**SIMULAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
DEPENDENTES :
APLICAÇÃO AO RISCO SUBSCRIÇÃO**

Josivon Souza dos Santos

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. PhD. Fábio Prates Machado

São Paulo, Abril 2008

SIMULAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DEPENDENTES : APLICAÇÃO AO RISCO SUBSCRIÇÃO

Este trabalho corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Josivon Souza dos Santos

Banca Examinadora:

- Prof. PhD. Fábio Prates Machado (Orientador) – IME/USP
- Prof. DR. Fernando Pigeard de Almeida Prado
- Prof. DR. Cristian Favio Coletti

DEDICATÓRIA

*Dedico esse trabalho a Deraldo dos Santos, Dgevon, Ronnyvon, Pollyana e principalmente a minha mãe
Judite Souza dos Santos*

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Fábio Prates Machado por todo o esforço e dedicação concedidos ao trabalho.

Agradeço aos Professores Fernando Pigearf de Almeida Prado e Cristian Favio Coletti pelos comentários valiosos sobre o trabalho.

Agradeço aos colegas de trabalho Epitácio e Fernando pelas correções e apoio não horas difíceis.

Agradeço ao Departamento de Estatística do IME/USP pelo apoio ao trabalho.

RESUMO

Com a crescente demanda de modelagem de riscos dependentes, enfatizamos neste trabalho a teoria de cópulas e algumas medidas de dependência tais como coeficiente de correlação linear, coeficiente de correlação de Spearman. Mostramos algumas interpretações errôneas sobre o coeficiente de correlação linear e como podemos realizar simulações de variáveis aleatórias com determinadas marginais e dependência. Realizamos uma aplicação na área de seguros para determinar o capital alocado da seguradora.

PALAVRAS-CHAVE:

- Risco de Subscrição;
- Dependência;
- Cópulas;
- Value at Risk
- Função de distribuição
- Marginais
- Correlação
- Simulação

ABSTRACT

With the growing demand for modeling dependent risk, in this study we emphasize the theory of copulas and some measures of dependence such as linear correlation coefficient and Spearman correlation coefficient. We show some misleading interpretations on the linear correlation coefficient, and how we can perform simulations of random variables with some marginals and dependence. We conduct an application in the insurance area to determine the allocated capital of the insurer.

KEYWORDS:

- Underwrite Risk;
- Dependence;
- Cópulas;
- Value at Risk
- Distribution function
- Marginais
- Correlation
- Simulation

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	pág 01
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE CÓPULAS.....	pág 02
1.1 – Conceitos preliminares	
1.2 – Cópulas	
1.3 – Teorema de Sklar (Sklar's theorem)	
1.4 – Cópulas e Variáveis Aleatórias	
1.5 – Cópulas multivariadas	
CAPÍTULO 2: CONCEITOS DE DEPENDÊNCIAS	pág 20
2.1 – O fenômeno de Dependência	
2.2 – O Coeficiente de correlação Linear	
2.3 – O Conceito de Permutabilidade	
2.4 – Dependência Perfeita	
2.5 – Concordância e Medida de Concordância	
2.6 – Coeficiente de Kendall	
2.7 – Coeficiente de Spearman	
CAPÍTULO 3: SIMULAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS COM DEPENDÊNCIA...	pág 35
3.1 – Simulação de Vetores Aleatórios	
3.2 – Dadas Marginais e Correlação Linear	
3.3 – Dadas Marginais e Cópula	
CAPÍTULO 4: APLICAÇÃO NO RISCO DE SUBSCRIÇÃO.....	PÁG 47
4.1 – Risco de Subscrição e algumas Provisões Técnicas	
4.2 – Modelo Proposto	
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	pág 52
BIBLIOGRAFIAS DE REFERÊNCIA	pág 53

Introdução

Conforme a Resolução CNSP N° 158, de 2006, A Superintendência de Seguros Privados – SUSEP, regulamenta que o capital adicional aos riscos de subscrição como uma função $CA(P, S, R)$, onde P são os prêmios, S os Sinistros e R as regiões de atuações da seguradora..

Para as seguradoras se alinharem à resolução acima, necessitam de modelos que tratem de dependências entre as linhas de negócios. Assim, as cópulas representam, portanto, uma abordagem útil para modelar e entender fenômenos de dependências. Mas afinal, o que vem a ser uma cópula? Há duas maneiras básicas de definir cópula. Primeiramente, cópulas são funções de distribuição que ligam funções distribuição multivariadas com suas funções distribuição marginais univariadas. Alternativamente, cópulas são funções distribuição multivariadas cujas marginais unidimensionais são uniformes [0, 1]. Realizaremos um estudo onde comparamos o capital adicional que uma seguradora teria modelando os riscos supondo independência e dependentes. Para o caso dependente, utilizaremos a cópula normal para gerar lognormais dependentes.

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Cópulas

1.1 – CONCEITOS PRELIMINARES

O foco desta seção é a noção de funções 2-crescente, bidimensional, análoga a funções não decrescente de uma variável, mas primeiramente precisamos introduzir algumas notações. Denotemos por $\mathfrak{R}$ a reta real $(-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathfrak{R}}$ denota a reta real estendida $[-\infty, +\infty]$, e $\overline{\mathfrak{R}}^2$ denota o plano real estendido $\overline{\mathfrak{R}} \times \overline{\mathfrak{R}}$. Um retângulo em $\overline{\mathfrak{R}}^2$ é o produto cartesiano B de dois intervalos fechados $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Os vértices de um retângulo B são os pontos (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) e (x_2, y_2) . O quadrado unitário I^2 é o produto $I \times I$ onde $I = [0, 1]$. Uma função bivariada H é uma função cujo domínio, $\text{Dom}H$, é um subconjunto de $\overline{\mathfrak{R}}^2$ e cuja imagem, $\text{Im}H$, é um subconjunto de $\mathfrak{R}$.

Definição 1.1.1 Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função bivariada real tal que $\text{Dom}H = S_1 \times S_2$. Seja $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ um retângulo cujos vértices pertencem ao $\text{Dom}H$. Então o H -volume de B é dado por

$$V_H = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Note que se definirmos as diferenças de primeira ordem de H no retângulo B como

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \text{ e } \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1),$$

então o H -volume de um retângulo B é a diferença de segunda ordem de H em B,

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y).$$

Definição 1.1.2 Uma função bivariada real H é 2-crescente se $V_H(B) \geq 0$ para todos os retângulos B cujos vértices pertencem ao $\text{Dom}H$.

Quando H é 2-crescente, ocasionalmente referimos ao H -volume de um retângulo B como a H -medida de B. Alguns autores referem-se às funções 2-crescente como quase-monótonas.

Notemos que se H é 2-crescente não implica que H é não decrescente em cada argumento, como segue no exemplo abaixo.

Exemplo 1 Seja H uma função definida em I^2 por $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$. Então H é 2-crescente, porém é uma função decrescente de x para cada y pertencente a $(0, \frac{1}{2})$ e uma função decrescente de y para cada x pertencente a $(0, \frac{1}{2})$.

Os seguintes lemas serão úteis na próxima seção de subcópias e cópias. O primeiro é consequência direta das definições 1.1.1 e 1.1.2.

Lema 1.1.3 Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função 2-crescente com o domínio $S_1 \times S_2$. Sejam $x_1, x_2 \in S_1$ com $x_1 \leq x_2$, e sejam $y_1, y_2 \in S_2$ com $y_1 \leq y_2$. Então a função $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ é não decrescente em S_1 , e a função $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ é não decrescente em S_2 .

Um das aplicações imediatas deste lema, que podemos mostrar que com uma hipótese adicional, é que uma função H 2-crescente é não decrescente em cada argumento. Supondo-se que S_1 tem um menor elemento a_1 e que S_2 tem um menor elemento a_2 , dizemos que a função H de $S_1 \times S_2$ em $\mathfrak{R}$ é limitada inferiormente se $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$. Daqui temos :

Lema 1.1.4 Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função 2-crescente limitada inferiormente com o domínio $S_1 \times S_2$. Então H é não decrescente em cada argumento.

Demonstração: Sejam a_1 e a_2 os menores elementos de S_1 e S_2 , respectivamente, e sejam $x_1 = a_1$, $y_1 = a_2$ do lema 1.1.3. □

Agora supondo-se que S_1 tem o maior elemento b_1 e que S_2 tem o maior elemento b_2 . Dizemos que a função H de $S_1 \times S_2$ em $\mathfrak{R}$ tem marginais, e que as marginais de H são funções F e G dadas por:

$$\text{Dom}F = S_1, \text{ e } F(x) = H(x, b_2) \text{ para todo } x \in S_1;$$

$$\text{Dom}G = S_2, \text{ e } G(y) = H(b_1, y) \text{ para todo } y \in S_2.$$

Exemplo 2. Seja H uma função com domínio $[-1, 1] \times [0, \infty]$ dada por

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}.$$

Então H é limitada inferiormente porque $H(x, 0) = 0$ e $H(-1, y) = 0$; e H tem marginais $F(x)$ e $G(x)$ dadas por

$$F(x) = H(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = \frac{(x+1)}{2} \text{ e } G(x) = H(1, y) = 1 - e^{-y}. \quad \square$$

Fecharemos esta seção com um importante lema em torno de funções 2-crescente limitadas inferiormente e com marginais.

Lema 1.1.5 Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função 2-crescente limitada inferiormente, com marginais, cujo domínio é $S_1 \times S_2$. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) quaisquer pontos pertencentes a $S_1 \times S_2$. Então

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demonstração: Usando a desigualdade triangular, temos:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Agora assumimos $x_1 \leq x_2$. Porque H é limitada inferiormente, 2-crescente, e tem marginais, Lemas 1.1.3 e 1.1.4 vale $0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$. Uma desigualdade análoga vale quando $x_2 \leq x_1$, assim segue que para quaisquer $x_1, x_2 \in S_1$, $H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$.

Semelhantemente para quaisquer $y_1, y_2 \in S_2$, $H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1) \leq G(y_2) - G(y_1)$. $\square$

1.2 – CÓPULAS

Primeiramente, definiremos subcópulas como uma certa classe de funções 2-crescente e limitadas inferiormente com marginais; então definiremos cópulas como subcópulas com domínio em I^2 .

Definição 1.2.1. Uma subcópula bidimensional é uma função C' com as seguintes propriedades:

1. $Dom C' = S_1 \times S_2$, onde S_1 e S_2 são subconjuntos de I contendo 0 e 1;
2. C' é limitada inferiormente e 2-crescente;
3. Para todo $u \in S_1$ e todo $v \in S_2$,

$$C'(u, 1) = u \text{ e } C'(1, v) = v.$$

Note-se que para todo $(u, v) \in Dom C'$, $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, assim a $Im C'$ é também um subconjunto de I .

Definição 1.2.2. Uma cópula bidimensional é uma subcópula C cujo domínio é I^2 .

Equivalentemente, uma cópula é uma função C de I^2 para I com as seguintes propriedades:

1. Para todo $u, v \in I$,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

e

$$C(u, 1) = u \text{ e } C(1, v) = v;$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1 e $v_2 \in I$ tal que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Porque $C(u, v) = V_C([0, u] \times [0, v])$, pode-se pensar que $C(u, v)$ como uma acessão de um número pertencente a I para o retângulo $[0, u] \times [0, v]$. Assim a propriedade 2 acima dá uma fórmula “inclusão-exclusão” para o número assegurado por C para cada retângulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subseteq I^2$ e garante que o número será não negativo.

A distinção entre uma subcópula e uma cópula (o domínio) pode parecer ser uma premissa, mas ficará coerente a importância na próxima seção quando discutiremos o teorema de Sklar (Sklar's theorem). Em adição, muitas das propriedades de cópulas são propriedades de subcópulas.

Teorema 1.2.3 Seja C' uma subcópula. Então para todo $(u, v) \in \text{Dom} C'$,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v).$$

Demonstração: Seja $(u, v) \in \text{Dom} C'$. Como $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ e $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$ temos $C'(u, v) \leq \min(u, v)$. Por outro lado, $V_C([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$ implica que $C'(u, v) \geq u + v - 1$, que quando combinado com $C'(u, v) \geq 0$ temos $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$. $\square$

Como toda cópula é uma subcópula, as desigualdades no teorema acima valem para cópulas. Importante, os limites no teorema 1.2.3 são também cópulas e são denotadas por $M(u, v) = \min(u, v)$ e $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$. Assim para toda cópula C e todo $(u, v) \in I^2$,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

As desigualdades acima são as versões de cópulas para os limites *Fréchet-Hoeffding*. Referimos a M como o limite superior e W como o limite inferior de *Fréchet-Hoeffding*. Uma terceira cópula importante que será freqüentemente utilizada é a cópula produto $\Pi(u, v) = uv$.

