

**Definição do nível de significância  
em função do tamanho amostral**

Melaine Cristina de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado em Estatística

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, junho de 2014

"As pessoas distorcem os fatos para que se moldem às suas teorias  
ao invés das teorias se moldarem aos fatos."

*Sherlock Holmes, 2009*

## Definição do nível de significância em função do tamanho amostral

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/07/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Sergio Wechsler - IME-USP
- Prof. Dr. Gustavo Leonel Gilardoni Avalle - UnB

# Agradecimentos

Agradeço à minha família pelo suporte emocional e financeiro, sem eles meu caminho seria muito mais difícil. Por me ensinarem a importância da educação e do aprendizado. Pelo amor, carinho e apoio incondicionais em todas as situações.

Aos meus amigos pelo apoio e encorajamento, principalmente ao Victor Fossaluzza pelo grande incentivo, discussões teóricas e carinho. Ao Marcelo Taddeo, Márcio Diniz e Pablo Andrade pela grande e valiosa ajuda computacional e paciência. Ao Vinícius Calsavara e Fábio Oki por todo o suporte, companheirismo e amizade, com diversas contribuições tanto na área acadêmica como pessoal.

À Cláudia Nogueira e ao Pedro Cunha que me ajudaram a despertar o interesse necessário para o início desta jornada. Após convívio diário por 7 anos, certamente, levo uma parte de vocês comigo.

Ao meu orientador, Prof. Carlinhos, genuinamente um grande mestre, pelo apoio, ensinamentos, desafios e bate-papos com direito a tapiocas às sextas-feiras. Agradeço por ter acreditado no meu trabalho e me guiar por esta jornada.



# Resumo

OLIVEIRA, M. C. **Definição do nível de significância em função do tamanho amostral.** 2014. 120 f. Tese (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Atualmente, ao testar hipóteses utiliza-se como convenção um valor fixo (normalmente 0,05) para o Erro Tipo I máximo aceitável (probabilidade de Rejeitar  $H_0$  dado que ela é verdadeira) , também conhecido como nível de significância do teste de hipóteses proposto, representado por  $\alpha$ . Na maioria das vezes nem se chega a calcular o Erro tipo II ou  $\beta$  (probabilidade de Aceitar  $H_0$  dado que ela é falsa). Tampouco costuma-se questionar se o  $\alpha$  adotado é razoável para o problema analisado ou mesmo para o tamanho amostral apresentado. Este texto visa levar à reflexão destas questões. Inclusive sugere que o nível de significância deve ser função do tamanho amostral. Ao invés de fixar-se um nível de significância único, sugerimos fixar a razão de gravidade entre os erros tipo I e tipo II baseado nas perdas incorridas em cada caso e assim, dado um tamanho amostral, definir o nível de significância ideal que minimiza a combinação linear dos erros de decisão. Mostraremos exemplos de hipóteses simples, compostas e precisas para a comparação de proporções, da forma mais convencionalmente utilizada comparada com a abordagem Bayesiana proposta.

**Palavras-chave:** Teste de hipótese, nível de significância, tamanho amostral, combinação linear dos erros.



# Abstract

OLIVEIRA, M. C. **Setting the level of significance depending on the sample size.** 2014. 120 f. Tese (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Usually the significance level of the hypothesis test is fixed (typically 0.05) for the maximum acceptable Type I error (probability of Reject  $H_0$  as it is true), also known as the significance level of the hypothesis test, represented here by  $\alpha$ . Normally the type II error or  $\beta$  (probability of Accept  $H_0$  as it is false) is not calculated. Nor often wonder whether the  $\alpha$  adopted is reasonable for the problem or even analyzed for the sample size presented. This text aims to take the reflection of these issues. Even suggests that the significance level should be a function of the sample size. Instead of fix a unique level of significance, we suggest fixing the ratio of gravity between type I and type II errors based on losses incurred in each case and so, given a sample size, set the ideal level of significance that minimizes the linear combination of the decision errors. There are examples of simple, composite and sharp hypotheses for the comparison of proportions, the more conventionally used form compared with the Bayesian approach proposed.

**Keywords:** hypotheses test, significance level, testing hypotheses, beta-binomial distributions.





# Sumário

<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Preliminares . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Contribuições . . . . .	3
1.4 Organização do Trabalho . . . . .	3
<b>2 Testes de hipóteses</b>	<b>5</b>
2.1 Fundamentos . . . . .	5
2.1.1 Lemma de Neyman-Pearson . . . . .	6
2.1.2 Teorema . . . . .	6
2.1.3 Perspectiva Bayesiana . . . . .	7
2.2 Teste de hipóteses para proporção . . . . .	8
2.2.1 Hipóteses Simples . . . . .	8
2.2.2 Hipóteses Compostas para proporções em relação à referência . . . . .	9
2.2.3 Hipóteses Compostas para proporções de duas populações . . . . .	15
<b>3 Conclusões</b>	<b>17</b>
3.1 Considerações Finais . . . . .	18
3.2 Sugestões para Pesquisas Futuras . . . . .	19
<b>A Exemplos</b>	<b>21</b>
<b>B Rotinas Computacionais</b>	<b>31</b>
B.1 Hipóteses Simples . . . . .	31
B.2 Hipóteses Compostas Unilaterais . . . . .	32
B.3 Hipóteses Compostas Bilaterais com relação à uma referência . . . . .	36
B.4 Hipóteses Compostas Bilaterais para duas populações . . . . .	39
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>



# Lista de Abreviaturas

FDP	Função densidade de probabilidade ( <i>Probability density function</i> )
FBST	<i>Full Bayesian Significance Test</i>
c.i.i.d	Condicionalmente independentes e identicamente distribuídos
a.a.	amostra aleatória
v.a.	variável aleatória
RC	Região Crítica: contém todas as amostras de $X$ para as quais deve-se rejeitar $H_0$
RA	Região de aceitação: contém todas as amostras de $X$ para as quais deve-se aceitar $H_0$
EMV	Estimador de Máxima Verossimilhança
RV	Razão de Verossimilhanças
RVM	Razão de Verossimilhanças Monótona
TRV	Teste de Razão de Verossimilhanças
UMP	Uniformemente mais poderoso



# Lista de Símbolos

$\theta$	Vetor de parâmetros de interesse
$\Theta$	Espaço paramétrico
$\Omega$	Espaço amostral
$\alpha$	Nível de Significância
$\beta$	Erro tipo II
$\pi$	Função Poder
$\phi$	f.d.p. da Normal padrão (0,1)
$\eta$	Família de distribuições de probabilidade
$n$	Tamanho amostral
$f(\cdot)$	Função densidade de probabilidade
$f_0(x)$	Verossimilhança de $x$ dado $\theta \in \Theta_0$
$f_1(x)$	Verossimilhança de $x$ dado $\theta \in \Theta_1$



# Lista de Figuras

2.1	Erros dado $n$ para hipóteses simples sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial com diferença de 0,02 entre as proporções ( $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,22$ ). Gráficos para $k = 0,50$ ; $k = 0,66$ e $k = 0,80$ , respectivamente. Método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ . . . . .	10
2.2	Erros e função poder dado $n$ para hipóteses unilaterais ( $H_0 : \theta \leq 0,70$ versus $H_1 : \theta > 0,70$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Gráficos para $k = 0,50$ ; $k = 0,80$ e $k = 0,91$ , respectivamente. Método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ . . . . .	12
2.3	Erros ( $\alpha$ e $\beta$ ) dado $n$ para hipóteses unilaterais ( $H_0 : \theta \leq 0,70$ versus $H_1 : \theta > 0,70$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Gráficos para $k = 0,50$ ; $k = 0,80$ e $k = 0,91$ comparados com método usual: $\alpha = 0,05$ e $\beta$ mínimo. . . . .	13
2.4	Função poder dado $n$ para hipóteses bilaterais ( $H_0 : \theta = 0,40$ versus $H_1 : \theta \neq 0,40$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial com relação a uma referência. Gráficos para $k = \{0,50; 0,80; 0,91; 0,92; 0,93\}$ e o Método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ . . . . .	14
2.5	Função Poder para hipóteses bilaterais ( $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Gráficos para $k = 0,50$ ; $k = 0,80$ e $k = 0,91$ utilizando o FBST para encontrar a região Crítica e gráfico pelo Método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização do $\beta$ , para amostras de mesmo tamanho ( $n$ ). . . . .	16





# Lista de Tabelas

3.1	Relação entre ponderação de erros e a razão de perda a ser utilizada na Regra de Decisão do teste de hipóteses. . . . .	17
A.1	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses simples $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,22$ sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para $k = 0,50$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	22
A.2	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses simples $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,22$ sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para $k = 0,66$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	22
A.3	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses simples $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,22$ sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para $k = 0,80$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	23
A.4	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses simples $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,30$ sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para $k = 0,50$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	23
A.5	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses simples $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,30$ sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para $k = 0,66$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	24
A.6	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses simples $H_0 : \theta = 0,20$ versus $H_1 : \theta = 0,30$ sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para $k = 0,80$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	24
A.7	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial $H_0 : \theta \leq 0,70$ versus $H_1 : \theta > 0,70$ . Método Proposto para $k = 0,50$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	25
A.8	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial $H_0 : \theta \leq 0,70$ versus $H_1 : \theta > 0,70$ . Método Proposto para $k = 0,80$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	25
A.9	Tabela de erros dado $n$ para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial $H_0 : \theta \leq 0,70$ versus $H_1 : \theta > 0,70$ . Método Proposto para $k = 0,91$ à esquerda e método usual com $\alpha = 0,05$ e minimização de $\beta$ à direita. . . . .	26

A.10 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 26

A.11 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 27

A.12 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ . Método Proposto para  $k = 0,93$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 27

A.13 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 28

A.14 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 28

A.15 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,91$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 28

A.16 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = 3 \times n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 29

A.17 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = 3 \times n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 29

A.18 Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = 3 \times n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,91$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita. . . . . 29

# Capítulo 1

## Introdução

Hipóteses são suposições feitas de acordo com crenças, experiências ou teorias sobre temas de conhecimento e interesse do pesquisador. Uma hipótese é suposição provisória de algo verossímil, porém não verificado, ponto de partida de uma investigação (<http://pt.wikipedia.org/wiki/Hipótese>). A aceitação ou rejeição desta, nesse texto, se dará através de experimentos (parte objetiva) e conhecimento prévio (parte subjetiva). A hipótese a ser testada, hipótese nula ( $H_0$ ), é considerada rejeitada até que hajam evidências do contrário. A quantidade de evidência mínima considerada suficiente para a rejeição da hipótese nula pode ser determinada de diversas formas. Neste trabalho ela dependerá da relação entre as perdas incorridas nos erros de decisão.

No universo de dados atual, utilizam-se diversas ferramentas para a inferência pontual e intervalar. Os testes de hipóteses são ferramentas fundamentais e a literatura estatística é vasta neste assunto. Um teste de hipótese é uma decisão probabilística que se baseia na evidência apresentada; é uma inferência sobre um estado da natureza. O teste escolhido é considerado ótimo. Embora ótimo, necessita de controle de erros - falso positivo e falso negativo-. É comum que o um nível de significância ou probabilidade do erro do tipo I (falso positivo) seja adotado inicialmente. Por probabilidade do erro tipo I (II) entendemos a probabilidade de rejeitar (não rejeitar) a hipótese nula (alternativa) dado que ela é verdadeira (falsa). Porém, os níveis de significância canônicos (usuais) do teste (0,01; 0,05; 0,10) são fixados sem levar em conta o tamanho amostral nem o problema da aplicação em foco.

Diversos procedimentos de teste ou regras de decisão são utilizados na literatura. No presente trabalho, consideramos que a probabilidade dos Erros são os elementos fundamentais para a escolha do melhor teste: a combinação linear da probabilidade dos erros tipo I e tipo II é minimizada. Dessa forma, o nível de significância é função do tamanho amostral. Com este procedimento, aumentar o tamanho da amostra implica que as probabilidades dos dois tipos de erro estão diminuindo. Lembremos que na maioria das vezes, ao fixar-se um único nível de significância, independente do tamanho da amostra, apenas a probabilidade do erro do tipo II decresce.

As motivações e idéias apresentadas tiveram origem no trabalho do Prof. Carlos A. B. Pereira em sua tese de livre-docência [Pereira \(1985\)](#).

### 1.1 Considerações Preliminares

Por simplicidade, no lugar de probabilidade de erros usamos neste texto *Erros*; no lugar de *Não rejeição*, *Aceitação*; e *Método usual* se refere ao método clássico utilizado quando se fixa o nível de significância em 0,05 e calcula-se o erro tipo II mínimo dado este valor de  $\alpha$ , conforme apresentado em [Casella e Berger \(2001\)](#) e [Shein-Chung Chow e Wang \(2008\)](#).

No contexto da estatística Clássica, os testes de hipóteses são construídos através da razão de verossimilhanças maximizada nos dois subconjuntos das hipóteses. Conforme [Casella e Berger \(2001\)](#), pág. 375, o teste de razão de verossimilhanças para testar  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  versus  $H_1 : \theta \in \Theta_1$  é

dado por

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta|x)}{\sup_{\Theta} L(\theta|x)}$$

sendo  $L(\theta|X)$  a função de verossimilhança de uma a.a.  $x = (x_1, \dots, x_n)|\theta$  de tamanho  $n$ . O teste de razão de verossimilhanças (TRV) rejeita  $H_0$  se  $\lambda(x) \leq c$ , onde  $c \in [0, 1]$  e  $\theta$  é o parâmetro de interesse. No caso de  $X|\theta$  ser uma v.a. discreta, o numerador de  $\lambda(x)$  é a probabilidade máxima de se observar esta a.a.  $x$  sob os parâmetros  $\theta$  do subespaço de  $\Theta_0$ ; o denominador representa a probabilidade máxima de se observar esta a.a. sob todos os parâmetros do espaço paramétrico. É sabido que o  $\theta$  que maximiza a função de verossimilhança é dado pelo EMV (estimador de máxima verossimilhança) no subespaço em questão. Neste trabalho,  $c$  é escolhido tal que dado um nível de significância único, o erro tipo II seja mínimo. No caso de hipóteses simples, este é o Teste de Neyman-pearson; para hipóteses compostas unilaterais temos os testes UMP (uniformemente mais poderosos) e para hipóteses precisas o teste não viesado.

No contexto Bayesiano, basicamente se testa hipóteses através da sua probabilidade à posteriori e se escolhe, segundo algum critério, aquela que obtiver maior probabilidade à posteriori. A estatística mais utilizada para a rejeição ou aceitação da hipótese nula é o fator de Bayes: razão em favor de  $H_0$  entre razão à posteriori e razão à priori. Conforme [Carlos Daniel Paulino e Murteira \(2003\)](#), pág. 149, o Fator de Bayes ( $B(x)$ ) ou razão de vantagens pode ser escrito como

$$B(x) = \frac{E[L(\theta|X)|H_0]}{E[L(\theta|X)|H_1]} = \frac{p(x|H_0)}{p(x|H_1)}$$

sendo  $p(x|H_i)$  a distribuição preditiva à priori sob  $H_i$ , ou seja, a esperança à priori da verossimilhança tomada em relação à distribuição condicional em  $H_i, i = 0, 1$ . Para hipóteses simples, o fator de Bayes é dado pela razão de verossimilhanças, assim como no Teste de Neyman-Pearson. O teste de Bayes ótimo é aquele em que se tem risco esperado mínimo. O risco é considerado como a média da combinação linear dos erros com relação à priori. A decisão de rejeição de  $H_0$  depende das perdas incorridas pelos erros tipo I e II; quanto mais grave for o erro tipo I em relação ao erro tipo II, maior deverá ser a probabilidade à posteriori de  $H_0$  para que esta seja aceita.

Os procedimentos de teste aqui apresentados se baseiam no Lemma de Neyman-Pearson para hipóteses simples e compostas. Para hipóteses precisas utilizamos o *Full Bayesian Significance Test* (FBST), [Carlos A. B. Pereira \(1999\)](#). Uma vez que este mantém todo o conjunto de parâmetros original, trabalhando sem redução de dimensionalidade, conforme [C. A. B. Pereira \(2008\)](#) e [Stern \(2006\)](#). Diferente do que comumente ocorre na estatística clássica, em que utiliza-se a razão de máxima verossimilhança e na bayesiana, em que utiliza-se a média das verossimilhanças (Fator de Bayes) o que traz implicações conforme o Paradoxo de Lindley, [Lindley \(1957\)](#). No contexto da Clássico, a estatística mais utilizada para aceitação ou rejeição de uma hipótese de interesse é o p-valor, cujo valor sabidamente diminui à medida em que o tamanho amostral cresce. Ao ser fixado um nível de significância único, a partir de um determinado tamanho amostral o p-valor levará à Rejeição da Hipótese nula ( $H_0$ ). Talvez rejeitando mais hipóteses do que o esperado e inflando o erro de primeira espécie (falso positivo). Ou seja, aumentar a amostra, favorece a rejeição da hipótese nula. Minimizar a combinação linear dos erros Tipo I e II em função do tamanho amostral, faz com que não tenhamos estes problemas. Sendo assim, sugerimos que o nível de significância seja dependente do tamanho da amostra e que este possa ser utilizado para rejeição ou aceitação de  $H_0$ : o nível de significância neste trabalho é a probabilidade do erro tipo I, obtido pela minimização da combinação linear dos erros.

