a_1 < a_2$  constantes positivas e  $g(t)$  uma função real contínua, não negativa e integrável em intervalos limitados. Definimos como o processo geral de lucro unitário, o semimartingal regular dado por.*

$$\tilde{Z}_b^{\tau,1} = \tilde{Z}_0^{\tau,1} + \int_0^b \{1_{\{\zeta > s\}}[a_1\lambda_s - g(s)] - 1_{\{\zeta > s+\tau\}}a_2\lambda_{s+\tau}\}ds + \tilde{M}_b^{\tau,1}, \quad (2.26)$$

onde  $E|\tilde{Z}_0^{\tau,1}| < \infty$ ,  $E\left\{\int_0^b |1_{\{\zeta > s\}}[a_1\lambda_s - g(s)] - 1_{\{\zeta > s+\tau\}}a_2\lambda_{s+\tau}|ds\right\} < \infty$ ,  $\forall 0 \leq b < \infty$ ,  $\zeta$  é o tempo de vida do sistema, um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito totalmente inacessível,  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  é o  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade de falha do sistema, e  $\tilde{M}_b^{\tau,1} \in \mathcal{M}_0^2$  é um martingal uniformemente integrável.

Queremos achar  $B^{1,*}$  na classe de  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada  $C_\zeta^{\mathbb{F}}$ , definida previamente em (2.9), que maximize  $E[\tilde{Z}_B^{\tau,1}]$ , ou equivalentemente, que maximize

$$K^1(\tau, B) = E\left[\int_0^B (a_1\lambda_s - a_2\lambda_{s+\tau} - g(s))ds\right], \quad B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}. \quad (2.27)$$

Como nos problemas analisados na seção anterior, estabelecemos algumas condições sob as quais seja possível obter uma solução ótima, que são enunciadas nos teoremas a seguir.

**Teorema 2.2.** *Sejam  $T$ ,  $C_T^{\mathbb{F}}$  e  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  como no Teorema 2.1 e o processo  $\tilde{X}^\tau = (\tilde{g}, \tilde{R})$ , um  $\mathcal{F}_t$ -SSM tal que  $\tilde{g}_s = 1_{\{T > s\}}a_1\lambda_s - 1_{\{T > s+\tau\}}a_2\lambda_{s+\tau}$ , onde  $0 < a_1 < a_2$  são constantes,  $\tilde{R} \in \mathcal{M}_0^2$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal uniformemente*

integrável e  $E[\tilde{X}_t^\tau] < \infty \forall t \geq 0$ . Então, o tempo de parada ótimo,  $\tilde{B}^{0,*} \in C_T^{\mathbb{F}}$ , que maximiza  $\tilde{K}^0(\tau, B) = E[\tilde{X}_B^\tau] - E[\tilde{X}_0^\tau]$ ,  $B \in C_T^{\mathbb{F}}$ , isto é,

$$\tilde{K}^0(\tau, B) = E\left[\int_0^B (a_1\lambda_s - a_2\lambda_{s+\tau})ds\right], \quad (2.28)$$

é tal que,

i.  $\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_T^{\mathbb{F}} : \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$ , onde  $\tilde{\lambda}_B = (a_1/a_2)\lambda_B$ , e

ii.  $\tilde{B}^{0,*} \leq B^{0,*} \leq S_1$ ,  $B^{0,*}$  dado no Teorema 2.1.

**Nota 2.2.** Como no Teorema 2.1, no teorema anterior  $T$  representa um tempo de parada de referência adequado segundo o problema específico a resolver.

**Prova.**

i. Observe que

$$\tilde{\lambda}_t < \lambda_t, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.29)$$

Considere os dois casos seguintes,

$$(a) \quad \tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_{S_1},$$

$$(b) \quad \tilde{\lambda}_0 > \lambda_{S_1}.$$

Em (a): Devido à forma de banheira de  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ , temos que  $\forall s' \geq 0$ ,  $\lambda_{S_1} \leq \lambda_{s'}$  e portanto  $\forall s' \geq 0$ ,  $\tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_{s'}$ . Observe que  $(\tilde{\lambda}_t)_{t \geq 0}$  também tem forma de banheira, logo,  $\forall 0 \leq s \leq S_2$ ,  $\tilde{\lambda}_s < \tilde{\lambda}_0$  e  $\forall s' \geq 0$ ,  $0 \leq s \leq S_2$ ,  $\tilde{\lambda}_s < \lambda_{s'}$ . Em consequência,

$$\forall 0 \leq s \leq S_2, \quad \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}. \quad (2.30)$$

Se  $s > S_2$ , devido à forma de banheira e de (2.29), temos que  $\forall s' \geq s > S_2$ ,  $\tilde{\lambda}_s < \lambda_s \leq \lambda_{s'}$ , logo,

$$\forall s > S_2, \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}. \quad (2.31)$$

Assim, de (2.30) e (2.31) conclui-se que

$$\begin{aligned} \forall s \geq 0, \tilde{\lambda}_s &\leq \lambda_{s+\tau}, \text{ e portanto (com } s = s + h), \\ \forall s \geq 0, h \geq 0 \tilde{\lambda}_{s+h} &\leq \lambda_{s+\tau+h}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Em (b): Pela forma de banheira dos processos  $(\tilde{\lambda}_t)_{t \geq 0}$  e  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  e da desigualdade em (2.29), conclui-se que para todo  $\omega \in \Omega$  existe  $0 \leq t' \leq S_1$  tal que  $t' = \inf\{s \geq 0 : \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{S_1}\}$ . Seja  $s^* = \inf\{s \geq 0 : \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$ . Do Teorema 2.1 temos que  $\forall s \geq s^*, h \geq 0, \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$  e portanto  $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$ . Em consequência, de (2.29) também obtemos que  $\forall s \geq s^*, h \geq 0, \tilde{\lambda}_s < \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$  e portanto  $\tilde{\lambda}_{s+h} < \lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$ . Além disso, observe que  $\forall s \geq t', s' \geq 0, \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{S_1} \leq \lambda_{s'}$ , logo, para  $s' = s + \tau$ , obtemos que  $\forall s \geq t', \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}$ , e portanto,  $\forall s \geq t', h \geq 0, \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$ . Da análise anterior conclui-se que

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau} \implies \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq s^* \wedge t', h \geq 0. \quad (2.33)$$

Finalmente, dos resultados obtidos na análise em (a) e (b), concluímos que o processo  $\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$  satisfaz o *caso monótono* (2.2) e como o martingal  $\tilde{R}$  é uniformemente integrável, a regra de parada monótona *ILA* definida por  $\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_T^{\mathbb{F}}, \tilde{g}_B \leq 0\} = \inf\{B \in C_T^{\mathbb{F}}, \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$  é ótima, isto é,

$$\tilde{K}^0(\tau, \tilde{B}^{0,*}) = \sup\{\tilde{K}^0(\tau, B) : B \in C_T^{\mathbb{F}}\}.$$

ii. Da definição de  $\tilde{B}^{0,*}$ , temos que  $\forall B < \tilde{B}^{0,*}, \tilde{\lambda}_B > \lambda_{B+\tau}$ . Suponha que  $B^{0,*} < \tilde{B}^{0,*}$ , então  $\tilde{\lambda}_{B^{0,*}} > \lambda_{B^{0,*}+\tau}$ , e portanto  $\lambda_{B^{0,*}} > (a_2/a_1)\lambda_{B^{0,*}+\tau} >$

$\lambda_{B^{0,*}+\tau}$ . Mas da definição de  $B^{0,*}$  temos que  $\lambda_{B^{0,*}} \leq \lambda_{B^{0,*}+\tau}$ , o que contradiz o anterior. Logo,  $B^{0,*} \geq \tilde{B}^{0,*}$ .  $\square$

**Teorema 2.3.** *Seja  $B^{1,*} \in C_\zeta^{\mathbb{R}}$  tal que*

$$K^1(\tau, B^{1,*}) = \sup\{K^1(\tau, B) : B \in C_\zeta^{\mathbb{R}}\}.$$

Com  $K^1(\tau, B^{1,*})$  definido em (2.27). Suponha que o processo de intensidade de falha do sistema  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  satisfaz as condições do Teorema 2.1. Seja o tempo de parada  $\rho_\zeta^* = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}} : f_B^1 \leq 0\}$ , onde, para  $B \in C_\zeta^{\mathbb{R}}$ , definimos  $f_B^1 = a_1\lambda_B - a_2\lambda_{B+\tau} - g(B)$ , as constantes  $0 < a_1 < a_2$  e  $g(\cdot)$  é uma função real não negativa, contínua e integrável em intervalos limitados. Se

$$\forall s \geq \rho_\zeta^*, h \geq 0, \{f_s^1 \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h}^1 \leq 0\}, \bigcup_{s \geq 0} \{f_s^1 \leq 0\} = \Omega, \quad (2.34)$$

então  $B^{1,*} = \rho_\zeta^* \leq \tilde{B}^{0,*} \leq S_1$  onde  $\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}} : \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$ , com  $\tilde{\lambda}_B = (a_1/a_2)\lambda_B$ .

**Prova.**

Considerando que o processo de intensidade de falha  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  tem a forma de banheira com tempos de mudança  $0 \leq S_1 \leq S_2$ , e  $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$  e assumindo que os processos semimartingais regulares indicados nos Teoremas 2.1 e 2.2 satisfazem as condições impostas, respectivamente, com  $T = \zeta$ , temos que

*i.*  $\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}}, \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$ , com  $\tilde{\lambda}_B = (a_1/a_2)\lambda_B$ , é tal que

$$\tilde{K}^0(\tau, \tilde{B}^{0,*}) = \sup_{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}}} E \left[ \int_0^B (a_1\lambda_s - a_2\lambda_{s+\tau}) ds \right], \text{ e}$$

ii.  $\tilde{B}^{0,*} \leq B^{0,*} = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} \leq S_1$ , com  $B^{0,*}$  tal que

$$K^0(\tau, B^{0,*}) = \sup_{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}} E \left[ \int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds \right].$$

Consequentemente, o processo  $h_s = \tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$  satisfaz o *caso monótono* (2.2) e  $\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : h_B \leq 0\}$ . Note que  $\{f_s^1 \leq 0\} \iff \{h_s \leq [g(s)/a_2]\}$ , de modo que  $\rho_\zeta^* = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : h_B \leq [g(B)/a_2]\}$ . Portanto, para  $B$  tal que  $0 \leq B < \rho_\zeta^*$ , temos que  $h_B > [g(B)/a_2]$ , e como  $[g(B)/a_2] \geq 0$ , então  $\forall 0 \leq B < \rho_\zeta^*$ ,  $h_B > 0$ . Suponha que  $\rho_\zeta^* > \tilde{B}^{0,*}$ , isto implica que  $h_{\tilde{B}^{0,*}} > 0$ , mas pela definição de  $\tilde{B}^{0,*}$ , temos que  $h_{\tilde{B}^{0,*}} \leq 0$ . Portanto,  $\rho_\zeta^* \leq \tilde{B}^{0,*}$ . Finalmente, desde que  $h_s$  satisfaz o *caso monótono* e a condição em (2.34) é válida, então o processo  $h_s - [g(s)/a_2]$  também satisfaz o *caso monótono* e portanto a regra de parada ótima  $B^{1,*} \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$  é tal que,  $K^1(\tau, B^{1,*}) = \sup\{K^1(\tau, B) : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}\}$  e  $B^{1,*} = \rho_\zeta^* \leq \tilde{B}^{0,*}$ . □

**Nota 2.3.** Observe que se a função  $g(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ , pelo Teorema 2.2, o tempo ótimo  $B^{1,*}$  é igual a  $\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}, \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$  com  $\tilde{\lambda}_B = (a_1/a_2)\lambda_B$ .

### 2.4.1 Caso A

Para um período de *burn-in*  $b$  e um tempo de operação adicional fixado  $\tau$ , considere a função de lucro unitário esperado, definida por

$$G^1(\tau, b) = K \cdot P(\zeta > b + \tau) - C_0 \cdot P(\zeta \leq b) - C \cdot P(b < \zeta \leq b + \tau), \quad (2.35)$$

onde  $K > 0$  e  $C > 0$  são, respectivamente, o ganho unitário por sobrevivência e o custo unitário por falha durante o período de operação adicional  $\tau$ , e

$C_0 > 0$ ,  $C_0 < C$ , é o custo devido a falha durante o *burn-in*. Queremos achar  $B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$  que maximize  $G^1(\tau, B)$ . Para isto, definimos o processo de lucro unitário como sendo,

$$Z_b^\tau = K + (C - C_0)1_{\{\zeta \leq b\}} - (C + K)1_{\{\zeta \leq b+\tau\}}, \quad (2.36)$$

e tal que  $E[Z_b^\tau] = G^1(\tau, b)$ . Supondo que  $\zeta$  é um tempo de parada totalmente inacessível, de (A.3), a representação *SSM* para  $Z_b^\tau$  é

$$Z_b^\tau = Z_0^\tau + \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}}(C - C_0)\lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}}(C + K)\lambda_{s+\tau}]ds + M_b^\tau, \quad (2.37)$$

onde  $Z_0^\tau = K - (C + K)1_{\{\zeta \leq \tau\}}$ , e  $M_b^\tau = (C - C_0)M_b + (C + K)(M_\tau - M_{b+\tau})$ ,  $M_b^\tau \in \mathcal{M}_0^2$  é um martingal de média zero e uniformemente integrável. Note que o processo  $Z_b^\tau$  é semelhante ao processo  $\tilde{Z}_b^{\tau,1}$  com  $g(s) \equiv 0$ ,  $a_1 = C - C_0 > 0$ , e  $a_2 = C + K > 0$ ,  $a_1 < a_2$ . Logo, Se o processo de intensidade de falha do sistema  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  tem forma de banheira e satisfaz as condições no Teorema 2.2, o tempo de *burn-in* ótimo é

$$B^{1,*} = \inf \left\{ B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : \left( \frac{C - C_0}{C + K} \right) \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau} \right\}. \quad (2.38)$$

### 2.4.2 Caso B

Suponha que um sistema coerente é submetido a um procedimento de *burn-in* com tempo de duração  $b$ . Se o sistema falha antes de  $b$  então é descartado a um custo  $C_s > 0$  e outro sistema é submetido ao mesmo procedimento. O procedimento anterior é repetido até obter o primeiro sistema sobrevivendo ao tempo de *burn-in*. O custo para este procedimento também é proporcional

ao tempo necessário para obter uma unidade sobrevivendo ao *burn-in*, com constante de proporcionalidade  $C_0$ . O sistema que sobreviver ao *burn-in* é logo colocado em operação por um período fixado  $\tau$ . Neste último período, um custo de  $C > C_s$  ocorre se o sistema não sobrevive e um ganho de  $K$  se ele sobrevive.

Como o lucro unitário esperado é igual à esperança do ganho unitário menos os custos unitários totais, é necessário considerar os custos incorridos até obter o primeiro sistema sobrevivendo ao *burn-in* e os custos ou ganhos incorridos com este último sistema durante o tempo de operação  $\tau$ . Seja  $(\zeta_j)_{j \geq 1}$ , a sequência dos tempos de vida dos sistemas submetidos a *burn-in*. Então, o processo do custo durante o *burn-in* é dado por,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_j \leq b\}} \cdot (C_s \cdot 1_{\{\zeta_n \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta_n)), \quad (2.39)$$

com a convenção  $\prod_{j=1}^{n-1} (\bullet) \equiv 1$ , para  $n = 1$ . Suponha que a sequência  $(\zeta_j)_{j \geq 1}$  corresponde a variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas como  $\zeta$ , um tempo de parada finito totalmente inacessível.

Temos também que para um sistema com *burn-in* o custo devido à falha durante o período de operação adicional  $\tau$  é dado por,

$$C \cdot (1_{\{\zeta \leq b + \tau\}} | \zeta > b), \quad (2.40)$$

enquanto que o ganho devido à sobrevivência é,

$$K \cdot (1_{\{\zeta > b + \tau\}} | \zeta > b). \quad (2.41)$$

Logo, de (2.39), (2.40), (2.41) e da definição de esperança condicional, obtemos que o lucro unitário esperado é igual a,

$$\begin{aligned}
G^2(\tau, b) &= E[K \cdot (1_{\{\zeta > b + \tau\}} | \zeta > b)] - E[C \cdot (1_{\{\zeta \leq b + \tau\}} | \zeta > b)] \\
&\quad - E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_j \leq b\}} \cdot (C_s \cdot 1_{\{\zeta_n \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta_n))\right] \\
&= E\left[\frac{1}{\bar{F}_\zeta(t)} K \cdot 1_{\{\zeta > b + \tau\}}\right] - E\left[\frac{1}{\bar{F}_\zeta(t)} C \cdot 1_{\{b < \zeta \leq b + \tau\}}\right] \\
&\quad - E\left[\frac{1}{\bar{F}_\zeta(t)} (C_s \cdot 1_{\{\zeta \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta))\right] \\
&= K + E\left[\frac{1}{\bar{F}_\zeta(b)} Z_b^\tau\right], \tag{2.42}
\end{aligned}$$

onde  $\bar{F}_\zeta(\cdot)$  é a função de sobrevivência de  $\zeta$ , e o processo  $Z_b^\tau$  corresponde a,

$$Z_b^\tau = (C + K - C_s)1_{\{\zeta \leq b\}} - (C + K)1_{\{\zeta \leq b + \tau\}} - C_0(b \wedge \zeta). \tag{2.43}$$

Como o processo  $b \wedge \zeta = \int_0^b 1_{\{\zeta > s\}} ds$ , P-q.c., então junto com (A.3), obtemos a seguinte representação semimartingal regular para  $Z_b^\tau$ ,

$$Z_b^\tau = Z_0^\tau + \int_0^b \{1_{\{\zeta > s\}}[(C + K - C_s)\lambda_s - C_0] - 1_{\{\zeta > s + \tau\}}(C + K)\lambda_{s + \tau}\} ds + M_b^\tau, \tag{2.44}$$

com  $Z_0^\tau = -(C + K)1_{\{\zeta \leq \tau\}}$  e  $M_b^\tau = (C + K)(M_\tau - M_{b + \tau}) + (C + K - C_s)M_b$ ,  $M_b^\tau \in \mathcal{M}_0^2$  é um martingal de média zero e uniformemente integrável. Assumindo que  $[\bar{F}_\zeta(t)]^{-1}$  é uma função absolutamente contínua e de variação limitada em  $[0, b]$ ,  $b < +\infty$ , e como  $Z_b^\tau$  é também um processo de variação

limitada e contínuo à direita, podemos obter a representação semimartingal regular do processo

$$\tilde{Z}_b^\tau = K + \frac{1}{\bar{F}_\zeta(b)} Z_b^\tau, \quad (2.45)$$

usando a fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes, como segue,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_b^\tau &= K + \frac{1}{\bar{F}_\zeta(0)} Z_0^\tau + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s^-)} dZ_s^\tau + \int_0^b Z_s^\tau d\left(\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)}\right), \\ &= \tilde{Z}_0^\tau + \int_0^b \frac{1_{\{\zeta > s\}}[(C + K - C_s)\lambda_s - C_0] - 1_{\{\zeta > s + \tau\}}(C + K)\lambda_{s + \tau}}{\bar{F}_\zeta(s)} ds \\ &\quad + \int_0^b \frac{[(C + K - C_s)1_{\{\zeta \leq s\}} - (C + K)1_{\{\zeta \leq s + \tau\}} - C_0(s \wedge \zeta)]r_\zeta(s)}{\bar{F}_\zeta(s)} ds \\ &\quad + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)} d\tilde{M}_s^\tau, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde  $\tilde{Z}_0^\tau = K - (C + K)1_{\{\zeta \leq \tau\}}$  e  $r_\zeta(s)$  é a função de taxa de falha ordinária de  $\zeta$ . Em  $\{b + \tau < \zeta\}$ , a expressão anterior simplifica para,

$$\tilde{Z}_b^\tau = \tilde{Z}_0^\tau + \int_0^b \tilde{f}_s ds + \tilde{R}_b^\tau, \text{ em } \{b + \tau < \zeta\} \quad (2.47)$$

com o processo  $\tilde{f}_s$  igual a,

$$\tilde{f}_s = \frac{1_{\{\zeta > s\}}[(C + K - C_s)\lambda_s - C_0(1 + s \cdot r_\zeta(s))] - 1_{\{\zeta > s + \tau\}}(C + K)\lambda_{s + \tau}}{\bar{F}_\zeta(s)}$$

enquanto que o martingal

$$\tilde{R}_b^\tau = \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)} dM_s^\tau,$$

é limitado em  $L^2$ .

Tomando  $a_1 = C + K - C_s > 0$ ,  $a_2 = C + K$ ,  $a_2 > a_1$ ,  $g(s) = C_0[1 + s \cdot r_\zeta(s)]$ , e o processo  $f_s^1 = a_1 \lambda_s - a_2 \lambda_{s+\tau} - g(s)$ , então  $\tilde{f}_s = f_s^1 / \bar{F}_\zeta(s)$  e assim temos que  $\{\tilde{f}_s \leq 0\} \iff \{f_s^1 \leq 0\}$ . Portanto, se o processo de intensidade de falha do sistema e a função  $g(t)$  satisfazem as condições do Teorema 2.3, para  $B \in C_\zeta^{\mathbb{R}}$ , o tempo ótimo de *burn-in* que maximiza  $E[\tilde{Z}_B^\tau] = G^2(\tau, B)$  é

$$B^{1,*} = \inf \left\{ B \in C_\zeta^{\mathbb{R}} : (C + K - C_s) \lambda_B - (C + K) \lambda_{B+\tau} \leq C_0[1 + B \cdot r_\zeta(B)] \right\}. \quad (2.48)$$

### 2.4.3 Exemplo ilustrativo

Considere o mesmo sistema do Exemplo 2.3.3. Primeiro, achamos  $B^{1,*}$  dado em (2.38), com  $C = 10$ ,  $C_0 = 2$ ,  $K = 5$ ,  $2$  e um tempo de operação fixado  $\tau = 1$ . Seja  $\tilde{r}(t) = \left( \frac{C-C_0}{C+K} \right) r(t)$  e  $\tilde{\lambda}_t = \left( \frac{C-C_0}{C+K} \right) \lambda_t$ . Como temos que comparar os processos  $\tilde{\lambda}_B$  e  $\lambda_{B+\tau}$  em lugar de  $\lambda_B$  vs.  $\lambda_{B+\tau}$ , não é necessário requerer que  $B + \tau > t_1$ , isto é, é possível obter  $B^{1,*}$  tal que  $B^{1,*} + \tau \leq t_1$ . Logo, precisamos considerar os casos seguintes para achar a solução ótima:

- (a) Em  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}} : T_1 \wedge T_2 \leq B\}$ : Neste caso temos que resolver  $2\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$ , ou equivalentemente,  $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$ .
- (b) Em  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}} : B < T_1 \wedge T_2 \leq B + \tau\}$ : Neste caso temos que resolver  $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$ .
- (c) Em  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{R}} : T_1 \wedge T_2 > B + \tau\}$ : Aquí resolvemos a equação  $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$ .

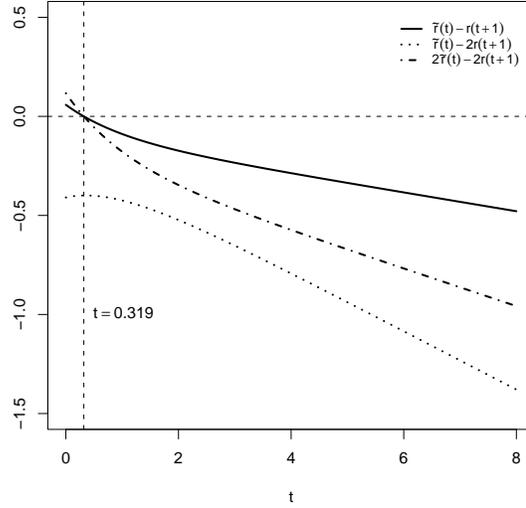


Figura 2.6: Funções para a análise das soluções no Exemplo 2.4.3

Para a equação  $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$  a solução é  $B^{1,*} = 0,319$ , enquanto que a equação  $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$  não tem solução, pois  $\forall t \geq 0, \tilde{r}(t) - 2r(t+1) < 0$ , como mostra a Figura 2.6. A interpretação destes resultados é como segue: Se ao iniciar o sistema (em  $t = 0$ ), só um dos componentes funciona, o sistema deve ser submetido a *burn-in* até  $B^{1,*} = 0,319$ . Se em  $t = 0$  ambos componentes funcionam, é necessário decidir se fazemos ou não o *burn-in*. Segundo a análise acima,  $B^{1,*} = 0,319$  é ótimo se acontece o evento  $A = \{T_1 \wedge T_2 \leq 0,319\} \cup \{T_1 \wedge T_2 > 1,319\}$ . Como nos exemplos das seções anteriores, é impossível saber com certeza se tal evento vai a ser observado ou não. Contudo, se a chance de  $A$  é maior do que a chance de  $\bar{A} = \{0,319 < T_1 \wedge T_2 \leq 1,319\}$ , submetemos o sistema a *burn-in* ainda que

para algumas unidades seja observado o evento  $\bar{A}$ .

A seguir, analisamos a solução para  $B^{1,*}$  em (2.48) com  $C_0 = 2$ ,  $C_s = 5$ ,  $C = 10$ ,  $K = 15$  e  $\tau = 1$ . Para isto, definimos as funções

$$\tilde{r}(t) = \left( \frac{C + K - C_s}{C + K} \right) r(t), \quad g(t) = C_0[1 + t \cdot r_\zeta(t)],$$

onde

$$r_\zeta(t) = (e^{-t} + 0.1t) \times \frac{4 - 3 \exp\{e^{-t} - 1 - 0.05t^2\}}{2 - \exp\{e^{-t} - 1 - 0.05t^2\}}$$

é a função de taxa de falha ordinária de  $\zeta$ , e o processo  $\tilde{\lambda}_t = \left( \frac{C+K-C_s}{C+K} \right) \lambda_t$ .

A Figura 2.7 apresenta a função  $h(t) = g(t)/(C + K)$ , a qual é uma função real crescente e positiva para  $t \geq 0$ . A Figura 2.8 mostra as funções  $\tilde{r}(t) - r(t+1) - h(t)$ ,  $\tilde{r}(t) - 2r(t+1) - h(t)$  e  $2\tilde{r}(t) - 2r(t+1) - h(t)$ , as quais são todas funções decrescentes para  $t \geq 0$ . Da Figura 2.8 é claro que o processo

$$\tilde{\lambda}_t - \lambda_{t+\tau} - h(t) = \frac{(C + K - C_s)\lambda_t - (C + K)\lambda_{t+\tau} - C_0[1 + t \cdot r_\zeta(t)]}{C + K}$$

satisfaz o *caso monótono* (2.2), logo o tempo ótimo de *burn-in* é dado por (2.48).

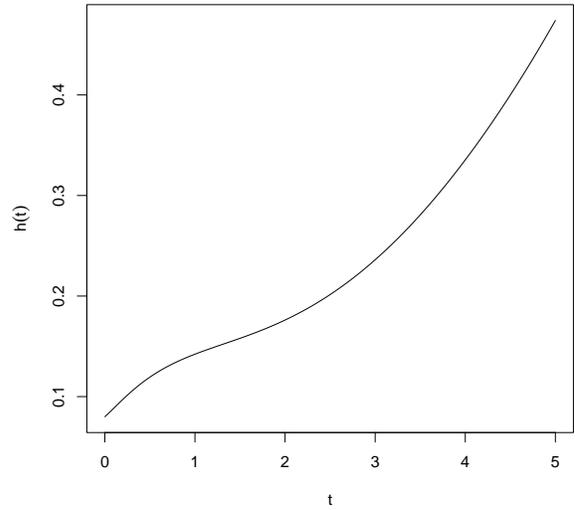


Figura 2.7: Função  $h(t) = g(t)/(C + K)$ , Exemplo 2.4.3

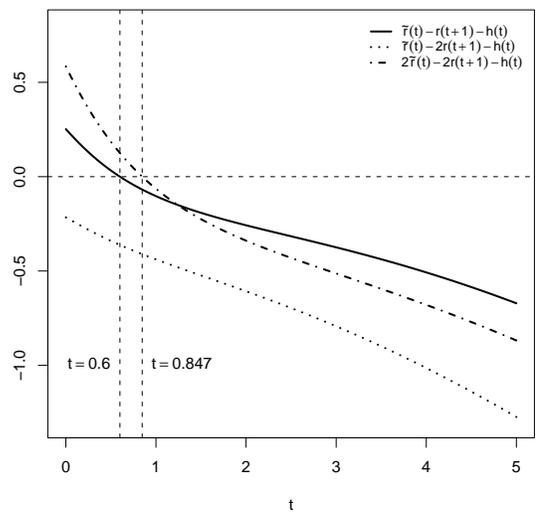


Figura 2.8: Funções para a análise das soluções no Exemplo 2.4.3

Por uma análise similar à seguida no problema anterior, só temos que considerar os casos seguintes:

(a) Em  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 \leq B\}$ : Neste caso temos que resolver a equação

$$2\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) - h(B) = 0.$$

(b) Em  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : B < T_1 \wedge T_2 \leq B + \tau\}$ : Neste caso resolvemos  $\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) - h(B) = 0$ .

(c) Em  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 > B + \tau\}$ : Aqui solucionamos a equação

$$\tilde{r}(B) - r(B + \tau) - h(B) = 0.$$

A solução a  $\tilde{r}(B) - r(B + \tau) - h(B) = 0$  é  $B_1^{1,*} = 0,600$ ; a solução a  $2\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) - h(B) = 0$  é  $B_2^{1,*} = 0,847$ , enquanto que a equação  $\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) - h(B) = 0$  não tem solução, pois  $\forall t \geq 0$ ,  $\tilde{r}(t) - 2r(t + 1) - h(t) < 0$ , como mostra a Figura 2.8. A interpretação destes resultados é como segue. Se ao iniciar o sistema em  $t = 0$ , só um dos componentes funciona, então o *burn-in* deve ser feito até o tempo  $B_2^{1,*}$ . Se em  $t = 0$  ambos componentes funcionam, é necessário decidir se fazemos o *burn-in* até  $B_1^{1,*}$  ou até  $B_2^{1,*}$  ou não procedemos com o processo. Para isto temos que levar em conta que  $B_1^{1,*}$  é ótimo na subclasse  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 > B + \tau\}$ , e portanto, é ótimo se ocorre o evento  $A_1 = \{T_1 \wedge T_2 > 1,600\}$  e não é ótimo se ocorre o evento  $A_2 = \{0,600 < T_1 \wedge T_2 \leq 1,600\}$ , enquanto que  $B_2^{1,*}$  é ótimo na subclasse  $\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 \leq B\}$ , isto é, se acontece o evento  $A_3 = \{T_1 \wedge T_2 \leq 0,847\}$ . Como não é possível saber com antecedência qual evento vai ocorrer, é necessário levar em conta a chance de cada um deles.

Se a chance de  $A_1$  é maior do que a chance de  $A_2$ , iniciamos o *burn-in* de um sistema novo; caso que  $T_1 \wedge T_2$  seja observado antes de  $t = B_1^{1,*}$ , então estendemos o processo até  $t = B_2^{1,*}$ ; caso contrário, terminamos em  $t = B_1^{1,*}$ .

## 2.5 Tempo ótimo de *burn-in* sob o modelo de falha geral

Um item (componente ou sistema) em operação pode estar exposto a várias fontes de falha (ou sofrer distintos tipos de falhas) as quais causam diferentes níveis de danos e de reparos. Block et. al [15] descrevem o modelo chamado de *modelo de falha geral*, no qual na idade  $t$  o item pode sofrer um de dois tipos de falhas, a saber, falha do tipo I ou falha do tipo II. A falha do tipo I pode ser removida mediante *reparo mínimo*, isto é, a taxa de falha do item reparado é reconstituída ao estado imediatamente anterior à falha. A falha do tipo II é catastrófica e portanto só pode ser removida através de uma substituição por um item novo ou por um *reparo perfeito*. Sob o *modelo estatístico* ou de *caixa preta*, ambos os processos de falha do tipo I e II, são modelados como processos de Poisson não homogêneos com funções de taxa de falha determinísticas dadas por  $r_{\zeta}^I(t) = [1 - p(t)]r_{\zeta}(t)$  e  $r_{\zeta}^{II}(t) = p(t)r_{\zeta}(t)$ , respectivamente, onde  $p(t) \in [0, 1]$  é a função de probabilidade da falha do tipo II e  $r_{\zeta}(t)$  é a função de taxa de falha ordinária do item. Ver Apêndice, Seção A.2, para mais detalhes deste modelo.

Desde que os dois tipos de falha podem acontecer durante ambos os períodos,

de *burn-in* e da operação adicional que segue, é necessário que a estrutura de custos e de ganho relativos ao procedimento aplicado leve em conta estes processos de falha. Por exemplo, como Cha ([20], [21]) e Sheu e Chien [49].

Para incorporar este modelo de falha no caso de um sistema coerente observado ao nível de seus componentes, vamos estender sua definição, como aparece a seguir.

**Definição 2.3.** *Processo de falha geral de um sistema coerente. Seja  $\zeta$  o tempo de vida de um sistema coerente, um tempo de parada totalmente inacessível, com processo de intensidade de falha  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ , e tal que:*

- *No instante  $t > 0$ , um de dois tipos de falha pode ser observado, falha do tipo I (reparável minimamente) ou falha do tipo II (não reparável).*
- *O sistema é observado sob a filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  dada por,*

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left\{ \tilde{N}_s^I, 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, V_s = 0, 1, 0 \leq s \leq t \right\}, \quad (2.49)$$

onde  $V_t$  é a variável indicadora do tipo de falha no instante  $t$ ,  $V_t = 0$  para falha do tipo I e  $V_t = 1$  para a falha do tipo II e  $\tilde{N}_t^I$  o número de falhas do tipo I em  $[0, t]$ .

- *Existe um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito totalmente inacessível  $\zeta^{II} = \inf \{ t \geq 0 : V_t = 1 \}$ , ou tempo da primeira falha do tipo II.*
- *Existem  $(\lambda_t^I)_{t \geq 0}$  e  $(\lambda_t^{II})_{t \geq 0}$ , processos não negativos,  $\mathcal{F}_t$ -progressivamente mensuráveis, tais que*

$$E\left[\int_0^t \lambda_s^I ds\right] < \infty, \quad E\left[\int_0^t \lambda_s^{II} ds\right] < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty, \quad (2.50)$$

$$1_{\{\zeta > t\}} \lambda_t = 1_{\{\zeta > t, V_t=0\}} \lambda_t + 1_{\{\zeta > t, V_t=1\}} \lambda_t = 1_{\{\zeta > t\}} \lambda_t^I + 1_{\{\zeta > t\}} \lambda_t^{II}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.51)$$

Segundo a definição anterior, assume-se que o processo

$$N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_t, \quad M_t \in \mathcal{M}_0^2,$$

decompõe em  $N_t = N_t^I + N_t^{II}$  onde,

$$N_t^I = 1_{\{\zeta \leq t, V_t=0\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s^I ds + M_t^I, \quad M_t^I \in \mathcal{M}_0^2, \quad (2.52)$$

$$N_t^{II} = 1_{\{\zeta \leq t, V_t=1\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_t^{II}, \quad M_t^{II} \in \mathcal{M}_0^2. \quad (2.53)$$

Note que  $1_{\{\zeta \leq t, V_t=1\}} = 1_{\{\zeta^{II} \leq t\}}$ , logo, na última equação podemos escrever,

$$N_t^{II} = 1_{\{\zeta^{II} \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_t^{II}, \quad M_t^{II} \in \mathcal{M}_0^2. \quad (2.54)$$

Os processos  $N_t^I$  e  $N_t^{II}$  não pulam simultaneamente, isto é, num instante  $t$ , só um dos tipos de falha pode ser observado, em consequência, os martingais  $M_t^I$  e  $M_t^{II}$  são ortogonais. Seja  $\tilde{N}_t^I$  o número de falhas do tipo I no intervalo  $[0, t]$ , este processo admite a decomposição de Doob-Meyer,

$$\tilde{N}_t^I = \int_0^t \lambda_s^I ds + \tilde{M}_t^I, \quad (2.55)$$

com  $\tilde{M}_t^I \in \mathcal{M}_0$  um  $\mathcal{F}_t$ -martingal uniformemente integrável. O processo  $\tilde{N}^I$  parado em  $\zeta^{\text{II}}$ , isto é,  $\tilde{N}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^I$ , tem a representação semimartingal (ver Teorema A.2) dada por,

$$\tilde{N}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^I = \int_0^t 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^I ds + \tilde{M}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^I, \quad (2.56)$$

onde  $\tilde{M}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^I \in \mathcal{M}_0$  é também um  $\mathcal{F}_t$ -martingal uniformemente integrável.