O teorema seguinte, que segue diretamente do Lema 1.1.5, estabiliza a continuidade de subcópulas e conseqüentemente de cópulas, via a condição de Lipschitz no I^2 .

Teorema 1.2.4 Seja C' uma subcópula. Então para todo $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \text{Dom} C'$,

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

Logo, C' é uniformemente contínua no seu domínio.

Definição 1.2.5 Seja C uma cópula, e seja a qualquer número pertencente a I . A secção horizontal de C em a é uma função de I em I dada por $t \mapsto C(t, a)$; a secção vertical de C em a é uma função de I em I dada por $t \mapsto C(a, t)$; a secção diagonal de C é uma função δ_C de I em I definida por $\delta_C(t) = C(t, t)$.

O corolário seguinte é uma consequência imediata do Lema 1.1.4 e do Teorema 1.2.4.

Corolário 1.2.6 As secções vertical, horizontal e diagonal de uma cópula C são todas não decrescentes e uniformemente contínuas em I .

Segue da Definição 1.2.2 e do Teorema 1.2.4 que o gráfico de qualquer cópula é uma superfície $S = \{u, v, C(u, v)\}$ contínua no cubo I^3 ; e do Teorema 1.2.3 que o gráfico está entre os gráficos dos limites de *Fréchet-Hoeffding*, isto é, as superfícies $z = M(u, v)$ e $z = W(u, v)$. Na figura abaixo apresentamos os gráficos das cópulas M e W , assim como o gráfico de Π , uma porção do parabolóide hiperbólico $z = uv$.

Teorema 1.2.7 Seja C uma cópula. Para qualquer $v \in I$, a derivada parcial $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ existe para todo u , e para tais v e u ,

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1$$

Semelhantemente, para qualquer $u \in I$, a derivada parcial $\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ existe para todo v , e para tais u e v ,

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1.$$

Portanto, as funções $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ e $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ são definidas e não decrescente ao menos em I .

Demonstração: A existência das derivadas parciais $\partial C(u, v)/\partial v$ e $\partial C(u, v)/\partial u$ é imediata porque funções monótonas são diferenciáveis em quase todo lugar. As desigualdades do teorema seguem colocando $v_1 = v_2$ e $u_1 = u_2$, respectivamente. Se $v_1 \leq v_2$, então, segue do Lema 1.1.3 que a função $u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ é não decrescente. Daqui $\partial(C(u, v_2) - C(u, v_1))/\partial u$ está definida e não negativa em todo I , segue que $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ está definida e não decrescente em todo I . Um resultado similar vale para $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$. $\square$

1.3 – TEOREMA DE SKLAR

O teorema desta seção é o teorema central da teoria de cópulas e é fundamental para muitas, se não todas, aplicações da teoria de cópulas ou tal vez na estatística. O teorema de Sklar elucida a regra que cópulas jogam nas relações entre função de distribuição multivariada e suas marginais. Assim iniciamos esta seção com uma curta discussão sobre funções de distribuição.

Informalmente, uma variável aleatória é um característico numérico do resultado de um experimento.

Exemplo 1 Lançar uma moeda n vezes e observar a seqüência de caras (c) e coroas ($\underline{c}$) obtidas. Os resultados possíveis aqui são seqüências de extensão n de caras e coroas e podemos definir

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = c \text{ ou } \underline{c}; i = 1, \dots, n\}.$$

O número de caras observadas nos n lançamentos é um característico numérico da sequência de caras observadas, vemos que o valor de X depende do resultado do experimento e podemos definir,

$$X(\omega) = \text{número de c's em } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \#\{i : \omega_i = c, 1 \leq i \leq n\}.$$

Definição 1.3.1 Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é uma função real definida no espaço Ω tal que $[X \leq x]$ é um evento aleatório para todo $x \in \mathfrak{R}$; i.e, $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ é variável aleatória se $[X \leq x] \in \mathcal{A} \forall x \in \mathfrak{R}$.

Definição 1.3.2 A função de distribuição da variável aleatória X , representada por F_X ou simplesmente por F , é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathfrak{R}.$$

1. F é não decrescente,
2. $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

Definição 1.3.3 A variável aleatória X é discreta se toma um número finito ou enumerável de valores, isto é, se existe um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathfrak{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\} \forall \omega \in \Omega$. A função $p(x_i)$ definida por

$$p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots,$$

é chamada função de probabilidade (ou função de frequência) de X .

Definição 1.3.4 A variável aleatória X é (absolutamente) contínua se existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathfrak{R}.$$

Neste caso, dizemos que f é função de densidade de probabilidade de X ou simplesmente densidade de X .

Definição 1.3.5 Uma função de distribuição conjunta é uma função H com o domínio em $\overline{\mathfrak{R}}^2$ tal que

1. H é 2-crescente,
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ e $H(\infty, \infty) = 1$.

Assim H é limitada inferiormente, $Dom H = \overline{\mathfrak{R}}^2$, H tem marginais F e G dada por $F(x) = H(x, \infty)$ e $G(y) = H(\infty, y)$. Por virtude do corolário 1.2.1, F e G são funções de distribuição.

Teorema 1.3.6 (Teorema de Sklar) Seja H uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe $x, y \in \overline{\mathfrak{R}}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Se F e G são contínuas, então a cópula C é única; caso contrário, C é unicamente determinada na $\text{Im } F \times \text{Im } G$. Inversamente, se C é uma cópula e F e G são funções de distribuição, então a função H é a função de distribuição conjunta com marginais F e G .

Demonstração: A existência da cópula vale para todo x e y pertencente a $\overline{\mathfrak{R}}$, pelos Lemas 1.3.7 e 1.3.8. Se F e G são contínuas, então $\text{Im } F = \text{Im } G = I$, segue que a subcópula é única pelo Lema 1.3.7 e é uma cópula.

Este teorema apareceu primeiro em (Sklar 1959). O nome “Cópula” foi escolhido para enfatizar a maneira que uma cópula “unifica” a função de distribuição conjunta e suas marginais. O argumento que damos abaixo é essencialmente o mesmo como em (Schweizer e Sklar 1974). Isto requer dois lemas.

Lema 1.3.7 Seja H uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe uma única subcópula C' tal que

1. $\text{Dom } C' = \text{Im } F \times \text{Im } G$,
2. Para todo $x, y \in \overline{\mathfrak{R}}$, $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.

Demonstração: A função de distribuição conjunta H satisfaz a hipótese do Lema 1.1.3 com $S_1 = S_2 = \overline{\mathfrak{R}}$. Assim para quaisquer pontos (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in \overline{\mathfrak{R}}^2$,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Segue que se $F(x_2) = F(x_1)$ e $G(y_2) = G(y_1)$, então $H(x_2, y_2) = H(x_1, y_1)$. Assim o conjunto de pares ordenados

$$\{((F(x), G(y)), H(x, y)) \mid x, y \in \overline{\mathfrak{R}}\},$$

define uma função real 2-place C' cujo domínio é $\text{Im } F \times \text{Im } G$. Que esta função é uma subcópula segue diretamente da propriedade de H . Por instante, para mostrar que satisfaz a definição 1.2.2, primeiro notemos que para cada $u \in \text{Ran } F$, existe um $x \in \overline{\mathfrak{R}}$ tal que $F(x) = u$. Assim $C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u$. As verificações das outras propriedades são semelhantes. $\square$

Lema 1.3.8 Seja C' uma subcópula. Então existe uma cópula C tal que $C(u, v) = C'(u, v)$ para todo $(u, v) \in \text{Dom } C'$; isto é, qualquer subcópula pode ser estendida à uma cópula. A extensão geralmente não é única.

Demonstração: Seja $\text{Dom } C' = S_1 \times S_2$. Usando a definição 1.2.2 e o fato que C' é não decrescente em cada plano, podemos estender C' pela continuidade para a função C'' com domínio $\overline{S_1} \times \overline{S_2}$, onde $\overline{S_1}$ é o conjunto fechado de S_1 e $\overline{S_2}$ é o conjunto fechado de S_2 . Claramente C'' é também uma subcópula. Depois estendemos C'' para uma função C com

domínio I^2 . Para terminar, seja (a, b) qualquer ponto em I^2 , sejam a_1 e a_2 , respectivamente, o menor e o maior elemento de $\bar{S}_1$ que satisfaz $a_1 \leq a \leq a_2$; sejam b_1 e b_2 , respectivamente, o menor e o maior elemento de $\bar{S}_2$ que satisfaz $b_1 \leq b \leq b_2$. Note que se $a \in \bar{S}_1$, então $a_1 = a = a_2$; e se $b \in \bar{S}_2$, então $b_1 = b = b_2$. Agora sejam

$$\lambda_1 = \begin{cases} (a - a_1)/(a_2 - a_1), & \text{se } a_1 < a_2, \\ 1, & \text{se } a_1 = a_2; \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} (b - b_1)/(b_2 - b_1), & \text{se } b_1 < b_2, \\ 1, & \text{se } b_1 = b_2; \end{cases}$$

e defina

$$C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1 C''(a_1, b_2) + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2, b_2).$$

Nota-se que a interpolação definida acima é linear em cada lugar (*conhecida como interpolação bilinear*) porque λ_1 e μ_1 são lineares em a e b , respectivamente.

Fica evidente que $DomC = I^2$, que $C(a, b) = C''(a, b)$ para qualquer $(a, b) \in DomC''$; e que C satisfaz as condições 1) e 2) da definição 1.2.2. Mostraremos somente que C satisfaz a condição 3) da definição 1.2.2. Para realizar isso, toma-se (c, d) um outro ponto pertencente I^2 tal que $c \geq a$ e $d \geq b$, e sejam $c_1, d_1, c_2, d_2, \lambda_2, \mu_2$ relacionados a c e d como $a_1, b_1, a_2, b_2, \lambda_1, \mu_1$ são relacionados a a e b . Evoluindo $V_C(B)$ para o retângulo $B = [a, c] \times [b, d]$, existem vários casos a considerar, dependendo de não existir um ponto em $\bar{S}_1$ entre a e c , ou de não existir um ponto em $\bar{S}_2$ entre b e d . No caso mais simples, não existe nenhum ponto em $\bar{S}_1$ entre a e c , nenhum ponto em $\bar{S}_2$ entre b e d , segue que $c_1 = a_1, c_2 = a_2, d_1 = b_1$ e $d_2 = b_2$. Assim

$$V_C(B) = V_C([a, c] \times [b, d]) = C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b),$$

abrindo cada termo $C(.,.)$ acima, temos:

$$C(c, d) = \underline{(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C''(c_1, d_1)} + \underline{(1 - \lambda_2)\mu_2 C''(c_1, d_2)} + \underline{\lambda_2(1 - \mu_2)C''(c_2, d_1)} + \underline{\lambda_2\mu_2 C''(c_2, d_2)}.$$

$$C(c, b) = \underline{(1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C''(c_1, b_1)} + \underline{(1 - \lambda_2)\mu_1 C''(c_1, b_2)} + \underline{\lambda_2(1 - \mu_1)C''(c_2, b_1)} + \underline{\lambda_2\mu_1 C''(c_2, b_2)}.$$

$$C(a, d) = \underline{(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C''(a_1, d_1)} + \underline{(1 - \lambda_1)\mu_2 C''(a_1, d_2)} + \underline{\lambda_1(1 - \mu_2)C''(a_2, d_1)} + \underline{\lambda_1\mu_2 C''(a_2, d_2)}.$$

$$C(a, b) = \underbrace{(1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1)}_{\text{.....}} + \underbrace{(1 - \lambda_1)\mu_1 C''(a_1, b_2)}_{\text{.....}} + \underbrace{\lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1)}_{\text{.....}} + \underbrace{\lambda_1\mu_1 C''(a_2, b_2)}_{\text{.....}}.$$

Continuando o cálculo de $V_C(B)$, somaremos as partes que estão com o mesmo tipo de sublinhados. Por exemplo (.....) temos:

$$\begin{aligned} &= (1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C''(c_1, d_1) - (1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C''(c_1, d_1) - (1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C''(c_1, d_1) \\ &+ (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(c_1, d_1) = \\ &= (1 - \lambda_2)[(1 - \mu_2) - (1 - \mu_1)]C''(c_1, d_1) + (1 - \lambda_1)[(1 - \mu_1) - (1 - \mu_2)]C''(c_1, d_1) = \\ &= [(1 - \lambda_2) - (1 - \lambda_1)][(1 - \mu_2) - (1 - \mu_1)]C''(c_1, d_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)C''(c_1, d_1) = \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)C''(a_1, b_1); \end{aligned}$$

analogamente, chegamos para (.....)

$$- (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)C''(a_1, b_2);$$

analogamente, chegamos para(-----)

$$- (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)C''(a_2, b_1);$$

analogamente, chegamos para(-----)

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)C''(a_2, b_2).$$

Logo,

$$V_C(B) = V_C([a, c] \times [b, d]) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]), \text{ de onde segue que}$$

$$V_C(B) \geq 0 \text{ neste caso, quando } c \geq a \text{ e } d \geq b \text{ implica } \lambda_2 \geq \lambda_1 \text{ e } \mu_2 \geq \mu_1.$$

Por outro lado, o caso mais simples ocorre quando existe um ponto em $\bar{S}_1$ entre a e c , e um ponto pertencente a $\bar{S}_2$ entre b e d , segue que $a < a_2 \leq c_1 < c$ e $b < b_2 \leq d_1 < d$. Neste caso, ilustramos a figura 1 acima, e arranjando a equação abaixo temos:

$$\begin{aligned}
V_C(B) = & (1 - \lambda_1)\mu_2 V_C([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2 V_C([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) + \\
& + \lambda_2 \mu_2 V_C([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1 - \lambda_1) V_C([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) + \\
& + V_C([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2 V_C([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) + \\
& + (1 - \mu_1) V_C([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) + \lambda_2 (1 - \mu_1) V_C([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]).
\end{aligned}$$

O lado direito da expressão acima é a combinação de nove quantidades não negativas (o C-volume dos nove retângulos determinados pelas linhas tracejadas na figura 1) com coeficientes não negativos. Os restantes casos são similares, que completam a demonstração.