O teste proposto sugere que ao invés de um nível de significância ser fixado, o pesquisador deveria fixar a razão de perda em que quer incorrer. Definir um nível de significância através da relação de penalidade/gravidade entre os erros e do tamanho amostral. Estabelecida a razão de perdas  $k$ ,

o nível de significância a ser utilizado deve depender do tamanho da amostra coletada.

Os testes de hipóteses apresentados fazem referência à distribuição Beta-binomial, pois é a mais utilizada e adequada para a comparação de proporções, mas o trabalho pode ser estendido à outras distribuições. Os códigos em R para a minimização da combinação linear dos erros em função do tamanho amostral estão no Apêndice B. As tabelas geradas como exemplo estão no apêndice A.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar técnicas Bayesianas de teste de hipóteses, prezando pela minimização dos Erros e levando em conta o tamanho amostral, afim de incentivar o leitor a utilizar cotidianamente estes métodos para definição do nível de significância a ser adotado, ou apenas para parâmetro de referência na análise. Conscientizar o pesquisador sobre o tamanho dos erros em que sua análise incorre.

## 1.3 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são:

- Solucionar o problema que se tem de favorecer a rejeição ou aceitação da hipótese nula ao se aumentar o tamanho amostral. O nível de significância é função do tamanho amostral e o método minimiza a combinação linear dos Erros tipo I e tipo II, além de dispensar aproximações.
- Comparação de métodos. O mesmo teste de hipóteses é realizado pelo método usual (fixando o nível de significância em 0,05 e minimizando o erro tipo II) e pelo método proposto (minimização da combinação linear dos erros tipo I e II dado n).
- Desmistificação. Tornar a ferramenta de minimização de erros fácil de ser manuseada e assim, talvez mais frequente no cotidiano.
- Quebra de paradigma. Acabar com a questão, quando não subjetiva, de qual nível de significância utilizar e/ou justificar os costumeiros 0,05.

## 1.4 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, apresentaremos os conceitos fundamentais utilizados para a construção dos testes de hipóteses Bayesianos, o conceito de cálculo dos erros e a regra de decisão a ser considerada. No Capítulo 3 discutiremos os resultados obtidos e compararemos com os resultados que teríamos se adotássemos 0,05 de nível de significância: conclusões diferentes sobre os mesmos dados e tamanho de erros aumentado. Desta forma, analisaremos as vantagens e desvantagens do método proposto em cada caso. As tabelas de exemplos estudados estão no Apêndice A e os detalhes para implementação dos métodos utilizados estão disponíveis no Apêndice B.



## Capítulo 2

# Testes de hipóteses

Seja  $(\Omega, B, P)$  um espaço de probabilidade, tem-se  $\theta$  o estado da natureza do qual se deseja fazer inferência com função densidade de probabilidade (f.d.p.)  $f(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$  (espaço paramétrico) e uma partição deste espaço  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ , sendo  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$  e uma amostra aleatória advinda de experimento realizado que traz informação relevante sobre  $\theta$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$  (espaço amostral), da v.a.  $X_i|\theta$  condicionadamente independentes e identicamente distribuídos (c.i.i.d) com f.d.p  $f(x_i|\theta)$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Um procedimento de teste ou regra de decisão ( $\varphi$ ) para  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  versus  $H_1 : \theta \in \Theta_1$ , é uma função  $\varphi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , que para cada  $x \in \Omega$  especifica a decisão por  $H_0$  ( $\varphi(x) = 0$ ) ou rejeição de  $H_0$  ( $\varphi(x) = 1$ ).

Toda vez que se testa hipóteses, para cada procedimento de teste  $\varphi$ , há dois tipos de erros em que se incorre:

$$\begin{aligned} \text{Erro tipo I } (\alpha) &= \{\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}\} = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 1 | \theta \in \Theta_0\} \\ \text{Erro tipo II } (\beta) &= \{\text{Aceitar } H_0 | H_1 \text{ verdadeira}\} = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0 | \theta \in \Theta_1\} \end{aligned}$$

Seja  $RC = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 1\}$  (Região Crítica) a região de rejeição de  $H_0$  de um teste  $\varphi$  e  $RA = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\} = RC^c$  a região de aceitação de  $H_0$  e assim para  $\theta \in \Theta$ , temos a função poder do teste  $\varphi$ :

$$\pi(\theta) = P(X \in RC | \theta).$$

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} P(\text{Erro tipo I}) (\alpha) &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P(X \in RC | \theta \in \Theta_0) \\ P(\text{Erro tipo II}) (\beta) &= P(X \in RA | \theta \in \Theta_1) = 1 - P(X \in RC | \theta \in \Theta_1) \end{aligned}$$

A função poder  $\pi(\theta)$  contém toda a informação necessária para o cálculo dos erros. A função poder ideal seria 0 para todo  $\theta \in \Theta_0$  e 1 para  $\theta \in \Theta_1$ , porém são raros os casos em que se pode alcançar tais valores. Neste trabalho, a regra para encontrarmos o procedimento de teste a ser utilizado  $\varphi$  será através da minimização da combinação linear dos erros  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 2.1 Fundamentos

Nesta seção serão apresentados os embasamentos teóricos e motivações para desenvolvimento deste trabalho.

*Definição 1* (Verossimilhança). [Casella e Berger \(2001\)](#) Seja  $f(X|\theta)$  a f.d.p. conjunta de uma amostra da variável aleatória  $X$ . Após coletada a amostra de tamanho  $n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a função de verossimilhança (uma função de  $\theta$ ), é definida por  $L(\theta|x) = f(x|\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$ ,



para  $\theta \in \Theta$  e  $x \in \Omega$ .

*Definição 2* (Monotonicidade). Casella e Berger (2001) Seja uma variável aleatória  $T$  e uma família de f.d.p.  $\eta = \{g(t|\theta) : \theta \in \Theta\}$  com  $\theta \in R$ . Diz-se que esta família possui razão de verossimilhanças monótona (RVM) se, para todo  $\theta_0 < \theta_1$ ,  $g(t|\theta_0)/g(t|\theta_1)$  é monótona (crescente ou decrescente) em  $t$ , tal que  $g(t|\theta_0) > 0$  ou  $g(t|\theta_1) > 0$ .

Todas as distribuições aqui apresentadas possuem RVM. Toda a família exponencial possui RVM se  $w(\theta)$  é uma função não decrescente em  $g(t|\theta) = h(t)c(\theta)exp^{w(\theta)t}$ .

*Definição 3* (Teorema de Bayes). Seja o espaço amostral  $\Omega = \cup_{i=1}^n \Omega_i$  e  $\Omega_i$  suas partições. Seja  $B$  qualquer conjunto contido em  $\Omega$ , então temos que:

$$P(\Omega_i|B) = \frac{P(B|\Omega_i)P(\Omega_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|\Omega_j)P(\Omega_j)} .$$

Do ponto de vista Bayesiano, o Teorema de Bayes é utilizado para atualizar a informação conhecida à priori sobre  $\theta$  com f.d.p.  $\xi(\theta)$  utilizando a contribuição amostral  $(x|\theta)$ , com f.d.p.  $f(x|\theta)$  e gerando assim, uma distribuição a posteriori para  $\theta|x$  com f.d.p.  $f(\theta|x)$ . Desta forma, temos:

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\xi(\theta)}{\int f(x|\theta)\xi(\theta)d\theta} \propto f(x|\theta)\xi(\theta),$$

para  $\theta \in \Theta$  e  $x \in \Omega$ .

Neste trabalho, utilizaremos prioris conjugadas. Mais detalhes sobre estas distribuições à priori podem ser vistas em Carlos Daniel Paulino e Murteira (2003).

### 2.1.1 Lemma de Neyman-Pearson

O Lemma de Neyman-Pearson é utilizado para hipóteses simples e considera que o teste ótimo a ser buscado deve ser aquele que minimiza a combinação linear entre os erros tipo I e II. Seja o teste de hipótese  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1$ , em que a f.d.p. dado  $\theta = \theta_i$  é dada por  $f_i(x)$ ,  $i=0,1$  e seja RC a Região crítica do teste, conforme Casella e Berger (2001), o  $\varphi(x)$  que minimiza a combinação linear dos erros tipo I ( $\alpha$ ) e tipo II ( $\beta$ ) é dado por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1(x) < k f_0(x) \\ 1, & \text{se } f_1(x) > k f_0(x) \end{cases}$$

Para  $k \geq 0$ .

$\Rightarrow$ (suficiência) Qualquer teste que satisfaz o proposto acima é um teste uniformemente mais poderoso (UMP) de nível de significância  $\alpha$ .

$\Rightarrow$ (Necessidade) Se existe um teste que satisfaz o proposto acima com  $k > 0$ , então todo teste UMP de nível  $\alpha$  tem tamanho  $\alpha$ , exceto para um conjunto  $A$  tal que  $P(x \in A|\theta_0) = P(x \in A|\theta_1) = 0$ .

### 2.1.2 Teorema

O teorema aqui apresentado propõe uma pequena alteração ao lemma de Neyman-Pearson, como em Pereira (1985) e Degroot (1989). Seja o teste de hipótese  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1$ , em que a f.d.p. dado  $\theta = \theta_i$  é dada por  $f_i(x)$ ,  $i=0,1$  e seja RC a Região crítica do teste, com  $a$  e  $b$  constantes positivas, o  $\varphi(x)$  que minimiza a combinação linear dos erros tipo I ( $\alpha$ ) e tipo II ( $\beta$ ) é dado por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } af_0(x) > bf_1(x) \\ 1, & \text{se } af_0(x) < bf_1(x) \end{cases} \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{f_0(x)}{f_1(x)} > \frac{b}{a} \\ 1, & \text{se } \frac{f_0(x)}{f_1(x)} < \frac{b}{a} \end{cases}$$

*Prova.* Sejam  $a$  e  $b$  constantes positivas, então temos a seguinte combinação linear entre os erros:  $a\alpha + b\beta$  e queremos achar um procedimento de teste ( $\varphi$ ) que minimize essa combinação linear entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Seja  $RC$  a região crítica do teste e  $RC^c$  a região de aceitação de  $H_0$ , temos

$$\begin{aligned} a\alpha(\varphi) + b\beta(\varphi) &= aP(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdade}) + bP(\text{Aceitar } H_0 | H_1 \text{ verdade}) \\ &= a \sum_{x \in RC} f_0(x) + b \sum_{x \in RC^c} f_1(x) \\ &= a \sum_{x \in RC} f_0(x) + b \left[ 1 - \sum_{x \in RC} f_1(x) \right] \\ &= b + \sum_{x \in RC} [af_0(x) - bf_1(x)] \end{aligned}$$

Para minimizar esta equação é preciso minimizar o segundo termo. A soma será mínima para todos os pontos de  $x$  onde  $af_0(x) - bf_1(x) < 0$  e assim,  $af_0(x) < bf_1(x)$ . Desta forma, temos o seguinte procedimento de teste  $\varphi(x)$  em que se a Razão das Verossimilhanças,  $R_{01}(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} < \frac{b}{a}$  podemos dizer que  $H_1$  é preferível e  $H_0$  deve ser rejeitado ao nível de significância  $\alpha(\varphi)$ .

### 2.1.3 Perspectiva Bayesiana

Os testes de hipóteses no contexto Bayesiano são um caso particular da teoria da decisão, quando se tem apenas duas ações possíveis a serem tomadas: aceitar  $H_0$  ou rejeitar  $H_0$ . Os elementos necessários são os mesmos citados acima: o espaço paramétrico ( $\Theta$ ) representando o estado da natureza, com duas partições:  $\Theta_0$  subspaço de  $H_0$  e  $\Theta_1$  o subspaço de  $H_1$ ; espaço amostral ( $\Omega$ ) representando os resultados possíveis em um experimento aleatório sobre a variável observada  $X$ ; um espaço de ações a serem realizadas dado que uma decisão foi tomada ( $A$ ) = { aceitar  $H_0$ , rejeitar  $H_0$ }; e, para cada ação associa-se uma função de perda  $L(A, \theta)$  para os erros tipo I e tipo II.

O Teste de Bayes é o melhor procedimento de teste ou regra de decisão ( $\varphi$ ) considerado que minimiza a perda esperada ( $r(\varphi)$ ). A qual pode ser calculada:  $r(\varphi) = \xi_0 E(\text{perda} | H_0) + \xi_1 E(\text{perda} | H_1)$ , onde  $\xi_0 + \xi_1 = 1$  são as probabilidades à priori de  $H_0$  e  $H_1$  serem verdadeiras, respectivamente. A tabela de perda pode ser construída de diversas formas, inclusive pode ser uma função. Neste trabalho apresentaremos a tabela de perda mais simples e comumente utilizada.

Seja a tabela de perda abaixo:

	Decisão por $H_0(D_0)$	Decisão por $H_1(D_1)$
$\theta_0 : H_0$ verdade	0	$l_0$
$\theta_1 : H_1$ verdade	$l_1$	0

Onde

$$\begin{aligned} E(\text{perda} | H_0) &= 0P(D_0 | \theta_0) + l_0P(D_1 | \theta_0) = l_0\alpha(\varphi) \\ E(\text{perda} | H_1) &= l_1P(D_0 | \theta_1) + 0P(D_1 | \theta_1) = l_1\beta(\varphi) \end{aligned}$$

Logo, a perda esperada é dada por  $r(\varphi) = \xi_0 l_0 \alpha(\varphi) + \xi_1 l_1 \beta(\varphi)$ . Utilizando o Teorema 2.1.2

consideramos  $a = \xi_0 l_0$  e  $b = \xi_1 l_1$  e temos o teste  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi_0 l_0 f_0(x) > \xi_1 l_1 f_1(x) \\ 1, & \text{se } \xi_0 l_0 f_0(x) < \xi_1 l_1 f_1(x) \end{cases}$$

Do qual resulta a regra de decisão que será utilizada no decorrer deste trabalho

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 1 &\Leftrightarrow l_0 f(\theta \in \Theta_0|x) < l_1 f(\theta \in \Theta_1|x) \\ &\Leftrightarrow l_0(1 - f(\theta \in \Theta_1|x)) < l_1 f(\theta \in \Theta_1|x) \\ &\Leftrightarrow f(\theta \in \Theta_1|x) > \frac{l_0}{l_0 + l_1} = k. \end{aligned}$$

Logo a Região Crítica do teste será  $RC = \{x \in \Omega : f(\theta \in \Theta_1|x) > k\}$ . E o nível de significância  $(\alpha) = \sum_{x \in RC} f(x|\theta \in \Theta_0)$ , o erro tipo II  $(\beta) = 1 - \sum_{x \in RC} f(x|\theta \in \Theta_1)$  e a função poder  $\pi(\theta) = f(X \in RC|\theta \in \Theta)$ .

## 2.2 Teste de hipóteses para proporção

*Distribuição de Bernoulli.* Seja  $X$  uma v.a. em um espaço de probabilidade  $(\Omega, B, P)$  e um evento aleatório  $X \in A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$  e  $P(X \in A)$  é a distribuição de probabilidade de  $X$ , mais detalhes em James (2011). Diz-se que uma v.a. tem distribuição de Bernoulli( $q$ ),  $q \in [0, 1]$ , se  $X$  possui apenas dois valores no seu espaço amostral  $\Omega = \{0, 1\}$ , em que  $P(X = 1) = q$  e  $P(X = 0) = 1 - q$ . Logo, a f.d.p. atribuída a  $X$  pode ser escrita como

$$g(X|q) = q^x(1 - q)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Seja  $x = (x_1, \dots, x_n)$  uma a.a. de tamanho  $n$  da v.a.  $X \sim \text{Bernoulli}(q)$ , com  $q$  desconhecido,  $0 \leq q \leq 1$ , com  $X_i|(Q = q)$  c.i.id,  $i = 1, \dots, n$ ; se como distribuição à priori para  $Q$  temos uma  $\text{Beta}(a, b)$ , com  $a > 0$  e  $b > 0$ , então a f.d.p. à posteriori de  $Q$  é dada por

$$f(Q|a, b) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1}(1 - q)^{b-1}, \quad q \in (0, 1), a > 0, b > 0.$$

Sendo  $\Gamma$  a função Gama. Pode-se verificar que a distribuição  $\text{Beta}(1, 1)$  é similar à  $\text{Uniforme}(0, 1)$ .

Logo, a distribuição à posteriori para  $Q|x \sim \text{Beta}\left(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i\right)$ .

### 2.2.1 Hipóteses Simples

Queremos estimar a proporção de ocorrências de um evento  $A$  na população de interesse. Neste caso, temos apenas dois valores possíveis para  $\theta$  no espaço paramétrico  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ .

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

Em que  $\theta_0 \in \Theta_0$  e  $\theta_1 \in \Theta_1$  como seu único elemento. Queremos criar um procedimento de teste ( $\varphi$ ) ótimo para decidir por  $\theta = \theta_0$  ou  $\theta = \theta_1$ , com  $\theta_0 < \theta_1$  e  $\xi_0, \xi_1$  as distribuições à priori para  $H_0$  e  $H_1$ , respectivamente ( $\xi_0 + \xi_1 = 1$ ). Conforme o teste de Bayes apresentado na seção 2.1.3, podemos escrever:

$$\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow l_0 P(\theta = \theta_0|x) < l_1 P(\theta = \theta_1|x) \Leftrightarrow P(\theta = \theta_1|x) > \frac{l_0}{l_0 + l_1} = k.$$

Seja uma amostra aleatória (a.a.)  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , tal que  $X_i|\theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ , com  $X_i$  c.i.id,  $i=1, \dots, n$ , temos que

$$P(\theta = \theta_1|x) = \frac{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \xi_1}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \xi_1 + \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \xi_0} = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_0 \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n \left(\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

Logo, o teste de Bayes  $\varphi(x)$  é dado por

$$\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_0 \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n \left(\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}} > \frac{l_0}{l_0 + l_1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log \left[ \frac{\xi_1 l_1 (1-\theta_1)^n}{\xi_0 l_0 (1-\theta_0)^n} \right]}{\log \left[ \frac{\theta_0 (1-\theta_1)}{\theta_1 (1-\theta_0)} \right]}$$

Desta forma precisamos encontrar  $\alpha(\varphi(x))$  e  $\beta(\varphi(x))$  tal que  $a\alpha + b\beta$  sejam mínimos. Seja  $\sum_{i=1}^n x_i|\theta \sim \text{Binomial}(n, \theta)$ , temos

$$\alpha(\varphi(x)) = P \left( \text{Bin}(n, \theta_0) > \frac{\log \left[ \frac{\xi_1 l_1 (1-\theta_1)^n}{\xi_0 l_0 (1-\theta_0)^n} \right]}{\log \left[ \frac{\theta_0 (1-\theta_1)}{\theta_1 (1-\theta_0)} \right]} \mid \theta \right) \text{ e } \beta(\varphi(x)) = P \left( \text{Bin}(n, \theta_1) < \frac{\log \left[ \frac{\xi_1 l_1 (1-\theta_1)^n}{\xi_0 l_0 (1-\theta_0)^n} \right]}{\log \left[ \frac{\theta_0 (1-\theta_1)}{\theta_1 (1-\theta_0)} \right]} \mid \theta \right)$$

Assim, dado o tamanho amostral  $n$  e a distribuição das hipóteses à priori, podemos encontrar  $\alpha(\varphi)$  e  $\beta(\varphi)$  que minimizam a combinação linear dos erros com relação a razão de perda  $k$ . Conforme pode ser visto na Figura 2.1 e Tabelas A.1, A.2, A.3, para uma diferença de 0,02 entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$  e diferença de 0,10 nas Tabelas A.4, A.5, A.6, para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,66$  e  $k = 0,80$ .

### 2.2.2 Hipóteses Compostas para proporções em relação à referência

Queremos fazer inferência sobre a proporção de sucessos  $q$  de uma população em relação à uma referência. Para isso, precisamos achar a distribuição à posteriori de  $\theta = q$  dado a amostra aleatória obtida.

Uma a.a.  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i = \{0, 1\}$  da população de interesse é coletada, tal que  $X_i|\theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ , com  $X_i$  c.i.id dado  $\theta$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Consideramos à priori para  $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$  e temos a verossimilhança dada por

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)f(\theta) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}, \theta \in (0, 1), x_i = \{0, 1\}, i = 1, \dots, n.$$

Logo, a f.d.p. de  $\theta|x$  à posteriori é

$$\theta|x \sim \text{Beta} \left( 1 + \sum_{i=1}^n x_i, 1 + n - \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

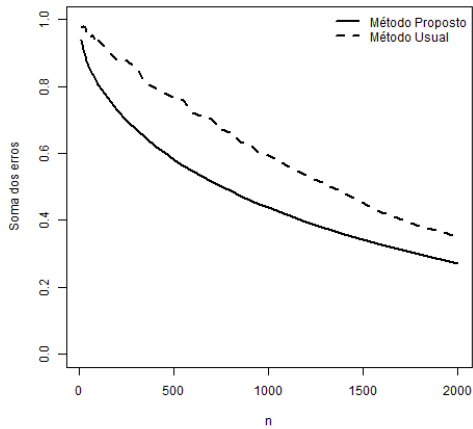
### Teste de hipótese unilateral para comparação de proporções com uma referência

No teste de hipóteses compostas aqui apresentado, ambas as hipóteses são unilaterais.

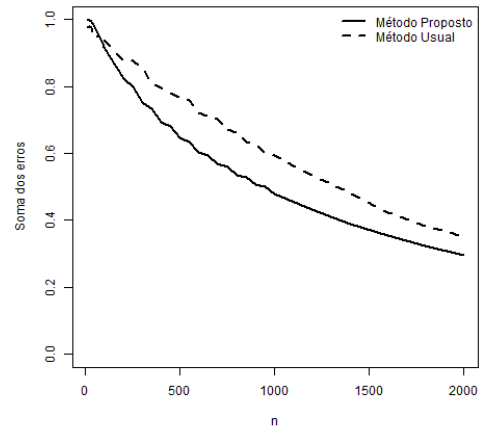
$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

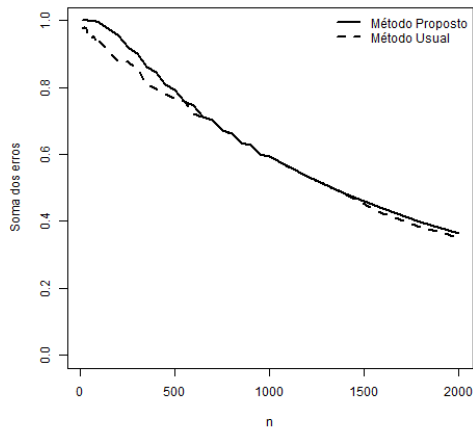
Seja  $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \leq \theta_0\}$  e  $\Theta_1 = \{\theta \in \Theta : \theta > \theta_0\}$ . Conforme o teste de Bayes apresentado na seção 2.1.3, podemos escrever:



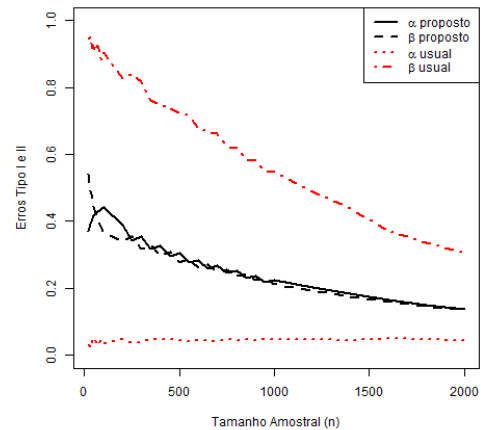
(a)  $k=0,50$



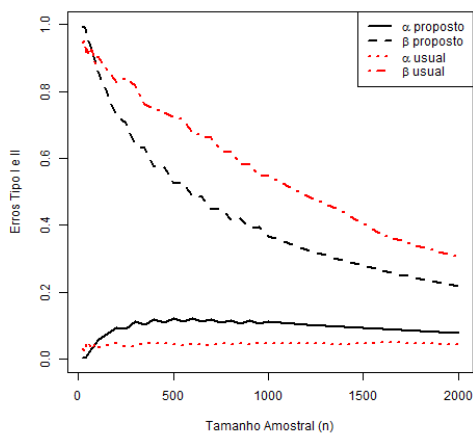
(b)  $k=0,66$



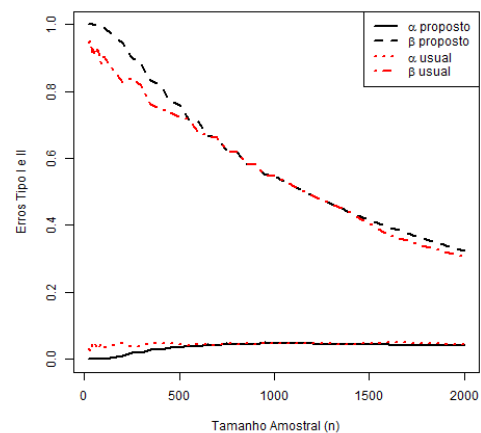
(c)  $k=0,80$



(d)  $k=0,50$



(e)  $k=0,66$



(f)  $k=0,80$

**Figura 2.1:** Erros dado  $n$  para hipóteses simples sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial com diferença de 0,02 entre as proporções ( $H_0 : \theta = 0,20$  versus  $H_1 : \theta = 0,22$ ). Gráficos para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,66$  e  $k = 0,80$ , respectivamente. Método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$

$$\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow f \left( \text{Beta} \left( 1 + \sum_{i=1}^n x_i, 1 + n - \sum_{i=1}^n x_i \right) > \theta_0 | x \right) > \frac{l_0}{l_0 + l_1}$$

Sendo assim, é possível achar o ponto crítico para  $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$  e calcular a função poder

$$\pi(\theta) = P(T(x) \in RC | \theta)$$

Tal que  $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta)$  e calculamos o erro tipo II ( $\beta$ ) de duas formas:  $\beta_{max} = \sup_{\theta \in \Theta_1} (1 - \pi(\theta))$  e  $\beta_{medio} = E[(1 - \pi(\theta)) | \theta \in \Theta_1]$ . Dado o tamanho amostral  $n$  e a distribuição das hipóteses à priori, podemos encontrar  $\alpha(\varphi)$  e  $\beta(\varphi)$  que minimizam a combinação linear dos erros com relação à razão de perda  $k$ . Os Erros máximos incorridos e a função poder podem ser vistos nas Figuras 2.2 e 2.3 e nas Tabelas A.7, A.8 e A.9, para  $H_0 : \theta \leq 0,70$  versus  $H_1 : \theta > 0,70$ , para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,80$  e  $k = 0,91$ .

### Teste de hipótese bilateral para comparação de proporções com uma referência

Queremos comparar a proporção de sucessos  $q = \theta$  de uma população de interesse com uma referência  $\theta_0$ . Seja  $t = \sum_{i=1}^n x_i$  o número de sucessos obtidos em  $n$  ensaios da v.a.  $X | \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ , em que  $t \in \Omega$  e  $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ . A hipótese a ser testada é

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

No teste de hipóteses bilaterais, temos uma hipótese precisa  $H_0$  e uma composta  $H_1$ , sendo  $\Theta_0 = \{\theta_0\}$  e  $\Theta_1 = \{\theta \in \Theta : \theta \neq \theta_0\}$  e assim temos um problema conhecido pois tem-se  $\Theta_1$  na mesma dimensão que o espaço paramétrico  $\Theta$  e quase de mesmo tamanho, exceto por um conjunto  $\Theta_0$  que não tem área nesta dimensão e, portanto  $H_0$  teria probabilidade zero. Sendo assim, para encontrar a Região Crítica do teste utilizaremos o (Full Bayesian Significance Test) FBST. Para mais detalhes sobre o FBST, veja Carlos A. B. Pereira (1999).

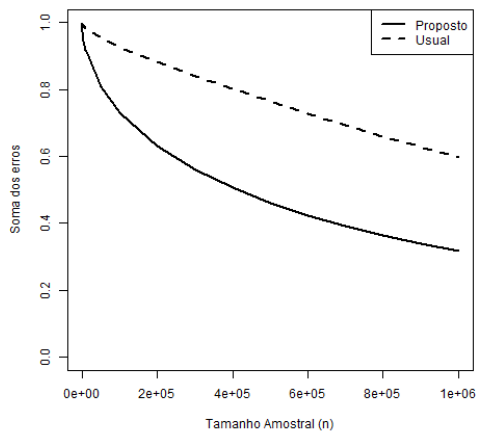
Neste trabalho, o FBST é utilizado para encontrar para cada  $t \in \Omega$ , a região tangente  $\tau$  à  $H_0$  e aplicar a Regra de decisão e então decidir por  $t$  pertencente ou não à Região Crítica. O conjunto tangente  $\tau$  é um subconjunto do espaço paramétrico  $\Theta$  onde a f.d.p. à posteriori  $f(\theta | t)$  é maior do que  $f(\theta_0 | t)$ , pois sob  $H_0 : \theta = \theta_0$ . Logo, a Região crítica é dada por

$$RC = \left\{ t \in \Omega : P(\theta \in \tau | t) > \frac{l_0}{l_0 + l_1} = k \right\}.$$

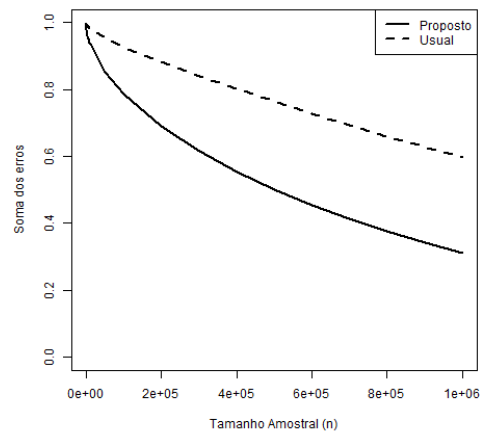
Conforme o teste de Bayes apresentado na seção 2.1.3, a função poder é dada por

$$\pi(\theta) = P(t \in RC | \theta)$$

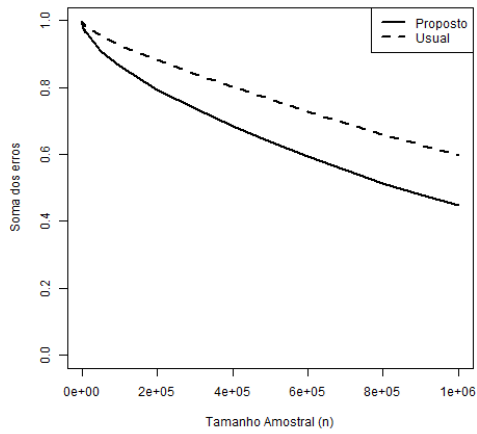
Tal que  $\alpha = \pi(\theta_0)$  e calculamos o erro tipo II ( $\beta$ ) de duas formas:  $\beta_{max} = \sup_{\theta \in \Theta_1} (1 - \pi(\theta))$  e  $\beta_{medio} = E[(1 - \pi(\theta)) | \theta \in \Theta_1]$ . Dado o tamanho amostral  $n$  e a distribuição das hipóteses à priori, podemos encontrar  $\alpha(\varphi)$  e  $\beta(\varphi)$  que minimizam a combinação linear dos erros com relação à razão de perda  $k$ . Os Erros máximos incorridos e a função poder podem ser vistos na Figura 2.4 e nas Tabelas A.10, A.11 e A.12, para  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ , para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,80$ ;  $k = 0,91$ ;  $k = 0,92$ ;  $k = 0,93$ ; e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$ .