No que segue, formulamos o problema de otimização para um sistema coerente sob o *processo de falha geral* e achamos a sua solução quando os processos de intensidade de falha têm a forma de banheira. Concluimos com dois exemplos ilustrativos.

### 2.5.1 Problema de otimização considerado

Suponha que o processo de falha de um sistema coerente de  $m$  componentes pode ser modelado pelo *processo de falha geral* descrito na Definição 2.3, e portanto, o sistema é observado sob a filtragem dada em (2.49). Este sistema é submetido a um procedimento de *burn-in* de período  $b$ . Durante este tempo as falhas do tipo I são reparadas minimamente a um custo de  $C_0^1$ . Ao nível dos componentes um reparo mínimo do sistema significa que só é reparado o componente crítico que causa a falha do sistema (ver Seção 5.1). Se a primeira falha do tipo II é observada antes do tempo  $b$ , um custo de  $C_0^2$ ,  $C_0^2 > C_0^1$  é contabilizado. Depois do *burn-in* o sistema é operado por um tempo adicional fixado  $\tau$ . Durante este período as falhas do tipo I também são reparadas minimamente, a um custo de  $C_1^1$ ,  $C_1^1 > C_0^1$ , enquanto que uma

falha de tipo II causa um custo de  $C_1^2$ ,  $C_1^2 > C_1^1$ ,  $C_1^2 > C_0^2$ . Finalmente, é obtido um ganho de  $K$  se o sistema sobrevive ao tempo de operação sem sofrer uma falha de tipo II.

O lucro relativo ao processo descrito acima pode ser representado pelo seguinte processo,

$$\tilde{Z}_b^{\tau,2} = K1_{\{\zeta^{\text{II}} > b + \tau\}} - [C_0^1 \tilde{N}_{b \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + C_0^2 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq b\}}] - [C_1^1 \tilde{N}_b^{\text{I},\tau} + C_1^2 1_{\{b < \zeta^{\text{II}} \leq b + \tau\}}], \quad (2.57)$$

onde o processo  $\tilde{N}_b^{\text{I},\tau} = \tilde{N}_{(b+\tau) \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} - \tilde{N}_{b \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}}$  corresponde ao número de falhas do tipo I durante o tempo de operação adicional fixado após o *burn-in* e  $1_{\{b < \zeta^{\text{II}} \leq b + \tau\}} = 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq b + \tau\}} - 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq b\}}$ . Note que  $E[\tilde{Z}_b^{\tau,2}] < \infty, \forall b \geq 0$ .

De (2.54) e (2.56) obtemos a seguinte representação semimartingal regular para (2.57),

$$\tilde{Z}_b^{\tau,2} = \tilde{Z}_0^{\tau,2} + \int_0^b [\tilde{f}_s^{\text{I},\tau} + \tilde{f}_s^{\text{II},\tau}] ds + \tilde{M}_b^{\tau,2}, \quad \tilde{M}_b^{\tau,2} = \tilde{M}_b^{\text{I},\tau} + M_b^{\text{II},\tau}, \quad (2.58)$$

onde,

$$\tilde{Z}_0^{\tau,2} = K - C_1^1 \tilde{N}_{\tau \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} - (C_1^2 + K) 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq \tau\}}, \quad (2.59)$$

$$\tilde{f}_s^{\text{I},\tau} = 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C_1^1 - C_0^1) \lambda_s^{\text{I}} - 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s + \tau\}} C_1^1 \lambda_{s+\tau}^{\text{I}}, \quad (2.60)$$

$$\tilde{f}_s^{\text{II},\tau} = 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C_1^2 - C_0^2) \lambda_s^{\text{II}} - 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s + \tau\}} (C_1^2 + K) \lambda_{s+\tau}^{\text{II}}, \quad (2.61)$$

$$\tilde{M}_b^{\text{I},\tau} = (C_1^1 - C_0^1) \tilde{M}_{b \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + C_1^1 (\tilde{M}_{\tau \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} - \tilde{M}_{(b+\tau) \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}}), \quad (2.62)$$

$$M_b^{\text{II},\tau} = (C_1^2 - C_0^2) M_b^{\text{II}} + (C_1^2 + K) (M_\tau^{\text{II}} - M_{(b+\tau)}^{\text{II}}), \quad (2.63)$$

com  $E|\tilde{Z}_0^{\tau,2}| < \infty$ ,  $E\{\int_0^b |\tilde{f}_s^{I,\tau} + \tilde{f}_s^{II,\tau}| ds\} < \infty$ ,  $\forall 0 \leq b < \infty$ , e  $\tilde{M}_b^{I,\tau}, M_b^{II,\tau} \in \mathcal{M}_0^2$ , martingais uniformemente integráveis.

Queremos achar o tempo ótimo de *burn-in*  $B^{2,*}$  na classe de  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada  $C_{\zeta^{II}}^{\mathbb{F}}$ ,

$$C_{\zeta^{II}}^{\mathbb{F}} = \left\{ B \geq 0 : B \text{ é um } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } B+\tau \leq \zeta^{II}, E[\zeta^{II}] < \infty, E[B] < \infty \right\}, \quad (2.64)$$

que maximize,

$$E[\tilde{Z}_B^{\tau,2}] = E[\tilde{Z}_0^{\tau,2}] + E\left\{ \int_0^B [\tilde{f}_s^{I,\tau} + \tilde{f}_s^{II,\tau}] ds \right\}, \quad (2.65)$$

ou equivalentemente, que maximize,

$$K^2(\tau, B) = E\left\{ \int_0^B [(C_1^1 - C_0^1)\lambda_s^I - C_1^1\lambda_{s+\tau}^I + (C_1^2 - C_0^2)\lambda_s^{II} - (C_1^2 + K)\lambda_{s+\tau}^{II}] ds \right\}. \quad (2.66)$$

Resolveremos este problema assumindo que os processos de intensidade de falha têm forma de banheira usando os Teoremas 2.1 e 2.2 e os dois seguintes.

**Teorema 2.4.** *Suponha que os processos de intensidade de falha  $(\lambda_t^I)_{t \geq 0}$  e  $(\lambda_t^{II})_{t \geq 0}$  tem forma de banheira com pontos de mudança,  $0 \leq S_1^I \leq S_2^I$ ,  $0 \leq S_1^{II} \leq S_2^{II}$ , respectivamente, e que são tais que  $\lambda_0^I < \lambda_\infty^I = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t^I$  e  $\lambda_0^{II} < \lambda_\infty^{II} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t^{II}$ . Seja  $S_1 = \max\{S_1^I, S_1^{II}\}$ . Então o tempo ótimo de *burn-in*  $B^{2,*} \in C_{\zeta^{II}}^{\mathbb{F}}$  tal que*

$$K^2(\tau, B^{2,*}) = \sup\{K^2(\tau, B) : B \in C_{\zeta^{II}}^{\mathbb{F}}\}, \text{ com } K^2(\tau, B) \text{ dado por (2.66),}$$

é tal que

*i.*  $B^{2,*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}} : C_1^1(\tilde{\lambda}_B^{\text{I}} - \lambda_{B+\tau}^{\text{I}}) + (C_1^2 + K)(\tilde{\lambda}_B^{\text{II}} - \lambda_{B+\tau}^{\text{II}}) \leq 0\}$ , e

*ii.*  $\min\{\tilde{B}^{0,\text{I}*}, \tilde{B}^{0,\text{II}*}\} \leq B^{2,*} \leq \max\{\tilde{B}^{0,\text{I}*}, \tilde{B}^{0,\text{II}*}\} \leq S_1$ , onde

$$\tilde{B}^{0,\text{I}*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}} : \tilde{\lambda}_B^{\text{I}} \leq \lambda_{B+\tau}^{\text{I}}\} \leq S_1^{\text{I}}, \quad \tilde{\lambda}_B^{\text{I}} = \left(\frac{C_1^1 - C_0^1}{C_1^1}\right)\lambda_B^{\text{I}}, \quad (2.67)$$

e

$$\tilde{B}^{0,\text{II}*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}} : \tilde{\lambda}_B^{\text{II}} \leq \lambda_{B+\tau}^{\text{II}}\} \leq S_1^{\text{II}}, \quad \tilde{\lambda}_B^{\text{II}} = \left(\frac{C_1^2 - C_0^2}{C_1^2 + K}\right)\lambda_B^{\text{II}}. \quad (2.68)$$

**Prova.**

*i.* Considere o processo  $\tilde{Z}^{1,\tau} = (\tilde{f}^{1,\tau}, \tilde{M}^{1,\tau})$  um  $\mathcal{F}_t - SSM$  com  $\tilde{f}^{1,\tau}$  e  $\tilde{M}^{1,\tau}$  dados por (2.60) e (2.62), respectivamente. Da hipótese e pelos Teoremas 2.1 e 2.2, com  $T = \zeta^{\text{II}}$ , temos que  $\tilde{B}^{0,\text{I}*} \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}}$  o qual maximiza  $\tilde{K}^{0,\text{I}}(\tau, B) = E[\tilde{Z}_B^{1,\tau}] - E[\tilde{Z}_0^{1,\tau}]$ , isto é, a,

$$\tilde{K}^{0,\text{I}}(\tau, B) = E\left\{\int_0^B [(C_1^1 - C_0^1)\lambda_s^{\text{I}} - C_1^1\lambda_{s+\tau}^{\text{I}}]ds\right\}, \quad (2.69)$$

satifaz (2.67) e o caso *monótono* (2.2) é válido para o processo  $\tilde{\lambda}_s^{\text{I}} - \lambda_{s+\tau}^{\text{I}}$ .

Considere também o processo  $\tilde{Z}^{\text{II},\tau} = (\tilde{f}^{\text{II},\tau}, M^{\text{II},\tau})$  um  $\mathcal{F}_t - SSM$  com  $\tilde{f}^{\text{II},\tau}$  e  $M^{\text{II},\tau}$  definidos em (2.61) e (2.63), respectivamente. De novo, da hipótese e pelos Teoremas 2.1 e 2.2, temos que  $\tilde{B}^{0,\text{II}*} \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}}$  o qual maximiza  $\tilde{K}^{0,\text{II}}(\tau, B) = E[\tilde{Z}_B^{\text{II},\tau}] - E[\tilde{Z}_0^{\text{II},\tau}]$ , ou equivalentemente, a

$$\tilde{K}^{0,\text{II}}(\tau, B) = E\left\{\int_0^B [(C_1^2 - C_0^2)\lambda_s^{\text{II}} - (C_1^2 + K)\lambda_{s+\tau}^{\text{II}}]ds\right\}, \quad (2.70)$$

é dado por (2.68) e o processo  $\tilde{\lambda}_s^{\text{II}} - \lambda_{s+\tau}^{\text{II}}$  satisfaz também o *caso monótono* (2.2). Assim, o *caso monótono* é válido para o processo

$$m_s = C_1^1(\tilde{\lambda}_s^{\text{I}} - \lambda_{s+\tau}^{\text{I}}) + (C_1^2 + K)(\tilde{\lambda}_s^{\text{II}} - \lambda_{s+\tau}^{\text{II}}),$$

isto é,  $\forall \omega \in \Omega$ , existe  $B^{2,*} \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}}$  tal que,

$$\forall s \geq B^{2,*}, h \geq 0 \{m_s \leq 0\} \subseteq \{m_{s+h} \leq 0\} \text{ e } \bigcup_{s \geq 0} \{m_s \leq 0\} = \Omega$$

e desde que  $\tilde{M}^{\tau,2} = \tilde{M}^{\text{I},\tau} + M^{\text{II},\tau}$  é um martingal de média zero e uniformemente integrável, então, o tempo ótimo de *burn-in* que maximiza  $K^2(\tau, B)$ ,  $B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}}$ , é  $B^{2,*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}} : m_B \leq 0\}$ .

ii. Seja  $\tilde{B}_1 = \min\{\tilde{B}^{0,\text{I}*}, \tilde{B}^{0,\text{II}*}\}$ ,  $\tilde{B}_2 = \max\{\tilde{B}^{0,\text{I}*}, \tilde{B}^{0,\text{II}*}\}$ , e considere  $0 \leq B \leq \tilde{B}_1$ , isto é,  $B \leq \tilde{B}^{0,\text{I}*}$  e  $B \leq \tilde{B}^{0,\text{II}*}$ . Das definições de  $\tilde{B}^{0,\text{I}*}$  e  $\tilde{B}^{0,\text{II}*}$  temos que para tal  $B$ ,  $\tilde{\lambda}_B^{\text{I}} - \lambda_{B+\tau}^{\text{I}} \geq 0$  e  $\tilde{\lambda}_B^{\text{II}} - \lambda_{B+\tau}^{\text{II}} \geq 0$ , assim,  $\forall 0 \leq B \leq \tilde{B}_1$ ,  $m_B \geq 0$ , do qual, pela definição de  $B^{2,*}$ , obtemos que  $\tilde{B}_1 \leq B^{2,*}$ . Suponha que  $\tilde{B}_2 < B^{2,*}$ . Logo, da definição de  $B^{2,*}$  resulta que  $m_{\tilde{B}_2} > 0$ . Mas, como  $\tilde{B}_2 \geq \tilde{B}^{0,\text{I}*}$  e  $\tilde{B}_2 \geq \tilde{B}^{0,\text{II}*}$ , então teríamos que  $\tilde{\lambda}_{\tilde{B}_2}^{\text{I}} - \lambda_{\tilde{B}_2+\tau}^{\text{I}} \leq 0$ ,  $\tilde{\lambda}_{\tilde{B}_2}^{\text{II}} - \lambda_{\tilde{B}_2+\tau}^{\text{II}} \leq 0$ , e conseqüentemente,  $m_{\tilde{B}_2} \leq 0$ . Esta última conclusão contradiz a anterior como resultado da suposição de que  $\tilde{B}_2 < B^{2,*}$ , portanto concluimos que  $B^{2,*} \leq \tilde{B}_2$ .  $\square$

A seguir, consideramos o caso em que as constantes de custos são tais que  $0 < C_0^1 < C_0^2$ ,  $C_0^1 < C_1^1$ ,  $C_0^2 < C_1^2$ ,  $C_1^1 < C_1^2$  e  $(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1) > 0$ . Sob tais condições, para  $s \leq B$ ,  $B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}}$ , podemos escrever o processo

$$m_s = \tilde{f}_s^{\text{I},\tau} + \tilde{f}_s^{\text{II},\tau} = (C_1^1 - C_0^1)\lambda_s^{\text{I}} - C_1^1\lambda_{s+\tau}^{\text{I}} + (C_1^2 - C_0^2)\lambda_s^{\text{II}} - (C_1^2 + K)\lambda_{s+\tau}^{\text{II}},$$

na seguinte forma,

$$\tilde{m}_s = (C_1^1 - C_0^1)\lambda_s - C_1^1\lambda_{s+\tau} + [(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1)]\lambda_s^{\text{II}} - (C_1^2 - C_1^1 + K)\lambda_{s+\tau}^{\text{II}}, \quad (2.71)$$

onde  $\lambda_t = \lambda_t^{\text{I}} + \lambda_t^{\text{II}}$  é o processo de intensidade de falha do sistema em  $\{t < \zeta\}$ .

Note que  $0 < (C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1) < (C_1^2 - C_1^1 + K)$ . Então, temos que,

$$E[\tilde{Z}_B^{\tau,2}] = E[\tilde{Z}_0^{\tau,2}] + E\left\{\int_0^B \tilde{m}_s ds\right\}, \quad B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{R}}, \quad (2.72)$$

$$K^2(\tau, B) = E\left[\int_0^B \tilde{m}_s ds\right], \quad B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{R}}, \quad (2.73)$$

e neste caso, o tempo ótimo de *burn-in*  $B^{2,*} \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{R}}$ , é tal que

$$K^2(\tau, B^{2,*}) = \sup\left\{E\left[\int_0^B \tilde{m}_s ds\right] : B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{R}}\right\}. \quad (2.74)$$

**Teorema 2.5.** *Suponha que os processos de intensidade de falha  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  e  $(\lambda_t^{\text{II}})_{t \geq 0}$  têm forma de banheira com pontos de mudança,  $0 \leq S_1 \leq S_2$ ,  $0 \leq S_1^{\text{II}} \leq S_2^{\text{II}}$ , respectivamente, e são tais que  $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$  e  $\lambda_0^{\text{II}} < \lambda_\infty^{\text{II}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t^{\text{II}}$ . Seja  $\tilde{S}_1 = \max\{S_1, S_1^{\text{II}}\}$ . Além disso, suponha também que as constantes de custos são tais que  $0 < C_0^1 < C_0^2$ ,  $C_0^1 < C_1^1$ ,  $C_0^2 < C_1^2$ ,  $C_1^1 < C_1^2$  e  $(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1) > 0$ . Então, o tempo ótimo de *burn-in*  $B^{2,*} \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{R}}$  o qual satisfaz (2.74) é tal que*

i.  $B^{2,*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{R}} : \tilde{m}_B \leq 0\}$ , e

ii.  $\min\{\tilde{B}^{0,*}, \tilde{B}^{0,\text{II}*}\} \leq B^{2,*} \leq \max\{\tilde{B}^{0,*}, \tilde{B}^{0,\text{II}*}\} \leq \tilde{S}_1$ , onde

$$\tilde{B}^{0,*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{I}}}^{\mathbb{F}} : \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\} \leq S_1, \quad \tilde{\lambda}_B = \left(\frac{C_1^1 - C_0^1}{C_1^1}\right)\lambda_B, \quad (2.75)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{0,\text{II}*} &= \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}} : \tilde{\lambda}_B^{\text{II}} \leq \lambda_{B+\tau}^{\text{II}}\} \leq S_1^{\text{II}}, \quad \tilde{\lambda}_B^{\text{II}} = \left[\frac{(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1)}{C_1^2 - C_1^1 + K}\right]\lambda_B^{\text{II}}, \\ 0 &< \left[\frac{(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1)}{C_1^2 - C_1^1 + K}\right] < 1. \end{aligned} \quad (2.76)$$

**Prova.**

Considere os processos  $\tilde{Z}^\tau = (\tilde{f}^\tau, \tilde{M}^\tau)$  e  $\tilde{Z}^{\text{II},\tau} = (\tilde{f}^{\text{II},\tau}, \tilde{M}^{\text{II},\tau})$ ,  $\mathcal{F}_t$  - SSM's com

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t^\tau &= 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t\}}(C_1^1 - C_0^1)\lambda_s - 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t+\tau\}}C_1^1\lambda_{t+\tau} \\ \tilde{f}_t^{\text{II},\tau} &= 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t\}}[(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1)]\lambda_t^{\text{II}} - 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t+\tau\}}(C_1^2 - C_1^1 + K)\lambda_{t+\tau}^{\text{II}} \\ \tilde{M}_t^\tau &= (C_1^1 - C_0^1)(\tilde{M}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + M_t^{\text{II}}) + C_1^1[(\tilde{M}_{\tau \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + M_\tau^{\text{II}}) - (\tilde{M}_{(t+\tau) \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + M_{(t+\tau)}^{\text{II}})] \\ \tilde{M}_t^{\text{II},\tau} &= [(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1)]M_t^{\text{II}} + (C_1^2 - C_1^1 + K)(M_\tau^{\text{II}} - M_{(t+\tau)}^{\text{II}}). \end{aligned}$$

Então, por uma argumentação similar à usada na prova do Teorema 2.4, segue-se as conclusões em *i.* e *ii.*  $\square$

**Nota 2.4.** No teorema anterior o processo  $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$  não tem, necessariamente, a forma de banheira como é exigido no Teorema 2.4. Contudo, se  $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$  tem forma de banheira e as constantes de custos satisfazem as condições do Teorema 2.5, ambos Teoremas, 2.4 e 2.5 produzem o mesmo tempo ótimo de *burn-in*.

## 2.5.2 Exemplos ilustrativos

**Exemplo A**

Seja  $\zeta$  o tempo de vida de um sistema coerente de  $m = 3$  componentes, onde os componentes 1 e 2 formam uma estrutura em paralelo que está em série com o componente 3. Sejam  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  os tempos de vida dos componentes, respectivamente, então  $\zeta = (T_1 \vee T_2) \wedge T_3$ . Suponha que  $T_1 = Z_1 \wedge Z_{12}$ ,  $T_2 = Z_2 \wedge Z_{12}$ , onde as variáveis aleatórias  $Z_1, Z_2, Z_{12}$  são independentes e identicamente distribuídas com função de taxa de falha ordinária  $r(t) = e^{-t} + 0, 1t, t \geq 0$  e todas independentes de  $T_3$ .  $T_3$  é distribuído com função de taxa de falha ordinária  $r_3(t) = 1,5e^{-1,5t} + 0, 1t, t \geq 0$ . As funções  $r(t)$  e  $r_3(t)$  têm forma de banheira com um só ponto de mudança em  $t_1 = 2,303$  e  $t_2 = 2,076$ , respectivamente, e  $r(0) = 1 < r(\infty) = +\infty$ ,  $r_3(0) = 1,5 < r_3(\infty) = +\infty$ . Em  $\{\zeta > t\}$  o  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade de falha de  $\zeta$  é dado por  $\lambda_t = r_3(t) + r(t)[1 + 1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2\}}]$ , isto é,

$$\lambda_t = \begin{cases} r_3(t) + r(t), & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ r_3(t) + 2r(t), & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (2.77)$$

As funções  $r_3(t) + r(t)$  e  $r_3(t) + 2r(t)$  têm também forma de banheira com um ponto de mudança em  $t_3 = 2,174$  e  $t_4 = 2,213$ , respectivamente. A Figura 2.9 mostra o processo  $\lambda_t$  em  $\{T_1 \wedge T_2 \leq t_3\}$  e a Figura 2.10 no conjunto  $\{T_1 \wedge T_2 > t_3\}$ .

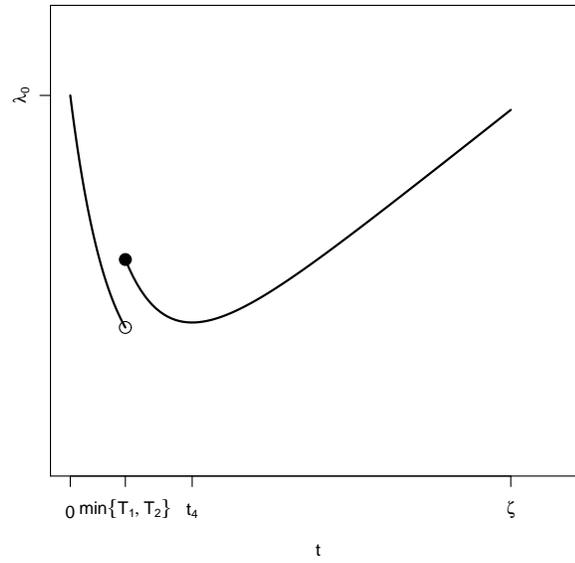


Figura 2.9: Processo  $\lambda_t$  em  $\{T_1 \wedge T_2 \leq t_3\}$ , Exemplo 2.5.2-A

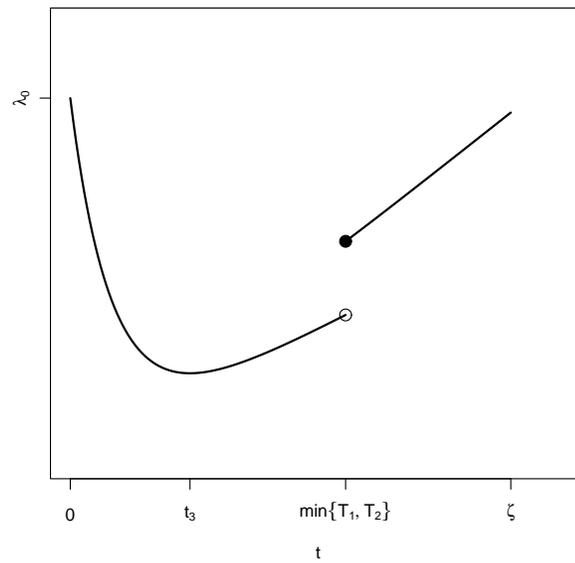


Figura 2.10: Processo  $\lambda_t$  em  $\{T_1 \wedge T_2 > t_3\}$ , Exemplo 2.5.2-A

Da análise destas figuras concluímos que o processo  $\lambda_t$  tem forma de banheira com um só ponto de mudança  $S_1$  dado por

$$S_1 = t_4 1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t_3\}} + t_3 1_{\{T_1 \wedge T_2 > t_3\}}.$$

Se uma falha do tipo I ocorre quando falha o subsistema formado pelos componentes 1 e 2 e uma falha do tipo II quando a falha é devida ao componente três, então, em  $\{\zeta > t\}$ , o  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade da falha do tipo II é dado por  $\lambda_t^{\text{II}} = r_3(t)$ , enquanto que o  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade da falha do tipo I  $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$  é dado por  $\lambda_t^{\text{I}} = r(t) + r(t)1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2\}}$ , isto é,

$$\lambda_t^{\text{I}} = \begin{cases} r(t), & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ 2r(t), & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (2.78)$$

Em  $\{T_1 \wedge T_2 \leq t_1\}$  o processo  $\lambda_t^{\text{I}}$  é como na Figura 2.11 e em  $\{T_1 \wedge T_2 > t_1\}$  é como na Figura 2.12, logo,  $\lambda_t^{\text{I}}$  tem forma de banheira com um ponto de mudança em  $S_1^{\text{I}} = S_2^{\text{I}} = t_1$ , e  $\lambda_0^{\text{I}} < \lambda_\infty^{\text{I}} = +\infty$ .

Sejam as constantes  $\tau = 1$ ,  $K = 10$ ,  $C_0^1 = 2$ ,  $C_1^1 = 20$ ,  $C_0^2 = 7$ ,  $C_1^2 = 25$ . neste caso,  $(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1) = 0$ , então não é possível obter o processo  $m_s$  na forma dada em (2.71). Contudo, desde que  $\lambda_t^{\text{I}}$  e  $\lambda_t^{\text{II}}$  satisfazem as condições do Teorema 2.4, temos que o tempo ótimo de *burn-in* que maximiza (2.66), é

$$B^{2,*} = \inf\{B \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{\mathbb{F}} : (C_1^1 - C_0^1)\lambda_B^{\text{I}} - C_1^1\lambda_{B+\tau}^{\text{I}} + (C_1^2 - C_0^2)\lambda_B^{\text{II}} - (C_1^2 + K)\lambda_{B+\tau}^{\text{II}} \leq 0\}. \quad (2.79)$$

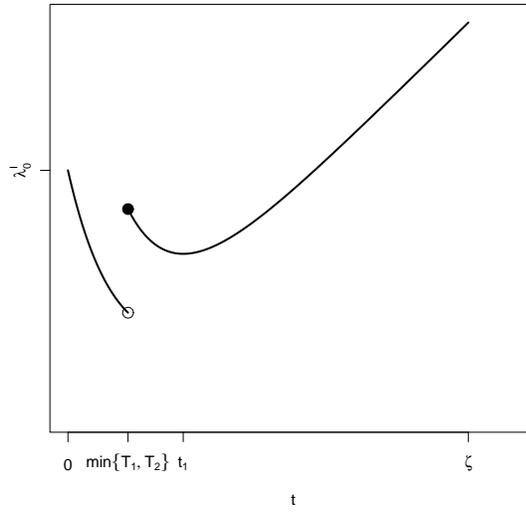


Figura 2.11: Processo  $\lambda_t^1$  em  $\{T_1 \wedge T_2 \leq t_1\}$ , Exemplo 2.5.2-A

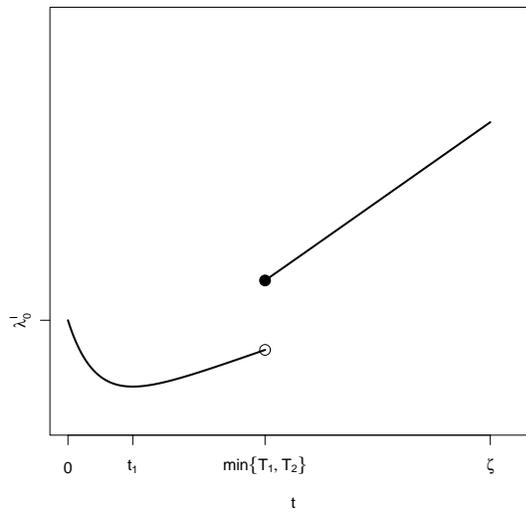


Figura 2.12: Processo  $\lambda_t^1$  em  $\{T_1 \wedge T_2 > t_1\}$ , Exemplo 2.5.2-A

Seja  $\tilde{r}(B) = [(C_1^1 - C_0^1)/C_1^1]r(B)$ ,  $\tilde{r}_3(B) = [(C_1^2 - C_0^2)/(C_1^2 + K)]r_3(B)$ . Para achar a solução ótima precisamos considerar os casos a seguir:

(a) Em  $\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : B < T_1 \wedge T_2 \leq B + \tau\}$ : Neste caso temos que resolver

$$C_1^1[\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau)] + (C_1^2 + K)[\tilde{r}_3(B) - r_3(B + \tau)] = 0, \quad (2.80)$$

logo, a solução ótima nesta subclasse é  $B_1^{2,*} = 0,486$ .

(b) Em  $\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 > B + \tau\}$ : Aqui resolvemos

$$C_1^1[\tilde{r}(B) - r(B + \tau)] + (C_1^2 + K)[\tilde{r}_3(B) - r_3(B + \tau)] = 0, \quad (2.81)$$

então, a solução ótima nesta subclasse é  $B_2^{2,*} = 0,993$

(c) Em  $\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 \leq B\}$ : Neste caso resolvemos a equação

$$C_1^1[2\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau)] + (C_1^2 + K)[\tilde{r}_3(B) - r_3(B + \tau)] = 0, \quad (2.82)$$

e a solução ótima é  $B_3^{2,*} = 1,116$ .

Considerando as subclasses de  $B \in C_{\zeta}^{\mathbb{F}}$  descritas acima, sugerimos usar estes resultados como segue. Iniciar o procedimento de *burn-in* com um sistema novo. Se  $T_1 \wedge T_2$  é observado antes de  $B_1^{2,*}$ , continuamos o processo até  $B_3^{2,*}$ . Se  $T_1 \wedge T_2$  não é observado antes de  $B_1^{2,*}$ , decidimos parar o processo nesse tempo ou prosseguir até  $B_2^{2,*}$ . Sejam  $A_1 = \{0,486 < T_1 \wedge T_2 \leq 1,486\}$  e  $A_2 = \{T_1 \wedge T_2 > 1,993\}$ . Se a chance do evento  $A_2$  é maior do que a chance do evento  $A_1$ , continuamos com o procedimento até  $B_2^{2,*}$ , mas se o evento  $A_1$  é observado, então paramos imediatamente, isto é, em  $t = T_1 \wedge T_2$ .

**Exemplo B**

Considere um sistema coerente com a mesma estrutura do sistema no Exemplo A, mas  $Z_1, Z_2, Z_{12}$  são variáveis aleatórias exponenciais independentes com taxa de falha  $\alpha = 0,5$  e considerando a função de taxa de falha  $r_3(t)$  como  $r_3(t) = e^{-t} + 0,1t$ . Neste caso o processo de intensidade de falha do sistema em  $\{\zeta > t\}$  é

$$\lambda_t = \begin{cases} r_3(t) + \alpha, & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ r_3(t) + 2\alpha, & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2, \end{cases} \quad (2.83)$$

e portanto tem forma de banheira com um só ponto de mudança em  $S_1 = S_2 = t_1 = 2,303$ . Com as mesmas definições para as falhas do tipo I e II no Exemplo A, o processo  $(\lambda_t^I)_{t \geq 0}$ , é dado por

$$\lambda_t^I = \begin{cases} \alpha, & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ 2\alpha, & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2, \end{cases} \quad (2.84)$$

logo, este não é um processo de intensidade de falha na forma de banheira enquanto que  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  e  $(\lambda_t^{II})_{t \geq 0}$  o são. Sejam as constantes  $\tau = 1$ ,  $K = 5,2$ ,  $C_0^1 = 0,5$ ,  $C_1^1 = 1$ ,  $C_0^2 = 2$ ,  $C_1^2 = 10$ . Neste caso temos que  $(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1) = 7,5 > 0$  e é possível obter o processo  $m_s$  na forma dada em (2.71). Como as condições no Teorema 2.5 são válidas, o tempo ótimo de *burn-in* que maximiza (2.74) é igual a,

$$\begin{aligned}
 B^{2,*} = \inf\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : (C_1^1 - C_0^1)\lambda_B - C_1^1\lambda_{B+\tau} \\
 + [(C_1^2 - C_0^2) - (C_1^1 - C_0^1)]\lambda_B^{II} - (C_1^2 - C_1^1 + K)\lambda_{B+\tau}^{II} \leq 0\}.
 \end{aligned}
 \tag{2.85}$$

Seja  $\Delta C_1^1 = C_1^1 - C_0^1$ ,  $\Delta C_1^2 = C_1^2 - C_0^2$  e  $\Delta CK = C_1^2 - C_1^1 + K$ . Como no Exemplo A, consideramos os seguintes casos:

(a) Em  $\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : B < T_1 \wedge T_2 \leq B + \tau\}$ : Neste caso temos que resolver

$$\begin{aligned}
 \Delta C^1[r_3(B) + \alpha] - C_1^1[r_3(B + \tau) + 2\alpha] \\
 + [\Delta C^2 - \Delta C^1]r_3(B) - \Delta CK \cdot r_3(B + \tau) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.86}$$

então, a solução ótima nesta subclasse é  $B_1^{2,*} = 0,045$ .

(b) Em  $\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 \leq B\}$ : Neste caso, resolvemos a equação

$$\begin{aligned}
 \Delta C^1[r_3(B) + 2\alpha] - C_1^1[r_3(B + \tau) + 2\alpha] \\
 + [\Delta C^2 - \Delta C^1]r_3(B) - \Delta CK \cdot r_3(B + \tau) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.87}$$

e a solução ótima nesta subclasse é  $B_2^{2,*} = 0,130$ .

(c) Em  $\{B \in C_{\zeta_{II}}^{\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 > B + \tau\}$ : Aqui resolvemos a equação

$$\begin{aligned}
 \Delta C^1[r_3(B) + \alpha] - C_1^1[r_3(B + \tau) + \alpha] \\
 + [\Delta C^2 - \Delta C^1]r_3(B) - \Delta CK \cdot r_3(B + \tau) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.88}$$

então, a solução ótima nesta subclasse é  $B_3^{2,*} = 0,222$ .