Definição 1.3.9 Seja F uma função de distribuição. Então a quase-inversa de F é qualquer função F^{-1} com domínio I tal que

1. Se $t \in \text{Im } F$, então $F^{-1}(t)$ é qualquer número $x \in \overline{\mathfrak{R}}$ tal que $F(x) = F(F^{-1}(t)) = t$;
2. Se $t \notin \text{Im } F$, então $F^{-1}(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\} = \sup\{x \mid F(x) \leq t\}$.

Se F é estritamente crescente, então ela tem uma simples quase-inversa, que é a inversa ordinária, para qual utilizamos a seguinte notação F^{-1} .

Corolário 1.3.10 Sejam H, F, G e C' como no Lema 1.3.1, e sejam F^{-1} e G^{-1} quase inversa de F e G , respectivamente. Então para qualquer $(u, v) \in \text{Dom } C'$,

$$C'(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

1.4 – CÓPULAS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Vamos agora utilizar o teorema de Sklar em termos de suas variáveis aleatórias e suas funções de distribuição.

Teorema 1.4.1. Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição F e G , respectivamente, e função de distribuição conjunta H . Então existe uma cópula C tal que $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ vale. Se F e G são contínuas, então C é única. Por outro lado, C é unicamente determinada na $\text{Im } F \times \text{Im } G$.

A cópula C do teorema 1.4.1 será chamada de cópula de X e Y , e denotada C_{XY} quando sua identificação com as variáveis aleatórias X e Y seja vantajoso.

O seguinte teorema mostra que a cópula produto $\pi(u, v) = uv$ caracteriza variáveis aleatórias independentes quando as funções de distribuição são contínuas. A prova do teorema segue do teorema 1.4.1 e da observação que X e Y são independentes se e somente se $H(x, y) = F(x).G(y)$ para todo $(x, y) \in \overline{\mathfrak{R}}^2$.

Teorema 1.4.2. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas. Então X e Y são independentes se e somente se $C_{XY} = \pi$.

Uma das utilidades de cópulas no estudo de estatística não paramétrica deriva do fato de que para transformações estritamente monótonas de variáveis aleatórias, cópulas são invariantes. Lembramos que se a função de distribuição de uma variável aleatória é contínua, e se α é uma função estritamente monótona cujo domínio está contido no $\text{Im } X$, então a função de distribuição da variável aleatória $\alpha(X)$ é também contínua.

Trataremos o caso de transformações estritamente crescente primeiro.

Teorema 1.4.3. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula C_{XY} . Se α e β são estritamente crescente na $\text{Im } X$ e $\text{Im } Y$, então $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Assim C_{XY} é invariante sobre transformações estritamente crescente de X e Y .

Demonstração: Sejam F_1, G_1, F_2 e G_2 as funções de distribuição de $X, Y, \alpha(X)$ e $\beta(Y)$, respectivamente. Como α e β são estritamente crescente, $F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$ e igualmente $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$. Assim, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] = P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) = C_{XY}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

Como X e Y são contínuas, $\text{Im } F_2 = \text{Im } G_2 = I$, logo segue que $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ em I^2 .

Quando ao menos uma das α e β é estritamente decrescente, obtemos resultados em que a cópula das variáveis aleatórias $\alpha(X)$ e $\beta(Y)$ é uma simples transformação de C_{XY} . Especificamente, temos:

Teorema 1.4.4 Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula C_{XY} . Sejam α e β estritamente monótonas na $\text{Im } X$ e $\text{Im } Y$, respectivamente.

1. Se α é estritamente crescente e β é estritamente decrescente, então

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

2. Se α é estritamente decrescente e β é estritamente crescente, então

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

3. Se α e β são estritamente decrescente, então

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v) .$$

Demonstração: Sejam F_1, G_1, F_2 e G_2 as funções de distribuição de $X, Y, \alpha(X)$ e $\beta(Y)$, respectivamente.

Caso 1.

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] = P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), \infty] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= F_2(x) - C(F_2(x), 1 - G_2(y)) \end{aligned}$$

onde

$$F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$$

$$G_2(y) = P[\beta(Y) \leq y] = P[Y \geq \beta^{-1}(y)] = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)), \text{ pois } \beta \text{ é decrescente.}$$

Caso 2.

Análogo ao caso 1.

Caso 3.

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] = P[X \geq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\ &= 1 - [P[\infty, Y \leq \beta^{-1}(y)] + P[X \leq \alpha^{-1}(x), \infty] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)]] \\ &= 1 - [1 - F_2(x)] - [1 - G_2(y)] + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)) \\ &= F_2(x) + G_2(y) - 1 + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)). \end{aligned}$$

onde,

$$F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \geq \alpha^{-1}(x)] = 1 - F_1(\alpha^{-1}(x))$$

$$G_2(y) = P[\beta(Y) \leq y] = P[Y \geq \beta^{-1}(y)] = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)),$$

onde α e β são decrescentes. □

Para qualquer cópula C , temos

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v),$$

onde

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds \text{ e } S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v).$$

Se $C \equiv A_C$ em I^2 , isto é, se considerada com uma função de distribuição conjunta, C

te, uma densidade conjunta dada por $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t)$, então C é absolutamente contínua, porém

se $C \equiv S_C$ em I^2 , isto é, se $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) = 0$ em qualquer lugar de I^2 , então C é singular.

Por outro lado, C tem componentes A_C absolutamente contínua e S_C singular. Neste caso A_C e S_C não são cópulas, pois não têm marginais uniformes $(0,1)$.

1.5 – CÓPULAS MULTIVARIADA

Nesta seção, estenderemos os resultados das seções anteriores para o caso multivariado. Embora muitas das definições e teoremas tenham versões análogas multivariadas, mas nem todas, assim procederemos com cuidado. Reescrevemos as definições e teoremas nas suas versões multivariadas. Omitiremos as demonstrações dos teoremas pois são similares ao caso bivariada.

Daremos aqui algumas notações utilizadas, para qualquer inteiro positivo n , denotamos $\overline{\mathfrak{R}}^n = \overline{\mathfrak{R}} \times \overline{\mathfrak{R}} \times \dots \times \overline{\mathfrak{R}}$ o n -espaço. Usaremos a notação vetorial para pontos pertencentes ao $\overline{\mathfrak{R}}^n$, por exemplo, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, escrevemos $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ quando $a_k \leq b_k$ para todo k . Para $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, denotemos $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ o n -caixa $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, o produto cartesiano de n intervalos fechados. Os vértices de um n -box B são os pontos $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ onde cada c_k é igual a a_k ou b_k . O cubo unitário $I^n = I \times I \times \dots \times I$. Uma função com n variáveis reais H é uma função cujo domínio, $DomH$, é um subconjunto de $\overline{\mathfrak{R}}^n$ e cuja a imagem, ImH , é um subconjunto de $\mathfrak{R}$.

Definição 1.5.1 Sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$ subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função de n -variáveis reais tal que o $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$. Seja $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ um n -box cujos vértices pertencem todos ao $DomH$. Então o H -volume de B é dado por

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}),$$

em que a soma é tomada sobre todos os vértices $\mathbf{c}$ de B , e $\text{sgn}(\mathbf{c})$ é dado por

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{se } c_k = a_k \quad \forall k's \text{ impar.} \\ -1, & \text{se } c_k = b_k \quad \forall k's \text{ par.} \end{cases}$$

Equivalentemente, o H -volume de um n -box $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ é a n -ésima diferença de H em B .

$$V_H(B) = \Delta_a^b H(t) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(t),$$

em que definimos a n -ésima diferença de uma função com n -variáveis como segue

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(t) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Definição 1.5.2 Uma função real com n -variáveis H é n -crescente se $V_H(B) \geq 0$ para todo n -cubo B cujos vértices pertencem ao $DomH$.

Suponha que o domínio de uma função real com n -variáveis H é dado por $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$ onde cada S_k tem ao menos um elemento a_k . Dizemos que H é limitada inferiormente se $H(t) = 0$ para todo t pertencente ao $DomH$ tal que $t_k = a_k$ para ao menos algum k . Se cada S_k é não vazio e tem o maior elemento b_k , então dizemos que H tem marginais, e as marginais unidimensionais de H são as funções H_k dada por $DomH = S_k$ e

$$H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \text{ para todo } x \in S_k.$$

Lema 1.5.3 Sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$ subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função de n -variáveis reais tal que o $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$. Então H é não decrescente em cada argumento, isto é, se $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ e $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \in DomH$ e $x < y$. Então $H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$.

Lema 1.5.4 Sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$ subconjuntos não vazios de $\overline{\mathfrak{R}}$, e seja H uma função de n -crescente e limitada inferiormente com marginais cujo o $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$. Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ quaisquer pontos pertencentes $S_1 \times \dots \times S_n$. Então

$$|H(x) - H(y)| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

Definição 1.5.5 Uma subcópula n -dimensional (ou n -subcópula) é uma função C' com as seguintes propriedades:

1. $DomC' = S_1 \times \dots \times S_n$, onde cada S_k é um subconjunto de I contendo 0 e 1;
2. C' é limitada inferiormente e n -crescente;
3. C' tem (unidimensional) marginais C'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, que satisfaz

$$C'_k(u) = u, \forall u \in S_k.$$

Note que para todo u pertencente $DomC'$, $0 \leq C'(u) \leq 1$, segue que $RanC'$ é também um subconjunto de I .

Definição 1.5.6 Uma cópula n -dimensional (ou n -cópula) é uma n -subcópula C cujo domínio é I^n .

Equivalentemente, uma n -cópula é uma função C de I^n em I com as seguintes propriedades:

1. Para todo $\mathbf{u}$ pertencente a I^n ,
 $C(\mathbf{u}) = 0$ se ao menos uma coordenada de $\mathbf{u}$ é 0,
 e
 se todas as coordenadas de $\mathbf{u}$ são 1 exceto u_k , então $C(\mathbf{u}) = u_k$;
2. Para todo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ pertencentes a I^n tal que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$,
 $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

Uma consequência do Lema 1.5.4 é a continuidade uniforme de n -subcópulas (e consequentemente n -cópula):

Teorema 1.5.7 Seja C' uma n -subcópula. Então para todo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencentes a $\text{Dom} C'$,

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|.$$

Assim C' é uniformemente contínua no seu domínio.

Definição 1.5.8 Uma função de distribuição n -dimensional é uma função H com domínio em $\overline{\mathfrak{R}}^n$ tal que

1. H é n -crescente
2. $H(\mathbf{t}) = 0$ para todo $\mathbf{t}$ em $\overline{\mathfrak{R}}^n$ tal que $t_k = -\infty$ para ao menos um k , e
 $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Assim H é limitada inferiormente, e como $\text{Dom} H = \overline{\mathfrak{R}}^n$, segue do Lema 1.5.1 que as marginais unidimensionais de uma função de distribuição n -dimensional são funções de distribuição, que para $n \geq 3$ denotaremos por $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Teorema 1.5.9 Teorema de Sklar para n dimensões. Seja H uma função de distribuição n -dimensional com marginais $F_1, F_2, \dots, F_n$. Então existe uma n -cópula C tal que para todo $\mathbf{x}$ pertencente a $\overline{\mathfrak{R}}^n$,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Se $F_1, F_2, \dots, F_n$ são todas contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada na $\text{Ran} F_1 \times \text{Ran} F_2 \times \dots \times \text{Ran} F_n$. Inversamente, se C é uma n -cópula e $F_1, F_2, \dots, F_n$ são funções de distribuição, então a função H é uma função de distribuição n -dimensional com marginais $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Corolário 1.5.10 Sejam $H, C, F_1, F_2, \dots, F_n$ como no Teorema 1.5.2, e sejam $F_1^{-1}, F_2^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ quase inversas de $F_1, F_2, \dots, F_n$, respectivamente. Então para qualquer $u \in I^n$,

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

Teorema 1.5.11 Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias com funções de distribuição $F_1, F_2, \dots, F_n$, respectivamente, e função de distribuição conjunta H . então existe uma n -cópula C tal que o Teorema 1.5.2 vale. Se $F_1, F_2, \dots, F_n$ são todas contínuas, C é única. Caso contrário, C é unicamente determinada na $RanF_1 \times RanF_2 \times \dots \times RanF_n$.