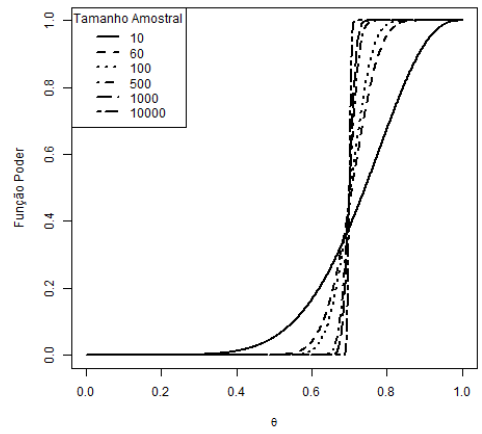
(a)  $k=0,50$



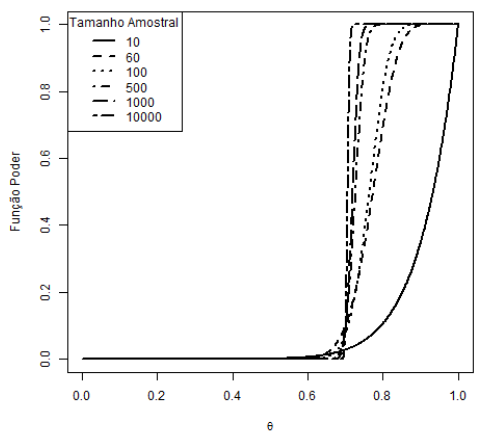
(b)  $k=0,80$



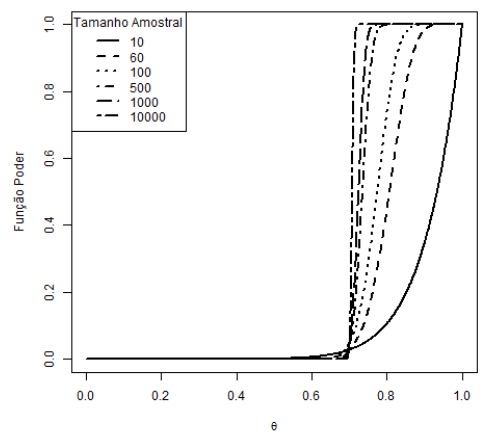
(c)  $k=0,91$



(d)  $k=0,50$

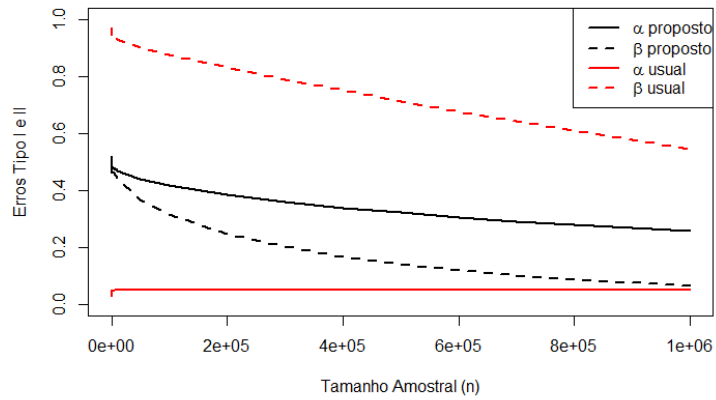
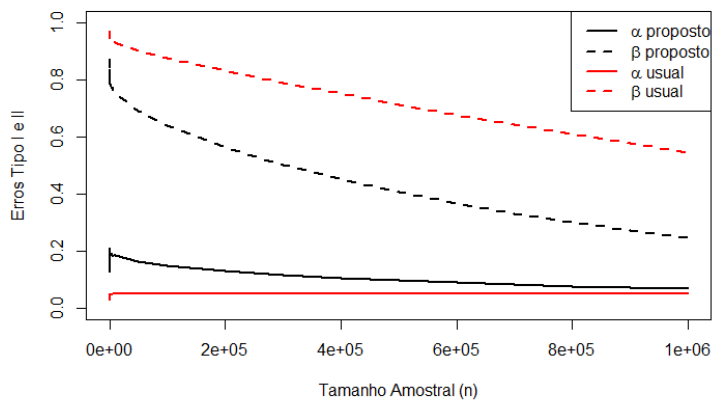
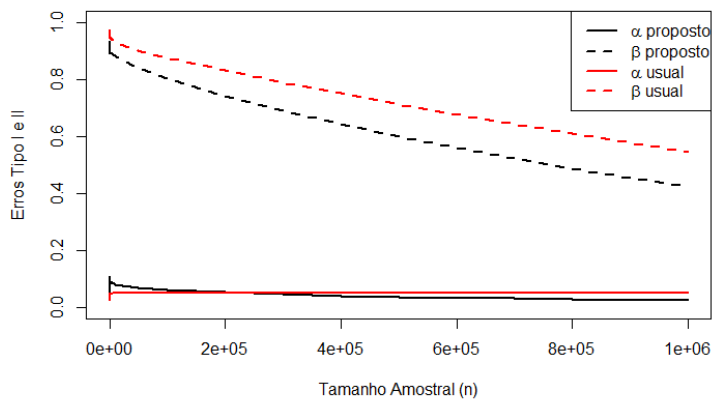


(e)  $k=0,91$



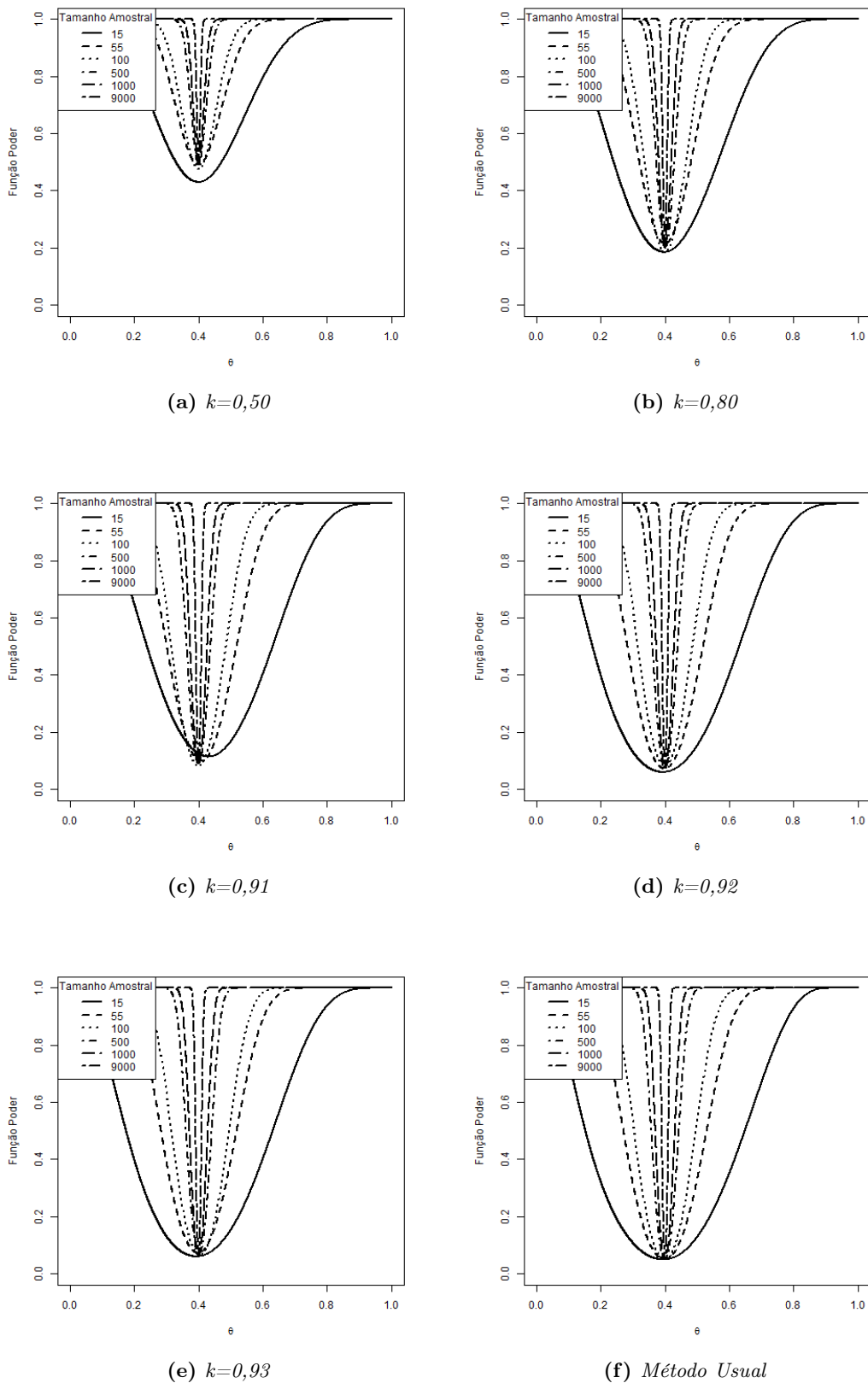
(f) Método Usual

**Figura 2.2:** Erros e função poder dado  $n$  para hipóteses unilaterais ( $H_0 : \theta \leq 0,70$  versus  $H_1 : \theta > 0,70$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Gráficos para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,80$  e  $k = 0,91$ , respectivamente. Método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$ .

(a)  $k=0,50$ (b)  $k=0,80$ (c)  $k=0,91$ 

**Figura 2.3:** Erros ( $\alpha$  e  $\beta$ ) dado  $n$  para hipóteses unilaterais ( $H_0 : \theta \leq 0,70$  versus  $H_1 : \theta > 0,70$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Gráficos para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,80$  e  $k = 0,91$  comparados com método usual:  $\alpha = 0,05$  e  $\beta$  mínimo.





**Figura 2.4:** Função poder dado  $n$  para hipóteses bilaterais ( $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial com relação a uma referência. Gráficos para  $k = \{0,50; 0,80; 0,91; 0,92; 0,93\}$  e o Método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$ .

### 2.2.3 Hipóteses Compostas para proporções de duas populações

Queremos fazer inferência sobre as proporções  $p$  e  $q$  de ocorrência de um evento  $A$  em duas populações,  $X$  e  $Y$ . Para isso, precisamos encontrar a distribuição à posteriori conjunta de  $P$  e  $Q$  dado as amostras coletadas nas duas populações.

Sejam duas amostras aleatórias de duas populações de interesse  $x = (x_1, \dots, x_{n_x})$  e  $y = (y_1, \dots, y_{n_y})$ ,  $x_i = \{0, 1\}$  e  $y_j = \{0, 1\}$ , o vetor de parâmetros  $\theta = (p, q)$ , tal que  $X_i|\theta \sim \text{Bernoulli}(p)$  e  $Y_j|\theta \sim \text{Bernoulli}(q)$ , com  $X_i, Y_j$  c.i.id dado  $\theta$ ,  $i = 1, \dots, n_x$ ,  $j = 1, \dots, n_y$ . Seja a distribuição a priori para  $P \sim \text{Beta}(1, 1)$  e  $Q \sim \text{Beta}(1, 1)$ . Logo, à posteriori temos

$$P|\sum_{i=1}^n x_i \sim \text{Beta}\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1, n_x - \sum_{i=1}^n x_i + 1\right), p \in (0, 1), \sum_{i=1}^n x_i \in \{0, \dots, n_x\}$$

$$Q|\sum_{j=1}^n y_j \sim \text{Beta}\left(\sum_{j=1}^n y_j + 1, n_y - \sum_{j=1}^n y_j + 1\right), q \in (0, 1), \sum_{j=1}^n y_j \in \{0, \dots, n_y\}$$

Como  $P|(x, y)$  e  $Q|(x, y)$  são c.i.id dado  $(x, y)$ , temos a f.d.p. conjunta à posteriori  $f(P, Q|x, y) = f(P|x)f(Q|y)$ .

Queremos testar se a probabilidade de sucessos de duas populações de interesse é a mesma. A hipótese a ser testada é

$$H_0 : p = q$$

$$H_1 : p \neq q$$

Neste caso, para encontrar a Região Crítica do teste utilizaremos o (Full Bayesian Significance Test) FBST. Para mais detalhes sobre o FBST, veja [Carlos A. B. Pereira \(1999\)](#).

Seja  $t_x$  o número de sucessos obtidos em  $n_x$  ensaios da v.a.  $X|p$ ,  $t_y$  o número de sucessos obtidos em  $n_y$  ensaios da v.a.  $Y|q$  e o conjunto tangente  $\tau$ , um subconjunto do espaço paramétrico  $\Theta$  onde a f.d.p. à posteriori  $f(p, q|t_x, t_y) > f(p|t_x, t_y)$ , pois sob  $H_0 : p = q = p$ . Uma vez que  $\Theta_0 \in \{(p, q) \in (0, 1) \times (0, 1) : p = q\}$  e  $\Theta_1 \in \{(p, q) \in (0, 1) \times (0, 1) : p \neq q\}$

Neste trabalho, o FBST é utilizado para encontrar para cada ponto  $(t_x, t_y) \in \Omega = \{0, 1, \dots, n_x\} \times \{0, 1, \dots, n_y\}$  a região tangente  $\tau$  à  $H_0$  e aplicar a Regra de decisão e então decidir por  $(t_x, t_y)$  pertencente ou não à Região Crítica. Logo, a Região crítica é dada por

$$RC = \left\{ (t_x, t_y) \in \Omega : P((p, q) \in \tau|x, y) > \frac{l_0}{l_0 + l_1} = k \right\}.$$

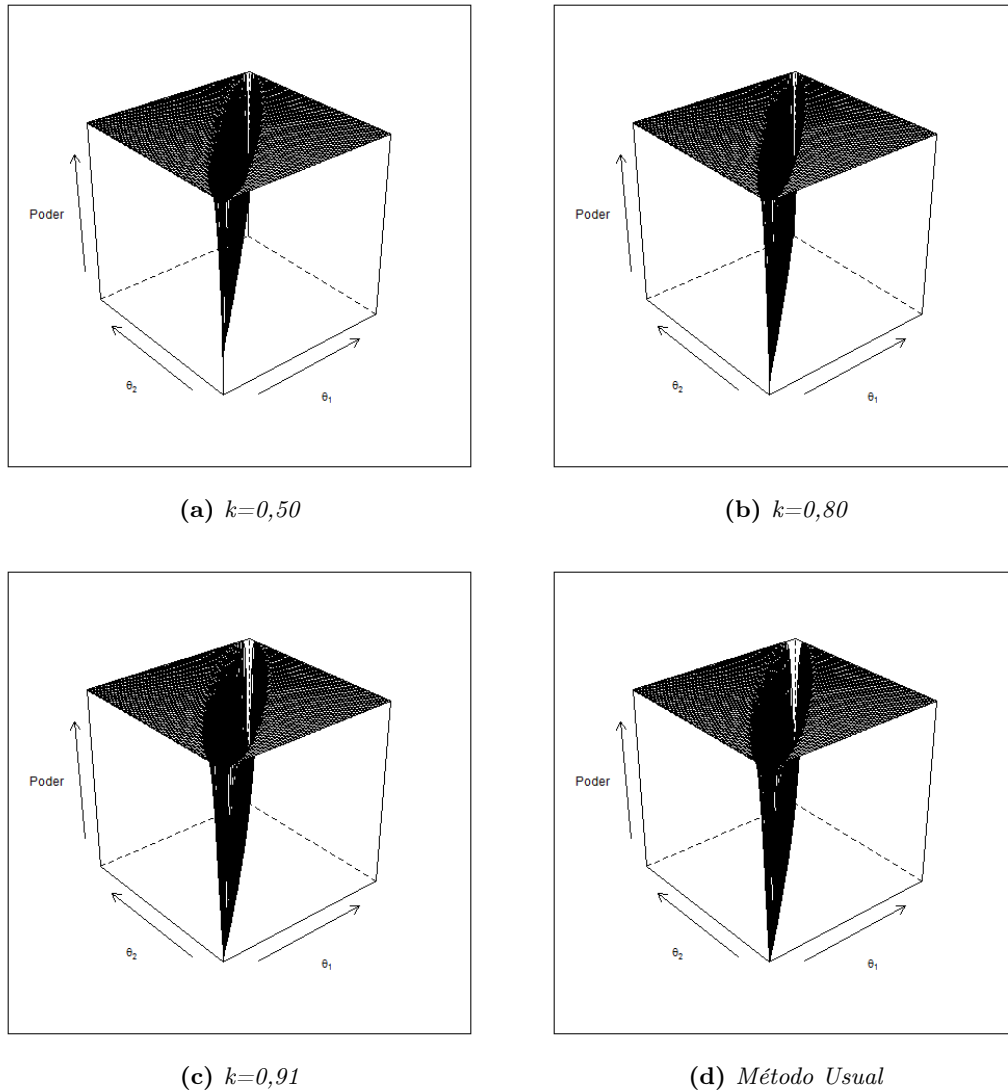
Sob  $H_0$ , conforme [Pereira e Polpo \(2013\)](#) a f.d.p. conjunta de  $p, q$  à posteriori é dada por

$$\begin{aligned} f(p|t_x, t_y) &= \frac{p^{t_x+t_y}(1-p)^{n_x+n_y-t_x-t_y}}{B(t_x+1, n_x-t_x+1)B(t_y+1, n_y-t_y+1)} \\ &= \binom{n_x}{t_x} \binom{n_y}{t_y} (n_x+1)(n_y+1)p^{t_x+t_y}(1-p)^{n_x+n_y-t_x-t_y}, \\ n_x, n_y \in N, t_x &= \{0, 1, \dots, n_x\}, t_y = \{0, 1, \dots, n_y\}, p \in [0, 1]. \end{aligned}$$

A região tangente será dada pelo  $\sup_p f(p|t_x, t_y)$ , em que  $\hat{p} = \frac{t_x+t_y}{n_x+n_y}$  é a moda à posteriori da f.d.p de  $p|(t_x, t_y)$ . Logo, o conjunto tangente  $\tau(t_x, t_y) = \{p, q \in (0, 1) : f(p, q|t_x, t_y) \geq f(\hat{p}|t_x, t_y)\}$ .

Conforme o teste de Bayes apresentado na seção 2.1.3, a função poder é dada por

$$\pi(\theta) = P(T(x, y) \in RC|(p, q))$$



**Figura 2.5:** Função Poder para hipóteses bilaterais ( $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$ ) sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Gráficos para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,80$  e  $k = 0,91$  utilizando o FBST para encontrar a região Crítica e gráfico pelo Método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização do  $\beta$ , para amostras de mesmo tamanho ( $n$ ).

Tal que  $\alpha = \pi(p, p)$  e calculamos o erro tipo II ( $\beta$ ) de duas formas:  $\beta_{max} = \sup_{p \neq q} (1 - \pi(p, q))$  e  $\beta_{medio} = E[(1 - \pi(p, q) | p \neq q)]$ . Dado o tamanho amostral  $n$  e a distribuição das hipóteses à priori, podemos encontrar  $\alpha(\varphi)$  e  $\beta(\varphi)$  que minimizam a combinação linear dos erros com relação à razão de perda  $k$ . A função poder e Região Crítica (parte superior do gráfico da função poder) podem ser vistas na Figura 2.5 e nas Tabelas A.13, A.14 e A.15, para  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com tamanhos amostrais iguais e A.16, A.17 e A.18 para  $n_y = 3 \times n_x$  para  $k = 0,50$ ;  $k = 0,80$ ;  $k = 0,91$  e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$ .