Sugerimos usar os resultados anteriores como segue: Iniciar o procedimento de *burn-in* com um sistema novo. Se  $T_1 \wedge T_2$  é observado antes de  $B_1^{2,*}$ , continuamos o procedimento até  $B_2^{2,*}$ . Se  $T_1 \wedge T_2$  não é observado antes de  $B_1^{2,*}$ , decidimos parar nesse tempo ou continuar até  $B_3^{2,*}$ . Seja  $A_1 = \{0,045 < T_1 \wedge T_2 \leq 1,045\}$  e  $A_2 = \{T_1 \wedge T_2 > 1,222\}$ . Se a chance do evento  $A_2$  é maior do que a chance do evento  $A_1$ , continuamos o processo até  $B_3^{2,*}$ , mas se o evento  $A_1$  é observado, paramos imediatamente, isto é, em  $t = T_1 \wedge T_2$ .

# Tempo ótimo de garantia para sistemas coerentes

Muitos produtos reparáveis ou não, são vendidos mediante algum contrato de garantia, que oferece ao comprador o serviço de substituição ou concerto do produto, ou a devolução de uma fração do preço de venda, quando o item falha num período previamente fixado, denominado período de garantia. A garantia também é usada como uma estratégia de mercado. Blischke e Murthy [13] definem garantia como uma obrigação contratual na qual o fabricante, em conexão com a venda do produto, se compromete a assegurar o funcionamento apropriado do produto durante o período garantido.

Entre as políticas de garantia mais comuns estão as do tipo *FRW* (*free replacement warranty*) e as do tipo *PRW* (*pro-rata warranty*). No primeiro caso, o fabricante se compromete a manter ou substituir o produto assumindo qualquer custo proveniente do serviço durante o período de garantia.

No segundo caso, o fabricante é obrigado a devolver uma fração do preço de venda do produto quando acontece uma falha durante o período garantido. As políticas *FRW* se dividem também em duas classes: com renovação e sem renovação. Na primeira, o produto que sofre uma falha catastrófica dentro do período de garantia é substituído por um novo para o qual é expedida uma garantia nova. Na segunda classe a substituição de um produto que falha não altera o prazo original da garantia. Vários assuntos relativos às diferentes políticas de garantia são tratados em Murthy [44], Blischke e Murthy ([10], [11], [12]), Mitra e Patankar [43], Blischke e Murthy ([13], [14]), entre outros.

Ainda que o oferecimento das garantias constitui uma estratégia para a competitividade no mercado, também representa custos que podem somar uma fração importante dos custos totais de fabricação e portanto é importante minimizar os custos incorridos com este serviço. Ja, et. al. [29] consideram o problema da estimação dos custos, e das reservas de garantia, durante o ciclo de vida de um produto reparável minimamente, usando uma política sem renovação na qual os custos dos reparos dependem da idade do produto, indicando como usar seus resultados na determinação do período de garantia. Kim, et. al. [36] estudam modelos para a análise do custo esperado de garantia sob uma política *FRW* para produtos com intensidade de falha dependente do uso. Bai e Pham [3] discutem o problema da estimação e predição dos custos de garantia descontados (com políticas *FRW* e *PRW*) para sistemas em série reparados minimamente, e aplica seus resultados na determinação do período, e das reservas, para o serviço de garantia, usando

o Teorema do Limite Central. Chien [22] considera o problema da determinação do período ótimo de garantia e da idade de substituição do produto após o vencimento da garantia, sob as perspectivas do vendedor e do comprador, respectivamente, que minimiza as funções de custo correspondentes, considerando o *modelo de falha geral*.

Todas as contribuições prévias foram desenvolvidas sob a *abordagem estatística ou de caixa preta*. Neste capítulo, para modelar os processos de custos de garantia associados a uma política *FRW* com renovação e a uma política *PRW*, com o objetivo de analisar o problema da determinação do período ótimo de garantia que minimiza o custo unitário esperado por unidade de tempo assintótico, consideramos o *processo de falha geral* (Definição 2.3) para um sistema coerente observado ao nível de seus componentes.

### 3.1 Custo de garantia sob o processo de falha geral

Assume-se que o produto garantido é um sistema coerente de  $m$  componentes, com tempo de vida  $\zeta$  e tempo de vida do componente  $i$ ,  $T_i$ . O processo de falha do sistema segue o modelo do *processo de falha geral* (ver Definição 2.3), portanto definido e observado em um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com a filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left\{ \tilde{N}_s^1, 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, V_s = 1, 2, 0 \leq s \leq t \right\},$$

uma família de sub  $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  satisfazendo as condições de Dellacherie, isto é, crescentes, contínuas à direita e completas, com  $\tilde{N}_t^1$  o número de fa-

lhas do tipo I no intervalo  $[0, t]$  e  $V_t$  a variável indicadora do tipo de falha do sistema no instante  $t$ . Denotamos também, por  $\zeta^{\text{II}}$  o tempo da primeira falha do tipo II,  $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$  e  $(\lambda_t^{\text{II}})_{t \geq 0}$ , os processos de intensidade de falha tipo I e II, respectivamente, como na Definição 2.3.

O processo do custo de garantia é descrito como segue. As falhas do tipo I são reparadas minimamente até o período  $w$  ou até o tempo da primeira falha do tipo II, o que acontecer primeiro, a um custo para o fabricante de  $C^{g,\text{I}}$ . Uma falha do tipo II (catastrófica) na idade  $\zeta^{\text{II}} \leq w$  produz o término da garantia e um custo para o fabricante de  $C^{g,\text{II}}$ ,  $C^{g,\text{II}} > C^{g,\text{I}}$ . Além dos custos por reparo ou falha no período de garantia, cada unidade vendida sob este serviço leva um custo adicional de  $C_0^g$ ,  $C_0^g < C^{g,\text{I}}$ . Então o processo do custo unitário de garantia sob o *processo de falha geral* corresponde a,

$$Z_w^g = C_0^g + C^{g,\text{I}} \tilde{N}_{w \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq w\}}. \quad (3.1)$$

Sob as condições na Definição 2.3 e pelas equações (2.54) e (2.56), a representação *SSM* do processo  $Z_w^g$  é como segue,

$$Z_w^g = C_0^g + \int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} \lambda_s^{\text{II}}) ds + M_w^g, \quad M_w^g \in \mathcal{M}_0^2, \quad (3.2)$$

onde  $M_w^g = C^{g,\text{I}} \tilde{M}_{w \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} M_w^{\text{II}}$  é um martingal de média zero e uniformemente integrável e  $E \left[ \int_0^w (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} \lambda_s^{\text{II}}) ds \right] < \infty, \forall 0 \leq w < \infty$ .

O ciclo sob garantia, durante o qual é observado o processo de custo, é dado

por  $X_w^g$ , o qual é igual a,

$$X_w^g = w \wedge \zeta^{\text{II}} = \int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} ds, \quad \text{P-q.c.}, \quad (3.3)$$

tal que  $E[X_w^g] = \int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(s) ds < \infty, \forall w \geq 0$ .

### 3.2 Problema de otimização

Nosso objetivo é achar o período de garantia  $w \in [0, \zeta^{\text{II}})$ , que minimize o custo unitário de garantia esperado por unidade de tempo, sob garantia, o qual corresponde à função  $K^g(w) = E[Z_w^g]/E[X_w^g]$ , isto é,

$$K^g(w) = \frac{C_0^g + E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} \lambda_s^{\text{II}}) ds\right]}{E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} ds\right]}. \quad (3.4)$$

Vamos considerar a solução deste problema quando a  $\mathcal{F}_t$ -intensidade da falha do tipo II é determinística e os processos de falha do tipo I não dependem do processo de falha do tipo II. A seguir propomos uma solução através do método de minimização mediante a derivada da função objetivo.

**Proposição 3.1.** *Suponha que o tempo até a primeira falha do tipo II,  $\zeta^{\text{II}}$ , é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito, totalmente inacessível e independente do processo,  $\lambda_t^{\text{I}}, \forall t \geq 0$ , com  $\mathcal{F}_t$ -intensidade de falha a função  $\lambda^{\text{II}}(t)$ , isto é,  $1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda^{\text{II}}(s) ds + M_t^{\text{II}}, M_t^{\text{II}} \in \mathcal{M}_0^2$ , e portanto, com função de sobrevivência*

$$\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda^{\text{II}}(s) ds\right\}. \quad (3.5)$$

Seja o processo  $r_t^g$ , onde,

$$r_t^g = C^{g,I} \lambda_t^I + C^{g,II} \lambda^{II}(t), \quad E \left[ \int_0^t r_s^g ds \right] < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty, \quad (3.6)$$

as funções

$$\psi(t) = E[X_t^g] \cdot E[r_t^g] - E \left[ \int_0^t 1_{\{\zeta^{II} > s\}} r_s^g ds \right], \quad (3.7)$$

$$\eta(t) = \frac{\partial}{\partial t} E[r_t^g], \quad \text{a derivada de } E[r_t^g] \text{ com respeito de } t, \quad (3.8)$$

e  $w^* \in [0, \zeta^{II})$  tal que,

$$K^g(w^*) = \min \{ K^g(w) : w \in [0, \zeta^{II}) \} \quad (3.9)$$

i. Se o processo  $r_t^g$  tem realizações decrescentes P-q.c, então,  $w^* = \zeta^{II}$  e

$$K^g(w^*) = \lim_{w \rightarrow \infty} K^g(w) = \frac{C_0^g + C^{g,II} + C^{g,I} E \left[ \int_0^{\zeta^{II}} \lambda_s^I ds \right]}{E[\zeta^{II}]} \quad (3.10)$$

ii. Se o processo  $r_t^g$  tem realizações crescentes P-q.c., e  $\psi(\infty) > C_0^g$ , então

$$w^* = \inf \{ w \geq 0 : \psi(w) \geq C_0^g \} < \infty.$$

iii. Se existe um tempo  $w_0 < \infty$ , tal que

$$r_t^g \text{ é } \begin{cases} \text{não crescente P-q.c.} & \forall t \leq w_0 \\ \text{crescente P-q.c.} & \forall t > w_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\text{e } \psi(\infty) > C_0^g, \text{ então } w_0 < w^* = \inf \{ w \geq 0 : \psi(w) \geq C_0^g \} < \infty.$$

**Prova.**

Pela hipótese e o Teorema de Fubini, temos que

$$E \left[ \int_0^w 1_{\{\zeta^{II} > s\}} r_s^g ds \right] = \int_0^w \bar{F}_{\zeta^{II}}(s) E[r_s^g] ds. \quad (3.12)$$

Seja  $\partial K^g / \partial w$  a derivada de  $K^g(w)$  com respeito de  $w$ , logo

$$\frac{\partial K^g}{\partial w} = \frac{\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(w)}{E^2[X_w^g]} \times (\psi(w) - C_0^g) \quad (3.13)$$

Observe que o sinal de  $K^g(w)$  é definido pelo sinal da função  $\psi(w) - C_0^g$ .

Então,

*i.* Pela hipótese, o processo  $r_t^g$  definido em (3.6), é decrescente P-q.c. assim, para todo  $w_1 \leq w_2$ ,  $r_{w_1}^g \geq r_{w_2}^g$ , P-q.c. e portanto  $E[r_{w_1}^g] \geq E[r_{w_2}^g]$ , isto é  $E[r_w^g]$  é decrescente. Logo em (3.12), temos que

$$E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} r_s^g ds\right] \geq \int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(s) ds \cdot E[r_w^g] = E[X_w^g] \cdot E[r_w^g] \quad \forall 0 \leq w < \infty.$$

Da desigualdade anterior conclui-se que a função  $\psi(w) \leq 0$ ,  $\forall 0 \leq w < \infty$ , e assim também  $\psi(w) - C_0^g < 0$ ,  $\forall 0 \leq w < \infty$ , portanto,  $K^g(w)$  é decrescente para todo  $w \geq 0$ . Então, para  $w \in [0, \zeta^{\text{II}})$ ,  $w^* = \zeta^{\text{II}}$ .

Desde que  $\zeta^{\text{II}} < \infty$ ,

$$E[Z_\infty^g] = E[Z_{\zeta^{\text{II}}}^g] = C_0^g + E\left[\int_0^{\zeta^{\text{II}}} r_s^g ds\right] = C_0^g + C^{g,\text{II}} + C^{g,\text{I}} E\left[\int_0^{\zeta^{\text{II}}} \lambda_s^{\text{I}} ds\right],$$

e  $E[X_\infty^g] = E[X_{\zeta^{\text{II}}}^g] = E[\zeta^{\text{II}}]$ , logo,  $K(w^*)$  é igual a (3.10).

*ii.* Pela hipótese, o processo  $r_t^g$  definido em (3.6), é crescente P-q.c. assim, para todo  $w_1 \leq w_2$ ,  $r_{w_1}^g \leq r_{w_2}^g$ , P-q.c. e portanto  $E[r_{w_1}^g] \leq E[r_{w_2}^g]$ , isto é,  $E[r_w^g]$  é crescente. Logo em (3.12), temos que,

$$E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} r_s^g ds\right] \leq \int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(s) ds \cdot E[r_w^g] = E[X_w^g] \cdot E[r_w^g] \quad \forall 0 \leq w < \infty.$$

Da desigualdade anterior conclui-se que a função  $\psi(w) \geq 0, \forall 0 \leq w < \infty$ .

Além disso temos que a derivada de  $\psi(w)$  com respeito de  $w$  é,

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = \bar{F}_{\zeta_{\Pi}}(w)E[r_w^g] + E[X_w^g]\eta(w) - \bar{F}_{\zeta_{\Pi}}(w)E[r_w^g] = E[X_w^g]\eta(w). \quad (3.14)$$

Desde que  $E[r_w^g]$  é crescente,  $\eta(w) > 0$  e portanto  $\partial\psi/\partial w > 0$ , conseqüentemente,  $\psi(w)$  é uma função positiva e crescente, com  $\psi(0) = 0$  e  $\psi(\infty) > C_0^g$  (por hipótese), do qual temos que  $\psi(w)$  cruza por baixo a reta  $f(w) = C_0^g$ , de forma que existe  $\beta = \inf\{w \geq 0 : \psi(w) \geq C_0^g\} < \infty$  e é tal que,

$$\frac{\partial K^g}{\partial w} \sim (\psi(w) - C_0^g) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } w \leq \beta \\ > 0 & \text{se } w > \beta, \end{cases}$$

portanto,  $K^g(w)$  tem um mínimo absoluto em  $\beta$ , isto é,  $w^* = \beta$ .

*iii.* Desde que o processo  $r_w^g$  é não crescente P-q.c. para todo  $w \leq w_0$ , e crescente P-q.c. para  $w > w_0$ , então existem  $w_1$  e  $w_2$ ,  $w_1 \leq w_0 \leq w_2 < \infty$ , tais que  $E[r_w^g]$  é não crescente  $\forall w \leq w_1$  e crescente  $\forall w > w_2$ , isto é,

$$\eta(w) \begin{cases} \leq 0 & \forall w \leq w_1 \\ > 0 & \forall w > w_2, \end{cases} \implies \text{por (3.14), } \frac{\partial \psi}{\partial w} \begin{cases} \leq 0 & \forall w \leq w_1 \\ > 0 & \forall w > w_2, \end{cases}$$

conseqüentemente,

$$\psi(w) \begin{cases} \text{não crescente} & \forall w \leq w_1 \\ \text{não decrescente} & \forall w > w_2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Portanto,  $\psi(w)$  tem um mínimo em algum  $w_a < \infty$  e como  $\psi(0) = 0$  então  $\psi(w_a) < 0$  e com  $\psi(\infty) > C_0^g$ , conclui-se que  $\psi$  cruzará por baixo à reta

$g(t) = 0$  em  $\delta = \inf\{w \geq 0 : \psi(w) \geq 0\}$ ,  $w_0 \leq \delta < \infty$  e logo à reta  $g(w) = C_0^g$  em um  $\delta < w < \infty$ , isto é, em  $w^*$ , onde  $w_0 < w^* = \inf\{w \geq 0 : \psi(w) \geq C_0^g\} < \infty$ .  $\square$

Como consequência dos itens *i* e *ii* da Proposição 3.1, temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.1.** *Considere a mesmas condições para  $\zeta^{\text{II}}$  e  $\lambda_t^{\text{I}}$ , enunciadas na Proposição 3.1. Então*

- i. Se o processo de intensidade das falhas do tipo I,  $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$  tem realizações decrescentes P-q.c. e  $\lambda^{\text{II}}(t)$  é DFR (função de taxa de falha decrescente) então,  $w^* = \zeta^{\text{II}}$  e  $K^g(w^*) = \lim_{w \rightarrow \infty} K^g(w)$ .*
- ii. Se o processo de intensidade das falhas do tipo I,  $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$  tem realizações crescentes P-q.c. e  $\lambda^{\text{II}}(t)$  é IFR (função de taxa de falha crescente) e  $\psi(\infty) > C_0^g$ , então  $w^* = \inf\{w \geq 0 : \psi(w) \geq C_0^g\} < \infty$ .*

### 3.3 Aplicação às políticas *FRW* e *PRW*

#### 3.3.1 Política de garantia *FRW* com renovação

Sob este tipo de política, durante o período de garantia as falhas do tipo I são reparadas minimamente, enquanto que a primeira falha do tipo II implica uma substituição do sistema por um novo e uma emissão de outra garantia com o mesmo prazo que a inicial. Este procedimento é repetido até que seja observado o primeiro sistema sobrevivendo ao período de garantia sem

experimental falhas do tipo II. Com a mesma notação para as constantes de custos, considere a sequência dos tempos das falhas do tipo II dos sistemas que desde a venda original são fornecidos ao comprador sob a garantia, isto é,  $(\zeta_n^{\text{II}})_{n \geq 1}$ . Então o processo de custo até o final da garantia corresponde a,

$$\begin{aligned} Z_w^{FRW} &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq w\}} \cdot \left[ C_0^g + C^{g,\text{I}} \tilde{N}_{w \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} 1_{\{\zeta_n^{\text{II}} \leq w\}} \right] \\ &= C_0^g + (C_0^g + C^{g,\text{II}}) \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq w\}} + C^{g,\text{I}} \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq w\}} \cdot \tilde{N}_{w \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

com a convenção  $\prod_{i=1}^{n-1} (\bullet) \equiv 1$ , para  $n = 1$ .

O ciclo ou tempo desde a venda do produto até o final da garantia corresponde ao processo seguinte,

$$X_w^{FRW} = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq w\}} \cdot (w \wedge \zeta_n^{\text{II}}). \quad (3.17)$$

### Representação *SSM* e valores esperados

Para obter uma representação *SSM* para os processos  $Z^{FRW}$  e  $X^{FRW}$ , é necessário impor algumas condições. Assume-se que,

- A.  $(\zeta_n^{\text{II}})_{n \geq 1}$  é uma sequência de tempos de parada finitos totalmente inaceessíveis e independentes, de modo que para todo  $k \neq l$ , o produto  $1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq w\}} \cdot 1_{\{\zeta_l^{\text{II}} \leq w\}}$  satisfaz as condições do Teorema A.3 para a sua representação *SSM*.
- B.  $P(\inf\{n \geq 1 : \zeta_n^{\text{II}} > w\} < \infty) = 1$ .

C. Para todo ciclo  $n \geq 1$ , os processos de falha do tipo I e II,  $\tilde{N}_{w \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}}$  e  $1_{\{\zeta_n^{\text{II}} \leq w\}}$ , não pulam simultaneamente, portanto os martingais resultantes da decomposição de Doob-Meyer,  $\tilde{M}_{w \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}}$  e  $M_w^{\text{II},n}$ , respectivamente, são ortogonais. Também são válidas as demais condições do Teorema A.4 para a representação *SSM* dos produtos  $1_{\{\zeta_n^{\text{II}} \leq w\}} \cdot \tilde{N}_{w \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}}$ .

Estas condições garantem que  $Z^{FRW}$  e  $X^{FRW}$  são processos finitos com valor esperado finito e admitem uma representação semimartingal satisfazendo a Definição A.2.

Para obter tal representação, aplicamos de forma iterativa a regra do produto para semimartingais *SSM* a cada produto indicado em (3.16) e (3.17), respectivamente, levando em conta que os processos  $(w \wedge \zeta_n^{\text{II}})$  tem a representação semimartingal  $(w \wedge \zeta_n^{\text{II}}) = \int_0^w 1_{\{\zeta_n^{\text{II}} > s\}} ds$ , com parte martingal zero P-q.c., e assumindo que no  $n$ -ésimo ciclo, os processos de intensidade das falhas do tipo I e II, são  $\lambda_t^{\text{I},n}$  e  $\lambda_t^{\text{II},n}$ , respectivamente. Logo, obtemos o seguinte,

$$\begin{aligned}
 Z_w^{FRW} = & C_0^g + \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (C_0^g + C^{g,\text{II}}) \sum_{k=1}^n 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II},k} \prod_{l \neq k}^n 1_{\{\zeta_l^{\text{II}} \leq s\}} \right. \\
 & \left. + C^{g,\text{I}} \left( \tilde{N}_{s \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}} \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II},k} \prod_{l \neq k}^{n-1} 1_{\{\zeta_l^{\text{II}} \leq s\}} + 1_{\{\zeta_n^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{I},n} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq s\}} \right) \right] ds \\
 & + M_w^{FRW}, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

$$X_w^{FRW} = \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (s \wedge \zeta_n^{\text{II}}) \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II},k} \prod_{l \neq k}^{n-1} 1_{\{\zeta_l^{\text{II}} \leq s\}} + 1_{\{\zeta_n^{\text{II}} > s\}} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} \leq s\}} \right] ds + L_w^{FRW}, \quad (3.19)$$

com  $M_w^{FRW}, L_w^{FRW} \in \mathcal{M}_0$ . Note que os processos de falha observados em cada ciclo correspondem a sistemas independentes, portanto, os valores esperados para os processos  $Z_w^{FRW}$  e  $X_w^{FRW}$ , são dados por

$$\begin{aligned} E[Z_w^{FRW}] = & C_0^g + (C_0^g + C^{g,\text{II}}) \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n E \left[ 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II},k} \right] \prod_{l \neq k}^n P(\zeta_l^{\text{II}} \leq s) \\ & + C^{g,\text{I}} \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E[\tilde{N}_{s \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}}] \sum_{k=1}^{n-1} E \left[ 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II},k} \right] \prod_{l \neq k}^{n-1} P(\zeta_l^{\text{II}} \leq s) \right. \\ & \left. + E \left[ 1_{\{\zeta_n^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{I},n} \right] \prod_{k=1}^{n-1} P(\zeta_k^{\text{II}} \leq s) \right] ds \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned} E[X_w^{FRW}] = & \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E(s \wedge \zeta_n^{\text{II}}) \sum_{k=1}^{n-1} E \left[ 1_{\{\zeta_k^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II},k} \right] \prod_{l \neq k}^{n-1} P(\zeta_l^{\text{II}} \leq s) \right. \\ & \left. + P(\zeta_n^{\text{II}} > s) \prod_{k=1}^{n-1} P(\zeta_k^{\text{II}} \leq s) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

O custo unitário esperado por unidade de tempo assintótico é  $K^{FRW}(w) = E[Z_w^{FRW}] / E[X_w^{FRW}]$ .

**Proposição 3.2.** *Suponha que  $(\zeta_n^{\text{II}})_{n \geq 1}$  é uma sequência de tempos de parada finitos totalmente inacessíveis e IID como  $\zeta^{\text{II}}$ , com  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade de falha  $(\lambda_t^{\text{II}})_{t \geq 0}$ , e que para todo  $n \geq 1$ , os processos de contagem*

das falhas do tipo I são IID como  $(\tilde{N}_t^I)_{t \geq 0}$ , com  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade de falha  $(\lambda_t^I)_{t \geq 0}$ . Então, o custo unitário esperado por unidade de tempo assintótico é igual a  $K^g(w)$  em (3.4).

**Prova.**

Pela condição IID e após alguns cálculos algébricos em (3.20), obtemos,

$$\begin{aligned}
E[Z_w^{FRW}] &= C_0^g + (C_0^g + C^{g,II}) \int_0^w E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^{II} \right] \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ P(\zeta^{II} \leq s) \right]^{n-1} ds \\
&\quad + C^{g,I} \int_0^w \left\{ E[\tilde{N}_{s \wedge \zeta^{II}}^I] \cdot E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^{II} \right] \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ P(\zeta^{II} \leq s) \right]^{n-1} \right. \\
&\quad \left. + E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^I \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[ P(\zeta^{II} \leq s) \right]^n \right\} ds + C^{g,I} \int_0^w E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^I \right] ds.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Além disso, da decomposição de Doob-Meyer e Fubini, temos que,

$$P(\zeta^{II} \leq t) = \int_0^t E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > u\}} \lambda_u^{II} \right] du,$$

logo, derivando com respeito de  $t$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\zeta^{II} \leq t) = E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > t\}} \lambda_t^{II} \right]. \tag{3.23}$$

Seja  $H(t) = P(\zeta^{II} \leq t) / P(\zeta^{II} > t)$ . Pode-se mostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} [P(\zeta^{II} \leq t)]^n = H(t)$ . Seja  $H'(t) = \partial H / \partial t$ , então a derivada de  $\sum_{n=1}^{\infty} [P(\zeta^{II} \leq t)]^n$  com respeito de  $t$  é igual  $H'(t)$ , e assim de (3.23) obtemos,

$$E \left[ 1_{\{\zeta^{II} > t\}} \lambda_t^{II} \right] \sum_{n=1}^{\infty} n [P(\zeta^{II} \leq t)]^{n-1} = H'(t). \tag{3.24}$$

Também pela decomposição de Doob-Meyer e o Teorema de Fubini, obtemos que  $G(t) = E[\tilde{N}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}}]$ , é igual a

$$G(t) = \int_0^t E[1_{\{\zeta^{\text{II}} > u\}} \lambda_u^{\text{I}}] du,$$

e derivando com respeito de  $t$ , obtemos que  $G'(t) = \partial G / \partial t$ , é

$$G'(t) = E[1_{\{\zeta^{\text{II}} > t\}} \lambda_t^{\text{I}}]. \quad (3.25)$$

Logo, como  $G(t)$  e  $H(t)$  são funções contínuas e limitadas em  $[0, t]$ , com  $G(0) = H(0) = 0$ , pela fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes e das equações (3.24) e (3.25), temos que

$$\begin{aligned} G(t)H(t) &= \int_0^w \left\{ E[\tilde{N}_{s \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}}] \cdot E[1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II}}] \sum_{n=1}^{\infty} n [P(\zeta^{\text{II}} \leq s)]^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + E[1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{I}}] \sum_{n=1}^{\infty} [P(\zeta^{\text{II}} \leq s)]^n \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e de (3.24),

$$H(t) = \int_0^w E[1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II}}] \sum_{n=1}^{\infty} n [P(\zeta^{\text{II}} \leq s)]^{n-1} ds. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.26) e (3.27) em (3.22),

$$E[Z_w^{FRW}] = \frac{C_0^g + E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} \lambda_s^{\text{II}}) ds\right]}{P(\zeta^{\text{II}} > w)}. \quad (3.28)$$

Pela condição *IID* e após alguns cálculos algébricos em (3.21), obtemos,

$$E[X_w^{FRW}] = \int_0^w \left\{ E[X_s^g] \cdot E[1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II}}] \sum_{n=1}^{\infty} n [P(\zeta^{\text{II}} \leq s)]^{n-1} ds + \right.$$

$$+ P(\zeta^{\text{II}} > s) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ P(\zeta^{\text{II}} \leq s) \right]^n \Big\} ds + \int_0^w P(\zeta^{\text{II}} > s) ds. \quad (3.29)$$

Seja  $V(t) = E[X_t^g] = \int_0^t P(\zeta^{\text{II}} > s) ds$ . Então  $V(0) = 0$  e a derivada com respeito de  $t$  é  $V'(t) = \partial V / \partial t = P(\zeta^{\text{II}} > t)$ . De novo, pela fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes e da equação (3.24), obtemos,

$$\begin{aligned} H(t)V(t) &= \int_0^w \left\{ E[X_s^g] \cdot E \left[ 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} \lambda_s^{\text{II}} \right] \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ P(\zeta^{\text{II}} \leq s) \right]^{n-1} ds \right. \\ &\quad \left. + P(\zeta^{\text{II}} > s) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ P(\zeta^{\text{II}} \leq s) \right]^n \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) em (3.29),

$$E[X_w^{FRW}] = \frac{\int_0^w P(\zeta^{\text{II}} > s) ds}{P(\zeta^{\text{II}} > w)}. \quad (3.31)$$

Finalmente, de (3.28) e (3.31) se segue que o custo unitário esperado por unidade de tempo assintótico, é igual a  $K^g(w)$  em (3.4).  $\square$

**Nota 3.1.** Do resultado acima, concluímos que se as condições na Proposição 3.2 são aproximadamente válidas para uma política *FRW* com renovação, sob o *processo de falha geral* podemos achar o tempo ótimo de garantia que minimiza o custo unitário esperado por unidade de tempo assintótico minimizando simplesmente a  $K^g(w)$ , que representa o custo unitário esperado por unidade de tempo para um ciclo sob garantia de comprimento  $w \wedge \zeta^{\text{II}}$ .

### 3.3.2 Política de garantia *PRW*

Existem vários modelos de custos sob esta política. Consideramos o seguinte. Suponha que o processo de falha do sistema sob garantia é modelado pelo

*processo de falha geral.* As falhas do tipo I são reparadas minimamente até o período  $w$  ou até o tempo da primeira falha do tipo II, o que acontecer primeiro, a um custo de  $C^{g,I}$ , enquanto que uma falha do tipo II na idade  $\zeta^{II} \leq w$  produz o término da garantia e a devolução ao comprador de uma quantidade  $R(\zeta^{II})$ . Esta função é definida por,

$$R(\zeta^{II}) = k \cdot C_p \left(1 - \alpha \frac{\zeta^{II}}{w}\right) 1_{\{\zeta^{II} \leq w\}} = k \cdot C_p (1 - \alpha) 1_{\{\zeta^{II} \leq w\}} + k \cdot C_p \alpha \zeta^{II} \left(\frac{1}{\zeta^{II}} - \frac{1}{w}\right) 1_{\{\zeta^{II} \leq w\}}, \quad (3.32)$$

onde  $0 < k \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $C_p$  é o preço de venda do produto,  $C_p > C^{g,I}$ . Além dos custos por reparo ou falha, pode existir um custo adicional pelo serviço, de  $C_0^g \geq 0$ ,  $C_0^g < C^{g,I}$ . O processo de custo até o final da garantia é o processo  $Z_w^{PRW}$ ,

$$Z_w^{PRW} = C_0^g + C^{g,I} \tilde{N}_{w \wedge \zeta^{II}}^I + k \cdot C_p (1 - \alpha) 1_{\{\zeta^{II} \leq w\}} + k \cdot C_p \alpha \zeta^{II} \left(\frac{1}{\zeta^{II}} - \frac{1}{w}\right) 1_{\{\zeta^{II} \leq w\}}. \quad (3.33)$$

O tempo desde a venda do produto até o final da garantia é  $X_w^{PRW} = w \wedge \zeta^{II} = X_w^g$ .

### Representação *SSM* e valores esperados

A decomposição semimartingal regular para  $X_w^{PRW}$  é dada em (3.3). Para  $Z_w^{PRW}$  considere o seguinte.

Em  $\{\zeta^{II} \leq w\}$ ,

$$\left(\frac{1}{\zeta^{II}} - \frac{1}{w}\right) = \int_{\zeta^{II}}^w \frac{1}{s^2} ds = \int_0^w \frac{1}{s^2} 1_{\{\zeta^{II} \leq s\}} ds,$$

logo,

$$\zeta^{\text{II}} \left( \frac{1}{\zeta^{\text{II}}} - \frac{1}{w} \right) 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq w\}} = \int_0^w \frac{1}{s^2} \zeta^{\text{II}} 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq s\}} ds \quad (3.34)$$

e junto com (2.54) e (2.56), obtemos a seguinte representação *SSM* para  $Z_w^{PRW}$ ,

$$\begin{aligned} Z_w^{PRW} = & C_0^g + \int_0^w \left[ 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + k \cdot C_p (1 - \alpha) \lambda_s^{\text{II}}) \right. \\ & \left. + k \cdot C_p \alpha \frac{1}{s^2} \zeta^{\text{II}} 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq s\}} \right] ds + M_w^{PRW}, \quad M_w^{PRW} \in \mathcal{M}_0^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde o martingal  $M_w^{PRW} = C^{g,\text{I}} \tilde{M}_{w \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}} + k \cdot C_p (1 - \alpha) M_w^{\text{II}}$  é uniformemente integrável.

Temos interesse em minimizar o custo unitário esperado por unidade de tempo em  $\{w < \zeta^{\text{II}}\}$ . Portanto, simplificamos a equação anterior como segue,

$$Z_w^{PRW} = C_0^g + \int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + k \cdot C_p (1 - \alpha) \lambda_s^{\text{II}}) ds + M_w^{PRW}, \quad (3.36)$$

e definimos a função do custo unitário esperado por unidade de tempo para a política *PRW*,  $K^{PRW}(w) = E[Z_w^{PRW}] / E[X_w^{PRW}]$ , como sendo igual a,

$$K^{PRW}(w) = \frac{C_0^g + E \left[ \int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + k \cdot C_p (1 - \alpha) \lambda_s^{\text{II}}) ds \right]}{E \left[ \int_0^w 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} ds \right]}. \quad (3.37)$$

**Nota 3.2.** Observe que neste caso a solução ótima é a mesma que para a função  $K^g(w)$  em (3.4) mas com a constante  $C^{g,\text{II}} = k \cdot C_p (1 - \alpha)$ .

### 3.3.3 Exemplo ilustrativo

Considere um sistema coerente de três componentes com tempos de vida  $T_1, T_2, T_3$ , variáveis aleatórias *IID* com taxa de falha  $r(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$ ,  $\forall t > 0$ , uma função com um mínimo absoluto em  $t = 1/3$ . Suponha que os componentes 1 e 2 formam um subsistema em paralelo, o qual por sua vez está em série com o componente três. Seja  $\zeta$  o tempo de vida do sistema; então, o processo de intensidade de falha do sistema corresponde a  $1_{\{\zeta > t\}}\lambda_t = 1_{\{\zeta > t\}}r(t) + r(t)1_{\{\zeta > t\}}[1_{\{T_1 \leq t\}} + 1_{\{T_2 \leq t\}}]$ .