As extensões das 2-cópias M, π e W para a n dimensão são denotadas por M^n, π^n e W^n , e são dadas por :

$$M^n(u) = \min(u_1, \dots, u_n)$$

$$\pi^n(u) = u_1 u_2 \dots u_n$$

$$W^n(u) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0)$$

As funções M^n e π^n são cópias para todo $n \geq 2$, mas a função W^n não é cópula para $n > 2$. Porém, temos a seguinte versão n -dimensional para os limites de Fréchet-Hoeffding.

Teorema 1.5.12 Se C' é qualquer n -subcópula, então para todo u no $DomC'$,

$$W^n(u) \leq C'(u) \leq M^n(u).$$

Embora o limite inferior de Fréchet-Hoeffding W^n nunca é uma cópula para $n > 2$, é o “*melhor possível*” no sentido de que para qualquer $n \geq 3$ e qualquer u em I^n . Existe uma n -cópula C tal que $C(u) = W^n(u)$:

Teorema 1.5.13 Para qualquer $n \geq 3$ e qualquer u em I^n , existe uma n -cópula C (que depende de u) tal que

$$C(u) = W^n(u).$$

Demonstração: (Sklar 1998) Seja $u = (u_1, \dots, u_n)$ um ponto fixo pertencente I^n e outros $0 = (0, \dots, 0)$ ou $1 = (1, \dots, 1)$. Existem dois casos a considerar.

1. Suponha $0 < u_1 + \dots + u_n \leq n - 1$. Considere o conjunto de pontos $v = (v_1, \dots, v_n)$ onde cada v_k é 0, 1 ou $t_k = \min\{(n-1)u_k / (u_1 + \dots + u_n), 1\}$. Defina uma função n -variada C' neste ponto $C'(v) = W^n(v)$. É simples verificar que C' satisfaz as condições de uma subcópula. Agora estendemos C' a uma n -cópula C via uma

“interpolação multilinear” similar ao caso bilinear. Então para cada $\mathbf{x}$ pertencente ao n -box $[\mathbf{0}, \mathbf{t}]$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ (incluindo $\mathbf{u}$), $C(\mathbf{x}) = W^n(\mathbf{x}) = 0$.

2. Suponha $n-1 < u_1 + \dots + u_n < n$ e considere o conjunto de pontos $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ onde agora cada v_k é 0, 1 ou $s_k = 1 - (1 - u_k) / [n - (u_1 + \dots + u_n)]$. Defina uma função n -variada C' neste ponto $C'(\mathbf{v}) = W^n(\mathbf{v})$, e estenda a uma n -cópula C como antes. Seja $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$. Então para cada $\mathbf{x}$ pertencente ao n -box $[\mathbf{s}, \mathbf{1}]$ (incluindo $\mathbf{u}$), $C(\mathbf{x}) = W^n(\mathbf{x}) = x_1 + \dots + x_n - n + 1$.

As n -cópulas M^n e π^n têm caracterizações similares a M, π .

Teorema 1.5.14 Para $n \geq 2$, sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias contínuas. Então

1. $X_1, \dots, X_n$ são independentes se e somente se a n -cópula de $X_1, \dots, X_n$ é π^n , e
2. Cada uma das variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ é função crescente de qualquer uma outra se e somente se a n -cópula de $X_1, \dots, X_n$ é M^n .

Demonstração: análoga ao caso bivariado.

Capítulo 2

CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA

Neste capítulo tratamos dos conceitos de dependência que serão relevantes para o desenvolvimento desse texto. Iniciamos com uma discussão a respeito do que é intuitivamente a dependência. Em seguida serão tratadas algumas formas específicas de dependência, a saber a permutabilidade, a dependência perfeita e a concordância, as quais são aplicadas nos capítulos seguintes. Finalmente serão apresentadas algumas medidas de dependência e suas características.

2.1 – O FENÔMENO DE DEPENDÊNCIA

A dependência entre as variáveis aleatórias é totalmente definida pela função de distribuição conjunta dessas variáveis, ou seja, todo o conhecimento a respeito das características da dependência entre as variáveis e de suas inter-relações está inserido nesta função.

No entanto, a distribuição conjunta não informa especificamente como é essa dependência, nem mensura. Para isso são desenvolvidas as medidas de dependência, que são instrumentos que quantificam essa associação. Essa quantificação tem como base um intervalo entre -1 e +1, valores que representam respectivamente a dependência perfeita negativa e a dependência perfeita positiva. De maneira análoga ao comportamento das funções, a associação entre variáveis tem uma infinidade de formas de se manifestar, por exemplo, dependência linear, dependência caudal, entre outras. A mensurabilidade dessa dependência também tem caráter bastante específico, ou seja, cada medida de dependência se destina a captar determinadas facetas da dependência, privilegiando as mesmas em detrimento de outras que a associação em particular apresenta. Isso é um fator importante na hora de se medir e, principalmente, avaliar o que a medida de dependência informa, no sentido de que cada medida de dependência é apropriada a mensurar um aspecto da dependência, e que se aplicada para mensurar um aspecto diverso pode levar a conclusões e interpretações.

Definição 2.1.1 As variáveis aleatórias X e Y são ditas *comonotônicas* se são positivamente e perfeitamente dependentes (*i.e.*, $X = Y$ quase certamente) e *contramono- notônicas* se são negativamente e perfeitamente dependentes (*i.e.*, $X = -Y$ quase certamente).

Seja $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ estritamente monótona no intervalo de variação de X .

Apesar da multiplicidade de medida de dependência, todas elas são norteadas por um conjunto de propriedades desejáveis para tais medidas.

Seja $\delta(., .)$ uma medida de dependência, então:

- (i) Simetria ($\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$);
- (ii) Normalização ($-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$);
- (iii) $\delta(X, Y) = 1 \Leftrightarrow X, Y$ comonotônicas,
 $\delta(X, Y) = -1 \Leftrightarrow X, Y$ contramonotônicas;
- (iv) $\delta(T(X), Y) = \delta(X, Y)$, com T crescente,
 $\delta(T(X), Y) = -\delta(X, Y)$, com T decrescente;
- (v) $\delta(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ independentes.

As propriedades (iv) e (v) são mutuamente excludentes, de modo que nenhuma medida de dependência tem essas propriedades simultaneamente.

2.2 – O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

Seja (X, Y) um vetor de variáveis aleatórias com variâncias positivas finitas. O coeficiente de correlação linear de (X, Y) é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}},$$

onde $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ é a covariância entre X e Y e $Var(X)$, $Var(Y)$ são as variâncias de X e Y , respectivamente.

As principais propriedades do coeficiente de correlação linear são:

- (r1) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;
- (r2) se X e Y são independentes, então $\rho(X, Y) = 0$;
- (r3) $\rho(aX + b, cY + d) = \text{sign}(ac)\rho(X, Y)$ todos reais $a \neq 0, c \neq 0, b$ e d , onde

$\text{sign}(\cdot)$ é a função sinal de $(\cdot)$.

O coeficiente $\rho(X, Y)$ é uma medida *paramétrica* da dependência linear entre as variáveis, sendo invariante sob transformações lineares estritamente crescentes. Também $\rho(X, Y)$ é uma medida de dependência natural nas distribuições esférica e elíptica.

Algumas falhas e interpretações errôneas do coeficiente de correlação linear:

Falha 1: As variâncias de X e Y têm que ser finitas ou o coeficiente de correlação linear não é definido. Isto não é ideal para uma medida de dependência e causa problemas quando trabalhamos com distribuição com caudas pesadas. Por exemplo, a covariância e a correlação entre duas componentes de um vetor aleatório bivariado com distribuição - t_ν não são definidos para $\nu \leq 2$.

Falha 2: Independência de duas variáveis aleatórias implica que elas não são correlacionadas, mas correlação zero em geral não implica independência.

Falha 3: A Correlação linear é não-invariante sob transformações não lineares estritamente crescentes $T : \Re \rightarrow \Re$, isto é

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y).$$

Se tomarmos a distribuição normal bivariada com correlação ρ e a transformação $T(X) = \Phi(X)$ (a função de distribuição normal padrão) temos:

$$\rho(T(X), T(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

Veja Joag – Dev (1984). Em geral pode-se mostrar (Ver Kendall e Stuart (1979), página 600) que para vetores bivariados distribuídos normalmente e transformações arbitrárias $T, \tilde{T} : \Re \rightarrow \Re$ que

$$|\rho(T(X), T(Y))| \leq |\rho(X, Y)|.$$

Falha 4: Distribuição marginal e o coeficiente de correlação linear determinam a distribuição conjunta. Apenas as distribuições multivariadas normais e distribuições elípticas. Por exemplo, sabendo que $(X, Y)^t$ tem distribuição normal bivariada, então a esperança e a variância de X e Y e o coeficiente de correlação $\rho(X, Y)$ são unicamente determinados pela distribuição conjunta. Porém, se somente conhecemos as distribuições marginais X , Y e o coeficiente de correlação, então existem muitas possibilidades para distribuição bivariada $(X, Y)^t$. A distribuição de $(X, Y)^t$ não é unicamente determinada por F_1 , F_2 e $\rho(X, Y)$.

Falha 5: Dadas as distribuições marginais F_1 , F_2 de X e Y , todos os valores de correlação linear entre -1 e 1 não podem ser atingidos sem termos especificação da distribuição conjunta.

A afirmação acima é verdadeira e mostramos no exemplo abaixo:

Exemplo 1: Sejam X e Y variáveis aleatórias com suporte $[0, \infty)$, segue que $F_1(x) = F_2(y) = 0$ para todo $x, y < 0$. O ponto final de F_1 e F_2 é o infinito,

$\sup_x \{x \mid F_1(x) < 1\} = \sup_y \{y \mid F_2(y) < 1\} = \infty$. Assumimos que $\rho(X, Y) = -1$, que implica $Y = aX + b$ assim, com $a < 0$ e $b \in \Re$. Segue que para todo $y < 0$,

$$F_2(y) = P[Y \leq y] \geq P[X > (y - b)/a] = 1 - F_1((y - b)/a) > 0,$$

que contradiz a suposição que $F_2(y) = 0$.

O seguinte teorema mostra quais correlações são possíveis para dadas distribuições marginais.

Teorema 2.2.1. [Höfdding (1940) e Fréchet (1957)] Seja $(X, Y)^t$ um vetor aleatório com marginais F_1 e F_2 e estrutura não especificada; assumimos $0 < \sigma^2[X], \sigma^2[Y] < \infty$, então

1. O conjunto de todas as correlações possíveis é o intervalo fechado $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ e para correlações extremas $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$ valem.
2. A correlação extrema $\rho = \rho_{\min}$ é atingida se e somente se X e Y são contramonotônicas; $\rho = \rho_{\max}$ é atingida se e somente se X e Y são comonotônicas.
3. $\rho_{\min} = -1$ se e somente se X e $-Y$ são do mesmo tipo ($X = -Y$ quase certamente); $\rho_{\max} = 1$ se e somente se X e Y são do mesmo tipo ($X = Y$ quase certamente);.

Demonstração: Usaremos a seguinte identidade, devida a Höfdding (1940),

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x, y) - F_1(x)F_2(y)\} dx dy,$$

e observaremos as desigualdades de Fréchet

$$\max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\} \leq F(x, y) \leq \min\{F_1(x), F_2(y)\}.$$

A identidade de Höfdding é minimizada ponto a ponto, se X e Y são contramonotônicas e maximizada se X e Y são comonotônicas. É claro que $\rho_{\max} \geq 0$. Porém, se $\rho_{\max} = 0$ implica que $\min\{F_1(x), F_2(y)\} = F_1(x)F_2(y)$ para todo x, y . Isto pode somente ocorrer se F_1 ou F_2 é degenerada, isto é da forma $F_1 = 1_{\{x \geq x_0\}}$ ou $F_2 = 1_{\{y \geq y_0\}}$, e isto implica $\sigma^2[X] = 0$ ou $\sigma^2[Y] = 0$, assim segue que a correlação entre X e Y é não definida. Semelhantemente argumentamos para $\rho_{\min} \leq 0$. Se $F_l(x, y) = \max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\}$ e $F_u(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}$ então a mistura $\lambda F_l + (1 - \lambda)F_u$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tem correlação $\lambda \rho_{\min} + (1 - \lambda)\rho_{\max}$. Usando a mistura podemos construir distribuições conjuntas com marginais F_1 e F_2 e com correlação arbitrária $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$.