## Capítulo 3

# Conclusões

Este trabalho se baseou na idéia de [Pereira \(1985\)](#) de encontrar um nível de significância em função do tamanho amostral e assim, solucionar o problema que se tem ao testar hipóteses da forma usual, em que alterar o  $n$  influencia a probabilidade de rejeição ou aceitação da hipótese nula. Utilizamos a mesma base conceitual dos testes usuais, que partem do Lemma de Neyman-Pearson para encontrar testes de hipóteses ótimos e mais poderosos em que a minimização de erros é buscada. Nos testes propostos, a combinação linear dos Erros de decisão (falso positivo e falso negativo), aqui chamados de  $\alpha$  e  $\beta$ , é minimizada; não apenas para hipóteses simples, mas a idéia é estendida para hipóteses compostas e precisas, conforme trabalho inicial de [Pereira \(1985\)](#).

O teste proposto sugere que ao invés de um nível de significância ser fixado, o pesquisador deveria fixar a razão de perda em que quer incorrer. Por exemplo, se acredito que o erro tipo I é 4 vezes pior que cometer o erro tipo II, então a razão de perda utilizada deve ser  $k = \frac{4}{4+1} = 0,80$ . Estabelecida a razão de perdas, o nível de significância a ser utilizado deve depender do tamanho da amostra coletada. Desta forma, as tabelas no apêndice A contém estudos para diversos tamanhos amostrais  $n$  e razões de perda  $k$ ,  $k \in [0, 1]$  distintos, conforme tabela 3.1 de ponderação de Erros e razão de perdas.

Ao aumentarmos o tamanho amostral, a soma dos erros diminui em todas as situações, para os dois métodos apresentados; bem como é ratificado que ao fixarmos o nível de significância afim de priorizá-lo, com o aumento do tamanho amostral, apenas o erro tipo II decai; e a partir de certo  $n$ , a priorização do erro tipo I é falsa, pois temos o erro tipo II menor que o nível de significância. Estas conclusões já eram esperadas e de grande conhecimento de todos. Os gráficos e tabelas apresentados confirmam este fato. Dito isto, a discussão a seguir se concentrará em outros aspectos do estudo.

No teste de hipóteses simples podemos observar pelas Figuras 2.1a, 2.1b e 2.1c que através do método proposto a soma dos erros tipo I e II é menor que a dada pelo método usual e conforme o tamanho amostral aumenta, embora ambas somas decresçam, a do método proposto fica minimizada. Com o aumento da ponderação do erro tipo I para  $k = 0,80$  as curvas coincidem, pois

Erro tipo I ( $\alpha$ )	Erro tipo II ( $\beta$ )	Razão de perdas ( $K$ )
1	1	,50
2	1	,66
4	1	,80
10	1	,91
12	1	,92
14	1	,93

**Tabela 3.1:** Relação entre ponderação de erros e a razão de perda a ser utilizada na Regra de Decisão do teste de hipóteses.

desta forma o nível de significância está bem próximo de 0,05 e assim, os métodos são similares. Nas Figuras 2.1d, 2.1e e 2.1f é possível compreender a alteração dos erros de primeira e segunda espécie à medida em que aumentamos  $k$ . Pode-se observar pelas linhas vermelhas como o erro tipo II é inflado ao fixarmos o nível de significância. Os valores apresentados nas figuras e outros detalhes como a diferença entre os pontos críticos que compõem a Região Crítica e de Aceitação dos testes podem ser observados nas Tabelas A.1, A.2 e A.3 para hipóteses com diferença de 0,02; e nas Tabelas A.4, A.5 e A.6 para diferença de 0,10 entre as hipóteses testadas. Como esperado, observa-se que a grandeza dos erros é menor conforme maior a diferença entre os valores testados.

No teste de hipóteses unilaterais podemos observar pelos Gráficos 2.2a, 2.2b e 2.2c que a soma dos erros pelo método proposto é minimizada e mesmo com o nível de significância próximo de 0,05 ( $k = 0,91$ ) na Figura 2.2c, ela ainda é mínima. A função poder gerada é ótima, conforme Figura 2.2d; e para  $k = 0,91$  as funções poder do método proposto (Figura 2.2e) e do método usual (Figura 2.2f) são similares. As Figuras 2.3a, 2.3b e 2.3c mostram o comportamento dos erros tipo I e II. Na Figura 2.3c podemos perceber que embora os erros tipo I estejam próximos, o erro tipo II pelo método proposto é menor que pelo método usual. Os erros apresentados nas figuras são máximos, mas nem sempre se calcula o erro tipo II desta forma, como pode ser visto em Casella e Berger (2001), pág. 385, em que é somado um desvio padrão ao valor de referência na hipótese ( $\theta_0$ ). Desta forma, para verificarmos a grandeza dos erros incorridos, o valor máximo e a esperança do erro tipo I e II foi calculada, conforme Tabelas A.7, A.8 e A.9. Também podemos notar que embora a soma dos erros diminua com o aumento do tamanho amostral, os erros máximos tipo I e tipo II decrescem paulatinamente, porém sua esperança decai mais rápido.

No teste de hipóteses bilaterais com relação à um valor de referência podemos observar pela sequência de gráficos da Figura 2.1, que obtivemos a função poder ótima e conforme aumentamos a penalidade do erro tipo I, este decai e tem-se a função poder similar à do método usual. Neste caso, temos uma situação parecida à do teste unilateral em que percebemos que o nível de significância (máximo a ser incorrido - o mínimo da curva de poder-) parece não se alterar à medida que o tamanho amostral cresce, mas podemos observar pelas Tabelas A.10, A.11 e A.12 que este decai levemente. Aqui também foi calculada a esperança do erro tipo II. Pode-se perceber pelas tabelas citadas que à medida em que o erro tipo I é penalizado, o intervalo de pontos da Região Crítica aumenta; e para um nível de significância próximo de 0,05 a Região crítica dos dois métodos tem tamanho similar.

No teste de hipóteses bilaterais sobre a proporção de duas populações podemos perceber pela Figura 2.5 que a função poder é ótima e para  $k = 0,91$  é próxima à função poder pelo método usual. Pela parte superior dos gráficos é possível observar a região crítica dos testes e vemos que conforme  $k$  aumenta, a região crítica cresce. Nas Tabelas A.13, A.14 e A.15 temos os valores dos erros e a amplitude mínima, média e máxima da diferença entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$  na Região de aceitação. Assim, percebe-se que ao aumentar  $k$ , a região de aceitação aumenta; e ao aumentar o  $n$ , como esperado, ela decai. Nas Tabelas A.16, A.17 e A.18 temos o mesmo porém para tamanhos amostrais diferentes coletados das duas populações. Neste caso, temos uma amostra de tamanho  $n_x$  e a outra  $n_y = 3 \times n_x$  e percebe-se que isto altera os erros e a região de aceitação em relação ao primeiro caso de amostras de tamanhos iguais, que diminuem, pois temos  $n_y$  aumentado.

### 3.1 Considerações Finais

Os testes apresentados confirmam as suposições feitas inicialmente das relações conhecidas entre erros e tamanho amostral e se aproximam bastante do método usual quando tem-se o nível de significância de 0,05. A cultura instaurada atualmente de se escolher um nível de significância único e arbitrário para todos os testes estatísticos a serem realizados numa análise não parece muito sensata, principalmente sabendo dos problemas que isto pode acarretar, como já dito aqui. Definir

um nível de significância através da relação de penalidade/gravidade entre os erros e do tamanho amostral parece mais lógico/científico e levará à resultados parecidos em situações em que o nível de significância deveria estar próximo de 0,05.

### 3.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

- Estender os estudos para outros testes de hipóteses, por exemplo: o caso multinomial.
- Estudar o método para outras distribuições, por exemplo: teste de médias utilizando distribuições Normal e t-Student.
- Considerar outros tipos de priori.
- Utilizar funções de perda mais complexas e realistas.
- Criar um pacote no R para que mais pessoas possam utilizar o método.
- Incluir no contexto do problema apresentado e reflexões a significância do ponto de vista do pesquisador. Por exemplo: Uma diferença de 7% em duas populações é relevante para o problema que se apresenta?



Apêndice A

Exemplos



$n$	Método Proposto				Método Usual			
	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico
10	,322	,617	,939	2				
20	,370	,542	,912	4	,032	,946	,978	7
30	,393	,499	,892	6	,026	,952	,977	10
40	,407	,469	,876	8	,043	,917	,960	12
50	,416	,445	,861	10	,031	,933	,964	15
60	,424	,425	,848	13	,043	,907	,950	17
70	,429	,408	,837	15	,03	,926	,956	20
80	,434	,392	,826	17	,039	,904	,943	22
90	,437	,379	,816	19	,047	,883	,930	24
100	,441	,366	,807	21	,034	,905	,940	27
200	,389	,340	,729	42	,049	,827	,876	49
300	,354	,316	,671	63	,038	,818	,856	72
400	,327	,296	,624	84	,048	,749	,796	93
500	,305	,279	,583	105	,043	,726	,769	115
1000	,225	,212	,437	210	,046	,548	,594	221
2000	,138	,134	,272	420	,045	,305	,350	430

**Tabela A.1:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses simples  $H_0 : \theta = 0,20$  versus  $H_1 : \theta = 0,22$  sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

$n$	Método Proposto				Método Usual			
	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico
10	,00008	,999	1,00	8				
20	,00259	,995	,997	10	,032	,946	,978	7
30	,00311	,993	,996	12	,026	,952	,977	10
40	,00792	,981	,989	14	,043	,917	,960	12
50	,01444	,965	,980	16	,031	,933	,964	15
60	,02207	,946	,969	18	,043	,907	,950	17
70	,03031	,926	,956	20	,030	,926	,956	20
80	,03882	,904	,943	23	,039	,904	,943	22
90	,04738	,883	,930	25	,047	,883	,930	24
100	,05583	,861	,917	27	,034	,905	,940	27
200	,0944	,728	,823	48	,049	,827	,876	49
300	,11115	,640	,752	69	,038	,818	,856	72
400	,11842	,576	,695	90	,048	,749	,796	93
500	,12098	,526	,646	111	,043	,726	,769	115
1000	,11092	,368	,479	216	,046	,548	,594	221
2000	,07781	,217	,295	426	,045	,305	,350	430

**Tabela A.2:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses simples  $H_0 : \theta = 0,20$  versus  $H_1 : \theta = 0,22$  sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para  $k = 0,66$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto				Método Usual			
	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico
10	,00000000	1,000	1,000	14				
20	,00000001	1,000	1,000	16	,032	,946	,978	7
30	,00000184	,999	1,000	18	,026	,952	,977	10
40	,00002169	,999	1,000	20	,043	,917	,960	12
50	,00010217	,999	1,000	22	,031	,933	,964	15
60	,00010495	,999	1,000	24	,043	,907	,950	17
70	,00026483	,999	,999	26	,030	,926	,956	20
80	,00054317	,997	,998	28	,039	,904	,943	22
90	,00096604	,995	,996	30	,047	,883	,930	24
100	,00155044	,993	,994	32	,034	,905	,940	27
200	,01028455	,945	,955	53	,049	,827	,876	49
300	,02019758	,881	,901	74	,038	,818	,856	72
400	,02830028	,818	,846	95	,048	,749	,796	93
500	,03436744	,760	,795	116	,043	,726	,769	115
1000	,04592981	,548	,594	221	,046	,548	,594	221
2000	,04008812	,325	,365	431	,045	,305	,350	430

**Tabela A.3:** Tabela de erros dado n para hipóteses simples  $H_0 : \theta = 0, 20$  versus  $H_1 : \theta = 0, 22$  sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para  $k = 0, 80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0, 05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto				Método Usual			
	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico
10	,32220047	,3827828	,7049833	2				
20	,37035174	,2375078	,6078595	5	,032	,77227180	,804	7
30	,23920938	,2813767	,5205861	7	,026	,73037039	,756	10
40	,26822289	,1959254	,4641483	10	,043	,57718092	,620	12
50	,18605699	,2228658	,4089228	12	,031	,56917844	,600	15
60	,20654182	,1621082	,3686500	15	,043	,45143628	,494	17
70	,14808267	,1814200	,3295027	17	,030	,45502037	,485	20
80	,16341475	,1352233	,2986381	20	,039	,36266213	,401	22
90	,11950793	,1499539	,2694619	22	,047	,28627626	,334	24
100	,13135322	,1135702	,2449234	25	,034	,29636616	,331	27
200	,04935333	,0505918	,0999451	50	,049	,05059179	,100	49
300	,02019758	,0238850	,0440826	74	,038	,01248786	,050	72
400	,00859507	,0116224	,0202174	99	,048	,00157165	,049	93
500	,00510823	,0042978	,0094060	124	,043	,00028542	,044	115
1000	,00012493	,0001142	,0002391	248	,046	,000000010	,046	221
2000	,00000010	,0000001	,0000002	495	,045	,000000000	,045	430

**Tabela A.4:** Tabela de erros dado n para hipóteses simples  $H_0 : \theta = 0, 20$  versus  $H_1 : \theta = 0, 30$  sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para  $k = 0, 50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0, 05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

$n$	Método Proposto				Método Usual			
	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico
10	,12087388	,6496107	,7704846	4	,032	,77227180	,804	7
20	,08669251	,6080098	,6947023	6	,026	,73037039	,756	10
30	,12865075	,4315179	,5601687	9	,043	,57718092	,620	12
40	,08750524	,4406071	,5281123	11	,031	,56917844	,600	15
50	,11058651	,3278832	,4384697	14	,043	,45143628	,494	17
60	,07723863	,3422327	,4194714	16	,030	,45502037	,485	20
70	,09253896	,2606147	,3531537	19	,039	,36266213	,401	22
80	,06602560	,2745281	,3405537	21	,047	,28627626	,334	24
90	,07702530	,2120194	,2890447	24	,034	,29636616	,331	27
100	,05583272	,2243992	,2802320	26	,049	,05059179	,100	49
200	,03449677	,0695453	,1040421	51	,038	,01248786	,050	72
300	,01439611	,0322448	,0466409	76	,048	,00157165	,049	93
400	,00619291	,0155321	,0217250	100	,043	,00028542	,044	115
500	,00271520	,0076508	,0103660	125	,046	,00000001	,046	221
1000	,00006883	,0001985	,0002674	249	,045	,00000000	,045	430
2000	,00000007	,0000001	,0000002	497				

**Tabela A.5:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses simples  $H_0 : \theta = 0,20$  versus  $H_1 : \theta = 0,30$  sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para  $k = 0,66$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

$n$	Método Proposto				Método Usual			
	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico	$\alpha$	$\beta$	Erros	P.Crítico
10	,00636938	,9526510	,9590204	5	,032	,77227180	,804	7
20	,03214266	,7722718	,8044145	8	,026	,73037039	,756	10
30	,02561626	,7303704	,7559866	10	,043	,57718092	,620	12
40	,04324162	,5771809	,6204225	12	,031	,56917844	,600	15
50	,06072208	,4468316	,5075537	15	,043	,45143628	,494	17
60	,04269730	,4514363	,4941336	17	,030	,45502037	,485	20
70	,05453537	,3535048	,4080402	20	,039	,36266213	,401	22
80	,03881935	,3626621	,4014815	22	,047	,28627626	,334	24
90	,04737597	,2862763	,3336522	25	,034	,29636616	,331	27
100	,03415163	,2963662	,3305178	27	,049	,05059179	,100	49
200	,01574751	,1227748	,1385224	52	,038	,01248786	,050	72
300	,01010226	,0428516	,0529539	77	,048	,00157165	,049	93
400	,00440912	,0205091	,0249182	102	,043	,00028542	,044	115
500	,00195096	,0100593	,0120102	126	,046	,00000001	,046	221
1000	,00005070	,0002598	,0003105	250	,045	,00000000	,045	430
2000	,00000004	,0000002	,0000003	498				

**Tabela A.6:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses simples  $H_0 : \theta = 0,20$  versus  $H_1 : \theta = 0,30$  sobre a probabilidade de sucesso de uma Binomial. Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto						Método Usual				
	$\alpha$ Max	$\beta$ Max	$\alpha$ Média	$\beta$ Média	Erros	P.Critico	$\alpha$	$\beta$ Max	$\beta$ Média	Erros	P.Critico
10	,3820	,615	,05791	,22527	,283	7	,0282	,971	,70161	,730	9
20	,4152	,581	,04633	,15501	,201	14	,0355	,964	,52792	,563	17
30	,4301	,565	,03978	,12439	,164	21	,0302	,969	,46479	,495	25
40	,4390	,556	,03546	,10643	,142	28	,0238	,976	,43213	,456	33
50	,4450	,549	,03232	,09435	,127	35	,0402	,959	,34915	,389	40
60	,4494	,544	,02992	,08552	,115	42	,0295	,970	,34565	,375	48
70	,4528	,540	,02799	,07872	,107	49	,0413	,958	,29806	,339	55
80	,4556	,537	,02641	,07328	,100	56	,0302	,969	,30157	,332	63
90	,4578	,534	,02507	,06881	,094	63	,0390	,960	,26914	,308	70
100	,4597	,532	,02392	,06505	,089	70	,0479	,951	,24321	,291	77
200	,4697	,518	,01746	,04503	,062	140	,0359	,962	,18816	,224	151
300	,4737	,511	,01445	,03638	,051	210	,0429	,955	,14808	,191	223
400	,4759	,507	,01263	,03128	,044	280	,0440	,953	,12782	,172	295
500	,4773	,503	,01136	,02784	,039	350	,0426	,954	,11556	,158	367
1000	,4798	,493	,00817	,01939	,028	700	,0446	,951	,08110	,126	724
5000	,4762	,462	,00379	,00837	,012	3500	,0490	,939	,03530	,084	3553
10000	,4701	,443	,00273	,00580	,009	7000	,0495	,933	,02475	,074	7075
50000	,4401	,368	,00130	,00238	,004	35000	,0499	,904	,01071	,061	35168
100000	,4168	,315	,00096	,00158	,003	70000	,0498	,878	,0074	,057	70238