Suponha que uma falha do tipo I ocorre quando falha o subsistema formado pelos componente 1 e 2, enquanto que uma falha do tipo II ocorre quando falha o componente três. Então o tempo até a primeira falha do tipo II é a variável  $T_3$ , isto é,  $\zeta^{\text{II}} = T_3$ , com  $\mathcal{F}_t$ -intensidade de falha  $\lambda^{\text{II}}(t) = r(t)$  e função de sobrevivência  $\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . O  $\mathcal{F}_t$ -processo de intensidade para os reparos mínimos das falhas do Tipo I é  $\lambda_t^{\text{I}} = r(t)[1_{\{T_1 \leq t\}} + 1_{\{T_2 \leq t\}}]$ . Logo,

$$r_t^g = \begin{cases} C^{g,\text{II}}r(t) & \text{se } t < T_1 \wedge T_2 \\ (C^{g,\text{I}} + C^{g,\text{II}})r(t) & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (3.38)$$

Desde que as funções  $C^{g,\text{II}}r(t)$  e  $(C^{g,\text{I}} + C^{g,\text{II}})r(t)$  têm um mínimo absoluto em  $t = 1/3$ , então o processo  $r_t^g$  satisfaz a condição descrita no item *iii.* da Proposição 3.1, com  $w_0 = 1/3$ . Observe também que

$$E(\lambda_t^{\text{I}}) = 2r(t) \left[ 1 - \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\} \right] = \left[ t^{-\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}} \right] \left[ 1 - e^{-\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right)} \right].$$

Pode-se mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) > 2$ . Sejam  $\gamma(w) = E[r_w^g]$ , e as funções  $\eta(w)$  e  $\psi(w)$  definidas na Proposição 3.1. A Figura 3.1 apresenta os gráficos para  $K^g(w)$ ,  $\gamma(w)$ ,  $\eta(w)$  e  $\psi(w)$ , para o caso  $C_0^g = 2$ ,  $C^{g,I} = 5$  e  $C^{g,II} = 10$ . Nos gráficos de  $\gamma(w)$  e de  $\eta(w)$ , observamos que  $\gamma(w)$  atinge um mínimo em  $w_a = 0,185$ , e portanto,  $\eta(w)$  tem uma troca de sinal de  $(-)$  para  $(+)$  em  $w_a$ . Além disso,  $\psi(w)$  cruza por baixo o valor de  $C_0^g$  em  $w_{\text{optim}} = 0,945$ , então,  $w^* = \inf\{w > 0 : \psi(w) \geq C_0^g\} = 0,945$ , como pode-se observar nos gráficos de  $K^g(w)$  e de  $\psi(w)$ .

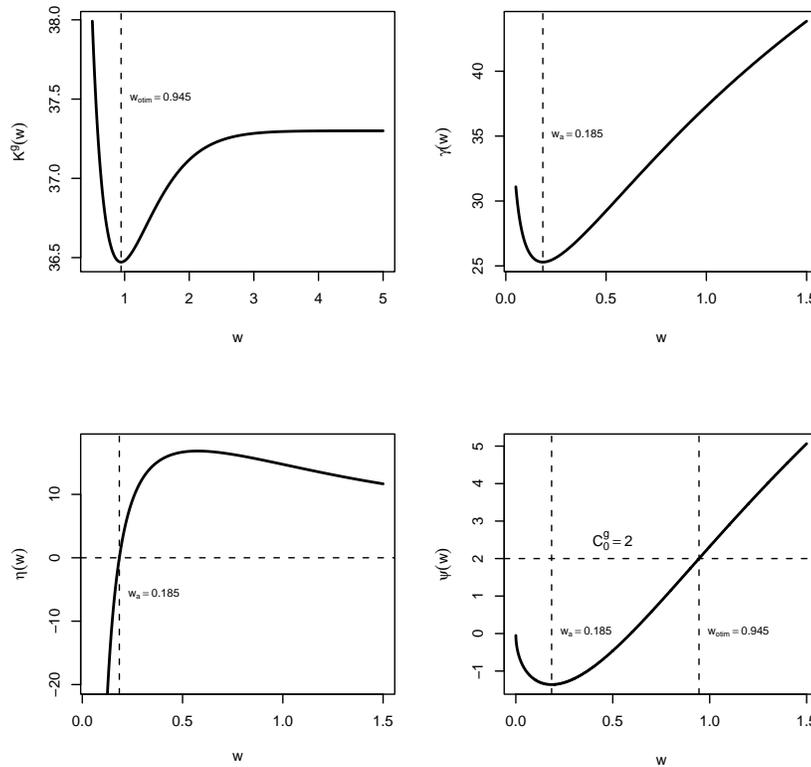


Figura 3.1: Funções para análise dos resultados no Exemplo 3.3.3

### 3.4 Tempo ótimo de garantia baseado na regra *ILA*

Nesta seção vamos analisar outra solução para o problema de otimização descrito na Seção 3.2, baseados no tempo de parada ótimo que, sob certas condições, pode-se obter pela regra de parada monótona *ILA*.

Considere o processo do custo de garantia  $Z_w^g$  e o processo do tempo total sob garantia  $X_w^g$ , com representação *SSM* dadas por (3.2) e (3.3), respectivamente, e a função do custo unitário esperado por unidade de tempo,  $K^g(w) = E[Z_w^g]/E[X_w^g]$ . Procuramos inicialmente, um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada  $W^*$  na classe de tempos de parada,

$$C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}} = \left\{ W : W \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } W \leq \zeta^{\text{II}}, E[\zeta^{\text{II}}] < \infty, E[X_W^g] < \infty \right\}, \quad (3.39)$$

tal que

$$K_{\text{optim}}^g = K^g(W^*) = \inf \{ K^g(W) : W \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}} \}. \quad (3.40)$$

Para a solução ótima pela regra *ILA* vamos considerar os resultados seguintes achados em Aven e Jensen [2].

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade completo e a filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Sejam  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  e  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  processos estocásticos reais, contínuos à direita e adaptados à filtragem  $\mathbb{F}$ ,  $T > 0$  um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito com

$E[Z_T] > -\infty$  e  $E|X_T| < \infty$ , e

$$C_T^{\mathbb{F}} = \{\vartheta : \vartheta \text{ é um } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } \vartheta \leq T, E[Z_{\vartheta}] > -\infty, E|X_{\vartheta}| < \infty\}. \quad (3.41)$$

Considere a razão  $K_{\vartheta} = \frac{E[Z_{\vartheta}]}{E[X_{\vartheta}]}$  e  $\sigma \in C_T^{\mathbb{F}}$  tal que

$$K^* = K_{\sigma} = \inf\{K_{\vartheta} : \vartheta \in C_T^{\mathbb{F}}\}. \quad (3.42)$$

**Suposição (A).**  $X = (g, L)$  e  $Z = (f, M)$  são semimartingais regulares com  $E[Z_0] > 0$ ,  $E[X_0] \geq 0$ ,  $g_s > 0, \forall s \geq 0$  e  $L_{t \wedge T}, M_{t \wedge T} \in \mathcal{M}_0$  são martingais uniformemente integráveis.

**Teorema 3.1.** (Aven e Jensen [2, Lema 72]). *Assuma que a suposição (A) é satisfeita e*

$$q = \inf\left\{\frac{f_t(\omega)}{g_t(\omega)} : 0 \leq t < T(\omega), \omega \in \Omega\right\} > -\infty. \quad (3.43)$$

Então  $k_l \leq K^* \leq k_u$ , onde estes limites são dados por

$$k_l = \begin{cases} \frac{E[Z_0 - q \cdot X_0]}{E[X_T]} + q, & \text{se } E[Z_0 - q \cdot X_0] > 0 \\ \frac{E[Z_0]}{E[X_0]}, & \text{se } E[Z_0 - q \cdot X_0] \leq 0 \end{cases}, \quad (3.44)$$

$$k_u = \frac{E[Z_T]}{E[X_T]}. \quad (3.45)$$

Seja o processo

$$r_t^g = C^{g, \text{I}} \lambda_t^{\text{I}} + C^{g, \text{II}} \lambda_t^{\text{II}}, \quad t \in [0, \zeta^{\text{II}}) \quad (3.46)$$

e

$$r_{\inf}^g = \inf\left\{r_t^g(\omega), 0 \leq t < \zeta^{\text{II}}(\omega), \omega \in \Omega\right\}. \quad (3.47)$$

Defina  $f_t = 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t\}}(C^{g,\text{I}}\lambda_t^{\text{I}} + C^{g,\text{II}}\lambda_t^{\text{II}})$  e  $g_t = 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t\}}$ . Observe que no conjunto  $\{t < \zeta^{\text{II}}\}$ ,  $r_t^g = f_t/g_t$ . Logo, pelo Teorema 3.1, com  $T = \zeta^{\text{II}}$ ,  $X = X^g$ ,  $Z = Z^g$  e  $K = K^g(w)$ , desde que o martingal  $M^g$  em (3.2) é uniformemente integrável e

$$E[Z_0^g - r_{\text{inf}}^g \cdot X_0^g] = E[C_0^g - r_{\text{inf}}^g \cdot 0] = C_0^g > 0,$$

então  $K_{\text{optim}}^g$  é limitado pelas quantidades  $k_l^g \leq K_{\text{optim}}^g \leq k_u^g$ , onde,

$$k_u^g = K^g(\zeta^{\text{II}}) = \frac{C_0^g + C^{g,\text{II}} + C^{g,\text{I}} E\left[\int_0^{\zeta^{\text{II}}} \lambda_s^{\text{I}} ds\right]}{E[\zeta^{\text{II}}]}, \quad \text{e}$$

$$0 \leq k_l^g = \frac{C_0^g}{E[\zeta^{\text{II}}]} + r_{\text{inf}}^g. \quad (3.48)$$

**Proposição 3.3.** *Seja o processo  $r_t^g$  em (3.46) e os limites  $k_l^g$  e  $k_u^g$  em (3.48). Suponha que  $r_t^g$  é  $(k_l^g, k_u^g)$ -crescente  $P$ -q.c. em  $\{t < \zeta^{\text{II}}\}$ , isto é*

$$\forall t \in \{t < \zeta^{\text{II}}\} \text{ e } h \geq 0, \quad r_t^g \geq k_l^g \quad \text{implica} \quad r_{t+h}^g \geq r_t^g \wedge k_u^g. \quad (3.49)$$

Então, o tempo de parada ótimo  $\mathcal{W}^* \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g,\mathbb{F}}$  que minimiza  $K^g(W)$ , é tal que

$$\mathcal{W}^* = w_{x_{\text{inf}}} \wedge \zeta^{\text{II}}, \quad \text{com} \quad w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} \quad (3.50)$$

e

$$x_{\text{inf}} = K_{\text{optim}}^g = \inf\left\{x \geq 0 : E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}}(x - r_s^g) ds\right] \geq C_0^g\right\} \quad (3.51)$$

**Prova.**

Com o fim de aplicar a regra de parada monótona *ILA*, considere o processo

$Y_w^x$ ,

$$Y_w^x = x \cdot X_w^g - Z_w^g = -C_0^g + \int_0^w h_s^x ds + P_w, \quad \text{com } x \in [k_l^g, k_u^g], \quad (3.52)$$

onde  $h_t^x = 1_{\{\zeta^{\text{II}} > t\}}(x - r_t^g)$ , e o martingal  $P = -M^g$  e portanto,  $P \in \mathcal{M}_0^2$ . Desta forma, transformamos o problema de minimização em achar  $\mathcal{W}^* \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}}$  tal que

$$E[Y_{\mathcal{W}^*}] = \sup\{E[Y_W] : W \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}}\} = 0. \quad (3.53)$$

Para  $t \in \{t < \zeta^{\text{II}}\}$ ,  $h_t^x = x - r_t^g$ . Notamos que o *caso monótono* é satisfeito se  $r_t^g$  é crescente P-q.c. com  $r_0^g < K_{\text{optim}}^g$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} r_t^g > K_{\text{optim}}^g$ . Por (3.49) temos que,  $\forall t \in [0, \zeta^{\text{II}})$  e  $x \in [k_l^g, k_u^g]$ ,  $h_t^x$  satisfaz o *caso monótono* (2.2). Assim,  $\forall x \in [k_l, k_u]$ , com  $M^g$  uniformemente integrável e desde que  $K_{\text{optim}}^g$  é desconhecido, a regra de parada *ILA* que maximiza  $E[Y_w^x]$ , é dada por

$$\begin{aligned} \rho_x &= \inf\{w \geq 0 : x - r_w^g \leq 0\} \wedge \zeta^{\text{II}} \\ &= \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} \wedge \zeta^{\text{II}} \\ &= w_x \wedge \zeta^{\text{II}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

e  $E[Y_{\rho_x}^x] = \sup\{E[Y_W^x], W \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}}\}$ .

Por definição,  $\rho_x \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}}$  e de (3.49), (3.50) e (3.54) conclui-se que o tempo ótimo procurado é  $\mathcal{W}^* = \rho_{K_{\text{optim}}^g}$ . Além disso,  $E[Y_w^x] = x \cdot E[X_w^g] - E[Z_w^g]$ , em particular para  $x = K_{\text{optim}}^g$ , e  $w \in [0, \zeta^{\text{II}})$ ,

$$\begin{aligned} E[Y_w^{K_{\text{optim}}^g}] &= K_{\text{optim}}^g \cdot E[X_w^g] - E[Z_w^g] \leq \sup_{w \in [0, \zeta^{\text{II}})} E[Y_w^{K_{\text{optim}}^g}] \\ &= \sup_{W \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}}} E[Y_W^{K_{\text{optim}}^g}] \\ &= E[Y_{\mathcal{W}^*}^{K_{\text{optim}}^g}] \\ &= K_{\text{optim}}^g \cdot E[X_{\mathcal{W}^*}^g] - E[Z_{\mathcal{W}^*}^g] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, para  $w \in [0, \zeta^{\text{II}})$ ,

*i.* Se  $0 \leq k_l^g \leq x < K_{\text{optim}}^g$ , então para todo  $w \in [0, \zeta^{\text{II}})$ ,

$$E[Y_w^x] < E[Y_w^{K_{\text{optim}}^g}] \leq 0, \text{ e portanto, } E[Y_{\rho_x}^x] = \sup_{w \in [0, \zeta^{\text{II}})} E[Y_w^x] < 0.$$

*ii.* Se  $k_u^g \geq x \geq K_{\text{optim}}^g$ , então para todo  $w \in [0, \zeta^{\text{II}})$ ,  $E[Y_w^x] \geq E[Y_w^{K_{\text{optim}}^g}]$ ,

e portanto,

$$E[Y_{\rho_x}^x] = \sup_{w \in [0, \zeta^{\text{II}})} E[Y_w^x] \geq \sup_{w \in [0, \zeta^{\text{II}})} E[Y_w^{K_{\text{optim}}^g}] = 0.$$

Observe também que,  $\{\zeta^{\text{II}} \leq \rho_x\} = \{\zeta^{\text{II}} = \rho_x\} = \{\zeta^{\text{II}} \leq w_x\}$ , logo,

$$\begin{aligned} Y_{\rho_x}^x &= x \cdot X_{\rho_x}^g - Z_{\rho_x}^g \\ &= x \cdot \rho_x - [C_0^g + C^{g,\text{I}} N_{\rho_x}^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} 1_{\{\zeta^{\text{II}} \leq w_x\}}] \\ &= \int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} [x - (C^{g,\text{I}} \lambda_s^{\text{I}} + C^{g,\text{II}} \lambda_s^{\text{II}})] ds - C_0^g \end{aligned} \quad (3.55)$$

Assim, de *i.*, *ii.* e (3.55), conclui-se que

$$\begin{aligned} x_{\text{inf}} &= \inf \left\{ x \geq 0 : E[Y_{\rho_x}^x] \geq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ x \geq 0 : E \left[ \int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (x - r_s^g) ds \right] \geq C_0^g \right\} = K_{\text{optim}}^g \end{aligned}$$

e  $\mathcal{W}^* = \rho_{K_{\text{optim}}^g} = w_{x_{\text{inf}}} \wedge \zeta^{\text{II}}$ . □

**Nota 3.3.** O tempo  $w_{x_{\text{inf}}}$  é realmente o tempo no qual estamos interessados, mas este pode ser aleatório. Desde que o período de garantia tem que ser fixo, é necessária alguma análise adicional sobre o resultado anterior para obter uma solução ótima em termos práticos.

### 3.4.1 Exemplo ilustrativo 1

Considere um sistema coerente de três componentes *IID*, com a estrutura, a definição para as falhas do tipo I e II e as constantes de custos, como foram definidos no Exemplo 3.3.3, mas com a função de taxa de falha ordinária  $r(t) = t + 0,1, \forall t \geq 0$ . Neste caso, o processo  $r_t^g$  deste sistema, definido em (3.38), é crescente P-q.c. para todo  $t \geq 0$ , com  $r_{\inf}^g = r_0^g = 1$ . Seja  $r^1(w) = C^{g,II} r(w) = 10w + 1$ , então,

$$W_x^1 = \inf\{w \geq 0 : r^1(w) \geq x, x \geq 0\} = \begin{cases} 0,1x - 0,1 & \text{se } 0,1x - 0,1 \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja também  $r^2(w) = (C^{g,I} + C^{g,II})r(w) = 15w + 1,5$ , então,

$$W_x^2 = \inf\{w \geq 0 : r^2(w) \geq x, x \geq 0\} = \begin{cases} \frac{1}{15}x - 0,1 & \text{se } \frac{1}{15}x - 0,1 \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que  $\forall x \geq 0, W_x^1 \geq W_x^2$ . Os limites  $k_l^g$  e  $k_u^g$  definidos em (3.48) correspondem a 2,725 e 14,665 respectivamente. A Figura 3.2 apresenta a função  $K^g(w)$ , com os limites  $k_l^g$  e  $k_u^g$ , na qual observamos que  $K^g(w)$  atinge um mínimo de 7,919 em  $w_{\text{otim}} = 0,564$ .

Para achar o tempo  $\rho_x$  definido em (3.54), considere as Figuras 3.3 a 3.5.

Temos que

- Se  $T_1 \wedge T_2 > W_x^1$  (ver Figura 3.3), então  $w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} = W_x^1$ .

- Se  $T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2$  (ver Figura 3.4),  $w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} = W_x^2$ .
- Se  $W_x^2 < T_1 \wedge T_2 \leq W_x^1$  (ver Figura 3.5), então  $w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} = T_1 \wedge T_2$ .

Resumindo,  $w_x = W_x^1 \wedge [W_x^2 \vee (T_1 \wedge T_2)]$ , e portanto,

$$\rho_x = W_x^1 \wedge [W_x^2 \vee (T_1 \wedge T_2)] \wedge T_3.$$

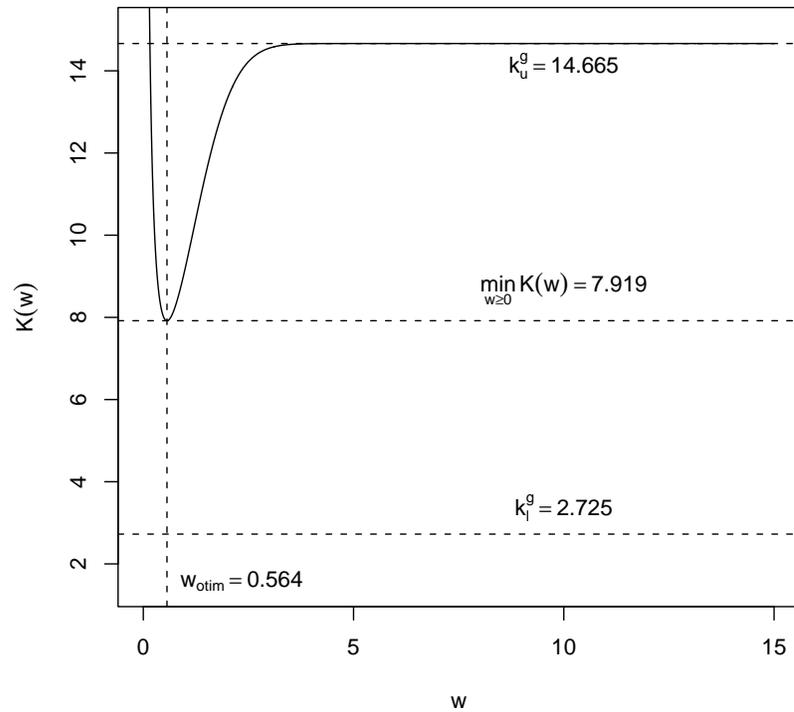


Figura 3.2: Função  $K^g(w)$  e limites  $k_l^g$  e  $k_u^g$ , Exemplo 3.4.1

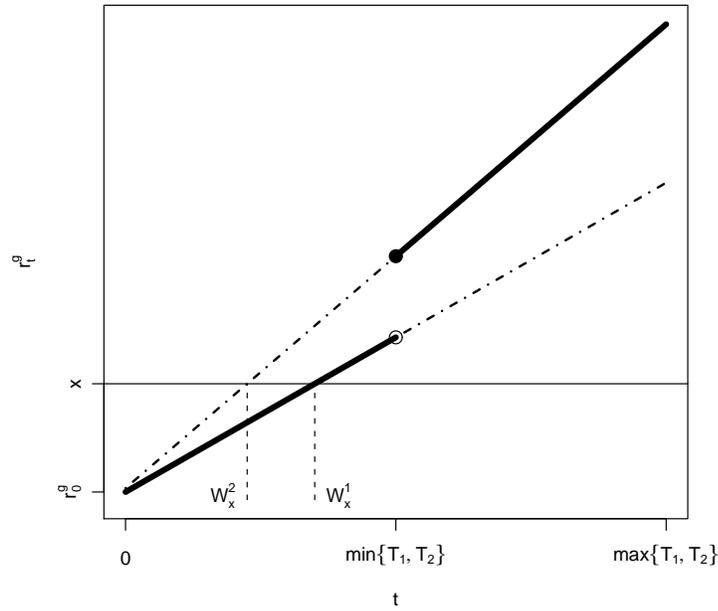


Figura 3.3:  $w_x$  em  $T_1 \wedge T_2 > W_x^1$ , Exemplo 3.4.1

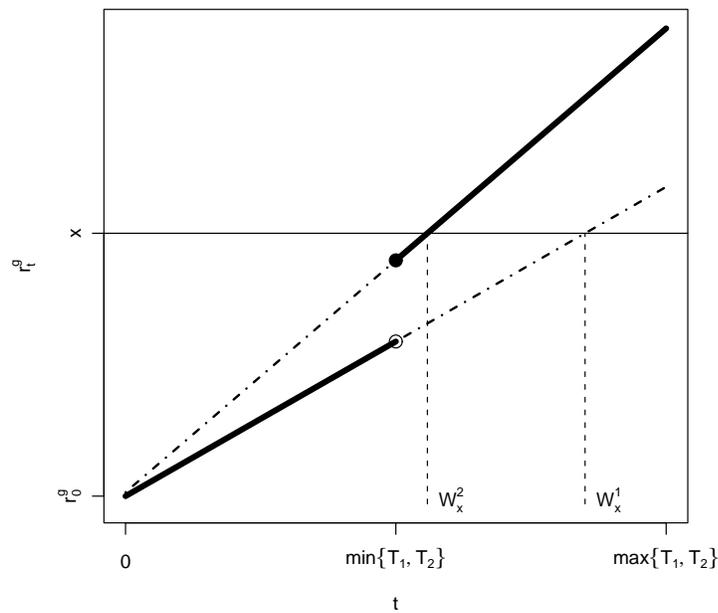


Figura 3.4:  $w_x$  em  $T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2$ , Exemplo 3.4.1

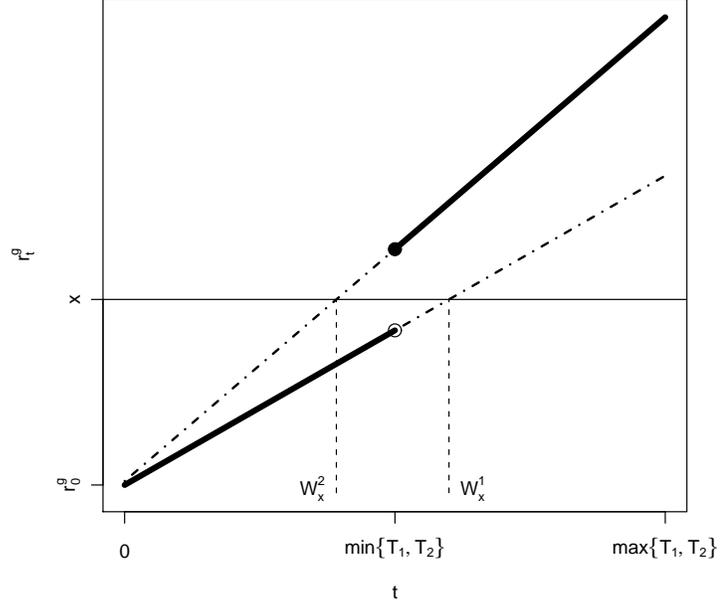


Figura 3.5:  $w_x$  em  $W_x^2 < T_1 \wedge T_2 \leq W_x^1$ , Exemplo 3.4.1

Para achar  $x_{\text{inf}}$  em (3.51), calculamos  $E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\Pi} > s\}}(x - r_s^g) ds\right]$ , como segue,

$$\begin{aligned}
 E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\Pi} > s\}}(x - r_s^g) ds\right] &= \\
 &P(T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2) E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{T_3 > s\}}(x - r_s^g) ds \mid T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2\right] \\
 &+ P(T_1 \wedge T_2 > W_x^2) E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{T_3 > s\}}(x - r_s^g) ds \mid T_1 \wedge T_2 > W_x^2\right] \\
 &= P(T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2) \left[ \int_0^{W_x^2} P(T_3 > s) \left( x - r(s) [C^{g,1}(P(T_1 \leq s) + P(T_2 \leq s)) + C^{g,\Pi}] \right) ds \right] \\
 &+ P(T_1 \wedge T_2 > W_x^2) \left[ \int_0^{W_x^1} P(T_3 > s) P(T_1 > s) P(T_2 > s) (x - C^{g,\Pi} r(s)) ds \right].
 \end{aligned}$$

Por métodos numéricos, achamos a solução para (3.51), para  $x \in [k_l^g, k_u^g]$  e obtemos  $x_{\text{inf}} = 7,92$ , isto é, o mínimo indicado na Figura 3.2. Para este valor temos que  $W_{x_{\text{inf}}}^1 = 0,692$  com  $K^g(W_{x_{\text{inf}}}^1) = 8,082$  e  $P(T_1 \wedge T_2 > W_{x_{\text{inf}}}^1) = 0,539$ , enquanto que  $W_{x_{\text{inf}}}^2 = 0,428$  com  $K^g(W_{x_{\text{inf}}}^2) = 8,204$  e  $P(T_1 \wedge T_2 \leq W_{x_{\text{inf}}}^2) = 0,236$ . Portanto concluímos que o valor fixo  $w$  que procuramos não deve ser menor do que 0,428 nem maior do que 0,692 pois fora desse intervalo a função  $K^g(w)$  é ainda maior do que 7,92 e/ou com uma alta probabilidade de observar falhas do tipo I. Além disso, note que  $w_{\text{otim}} = 0,564 \in [W_{x_{\text{inf}}}^2, W_{x_{\text{inf}}}^1]$  e  $(W_{x_{\text{inf}}}^1 + W_{x_{\text{inf}}}^2)/2 = 0,5602$  para o qual  $K^g(0,5602) \approx 7,92$  e  $P(T_1 \wedge T_2 > 7,919) = 0,653$ . Então, fixando o período de garantia em 0,56 temos uma alta probabilidade de minimizar os custos de garantia por unidade de tempo.

### 3.4.2 Exemplo ilustrativo 2

Considere o sistema do exemplo anterior, esta vez com as variáveis  $T_1, T_2, T_3$  distribuídas *IID* como uma variável  $\text{exp}(1)$ , isto é, com taxa de falha  $r(t) = 1 \forall t \geq 0$ . Com os mesmos valores para as constantes de custo, temos que o processo  $r_t^g$  tem um mínimo em  $t = 0$ ,  $r_0^g = C^{g,\text{II}} = 10$ , e atinge um valor máximo em  $T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2$  de  $r_{\text{max}}^g = C^{g,\text{I}} + C^{g,\text{II}} = 15$ . Os limites em (3.48) correspondem a  $k_l^g = C_0^g + C^{g,\text{II}} = 12$  e  $k_u^g = C_0^g + C^{g,\text{I}} + C^{g,\text{II}} = 17$ . A Figura 3.6 apresenta a função  $K^g(w)$ , com os limites para a otimização indicados, assim como o valor mínimo de 16,325 atingido em  $w_{\text{otim}} = 1,001$ . Na Figura 3.7 podemos ver que o processo  $r_t^g$  é não decrescente P-q.c.

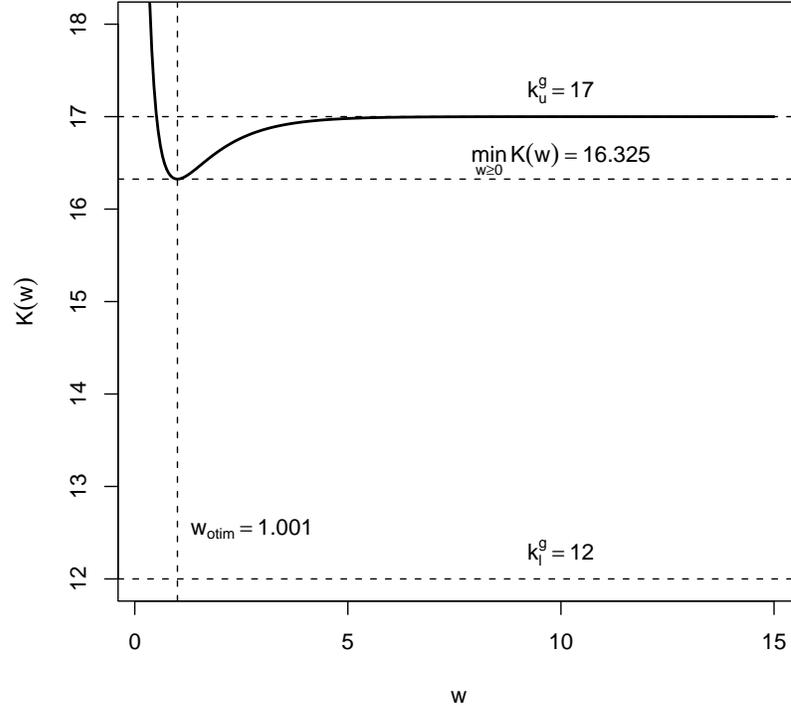


Figura 3.6: Função  $K^g(w)$  e limites  $k_l^g$  e  $k_u^g$ , Exemplo 3.4.2

Para achar o tempo de parada  $\rho_x$  analisamos a Figura 3.7. Temos que

- Para todo  $x \in [0, r_0^g]$ ,  $w_x = \inf\{t \geq 0 : r_t^g \geq x\} = 0$  e portanto  $\rho_x = w_x \wedge T_3 = 0$ .
- Para todo  $x \in (r_0^g, r_{\max}^g]$ ,  $w_x = \inf\{t \geq 0 : r_t^g \geq x\} = T_1 \wedge T_2$ , portanto  $\rho_x = T_1 \wedge T_2 \wedge T_3$ .
- Para todo  $x \in (r_{\max}^g, k_u^g]$ ,  $w_x = \inf\{t \geq 0 : r_t^g \geq x\} = \infty$ , logo,  $\rho_x = w_x \wedge T_3 = T_3$

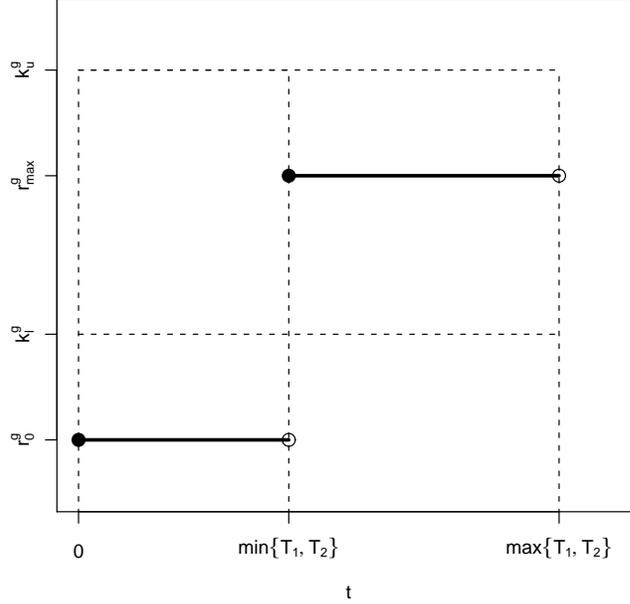


Figura 3.7: Processo  $r_t^g$  e limites  $k_l^g$  e  $k_u^g$ , Exemplo 3.4.2

Desde  $K^g(0) = \infty \notin [k_l^g, k_u^g]$ , só vamos analisar os dois últimos casos. Para o terceiro caso,  $K^g(T_3) = k_u^g = 17$ . Vejamos o que acontece no segundo caso. Para achar  $x_{\text{inf}}$  em (3.51), calculamos  $E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}}(x - r_s^g) ds\right]$ , como segue,

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}}(x - r_s^g) ds\right] &= x \cdot E[T_1 \wedge T_2 \wedge T_3] \\ &\quad - C^{g,\text{I}} E\left[\int_0^{T_1 \wedge T_2} 1_{\{T_3 > s\}} [1_{\{T_1 \leq s\}} + 1_{\{T_2 \leq s\}}] ds\right] - C^{g,\text{II}} P(T_3 \leq T_1 \wedge T_2) \\ &= \frac{x}{3} - \frac{C^{g,\text{II}}}{3}, \end{aligned}$$

e resolvendo a equação  $\frac{x}{3} - \frac{C^{g,\text{II}}}{3} = C_0^g$ , obtemos que para  $w_x = T_1 \wedge T_2$   $x = C^{g,\text{II}} + 3C_0^g = 16 \in [k_l^g, k_u^g]$ , isto é  $K^g(T_1 \wedge T_2) = 16$ . Assim, o mínimo

do custo de garantia esperado por unidade de tempo seria atingido tomando como tempo de garantia o tempo da primeira falha entre os componentes 1 e 2, isto é, se é oferecida uma garantia tão longa quanto a vida do componente mais fraco entre os componentes 1 e 2. Isto implica que se o tempo de garantia deve ser fixado em um valor  $w$ , este deve ser escolhido como um quantil da distribuição de  $T_1 \wedge T_2$ , tal que  $P(T_1 \wedge T_2 \leq w)$  seja o máximo possível enquanto que  $K^g(w)$  seja o mínimo possível. Acharmos por métodos numéricos que tal quantil é aproximadamente 1,00087 para o qual  $P(T_1 \wedge T_2 \leq 1,00087) = 0,87$  e  $K^g(1,00087) = 16,325$ , um pouco maior de 16, mas como se pode perceber na Figura 3.6, corresponde ao mínimo para  $w$  fixado.

# Um problema de otimização adicional em *burn-in* e garantia

Neste capítulo introduzimos um problema de otimização com o objetivo de obter simultaneamente, os tempos ótimos de *burn-in* e de garantia que minimizem o custo de garantia unitário esperado, por unidade de tempo assintótico, com uma política *FRW* com renovação, quando o processo de falha do produto segue o *modelo de falha geral*. A solução é analisada sob a sigma álgebra trivial, isto é,  $\sigma(t \wedge \zeta) = \sigma\{1_{\{\zeta > s\}}, 0 \leq s \leq t\}$ , mas no futuro esperamos obter uma solução sob níveis maiores de informação.

Sob o *modelo de falha geral* descrito na Seção A.2, considere o seguinte. O processo de *burn-in* inicia-se com uma unidade nova que é reparada minimamente nas falhas do tipo I, até exceder o tempo  $b$  de *burn-in*. Se uma falha do tipo II ocorre antes desse tempo, a unidade é substituída por uma nova e o procedimento reiniciado. Portanto, o processo termina quando nenhuma

falha do tipo II é observada durante o intervalo fixo de *burn-in*  $(0, b]$ . A estrutura de custo considerada é a proposta por Sheu e Chien [49], que é aditiva e inclui as seguintes quantidades:

- $C_0$  Custo fixo de manufatura por unidade
- $C_1$  Custo fixo de *burn-in* por unidade
- $C_2$  Custo por unidade de tempo de *burn-in*, por unidade
- $C_3$  Custo do reparo mínimo por falha do tipo I durante o período de *burn-in*
- $C_4$  Valor adicional sobre o custo por unidade, por reparo mínimo ou por substituição, durante o período de garantia.