Exemplo 1: Sejam $X \sim \text{Lognormal}(0,1)$ e $Y \sim \text{Lognormal}(0,\sigma^2)$, $\sigma > 0$. desejamos calcular $\rho_{\min}$ e $\rho_{\max}$ para as marginais. Note que X e Y não são do mesmo tipo embora $\log(X)$ e $\log(Y)$ sejam. É claro que $\rho_{\min} = \rho(e^Z, e^{-\sigma Z})$ e $\rho_{\max} = \rho(e^Z, e^{\sigma Z})$, onde $Z \sim N(0,1)$. Esta observação nos permite calcular $\rho_{\min}$ e $\rho_{\max}$ analiticamente:

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2} - 1)}},$$

$$\rho_{\max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2} - 1)}}.$$

As correlações máximas e mínimas são mostradas graficamente na figura abaixo. Observamos que $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \rho_{\min} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \rho_{\max} = 0$.

Este exemplo mostra que é possível termos um vetor aleatório $(X, Y)^t$ onde a correlação é próxima de zero, embora X e Y sejam comonotônicas ou contramonotônicas e assim tendo fortes tipos de dependência possíveis. Isto vem contradizer nossa intuição sobre probabilidade e mostra que pequenas correlações não podem ser interpretadas como dependência fraca entre variáveis aleatórias.

Falha 5: O pior VaR (quantil) para um portfólio $X + Y$ ocorre quando $\rho(X, Y)$ é máxima, isto é, X e Y são comonotônicas.

Isto é comum considerando variância como uma medida de risco em seguros e finanças, onde é verdade que a variância de um portfólio linear,

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y),$$

é máxima quando a correlação é máxima. Isto em geral não é correto para concluir que o Value-at-Risk é também máximo. Para distribuições elípticas isto é verdadeiro, mas geralmente é falso.

Sejam duas variáveis aleatórias X e Y tendo funções de distribuição F_1 e F_2 mas com estrutura de dependência (cópula) não é especificada. O seguinte teorema nos dá um limite superior para $VaR_\alpha(X + Y)$.

Teorema 2.2.2. [Makarov (1981) e Frank, Nelsen, e Schweizer (1987)]

1. Para todo $z \in \mathfrak{R}$,

$$P[X + Y \leq z] \geq \sup_{x+y=z} C_l(F_1(x), F_2(y)) =: \psi(z).$$

Este limite é apurado no seguinte sentido: o conjunto $t = \psi(z-) = \lim_{u \rightarrow z-} \psi(u)$. Então existe uma cópula, que denotamos por $C^{(t)}$, segue que sobre as distribuições com funções de distribuição $F(x, y) = C^{(t)}(F_1(x), F_2(y))$ temos que $P[X + Y < z] = \psi(z)$.

2. Seja $\psi^{-1}(\alpha) = \inf\{z \mid \psi(z) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$ ser a inversa generalizada de ψ . Então

$$\psi^{-1}(\alpha) = \inf_{C_l(u, v) = \alpha} \{F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(v)\}.$$

3. O seguinte limite superior para o VaR vale:

$$VaR_\alpha(X + Y) \leq \psi^{-1}(\alpha).$$

Este limite é o melhor possível.

Demonstração:

1. para qualquer $x, y \in \mathfrak{R}$ com $x + y = z$ a aplicação da desigualdade de Fréchet temos,

$$P[X + Y \leq Z] \geq P[X \leq x, Y \leq y] \geq C_l(F_1(x), F_2(y)).$$

Tomando o supremo $x + y = z$ do lado direito mostramos a primeira parte.

A demonstração da segunda, queremos mostrar que $C^{(t)}$ está completa. Para detalhes matemáticos nós referimos a Frank, Nelsen, e Schweizer (1987). Restringimos nossos resultados a funções de distribuição contínuas F_1 e F_2 . Desde que cópulas são

distribuições com marginais uniformes levamos o problema para o quadrado unitário definindo,

$$A = \{(F_1(x), F_2(y)) \mid x + y \geq z\} \text{ cuja vizinhança é } s = \{(F_1(x), F_2(y)) \mid x + y = z\}.$$

Precisamos encontrar uma cópula $C^{(t)}$ tal que $\int \int_A dC^{(t)} = 1 - t$. Desde que F_1 e F_2 são contínuas, temos que $\psi(z-) = \psi(z)$ e, portanto, $t \geq u + v - 1$ para todo $(u, v) \in s$. Assim a linha $t = u + v - 1$ pode ser considerada como um tangente a s e pode ser escolhido como $C^{(t)}$. $C^{(t)}$ pertence à distribuição que é uniforme no segmento de linha $\overline{(0,0)(t,t)}$ e $\overline{(t,1)(1,t)}$. Portanto

$$C^{(t)}(u, v) = \begin{cases} \max\{u + v - 1, t\} & (u, v) \in [t, 1] \times [t, 1], \\ \min\{u, v\} & \text{c.c.} \end{cases}$$

Desde que $\overline{(t,1)(1,t)} \subset A$ tem probabilidade $1 - t$, temos que sobre $C^{(t)}$ que $P[X + Y \geq z] = \int \int_A dC^{(t)} \geq 1 - t$ e, portanto, $P[X + Y < z] \leq t$. Mas desde que t é um limite inferior para $P[X + Y < z]$ é necessário que $P[X + Y < z] = t$.

2. Segue do teorema de dualidade em Frank e Schweizer (1979).

3. Seja $\varepsilon > 0$. Então temos

$$P[X + Y \leq \psi^{-1}(\alpha) + \varepsilon] \geq \psi(\psi^{-1}(\alpha) + \varepsilon) \geq \alpha.$$

Calculando o limite $\varepsilon \rightarrow 0+$ vale que $P[X + Y \leq \psi^{-1}(\alpha)] \geq \alpha$ e, portanto, $VaR_\alpha(X + Y) \leq \psi^{-1}(\alpha)$. Este limite superior não pode ser improvável. Novamente, tomamos $\varepsilon > 0$. Então $(X, Y)^t$ tem cópula $C^{(\psi^{-1}(\alpha) - \varepsilon/2)}$ tem-se

$$\begin{aligned} P[X + Y \leq \psi^{-1}(\alpha) - \varepsilon] &\leq P[X + Y \leq \psi^{-1}(\alpha) - \varepsilon/2] = \psi((\psi^{-1}(\alpha) - \varepsilon/2)-) = \\ &= \psi((\psi^{-1}(\alpha) - \varepsilon/2)) < \alpha \end{aligned}$$

E, portanto, $VaR_\alpha(X + Y) > \psi^{-1}(\alpha) - \varepsilon$.

2.3 – O CONCEITO DE PERMUTABILIDADE

Uma grande classe de variáveis aleatórias é a das seqüências permutáveis $(X_1, \dots, X_n)$.

Definição 2.3.1 Dizemos que as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ são permutáveis (Simétricas) se a distribuição conjunta do vetor $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ é idêntica à distribuição do vetor $(X_1, \dots, X_n)$ para todas as permutações $(i_1, \dots, i_n)$ de índices $(1, \dots, n)$.

O conceito de permutabilidade está fortemente conectado com a equicorrelação entre elementos de seqüências de variáveis com o primeiro e segundo momento finito.

Para ver isso basta normalizar linearmente $Z_i = \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{Var(X_i)}}$ para se ter $E(Z_i) = 0$ e

$Var(Z_i) = 1, i = 1, \dots, n$. Se $(X_1, \dots, X_n)$ é uma seqüência permutável de variáveis aleatórias, então existe uma equicorrelação entre essas variáveis aleatórias, a saber

$$\rho_0 = corr(X_i, X_j) = corr(Z_i, Z_j) = E(Z_i Z_j), i \neq j.$$

Considere a desigualdade

$$0 \leq E\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n E(Z_i^2) + \sum_{i \neq j} E(Z_i Z_j) = n + n(n-1)r_0.$$

Então

$$r_0 \geq -\frac{1}{n-1} \text{ com igualdade se } \sum_{i=1}^n X_i = 0 \text{ quase certamente} \quad (3.1)$$

No sentido inverso tem-se que todo ρ_0 satisfeito (3.1) ocorre como correlação em alguma seqüência permutável.

Para mostrar isso, seja $(R_1, \dots, R_n)$ uma seqüência de variáveis aleatórias com $E(R_i) = 0, Var(R_i) = 1$ e defina

$$X_i = R_i + d \sum_{i=1}^n R_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

para alguma constante d . Então $(X_1, \dots, X_n)$ é uma seqüência permutável, e

$$\rho_0 = E(X_i X_j) = 1 - \frac{1}{nd^2 + 2d + 1}, i \neq j.$$

Variando d é possível obter todos os valores $\rho_0 \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1\right]$.

Em particular $\rho_0 = \left[\frac{-1}{n-1}\right]$ para $d = -\frac{1}{n}$ (para uma amostragem sem reposição de uma

urna com n elementos, ou se as variáveis X_i 's têm distribuição multinomial simétrica) e $r_0 = 1$ fazendo-se $X_i = \dots = X_n$ quase certamente ($d \rightarrow \infty$).

Note que o determinante da matriz de covariância de $(X_1, \dots, X_n)$ é igual a $(1 - \rho_0)^{n-1} [1 - \rho_0(n-1)]$. Este deve ser não negativo, i.e. $\rho_0 \geq -(n-1)^{-1}$, o que confirma a relação (3.1).

No caso infinito quando $(n \rightarrow \infty)$, (3.1) implica $r_0 \geq 0$.

2.4 – DEPENDÊNCIA PERFEITA

A dependência perfeita está fortemente relacionada com a noção de comonotonicidade e contramonotonicidade, introduzidas pela definição 2.1.1 no caso bivariado.

Vimos que para $n = 2$ os limites inferior e superior de Fréchet, denotados por $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ e $M(u, v) = \min(u, v)$ respectivamente, são cópulas e configuram as funções distribuições conjuntas bivariadas dos vetores aleatórios $(U, 1 - U)$ e (U, U) respectivamente, onde $U \sim U(0, 1)$. Neste caso $W(u, v)$ e $M(u, v)$ descrevem as dependências perfeitas negativas e positivas respectivamente.

Teorema 2.4.1 Seja $(X, Y)^t$ com $C_l = W(u, v)$ ou $C_u = M(u, v)$. Então existem duas funções monótonas $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e uma variável aleatória Z tal que

$$(X, Y)^t =_d (\alpha(Z), \beta(Z))^t,$$

onde $=_d$ indica igualdade em distribuição e com $\alpha(\cdot)$ crescente e $\beta(\cdot)$ decrescente no caso de $(X, Y)^t$ ter cópula $W(u, v)$ e ambos $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ crescentes no caso de $(X, Y)^t$ ter cópula $M(u, v)$. A recíproca do teorema também é válida.

Demonstração: A prova para o segundo caso é dada essencialmente em Wang e Dhaene (1998). A interpretação geométrica das cópulas de Fréchet é dada em Mikusinski, Sherwood e Taylor (1992). Consideremos somente o primeiro caso $C = C_l$, as outras seguem semelhantemente.

Seja $U \sim U_{(0,1)}$ uma variável aleatória uniforme. Temos

$$(X, Y)^t =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1 - U))^t = (F_1^{-1}(U), F_2^{-1} \circ g(U))^t,$$

onde $F_i^{-1}(q) = \inf_{x \in \mathfrak{R}} \{F_i(x) \geq q\}$, $q \in (0, 1)$ é a função quantil de F_i , $i = 1, 2$ e $g(x) = 1 - x$.

Segue que $\alpha := F_1^{-1}$ é crescente e $\beta := F_2^{-1} \circ g$ é decrescente. Para relações contrárias assumimos

$$(X, Y)^t =_d (\alpha(Z), \beta(Z))^t,$$

onde α e β são crescente e decrescente, respectivamente. Definimos $A := \{Z \in \alpha^{-1}((-\infty, x])\}$, $B := \{Z \in \beta^{-1}((-\infty, y])\}$. Se $A \cap B \neq \emptyset$, então a monotonicidade de α e β implicam que

$$P[A \cup B] = P[\Omega] = 1 = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

e daqui $P[A \cup B] = P[\alpha(Z) \leq x, \beta(Z) \leq y] = F_1(x) + F_2(y) - 1$. Se $A \cap B \neq \emptyset$, então $F_1(x) + F_2(y) - 1 \leq 0$. Em todos os casos temos

$$P[\alpha(Z) \leq x, \beta(Z) \leq y] = \max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\}.$$

□

No caso das marginais serem contínuas uma versão mais forte do teorema 2.4.1 pode ser apresentada:

$$C = W \text{ se e somente se } Y = T(X) \text{ q.c.}, T = G^{-1} \circ (1 - F) \text{ decrescente,}$$

$$C = M \text{ se e somente se } Y = T(X) \text{ q.c.}, T = G^{-1} \circ F \text{ crescente,}$$

onde o símbolo $\circ$ indica a função composta $F(x)$ e $G(y)$ são as distribuições marginais de X e Y , respectivamente.