**Tabela A.7:** Tabela de erros dado n para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta \leq 0,70$  versus  $H_1 : \theta > 0,70$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto						Método Usual				
	$\alpha$ Max	$\beta$ Max	$\alpha$ Média	$\beta$ Média	Erros	P.Critico	$\alpha$	$\beta$ Max	$\beta$ Média	Erros	P.Critico
10	,1488	,850	,01727	,43317	,450	8	,0282	,971	,70161	,730	9
20	,2366	,760	,02163	,25594	,278	15	,0355	,964	,52792	,563	17
30	,1587	,838	,01064	,27123	,282	23	,0302	,969	,46479	,495	25
40	,1948	,801	,01186	,21381	,226	30	,0238	,976	,43213	,456	33
50	,2215	,774	,01246	,17859	,191	37	,0402	,959	,34915	,389	40
60	,1609	,835	,00759	,19720	,205	45	,0295	,970	,34565	,375	48
70	,1800	,815	,00808	,17295	,181	52	,0413	,958	,29806	,339	55
80	,1962	,798	,00841	,15463	,163	59	,0302	,969	,30157	,332	63
90	,2102	,784	,00865	,14028	,149	66	,0390	,960	,26914	,308	70
100	,1615	,833	,00589	,15485	,161	74	,0479	,951	,24321	,291	77
200	,1963	,795	,00531	,09954	,105	145	,0359	,962	,18816	,224	151
300	,2040	,785	,00456	,07968	,084	216	,0429	,955	,14808	,191	223
400	,2036	,784	,00395	,06918	,073	287	,0440	,953	,12782	,172	295
500	,1999	,786	,00346	,06258	,066	358	,0426	,954	,11556	,158	367
1000	,1889	,792	,00231	,04564	,048	712	,0446	,951	,08110	,126	724
5000	,1856	,770	,00108	,02004	,021	3527	,0490	,939	,03530	,084	3553
10000	,1827	,754	,00079	,01393	,015	7038	,0495	,933	,02475	,074	7075
50000	,1610	,692	,00038	,00596	,006	35086	,0499	,904	,01071	,061	35168
100000	,1463	,641	,00028	,00406	,004	70122	,0498	,878	,00740	,057	70238

**Tabela A.8:** Tabela de erros dado n para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta \leq 0,70$  versus  $H_1 : \theta > 0,70$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita..

n	Método Proposto						Método Usual				
	$\alpha$ Max	$\beta$ Max	$\alpha$ Média	$\beta$ Média	Erros	P.Critico	$\alpha$	$\beta$ Max	$\beta$ Média	Erros	P.Critico
10	,0281	,971	,00257	,70161	,704	9	,0282	,971	,70161	,730	9
20	,0353	,964	,00227	,52792	,530	17	,0355	,964	,52792	,563	17
30	,0761	,922	,00442	,36413	,369	24	,0302	,969	,46479	,495	25
40	,0548	,944	,00260	,35465	,357	32	,0238	,976	,43213	,456	33
50	,0398	,959	,00161	,34915	,351	40	,0402	,959	,34915	,389	40
60	,0562	,942	,00217	,29373	,296	47	,0295	,970	,34565	,375	48
70	,0718	,926	,00267	,25414	,257	54	,0413	,958	,29806	,339	55
80	,0524	,945	,00173	,26237	,264	62	,0302	,969	,30157	,332	63
90	,0638	,934	,00204	,23464	,237	69	,0390	,960	,26914	,308	70
100	,0472	,951	,00137	,24321	,245	77	,0479	,951	,24321	,291	77
200	,0683	,928	,00148	,15687	,158	149	,0359	,962	,18816	,224	151
300	,0548	,941	,00094	,13760	,139	222	,0429	,955	,14808	,191	223
400	,0674	,927	,00104	,11220	,113	293	,0440	,953	,12782	,172	295
500	,0622	,932	,00085	,10301	,104	365	,0426	,954	,11556	,158	367
1000	,0655	,925	,00065	,07170	,072	721	,0446	,951	,08110	,126	724
5000	,0611	,918	,00029	,03218	,032	3548	,0490	,939	,03530	,084	3553
10000	,0591	,911	,00021	,02257	,023	7068	,0495	,933	,02475	,074	7075
50000	,0500	,876	,00010	,00978	,010	35153	,0499	,904	,01071	,061	35168
100000	,0438	,846	,00008	,00675	,007	70217	,0498	,878	,00740	,057	70238

**Tabela A.9:** Tabela de erros dado n para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta \leq 0,70$  versus  $H_1 : \theta > 0,70$ . Método Proposto para  $k = 0,91$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto					Método Usual			
	$\alpha$ Max	$\beta$ Max	$\beta$ Médio	Erros	R.Critica	$\beta$ Max	$\beta$ Médio	Erros	R.Critica
10	,7492	,251	,091	,840	4 - 4	,951	,559	,609	1 - 7
20	,4947	,505	,143	,638	7 - 9	,950	,411	,461	4 - 12
30	,5770	,423	,097	,674	11 - 13	,950	,340	,390	7 - 17
40	,4201	,580	,122	,542	14 - 18	,950	,297	,347	10 - 22
50	,4709	,529	,098	,569	18 - 22	,950	,266	,316	13 - 27
60	,5104	,490	,082	,592	22 - 26	,950	,244	,294	17 - 31
70	,5422	,458	,070	,613	26 - 30	,950	,226	,276	20 - 36
80	,5686	,431	,062	,630	30 - 34	,950	,212	,262	23 - 41
90	,4516	,548	,077	,528	33 - 39	,950	,200	,250	27 - 45
100	,4751	,525	,069	,544	37 - 43	,950	,190	,240	30 - 50
200	,5161	,484	,045	,561	76 - 84	,950	,135	,185	66 - 94
300	,5169	,483	,037	,553	115 - 125	,950	,110	,160	103 - 137
400	,5071	,493	,032	,540	154 - 166	,950	,096	,146	141 - 179
500	,4936	,506	,030	,524	193 - 207	,950	,086	,136	179 - 221
1.000	,4979	,502	,021	,519	390 - 410	,950	,061	,111	370 - 430
5.000	,4975	,502	,009	,507	1.977 - 2.023	,950	,027	,077	1.932 - 2.068
10.000	,4941	,506	,007	,501	3.967 - 4.033	,950	,019	,069	3.904 - 4.096
50.000	,4878	,512	,003	,491	19.924 - 20.075	,950	,009	,059	19.785 - 20.215
100.000	,4877	,512	,002	,490	39.892 - 40.106	,950	,006	,056	39.696 - 40.304
1.000.000	,4440	,554	,001	,445	399.620 - 400.369	,949	,002	,052	399.040 - 400.960

**Tabela A.10:** Tabela de erros dado n para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto					Método Usual			
	$\alpha$ Max	$\beta$ Max	$\beta$ Médio	Erros	R.Critica	$\beta$ Max	$\beta$ Médio	Erros	R.Critica
10	,3335	,667	,273	,606	3 - 5	,951	,559	,609	1 - 7
20	,2531	,747	,238	,491	6 - 10	,950	,411	,461	4 - 12
30	,1911	,809	,226	,417	9 - 15	,950	,340	,390	7 - 17
40	,2583	,742	,171	,429	13 - 19	,950	,297	,347	10 - 22
50	,1933	,807	,176	,370	16 - 24	,950	,266	,316	13 - 27
60	,2353	,765	,148	,383	20 - 28	,950	,244	,294	17 - 31
70	,1791	,821	,155	,334	23 - 33	,950	,226	,276	20 - 36
80	,2091	,791	,136	,345	27 - 37	,950	,212	,262	23 - 41
90	,2364	,764	,121	,357	31 - 41	,950	,200	,250	27 - 45
100	,1842	,816	,129	,313	34 - 46	,950	,190	,240	30 - 50
200	,2197	,780	,085	,304	72 - 88	,950	,135	,185	66 - 94
300	,2158	,784	,070	,286	110 - 130	,950	,110	,160	103 - 137
400	,2020	,798	,062	,264	148 - 172	,950	,096	,146	141 - 179
500	,2017	,799	,056	,258	187 - 214	,950	,086	,136	179 - 221
1000	,2081	,792	,039	,247	381 - 419	,950	,061	,111	370 - 430
5000	,1989	,801	,018	,217	1.956 - 2.044	,950	,027	,077	1.932 - 2.068
10000	,1949	,805	,013	,208	3.937 - 4.063	,950	,019	,069	3.904 - 4.096
50000	,1887	,811	,006	,194	19.856 - 20.143	,950	,009	,059	19.785 - 20.215
100000	,1912	,809	,004	,195	39.797 - 40.201	,950	,006	,056	39.696 - 40.304
1000000	,1683	,830	,001	,170	399.320 - 400.669	,949	,002	,052	399.040 - 400.960

**Tabela A.11:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto					Método Usual			
	$\alpha$ Max	$\beta$ Max	$\beta$ Médio	Erros	R.Critica	$\beta$ Max	$\beta$ Médio	Erros	R.Critica
10	,1011	,900	,455	,556	2 - 6	,951	,559	,609	1 - 7
20	,1075	,893	,333	,441	5 - 11	,950	,411	,461	4 - 12
30	,0916	,909	,290	,382	8 - 16	,950	,340	,390	7 - 17
40	,0744	,926	,268	,343	11 - 21	,950	,297	,347	10 - 22
50	,0594	,941	,255	,314	14 - 26	,950	,266	,316	13 - 27
60	,0858	,914	,213	,299	18 - 30	,950	,244	,294	17 - 31
70	,0664	,934	,211	,278	21 - 35	,950	,226	,276	20 - 36
80	,0689	,932	,198	,266	25 - 40	,950	,212	,262	23 - 41
90	,0667	,933	,187	,254	28 - 44	,950	,200	,250	27 - 45
100	,0669	,934	,178	,245	32 - 49	,950	,190	,240	30 - 50
200	,0709	,929	,124	,195	68 - 92	,950	,135	,185	66 - 94
300	,0675	,932	,103	,171	105 - 135	,950	,110	,160	103 - 137
400	,0664	,934	,090	,156	143 - 178	,950	,096	,146	141 - 179
500	,0680	,932	,080	,148	181 - 220	,950	,086	,136	179 - 221
1000	,0658	,934	,057	,123	372 - 428	,950	,061	,111	370 - 430
5000	,0668	,933	,025	,092	1.937 - 2.063	,950	,027	,077	1.932 - 2.068
10000	,0647	,935	,018	,083	3.910 - 4.090	,950	,019	,069	3.904 - 4.096
50000	,0626	,937	,008	,071	19.796 - 20.203	,950	,009	,059	19.785 - 20.215
100000	,0635	,936	,006	,069	39.712 - 40.286	,950	,006	,056	39.696 - 40.304
1000000	,0527	,947	,002	,055	399.070 - 400.969	,949	,002	,052	399.040 - 400.960

**Tabela A.12:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses unilaterais em relação à uma referência sobre a proporção de sucessos de uma Binomial  $H_0 : \theta = 0,40$  versus  $H_1 : \theta \neq 0,40$ . Método Proposto para  $k = 0,93$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

$n_x$	Método Proposto						Método Usual		
	$\alpha$	$\beta$	Erros	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.
5	,344	,434	,778	,400	,125	,200	,600	,217	,400
15	,310	,286	,596	,133	,084	,200	,267	,145	,333
25	,275	,230	,506	,080	,068	,160	,160	,111	,240
35	,282	,193	,475	,057	,056	,114	,114	,094	,200
45	,267	,176	,442	,044	,051	,111	,089	,086	,200
55	,276	,158	,434	,036	,046	,109	,073	,078	,182
65	,254	,147	,402	,031	,043	,092	,062	,071	,169
75	,260	,136	,397	,027	,040	,093	,053	,066	,147
85	,282	,128	,409	,024	,038	,082	,047	,063	,141
95	,259	,121	,380	,021	,036	,084	,042	,060	,137
100	,256	,118	,375	,020	,035	,080	,040	,058	,130
200	,264	,082	,346	,010	,025	,060	,020	,041	,095
300	,246	,066	,312	,007	,020	,050	,013	,034	,077

**Tabela A.13:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

$n_x$	Método Proposto						Método Usual		
	$\alpha$	$\beta$	Erros	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.
5	,109	,654	,763	,600	,217	,400	,600	,217	,400
15	,100	,423	,523	,200	,129	,267	,267	,145	,333
25	,094	,353	,447	,160	,104	,240	,160	,111	,240
35	,089	,302	,392	,114	,089	,200	,114	,094	,200
45	,088	,269	,357	,089	,079	,178	,089	,086	,200
55	,084	,244	,328	,073	,071	,164	,073	,078	,182
65	,084	,225	,309	,062	,066	,154	,062	,071	,169
75	,082	,210	,292	,053	,061	,147	,053	,066	,147
85	,083	,196	,278	,047	,057	,141	,047	,063	,141
95	,083	,186	,269	,042	,055	,126	,042	,060	,137
100	,079	,182	,262	,040	,053	,130	,040	,058	,130
200	,082	,127	,209	,020	,038	,090	,020	,041	,095
300	,077	,103	,180	,013	,031	,077	,013	,034	,077

**Tabela A.14:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

$n_x$	Método Proposto						Método Usual		
	$\alpha$	$\beta$	Erros	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.
5	,060	,736	,796	,600	,259	,600	,600	,217	,400
15	,043	,512	,556	,267	,157	,333	,267	,145	,333
25	,040	,425	,465	,200	,126	,280	,160	,111	,240
35	,038	,365	,403	,143	,107	,257	,114	,094	,200
45	,038	,327	,365	,111	,096	,222	,089	,086	,200
55	,036	,297	,332	,091	,087	,200	,073	,078	,182
65	,034	,274	,308	,077	,080	,185	,062	,071	,169
75	,034	,257	,291	,067	,075	,173	,053	,066	,147
85	,036	,240	,276	,059	,070	,165	,047	,063	,141
95	,035	,228	,263	,053	,067	,158	,042	,060	,137
100	,033	,222	,256	,050	,065	,150	,040	,058	,130
200	,031	,157	,188	,025	,046	,110	,020	,041	,095
300	,031	,127	,158	,017	,038	,093	,013	,034	,077

**Tabela A.15:** Tabela de erros dado  $n$  para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,91$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto						Método Usual		
	$\alpha$	$\beta$	Erros	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.
5	,304	,374	,678	,200	,119	,267	,267	,185	,400
15	,263	,246	,509	,067	,073	,178	,089	,121	,267
25	,271	,193	,464	,040	,058	,147	,053	,094	,213
35	,263	,164	,427	,029	,049	,124	,038	,080	,181
45	,287	,143	,430	,022	,043	,111	,030	,071	,163
55	,259	,131	,391	,018	,039	,103	,024	,064	,145
65	,259	,120	,380	,015	,036	,097	,021	,059	,138
75	,266	,111	,377	,013	,033	,084	,018	,055	,129
85	,260	,105	,365	,012	,032	,086	,016	,052	,122
95	,255	,099	,354	,011	,030	,084	,014	,049	,112
200	,269	,066	,336	,005	,021	,055	,007	,034	,078
300	,266	,053	,319	,003	,017	,049	,004	,028	,064

**Tabela A.16:** Tabela de erros dado n para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = 3 \times n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,50$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n <sub>x</sub>	Método Proposto						Método Usual		
	$\alpha$	$\beta$	Erros	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.
5	,1233	,5595	,6829	,3333	,1830	,4000	,2667	,1852	,4000
15	,0915	,3651	,4566	,1333	,1093	,2667	,0889	,1206	,2667
25	,0890	,2901	,3791	,0800	,0857	,2000	,0533	,0944	,2133
35	,0854	,2476	,3329	,0571	,0727	,1714	,0381	,0800	,1810
45	,0826	,2200	,3025	,0444	,0646	,1556	,0296	,0710	,1630
55	,0784	,2003	,2787	,0364	,0587	,1394	,0242	,0642	,1455
65	,0776	,1845	,2621	,0308	,0542	,1282	,0205	,0592	,1385
75	,0804	,1714	,2518	,0267	,0505	,1200	,0178	,0552	,1289
85	,0797	,1605	,2402	,0235	,0474	,1137	,0157	,0518	,1216
95	,0796	,1513	,2309	,0211	,0447	,1088	,0140	,0489	,1123
100	,0801	,1477	,2279	,0200	,0437	,1067	,0133	,0478	,1100
200	,0767	,1026	,1793	,0100	,0310	,0750	,0067	,0339	,0783

**Tabela A.17:** Tabela de erros dado n para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = 3 \times n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,80$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.

n	Método Proposto						Método Usual		
	$\alpha$	$\beta$	Erros	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.	Dist.Min	Dist.Média	Dist.Max.
5	,0501	,6519	,7020	,4000	,2188	,4667	,2667	,1852	,4000
15	,0374	,4457	,4831	,2000	,1343	,3111	,0889	,1206	,2667
25	,0349	,3544	,3893	,1200	,1045	,2400	,0533	,0944	,2133
35	,0348	,3032	,3380	,0857	,0886	,2095	,0381	,0800	,1810
45	,0334	,2690	,3024	,0667	,0785	,1852	,0296	,0710	,1630
55	,0342	,2452	,2794	,0545	,0717	,1697	,0242	,0642	,1455
65	,0318	,2255	,2572	,0462	,0659	,1538	,0205	,0592	,1385
75	,0324	,2106	,2430	,0400	,0616	,1467	,0178	,0552	,1289
85	,0327	,1973	,2300	,0353	,0578	,1412	,0157	,0518	,1216
95	,0312	,1864	,2176	,0316	,0547	,1333	,0140	,0489	,1123
100	,0322	,1820	,2142	,0300	,0534	,1300	,0133	,0478	,1100
200	,0313	,1269	,1582	,0150	,0378	,0917	,0067	,0339	,0783

**Tabela A.18:** Tabela de erros dado n para hipóteses precisas sobre a homogeneidade da proporção de sucessos de uma Binomial em 2 populações,  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  versus  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  com  $n_y = 3 \times n_x$ . Método Proposto para  $k = 0,91$  à esquerda e método usual com  $\alpha = 0,05$  e minimização de  $\beta$  à direita.