Assume-se que  $C_0 + C_1 > C_3$ . Considere a seqüência  $(\zeta_n^{\text{II}})_{n \geq 1}$  de variáveis aleatórias *IID* como  $\zeta^{\text{II}}$ , com função de sobrevivência  $\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(t)$  dada em (A.4) e o processo de contagem  $\tilde{N}_t^{\text{I}}$ , do número de falhas do tipo I em  $[0, t]$ , com compensador  $\int_0^t q(s)r_\zeta(s)ds$  e portanto, o processo  $\tilde{N}_{t \wedge \zeta^{\text{II}}}^{\text{I}}$  tem como compensador  $\int_0^t 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} q(s)r_\zeta(s)ds$ . O custo de manufatura por unidade no processo de *burn-in*, é o processo  $Z_b^B$  dado por:

$$Z_b^B = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_j^{\text{II}} \leq b\}} \cdot [(C_0 + C_1) + C_2(b \wedge \zeta_n^{\text{II}}) + C_3 \tilde{N}_{b \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}}] \quad (4.1)$$

Por convenção assume-se  $\prod_{i=1}^{n-1} (\bullet) \equiv 1$ , para  $n = 1$ . Pela condição *IID*, o custo de *burn-in* esperado é  $B(b) = E[Z_b^B]$ ,

$$B(b) = \frac{(C_0 + C_1) + \int_0^b \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(s) [C_2 + C_3 q(s)r_\zeta(s)] ds}{\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b)}, \quad (4.2)$$

com  $B(0) = (C_0 + C_1)$ . Claramente  $B(b)$  é uma função estritamente crescente em  $b$ .

O produto com *burn-in* é vendido sob uma política de garantia *FRW* com renovação segundo a descrição dada na Seção 3.3.1. Considere a sequência de variáveis aleatórias  $(\zeta_n^{\text{II}} \mid \zeta_n^{\text{II}} > b)_{n \geq 1}$ , *IID* como  $\zeta^{\text{II}} \mid \zeta^{\text{II}} > b$ . O custo de garantia para as unidades sobreviventes ao *burn-in*, é o processo  $Z_w^{G,b}$  dado por,

$$Z_w^{G,b} = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} 1_{\{b < \zeta_j^{\text{II}} \leq b+w \mid \zeta_j^{\text{II}} > b\}} \cdot [(B(b) + C_4) 1_{\{b < \zeta_n^{\text{II}} \leq b+w \mid \zeta_n^{\text{II}} > b\}} + (C_3 + C_4)(\tilde{N}_{(b+w) \wedge \zeta_n^{\text{II}}}^{\text{I}} \mid \zeta_n^{\text{II}} > b - \tilde{N}_b^{\text{I}})]. \quad (4.3)$$

Pela condição *IID*, o custo de garantia esperado corresponde a  $G(b, w) = E[Z_w^{G,b}]$ ,

$$G(b, w) = \frac{(B(b) + C_4)P(b < \zeta^{\text{II}} \leq b + w \mid \zeta^{\text{II}} > b)}{P(\zeta^{\text{II}} > b + w \mid \zeta^{\text{II}} > b)} + \frac{(C_3 + C_4) \left[ \int_0^{b+w} P(\zeta^{\text{II}} > s \mid \zeta^{\text{II}} > b) q(s) r_\zeta(s) ds - \int_0^b q(s) r_\zeta(s) ds \right]}{P(\zeta^{\text{II}} > b + w \mid \zeta^{\text{II}} > b)},$$

logo,

$$G(b, w) = \frac{(C_3 + C_4) \int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b + u) q(b + u) r_\zeta(b + u) du + [\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b) - \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b + w)] (B(b) + C_4)}{\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b + w)}. \quad (4.4)$$

Derivando (4.4) com respeito a  $w$ , obtemos que  $\forall b \geq 0$ ,  $G(b, w)$  é uma função positiva e crescente em  $w$ .

O tempo total até terminar a garantia é o processo  $X_w^{G,b}$ ,

$$X_w^{G,b} = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} 1_{\{b < \zeta_j^{\text{II}} \leq b+w | \zeta_j^{\text{II}} > b\}} \cdot [(b+w) \wedge \zeta_n^{\text{II}} | \zeta_n^{\text{II}} > b-b] \quad (4.5)$$

Logo, o valor esperado de  $X_w^{G,b}$  corresponde a  $T(b, w) = E[X_w^{G,b}]$ ,

$$T(b, w) = \frac{\int_0^{b+w} P(\zeta^{\text{II}} > s | \zeta^{\text{II}} > b) ds - b}{P(\zeta^{\text{II}} > b+w | \zeta^{\text{II}} > b)} = \frac{\int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b+u) du}{\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b+w)}. \quad (4.6)$$

Nosso objetivo é achar os tempos ótimos de *burn-in* e de garantia, que minimizem a função de custo de garantia esperado por unidade de tempo assintótico, ou seja, a função,

$$K(b, w) = \frac{G(b, w)}{T(b, w)}, \quad (4.7)$$

isto é,

$$K(b, w) = \frac{(C_3 + C_4) \int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b+u) q(b+u) r_{\zeta}(b+u) du + [\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b) - \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b+w)] (B(b) + C_4)}{\int_0^w \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(b+u) du} \quad (4.8)$$

ou equivalentemente,

$$K(b, w) = \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) r_{\zeta}(u) du + [\bar{F}_{\zeta \text{II}}(b) - \bar{F}_{\zeta \text{II}}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_0^w \bar{F}_{\zeta \text{II}}(b+u) du}. \quad (4.9)$$

Sejam  $b^*$  e  $w^*$  os tempos ótimos de burn-in e de garantia, respectivamente, satisfazendo,

$$K(b^*, w^*) = \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w).$$

Como em Mi [41], Cha [20] e Cha [21], para  $b$  fixado, procuramos  $w^*(b)$ , obtendo  $(b^*, w^*) = (b^*, w^*(b^*))$ . Isto será feito usando o método de minimização do cálculo diferencial.

Após alguns cálculos algébricos, pode-se mostrar que  $K'(b, w) = \partial K / \partial w$ , é igual a

$$K'(b, w) = \frac{\bar{F}_{\zeta \text{II}}(b+w)}{\left[ \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du \right]^2} \times \psi(b, w) \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(b, w) = & (C_3 + C_4) \left[ \int_b^{b+w} [r_{\zeta}(b+w) - r_{\zeta}(u)] \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du \right] \\ & - (B(b) - C_3) \left[ \int_b^{b+w} [p(u)r_{\zeta}(u) - p(b+w)r_{\zeta}(b+w)] \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim, o sinal de  $K'(b, w)$  é igual ao sinal de  $\psi(b, w)$ . Portanto,

$$K'(b, w) = 0 \iff \psi(b, w) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du + [\bar{F}_{\zeta\text{II}}(b) - \bar{F}_{\zeta\text{II}}(b+w)] (B(b) - C_3) \\
 &= [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b+w)] r_\zeta(b+w) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du, \\
 &\Leftrightarrow K(b, w) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b+w)] r_\zeta(b+w). \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

No teorema a seguir, é provado que se a taxa de falha do produto  $r_\zeta(t)$ , e a probabilidade de falha do tipo II  $p(t)$ , tem forma de banheira, o tempo ótimo de *burn-in*  $b^*$  é menor ou igual ao máximo dos primeiros pontos de mudança das funções  $r(t)$  e  $p(t)$ . Além disso, o teorema fornece condições suficientes para um período ótimo de garantia  $w^*$ , finito.

**Teorema 4.1.** *Suponha que as funções  $r_\zeta(t)$ , e  $p(t) \in (0, 1)$  são diferenciáveis e na forma de banheira, com pontos de mudança  $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$ , e  $0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$ , respectivamente. Sejam  $t_1 = \max\{u_1, s_1\}$  e  $t_2 = \min\{u_2, s_2\}$ , e suponha,  $t_1 \leq t_2$ . Então,*

*i. Se  $b > t_1$ , então  $w^*(b) = \{w > 0 : b + w \leq t_2\}$ .*

*ii. Se  $b \leq t_1$ , e*

$$\begin{aligned}
 &[(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r_\zeta(\infty) \int_b^\infty \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du \\
 &> (C_3 + C_4) \int_b^\infty r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{F}_{\zeta\text{II}}(b),
 \end{aligned}$$

*então,  $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$ .*

Se

$$\begin{aligned} & [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r_\zeta(\infty) \int_b^\infty \bar{F}_{\zeta''}(u) du \\ & \leq (C_3 + C_4) \int_b^\infty r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta''}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{F}_{\zeta''}(b), \end{aligned}$$

então  $w^*(b) = +\infty$ .

iii. Se  $b \leq t_1$ ,  $r_\zeta(0) < r_\zeta(\infty)$  e  $p(0)r_\zeta(0) < p(\infty)r_\zeta(\infty)$ , então  $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$ .

iv.  $b^* \leq t_1$ , e

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{0 \leq b \leq t_1} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{0 \leq b \leq t_1} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r_\zeta(b + w^*(b)). \end{aligned}$$

### Prova.

Como  $r_\zeta(t)$  e  $p(t)$  tem forma de banheira com pontos de mudança  $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$ , e  $s_1 \leq s_2 < \infty$ , respectivamente, se  $t_1 = \max\{u_1, s_1\}$  e  $t_2 = \min\{u_2, s_2\}$ , então,

$$p(t)r_\zeta(t) \text{ é } \begin{cases} \text{decrecente, se} & 0 \leq t \leq t_1 \\ p \cdot r > 0, \text{ uma constante, se} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \text{crescente, se} & t \geq t_2 \end{cases}$$

portanto, considerando (4.11), temos o seguintes casos:

i.  $b > t_1$ : Neste caso temos que:

$$\psi(b, w) \text{ é } \begin{cases} = 0, & \text{se } b + w \leq t_2 \\ > 0, & \text{se } b + w > t_2 \end{cases}$$

## 102 Um problema de otimização adicional em *burn-in* e garantia

e a condição para  $\psi(b, w) = 0$  é satisfeita para qualquer  $w > 0$  tal que  $t_1 < b < b + w \leq t_2$ , ou seja,  $w^*(b) = \{w > 0 : b + w \leq t_2\}$ .

ii.  $b \leq t_1$ : Neste caso temos que:

(a) Se  $b + w \leq t_1 \implies b < b + w \leq t_1 \implies \forall u \in [b, b + w], r_\zeta(u) > r_\zeta(b + w)$   
e  $p(u)r_\zeta(u) > p(b + w)r_\zeta(b + w)$ , logo  $\psi(b, w) < 0$ .

(b) Se  $t_1 < b + w \leq t_2 \implies \forall u \in [b, b + w], r_\zeta(u) \geq r_\zeta(b + w)$  e  $p(u)r_\zeta(u) \geq p(b + w)r_\zeta(b + w)$ , logo  $\psi(b, w) < 0$ .

Por (a) e (b), temos que para  $b \leq t_1$ , e  $b + w \leq t_2$ ,  $\psi(b, w) < 0$ .

(c) Se  $b + w > t_2$ , é preciso ter alguma condição adicional para determinar se existe  $w > 0$  tal que  $\psi(b, w) \geq 0$ . Para isto consideramos o seguinte: Sejam  $\alpha(b, w)$  e  $\gamma(b, w)$ , as funções definidas por,

$$\alpha(b, w) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w)] r_\zeta(b + w) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du$$

$$\gamma(b, w) = (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du + (B(b) - C_3) \int_b^{b+w} p(u) r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du$$

De (b),  $\psi(b, w) < 0$  para  $b \leq t_1$ , e  $b + w \leq t_2$ , então, como  $\psi(b, w) = \alpha(b, w) - \gamma(b, w)$ , o anterior implica que para  $b \leq t_1$ , e  $b + w \leq t_2$ ,  $\alpha(b, w) < \gamma(b, w)$ .

Temos também que,  $\forall w > 0$

$$\frac{\partial \gamma(b, w)}{\partial w} =$$

$$(C_3 + C_4)r_\zeta(b + w)\bar{F}_{\zeta \text{II}}(b + w) + (B(b) - C_3)p(b + w)r_\zeta(b + w)\bar{F}_{\zeta \text{II}}(b + w) > 0,$$

e para  $b + w > t_2$ , pela forma de banheira das funções  $r_\zeta(\cdot)$  e  $p(\cdot)r_\zeta(\cdot)$  temos

que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(b, w)}{\partial w} = & \frac{\bar{F}_{\zeta \text{II}}(b+w)\alpha(b, w)}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du} + \left[ [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b+w)] r'_\zeta(b+w) \right. \\ & \left. + (B(b) - C_3)p'(b+w)r_\zeta(b+w) \right] \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du > 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha(b, w)$  e  $\gamma(b, w)$ , são funções contínuas estritamente crescentes para  $\forall b+w > t_2$ , assim, se  $\alpha(b, \infty) > \gamma(b, \infty) \implies \exists t_2 < b+w < \infty : \alpha(b, w) \geq \gamma(b, w)$  e portanto  $w^*(b) = \inf \{w > 0 : b+w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$ . Como

$$\alpha(b, \infty) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r_\zeta(\infty) \int_b^\infty \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du$$

e

$$\gamma(b, \infty) = (C_3 + C_4) \int_b^\infty r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(b)$$

a condição em *ii* é satisfeita. No caso em que  $\alpha(b, \infty) \leq \gamma(b, \infty) \implies \nexists t_2 < b+w < \infty : \alpha(b, w) \geq \gamma(b, w)$ , e assim  $w^*(b) = +\infty$ .

*iii.* Seja  $b \leq t_1$ ,  $r_\zeta(0) < r_\zeta(\infty)$  e  $p(0)r_\zeta(0) < p(\infty)r_\zeta(\infty)$ . Observe que pela forma de banheira,  $r_\zeta(b) < r_\zeta(0)$  e  $p(b)r_\zeta(b) < p(0)r_\zeta(0)$ . Como as funções  $r_\zeta(\cdot)$  e  $p(\cdot)r_\zeta(\cdot)$  são estritamente crescentes para  $t > t_2$ , logo sob estas condições, para  $b+w > t_2$ ,  $\exists w > 0$ , tal que  $\forall u \in [b, b+w]$ ,  $r_\zeta(u) \leq r_\zeta(b+w)$  e  $p(u)r_\zeta(u) \leq p(b+w)r_\zeta(b+w)$ . Portanto

$$\int_b^{b+w} r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du \leq r_\zeta(b+w) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du$$

e

$$\int_b^{b+w} p(u)r_\zeta(u)\bar{F}_{\zeta\Pi}(u)du \leq p(b+w)r_\zeta(b+w) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u)du.$$

Como consequência, para tal  $w > 0$ ,  $\psi(b, w) \geq 0$  e então,

$$w^*(b) = \inf \{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty.$$

*iv.* Seja  $w^*(b)$  o  $w > 0$  tal que  $\psi(b, w) = 0$ , então, por (4.12) temos que,

$$K(b, w^*(b)) = \left[ (C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b)) \right] \times r_\zeta(b + w^*(b)). \quad (4.13)$$

Além disso,

$$\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = K(b^*, w^*(b^*)) = \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b)).$$

Então se  $b > t_1$ , por *i.* a condição em (4.13), corresponde a

$$K(b, w^*(b)) = \left[ (C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p \right] \times r, \quad \forall b > t_1, b + w \leq t_2.$$

No entanto, como  $B(b)$  é contínua e estritamente crescente em  $b$ , o mínimo de  $K(b, w^*(b))$  é atingido em  $b = t_1$  e assim,  $b^*$  não está definido. Pelo contrario, se  $0 \leq b \leq t_1$ , a condição em (4.13) corresponde a

$$K(b, w^*(b)) = \left[ (C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b)) \right] \times r_\zeta(b + w^*(b)), \quad \forall 0 \leq b \leq t_1.$$

Portanto,  $\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = K(b^*, w^*(b^*)) = \min_{0 \leq b \leq t_1} K(b, w^*(b))$ , e assim,  $b^* \leq t_1$  e

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{0 \leq b \leq t_1} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{0 \leq b \leq t_1} \left[ (C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b)) \right] \times r_\zeta(b + w^*(b)). \end{aligned}$$

□

O teorema a seguir, considera o caso especial no qual a taxa de falha do produto tem a forma de banheira mas a taxa da falha do tipo II é decrescente. Neste caso prova-se que o tempo ótimo de *burn-in* é finito mas não é necessariamente menor que o primeiro ponto de mudança da função  $r_\zeta(t)$ . Uma condição suficiente para um período ótimo de garantia finito é obtida.

**Teorema 4.2.** *Seja  $r_\zeta(t)$  contínua e diferenciável, com forma de banheira e com pontos de mudança em  $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$ , e  $p(t) \in (0, 1)$ , uma função decrescente  $\forall t \geq 0$ , tal que  $p(t)r_\zeta(t)$  é também decrescente  $\forall t \geq 0$ . Suponha também que  $\int_0^\infty r_\zeta(u)\bar{F}_{\zeta II}(u)du < \infty$ , e  $\mu = \int_0^\infty \bar{F}_{\zeta II}(u)du < \infty$ . Então,*

i.  $b^* < +\infty$

ii.  $\forall b \geq 0$ , se

$$\begin{aligned} & [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r_\zeta(\infty) \int_b^\infty \bar{F}_{\zeta II}(u)du \\ & > (C_3 + C_4) \int_b^\infty r_\zeta(u)\bar{F}_{\zeta II}(u)du + (B(b) - C_3)\bar{F}_{\zeta II}(b), \end{aligned}$$

então,  $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > u_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$ ; se

$$\begin{aligned} & [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r_\zeta(\infty) \int_b^\infty \bar{F}_{\zeta II}(u)du \\ & \leq (C_3 + C_4) \int_b^\infty r_\zeta(u)\bar{F}_{\zeta II}(u)du + (B(b) - C_3)\bar{F}_{\zeta II}(b), \end{aligned}$$

então  $w^*(b) = +\infty$ .

iii. Sob ii.  $(b^*, w^*)$  é tal que,

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{b \geq 0} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r_\zeta(b + w^*(b)). \end{aligned}$$

**Prova.**

*i.* Para provar que  $b^* < \infty$ , é suficiente mostrar que  $K(\infty, w) = +\infty$ ,  $\forall w > 0$ . Então, com  $w > 0$  fixo, calculamos  $\lim_{b \rightarrow +\infty} K(b, w)$ , com  $0 \cdot \infty = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} K(b, w) &= \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du + [\bar{F}_{\zeta\Pi}(b) - \bar{F}_{\zeta\Pi}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du} &= \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{[\bar{F}_{\zeta\Pi}(b) - \bar{F}_{\zeta\Pi}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du} & \end{aligned}$$

Note que:

1.  $\forall b \geq 0$

$$\frac{[\bar{F}_{\zeta\Pi}(b) - \bar{F}_{\zeta\Pi}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du} \geq 0$$

2. Pela monotonicidade e continuidade da função  $r_\zeta(t)$ , para  $b$  suficientemente grande, temos que  $\forall u \in [b, b+w]$ ,  $r_\zeta(u) \geq r_\zeta(b)$ , logo

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du} &> \frac{(C_3 + C_4) r_\zeta(b) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du}{\int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (C_3 + C_4) r_\zeta(b) = +\infty \end{aligned}$$

Portanto,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} K(b, w) = +\infty$  e  $b^* < +\infty$ .

*ii.* Sejam  $\eta(b, w)$  e  $\zeta(b, w)$  como segue:

$$\eta(b, w) = (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} [r_\zeta(b+w) - r_\zeta(u)] \bar{F}_{\zeta\Pi}(u) du$$

$$\zeta(b, w) = (B(b) - C_3) \int_b^{b+w} [p(u)r_\zeta(u) - p(b+w)r_\zeta(b+w)] \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du$$

Portanto,  $\psi(b, w) = \eta(b, w) - \zeta(b, w)$ , e

$$\frac{\partial \eta(b, w)}{\partial w} = (C_3 + C_4)r'(b+w) \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(b, w)}{\partial w} &= \\ &- (B(b) - C_3) \cdot [p'(b+w)r_\zeta(b+w) + p(b+w)r'(b+w)] \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du \\ &= (B(b) - C_3) \cdot \left[ - \frac{\partial(p(t)r_\zeta(t))}{\partial t} \Big|_{t=b+w} \right] \times \int_b^{b+w} \bar{F}_{\zeta\text{II}}(u) du > 0, \quad \forall w > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Considere os seguintes casos:

(a)  $b > u_1$ : Como  $r_\zeta(t)$  tem forma de banheira com pontos de mudança  $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$  e por hipótese,  $p(t)r_\zeta(t)$  é decrescente  $\forall t \geq 0$ , então,

1. Se  $b+w \leq u_2 \implies u_1 < b < b+w \leq u_2$ , portanto  $\forall u \in [b, b+w]$ ,  $r_\zeta(u) = r_\zeta(b+w) = r$ , e  $\eta(b, w) = 0$ . Como  $\zeta(b, w) > 0$ , temos  $\psi(b, w) < 0$ .
2. Se  $b+w > u_2, \forall u \in [b, b+w], r_\zeta(u) \leq r_\zeta(b+w)$ , então  $\eta(b, w) > 0$  e por (4.14), também é crescente.  $\zeta(b, w) > 0$  e por (4.15), crescente.

O anterior implica que para  $b > u_1, b+w^*(b) > u_2$ . Então, como  $\eta(b, w)$  e  $\zeta(b, w)$  são crescentes em  $b+w > u_2$ , neste intervalo elas se cruzam ou

## 108 Um problema de otimização adicional em *burn-in* e garantia

não.  $\eta(b, \infty) > \zeta(b, \infty)$  garante que existe  $w > 0$  tal que para  $b + w > u_2$ ,  $\eta(b, w) \geq \zeta(b, w)$ , ou seja, que  $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > u_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$ . Sob a condição dada no item *ii.* do teorema, temos,

$$\begin{aligned} & [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r_\zeta(\infty) \int_b^\infty \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du \\ & > (C_3 + C_4) \int_b^\infty r_\zeta(u) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{F}_{\zeta \text{II}}(b). \end{aligned}$$

Como  $\bar{F}_{\zeta \text{II}}(b) = \int_b^\infty p(u)r_\zeta(u)\bar{F}_{\zeta \text{II}}(u)du$ , então,

$$\begin{aligned} & (C_3 + C_4) \int_b^\infty [r_\zeta(\infty) - r_\zeta(u)] \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du > \\ & > (B(b) - C_3) \int_b^\infty [p(u)r_\zeta(u) - p(\infty)r_\zeta(\infty)] \bar{F}_{\zeta \text{II}}(u) du, \end{aligned}$$

portanto,  $\eta(b, \infty) > \zeta(b, \infty)$  e obtemos a conclusão dada em *ii.* para  $b > u_1$ .

(b)  $b \leq u_1$ : Observamos que

1. Pela forma banheira de  $r_\zeta(t)$ , e por (4.14),  $\eta(b, w)$  é decrescente e negativa para  $b + w \leq u_2$ , enquanto por (4.15) e  $p(t)r_\zeta(t)$  decrescente,  $\zeta(b, w)$  é crescente e positiva. Logo,  $\psi(b, w) < 0, \forall b + w \leq u_2$ .
2. Se  $b + w > u_2$ , por (4.14),  $\eta(b, w)$  é crescente, logo para algum  $b + w > u_2$ ,  $\eta(b, w) > 0$ . Neste mesmo intervalo  $\zeta(b, w)$  é crescente e positiva.

Então, temos que para  $b \leq u_1, b + w > u_2$ , as funções  $\eta(b, w)$ , e  $\zeta(b, w)$ , se cruzam ou não. Usando a mesma análise feita em (a), a conclusão dada em *ii* é verdadeira. para  $b \leq u_1$ .

Por (a) e (b), fica provado o item *ii.* do teorema, para  $b \geq 0$ .

*iii.* Sob *ii.*, para cada  $b \geq 0$ ,  $w^*$  é o  $w > 0$  tal que  $\psi(b, w) = 0$ , então, como em (4.13),

$$K(b, w^*(b)) = \left[ (C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b)) \right] \times r_\zeta(b + w^*(b))$$

e  $\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = K(b^*, w^*(b^*)) = \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b))$ , portanto,

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{b \geq 0} \left[ (C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b)) \right] \times r_\zeta(b + w^*(b)) \end{aligned}$$

□



# Estimação dos custos de garantia sob reparo mínimo

Como foi estabelecido no capítulo anterior, as garantias não só contribuem para a venda do produto mas podem representar uma fração importante dos custos totais de fabricação, e assim, na perspectiva do fabricante, torna-se necessário estimar os custos de um programa de garantia e seu efeito sobre o lucro da companhia.

Os modelos de custos de garantia descontados incorporam a dinâmica no tempo e proporcionam uma medida adequada dos custos envolvidos no programa, pois em geral, estes podem ser tratados como um fluxo de caixa aleatório em um tempo futuro. Dessa forma é possível modelar a sua evolução ao longo do ciclo de vida garantido bem como estimar os níveis das reservas dos fundos necessários para atender às reclamações futuras por garantia. Neste contexto, usualmente, os custos, dependentes do tempo, não são

estatisticamente independentes. Diversos aspectos dos custos de garantia descontados e das reservas correspondentes têm sido estudados em Mamer ([38], [39]), Patankar e Mitra [47] e Thomas [50].

Na prática a maioria dos produtos são sistemas compostos de vários componentes. Se cada componente tem sua garantia, elas podem ser combinadas para produzir uma garantia para o sistema. A garantia também pode ser definida para o sistema (como um todo) e em tais casos é necessário considerar a estrutura do sistema bem como o custo do serviço de garantia ao nível dos componentes (Thomas [50]). A análise dos custos de garantia para sistemas com vários componentes tem sido considerada em alguns trabalhos prévios: Ritchken [48] proporciona um exemplo de um sistema em paralelo de dois componentes com uma política de garantia bidimensional; Chukova e Dimitrov [23] derivam o custo esperado para sistemas em série e paralelo de dois componentes sob uma política de substituição sem custos para o comprador; Hussain e Murthy [28] discutem a estimação dos custos de garantia para sistemas em paralelo considerando que o nível de qualidade desconhecido de um produto novo pode ser incluído na formulação dos programas de Garantia; Bai e Pham [4] obtêm os primeiros dois momentos centrais para os custos de garantia com políticas de serviço completo com renovação, para sistemas complexos em série/paralelo; Balachandran et. al. [5] apresentam uma aproximação markoviana à análise de custos de garantias para um sistema de três componentes; Ja et. al. [30] estudam as propriedades dos custos de garantia descontados e os custos totais do programa de garan-

tia para políticas de garantia sem renovação e com processos de venda não estacionários.

Existem muitas maneiras de modelar o impacto das ações de reparo sobre os tempos de falha do sistema. Para sistemas complexos, o reparo é assumido frequentemente como reparo mínimo, o qual reconstitui a taxa de falha. Nguyen e Murthy [46] consideram um modelo geral de custo de garantia para produtos reparáveis de um só componente com os modelos de reparo mínimo, reparo imperfeito e reparo perfeito, mas ignora a dinâmica no tempo. Ja et. al. [29] analisam um modelo de custo de garantia para produtos de um componente reparados minimamente com custos dependentes do tempo; Ja et. al. [30] derivam vários modelos de reservas de garantia para produtos com um componente sob processos de venda não estacionários; Bai e Pham [3] usam processos de Poisson não homogêneos para descrever o processo de falha de uma estrutura em série de componentes reparáveis e independentes e analisa algumas propriedades dos custos de garantia descontados para as políticas *FRW* e *PRW*. Recentemente, Duchesne e Marri [25] consideram o mesmo problema analisando as propriedades das distribuições (média, variância e função característica) dos custos de garantia descontados correspondentes, modelando a confiabilidade do sistema segundo um modelo geral de riscos competitivos.

Se o sistema é em série e os componentes não têm falhas em comum, as falhas do sistema coincidem com as falhas dos componentes e os modelos de

custos de garantia para produtos com um componente podem ser aplicados de forma direta. Neste capítulo, além da estrutura em série, consideramos um sistema coerente de componentes reparável que podem ser dependentes, sob uma política de garantia com custos descontados e sob um processo de reparo mínimo do sistema ao nível de seus componentes. O sistema coerente é modelado como um sistema em série dos componentes que sobrevivem a seus níveis críticos, isto é, o primeiro tempo a partir do qual a falha do componente causa a falha do sistema. Os custos de garantia são estimados através dos processos pontuais de falha/reparo e usando o Teorema do Limite Central para Martingais para aproximar a distribuição dos custos de garantia para um período fixado de comprimento  $w$ .

### 5.1 Modelo de reparo mínimo de um sistema coerente observado ao nível de seus componentes

Reparar minimamente um sistema (reparável) significa reconstituir sua taxa de falha à condição imediatamente anterior à falha. Segundo Aven e Jensen [2] a definição do estado do sistema imediatamente antes da falha depende, de forma considerável, do nível de informação que se tem sobre o sistema. Assim, é possível distinguir dois tipos básicos de reparos mínimos: *reparo mínimo estatístico (caixa preta)* e *reparo mínimo físico*. No primeiro tipo, o reparo mínimo é equivalente a substituir o sistema completo por outro da mesma idade que teria o sistema se não tivesse falhado. No segundo tipo, supomos que o sistema é observado ao nível de seus componentes e o reparo

mínimo significa que só é reparado o componente, crítico, que causou a falha do sistema, de forma que este último volta à sua condição imediatamente anterior à falha.

Suponha que o sistema tem  $m$  componentes, sendo  $\zeta$  o tempo de vida do sistema,  $T_i$  o tempo de vida do componente  $i$ , e  $\tilde{N}_t$  o número de falhas do sistema no intervalo  $[0, t]$ , definidos em um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com a filtração  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left\{ \tilde{N}_s, 1_{\{T_i > s\}}, 0 \leq s \leq t, i = 1, \dots, m \right\},$$

Isto é, o sistema é observado ao nível de seus  $m$  componentes. Considere que as seguintes condições são válidas,

- A.  $0 < T_i < \infty$  P-q.c,  $i = 1, \dots, m$ .
- B. Para todo  $i \neq j$ ,  $P(T_i = T_j) = 0$ , isto é, nenhum de dois componentes têm falhas simultâneas, ainda que possam ser dependentes.
- C. Todos os tempos de vida  $T_i$  são  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada totalmente inacessíveis, (portanto o tempo de vida do sistema  $\zeta$  é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível) e conseqüentemente, todos os compensadores  $A^i$  dos processos  $N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}}$ , respectivamente, são contínuos P-q.c (Aven e Jensen [2]).

Desde que a condição B implica que os blocos de falha (conjuntos de componentes que podem falhar simultaneamente) observáveis num instante  $t$  cons-

tam de um dos  $m$  componentes, isto é,  $\{i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , consideramos os  $m$  (únicos P-q.c) compensadores  $A^i$  correspondentes aos processos de contagem simples  $N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}}$ , obtidos da decomposição de Doob-Meyer,

$$N_t^i = A_t^i + M_t^i, \quad M^i \in \mathcal{M}_0^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.1)$$

Supondo que cada componente tem uma taxa de falha determinística  $\lambda^i(t)$ , o compensador em (5.1) é dado por,

$$A_t^i = \int_0^t 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds < \infty \text{ P-q.c.}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.2)$$

Seja  $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ . Da decomposição de Doob-Meyer temos que,

$$N_t = A_t + M_t, \quad M \in \mathcal{M}_0^2. \quad (5.3)$$

Admitindo que  $\zeta$  tem a  $\mathcal{F}$ -intensidade  $\lambda_t$ , o compensador em (5.3) é dado por

$$A_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds < \infty \text{ P-q.c.} \quad (5.4)$$

O componente  $i$  contribui à falha do sistema depois de seu nível crítico  $Y_i$  (Aven e Jensen, [2]), isto é, o primeiro instante depois do qual a falha do componente  $i$  causa a falha do sistema. Sejam  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  os conjuntos de cortes minimais do sistema, que são conjuntos mínimos de componentes cujas falhas causam a falha do sistema (ver Barlow e Proschan [6]). Então, o nível crítico  $Y_i$  é o  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada

$$Y_i = \min_{j:i \in K_j} \max_{u \in K_j - \{i\}} T_u; \quad (5.5)$$

adotamos  $Y_i = \infty$  se o componente ou o sistema falham antes que tal componente seja crítico, isto é, se  $T_i \leq Y_i$  ou  $\zeta \leq Y_i$ . Desde que nenhum dos componentes falham simultâneamente, o sistema falhará no instante  $t$  quando o primeiro dos componentes críticos em  $t^-$  falhar. Assim, podemos escrever o tempo de vida do sistema como (Aven e Jensen [2])

$$\zeta = \min_{i=1, \dots, m} T_i 1_{\{Y_i < \infty\}}, \quad (5.6)$$

Arjas [1] prova que sob as condições estabelecidas, o  $\mathcal{F}_t$ -compensador de  $N_t$  é dado por

$$A_t = \sum_{i=1}^m \left[ A_{t \wedge \zeta}^i - A_{Y_i}^i \right]^+ \quad \text{P-q.c.}, \quad (5.7)$$

onde  $[a]^+ = \max\{0, a\}$ . De (5.2) e (5.7) obtemos que

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{\{T_i > s\}} 1_{\{Y_i < s < \zeta\}} \lambda^i(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{\{Y_i < s < T_i \wedge \zeta\}} \lambda^i(s) ds. \end{aligned} \quad (5.8)$$

De (5.6), para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\zeta \leq T_i 1_{\{Y_i < \infty\}}$ ; além disso, em  $\{Y_i < \infty\}$ ,  $Y_i < T_i$ . Logo (5.8) simplifica para,

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{\{Y_i < s < \zeta\}} \lambda^i(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds \\ &= \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \sum_{i=1}^m 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds. \end{aligned} \quad (5.9)$$

De (5.4) e (5.9) é claro que a  $\mathcal{F}_t$ -intensidade do sistema é dada por

$$\lambda_t = \sum_{i=1}^m 1_{\{Y_i < t\}} \lambda^i(t). \quad (5.10)$$

Como o sistema é reparado minimamente ao nível de seus componentes, o processo  $\lambda_t$  é reconstituído à sua condição imediatamente anterior à falha do sistema, e portanto, só é reparado minimamente aquele componente crítico que causou a falha do sistema no instante  $t$ . Desta forma levamos em conta a história acumulada na filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Portanto, o processo que conta o número de reparos mínimos do sistema ao nível de seus componentes, no intervalo  $[0, t]$  é dado por,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_t &= \int_0^t \lambda_s ds + \tilde{M}_t, \quad \tilde{M} \in \mathcal{M}_0^2 \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^m 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t = \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t. \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5.2 Processo de custo de garantia

Considere inicialmente, o processo de reparo mínimo do componente  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . De (5.1) temos que  $N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}} = A_t^i + M_t^i$ ,  $M^i \in \mathcal{M}_0^2$ . Logo, se em cada tempo de falha  $T_i$  é feito um reparo mínimo sobre o componente, o processo de contagem dos reparos no intervalo  $[0, t]$  é um processo de Poisson não homogêneo com a decomposição de Doob-Meyer, dada por,

$$\tilde{N}_t^i = \int_0^t \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t^i, \quad \tilde{M}^i \in \mathcal{M}_0^2, \quad (5.12)$$

e portanto o número esperado de reparos mínimos sobre o componente  $i$  é  $E[\tilde{N}_t^i] = \int_0^t \lambda^i(s) ds$ . Seja  $H_i(t)$ , uma função determinística, contínua (e portanto previsível), limitada e integrável no intervalo  $[0, t]$ , que corresponde ao custo descontado por reparo mínimo do componente  $i$  na idade  $t$ , tal

que  $\int_0^t H_i(s)\lambda^i(s)ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty$ , e seja  $\hat{B}_t^i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t^i} H_i(T_{ij})$ , o processo de custo dos reparos mínimos do componente  $i$ , onde  $T_{ij}$  é o tempo do  $j$ -ésimo reparo mínimo do componente  $i$ , e  $T_{i1} = T_i$ . Sabemos que o processo  $\int_0^t H_i(s)d\tilde{M}_s^i$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal quadrado integrável, de média zero, e portanto o  $\mathcal{F}_t$ -compensador de  $\hat{B}_t^i$  é  $B_t$  dado por

$$B_t^i = \int_0^t H_i(s)\lambda^i(s)ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty. \quad (5.13)$$

Os processos anteriores são definidos sobre todo  $\omega \in \Omega$ . No que segue considere a seguinte partição sobre as realizações de  $T_i(\omega)$ ,

$$\mathcal{C}^i = \{\omega \in \Omega : T_i(\omega) > Y_i(\omega)\} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{C}}^i = \{\omega \in \Omega : T_i(\omega) \leq Y_i(\omega)\}, \quad (5.14)$$

com  $Y_i$  o nível crítico para o componente  $i$ . Sejam  $N_t^{i*}$  e  $N_t^{i**}$ , o processo indicador  $N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}}$  em  $\mathcal{C}^i$  e  $\bar{\mathcal{C}}^i$ , respectivamente, isto é,

$$N_t^{i*} = 1_{\mathcal{C}^i} N_t^i \quad \text{e} \quad N_t^{i**} = 1_{\bar{\mathcal{C}}^i} N_t^i, \quad (5.15)$$

de modo que

$$E[N_t^i] = E[N_t^{i*}] + E[N_t^{i**}] = P(T_i > Y_i)E[N_t^i | T_i > Y_i] + P(T_i \leq Y_i)E[N_t^i | T_i \leq Y_i]. \quad (5.16)$$

Em particular, estamos interessados no processo de reparo restrito a  $\mathcal{C}^i$ , isto é, no processo  $N_t^{i*}$  que conta a falha do componente  $i$  quando ele é crítico para o sistema, o que implica uma falha no sistema coerente desde que  $P(T_i = T_j) = 0, \forall j \neq i$ .