Seja $n \geq 2$. Para toda cópula $C(u)$ nós sabemos pela desigualdade de Fréchet-Hoeffding $W^n(u) \leq C(u) \leq M^n(u)$.

2.5– CONCORDÂNCIA E MEDIDA DE CONCORDÂNCIA

Sejam (x, y) e (x', y') duas observações de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas, Então (x, y) e (x', y') são ditos *concordantes* quando $(x - x')(y - y') > 0$ e *discordantes* quando $(x - x')(y - y') < 0$.

Teorema 2.5.1 Sejam (X, Y) e (X', Y') vetores independentes de variáveis aleatórias contínuas, com funções distribuições conjuntas H e H' , respectivamente, com marginais comuns $F(x)$ (de X e X') e $G(y)$ (de Y e Y'). Sejam $C(.,)$ e $C'(.,)$ as cópulas de (X, Y) e (X', Y') respectivamente de modo que $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ e $H'(x, y) = C'(F(x), G(y))$. Seja Q a diferença entre a probabilidade concordância e a de discordância de (X, Y) e (X', Y') , isto é, seja

$$Q = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0].$$

Então

$$Q = Q(C, C') = 4 \int_0^1 \int_0^1 C'(u, v) - 1.$$

Demonstração: Como as variáveis aleatórias são contínuas,

$$P[(X - X')(Y - Y') < 0] = 1 - P[(X - X')(Y - Y') > 0]$$

e daqui

$$Q = 2P[(X - X')(Y - Y') > 0] - 1.$$

Mas $P[(X - X')(Y - Y') > 0] = P[X > X', Y > Y'] + P[X < X', Y < Y']$, e essas probabilidades podem ser evoluídas integrando sobre as distribuição de um dos vetores $(X - X')$ ou $(Y - Y')$, digamos $(X - X')$. Primeiramente temos

$$\begin{aligned} P[X > X', Y > Y'] &= P[X' < X, Y' < Y], \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} P[X' \leq x, Y' \leq y] dC_1(F(x), G(y)), \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

substituindo, $u = F(x)$ e $v = G(y)$ temos

$$P[X > X', Y > Y'] = \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned} P[X < X', Y < Y'] &= \iint_{\mathbb{R}^2} P[X' > x, Y' > y] dC_1(F(x), G(y)), \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)), \\ &= \iint_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Mas como C_1 é uma função de distribuição conjunta de uma par (U, V) variáveis uniforme $(0,1)$, $E(U) = E(V) = 1/2$, e daqui

$$\begin{aligned} P[X < X', Y < Y'] &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v), \\ &= \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Assim,

$$P[(X - X')(Y - Y')] = 2 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

$$\text{Logo, } Q = Q(C, C') = 4 \int_0^1 \int_0^1 C'(u, v) - 1.$$

Corolário 2.5.2 Sejam $C(\cdot, \cdot)$, $C'(\cdot, \cdot)$ e Q como definidos no teorema 2.5.1, então

1. Q é simétrica em seus argumentos: $Q(C, C') = Q(C, C')$.
2. Q é não decrescente em cada argumento se $C \prec C''$, então

$$\begin{aligned} Q(C, C') &\leq Q(C'', C'), \text{ onde } C \prec C'', \\ (i.e., C(u, v) &\leq C''(u, v)) \text{ e } \bar{C}(u, v) \leq \bar{C}''(u, v). \end{aligned}$$

Definição 2.5.3 Uma medida real κ de dependência entre duas variáveis aleatórias contínuas X e Y com cópula $C(.,.)$ é uma *medida de concordância* se ela satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) κ está definida para todo par X, Y de variáveis aleatórias contínuas;
- (ii) $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1, \kappa_{X,X} = 1$ e $\kappa_{X,-X} = -1$;
- (iii) $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$;
- (iv) Se X e Y são independentes, então $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\pi} = 0$;
- (v) $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$;
- (vi) Se $C(.)$ e $C'(.)$ são cópulas tais $C \prec C'$, então $\kappa_C \leq \kappa_{C'}$;
- (vii) Se $\{(X_n, Y_n)\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias contínuas com cópulas C_n , e se $\{C_n\}$ converge ponto a ponto para C , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Seja κ uma medida de concordância para variáveis aleatórias contínuas X e Y . Como consequência da definição acima, se Y é quase certamente uma função crescente de X , então $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$, e se Y é quase certamente uma função decrescente de X , então $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$. Além disso, se $\alpha(.)$ e $\beta(.)$ são quase certamente funções crescentes em $\text{Im}(X)$ e $\text{Im}(Y)$ respectivamente, onde $\text{Im}(.)$ representa a imagem de $(.)$, então $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.

As principais medidas de dependência e suas características são representadas a seguir. Nós discutimos o coeficiente de Kendall, o coeficiente de Spearman, Estas medidas são baseadas no conceito de cópulas. As duas são consideradas como alternativas não-paramétricas para o coeficiente de correlação linear e podem servir como medidas de dependência para distribuições não-elípticas, para as quais o coeficiente de correlação linear não é apropriado e algumas vezes até enganoso.

2.6– COEFICIENTE DE KENDALL

A medida de Kendall, $\tau(X, Y)$, para o vetor (X, Y) , é definida como a diferença entre as probabilidades de concordância e discordância. Então,

$$\tau(X, Y) = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0], \quad \text{onde } (X', Y') \text{ é}$$
 uma cópia independente de (X, Y) .

Portanto, a medida $\tau(X, Y)$ para (X, Y) é simplesmente a medida $Q(C, C')$ definida na Teorema 2.5.1.

Seja $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ uma amostra aleatória do vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Sejam R_i e S_i os postos nos conjuntos $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_n$, respectivamente, $1 \leq i \leq n$. A versão amostral τ_n de $\tau(X, Y)$ é dada por

$$\tau_n = \frac{2}{n^2 - n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}(R_i - R_j) \text{sign}(S_i - S_j).$$

Teorema 2.6.1 [Nelsen (1999)]. Seja (X, Y) um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(\cdot)$. Então a medida de Kendall $\tau(X, Y)$ para (X, Y) é dada por

$$\tau(X, Y) = Q(C, C) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Note que a integral acima é o valor esperado da variável aleatória $C(U, V)$, onde $U, V \sim U(0, 1)$ com função distribuição conjunta $C(\cdot)$, isto é,

$$\tau(X, Y) = E[C(U, V)] - 1.$$

2.7– COEFICIENTE DE SPEARMAN

A medida de Spearman, $\rho_s(X, Y)$ para o vetor aleatório (X, Y) é definido como

$$\rho_s(X, Y) = 3\{P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X'')(Y - Y'') < 0]\},$$

onde (X, Y) , (X', Y') e (X'', Y'') são cópias independentes. É importante notar que X' e Y'' são independentes.

A versão amostral ρ_{s_n} de $\rho_s(X, Y)$ é dada por

$$\rho_{S_n} = \frac{12}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n R_i S_i - \frac{3(n+1)}{n-1}.$$

Teorema 2.7.1 [Nelsen (1999)] Seja (X, Y) um vetor aleatório de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(\cdot)$. Então o coeficiente Spearman $\rho(X, Y)$ é dado por

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 3Q(C, \pi) = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3, \end{aligned}$$

onde $\pi(u, v)$ é a cópula independente.

Portanto, se $X \sim F$ e $Y \sim G$ e sendo $U = F(X)$ e $V = G(Y)$ (uniformes em $(0, 1)$), com $EU = EV = 0.5$ e $Var(U) = Var(V) = \frac{1}{12}$, então

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)} \sqrt{Var(V)}} = \rho(F(X), G(Y)), \end{aligned}$$

onde $\rho_S(\cdot)$ é o coeficiente de correlação linear definido na Seção 2.2. Após manipulações algébricas chega-se a

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dudv.$$

Esta última relação nos dá uma interpretação geométrica bastante intuitiva do coeficiente $\rho_S(X, Y)$. Ele é o Volume entre as superfícies $Z = C(u, v)$ e $Z = uv$.

As medidas de dependência não-paramétricas clássicas de Kendall e de Spearman são superiores ao coeficiente de correlação de Pearson $\rho(X, Y) = Corr(X, Y)$, uma vez que elas se anulam quando as variáveis são independentes, elas sempre existem e assumem seus valores extremos ± 1 quando X e Y estão em perfeita dependência funcional monótona. Assim, quando consideramos dados aleatórios $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ advindos de uma distribuição $H(x, y)$ cujo suporte é $[0, \infty)^2$, os valores de $\rho_S(X, Y)$ e $\tau(X, Y)$ não têm restrições, ao

passo que $\rho(X,Y)$ só pode cobrir um intervalo $[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \in [-1,1]$ cujos limites dependem da escolha das marginais $F(x)$ e $G(Y)$.

Além das propriedades listadas na definição 2.5.3 para medidas de concordância, é importante notar que as medidas de Kendall e de Spearman satisfazem algumas outras propriedades bastante úteis. Abaixo enunciamos algumas delas. Seja (X,Y) um vetor aleatório com cópula $C(\cdot)$. Então

$$\begin{aligned} C(u,v) = M(u,v) &\Rightarrow \tau(X,Y) = \rho(X,Y) = 1; \\ C(u,v) = W(u,v) &\Rightarrow \tau(X,Y) = \rho(X,Y) = -1. \end{aligned}$$

O próximo teorema estabelece, com algumas restrições nas hipóteses, a volta das propriedades acima.

Teorema 2.7.2 [Embrechts et al. (2002)] Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(\cdot)$. Então

$$\begin{aligned} C(u,v) = M(u,v) &\Leftrightarrow r(X,Y) = p(X,Y) = 1; \\ C(u,v) = W(u,v) &\Leftrightarrow r(X,Y) = p(X,Y) = -1. \end{aligned}$$

Das definições de $\tau(X,Y)$ e de $\rho(X,Y)$ segue que ambos são funções crescentes do valor da cópula considerada. Além disso, para variáveis aleatórias contínuas todos os valores possíveis (o intervalo $[-1,1]$) das medidas $\tau(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$ podem ser obtidos de uma mudança adequada da cópula em questão.

Capítulo 3

Simulação de Variáveis Aleatórias com Dependência

3.1– SIMULAÇÃO DE VETORES ALEATÓRIOS

Existem várias situações na prática em que desejamos simular vetores aleatórios dependentes $(X_1, \dots, X_n)^t$. Em finanças, desejamos simular desenvolvimentos futuros dos valores dos ativos em um portfólio, em que sabemos que estes ativos são dependentes de alguma forma. Em Seguro, estamos interessados nos produtos mult-linhas, onde a ocorrência de perdas em uma ou mais linhas de negócios são dependentes, e desejamos simular perdas típicas. Isto é particularmente importante no DFA. O problema de simulação segue da seguinte forma:

1. Estima-se distribuições marginais $F_1, \dots, F_n$,
2. Estima-se a matriz de correlação dois a dois $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j), i \neq j$,
3. Combina-se estas informações em algum procedimento de simulação.

O passo 3 é o principal e o mais difícil para simular variáveis dependentes. Existem duas maneiras perigosas. Dada as distribuições marginais, a matriz de correlação está sujeita a certas restrições. Por exemplo, cada ρ_{ij} pertence a um intervalo $[\rho_{\min}(F_i, F_j), \rho_{\max}(F_i, F_j)]$ limitada pela correlação máxima e mínima atingida pelas marginais F_i e F_j . É possível que as correlações estimadas não sejam consistentes com as marginais estimadas e assim não correspondendo à distribuição multivariada para o vetor aleatório existente. No caso onde a distribuição multivariada existe, freqüentemente não é única.

A aproximação descrita acima é altamente questionável. Em vez de considerar marginais e correlações separadamente, poderia ser mais satisfatório tentar estimá-las diretamente da distribuição multivariada. Também poderia ser considerado que a questão de interesse permita que a estimação do problema seja reduzida para uma dimensão. Por exemplo, estamos interessados no valor estimado da soma $X_1 + \dots + X_n$, o qual poderia ser calculado diretamente da estimação da distribuição univariada da soma.