## Apêndice B

# Rotinas Computacionais

### B.1 Hipóteses Simples

```
1 #n tamanho amostral (em cada passo)
2 n <- c(seq(10,100, by = 10), seq(200, 1000, by = 50),1200, 1400, 1600, 1800,
        2000)
3
4 LN <- length(n)
5
6 #a é o ponto crítico bayesiano
7 #c é o ponto crítico clássico
8 a <-array(0,dim=length(n))
9 pto.critico.class <-array(0,dim=length(n))
10
11 #alpha e betha e soma erros dado n
12 alpha<-array(0,dim=length(n))
13 betha<-array(0,dim=length(n))
14 soma.erros<-array(0,dim=length(n))
15
16 class.alpha<-array(0,dim=length(n))
17 class.betha<-array(0,dim=length(n))
18 class.soma.erros<-array(0,dim=length(n))
19
20 #Hipóteses de interesse
21 theta_0 <- 0.2
22 theta_1 <- 0.24
23
24 #Perda
25 l_0 <- 4
26 l_1 <- 1
27 e_0 <- 1/2
28 e_1 <- 1/2
29 k<-(l_1*e_1)/(l_0*e_0)
30
31 #calculo dos erros
32 #o parametro a e b só depende do tamanho amostral e não da amostra em si.
33 for (i in 1:length(n)) {
34   #b é o ponto crítico do modelo clássico
35   b <- seq(0, n[i], by = 1)
36   af <- array(0,dim=n[i])
37
38   #a = parametro para a função poder = o ponto crítico nesse caso
39   a[i] <- log(k*((1-theta_1)^n[i])/((1-theta_0)^n[i]))/log((theta_0*(1-theta_1))
40   /((theta_1*(1-theta_0))))
41   alpha[i] <- 1 - pbinom(a[i],n[i],theta_0)
42   betha[i] <- pbinom(a[i],n[i],theta_1)
43   soma.erros[i] <- alpha[i]+betha[i]
```

```

43
44 af <- 1 - pbinom(b,n[i],theta_0)
45 pto.critico.class[i] <- max(which(af >= 0.05))
46 pto.critico.class[1] <- 0
47 class.alpha[i] <- 1 - pbinom(pto.critico.class[i],n[i],theta_0)
48 class.betha[i] <- pbinom(pto.critico.class[i],n[i],theta_1)
49 class.soma.erros[i] <- class.alpha[i] + class.betha[i]
50 }
51
52 #Tabela de dados dado n
53 Tabela <- data.frame(n = n, alpha = alpha, betha = betha, soma.erros = soma.
      erros, pto.critico = a,
54                   class.alpha = class.alpha, class.betha = class.betha, class
      .soma.erros = class.soma.erros,
55                   pto.critico.class = pto.critico.class)
56 colnames(Tabela) <- c("n", "alpha", "beta", "Soma do erros", "Ponto Crítico",
57                       "alpha 0.05", "beta 0.05", "erros 0.05", "Ponto 0.05")
58 write.csv2(Tabela, file = "Erros_HS_BetaBinomial_4k_d_04.csv")
59
60 #Gráfico Erros dado n
61 png("Erros_HS_BetaBinomial_4k_d_04.png")
62 plot(n,soma.erros, type = "l", lwd = 2, lty = 1, ylab = "Soma dos erros",ylim =
      c(0,1))
63 lines(n,class.soma.erros, type = "l", lwd = 2, lty = 2)
64 #alpha005 <- max(which(alpha <= 0.05))
65 #abline(h = soma.erros[alpha005[1]], lwd = 2, lty = 3)
66 legend(x = "topright", legend = c("Método Proposto", "Método Usual"), bty = "n",
      lty = c(1,2), lwd = c(2,2))
67 dev.off()
68
69
70 ## Gráfico de alfa:
71 png("Alpha_HS_BetaBinomial_4k_d_04.png")
72 L1 <- expression(paste(alpha, " proposto", sep=" "))
73 L2 <- expression(paste(beta, " proposto", sep=" "))
74 L3 <- expression(paste(alpha, " usual", sep=" "))
75 L4 <- expression(paste(beta, " usual", sep=" "))
76
77 plot(n[2:LN], alpha[2:LN],
78       xlab= "Tamanho Amostral (n)",
79       ylab= "Erros Tipo I e II",
80       ylim=c(0,1),
81       type="l",
82       lwd=2)
83 lines(n[2:LN], betha[2:LN],
84        lty=2,
85        lwd=2)
86 lines(n[2:LN], class.alpha[2:LN],
87        lwd=2,
88        col=2,
89        lty=3)
90 lines(n[2:LN], class.betha[2:LN],
91        lwd=2,
92        col=2,
93        lty=4)
94 legend("topright",c(L1,L2,L3,L4),lwd=c(2,2,2,2),lty=c(1,2,3,4),col=c(1,1,2,2))
95 dev.off()

```

## B.2 Hipóteses Compostas Unilaterais

```

1 rm(list=ls())
2

```

```

3 #beta binomial
4 #hipotese unilateral
5 #OneSample
6 #Minha priori sempre é uma Beta(1,1) ~ Unif(0,1)
7 #h0: theta <= theta_1
8 #h1: theta > theta_1
9
10 #perda
11 l_0 <- 14
12 l_1 <- 1
13 k <- (l_0)/(l_1+l_0)
14
15 #Hipotese de interesse h0
16 theta_1 <- 0.7
17
18 #n tamanho amostral
19 n_interval <- c(seq(10,100, by = 10),
20                 seq(200, 1000, by = 100),
21                 seq(2000, 10000, by = 1000),
22                 50000, 100000)
23
24 LN <- length(n_interval)
25
26 #tamanho do vetor de parâmetros
27 theta_k <- 1000
28 #theta é o vetor de parametros da binomial
29 theta <- seq(0,1,length=theta_k)
30
31 #função poder para cada n
32 fc_power_matrix <- array(0,dim=c(LN,theta_k))
33
34 # Ponto crítico clássico:
35 PCC <- NULL
36 # Alfa clássico:
37 Alfa.Cl <- NULL
38 # Beta clássico:
39 Beta.Cl <- NULL
40 # Erro Total Clássico:
41 Total.Cl <- NULL
42
43 # Tabela de dados
44 df <- data.frame(n      = n_interval,
45                 alpha = array(0,dim=LN),
46                 beta   = array(0,dim=LN),
47                 alpha.mean = array(0,dim=LN),
48                 beta.mean  = array(0,dim=LN),
49                 erros     = array(0,dim=LN),
50                 pontocrit = array(0,dim=LN),
51                 class.alpha = rep(0,LN),
52                 class.betha = rep(0,LN),
53                 class.betha.mean = rep(0,LN),
54                 class.soma.erros = rep(0,LN),
55                 pto.critico.class = rep(0,LN))
56
57 for(nidx in 1:LN)
58 {
59   n <- n_interval[nidx]
60
61   #inicializando vetores
62   pbeta_theta <- rep(0,n+1)
63   RC <- rep(0,n+1)
64   pto_critico <- 0
65   # t é o número de sucessos da binomial
66   t <- 0:n
67

```

```

68 #Achar t ponto critico
69 for (idx in 1:length(t)) {
70
71   #probabilidade a posteriori para theta_1 considerando cada t
72   pbeta_theta[idx] <- 1 - pbeta(theta_1, 1+t[idx], 1+n-t[idx])
73
74   #Aplica a regra de decisão e encontra a Regiao Critica
75   if(pbeta_theta[idx] > k)
76     {RC[idx] <- 1}
77   else
78     {RC[idx] <- 0}
79
80   if ((RC[idx] == 0) & (t[idx] > pto_critico)){
81     pto_critico <- t[idx]
82   }
83 }
84
85 t <- c(0:n)
86
87 #calculo dos erros tipo 1 (alpha) e tipo 2 (betha)
88 alpha<-0
89 betha<-0
90
91 #calcula a função poder dado theta
92 fc_poder <- c(seq(0,1,length=theta_k))
93 fc_poder <- 1 - pbinom(pto_critico,n,theta)
94
95 # Media alpha e beta
96 Theta.Vls <- theta[which(theta > theta_1)]
97 Theta.Vlsa <- theta[which(theta <= theta_1)]
98 fc.poder.alpha <- 1 - pbinom(pto_critico,n,Theta.Vlsa)
99 fc.poder.beta <- 1-(1 - pbinom(pto_critico,n,Theta.Vls))
100 alpha.mean <- mean(fc.poder.alpha)
101 beta.mean <- mean(fc.poder.beta)
102 alpha <- max(fc.poder.alpha)
103 betha <- max(fc.poder.beta)
104
105 ## Teste clássico
106 # Teorema de Karlin-Rubin
107 # Ponto crítico clássico:
108 PCC <- qbinom(0.95, n, theta_1)
109
110 # Alfa clássico:
111 Alfa.Cl <- 1 - pbinom(PCC, n, theta_1)
112
113 # Beta clássico:
114 Beta.Cl <- max(pbinom(PCC, n, Theta.Vls))
115 Beta.Cl.mean <- mean(pbinom(PCC, n, Theta.Vls))
116
117 Total.Cl <- Alfa.Cl + Beta.Cl.mean
118
119 #Guarda a informação pra cada n
120 fc_power_matrix[nidx,] <- fc_poder
121 soma_erroes <- alpha + beta.mean
122
123 df$n[nidx] <- n
124 df$alpha[nidx] <- alpha
125 df$beta[nidx] <- betha
126 df$alpha.mean[nidx] <- alpha.mean
127 df$beta.mean[nidx] <- beta.mean
128 df$erros[nidx] <- soma_erroes
129 df$ptocrit[nidx] <- pto_critico
130 df$class.alpha[nidx] <- Alfa.Cl
131 df$class.betha[nidx] <- Beta.Cl
132 df$class.betha.mean[nidx] <- Beta.Cl.mean

```

```

133 df$class.soma.erros[nidx] <- Total.Cl
134 df$pto.critico.class[nidx] <- PCC
135 }
136
137 #png("Erros_HC_Unilateral_1SBetaBino_14k.png")
138 plot(df$n, df$erros,
139       xlab="Tamanho Amostral (n)",
140       ylab="Soma dos erros",
141       ylim=c(0,1),
142       type="l",
143       lwd=2)
144 lines(df$n, df$class.soma.erros,
145       lty=2,
146       lwd=2)
147 legend("topright",c("Proposto","Usual"),lwd=c(2,2),lty=c(1,2))
148 #dev.off()
149
150 ## Gráfico de alfa:
151 L1 <- expression(paste(alpha, " proposto", sep=" "))
152 L2 <- expression(paste(beta, " proposto", sep=" "))
153 L3 <- expression(paste(alpha, " usual", sep=" "))
154 L4 <- expression(paste(beta, " usual", sep=" "))
155
156 plot(df$n, df$alpha,
157       xlab="Tamanho Amostral (n)",
158       ylab="Erros Tipo I e II",
159       ylim=c(0,1),
160       type="l",
161       lwd=2)
162 lines(df$n, df$beta.mean,
163       lty=2,
164       lwd=2)
165 lines(df$n, df$class.alpha,
166       lwd=2,
167       col=2,
168       lty=1)
169 lines(df$n, df$class.betha.mean,
170       lwd=2,
171       col=2,
172       lty=2)
173 legend("topright",c(L1,L2,L3,L4),lwd=c(2,2,2,2),lty=c(1,2,1,2),col=c(1,1,2,2))
174 #dev.off()
175
176
177 png("FcPoder_HC_Unilateral_1SBetaBino_14k.png")
178 plot(theta, fc_power_matrix[1,], type="n",
179       xlab= expression(theta),
180       ylab="Função Poder")
181 add.power.curves
182 n.grafico <- c(1,6,11,15,20,29)
183 ilty=1
184 for (i in n.grafico){
185   lines(theta, fc_power_matrix[i,], type="l", lwd=2, lty=ilty)
186   ilty=ilty+1
187 }
188 legend(x = "topleft", legend = paste(n_interval[n.grafico]), title = "Tamanho
| Amostr", lty = seq(1,6), lwd = rep(2,6))
189 dev.off()
190
191 #Tabela de dados dado n
192 colnames(df) <- c("n", "alpha max", "beta max", "alpha mean","beta mean" ,
193                 "Soma do erros", "Ponto Critico", "alpha 0.05",
194                 "beta max 0.05", "beta mean 0.05", "erros 0.05",
195                 "Ponto Critico 0.05")
196 write.csv2(df, file = "Erros_HC_Unilateral_1SBetaBino_14k.csv")

```

### B.3 Hipóteses Compostas Bilaterais com relação à uma referência

```

1 rm(list=ls())
2
3 #HIPOTEESES COMPOSTAS BILATERAIS
4 #OneSample
5 #BETA-BINOMIAL
6 #h0: theta=theta_0
7 #h1: theta < theta_0
8 l_0 <- 14
9 l_1 <- 1
10 perda <- -(l_0)/(l_1+l_0)
11 theta_0 <- 0.4
12
13 n_interval <- c(seq(10,100, by = 10),
14                 seq(200, 1000, by = 100),
15                 5000, 10000,50000, 100000,1000000)
16 #n_interval <- c(seq(5,100, by = 10), seq(100, 1000, by = 100), seq(2000, 9000,
17                 by = 1000),10000)
17 LN <- length(n_interval)
18 NT <- 10000
19 theta <- seq(0,1,length=NT)
20 fc_power_matrix <- array(0,dim=c(LN,NT))
21 fc_power_matrixClass <- array(0,dim=c(LN,NT))
22 theta.RH1_a <- rep(0 + 10^(-323),length(theta))
23
24 for(count in 1:LN){
25   n <- n_interval[count]
26
27   pbeta_theta <- rep(0,(n+1))
28   RC <- rep(NA, n+1)
29   pto_critico01 <- 0
30   pto_critico02 <- 0
31   t <- 0:n
32
33   #ENCONTRANDO A REGIÃO CRÍTICA
34   for (idx in 1:length(t)) {
35     ref <- dbeta(theta_0, 1+t[idx], 1+n-t[idx])
36     ind.theta <- which(dbeta(theta, 1+t[idx], 1 + n - t[idx]) >= ref)
37     theta.RH1 <- theta[ind.theta]
38     theta.RH0 <- theta[-ind.theta]
39     if(length(theta.RH1) > 2){
40       min.RH1 <- min(theta.RH1) + 10^(-323)
41       max.RH1 <- max(theta.RH1) - 10^(-323)
42
43       pbeta_theta[idx] <- pbeta(max.RH1, 1+t[idx], 1 + n - t[idx]) - pbeta(min.
44         RH1, 1+t[idx], 1 + n - t[idx])
45       RC[idx] <- ifelse(pbeta_theta[idx] > perda, 1, 0)
46     } else {
47       RC[idx] <- 0
48     }
49   }
50
51   pto_critico01 <- t[which(RC == 0)[1]]
52   pto_critico02 <- t[which(RC == 0)[length(which(RC == 0))]]
53
54   #PLOTANDO A REGIÃO CRÍTICA DADO T=SUM(Xi)
55   t <- c(0:n)
56