**Teorema 5.1.** *O processo indicador  $N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}}$  em  $\mathcal{C}^i$ , tem como  $\mathcal{F}_t$ -compensador o processo*

$$A_t^{i*} = \int_{Y_i}^t 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds = \int_0^t 1_{\{T_i > s\}} 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty, \text{ P-q.c.} \quad (5.17)$$

**Prova.**

Em  $\mathcal{C}^i$ , temos que,

$$1_{\{T_i \leq t\}} = 1_{\{T_i \leq t\}} - 1_{\{T_i \leq Y_i\}}, \text{ desde que } \forall \omega \in \mathcal{C}^i, T_i(\omega) > Y_i(\omega). \quad (5.18)$$

Observe também que se  $T_i \leq t$ , então  $Y_i < t$ . Assim, de (5.18) e pela decomposição de Doob-Meyer em (5.1),

$$N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}} = \int_{Y_i}^t 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds + M_t^i - M_{Y_i}^i, \text{ em } \mathcal{C}^i. \quad (5.19)$$

Como o processo  $M^i$  é um martingal uniformemente integrável e  $Y_i$  é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada,  $M_{Y_i}^i$  é também um martingal uniformemente integrável. Além disso, da decomposição de Doob-Meyer, em  $\mathcal{C}^i$ ,

$$\begin{aligned} 1_{\{T_i \leq Y_i\}} &= \int_0^{Y_i} 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds + M_{Y_i}^i = 0 \\ &\implies M_{Y_i}^i = - \int_0^{Y_i} 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds = -A_{Y_i}^i, \text{ P-q.c.} \end{aligned}$$

isto é,  $M_{Y_i}^i$  é um martingal uniformemente integrável, contínuo e previsível, logo

$$\forall \omega \in \mathcal{C}^i, M_{Y_i}^i = M_0^i = 0, \text{ P-q.c.} \quad (5.20)$$

e (5.19) simplifica para,

$$N_t^i = \int_{Y_i}^t 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds + M_t^i = \int_0^t 1_{\{T_i > s\}} 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds + M_t^i, \text{ em } \mathcal{C}^i. \quad (5.21)$$

Na equação anterior  $M_t^i$  é um martingal uniformemente integrável e de média zero devido à decomposição de Doob-Meyer, isto é,  $M_t^i \in \mathcal{M}_0^2$ . Além disso observe que, se  $t \geq Y_i$ ,  $E[M_t^i | \mathcal{F}_{Y_i}] = M_{Y_i}^i$  e  $E[M_t^i 1_{\{Y_i < T_i\}}] = E[M_{Y_i}^i 1_{\{Y_i < T_i\}}] = 0$  (por (5.20)). Se  $t < Y_i < T_i$ ,  $E[M_{Y_i}^i | \mathcal{F}_t] = M_t^i$  e  $E[M_t^i 1_{\{Y_i < T_i\}}] = E[M_{Y_i}^i 1_{\{Y_i < T_i\}}]$ , mas como em  $\mathcal{C}^i$ ,  $M_{Y_i}^i = 0$ , e  $\forall t \leq Y_i$  o processo  $M^i$  é contínuo, então  $\forall t \leq Y_i$  e  $\omega \in \mathcal{C}^i$ ,  $M_t^i = M_0^i = 0$ .

Resumindo o anterior, se  $\omega \in \mathcal{C}^i$ ,  $M_t^i(\omega)$  é um martingal uniformemente integrável de média zero e por Doob-Meyer podemos então afirmar que na decomposição em (5.21) o  $\mathcal{F}_t$ -compensador de  $N_t^i$  é  $A_t^{i*}$ .  $\square$

**Nota 5.1.** Observe que

$$E[N_t^i | T_i > Y_i] = E[A_t^{i*} | T_i > Y_i] = E \left[ \int_{Y_i}^t 1_{\{T_i > s\}} \lambda^i(s) ds \middle| T_i > Y_i \right] \quad (5.22)$$

**Corolário 5.1.** *Seja  $\tilde{N}_t^i$  o processo que conta o número dos reparos mínimos do componente  $i$ ,  $H_i(t)$  a função respectiva do custo descontado na idade  $t$ , uma função determinística, contínua, limitada e integrável no intervalo  $[0, t]$ , tal que  $\int_0^t H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty$  e  $\hat{B}_t^i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t^i} H(T_{ij})$ , o processo do custo por reparo mínimo do componente. Em  $\mathcal{C}^i$  temos que,*

*i. O  $\mathcal{F}_t$ -compensador de  $\tilde{N}_t^i$  é o processo*

$$\tilde{A}_t^{i*} = \int_{Y_i}^t \lambda^i(s) ds = \int_0^t 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty \text{ P-q.c.} \quad (5.23)$$

ii. O  $\mathcal{F}_t$ -compensador de  $\hat{B}_t^i$  é o processo

$$B_t^{i*} = \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds = \int_0^t 1_{\{Y_i < s\}} H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty, \text{ P-q.c.} \quad (5.24)$$

**Prova.**

i. Do Teorema 5.1, obtemos a decomposição Doob-Meyer para o processo indicador  $N_t^i$  em  $\mathcal{C}^i$ , com o  $\mathcal{F}_t$ -compensador  $A_t^{i*}$  dado em (5.17). Como os reparos mínimos reconstituem a intensidade de falha à sua condição imediatamente anterior e desde que em  $\mathcal{C}^i$  nenhuma falha acontece antes de  $Y_i$ , o compensador para  $\tilde{N}_t^i$  é  $\int_{Y_i}^t \lambda^i(s) ds = \int_0^t 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds$ , isto é,

$$\tilde{N}_t^i = \int_0^t 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t^{i*}, \quad \tilde{M}^{i*} \in \mathcal{M}_0^2, \text{ em } \mathcal{C}^i. \quad (5.25)$$

ii. No resultado anterior, o martingal  $\tilde{M}^{i*}$  é quadrado integrável e de média zero, então, para todo  $\mathcal{F}_t$ -processo previsível e limitado localmente,  $C_t$ , temos que  $\int_0^t C_s d\tilde{M}_s^{i*}$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal quadrado integrável e de média zero. Logo, para  $C_t = H_i(t)$ , um processo limitado e previsível por hipótese, temos que

$$\int_0^t H_i(s) [d\tilde{N}_s^i - 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds] = \int_0^t H_i(s) d\tilde{M}_s^{i*} = R_t^{i*} \in \mathcal{M}_0^2, \text{ em } \mathcal{C}^i \quad (5.26)$$

De onde obtemos que

$$\hat{B}_t^i = \int_0^t 1_{\{Y_i < s\}} H_i(s) \lambda^i(s) ds + R_t^{i*}, \quad R_t^{i*} \in \mathcal{M}_0^2, \text{ em } \mathcal{C}^i. \quad (5.27)$$

□

**Nota 5.2.** Para cada  $i = 1, \dots, m$ , e  $\omega \in \mathcal{C}^i$ , o processo  $B_t^i(\omega)$  dado em (5.13) é igual ao processo  $B_t^{i*}(\omega)$ .

Baseados nos resultados anteriores, vamos definir o processos do número de reparos mínimos e dos custos correspondentes para um sistema coerente, como segue.

**Definição 5.1.** Para um resultado fixo  $\omega \in \Omega$ , seja  $\mathcal{C}^\Phi(\omega) = \{i \in \{1, \dots, m\} : T_i(\omega) > Y_i(\omega)\}$ , o conjunto dos componentes que sobrevivem a seu nível crítico, e portanto, aqueles sob os quais o sistema será reparado minimamente. Para cada  $i = 1, \dots, m$ , seja  $C^i$  a variável indicadora, tal que,

$$C^i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.28)$$

Então, o número de reparos mínimos do sistema, no intervalo  $[0, t]$  é igual a,

$$\tilde{N}_t(\omega) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \tilde{N}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \tilde{N}_t^i(\omega), \quad (5.29)$$

enquanto que o custo correspondente é o processo dado por,

$$\hat{B}_t(\omega) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \hat{B}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \hat{B}_t^i(\omega), \quad (5.30)$$

**Nota 5.3.** Note que  $C^i(\omega) = 1 \iff \omega \in \mathcal{C}^i$  e além disso, para cada realização ou resultado  $\omega \in \Omega$ , as variáveis indicadoras  $C^i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são constantes em  $[0, t]$ . Logo, se  $C^i(\omega) = 0$ ,  $\hat{B}_s^i = 0$ ,  $\forall 0 \leq s \leq t$ , P-q.c. Isto significa que em cada realização do processo de falha/reparo do sistema, só são observados os processos de reparo/custo sobre aqueles componentes que falham após seus níveis críticos. Assim, para cada realização, o processo de

reparo/custo do sistema coerente com estrutura  $\Phi$  é equivalente ao respectivo processo para um sistema com uma estrutura em série formada pelos componentes que na realização resultam críticos para o sistema.

### 5.3 Estimação martingal do custo de garantia

#### 5.3.1 Resultados preliminares

As seguintes definições e resultados consideram o custo dos reparos mínimos de um sistema coerente como a soma dos custos dos reparos mínimos daqueles componentes que em uma dada realização, são críticos para o sistema.

**Definição 5.2.** *Suponha que*

$$\sum_{i=1}^m \int_0^t H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty. \quad (5.31)$$

Para um resultado fixo  $\omega \in \Omega$ , seja o processo,

$$B_t(\omega) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} B_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^m C^i(\omega) B_t^i(\omega) \quad (5.32)$$

Seguindo a Karr [35], definimos como o  $\mathcal{F}_t$ -estimador martingal do processo  $B_t^i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , em  $\mathcal{C}^i$ , respectivamente, o processo,

$$\hat{B}_t^i(\omega) = \int_0^t H_i(s) d\tilde{N}_s^i(\omega), \quad \text{em } \mathcal{C}^i. \quad (5.33)$$

Logo, para um resultado fixo  $\omega \in \Omega$ , definimos como o  $\mathcal{F}_t$ -estimador martingal do processo  $B_t$  em (5.32), o processo  $\hat{B}_t(\omega)$ , dado em (5.30).

**Proposio 5.1.** *Sejam  $H_i(t)$   $i = 1, \dots, m$ , funoes contínuas, limitadas e integráveis em  $[0, t]$  e tal que*

$$\sum_{i=1}^m \int_0^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty. \quad (5.34)$$

*Considere uma realizao fixa  $\omega$  e o conjunto  $\mathcal{C}^\Phi(\omega)$  definido previamente. Para  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ , os processos  $(\hat{B}_t^i - B_t^i)_{t \geq 0}$  são  $\mathcal{F}_t$ -martingais ortogonais de média zero e quadrado integráveis, com processo de variao previsível  $(\langle \hat{B}^i - B^i \rangle_t)_{t \geq 0}$  igual ao processo*

$$\langle \hat{B}^i - B^{i*} \rangle_t = \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds = \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds \quad (5.35)$$

**Prova.**

$\forall i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ ,  $\omega \in \mathcal{C}^i$ , portanto, pelo Corolário 5.1, o  $\mathcal{F}_t$ -compensador de  $\hat{B}_t^i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t^i} H(T_{ij}) = \int_0^t H_i(s) d\tilde{N}_s^i$   o processo  $B_t^{i*} = \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds = \int_0^t H_i(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds$  que representa a  $B_t^i$  em  $\mathcal{C}^i$  (ver Nota 5.2).

Logo, para todo  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ , o processo de variao previsível do martingal  $(\hat{B}_t^i - B_t^i)$   o processo de variao previsível do martingal  $(\hat{B}_t^i - B_t^{i*})$ , isto ,

$$\langle \hat{B}^i - B^{i*} \rangle_t = \int_0^t H_i^2(s) d\langle \tilde{M}^{i*} \rangle_s = \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds.$$

Por outro lado, desde que  $P(T_i = T_j) = 0, \forall i \neq j$ , P-q.c., os processos  $N_t^i = 1_{\{T_i \leq t\}}$  e  $N_t^j = 1_{\{T_j \leq t\}}$  não tem pulos simultâneos bem como os processos  $\tilde{N}_t^i$  e  $\tilde{N}_t^j$ . Portanto para todo  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ , os  $\mathcal{F}_t$ -martingais  $\tilde{M}_t^{i*}$  e  $\tilde{M}_t^{j*}$  são ortogonais e quadrado integráveis. Assim, os martingais  $(\hat{B}_t^i - B_t^{i*})$  e

$(\hat{B}_t^j - B_t^{j*})$ ,  $i \neq j$ , são quadrado integráveis e ortogonais, de modo que para todo  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ , o processo de covariação previsível  $\langle \hat{B}^i - B^i, \hat{B}^j - B^j \rangle_t = \langle \hat{B}^i - B^{i*}, \hat{B}^j - B^{j*} \rangle_t = 0$  P-q.c., isto é para todo  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ ,  $(\hat{B}_t^i - B_t^i)(\hat{B}_t^j - B_t^j)$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal de média zero.  $\square$

**Definição 5.3.** (Karr [35]). *Sejam  $M^i \in \mathcal{M}_0^2$ ,  $i = 1, 2$  martingais quadrado integráveis de média zero. O processo de variação previsível de  $M^i$ ,  $\langle M^i \rangle$ , para  $t$  fixado, é quase certamente,*

$$\langle M^i \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} E[(M_{kt/2^n}^i - M_{(k-1)t/2^n}^i)^2 | \mathcal{F}_{(k-1)t/2^n}], \quad (5.36)$$

enquanto que o processo de covariação previsível  $\langle M^1, M^2 \rangle$  é quase certamente,

$$\langle M^1, M^2 \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} E[(M_{kt/2^n}^1 - M_{(k-1)t/2^n}^1)(M_{kt/2^n}^2 - M_{(k-1)t/2^n}^2) | \mathcal{F}_{(k-1)t/2^n}], \quad (5.37)$$

Da definição anterior temos que se  $M^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $M = \sum_{i=1}^m M^i$  são martingais quadrado integráveis de média zero, então,

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} E\left[\left\{\sum_{i=1}^m (M_{kt/2^n}^i - M_{(k-1)t/2^n}^i)\right\}^2 \middle| \mathcal{F}_{(k-1)t/2^n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{i=1}^m E[(M_{kt/2^n}^i - M_{(k-1)t/2^n}^i)^2 | \mathcal{F}_{(k-1)t/2^n}] \\ &\quad + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m E[(M_{kt/2^n}^i - M_{(k-1)t/2^n}^i)(M_{kt/2^n}^j - M_{(k-1)t/2^n}^j) | \mathcal{F}_{(k-1)t/2^n}] \\ &= \sum_{i=1}^m \langle M^i \rangle_t + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m \langle M^i, M^j \rangle_t \end{aligned} \quad (5.38)$$

**Corolário 5.2.** *Considere um resultado ou realização fixada  $\omega \in \Omega$  e o conjunto  $\mathcal{C}^\Phi(\omega)$  correspondente. Sejam  $H_i(t)$   $i = 1, \dots, m$ , funções contínuas, limitadas e integráveis em  $[0, t]$  satisfazendo (5.34), e os processos  $(\hat{B})_{t \geq 0}$  e  $(B_t)_{t \geq 0}$ , definidos em (5.30) e (5.32), respectivamente. Então o processo  $(\hat{B}_t - B_t)_{t \geq 0}$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal de média zero e quadrado integrável, com processo de variação previsível  $(\langle \hat{B} - B \rangle_t)_{t \geq 0}$  dado por*

$$\begin{aligned} \langle \hat{B} - B \rangle_t &= \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds. \end{aligned} \quad (5.39)$$

**Prova.**

Da Proposição 5.1 temos que para todo  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$  os processos  $(\hat{B}_t^i - B_t^i)_{t \geq 0} = (\hat{B}_t^{i*} - B_t^{i*})_{t \geq 0}$  são  $\mathcal{F}_t$ -martingais ortogonais de média zero e quadrado integráveis com processos de variação previsíveis iguais a

$$\langle \hat{B}^i - B^{i*} \rangle_t = \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{B}_t(\omega) - B_t(\omega) &= \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} (\hat{B}_t^i(\omega) - B_t^i(\omega)) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} (\hat{B}_t^{i*}(\omega) - B_t^{i*}(\omega)) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \int_0^t H_i(s) \tilde{M}_s^{i*}(\omega) \in \mathcal{M}_0^2, \end{aligned} \quad (5.40)$$

então de (5.35) e (5.38) e tendo em conta que  $\langle \hat{B}^i - B^{i*}, \hat{B}^j - B^{j*} \rangle_t = 0$ ,  $\forall i \neq j$ , P-q.c., temos que

$$\langle \hat{B} - B \rangle_t = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \langle \hat{B}^i - B^{i*} \rangle_t = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds$$

$$= \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \int_0^t H_i^2(s) 1_{\{Y_i < s\}} \lambda^i(s) ds$$

□

**Nota 5.4.** De (5.39), temos que o valor esperado do processo de variação previsível associado ao custo dos reparos mínimos do sistema, é

$$E[\langle \hat{B} - B \rangle_t] = \sum_{i=1}^m P(T_i > Y_i) E\left[\int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i\right]. \quad (5.41)$$

### 5.3.2 Modelo estatístico para a estimação

Nosso objetivo é estimar  $E[\hat{B}_t]$ , isto é, o custo esperado dos reparos mínimos feitos num intervalo  $[0, t]$ . Para isso, precisamos estabelecer primeiro resultados assintóticos para os estimadores dos custos dos reparos relativos a cada componente.

Das definições 5.1 e 5.2 e pelo Corolário 5.2, temos que,

$$\begin{aligned} E[\hat{B}_t] &= E[B_t] = E\left[\sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} B_t^i\right] = E\left[\sum_{i=1}^m C^i B_t^i\right] \\ &= \sum_{i=1}^m P(T_i > Y_i) E\left[\int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i\right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde  $P(T_i > Y_i) E\left[\int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i\right]$  corresponde ao custo esperado dos reparos mínimos do sistema relativos ao componente  $i$ .

Considere  $n$  cópias (sistemas) independentes, do processo  $m$ -variado  $(\hat{B}^i, C^i, i = 1, \dots, m)_{t \geq 0}$ . Isto é, para cada  $t \geq 0$ , as seqüências  $(\hat{B}_t^{i(j)}, C^{i(j)}, i = 1, \dots, m)$ ,

$1 \leq j \leq n$ , são independentes e identicamente distribuídas como  $(\hat{B}_t^i, C^i, i = 1, \dots, m)$ . Para  $j = 1, \dots, n$ , seja  $\mathcal{C}^{\Phi(j)} = \{i \in \{1, \dots, m\} : T_i^{(j)} > Y_i^{(j)}\}$ , o conjunto dos componentes críticos para o  $j$ -ésimo sistema observado, onde  $T_i^{(j)}$  e  $Y_i^{(j)}$ , são, respectivamente, o primeiro tempo de falha do componente  $i$  e seu nível crítico. Então o custo por reparos mínimos observado para o  $j$ -ésimo sistema, é

$$\hat{B}_t^{(j)} = \sum_{i \in \mathcal{C}^{\Phi(j)}} \hat{B}_t^{i(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)}, \quad (5.43)$$

e o seu processo compensador é (pelo Corolário 5.2),

$$B_t^{(j)} = \sum_{i \in \mathcal{C}^{\Phi(j)}} B_t^{i(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} B_t^{i(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds. \quad (5.44)$$

Para as  $n$  cópias, obtemos os seguintes processos médios,

$$\bar{\hat{B}}_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{B}_t^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^t H_i(s) d\tilde{N}_s^{i(j)}, \quad (5.45)$$

$$\bar{B}_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B_t^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} B_t^{i(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds. \quad (5.46)$$

Sejam

$$\bar{\hat{B}}_t^{i(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} \quad \text{e} \quad \bar{B}_t^{i(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_t^{i(j)}. \quad (5.47)$$

Então, de (5.45) e (5.46), temos também que

$$\bar{\hat{B}}_t^{(n)} = \sum_{i=1}^m \bar{\hat{B}}_t^{i(n)} \quad \text{e} \quad \bar{B}_t^{(n)} = \sum_{i=1}^m \bar{B}_t^{i(n)}. \quad (5.48)$$

Para cada  $i = 1, \dots, m$ , propomos  $\bar{B}_t^{i(n)}$  como  $\mathcal{F}_t$ -estimador martingal para o custo médio dos reparos mínimos do sistema, relativos ao componente  $i$ .

**Teorema 5.2.** *Para cada  $i = 1, \dots, m$ , seja*

$$B^{i*}(t) = P(T_i > Y_i) E \left[ \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \middle| T_i > Y_i \right] \quad (5.49)$$

Então, sob as condições na Proposição 5.1,  $\bar{B}_t^{i(n)}$  é um estimador não viciado e consistente para o custo médio dos reparos mínimos devido ao componente  $i$ ,  $B^{i*}(t)$ .

**Prova.**

Da Proposição 5.1 obtemos pela propriedade martingal que se  $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$ ,

$$E[\hat{B}_t^i | T_i > Y_i] = E \left[ \int_0^t H_i(s) d\tilde{N}_s^i \middle| T_i > Y_i \right] = E \left[ \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \middle| T_i > Y_i \right].$$

Logo, desde que as sequências  $(\hat{B}_t^{i(j)}, C^{i(j)}, 1 \leq i \leq m), 1 \leq j \leq n$ , são  $n$  cópias independentes e identicamente distribuídas como  $(\hat{B}_t^i, C^i, 1 \leq i \leq m)$ , em (5.47), temos que

$$\begin{aligned} E[\bar{B}_t^{i(n)}] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(T_i > Y_i) E \left[ \int_0^t H_i(s) d\tilde{N}_s^i \middle| T_i > Y_i \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(T_i > Y_i) E \left[ \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \middle| T_i > Y_i \right] = E[\bar{B}_t^{i(n)}]; \end{aligned}$$

logo,  $E[\bar{B}_t^{i(n)}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B^{i*}(t) = B^{i*}(t) = E[\bar{B}_t^{i(n)}]$ .

Para estabelecer a consistência, temos que provar que,

$$E[\sup_{s \leq t} (\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2] \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0. \quad (5.50)$$

Primeiro, de (5.47) e da Proposio 5.1 obtemos para  $n$  fixo,

$$\bar{B}_t^{i(n)} - \bar{B}_t^{i(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} (\hat{B}_t^{i(j)} - B_t^{i(j)}) = \sum_{j=1}^n C^{i(j)} (\hat{B}_t^{i(j)} - B_t^{i*(j)}) \quad (5.51)$$

 um  $\mathcal{F}_t$ -martingal quadrado integrável de média zero. Logo, pela condio de independência entre as cópias e de (5.35), temos,

$$\begin{aligned} \langle \bar{B}^{i(n)} - \bar{B}^{i(n)} \rangle_t &= \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \left[ \frac{1}{n^2} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{n} \times \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Sob as condioes na hipótese, temos que para cada  $i = 1, \dots, m$ ,

$$E \left[ C^i \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \right] = P(T_i > Y_i) E \left[ \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i \right] < \infty, \quad (5.53)$$

e portanto, pela lei forte dos grande números,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i^2 \lambda^i(s) ds \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} P(T_i > Y_i) E \left[ \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i \right]. \quad (5.54)$$

Assim de (5.52) e (5.54) concluimos que,

$$\langle \bar{B}^{i(n)} - \bar{B}^{i(n)} \rangle_t \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0 \times P(T_i > Y_i) E \left[ \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i \right] = 0. \quad (5.55)$$

De Lipster e Shiryaev [37, Teorema 2.4] temos que,

$$E[\sup_{s \leq t} (\bar{B}_s^{i(n)} - \bar{B}_s^{i(n)})^2] \leq 4E[(\bar{B}_t^{i(n)} - \bar{B}_t^{i(n)})^2] = 4E[\langle \bar{B}^{i(n)} - \bar{B}^{i(n)} \rangle_t], \quad (5.56)$$

onde a última igualdade é devida ao fato que  $\tilde{B}_t^{i(n)} - \bar{B}_t^{i(n)}$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal quadrado integrável e de média zero. Logo do resultado em (5.55) e pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos em (5.56),

$$E[\sup_{s \leq t} (\tilde{B}_s^{i(n)} - \bar{B}_s^{i(n)})^2] \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0. \quad (5.57)$$

Também pela lei forte dos grandes números e pela continuidade em  $t$ ,

$$(\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s)) \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0, \quad \forall s \leq t \text{ e portanto, } \sup_{s \leq t} |\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s)| \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

do qual também conclui-se que,

$$\sup_{s \leq t} (\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2 \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0, \text{ P-q.c.}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$E[\sup_{s \leq t} (\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2] \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0. \quad (5.58)$$

Além disso, temos que,

$$\begin{aligned} E[\sup_{s \leq t} (\tilde{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2] &= E[\sup_{s \leq t} \{(\tilde{B}_s^{i(n)} - \bar{B}_s^{i(n)}) + (\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))\}^2] \\ &\leq E[\sup_{s \leq t} (\tilde{B}_s^{i(n)} - \bar{B}_s^{i(n)})^2] + E[\sup_{s \leq t} (\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2], \end{aligned}$$

e tomando limites na desigualdade anterior, de (5.57) e (5.58) obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sup_{s \leq t} (\tilde{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sup_{s \leq t} (\tilde{B}_s^{i(n)} - \bar{B}_s^{i(n)})^2] \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sup_{s \leq t} (\bar{B}_s^{i(n)} - B^{i*}(s))^2] = 0, \quad (5.59) \end{aligned}$$

com o qual fica provado (5.50).  $\square$

### 5.3.3 Teorema do limite central

A seguir, vamos determinar se o processo  $m$ -variado dos erros dos estimadores propostos,  $(\bar{B}_t^{i(n)} - B^{i*}(t), i = 1, \dots, m)$ , padronizados apropriadamente, satisfaz o Teorema do Limite Central para Martingais, que estabelecemos a seguir.

**Teorema 5.3.** (Karr [35, Teorema 5.11]). *Para  $m$  fixo e para cada  $n \geq 1$ , considere a seqüencia  $(M_t^{i(n)}, i = 1, \dots, m)$  de martingais quadrado integráveis, de média zero e ortogonais, e para cada  $i = 1, \dots, m$ , seja  $V_i(t)$  uma função contínua e não decrescente com  $V_i(0) = 0$ . Se*

(a)  $\forall t \geq 0$  e  $i = 1, \dots, m$

$$\langle M^{i(n)} \rangle_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} V_i(t) \quad (5.60)$$

(b) *Existe uma seqüencia  $(c_n)_{n \geq 1}$ , tal que  $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  e*

$$P(\sup_{s \leq t} |\Delta M_s^{i(n)}| \leq c_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \quad (5.61)$$

*Então, existe um processo  $\mathbf{M}$  gaussiano  $m$ -variado, contínuo, com cada componente  $M^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sendo um martingal, e com*

$$\langle M^i, M^k \rangle_t = 1_{\{i=k\}} V_i(t), \quad (5.62)$$

*tal que  $\mathbf{M}^{(n)} = (M^{1(n)}, \dots, M^{m(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{M} = (M^1, \dots, M^m)$  em  $D[0, t]^m$ .*

**Nota 5.5.** No teorema anterior, as condições (a) e (b) são suficientes para garantir a convergências das distribues finito-dimensionais e a propriedade

*tightness* da sequência  $\mathbf{M}^{(n)}$  em  $D[0, t]^m$ , isto é, no espaço  $m$ -dimensional das funções contínuas à direita e com limite à esquerda em  $[0, t]$  (Karr, [35]).

**Corolário 5.3.** *Suponha que para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\int_0^t H_i^2(s)\lambda^i(s)ds < \infty$ .*

Seja

$$V_i^*(t) = P(T_i > Y_i)E\left[\int_{Y_i}^t H_i^2(s)\lambda^i(s)ds \mid T_i > Y_i\right]. \quad (5.63)$$

Sejam os processos  $m$ -variados  $\bar{\mathbf{B}}_t^{(n)} = (\bar{B}_t^{1(n)}, \dots, \bar{B}_t^{m(n)})$  e  $\bar{\mathbf{B}}_t^{(n)} = (\bar{B}_t^{1(n)}, \dots, \bar{B}_t^{m(n)})$ . Então, o processo  $\mathbf{M}^{(n)} = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{B}}^{(n)} - \bar{\mathbf{B}}^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{M}$  em  $D[0, t]^m$ , onde  $\mathbf{M}$  é um processo gaussiano, contínuo  $m$ -variado, com componentes martingais.

**Prova.**

Verificamos as condições (a) e (b) do Teorema 5.3. Sejam  $M_t^{i(n)} = \sqrt{n}(\bar{B}_t^{i(n)} - \bar{B}_t^{i(n)})$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Da Proposição 5.1 e pela condição  $P(T_i = T_j) = 0$ ,  $i \neq j$ , obtemos que para cada  $n$  e  $i = 1, \dots, m$ ,  $(\bar{B}_t^{i(n)} - \bar{B}_t^{i(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)}(\hat{B}_t^{i(j)} - B_t^{i(j)})$  são  $\mathcal{F}_t$ -martingais ortogonais, quadrado integráveis de média zero, propriedades que também valem para os processos  $M_t^{i(n)}$ . Logo, para todo  $n$  e  $i \neq j$ ,  $\langle M^{i(n)}, M^{j(n)} \rangle_t = 0$  P-q.c, e para todo  $i = 1, \dots, m$ , de (5.52) e pela lei forte dos grandes números,

$$\begin{aligned} \langle M^{i(n)} \rangle_t &= n \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \left[ \frac{1}{n^2} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i^2(s)\lambda^i(s)ds \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \left[ \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i^2(s)\lambda^i(s)ds \right] \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(T_i > Y_i)E\left[\int_{Y_i}^t H_i^2(s)\lambda^i(s)ds \mid T_i > Y_i\right] = V_i^*(t) < \infty, \quad (5.64) \end{aligned}$$

do qual conclui-se que para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\langle M^{i(n)} \rangle_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} V_i^*(t)$  para todo  $t \geq 0$ .

Além disso, observe que os pulos em  $M_t^{i(n)}$  derivam únicamente dos pulos de  $\sqrt{n}\bar{B}_t^{i(n)}$  os quais são de tamanho  $\frac{H_i(t)}{\sqrt{n}}$ , portanto  $\Delta M_t^{i(n)} = \frac{H_i(t)}{\sqrt{n}}$ . Por hipótese,  $H_i(t)$   uma funo contínua e limitada em  $[0, t]$ , digamos, por uma constante  $\Gamma < \infty$ , assim, tomando  $c_n = \Gamma n^{-\frac{1}{4}}$ , a parte (b) do Teorema 5.3 também  satisfeita e portanto  $\mathbf{M}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{M}$ , onde  $\mathbf{M}$   um processo martingal gaussiano  $m$ -variado com  $\langle M^i, M^k \rangle_t = 1_{\{i=k\}} V_i^*(t)$ .  $\square$

**Proposio 5.2.** *Sejam  $Z_t^{i(n)} = \sqrt{n}(\bar{B}_t^{i(n)} - B^{i*}(t))$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e o processo  $m$ -variado  $\mathbf{Z}_t^{(n)} = (Z_t^{1(n)}, \dots, Z_t^{m(n)})$  e suponha que para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $t \geq 0$ ,*

$$\sigma^{2i*}(t) = VAR[C^i B_t^i] = E \left[ C^i \left( \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \right)^2 \right] - (B^{i*}(t))^2 < \infty. \quad (5.65)$$

Então,  $\mathbf{Z}_t^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{Z}_t$ , onde  $\mathbf{Z}_t$   um vetor normal  $m$ -variado de média zero e matriz de covariâncias  $\Sigma(t)$  tal que  $\Sigma_{ij}(t) = 1_{\{i=j\}} \sigma^{2i*}(t)$ .

**Prova.**

Desde que a sequência  $(\hat{B}_t^{i(j)}, C^{i(j)}, 1 \leq j \leq n)$  são  $n$  cópias independentes e identicamente distribuidas como  $(\hat{B}_t^i, C^i)$ , para todo  $t \geq 0$  e  $i = 1, \dots, m$ ,  $\bar{B}_t^{i(n)}$   um estimador não viciado para  $B^{i*}(t)$ ,

$$\begin{aligned} E[\bar{B}_t^{i(n)}] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E \left[ C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(T_i > Y_i) E \left[ \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i \right] = B^{i*}(t), \end{aligned}$$

Além disso, pela lei forte dos grandes números para sequências de variáveis independentes e identicamente distribuidas com média e variâncias finitas,

$\bar{B}_t^{i(n)}$  converge quase certamente para  $B^{i*}(t)$ . Por outro lado, desde que  $(\mathbf{Z}_t^{(n)})_{n \geq 1}$  é uma sequência de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos e só o componente crítico que causa a falha do sistema é reparado minimamente, nenhum dos processos  $\bar{B}_t^{i(n)}$  variam conjuntamente em  $[0, t]$ , de onde  $\forall n \geq 1$  e  $i \neq j$ ,

$$COV[Z_t^{i(n)}, Z_t^{j(n)}] = COV[\sqrt{n} \bar{B}_t^{i(n)}, \sqrt{n} \bar{B}_t^{j(n)}] = COV[C^i B_t^i, C^j B_t^j] = 0 \quad (5.66)$$

enquanto que

$$VAR[Z_t^{i(n)}] = VAR[\sqrt{n} \bar{B}_t^{i(n)}] = VAR[C^i B_t^i] = \sigma^{2i*}(t). \quad (5.67)$$

Então, pelo Teorema do Limite Central para sequências de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}(t) = (B^{1*}(t), \dots, B^{m*}(t))$  e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$  finita, tal que  $\Sigma_{ij}(t) = 1_{\{i=j\}} \sigma^{2i*}(t)$ , para todo  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{Z}_t^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{Z}_t$ , onde  $\mathbf{Z}_t$  é um vetor normal  $m$ -variado de média zero e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ .

A convergência das distribuições finito-dimensionais do processo  $\mathbf{Z}^{(n)}$  é estabelecida a seguir. Para isto, consideramos o seguintes fatos:

(a) Desde que  $\forall t \geq 0, n \geq 1, i \neq j, COV[Z_t^{i(n)}, Z_t^{j(n)}] = COV[C^i B_t^i, C^j B_t^j] = 0$ , e  $\forall t_k \leq t_l, t_k, t_l \in [0, t], COV[Z_{t_k}^{i(n)}, Z_{t_l}^{j(n)}] = COV[C^i B_{t_k}^i, C^j B_{t_l}^j] = 0$ ;

(b) De (a), determinamos a convergência das distribuições finito-dimensionais do processo  $m$ -variado  $\mathbf{Z}^{(n)}$  estabelecendo a convergência das distribuições

finito-dimensionais para cada componente  $Z^{i(n)}$  e por Crámer-Wold, garantimos a convergência das distribuices finito-dimensionais do processo  $\mathbf{Z}^{(n)}$ , isto ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_{t_1}^{(n)}, \mathbf{Z}_{t_2}^{(n)}, \dots, \mathbf{Z}_{t_k}^{(n)}) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} (\mathbf{Z}_{t_1}, \mathbf{Z}_{t_2}, \dots, \mathbf{Z}_{t_k}) \\ \iff \forall 0 \leq t_1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t, &a_{il} \text{ constantes arbitrárias,} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il} (Z_{t_{l+1}}^{i(n)} - Z_{t_l}^{i(n)}) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il} (Z_{t_{l+1}}^i - Z_{t_l}^i). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Considere então, para cada  $i = 1, \dots, m$ , dois instantes quaisquer de tempos  $t_1 \leq t_2 \in [0, t]$ . Suponha que temos  $n$  cópias independentes e identicamente distribuídas (*IID*) como  $(C^i B_{t_1}^i, C^i B_{t_2}^i)$  e assim para cada  $n$  e  $i = 1, \dots, m$  obtemos o vetor aleatório  $(Z_{t_1}^{i(n)}, Z_{t_2}^{i(n)})$ . Pela condio *IID*,

$$E(Z_{t_1}^{i(n)}, Z_{t_2}^{i(n)}) = (0, 0), \quad \forall n \geq 1, i = 1, \dots, m.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} COV[Z_{t_1}^{i(n)}, Z_{t_2}^{i(n)}] &= COV[\sqrt{n}(\bar{B}_{t_1}^{i(n)} - B^{i*}(t_1)), \sqrt{n}(\bar{B}_{t_2}^{i(n)} - B^{i*}(t_2))] \\ &= n E[\bar{B}_{t_1}^{i(n)} \bar{B}_{t_2}^{i(n)}] - n B^{i*}(t_1) B^{i*}(t_2), \end{aligned} \quad (5.69)$$

onde,

$$\begin{aligned} E[\bar{B}_{t_1}^{i(n)} \bar{B}_{t_2}^{i(n)}] &= \frac{1}{n^2} E \left[ \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_{t_1}^{i(j)} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_{t_2}^{i(j)} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} E \left[ \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_{t_1}^{i(j)} B_{t_2}^{i(j)} \right] + \frac{1}{n^2} E \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j}^n C^{i(j)} B_{t_1}^{i(j)} C^{i(k)} B_{t_2}^{i(k)} \right]; \end{aligned}$$

tendo em conta que para as cópias independentes  $j$  e  $k$ ,  $C^{i(j)}B_{t_1}^{i(j)}$  e  $C^{i(k)}B_{t_2}^{i(k)}$  são independentes e a condição *IID* entre as cópias  $C^{i(j)}B_{t_1}^{i(j)}B_{t_2}^{i(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , temos que

$$\begin{aligned} E[\bar{B}_{t_1}^{i(n)}\bar{B}_{t_2}^{i(n)}] &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n E[C^{i(j)}B_{t_1}^{i(j)}B_{t_2}^{i(j)}] + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j}^n E[C^{i(j)}B_{t_1}^{i(j)}]E[C^{i(k)}B_{t_2}^{i(k)}] \\ &= \frac{1}{n} E[C^i B_{t_1}^i B_{t_2}^i] + \left( \frac{n-1}{n} \right) B^{i*}(t_1) B^{i*}(t_2). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Substituindo (5.70) em (5.69), obtemos que para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $n \geq 1$ ,

$$COV[Z_{t_1}^{i(n)}, Z_{t_2}^{i(n)}] = E[C^i B_{t_1}^i B_{t_2}^i] - B^{i*}(t_1) B^{i*}(t_2) = \sigma^{i*}(t_1, t_2) < \infty, \quad (5.71)$$

enquanto que de (5.67),  $VAR[Z_{t_1}^{i(n)}] = \sigma^{2i*}(t_1)$  e  $VAR[Z_{t_2}^{i(n)}] = \sigma^{2i*}(t_2)$ .

Então, pelo Teorema do Limite Central para sequência de vetores aleatórios *IID* com vetor de médias e matriz de covariância finita, temos que

$$(Z_{t_1}^{i(n)}, Z_{t_2}^{i(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} (Z_{t_1}^i, Z_{t_2}^i), \quad \forall t_1 \leq t_2 \in [0, t], \quad (5.72)$$

onde  $(Z_{t_1}^i, Z_{t_2}^i)$  é um vetor normal bivariado de média zero e matriz de covariância  $\Sigma^i(t_1, t_2)$ ,

$$\Sigma^i(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \sigma^{2i*}(t_1) & \sigma^{i*}(t_1, t_2) \\ \sigma^{i*}(t_1, t_2) & \sigma^{2i*}(t_2) \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Por indução, podemos generalizar o resultado anterior para toda partição  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t$ , do intervalo  $[0, t]$  e obtemos que para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $(Z_{t_1}^{i(n)}, Z_{t_2}^{i(n)}, \dots, Z_{t_k}^{i(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} (Z_{t_1}^i, Z_{t_2}^i, \dots, Z_{t_k}^i)$ , um vetor normal

$k$ -variado de média zero e matriz de covariância finita.

Na ótima parte da prova do Teorema, avaliamos a condio *tightness* de Stone (Fleming e Harrington [27]), que enunciamos como segue,

**Definio 5.4. Condio *tightness* de Stone em  $D[0, t]^m$ .** Para cada  $i = 1, \dots, m$ , para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \uparrow 0} P \left\{ \sup_{\substack{|s-u| < \delta \\ 0 \leq s, u \leq t}} \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| > \epsilon \right\} = 0. \quad (5.74)$$

Temos que,

$$P \left\{ \sup_{\substack{|s-u| < \delta \\ 0 \leq s, u \leq t}} \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| \leq \epsilon \right\} = P \left\{ \forall 0 \leq s, u \leq t, |s - u| < \delta, \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| \leq \epsilon \right\},$$

desde que  $Z^{i(n)}$   contínuo e monótono em  $[0, t]$ ;

$$\leq P \left\{ 0 \leq s, u \leq t, |s - u| < \delta, \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| \leq \epsilon \right\},$$

$$s \text{ e } u \text{ fixos}; \quad (5.75)$$

de (5.72) e (5.73), temos que para  $s \leq u$

$$(Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)}) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, \gamma^2(s, u)), \quad \gamma^2(s, u) = \sigma^{2i^*}(s) + \sigma^{2i^*}(u) - 2\sigma^{i^*}(s, u), \quad (5.76)$$

de onde em (5.75), temos que

$$\lim_{n \uparrow \infty} P \left\{ \sup_{\substack{|s-u| < \delta \\ 0 \leq s, u \leq t}} \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| \leq \epsilon \right\} \leq 2\Phi \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{\gamma^2(s, u)}} \right) - 1.$$

De (5.67) e (5.71) é claro que  $\lim_{\delta \downarrow 0} \gamma^2(s, u) = 0$ ,  $|s - u| < \delta$ ,  $0 \leq s, u \leq t$ , logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} P \left\{ \sup_{\substack{|s-u| < \delta \\ 0 \leq s, u \leq t}} \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| \leq \epsilon \right\} &\leq \lim_{\delta \downarrow 0} 2\Phi \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{\gamma^2(s, u)}} \right) - 1 \\ &= 2\Phi(\infty) - 1 = 1, \end{aligned}$$

portanto,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \uparrow \infty} P \left\{ \sup_{\substack{|s-u| < \delta \\ 0 \leq s, u \leq t}} \left| Z_s^{i(n)} - Z_u^{i(n)} \right| > \epsilon \right\} = 0,$$

□

**Teorema 5.4.** *Sejam  $\boldsymbol{\mu}(t) = (B^{1*}(t), \dots, B^{m*}(t))$  e  $\delta^{2i*}(t) = \text{VAR}[C^i \hat{B}_t^i] < \infty$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Suponha que as condições no Corolário 5.3 e na Proposição 5.2 são válidas. Então, o processo  $\mathbf{E}_t^{(n)} = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{B}}_t^{(n)} - \boldsymbol{\mu}(t)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{W}_t$  em  $D[0, t]^m$ , onde  $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$  é um processo normal gaussiano  $m$ -variado, com vetor de médias igual a zero e matriz de covariâncias  $\mathbf{U}(t)$  tal que  $U_{ij}(t) = 1_{\{i=j\}} \delta^{2i*}(t)$ .*

**Prova.**

Primeiro, pelo Teorema 5.2 temos que para todo  $n \geq 1$  e  $t \geq 0$ ,  $E[\mathbf{E}_t^{(n)}] = 0$ .

Sejam  $\mathbf{M}_t^{(n)} = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{B}}_t^{(n)} - \bar{\mathbf{B}}_t^{(n)})$  e  $\mathbf{Z}_t^{(n)} = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{B}}_t^{(n)} - \boldsymbol{\mu}(t))$ . Observe que

$$\mathbf{E}_t^{(n)} = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{B}}_t^{(n)} - \boldsymbol{\mu}(t)) = \mathbf{M}_t^{(n)} + \mathbf{Z}_t^{(n)}. \quad (5.77)$$

A seguir, vamos calcular para cada  $i = 1, \dots, m$  e  $t \geq 0$ , a função de variância assintótica dos processos  $E_t^{i(n)} = \sqrt{n}(\bar{B}_t^{i(n)} - B^{i*}(t)) = M_t^{i(n)} + Z_t^{i(n)}$ . Fixando

$t$ ,

$$VAR[E_t^{i(n)}] = VAR[M_t^{i(n)}] + VAR[Z_t^{i(n)}] + 2 COV[M_t^{i(n)}, Z_t^{i(n)}]. \quad (5.78)$$

Do Corolário 5.3 e da condio *IID*, temos que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} VAR[M_t^{i(n)}] &= E[\langle M^{i(n)} \rangle_t] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds\right] \\ &= E[C^i (\hat{B}_t^i - B_t^i)^2] = V_i^*(t); \end{aligned} \quad (5.79)$$

enquanto que  $VAR[Z_t^{i(n)}]$  é dada em (5.67).

Em relao a  $COV[M_t^{i(n)}, Z_t^{i(n)}]$ , temos,

$$\begin{aligned} COV[M_t^{i(n)}, Z_t^{i(n)}] &= n E[(\tilde{B}_t^{i(n)} - \bar{B}_t^{i(n)})(\bar{B}_t^{i(n)} - B^{i*}(t))] \\ &= n E[\tilde{B}_t^{i(n)} \bar{B}_t^{i(n)}] - n B^{i*}(t) E[\tilde{B}_t^{i(n)}] - n E[\bar{B}_t^{i(n)}]^2 + B^{i*}(t) E[\bar{B}_t^{i(n)}], \\ &= n E[\tilde{B}_t^{i(n)} \bar{B}_t^{i(n)}] - n E[\bar{B}_t^{i(n)}]^2, \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde a última igualdade decorre da propriedade martingal. A seguir, calculamos  $E[\tilde{B}_t^{i(n)} \bar{B}_t^{i(n)}]$ ,

$$\begin{aligned} E[\tilde{B}_t^{i(n)} \bar{B}_t^{i(n)}] &= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{j=1}^n C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_t^{i(j)}\right] \\ &= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{j=1}^n C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} B_t^{i(j)}\right] + \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{j=1}^n \sum_{l \neq j}^n C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} C^{i(l)} B_t^{i(l)}\right]; \end{aligned}$$

para as cópias independentes  $j$  e  $l$ ,  $C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)}$  e  $C^{i(l)} B_t^{i(l)}$  so independentes, e portanto,

$$E[\tilde{B}_t^{i(n)} \bar{B}_t^{i(n)}] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n E[C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} B_t^{i(j)}] + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{l \neq j}^n E[C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)}] E[C^{i(l)} B_t^{i(l)}],$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} n E[C^i \hat{B}_t^i B_t^i] + \frac{1}{n^2} n(n-1) (B_t^{i*})^2 \\
&= \frac{1}{n} E[C^i \hat{B}_t^i B_t^i] + \left(\frac{n-1}{n}\right) (B_t^{i*})^2. \tag{5.81}
\end{aligned}$$

De maneira semelhante calculamos  $E[\bar{B}_t^{i(n)}]^2 = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_t^{i(j)} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_t^{i(j)}\right]$ , e obtemos,

$$E[\bar{B}_t^{i(n)}]^2 = \frac{1}{n} E[C^i (B_t^i)^2] + \left(\frac{n-1}{n}\right) (B_t^{i*})^2. \tag{5.82}$$

Substituindo (5.81) e (5.82) em (5.80),

$$COV[M_t^{i(n)}, Z_t^{i(n)}] = E[C^i \hat{B}_t^i B_t^i] - E[C^i (B_t^i)^2]. \tag{5.83}$$

Logo, de (5.67), (5.79) e (5.83), obtemos em (5.78), para todo  $n \geq 1$  e  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
VAR[E_t^{i(n)}] &= E[C^i (\hat{B}_t^i - B_t^i)^2] + E[C^i (B_t^i)^2] - (B_t^{i*})^2 \\
&\quad + 2 E[C^i \hat{B}_t^i B_t^i] - 2 E[C^i (B_t^i)^2] \\
&= E[C^i (\hat{B}_t^i)^2] - (B_t^{i*})^2, \\
&= VAR[C^i \hat{B}_t^i] = \delta^{2i*}(t) \text{ (pois } E[C^i (B_t^i)] = B_t^{i*}(t)). \tag{5.84}
\end{aligned}$$

A seguir, calculamos para  $i \neq j$  e  $n \geq 1$ ,  $COV[E_t^{i(n)}, E_t^{j(n)}]$ ,

$$\begin{aligned}
COV[E_t^{i(n)}, E_t^{j(n)}] &= n E[(\bar{B}_t^{i(n)} - B_t^{i*})(\bar{B}_t^{j(n)} - B_t^{j*})] \\
&= n E\left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (C^{i(l)} \hat{B}_t^{i(l)} - B_t^{i*}) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (C^{j(l)} \hat{B}_t^{j(l)} - B_t^{j*})\right] \\
&= \frac{1}{n} E\left[\sum_{l=1}^n (C^{i(l)} \hat{B}_t^{i(l)} - B_t^{i*})(C^{j(l)} \hat{B}_t^{j(l)} - B_t^{j*})\right] \\
&\quad + \frac{1}{n} E\left[\sum_{l=1}^n \sum_{k \neq l}^n (C^{i(l)} \hat{B}_t^{i(l)} - B_t^{i*})(C^{j(k)} \hat{B}_t^{j(k)} - B_t^{j*})\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n COV[C^{i(l)} \hat{B}_t^{i(l)}, C^{j(l)} \hat{B}_t^{j(l)}] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{k \neq l}^n E[C^{i(l)} \hat{B}_t^{i(l)} - B^{i^*}(t)] E[C^{j(k)} \hat{B}_t^{j(k)} - B^{j^*}(t)] \\
&= COV[C^i \hat{B}_t^i, C^j \hat{B}_t^j] = 0, \tag{5.85}
\end{aligned}$$

desde que os processos não pulam simultaneamente.

Dos resultados em (5.84) e (5.85) concluimos que a matriz de covariância assintótica para o processo  $\mathbf{E}_t^{(n)}$     $\mathbf{U}(t)$  com  $U_{ij}(t) = 1_{\{i=j\}} \delta^{2i^*}(t)$ . A normalidade assintótica de  $\mathbf{E}_t^{(n)}$    obtida considerando os resultados anteriores sobre a sua estrutura de covariância assintótica e a convergência em distribuio dos processos  $\mathbf{M}_t^{(n)}$  (Corolário 5.3) e  $\mathbf{Z}_t^{(n)}$  (Proposio 5.2):

Da propriedade *tightness* em  $D[0, t]^m$  dos processos  $\mathbf{M}^{(n)}$  e  $\mathbf{Z}^{(n)}$  conclui-se que o processo  $\mathbf{E}^{(n)} = \mathbf{M}^{(n)} + \mathbf{Z}^{(n)}$  também satisfaz tal condio. Além disso, as distribuies finito-dimensionais de  $\mathbf{M}^{(n)}$  e  $\mathbf{Z}^{(n)}$  convergem a processos gaussianos contínuos tais que  $\forall t \geq 0, n \geq 1, i \neq j, COV[E_t^{i(n)}, E_t^{j(n)}] = 0$  e portanto,  $\forall t_k, t_l \in [0, t], COV[E_{t_k}^{i(n)}, E_{t_l}^{j(n)}] = 0$ . Logo, por Crámer-Wold, as distribuies finito-dimensionais do processo  $\mathbf{E}^{(n)}$  também convergem a processos gaussianos contínuos, isto é,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_{t_1}^{(n)}, \mathbf{E}_{t_2}^{(n)}, \dots, \mathbf{E}_{t_k}^{(n)}) &= (\mathbf{M}_{t_1}^{(n)}, \mathbf{M}_{t_2}^{(n)}, \dots, \mathbf{M}_{t_k}^{(n)}) + (\mathbf{Z}_{t_1}^{(n)}, \mathbf{Z}_{t_2}^{(n)}, \dots, \mathbf{Z}_{t_k}^{(n)}) \\
&\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} (\mathbf{M}_{t_1}, \mathbf{M}_{t_2}, \dots, \mathbf{M}_{t_k}) + (\mathbf{Z}_{t_1}, \mathbf{Z}_{t_2}, \dots, \mathbf{Z}_{t_k}) = (\mathbf{W}_{t_1}, \mathbf{W}_{t_2}, \dots, \mathbf{W}_{t_k}) \\
&\iff \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t, a_{il} \text{ constantes arbitr rias,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}(E_{t_{l+1}}^{i(n)} - E_{t_l}^{i(n)}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}(M_{t_{l+1}}^{i(n)} - M_{t_l}^{i(n)}) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}(Z_{t_{l+1}}^{i(n)} - Z_{t_l}^{i(n)}) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}(M_{t_{l+1}}^i - M_{t_l}^i) &+ \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}(Z_{t_{l+1}}^i - Z_{t_l}^i) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}(W_{t_{l+1}}^i - W_{t_l}^i). \end{aligned}$$

□

**Nota 5.6.** Para aplicar o Teorema 5.4 é necessário estimar as variâncias  $\delta^{2i*}(t)$ , o que pode ser realizado pela variância amostral.

Para  $t \geq 0$ , considere  $n$  cópias independentes e identicamente distribuídas do processo  $((\hat{B}_t^i, C^i), i = 1, \dots, m)$ , cuja matriz de covariância é dada por,

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \delta^{21*}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{22*}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta^{2m*}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.86)$$

Propomos como o estimador amostral de  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\mathbf{S}^{(n)}(t)$ , onde  $S_{ij}^{(n)}(t) = 1_{\{i=j\}} S_t^{2i(n)}$ , isto é,

$$\mathbf{S}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} S_t^{21(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_t^{22(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_t^{2m(n)} \end{bmatrix}, \quad (5.87)$$

com

$$\begin{aligned} S_t^{2i(n)} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} - \bar{B}_t^{i(n)})^2 \\ &= \left( \frac{n}{n-1} \right) \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} - B^{i*}(t))^2 - (\bar{B}_t^{i(n)} - B^{i*}(t))^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Logo, para cada  $i = 1, \dots, m$  e  $t \geq 0$  fixado, obtemos o correspondente estimador amostral  $S_t^{2i(n)}$  que satisfaz as propriedades enunciadas na seguinte proposio.

**Proposio 5.3.** *Para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $S_t^{2i(n)}$    um estimador não viciado e uniformemente consistente para  $\delta^{2i*}(t)$  e portanto,  $\mathbf{S}^{(n)}(t)$  e  $\sum_{i=1}^m S_t^{2i(n)}$  são estimadores não viciados e uniformemente consistentes para  $\mathbf{U}(t)$  e  $\sum_{i=1}^m \delta^{2i*}(t)$ , respectivamente.*

**Prova.**

Para cada  $i = 1, \dots, m$  e  $t \geq 0$ , temos que  $E[C^i \hat{B}_t^i] = E[\bar{B}_t^{i(n)}] = B^{i*}(t)$ , enquanto que  $\delta^{2i*}(t) = E[(C^i \hat{B}_t^i - B^{i*}(t))^2]$ , logo, pela condio de cópias *IID*, de (5.88) obtemos,

$$E[S_t^{2i(n)}] = \left(\frac{n}{n-1}\right) \left[\delta^{2i*}(t) - \frac{1}{n}\delta^{2i*}(t)\right] = \delta^{2i*}(t), \text{ e portanto,}$$

$$E[\mathbf{S}^{(n)}(t)] = \mathbf{U}(t) \quad \text{e} \quad E\left[\sum_{i=1}^m S_t^{2i(n)}\right] = \sum_{i=1}^m \delta^{2i*}(t). \quad (5.89)$$

Pela lei forte dos grandes números para cópias *IID*, temos que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (C^{i(j)} \hat{B}_t^{i(j)} - B^{i*}(t))^2 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \delta^{2i*}(t).$$

Também pela lei forte dos grandes número e pelo *Teorema da Continuidade* (Billingsley [9]),

$$(\bar{B}_t^{i(n)} - B^{i*}(t))^2 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0,$$

e  $\left(\frac{n}{n-1}\right) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 1$ . Dos resultados anteriores e de (5.88) conclui-se que para todo  $i = 1, \dots, m$

$$S_t^{2i(n)} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \delta^{2i*}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \text{P-q.c.}$$

Logo,

$$S_s^{2i(n)} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \delta^{2i*}(s), \quad \forall s \leq t, \quad \text{P-q.c.}, \quad \text{portanto, } \sup_{s \leq t} |S_s^{2i(n)} - \delta^{2i*}(s)| \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0,$$

$$\text{pelo qual, } \sup_{s \leq t} (S_s^{2i(n)} - \delta^{2i*}(s))^2 \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0, \quad \text{P-q.c.}$$

Segue-se do Teorema da Convergência Dominada e do resultado anterior,

$$E \left[ \sup_{s \leq t} (S_s^{2i(n)} - \delta^{2i*}(s))^2 \right] \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0. \quad (5.90)$$

Este resultado estabelece a consistência uniforme dos estimadores  $S_t^{2i(n)}$  e de  $\sum_{i=1}^m S_t^{2i(n)}$ , e pela definição de  $\mathbf{S}^{(n)}(t)$  dada em (5.87), também garante a consistência deste estimador.  $\square$

### 5.3.4 Estimação do custo de garantia esperado para um período $w$ fixado

De (5.42) e (5.49), temos que o custo esperado dos reparos mínimos para um período de cumprimento  $t = w$ , é  $B^*(w) = E[\hat{B}_w] = \sum_{i=1}^m B^{i*}(w) = E[B_w]$ . Nesta seção obtemos a sua estimação pontual e um intervalo de confiança aproximado de  $(1 - \alpha)100\%$  a partir dos resultados nas Seções 5.3.1 a 5.3.3.

Seja  $\mathbf{1}_m = (1, 1, \dots, 1)$  o vetor  $m$ -dimensional com cada componente igual a

1 e  $(\mathbf{A})^t$  a transposta da correspondente matriz ou vetor  $\mathbf{A}$ . De (5.48) e pelo Teorema 5.2, um estimador de  $B^*(w)$  é  $\hat{B}^*(w) = \bar{B}_w^{(n)}$ , que podemos escrever como,

$$\bar{B}_w^{(n)} = \sum_{i=1}^m \bar{B}_w^{i(n)} = \mathbf{1}_m (\bar{\mathbf{B}}_w^{(n)})^t = \bar{\mathbf{B}}_w^{(n)} (\mathbf{1}_m)^t, \quad (5.91)$$

onde  $\bar{\mathbf{B}}_w^{(n)} = (\bar{B}_w^{1(n)}, \dots, \bar{B}_w^{m(n)})$ . Observe também que o custo de garantia esperado  $B^*(w)$  pode ser escrito como,

$$B^*(w) = \sum_{i=1}^m B^{i*}(w) = \mathbf{1}_m (\boldsymbol{\mu}(w))^t = \boldsymbol{\mu}(w) (\mathbf{1}_m)^t, \quad (5.92)$$

com  $\boldsymbol{\mu}(w) = (B^{1*}(w), \dots, B^{m*}(w))$ , definido no Teorema 5.4.

### Teorema 5.5.

*i.  $\bar{B}_w^{(n)}$  é um estimador não viciado e consistente para  $B^*(w)$ .*

*ii. Um estimador não viciado e consistente para  $VAR[\bar{B}_w^{(n)}]$  é*

$$\widehat{VAR}[\bar{B}_w^{(n)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}.$$

*iii. Um intervalo de confiança aproximado de  $(1 - \alpha)100\%$  para  $B^*(w)$ , é,*

$$\bar{B}_w^{(n)} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}{n}}, \quad (5.93)$$

onde  $Z_\gamma$  é o  $\gamma$ -quantil da distribuio normal padrão.

### Prova.

*i.* Do Teorema 5.2 temos que para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\bar{B}_w^{i(n)}$  é um esti-

mador não viciado e consistente para  $B^{i^*}(w)$ , cada um uniformemente integrável pelas condições impostas na Proposição 5.1 e Corolário 5.2, logo  $\bar{B}_w^{(n)} = \sum_{i=1}^m \bar{B}_w^{i(n)}$  é um estimador não viciado e consistente para  $B^*(w)$ .

ii. Temos que,

$$\begin{aligned} VAR[\bar{B}_w^{(n)}] &= VAR\left[\sum_{i=1}^m \bar{B}_w^{i(n)}\right] = \sum_{i=1}^m VAR[\bar{B}_w^{i(n)}] + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m COV[\bar{B}_w^{i(n)}, \bar{B}_w^{j(n)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \delta^{2i^*}(w) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m COV[C^i \hat{B}_w^i, C^j \hat{B}_w^j] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \delta^{2i^*}(w), \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{1}_m \mathbf{U}(w) (\mathbf{1}_m)^t = \frac{1}{n} VAR[\mathbf{1}_m (\hat{B}_w^1, \dots, \hat{B}_w^m)^t] \\ &= \frac{1}{n} VAR[(\hat{B}_w^1, \dots, \hat{B}_w^m) (\mathbf{1}_m)^t], \end{aligned}$$

onde a antepenúltima igualdade decorre porque os processos  $\hat{B}_w^i$  e  $\hat{B}_w^j$  não pulam simultaneamente. Logo, de (5.87) e da Proposição 5.3, um estimador não viciado e consistente para  $VAR[\bar{B}_w^{(n)}]$  é

$$\widehat{VAR}[\bar{B}_w^{(n)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_m \mathbf{S}^{(n)}(w) (\mathbf{1}_m)^t. \quad (5.94)$$

iii. Como consequência do Teorema 5.4, por Crámer-Wold temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_m (\mathbf{E}_w^{(n)})^t &= \mathbf{E}_w^{(n)} (\mathbf{1}_m)^t = \sum_{i=1}^m E_w^{i(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \\ \sum_{i=1}^m W_w^i &= \mathbf{1}_m (\mathbf{W}_w)^t = \mathbf{W}_w (\mathbf{1}_m)^t \sim N(0, \mathbf{1}_m \mathbf{U}(w) (\mathbf{1}_m)^t) = N\left(0, \sum_{i=1}^m \delta^{2i^*}(w)\right), \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{\sum_{i=1}^m E_w^{i(n)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \delta^{2i^*}(w)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1). \quad (5.95)$$

Logo, da Proposio 5.3 e do Teorema de Slutsky,

$$\frac{\sum_{i=1}^m E_w^{i(n)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}} = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^m (\bar{B}_w^{i(n)} - B^{i^*}(w))}{\sqrt{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{B}_w^{(n)} - B^*(w))}{\sqrt{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1). \quad (5.96)$$

Desta ltima equaco obtemos,

$$\lim_{n \uparrow \infty} P \left\{ \frac{\sqrt{n} |\bar{B}_w^{(n)} - B^*(w)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}} \leq Z_{1-\alpha/2} \right\} \geq P\{|Z| \leq Z_{1-\alpha/2}\} = 1 - \alpha,$$

portanto, um intervalo de confiança pontual aproximado de  $(1 - \alpha)100\%$  para  $B^*(w)$ , 

$$\bar{B}_w^{(n)} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}{n}}.$$

□

O intervalo de confiança em (5.93) pode conter valores negativos da funo  $B^*(w)$  que por definio  não negativa. Propomos construir um intervalo de confiança para uma transformao bijectiva apropriada  $g(x)$  tal que  $\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=B^*(w)} \neq 0$  e da qual, pela transformao inversa, possamos obter um intervalo de confiança aproximado para  $B^*(w)$  que não inclua valores negativos. Seja  $g(x) = \log x, x > 0$ , com  $\frac{\partial}{\partial x} g(x) = 1/x, x > 0$ .

**Corolário 5.4.** *Suponha que para  $w > 0$  fixado  $B^*(w) > 0$  e  $\bar{B}_w^{(n)} > 0$ .*

*Então*

$$\bar{B}_w^{(n)} \times \exp \left\{ \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}{n [\bar{B}_w^{(n)}]^2}} \right\} \quad (5.97)$$

*é um intervalo de confiança aproximado de  $(1 - \alpha)100\%$  para  $B^*(w)$ .*

**Prova.**

Da conclusão em (5.95) e usando o método delta obtemos que

$$\sqrt{n} [\log(\bar{B}_w^{(n)}) - \log(B^*(w))] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N \left( 0, [B^*(w)]^{-2} \sum_{i=1}^m \delta^{2i^*}(w) \right). \quad (5.98)$$

Do Teorema 5.5 parte *i.*, Proposição 5.3 e pelo Teorema da Continuidade,

$$\frac{\bar{B}_w^{(n)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{B^*(w)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \delta^{2i^*}(w)}}, \quad \text{P-q.c.} \quad (5.99)$$

Logo, de (5.98), (5.99) usando o Teorema de Slutsky, para  $w$  fixado, temos que,

$$\frac{\sqrt{n} \bar{B}_w^{(n)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}} [\log(\bar{B}_w^{(n)}) - \log(B^*(w))] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1) \quad (5.100)$$

Desta última equação obtemos que um intervalo de confiança aproximado de  $(1 - \alpha)100\%$  para  $\log(B^*(w))$  é

$$\log(\bar{B}_w^{(n)}) \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m S_w^{2i(n)}}{n [\bar{B}_w^{(n)}]^2}}, \quad (5.101)$$

do qual, aplicando a transformação inversa, isto é, a função  $e^x$ , obtemos (5.97). □

## 5.4 Exemplo ilustrativo

Para ilustrar os resultados, simulamos o processo de custo de garantia para um sistema em paralelo de  $m = 3$  componentes independentes. Para efeitos da simulação consideramos os tempos de vida dos componentes com distribuição de *weibull*( $\theta_i, \beta_i$ ), onde  $\theta_i$  é parâmetro de escala e  $\beta_i$  é o parâmetro de forma, isto é, com função de sobrevivência  $\bar{F}^i(t) = \exp[-(t/\theta_i)^{\beta_i}]$  e função de taxa de falha  $\lambda^i(t) = \frac{\beta_i}{\theta_i^{\beta_i}} t^{\beta_i-1}$ ,  $t > 0$ . Usamos duas funções dos custos descontados, a primeira, da forma  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ , e a segunda, da forma  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ ,  $0 \leq t \leq w$ , em ambos os casos com  $\delta = 1$ . Claramente estas funções satisfazem as condições de serem limitadas, contínuas e integráveis em  $[0, t]$ . Os valores dos parâmetros foram ajustados como indicamos a seguir.

$i$	$\theta_i$	$\beta_i$	$C_i$
1	1	1,5	3
2	1	1,5	3
3	2	2,0	5

Fixamos o período de garantia em  $w = 5$  e tamanhos de amostras  $n = 30, 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000$ . Os níveis críticos sob o reparo mínimo do sistema coerente, neste caso, correspondem a

$$Y_i = \begin{cases} \max_{j \neq i} T_j & \text{se } \max_{j \neq i} T_j < T_i, \\ \infty & \text{se } \max_{j \neq i} T_j \geq T_i. \end{cases} \quad (5.102)$$

Assim, se para a primeira falha do sistema observamos na ordem de falha,  $T_2, T_3, T_1$ , então,  $\zeta = \max\{T_1, T_2, T_3\} = \min_{i=1,2,3} T_i 1_{\{Y_i < \infty\}} = T_1$ , e nesse caso só o componente 1 é crítico para o sistema. A partir da segunda falha de componente,  $T_3$ , o sistema fica reduzido ao componente 1 o qual é reparado minimamente em cada falha observada durante o período de garantia.

A seguir, os resultados das simulações com função de custo  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ . Na Tabela 5.1, I.C1 refere-se aos intervalos definidos por (5.93) enquanto que I.C2 aos intervalos definidos por (5.97), com  $\alpha = 0,05$ . Na Figura 5.1, são ilustrados os intervalos de confiança pontuais de 95% para  $w \in (0, 5]$ , para uma amostra de  $n = 100$ .

$n$	$\hat{B}^*(w)$	$\sum_{i=1}^3 S_w^{2i(n)}$	$\sum_{i=1}^3 S_w^{2i(n)}/n$	I.C1		I.C2	
				Lim.Inf	Lim.Sup	Lim.Inf	Lim.Sup
30	1,90	2,30	0,07654	1,360	2,444	1,430	2,529
50	1,89	2,96	0,05921	1,416	2,370	1,471	2,435
100	1,85	2,95	0,02954	1,515	2,188	1,543	2,221
500	1,83	2,84	0,00568	1,679	1,974	1,685	1,980
1000	1,81	2,76	0,00276	1,709	1,915	1,712	1,918
2000	1,85	2,84	0,00142	1,778	1,926	1,780	1,928
5000	1,84	2,83	0,00057	1,793	1,886	1,794	1,887
10000	1,86	2,90	0,00029	1,824	1,891	1,825	1,891

Tabela 5.1: Estimações com  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ ,  $w = 5$ ,  $\alpha = 0,05$

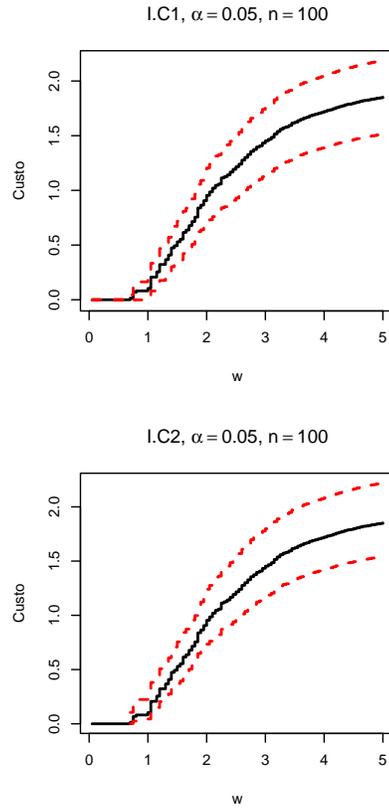


Figura 5.1: Intervalos de confiança dos dados simulados,  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ .

Na Tabela 5.2 apresentamos os valores téóricos para os custos esperados para um período de  $w = 5$ , onde,  $E[B_w^i] = \int_0^w H_i(s) \lambda^i(s) ds$  (isto é, quando o componente  $i$  é reparado minimamente a cada falha observada),  $E[B_w^i | T_i > Y_i] = E\left[\int_{Y_i}^w H_i(s) \lambda^i(s) ds | T_i > Y_i\right]$ . Baseados nestes resultados, podemos concluir para o sistema considerado, que com amostras de tamanho maior de  $n = 50$ , as estimativas são próximas dos valores esperados.

$i$	$E[B_w^i]$	$E[B_w^i   T_i > Y_i]$	$P(T_i > Y_i)$	$P(T_i > Y_i)E[B_w^i   T_i > Y_i]$
1	3,9138	2,14648	0,1620753	0,348
2	3,9138	2,14648	0,1620753	0,348
3	2,3989	1,70345	0,6758494	1,151
Custo Sistema				1,847

Tabela 5.2: Custos esperados,  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ ,  $w = 5$ 

$n$	$\bar{X}_n$	$S_n^2$	$\tilde{X}_n$	$Q_{0.025}$	$Q_{0.25}$	$Q_{0.75}$	$Q_{0.975}$	S.Wilk	P-valor
100	1,848	0,01574	1,848	1,612	1,761	1,936	2,091	0,9990	0,8576
200	1,843	0,00851	1,841	1,666	1,782	1,905	2,036	0,9987	0,7200

Tabela 5.3: Estatísticas simulação Monte Carlo,  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ ,  $w = 5$ 

Os seguintes resultados correspondem a simulações Monte Carlo, nas quais foram obtidos os custos médios para  $w = 5$ , para 1000 amostras com  $n = 100$  e  $n = 200$ , respectivamente. A Tabela 5.3 apresenta varias estatísticas e o teste de normalidade Shapiro Wilk. Na Figura 5.2 são apresentados os histogramas dos custos médios. Nos resultados anteriores observamos que o custo médio para um período de  $w = 5$  é próximo de 1,85, o qual também é observado na Tabela 5.1. A variância amostral e os quantis 0,025 e 0,975 para as médias das amostras de  $n = 100$  são próximos dos valores correspondentes na Tabela 5.1, para  $\sum_{i=1}^3 S_w^{2i(n)}/n$  e os limites de confiança do 95%, respectivamente.

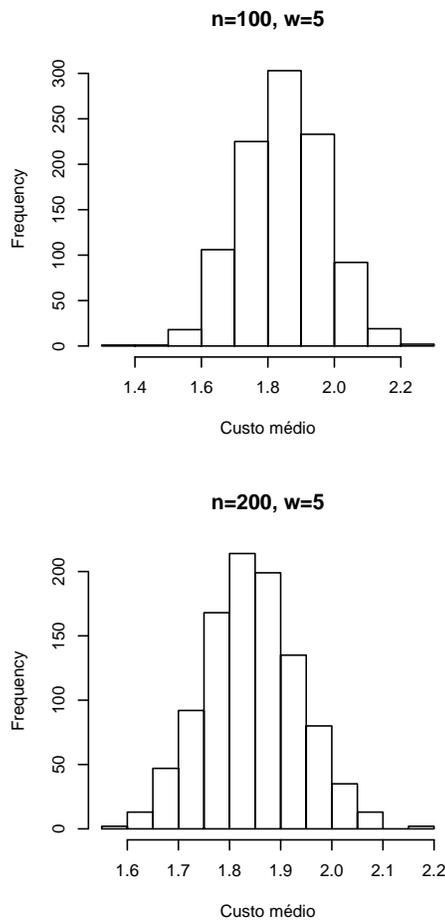


Figura 5.2: Histogramas dos custos médios,  $H_i(t) = C_i e^{-\delta t}$ ,  $n = 100, 200$

Os resultados relativos aos custos dos reparos mínimos com funções da forma  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ , são apresentados nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 e Figuras 5.3, 5.4. As conclusões são similares ao caso anterior.

n	$\hat{B}^*(w)$	$\sum_{i=1}^3 S_w^{2i(n)}$	$\sum_{i=1}^3 S_w^{2i(n)}/n$	I.C1		I.C2	
				Lim.Inf	Lim.Sup	Lim.Inf	Lim.Sup
30	1,16	1,35	0,04516	0,745	1,578	0,811	1,662
50	1,10	1,27	0,02544	0,786	1,411	0,827	1,460
100	1,04	1,23	0,01232	0,826	1,261	0,847	1,286
500	1,08	1,30	0,00259	0,981	1,180	0,985	1,185
1000	1,02	1,22	0,00122	0,951	1,087	0,953	1,090
2000	1,03	1,25	0,00063	0,976	1,075	0,978	1,076
5000	1,04	1,27	0,00025	1,006	1,069	1,007	1,069
10000	1,04	1,26	0,00013	1,014	1,057	1,014	1,058

Tabela 5.4: Estimações com  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ ,  $w = 5$ ,  $\alpha = 0,05$

i	$E[B_w^i]$	$E[B_w^i   T_i > Y_i]$	$P(T_i > Y_i)$	$P(T_i > Y_i)E[B_w^i   T_i > Y_i]$
1	2,8076	1,26053	0,1620753	0,204
2	2,8076	1,26053	0,1620753	0,204
3	1,5236	0,93862	0,6758494	0,634
Custo Sistema				1,043

Tabela 5.5: Custos esperados,  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ ,  $w = 5$

$n$	$\bar{X}_n$	$S_n^2$	$\tilde{X}_n$	$Q_{0.025}$	$Q_{0.25}$	$Q_{0.75}$	$Q_{0.975}$	S.Wilk	P-valor
100	1,038	0,00925	1,037	0,846	0,973	1,100	1,227	0,9987	0,6595
200	1,042	0,00418	1,040	0,917	0,996	1,085	1,171	0,9985	0,5533

Tabela 5.6: Estatísticas simulação Monte Carlo,  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$

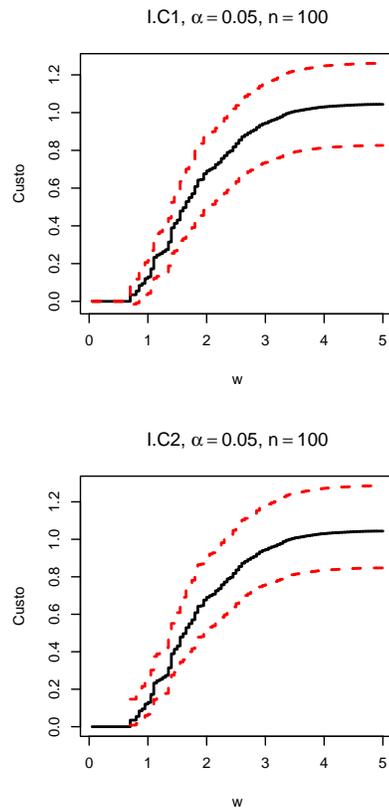


Figura 5.3: Intervalos de confiança dos dados simulados,  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$

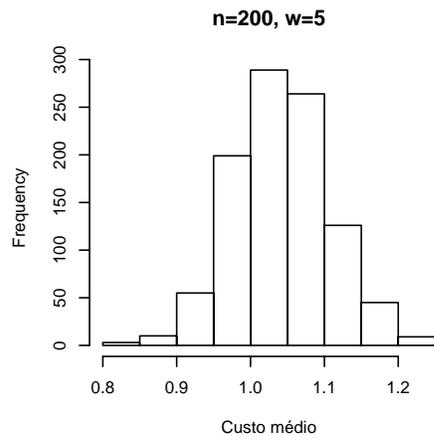
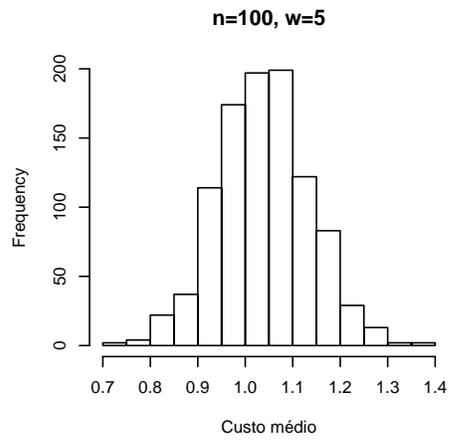


Figura 5.4: Histogramas dos custos médios,  $H_i(t) = C_i \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{-\delta t}$ ,  $n = 100, 200$

---

# Conclusões e pesquisa futura

## 6.1 Considerações finais

1. Para sistemas coerentes com estruturas relativamente simples é factível incorporar a informação completa do sistema e seus componentes na análise e na modelagem estocástica dos custos envolvidos tanto nos processos de *burn-in*, quanto nos processos de garantia, utilizando a informação definida pela pré- $t$ -história dos componentes,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .
2. Se dispomos somente da informação parcial sobre o sistema e seus componentes, definida por uma filtragem  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ,  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ , as técnicas da teoria da filtragem devem ser aplicadas sobre os processos analisados (Brémaud [17]). Contudo, os processos de intensidade de falha sob  $\mathcal{G}_t$  não conservarão, necessariamente, as mesmas propriedades desses processos sob  $\mathcal{F}_t$ . Assim, é preciso validar as condições impostas nos Capítulos 2 e 3, respectivamente, para os processos resultantes da filtragem.

3. Em sistemas coerentes com estruturas muito complexas, quando não é prático nem econômico a observação sob a pré- $t$ -história dos componentes, mas sim sobre módulos ou subestruturas de componentes, podemos considerar uma estrutura  $\tilde{\Phi}$  definida pelo sistema formado pelas subestruturas ou módulos factíveis de ser observados em todo tempo  $t \geq 0$ . Logo, as considerações feitas nesta tese sobre o sistema e seus componentes devem ser aplicadas sob a estrutura  $\tilde{\Phi}$ , na qual os componentes são subsistemas.
4. No contexto do item anterior, onde os reparos mínimos de um sistema ao nível de seus componentes podem ser pouco práticos, os resultados do Capítulo 5 poderiam ainda ser aplicados sobre a estrutura  $\tilde{\Phi}$  na qual as funções  $\lambda^i(t)$  corresponderiam às subestruturas olhadas como os componentes de  $\tilde{\Phi}$ .
5. Mediante o conceito do nível crítico dos componentes observados na estrutura de um sistema coerente, é possível modelar o processo de intensidade de falha do sistema como a intensidade de um sistema em série com os componentes observados depois de seus níveis críticos. Isto permite a modelagem do processo do número dos reparos mínimos do sistema ao nível de seus componentes e dos custos associados, quando este tipo de reparo é executado sob a filtragem definida pela observação completa dos componentes em cada instante do tempo.
6. Os resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3 indicam que para a otimização com a regra de parada monótona *ILA*, é necessária a análise

de cada caso específico na qual a inferência ajuda na interpretação e na definição de uma solução prática ótima. No caso do tempo ótimo de garantia, a regra *ILA* deve ser complementada com a avaliação das probabilidades dos eventos de falha e dos níveis de custos associados às possíveis soluções sugeridas pelo procedimento de otimização.

7. Os critérios para a otimização considerados nesta tese são alguns dos existentes na literatura da Teoria da Confiabilidade, não necessariamente os melhores, mas constituem um primeiro passo no desenvolvimento de um problema teórico difícil, na área da Teoria da Confiabilidade, e que por anos tem sido adiado: a modelagem e análise dos processos relativos a sistemas coerentes, incluindo tanto as relações estruturais quanto a dependência estatística entre os componentes e o sistema, dinamicamente no tempo.
8. O *processo de falha geral*, como foi dado nesta tese, permite incorporar definições distintas para os tipos de falha I e II, sendo possível introduzir os chamados modelos de choque, como também levar em consideração a importância dos componentes segundo as consequências de suas falhas. Acreditamos que podemos estender nossa definição para mais de dois tipos de falha de uma maneira mais simples do que seria com a *abordagem estatística ou de caixa preta*, na qual seria necessário considerar múltiplos parâmetros para a caracterização dos diferentes tipos de falha.

## 6.2 Sugestões para pesquisa futura

Diversas considerações adicionais podem ser incluídas na modelagem dos processos de falha e reparo para sistemas coerentes durante o *burn-in* e/ou a garantia. A seguir listamos alguns dos problemas de interesse a ser desenvolvidos em pesquisas futuras.

1. Nos problemas de otimização analisados relativos ao *burn-in*, considerar processos de falha para sistemas com multiestados, quando os componentes e o sistema passam por vários estágios de deterioração. Aven e Jensen [2] introduzem um modelo de ganho para um processo de reparo modulado por uma cadeia de Markov, que pode servir de base ou como ponto inicial para a modelagem nos problemas tratados nesta tese.
2. Na modelagem referentes ao problemas de *burn-in*, assumimos que as mesmas condições de uso são mantidas durante todo o tempo. Contudo, muitos procedimentos de *burn-in* são desenvolvidos sob condições de uso aceleradas. Seria de interesse incorporar modelos de testes acelerados nos processos de falha, o que, basicamente, teria efeito sobre os processos de intensidade de falha.
3. Durante o ciclo de garantia é possível que um sistema seja submetido a diferentes condições de uso, o que implica um processo de intensidade de falha heterogêneo. Kim, et. al. [36] tratam esse problema, ainda sob a *abordagem estatística ou de caixa preta*, para produtos sob uma garantia do tipo *FRW* e consideram dois modelos básicos para ca-

racterizar a intensidade de uso: como uma variável aleatória contínua (por exemplo, com distribuição gama ou uniforme num intervalo fixo), ou como uma variável aleatória discreta (uma variável indicadora que divide à população dos itens em uso em dois ou mais grupos). Esta variável modificará a intensidade de falha do sistema, enquanto que o processo de contagem do número de falhas durante o período de garantia é analisado condicionando sob a intensidade de uso.

Além disso, existem modelos de processos degenerativos durante o uso. Kalhe [33] discute vários desses modelos, por exemplo, modelos de danos baseados em processos contínuos assumindo que o processo de uso é normalmente distribuído ou é um processo de Wiener com tendência linear. Outras possibilidades são os modelos de choques para processos pontuais marcados os quais poderiam ser úteis na definição dos processos de estresse de uso do sistema.

4. Outros modelos de reparo distintos do reparo mínimo têm sido estudados na literatura da Confiabilidade. Por exemplo, um modelo de reparo mais geral é proposto por Dorado et. al. [24]. Neste modelo, após o  $j$ -ésimo reparo, a idade efetiva do item reparado satisfaz a condição

$$A_j \leq A_{j-1} + \Theta_{j-1}T_{j-1}, \quad j > 1, \quad A_1 = 0, \quad A_j \geq 0, \quad \Theta_j \in (0, 1], \quad \Theta_1 = 1,$$

onde  $(\Theta_j)_{j \geq 1}$  é uma sequência chamada de vida suplementar e  $(T_j)_{j \geq 1}$  é a sequência dos tempos entre falhas. Este modelo contém outros modelos de reparo, por exemplo, se  $\Theta_j = 1, A_j = 0, \forall j \geq 1$ , obtemos

o modelo de reparo perfeito; se  $\Theta_j = 1$ ,  $A_j = S_{j-1}$ ,  $\forall j \geq 1$ , onde  $S_j$  é o tempo da  $j$ -ésima falha, o modelo corresponde ao modelo de reparo mínimo. Outra alternativa possível como sugere Finkelstein [26], é aplicar algum tipo de degradação do tipo markoviano na definição da idade efetiva. Por exemplo, a idade residual pode ser definida pela degradação prévia e não depender do padrão de sua acumulação.

5. Nos modelos tratados para otimização do *burn-in* e garantia, foram considerados parâmetros de custos constantes. Modelos de custos dependentes do tempo também podem ser introduzidos. Assim, uma modelagem geral pode ser feita incorporando tal tipo de funções mas sobre as quais algumas condições terão que ser impostas para soluções específicas.
6. Para a estimação dos custos de garantia descontados, sob reparo mínimo, construímos intervalos de confiança pontuais. Métodos intensivos em computação baseados em re-amostragem podem proporcionar uma solução para a construção de bandas simultâneas de confiança num intervalo do tempo, para os quais resultados assintóticos podem ser validados pelo chamado Teorema de Re-amostragem do Limite Central (CLRT) (Belyaev [7] e Belyaev e Seleznev [8]).
7. Finalmente, temos interesse em desenvolver uma solução do problema apresentado no Capítulo 4 sob níveis maiores de informação do que a sigma-álgebra trivial.

---

# Definições e resultados preliminares

## A.1 Conceitos e resultados básicos da teoria dos martingais

Nesta tese trataremos da análise de um sistema coerente e complexo, como definido em Barlow e Proschan [6]. Formalmente, seja  $\zeta$  o tempo de vida de um sistema coerente de  $m$  componentes com tempos de vida  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , definidos em um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com a filtragem  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, 0 \leq s \leq t\right\} \quad (\text{A.1})$$

uma família de sub  $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  satisfazendo as condições de Dellacherie, isto é, crescentes, contínuas à direita e completas. A relação entre o sistema e seus componentes é através de uma função de estrutura  $\Phi$  tal que  $\zeta = \Phi(T_1, \dots, T_m)$ , a qual é crescente em cada um de seus argumentos. Em

adição, a noção de coerência assegura que cada componente é relevante para o sistema, isto é, existem situações em que o funcionamento do componente é fundamental para o funcionamento do sistema.

A fim de aplicar a teoria dos martingais, descrevemos para o desenvolvimento dos Capítulos 1, 2, 3 e 5, alguns conceitos básicos.

**Definição A.1.** *Uma variável aleatória positiva estendida  $\zeta$  é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada, se e só se,  $\{\zeta \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ . Um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada  $\zeta$  é previsível se existe uma sequência  $(\zeta_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada,  $\zeta_n < \zeta$ , tal que  $\zeta_n \rightarrow \zeta$ ,  $P$ -q.c. quando  $n \rightarrow +\infty$ . Um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada  $\zeta$  é totalmente inacessível se  $P(\zeta = Y < \infty) = 0$  para todo  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada previsível  $Y$ .*

**Definição A.2.** *Um processo estocástico  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  é chamado um semi-martingal regular, ou abreviadamente, SSM se admite uma decomposição na forma*

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t, \quad (\text{A.2})$$

onde  $(f_t)_{t \geq 0}$  é um processo progressivamente mensurável,  $E(|Z_0|) < \infty$ ,  $E\left\{\int_0^t |f_s| ds\right\} < \infty \forall t \geq 0$ , e  $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_0$  (martingal de média zero). Como em Aven e Jensen [2], usamos a notação  $Z = (f, M)$ .

**Teorema A.1.** (Aven e Jensen [2, Lema 13]). *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  um espaço de probabilidade filtrado e  $\zeta$  um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada.*

i. Se o processo  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ , tem uma representação SSM,

$$N_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_t, \quad t \geq 0, \quad (\text{A.3})$$

então  $\zeta$  é um tempo de parada totalmente inacessível e o martingal  $M$  é quadrado integrável,  $M \in \mathcal{M}_0^2$ .

ii. Se  $\zeta$  é um tempo de parada totalmente inacessível, então o processo  $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ,  $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ , tem uma única decomposição  $P$ -q.c.  $N = A + M$ , onde  $M$  é um martingal uniformemente integrável e  $A$  é contínua  $P$ -q.c.

**Teorema A.2.** (Aven e Jensen [2, Teorema 105, A.6]). Se  $Z = (f, M)$  e  $\eta$  é um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada, então o processo parado em  $\eta$ ,  $\tilde{Z}_t = Z_{t \wedge \eta}$ ,  $\tilde{Z} = (\tilde{f}, \tilde{M})$  é também um SSM com  $\tilde{f}_t = 1_{\{\eta > t\}} f_t$ .

**Teorema A.3.** (Aven e Jensen [2, Teorema 108, A.6]). Se  $Z = (f, M)$  e  $Y = (g, L)$  são  $\mathcal{F}_t$ -SSM com martingais ortogonais  $M$ ,  $L \in \mathcal{M}_0^2$ , isto é,  $ML \in \mathcal{M}_0$ , e se

$$\begin{aligned} E \left\{ \int_0^t (|Z_s g_s| + |Y_s f_s|) ds \right\} < \infty, \quad E |Z_0 Y_0| < \infty, \\ E \left\{ \int_0^t Y_s^2 d\langle M \rangle \right\} < \infty, \quad E \left\{ \int_0^t Z_s^2 d\langle L \rangle \right\} < \infty, \end{aligned}$$

então  $ZY$  é um  $\mathcal{F}_t$ -SSM com a representação

$$Z_t Y_t = Z_0 Y_0 + \int_0^t (Y_s f_s + Z_s g_s) ds + R_t,$$

onde  $R$  é um martingal em  $\mathcal{M}_0$ .

**Teorema A.4.** (Aven e Jensen [2, Proposição 109, A.6]). Se  $Z = (f, M)$  um  $\mathcal{F}_t$ -SSM e  $\eta > 0$  um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível, com

$$Y_t = 1_{\{\eta \leq t\}} = \int_0^t g_s ds + L_t$$

onde  $g_s = 1_{\{\eta > s\}} \lambda_s$ . Se

$$\forall t \geq 0, E\left\{\int_0^t |Z_s g_s| ds\right\} < \infty, \quad E\left\{\int_0^t |Z_{s-}| |dL_s| ds\right\} < \infty,$$

e  $\Delta M_\eta = M_\eta - M_{\eta-} = 0$ , então  $ZY$  é um SSM com a representação

$$Z_t Y_t = \int_0^t (Z_s g_s + Y_s f_s) ds + R_t, \quad \text{onde } R \in \mathcal{M}_0.$$

**Teorema A.5.** (Brémaud [17, Teorema T.8]). Seja  $N_t$  um processo pontual com a  $\mathcal{F}_t$ -intensidade  $\lambda_t$  (onde  $\int_0^t \lambda_s ds < \infty, \forall t \geq 0$  P-q.c.), então,  $N_t$  é não explosivo (isto é,  $N_t < \infty, \forall t \geq 0$  P-q.c.) e,

- Se  $X_t$  é um processo  $\mathcal{F}_t$ -previsível tal que  $E\left\{\int_0^t |X_s| \lambda_s ds\right\} < \infty, \forall t \geq 0$ , então  $\int_0^t X_s dM_s$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal.
- Se  $X_t$  é um processo  $\mathcal{F}_t$ -previsível tal que  $\int_0^t |X_s| \lambda_s ds < \infty, \forall t \geq 0$  P-q.c., então  $\int_0^t X_s dM_s$  é um  $\mathcal{F}_t$ -martingal local, onde  $M_s = N_s - \int_0^s \lambda_u du$ .

## A.2 Modelo de falha geral (modelo *estatístico ou de caixa preta*)

O modelo de falha geral é descrito em Block, et. al. [15]. Neste modelo o processo de falha de um produto (sistema) apresenta dois possíveis tipos de falha na idade  $t$ :

- **Falha do tipo I:** Acontece com probabilidade  $q(t) = 1 - p(t)$ . Neste tipo de falha o produto é reparado minimamente (*reparo mínimo estatístico*), isto é, reconstitui-se a sua taxa de falha à condição imediatamente anterior à falha.
- **Falha do tipo II** Acontece com probabilidade  $p(t) \in [0, 1]$ . Este tipo de falha é catastrófico e o produto deve ser substituído por um novo.

Seja  $((\zeta_k, Z_k))_{k \geq 1}$  um processo pontual marcado, onde  $\zeta_k$  corresponde ao  $k$ -ésimo tempo de falha, e  $Z_k = 0$  ou  $1$ , indica reparo mínimo ou substituição no tempo  $\zeta_{k-1}$ , respectivamente. Como uma substituição regenera o processo de falha, é suficiente modelar até o primeiro ponto de renovação e portanto, só consideramos este processo até o tempo aleatório  $\zeta_{\nu-1}$  onde  $\nu = \inf\{k \geq 1 : Z_k = 1\}$ . Considere a sequência  $(Z_k)_{k \geq 1}$  de ensaios de Bernoulli condicionalmente independentes (sobre  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ ), tais que  $P\{Z_k = 1 | \zeta_1, Z_1, \dots, \zeta_{k-1}, Z_{k-1}\} = p(\zeta_{k-1})$ ,  $\forall k \geq 1$ , com  $\zeta_0 = 0$  e  $Z_1 = 0$ . As falhas são observadas e os reparos mínimos são realizados sucessivamente até o instante no qual o primeiro “sucesso” (falha do tipo II) é observado (o primeiro instante  $t$  em que  $Z_k = 1$ ), onde se realiza uma substituição completa recomençando um novo ciclo, de forma que os tempos das substituições sucessivas formam um processo de renovação.

Assume-se que a função de taxa de falha de um produto novo (sem *burn-in*)  $r_\zeta(t)$  é contínua, positiva para  $t \geq 0$ , e que os reparos mínimos e as substituições são instantâneos. Seja  $\zeta^{\text{II}}$  o tempo de espera até a primeira falha do

tipo II de um produto novo. Block, et. al. [15] demostram que a função de sobrevivência de  $\zeta^{\text{II}}$  é dada por

$$\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(t) = P(\zeta^{\text{II}} > t) = \exp \left\{ - \int_0^t p(u)r_{\zeta}(u)du \right\}, \quad (\text{A.4})$$

sendo  $\zeta^{\text{II}}$  finito com probabilidade um se, e somente se,

$$\int_0^{\infty} p(u)r_{\zeta}(u)du = +\infty. \quad (\text{A.5})$$

Segundo Block, et. al. [15], se  $\bar{F}_{\zeta}(t)$  é a função de sobrevivência de um produto novo, contínua e tal que  $\bar{F}_{\zeta}(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ , e se este é submetido a um reparo mínimo no instante  $t \geq 0$ , a sua função de sobrevivência atualiza-se para:

$$\bar{F}_{\zeta}(x|t) = \frac{\bar{F}_{\zeta}(x+t)}{\bar{F}_{\zeta}(t)}. \quad (\text{A.6})$$

Considere de novo a sequência  $((\zeta_k, Z_k))_{k \geq 1}$ , em termos da qual o processo de contagem  $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ , correspondente ao processo pontual  $(\zeta_k)_{k \geq 1}$ , definido por  $\tilde{N}_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{\zeta_k \leq t\}}$ , é um processo de Poisson não homogêneo com função de média  $\tilde{A}(t) = E[\tilde{N}_t] = -\log \bar{F}_{\zeta}(t) \forall t \geq 0$ , onde  $\bar{F}_{\zeta}(t)$  tem taxa de falha  $r_{\zeta}(t)$ . Para a sequência  $(\zeta_k^{\text{II}})_{k \geq 1}$  de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição  $F_{\zeta^{\text{II}}}(t)$ , o processo de contagem correspondente,  $(\tilde{N}_t^{\text{II}})_{t \geq 0}$ , também é um processo de Poisson não homogêneo definido por  $\tilde{N}_t^{\text{II}} = \sum_{k=1}^{\tilde{N}_t} 1_{\{Z_{k+1}=1\}}$ , com função de média  $\tilde{A}^{\text{II}}(t) = E[\tilde{N}_t^{\text{II}}] = -\log \bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(t) = \int_0^t p(u)r_{\zeta}(u)du \forall t \geq 0$ . Similarmente, o processo de contagem  $(\tilde{N}_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$ , correspondente ao processo pontual dos tempos de reparo mínimo, com  $\tilde{N}_t^{\text{I}} = \sum_{k=1}^{\tilde{N}_t} 1_{\{Z_{k+1}=0\}}$ , é um processo de Poisson não homogêneo com função de média  $\tilde{A}^{\text{I}}(t) = E[\tilde{N}_t^{\text{I}}] = \int_0^t q(u)r_{\zeta}(u)du$ .

---

## Referências Bibliográficas

- [1] E. Arjas, *The failure and hazard processes in multivariate reliability systems*, Mathematics of Operation Research **6** (1981), 551-562.
- [2] T. Aven and U. Jensen, *Stochastic models in reliability*. Springer-Verlag, Inc., New York, 1999.
- [3] J. Bai and H. Pham, *Discounted warranty cost of minimally repaired series systems*. IEEE Transactions on Reliability **53** (2004), 37-42.
- [4] J. Bai and H. Pham, *Cost analysis on renewable full-service warranties for multi-component systems*. European Journal of Operation Research **168** (2006), 492-508.
- [5] K. R. Balachandran, R. Maschmeyer and J. Livingstone, *Product warranty period: A Markovian approach to estimation and analysis of repair and replacement costs*. The Accounting Review **1** (1981), 115-124.
- [6] R. E. Barlow and F. Proschan, *Statistical theory of reliability and life testing*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1981.

- 
- [7] Y. K. Belyaev, *Computer intensive methods based on resampling in analysis of reliability and survival data. Chapter 12, Recent advances in reliability theory. Methodology, practice and inference*, N. Limnios and M. Nikulin Eds: Birkhäuser, Boston, 2000, pp. 183-197.
- [8] Y. K. Belyaev and O. Seleznev, *Approaching in distribution with applications to resampling of stochastic processes*. Scandinavian Journal of Statistics **27** (2000), 371-384.
- [9] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.
- [10] W. R. Blischke and D.N.P. Murthy, *Product warranty management-1: A taxonomy for warranty policies*. European Journal of Operation Research **62** (1992), 127-148.
- [11] W. R. Blischke and D.N.P. Murthy, *Product warranty management-2: An integrated framework for study*. European Journal of Operation Research **62** (1992a), 261-281.
- [12] W. R. Blischke and D.N.P. Murthy, *Product warranty management-3: A review of mathematical models*. European Journal of Operation Research **63** (1992b), 1-34.
- [13] W. R. Blischke and D.N.P. Murthy, *Warranty cost analysis*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.

- 
- [14] W. R. Blischke and D.N.P. Murthy, *Product warranty handbook*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.
- [15] H. W. Block, W. S. Borges and T. H. Savits, *Age-dependent minimal repair*. Journal of Applied Probability **22** (1985), 370-385.
- [16] H. W. Block and T. H. Savits, *Burn-in*. Statistical Science **12** (1997), 1-19.
- [17] P. Brémaud, *Point processes and queues. Martingale dynamics*. Springer Verlag Inc., New York, 1981.
- [18] V. C. Bueno, *Burn-in of a coherent system at component information level*. Technical Report RT-MAE 2007-15, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2007.
- [19] J. H. Cha, *On a better burn-in procedure*. Journal of Applied Probability **12** (2000), 1090-1103.
- [20] J. H. Cha, *Burn-in procedures for a generalized model*. Journal of Applied Probability **38** (2001), 542-553.
- [21] J. H. Cha, *A further extension of the generalized burn-in model*. Journal of Applied Probability **40** (2003), 264-270.
- [22] Y. H. Chien, *Determining optimal warranty periods from the seller's perspective and optimal out-of-warranty replacement age from the buyer's perspective*. International Journal of Systems Science **36** (2005), 631-637.

- 
- [23] S. Chukova and B. Dimitrov, *Warranty analysis for complex systems, Chapter 22, Product warranty handbook*, W. R. Blischke and D.N.P. Murthy, Eds: Marcel Dekker, Inc., New York, 1996, pp. 543-584.
- [24] C. Dorado, M. Hollander, and J. Sethuraman, *Nonparametric estimation for a general repair model*. The Annals of Statistics **25** (1997), 1140-1160.
- [25] T. Duchesne and F. Marri, *General distributional properties of discounted warranty costs with risk adjustment under minimal repair*. IEEE Transactions on Reliability **58** (2009), 143-151.
- [26] M. S. Finkelstein, *Modeling a process of non-ideal repair. Chapter 3, Recent advances in reliability theory. Methodology, practice and inference*, N. Limnios and M. Nikulin Eds: Birkhäuser, Boston, 2000, pp. 41-50.
- [27] T. R. Fleming and D. P. Harrington, *Counting processes and survival analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991.
- [28] A.Z.M.O. Hussain and D.N.P. Murthy, *Warranty and redundancy design with uncertain quality*. IIE Transactions **30** (1998), 1191-1199.
- [29] S. Ja, V. Kulkarni, A. Mitra, and G. Patankar, *A nonrenewable minimal-repair warranty policy with time-dependent costs*. IEEE Transactions on Reliability **50** (2001), 346-352.

- 
- [30] S. Ja, V. Kulkarni, A. Mitra, and G. Patankar, *Warranty reserves for nonstationary sales processes*. *Naval Research Logistics* **49** (2002), 499-513.
- [31] U. Jensen, *Monotone stopping rules for stochastic processes in a semi-martingale representation with applications*. *Optimization* **20** (1989), 837-852.
- [32] F. Jensen and N. E. Petersen, *Burn-in*. Wiley, New York, 1982.
- [33] W. Kalhe, *Simultaneous confidence regions for the parameters of damage processes*. *Statistical Papers* **35** (1994), 27-41.
- [34] T. R. Kar and J. A. Nachlas, *Coordinated warranty & burn-in strategies*. *IEEE Transactions on Reliability* **46** (1997), 512-518.
- [35] A. F. Karr, *Point processes and their statistical inference*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1986.
- [36] C. S. Kim, I. Djamaludin and D.N.P. Murthy, *Warranty cost analysis with heterogenous usage intensity*. *International Transactions in Operational Research* **8** (2001), 337-347.
- [37] R. S. Lipster and A. N. Shiryaev, *Statistics of random processes I. General theory*. 2nd. ed. Springer-Verlag, Inc., New York, 2001.
- [38] J. W. Mamer, *Determination of warranty reserves*. *Management Science* **15** (1969), 542-549.

- 
- [39] J. W. Mamer, *Discounted and per unit costs of product warranty*. Management Science **33** (1987), 916-930.
- [40] J. Mi, *Burn-in*. Ph.D. dissertation, Department of Mathematics and Statistics, University of Pittsburgh, USA, 1991.
- [41] J. Mi, *Burn-in and maintenance policies*. Advanced Applied Probability **26** (1994), 207-221.
- [42] J. Mi, *Warranty policies and burn-in*. Naval Research Logistics **44** (1997), 199-209.
- [43] A. Mitra and J. G. Patankar, *Market share and warranty costs for renewable warranty programs*. International Journal of Production Economics **20** (1993), 111-123.
- [44] D.N.P. Murthy, *Optimal reliability choice in product design*. Engineering Optimization **15** (1990), 280-294.
- [45] D. G. Nguyen and D.N.P. Murthy, *Optimal burn-in time to minimize cost for products sold under warranty*. IIE Transactions **14** (1982), 167-174.
- [46] D. G. Nguyen and D.N.P. Murthy, *Cost analysis of warranty policies*. Naval Research Logistics Quarterly **31** (1984), 525-541.
- [47] J. Patankar and A. Mitra, *Effect of warranty execution on warranty reserve costs*. Management Science **41** (1995), 395-400.

- 
- [48] P. H. Ritchken, *Optimal replacement policies for irreparable warranty item*. IEEE Transactions on Reliability **35** (1986), 621-624.
- [49] S. H. Sheu and Y. H. Chien, *Optimal burn-in time to minimize the cost for general repairable products sold under warranty*. European Journal of Operational Research **163** (2005), 445-461.
- [50] M. U. Thomas, *A prediction model of manufacturer warranty reserves*. Management Science **35** (1989), 1515-1519.
- [51] W. Y. Yun, Y. W. Lee and L. Ferreira, *Optimal burn-in time under accumulative free replacement warranty*. Reliability Engineering & System Safety **78** (2002), 93-100.