3.2- DADAS MARGINAIS E CORRELAÇÃO LINEAR

Suponha, porém, que estejamos requerendo a construção de uma distribuição multivariada $F \in \mathfrak{R}^n$ que é consistente com dadas distribuições marginais $F_1, \dots, F_n$ e a matriz de correlação linear ρ . Assumimos que ρ é uma matriz de correlação linear própria, que denotaremos no restante da dissertação que é uma matriz semi-definida positiva e simétrica com $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1, i, j = 1, \dots, n$ e $\rho_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$. Tal matriz sempre será a matriz de correlação linear de algum vetor aleatório no $\mathfrak{R}^n$. Mas verificaremos se a matriz é condizente com as marginais dadas. Nosso problema é encontrar a distribuição multivariada F , tal que, se $(X_1, \dots, X_n)^t$ tem distribuição F , as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$X \sim F_i, i = 1, \dots, n,$$

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j), i, j = 1, \dots, n.$$

No caso bivariado, dado que a correlação seja atingida, a construção é simples e a regra segue.

Teorema 3.2.1 Sejam F_1 e F_2 duas distribuições univariada com $\rho_{\min}$ e $\rho_{\max}$ as correspondentes correlações mínima e máxima respectivamente. Seja $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Então a mistura de distribuições bivariadas dada por

$$F(x_1, x_2) = \lambda F_l(x_1, x_2) + (1 - \lambda) F_u(x_1, x_2),$$

onde $\lambda = (\rho_{\max} - \rho) / (\rho_{\max} - \rho_{\min})$, $F_l(x_1, x_2) = \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}$ e $F_u(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$, tem marginais F_1 e F_2 , e correlação linear ρ .

Demonstração: Segue do teorema 2.2.1 que se $F_l(x, y) = \max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\}$ e $F_u(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}$ então a mistura $\lambda F_l + (1 - \lambda) F_u, 0 \leq \lambda \leq 1$ tem correlação $\lambda \rho_{\min} + (1 - \lambda) \rho_{\max}$. Substituindo $\lambda = (\rho_{\max} - \rho) / (\rho_{\max} - \rho_{\min})$ e com algumas manipulações algébricas chegamos que a correlação é ρ e marginais F_1 e F_2 .

Observação 3.2.2 Um resultado semelhante ao do teorema 3.2.1 vale para correlação de Spearman quando $\rho_{\min}$ e $\rho_{\max}$ são repassadas por -1 e 1 respectivamente.

Observação 3.2.3 Note também que a mistura de distribuição não é única distribuição satisfazendo nossa condição. Se $\rho \geq 0$ a distribuição

$$F(x_1, x_2) = \lambda F_1(x_1) F_2(x_2) + (1 - \lambda) F_u(x_1, x_2),$$

onde $\lambda = (\rho_{\max} - \rho) / \rho_{\max}$ também tem marginais F_1 e F_2 , e correlação ρ . Muitas outras misturas de distribuições (por exemplo distribuição com cópulas Gumbel) são possíveis.

A simulação de uma variável aleatória a partir da mistura de distribuição do teorema 3.2.1 é encontrada com o seguinte algoritmo:

1. Simule U_1, U_2 independentes de uma distribuição uniforme padrão;
2. Se $U_1 \leq \lambda$ tome $(X_1, X_2)^t = (F_1^{-1}(U_2), F_2^{-1}(1 - U_2))^t$;
3. Se $U_1 > \lambda$ tome $(X_1, X_2)^t = (F_1^{-1}(U_2), F_2^{-1}(U_2))^t$.

Construir uma distribuição multivariada no caso de $n \geq 3$ é mais difícil. Para a existência de uma solução é necessário que $\rho_{\min}(F_i, F_j) \leq \rho_{ij} \leq \rho_{\max}(F_i, F_j), i \neq j$, segue que a restrição par a par está satisfeita. No caso bivariado é suficiente a existência da solução das duas condições acima, mas no caso geral não é suficiente como segue no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2.4 Sejam F_1, F_2 e F_3 distribuições Lognormais (0,1). Suponha que ρ é tal que ρ_{ij} é igual a mínima correlação atingida para um par de variáveis aleatórias Lognormais (0,1) ($\rho \approx -0.368$) se $i \neq j$ e $\rho_{ij} = 1$ se $i = j$. Esta é uma matriz de correlação própria e uma matriz de correlação satisfazendo a restrição duas a duas para variáveis aleatórias Lognormais. Porém, desde que ρ_{12}, ρ_{13} e ρ_{23} são as correlações mínimas atingidas, o teorema 2.2.1 implica que X_1, X_2 e X_3 são duas a duas variáveis aleatórias contramonotônicas. Tal situação é uniformemente impossível como está claro na seguinte proposição.

Proposição 3.2.5 Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias com distribuição conjunta F e marginais contínuas F_1, F_2 e F_3 .

1. Se (X, Y) e (Y, Z) são comonotônicas então (X, Z) é também comonotônica e $F(x, y, z) = \min\{F_1(x), F_2(y), F_3(z)\}$;
2. Se (X, Y) e (Y, Z) são comonotônicas então (X, Z) é também contramonotônica e $F(x, y, z) = \max\{0, \min\{F_1(x), F_2(y)\} + F_3(z) - 1\}$;
3. Se (X, Y) e (Y, Z) são contramonotônicas então (X, Z) é também comonotônica e $F(x, y, z) = \max\{0, \min\{F_1(x), F_3(z)\} + F_2(y) - 1\}$.

Demonstração: Mostraremos somente uma parte da proposição, as outras partes seguem analogamente. Usando $C = M$ se e somente se $Y = T(X)$ q.c., $T = G^{-1} \circ F$ crescente, sabemos que $Y = S(X)$ e $Z = T(Y)$ onde $S, T : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ são funções crescentes. É claro

que $Z = T \circ S(X)$ com $T \circ S$ crescente, segue que X e Z são comonotônicos. Agora tomemos $x, y, z \in \mathfrak{R}$ e como X e Z são comonotônicos podemos sem perda de generalidade assumir que $F_1(x) \leq F_2(y) \leq F_3(z)$. Assumimos, sem perder generalidade, que $Y = S(X)$ e $Z = T(Y)$. Segue que $\{X \leq x\} \subseteq \{Y \leq y\}$ e $\{Y \leq y\} \subseteq \{Z \leq z\}$ assim temos

$$F(x, y, z) = P[X \leq x] = F_1(x).$$

A proposição nos permite afirmar um resultado em torno da existência e unicidade da solução do problema de simulação dando um caso especial onde as variáveis aleatórias são duas a duas comonotônicas ou contramonotônicas.

Teorema 3.2.6 [Tiit (1996)] Sejam $F_1, \dots, F_n, n \geq 3$ distribuições contínuas e seja ρ a matriz de correlação própria satisfazendo as seguintes condições para todo $i \neq j, i \neq k$ e $j \neq k$:

- $\rho_{ij} \in \{\rho_{\min}(F_i, F_j), \rho_{\max}(F_i, F_j)\}$;
- Se $\rho_{ij} = \rho_{\max}(F_i, F_j)$ e $\rho_{ik} = \rho_{\max}(F_i, F_k)$ então $\rho_{jk} = \rho_{\max}(F_j, F_k)$;
- Se $\rho_{ij} = \rho_{\max}(F_i, F_j)$ e $\rho_{ik} = \rho_{\min}(F_i, F_k)$ então $\rho_{jk} = \rho_{\min}(F_j, F_k)$;
- Se $\rho_{ij} = \rho_{\min}(F_i, F_j)$ e $\rho_{ik} = \rho_{\min}(F_i, F_k)$ então $\rho_{jk} = \rho_{\max}(F_j, F_k)$;

Então existe uma única distribuição com marginais $F_1, \dots, F_n$ e matriz de correlação ρ .

Esta distribuição é conhecida como uma distribuição extrema. No $\mathfrak{R}^n$ existem 2^{n-1} possíveis distribuições extremas.

Demonstração: Sem perda de generalidade supomos

$$\rho_{1j} = \begin{cases} \rho_{\max}(F_1, F_j) & \text{para } 2 \leq j \leq m \leq n; \\ \rho_{\min}(F_1, F_j) & \text{para } m < j \leq n, \end{cases}$$

para $2 \leq m \leq n$. A condição do teorema assegura que a relação dois a dois de quaisquer marginais é determinada pelas suas relações duas a duas com primeira marginal. As marginais para quais ρ_{1j} toma valores máximos formam uma classe de equivalência, como as marginais para quais ρ_{1j} toma valores mínimos. A distribuição conjunta tal que $(X_1, \dots, X_m)$ são duas a duas comonotônicas, $(X_{m+1}, \dots, X_n)$ são duas a duas comonotônicas, mas as duas variáveis aleatórias são de grupos diferentes contramonotônicas. Seja $U \sim U(0,1)$. Então o vetor aleatório

$$(F_1^{-1}(U), \dots, F_m^{-1}(U), F_{m+1}^{-1}(1-U), \dots, F_n^{-1}(-1U))^t,$$

tem a distribuição conjunta requerida. Assumimos um argumento similar à proposição 3.2.5 e assumimos, sem perda de generalidade, que

$$\min_{1 \leq i \leq m} \{F_i(x_i)\} = F_1(x_1), \min_{m < i \leq n} \{F_i(x_i)\} = F_{m+1}(x_1).$$

È claro que a função de distribuição é

$$F(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_{m+1} \leq x_{m+1}] = \max\{0, \min_{1 \leq i \leq m} \{F_i(x_i)\} + \min_{m < i \leq n} \{F_i(x_i)\} - 1\},$$

que em adição mostra unicidade da distribuição com correlação extrema duas a duas. $\square$

Sejam G_j , $j = 1, \dots, 2^{n-1}$ as distribuições extremas com marginais $F_1, \dots, F_n$ e matriz de correlação ρ_j . Combinações convexas

$$G = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \lambda_j G_j, \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \lambda_j = 1,$$

também têm as mesmas marginais e matriz de correlação dada por $\rho = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \lambda_j \rho_j$. Se

podemos decompor uma matriz de correlação arbitrária ρ desta forma, então podemos usar a combinação convexa de distribuições extremas para construir uma distribuição que resolve o problema de simulação. Em Tiit (1996) essa idéia é estendida para distribuições quase extrema. Vetores aleatórios quase-extremos contêm sub-vetores que são extremos como sub-vetores que são independentes.

A desvantagem das distribuições extremas (ou quase-extremas) é o fato que elas não têm densidades, elas concentram todas suas massas nos eixos do $\Re^n$. Porém, pode-se certamente encontrar exemplos práticos onde tais distribuições são altamente relevantes.

Exemplo 3.2.7 Considere dois portfólio de risco de crédito. No primeiro, temos riscos do país A, no segundo temos risco do país B, onde F_1 e F_2 são as distribuições de perdas de A e B, respectivamente. Com probabilidade p o resultado move-se na mesma direção (comonotonicidade); com probabilidade $(1-p)$ eles se movem em direções opostas (contramonotonicidade). Esta situação pode ser modelada com a distribuição

$$F(x_1, x_2) = p \cdot \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} + (1-p) \cdot \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\},$$

e é claramente generalizada para mais portfólios.

3.3– DADAS MARGINAIS E CORRELAÇÃO SPEARMAN

Este problema de simulação tem sido considerado por Iman e Conover (1982) e seus algoritmos formam a base do programa @RISK.

É claro que uma matriz de correlação de Spearman é também uma matriz de correlação linear. Não sabemos quando uma matriz de correlação linear é necessariamente uma matriz de correlação Spearman. Isto é, dada uma matriz positiva semidefinida, simétrica qualquer com elementos unitários na diagonal e fora da diagonal ou com elementos no intervalo $[-1, 1]$, podemos não necessariamente encontrar um vetor aleatório com marginais contínuas tal que esta é a matriz de correlação Spearman, ou alternativamente uma distribuição multivariada para qual é matriz de correlação linear de uma cópula? Se estimarmos uma matriz de correlação Spearman dos dados, é garantido que a matriz estimada é uma matriz Spearman? Uma condição necessária é que a matriz estimada é uma matriz de correlação linear, mas não sabemos se é suficiente.

Se a matriz dada é uma matriz de correlação Spearman, então o problema da existência de uma distribuição multivariada com marginais prescrita está resolvido. A escolha das marginais é de fato irrelevante e não impõe condições de consistência extra na matriz.