```

```

57 #ENCONTRANDO A FUNÇÃO PODER
58 alpha<-0
59 betha<-0
60 #fc_poder <- rep(0, 10000)
61 fc_poder <- 1 - pbinom(pto_critico02, n, theta) + pbinom(pto_critico01-1, n,
| theta)
62 fc_power_matrix[count,] <- fc_poder
63
64 #CALCULANDO OS ERROS
65 alpha <- 1 - pbinom(pto_critico02, n, theta_0) + pbinom(pto_critico01-1, n,
| theta_0)
66 for(idx in 1:length(theta)) {
67   if(theta[idx] != theta_0){
68     theta.RH1_a[idx] <- theta[idx]}
69 }
70 betha <- max(1-(1-pbinom(pto_critico02, n, theta.RH1_a)+pbinom(pto_critico01
| -1, n, theta.RH1_a)))
71 betha.mean <- mean(1-(1-pbinom(pto_critico02, n, theta.RH1_a)+pbinom(pto_
| critico01-1, n, theta.RH1_a)))
72 soma_erros <- alpha + betha.mean
73
74
75 ## Parte Clássica:
76 AUX <- sqrt((theta_0*(1-theta_0))/n) * qnorm(0.975)
77 LB <- theta_0 - AUX
78 UB <- theta_0 + AUX
79
80 # Calculando beta:
81 Power.Vec <- rep(0,NT)
82 for(Cont in 1:NT){
83   Mn <- theta[Cont]
84   Sd <- sqrt((Mn*(1-Mn))/n)
85   Power.Vec[Cont] <- 1 - pnorm(UB,Mn,Sd) + pnorm(LB,Mn,Sd)
86 }
87 fc_power_matrixClass[count,] <- Power.Vec
88 beta.H1 <- max(1-Power.Vec)
89 beta.H1.mean <- mean(1-Power.Vec)
90
91 RC.de.cl <- n * LB
92 RC.ate.cl <- n * UB
93
94 DP <- data.frame(n = n,
95                 alpha = alpha,
96                 betha = betha,
97                 betha.mean = betha.mean,
98                 soma.erros = soma_erros,
99                 RC.de = pto_critico01,
100                RC.ate = pto_critico02,
101                beta.cl = beta.H1,
102                beta.cl.mean = beta.H1.mean,
103                soma.erros.cl = (beta.H1.mean + 0.05),
104                RC.de.cl = RC.de.cl,
105                RC.ate.cl = RC.ate.cl)
106
107 if(count > 1)
108   DP <- rbind(D, DP)
109
110 D <- DP
111 }
112
113 png("Erros_HC_FBST_1SBetaBino_14k.png")
114 plot(D$n, D$soma.erros,
115       xlab="Tamanho Amostral (n)",
116       ylab = "Soma dos erros",
117       ylim = c(0,1),

```



```

118     type = "l",
119     lwd=2)
120 lines(D$n, D$soma.erros.cl,
121     col = 2,
122     lwd=2)
123 dev.off()
124
125
126 #Tabela de dados dado n
127 colnames(D) <- c("n", "alpha", "beta", "beta médio", "Soma do erros",
128     "RC de", "RC até", "beta 0.05", "beta medio 0.05",
129     "erros 0.05", "RC 0.05 de", "RC 0.05 até")
130 write.csv2(D, file = "Erros_HC_FBST_1SBetaBino_14k.csv")
131
132 png("FcPoder_HC_FBST_1SBetaBino_14k.png")
133 plot(theta, fc_power_matrix[1,],
134     type="n",
135     xlab= expression(theta),
136     ylab="Função Poder",
137     ylim=c(0,1))
138 # add power curves
139 n.grafico <- c(1,5,10,14,20,21)
140 ilty=1
141 for (i in n.grafico){
142     lines(theta, fc_power_matrix[i,], type="l", lwd=2, lty=ilty)
143     ilty=ilty+1
144 }
145 legend(x = "topleft", legend = paste(n_interval[n.grafico]), title = "Tamanho
    Amostral", lty = seq(1,6), lwd = rep(2,6))
146 dev.off()
147
148 ## Gráfico de alfa:
149 png("Alpha_HC_FBST_1SBetaBino_14k.png")
150 L1 <- expression(paste(alpha, " proposto", sep=" "))
151 L2 <- expression(paste(beta, " proposto", sep=" "))
152 L3 <- expression(paste(alpha, " usual", sep=" "))
153 L4 <- expression(paste(beta, " usual", sep=" "))
154 plot(D$n[2:LN], D$alpha[2:LN],
155     xlab= "Tamanho Amostral (n)",
156     ylab= "Erros Tipo I e II",
157     ylim=c(0,1),
158     type="l",
159     lwd=2)
160 lines(D$n[2:LN], D$betha.mean[2:LN],
161     lty=2,
162     lwd=2)
163 lines(D$n[2:LN], $rep(0.05, (LN-1)),
164     lwd=2,
165     col=2,
166     lty=3)
167 lines(D$n[2:LN], D$beta.cl.mean[2:LN],
168     lwd=2,
169     col=2,
170     lty=4)
171 legend("topright", c(L1,L2,L3,L4), lwd=c(2,2,2,2), lty=c(1,2,3,4), col=c(1,1,2,2))
172 dev.off()
173
174 png("FcPoderClass_HC_FBST_1SBetaBino.png")
175 plot(theta, fc_power_matrixClass[1,],
176     type="n",
177     xlab= expression(theta),
178     ylab="Função Poder",
179     ylim=c(0,1))
180 # add power curves
181 n.grafico <- c(1,5,10,14,20,21)

```

```

182 ilty=1
183 for (i in n.grafico){
184   lines(theta, fc_power_matrixClass[i,], type="l", lwd=2, lty=ilty)
185   ilty=ilty+1
186 }
187 legend(x = "topleft", legend = paste(n_interval[n.grafico]), title = "Tamanho
      Amostral", lty = seq(1,6), lwd = rep(2,6))
188 dev.off()

```

## B.4 Hipóteses Compostas Bilaterais para duas populações

Neste código, o produto matricial do R está denotado por "\*\*\*" em  $FC.PODER < -t(V1) * ** V2$ , porém deve-se colocar o código correto para rodá-lo de forma certa no R.

```

1 rm(list=ls())
2
3 ## Bibliotecas
4 library("lattice")
5
6 ##HIPOTESSES COMPOSTAS BILATERAIS - FBST
7 ##BETA-BINOMIAL
8 #h0: theta_1 = theta_2
9 #h1: theta_1 <> theta_2
10
11 ## Teste clássico
12 # theta1: estimativa da probabilidade de sucesso na população 1;
13 # theta2: estimativa da probabilidade de sucesso na população 2;
14 # n1: tamanho amostral da população 1;
15 # n2: tamanho amostral da população 2.
16 TC <- function(theta1, theta2, n1, n2){
17   if(theta1==0 & theta2==0){
18     OUT <- 0
19   } else{
20     if(theta1==1 & theta2==1){
21       OUT <- 0
22     } else{
23       OUT <- (theta1-theta2)/sqrt(((theta1*(1-theta1))/n1)+((theta2*(1-theta2))/
24         n2))
25     }
26   }
27   return(OUT)
28 }
29 ## Função poder (clássica)
30 # sgn.lvl : nível de significância do teste
31 PF <- function(theta1, theta2, n1, n2, sgn.lvl){
32   TST <- TC(theta1, theta2, n1, n2)
33   QTL1 <- qnorm(1-sgn.lvl/2)
34   QTL2 <- qnorm(sgn.lvl/2)
35   P1 <- pnorm(QTL1-TST)
36   P2 <- pnorm(QTL2-TST)
37   return(1-P1+P2)
38 }
39
40 ## Perda
41 l_0 <- 1
42 l_1 <- 1
43 perda <--(l_0)/(l_1+l_0)
44
45 ## Nível de significância
46 sgn.lvl <- 0.05
47
48 ## Tamanhos amostrais

```

```

49 #nx.vetor <- c(10,20,30)
50 #nx.vetor <- c(seq(10,100, by = 10), seq(100, 1000, by = 100), seq(2000, 9000,
    by = 1000),10000, 50000)
51 nx.vetor <- c(seq(5,100, by = 10),200,300)
52 ny.vetor <- 3*nx.vetor
53
54 # Tamanho do vetor de parâmetros
55 n.estimativa <- 100
56
57 # Vetor de thetas para avaliação de alfa, beta e da função poder.
58 THT.L <- 100
59 theta <- seq(0,1,length=THT.L)
60
61 ## Rodar para cada n
62 for(idx in 1:length(nx.vetor)){
63
64   nx <- nx.vetor[idx]
65   ny <- ny.vetor[idx]
66
67   # Regiões críticas Bayesianas e clássicas
68   RC <- matrix(0, ncol = (ny+1), nrow = (nx+1))
69
70   for(t.x in 0:nx){
71     for(t.y in 0:ny){
72       # Vetores aleatórios a posteriori thetax=px, thetay=py
73       thetax <- rbeta(n.estimativa, t.x+1, nx-t.x+1)
74       thetay <- rbeta(n.estimativa, t.y+1, ny-t.y+1)
75
76       # Probabilidade de referência: sup para px = py
77       p <- (t.x+t.y)/(nx+ny)
78
79       ref <- dbeta(p, t.x+1, nx-t.x+1)*dbeta(p, t.y+1, ny-t.y+1)
80
81       # prob a posteriori para o par de pontos px e py
82       posterior <- dbeta(thetax, t.x+1, nx-t.x+1)*dbeta(thetay, t.y+1, ny-t.y+1)
83
84       # Calcula a probabilidade da região tangente para o par (x,y) dado nx e ny
85       p.tangente <- sum(as.numeric(posterior >= ref))/n.estimativa
86
87       # Aplica a regra de decisão e vê se o par (x,y) pertence ou não a RC dado
88       # nx e ny
89       RC[(t.x+1),(t.y+1)] <- ifelse(p.tangente > perda,1,0)
90     }
91   }
92
93   #Pega os pontos x,y da RC e RA (aceitação)
94   RC.xy <- which(RC == 1, arr.ind = TRUE) - 1
95   RA.xy <- which(RC == 0, arr.ind = TRUE) - 1
96
97   png("RegiaoCriticaFBST_1k_nx3ny.png")
98   plot(RC.xy[,1]/nx, RC.xy[,2]/ny,
99        xlab=expression(theta[1]),
100       ylab=expression(theta[2]))
101   dev.off()
102
103   d.min <- min(abs(RC.xy[,1]/nx - RC.xy[,2]/ny))
104   d.mean <- mean(abs(RA.xy[,1]/nx - RA.xy[,2]/ny))
105   d.max <- max(abs(RA.xy[,1]/nx - RA.xy[,2]/ny))
106
107   V1 <- sapply(theta, FUN=dbinom, x=RC.xy[, 1], size=nx)
108   V2 <- sapply(theta, FUN=dbinom, x=RC.xy[, 2], size=ny)
109
110   FC.PODER <- t(V1) *** V2
111
112   alpha <- max(diag(FC.PODER), na.rm = TRUE)

```

```

112
113 FC.PODER2 <- FC.PODER
114 diag(FC.PODER2) <- 1
115 FC.PODER2 <- FC.PODER2[FC.PODER2>0]
116 betha <- mean(1-FC.PODER2)
117
118 soma.erros <- alpha+betha
119
120 ## Análise clássica
121 # Região crítica
122 RC.CL <- matrix(0, ncol = (ny+1), nrow = (nx+1))
123 for(t.x in 0:nx){
124   theta1 <- t.x/nx
125   for(t.y in 0:ny){
126     theta2 <- t.y/ny
127     TST.CL <- TC(theta1, theta2, nx, ny)
128     RC.CL[(t.x+1),(t.y+1)] <- ifelse(abs(TST.CL) > qnorm(1-sgn.lvl/2),1,0)
129   }
130 }
131
132 #Pega os pontos x,y da RC e RA (aceitação)
133 RC.xy <- which(RC.CL == 1, arr.ind = TRUE) - 1
134 RA.xy <- which(RC.CL == 0, arr.ind = TRUE) - 1
135
136 png("RegiaoCriticaClassica_nx3ny.png")
137 plot(RC.xy[,1]/nx, RC.xy[,2]/ny,
138       xlab=expression(theta[1]),
139       ylab=expression(theta[2]))
140 dev.off()
141
142 d.min.cl <- min(abs(RC.xy[,1]/nx - RC.xy[,2]/ny))
143 d.mean.cl <- mean(abs(RA.xy[,1]/nx - RA.xy[,2]/ny))
144 d.max.cl <- max(abs(RA.xy[,1]/nx - RA.xy[,2]/ny))
145
146 # Matriz da função poder clássica
147 FC.PODER.CL <- matrix(0,nrow=THT.L, ncol=THT.L)
148 for(i in 1:THT.L){
149   for(j in 1:THT.L){
150     FC.PODER.CL[i,j] <- PF(theta[i], theta[j], nx, ny, sgn.lvl)
151   }
152 }
153
154 DP <- data.frame(nx = nx,
155                  ny = ny,
156                  alpha = alpha,
157                  betha = betha,
158                  soma.erros = soma.erros,
159                  d.min = d.min,
160                  d.mean = d.mean,
161                  d.max = d.max,
162                  d.min.cl = d.min.cl,
163                  d.mean.cl = d.mean.cl,
164                  d.max.cl = d.max.cl)
165
166 if(idx > 1){
167   DP <- rbind(D, DP)
168 }
169
170 D <- DP
171 }
172
173 colnames(D) <- c("nx",
174                  "ny",
175                  "alpha",
176                  "beta",

```

```
177         "soma dos erros",
178         "dist. min.",
179         "dist. média",
180         "dist. max",
181         "dist. min. clássico",
182         "dist. média clássico",
183         "dist. max clássico")
184
185 write.csv2(D, file = "Erros_HC_FBST_2SampleBetaBinom_1k_nx3ny.csv")
186
187 png("FuncaoPoder_Classica_nx3ny.png")
188 wireframe(FC.PODER.CL,
189          shade=FALSE,
190          row.values=theta,
191          col.values=theta,
192          xlab=expression(theta[1]),
193          ylab=expression(theta[2]),
194          zlab="Poder")
195 dev.off()
196 png("FuncaoPoder_HC_FBST_2SampleBetaBinom_1k_nx3ny.png")
197 wireframe(FC.PODER,
198          shade=FALSE,
199          row.values=theta,
200          col.values=theta,
201          xlab=expression(theta[1]),
202          ylab=expression(theta[2]),
203          zlab="Poder")
204 dev.off()
```

# Referências Bibliográficas

- C. A. B. Pereira (2008)** S. Wechsler C. A. B. Pereira, J. M. Stern. Can a significance test be a genuinely bayesian? *Bayesian Analysis*, 3:79–100. Citado na pág. [2](#)
- Carlos A. B. Pereira (1999)** Julio M. Stern Carlos A. B. Pereira. Evidence and credibility: full bayesian significance test for precise hypotheses. *Entropy Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 1:99–110. Citado na pág. [2](#), [11](#), [15](#)
- Carlos Daniel Paulino e Murteira (2003)** M. Antonia A. Turkman Carlos Daniel Paulino e Bento Murteira. *Estatística Bayesiana*. Fundacao Calouste Gulbenkian, primeira ed. Citado na pág. [2](#), [6](#)
- Casella e Berger (2001)** George Casella e Roger L. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury, second ed. Citado na pág. [1](#), [5](#), [6](#), [18](#)
- Degroot (1989)** Morris H. Degroot. *Probability and Statistics*. Addison-Wheesley, second ed. Citado na pág. [6](#)
- James (2011)** Barry R. James. *Probabilidade: um curso em nivel intermediario*. Projeto Euclides, 3rd ed. IMPA. Citado na pág. [8](#)
- Lindley (1957)** D. V. Lindley. A statistical paradox. *Biometrika Statistical Laboratory, University of Cambridge*, 44:187 – 192. Citado na pág. [2](#)
- Pereira (1985)** Carlos A. B. Pereira. *Teste de hipoteses definidas em espacos de diferentes dimensoes: visao Bayesiana e interpretacao Classica*. Tese de Doutorado, Livre-Docencia, Instituto de Matematica e Estatistica - IME - USP, Sao Paulo, Brasil. Citado na pág. [1](#), [6](#), [17](#)
- Pereira e Polpo (2013)** Carlos A. B. Pereira e Adriano Polpo. Estatística bayesiana com aplica-coes dados categoricos e de sobrevivencia. Em *58 RBRAS*, páginas 1–62. Citado na pág. [15](#)
- Shein-Chung Chow e Wang (2008)** Jun Shao Shein-Chung Chow e Hansheng Wang. *Sample size calculations in clinical research*. Taylor and Francis Group, LLC. Citado na pág. [1](#)
- Stern (2006)** Julio Michael Stern. Construtivismo cognitivo e estatística bayesiana. *SciELO Brasil Sci. stud.*, 4:598–613. Citado na pág. [2](#)

# Índice Remissivo

Distribuição de Bernoulli, 8

Fundamentos

    Teste de hipóteses Bayesiano, 7

    Lemma de Neyman-Pearson, 6

    Teorema, 6

Hipóteses Compostas, 9

Hipóteses Simples, 8

Lemma de Neyman-Pearson, 6

Teste bilateral - duas populações, 15

Teste bilateral - uma população, 11

Teste de hipóteses

    Distribuição de Bernoulli, 8

    Hipóteses Compostas, 9

    Hipóteses Simples, 8

    Teste bilateral - duas populações, 15

    Teste bilateral - uma população, 11

    Teste Unilateral - uma população, 9

Teste de hipóteses Bayesiano, 7

Teste Unilateral - uma população, 9