Iman e Conover (1982) não tentaram encontrar uma distribuição multivariada que tivesse exatamente a dada matriz de Spearman ρ . Eles simularam uma variável normal padrão multivariada $(X_1, \dots, X_n)^t$ com matriz de correlação linear ρ e então transformaram as marginais para obter $(Y_1, \dots, Y_n)^t = (F_1^{-1}(\Phi(X_1)), \dots, F_n^{-1}(\Phi(X_n)))^t$. A matriz correlação de Spearman de Y é idêntica a de X . Agora como $\rho(T(X), T(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho}{2}\right)$ (Correlação linear)

$$\rho_s(Y_i, Y_j) = \rho_s(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho(X_i, X_j)}{2}\right) \approx \rho(X_i, X_j),$$

e, na visão de limites para o erro absoluto,

$$\left| \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho}{2}\right) - \rho \right| \leq 0.0181, \rho \in [-1, 1],$$

e para o erro relativo,

$$\frac{\left| \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho}{2}\right) - \rho \right|}{|\rho|} \leq \frac{\pi - 3}{\pi}$$

a matriz de correlação de Y é muito limitada no que desejamos. No caso quando a matriz dada pertence a uma distribuição extrema (isto é, compreende somente os elementos 1 e -1) então o erro desaparece inteiramente e teremos construído a solução única.

Isto sugere como podemos encontrar uma condição suficiente para ρ ser uma matriz de correlação de Spearman e, como quando esta condição é válida, podemos construir a distribuição que tem as marginais requeridas e exatamente aquela matriz de correlação. Definimos a matriz $\tilde{\rho}$ por

$$\tilde{\rho} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi \rho_{ij}}{6},$$

e checamos quando esta é uma matriz de correlação linear própria. Se assim, então o vetor $(Y_1, \dots, Y_n)^t = (F_1^{-1}(\Phi(X_1)), \dots, F_n^{-1}(\Phi(X_n)))^t$ tem matriz de correlação Spearman ρ , onde $(X_1, \dots, X_n)^t$ é uma distribuição normal padrão multivariada com matriz de correlação linear $\tilde{\rho}$.

Em resumo, uma condição necessária para ρ ser uma matriz de correlação Spearman é que ela seja uma matriz de correlação linear e uma condição suficiente é que $\tilde{\rho}$ dada acima é uma matriz de correlação linear.

Um problema com a aproximação descrita acima é que somente construímos distribuições que têm a estrutura de dependência de uma distribuição normal multivariada. Esta estrutura de dependência é limitada. Ela não permite dependência assintótica entre variáveis aleatórias.

3.4– DADAS MARGINAIS E CÓPULA

No caso onde distribuições marginais $F_1, \dots, F_n$ e a cópula $C(u_1, \dots, u_n)$ são especificadas, uma única distribuição multivariada com função de distribuição $F(x_1, \dots, x_n) = C(u_1, \dots, u_n)$ satisfazendo as especificações pode ser encontrada. O problema de simulação desta distribuição não é teórico dado que uma solução existe, mas dada a técnica como é a performance da simulação. Assumimos que a cópula é dada na forma de uma função paramétrica que o modelador escolhe; não consideramos o problema de como

a cópula é estimada dos dados, que é certamente mais difícil que estimar matrizes de correlação linear ou de Spearman.

A classe de distribuições elípticas provém de vários exemplos úteis de distribuições multivariada, entre elas a distribuição normal multivariada. Cópulas elípticas são simplesmente as cópulas de distribuições elípticas. A simulação de distribuições elípticas é fácil de realizar. Portanto, como consequência do Teorema de Sklar, a simulação de cópulas elípticas também é.

Exemplo 3.4.1 [Cópulas Normal ou Gaussiana] A cópula Gaussiana é a cópula da distribuição normal multivariada. De fato, o vetor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ é normalmente distribuído se e somente se:

1. As marginais $F_1, \dots, F_n$ são Gaussianas;
2. A estrutura de dependência entre as marginais é descrita por uma única função cópula C tal que:

$$C_{\Sigma}^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n)),$$

onde Φ_{Σ} é a normal padrão multivariada com matriz correlação linear Σ e ϕ^{-1} é a inversa da normal padrão univariada.

Se $n = 2$, a expressão acima pode ser escrita assim:

$$C_{\Sigma}^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - \Sigma_{12}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2\Sigma_{12}st + t^2}{2(1 - \Sigma_{12}^2)}\right\} ds dt,$$

onde Σ_{12}^2 é a matriz de correlação linear entre duas variáveis aleatória.

Para gerar variáveis aleatórias de uma cópula Gaussiana, podemos usar o seguinte procedimento. Se a matriz Σ é positiva definida, então existe alguma matriz $A_{n \times n}$ tal que $\Sigma = AA^t$. Também assumimos que as variáveis aleatórias $Z_1, \dots, Z_n$ têm distribuição normal padrão independentes. Então, o vetor aleatório $\mu + AZ$ é distribuído normalmente com vetor de média μ e matriz de covariância Σ .

A matriz A pode ser facilmente determinada com a decomposição de Cholesky de Σ . Esta decomposição é uma matriz triangular inferior única tal que $LL^t = \Sigma$. Assim, podemos gerar variáveis aleatórias de uma cópula n -dimensional Gaussiana percorrendo o seguinte algoritmo:

- Encontre a decomposição de Cholesky da matriz Σ ;
- Simule n variáveis normais padrão independente $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^t$;

- Tomemos $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{z}$;
- Determine as componentes $u_i = \phi(x_i), i = 1, \dots, n$;
- O vetor $(u_1, \dots, u_n)^t$ é uma variável aleatória da cópula Gaussiana C_{Σ}^{Ga} .

Exemplo 3.4.2 [Cópula t -Student] A cópula da distribuição t -Student multivariada é a cópula t -Student. Seja $\mathbf{X}$ um vetor com distribuição t -Student n -variada com ν graus de liberdades, vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ (para $\nu > 1$) e matriz de covariância $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ (para $\nu > 2$). Ela pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} \mathbf{Z},$$

onde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, $S \sim \chi_{\nu}^2$ e vetor aleatório $\mathbf{Z} \sim N_n(0, \Sigma)$ são independentes.

A cópula do vetor $\mathbf{X}$ é a cópula t -Student com ν graus de liberdades. Ela pode ser representada analiticamente na seguinte forma:

$$C_{\nu, \Sigma}^t(\mathbf{u}) = t_{\nu, \Sigma}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n))$$

onde $\Sigma = \Sigma_{ij} / \sqrt{\Sigma_{ii} \Sigma_{jj}}$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e onde $t_{\nu, \Sigma}^n$ denota a função de distribuição multivariada do vetor aleatório $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} \mathbf{Y}$, onde a variável aleatória $S \sim \chi_{\nu}^2$ e o vetor $\mathbf{Y}$ são independentes. t_{ν} denota as marginais de $t_{\nu, \Sigma}^n$.

Para simular variáveis aleatórias de uma cópula t -Student, $C_{\nu, \Sigma}^t$, podemos usar o seguinte algoritmo, que é baseado na equação acima:

- Encontre a decomposição de Cholesky $\mathbf{A}$, da matriz Σ ;
- Simule n variáveis normais padrão independente $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^t$;
- Simule uma variável aleatória, s , de distribuição χ_{ν}^2 , independente de $\mathbf{z}$;
- Determine o vetor $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{z}$;
- Tome $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} \mathbf{Y}$;
- Determine as componentes $u_i = t_{\nu}(x_i), i = 1, \dots, n$;
- O vetor resultante é: $(u_1, \dots, u_n)^t \sim C_{\nu, \Sigma}^t$.

Exemplo 3.4.3 [Cópulas Archimediana] Uma cópula Archimediana pode ser escrita na seguinte forma:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \psi^{-1}[\psi(u_1), \dots, \psi(u_n)]$$

para todo $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$ e onde ψ é uma função freqüentemente chamada de gerador, satisfazendo:

1. $\psi(1) = 0$;
2. Para todo $t \in (0,1)$, $\psi'(t) < 0$, isto é, para todo $t \in (0,1)$, $\psi'(t) < 0$, isto é ψ é decrescente;
3. ψ é decrescente;
4. Para todo $t \in (0,1)$, $\psi''(t) \geq 0$, isto é, ψ é convexa.

Exemplos de cópulas Archimediana bivariada são as seguintes:

- Cópula produto

$$\psi(t) = -\ln(t); C(u_1, u_2) = u_1 u_2$$

- Cópula de Clayton

$$\psi(t) = t^{-\alpha} - 1, \alpha > 0; C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}.$$

- Cópula de Gumbel

$$\psi(t) = (-\ln(t))^\alpha, \alpha \geq 1; C(u_1, u_2) = \exp\{-[(-\ln(u_1))^\alpha + (-\ln(u_2))^\alpha]^{1/\alpha}\}.$$

- Cópula de Frank

$$\psi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}\right), \alpha \in \mathfrak{R}; C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right).$$

Extensões para o caso multivariado são as seguintes:

- Cópula de Cook-Johnson

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^n u_j^{-\alpha} - n + 1\right)^{-1/\alpha}.$$

- Cópula de Gumbel-Hougaard

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp\{-[(-\ln(u_1))^\alpha + \dots + (-\ln(u_n))^\alpha]^{1/\alpha}\}.$$

- Cópula de Frank

$$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \cdots (e^{-\alpha u_n} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{n-1}}\right).$$

Para simular a cópula de Cook-Johnson com parâmetro α , temos o seguinte algoritmo abaixo:

- Gere n variáveis aleatórias independentes, $y_1, \dots, y_n$ de uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$;
- Gere uma variável aleatória, z , de uma distribuição $\text{Gamma}(1/\alpha, 1)$ independente de $y_1, \dots, y_n$;
- Tome $u_j = (1 + y_j / z)^{-1/\alpha}$, $j = 1, \dots, n$;
- O vetor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ é gerado de uma cópula de Cook-Jonhson.

A cópula de Cook-Jonhson reproduz uma estrutura de dependência positiva. A estrutura negativa pode ser obtida para as mesmas variáveis colocando $u'_j = 1 - u_j$.

Para simular a cópula de Morgentern, temos o seguinte algoritmo:

- Gere v_1 e v_2 variáveis aleatórias uniforme (0, 1);
- Coloque $u_1 = v_1$;
- Calcule $A = \alpha(2u_1 - 1) - 1$ e $B = [1 - \alpha(2u_1 - 1)]^2 + 4\alpha v_2(2u_1 - 1)$;
- Coloque $u_2 = 2v_1 / (\sqrt{B} - A)$;
- O vetor (u_1, u_2) é gerado da cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern.

Exemplo 3.4.4 [Cópula Empírica] A cópula empírica é construída dos dados amostrais. Sejam $\{x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}\}$ a estatística de ordem e $\{r_1^{(t)}, \dots, r_n^{(t)}\}$ a estatística dos percentis, $t = 1, \dots, T$ do conjunto de dados. Temos $x_i^{(r'_t)} = x_i^t$, $i = 1, \dots, n$.

Qualquer função

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^n 1_{[r_i^t \leq t_i]}$$

definida em $l = \left\{ \left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T} \right) : 1 \leq i \leq n; t_i = 0, \dots, T \right\}$ é a cópula empírica.

A cópula empírica tem função densidade como segue na expressão abaixo:

$$\hat{c}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) = \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \hat{C}\left(\frac{t_1 - i_1 + 1}{T}, \dots, \frac{t_n - i_n + 1}{T}\right).$$

Para simular uma cópula empírica temos o seguinte algoritmo:

- Aleatoriamente, sorteia um vetor de observações $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}$ do conjunto de dados $\mathcal{X}$;
- Usando a função empírica, $\hat{F}_i$, para transformar cada componente do vetor de observações a um conjunto de variáveis uniformes: $u_i = \hat{F}_i(x_i^t), i = 1, \dots, n$;
- $(u_1, \dots, u_n)$ é um vetor de uniformes (0, 1) não independentes que são dependentes da cópula empírica.

Algoritmo geral para simular uma cópula:

Este método é baseado em distribuições condicionais de um vetor aleatório $U = (U_1, \dots, U_n)$.

- Gere n variáveis aleatórias uniformes (0, 1), $(v_1, \dots, v_n)$;
- Coloque $u_1 = v_1$
- Tome $C(u_m; u_1, \dots, u_{m-1}) = C_{m \setminus 1, \dots, m-1}(u_1, \dots, u_m), m = 2, \dots, n$, onde

$$C_{m \setminus 1, \dots, m-1}(u_1, \dots, u_m) = P\{U_m \leq u_m \mid (U_1, \dots, U_{m-1}) = (u_1, \dots, u_{m-1})\} =$$

$$= \frac{\partial_{(u_1, \dots, u_{m-1})}^{m-1} C(u_1, \dots, u_m, 1, \dots, 1)}{\partial_{(u_1, \dots, u_{m-1})}^{m-1} C(u_1, \dots, u_{m-1}, 1, \dots, 1)}$$

- Coloque $u_m = C^{-1}(v_m; u_1, \dots, u_{m-1}), m = 2, \dots, n$;
- O vetor $(u_1, \dots, u_n)$ é gerado da cópula C .

Este algoritmo é computacionalmente intensivo para valores grandes de n . De fato, é um resultado difícil para calcular distribuições condicionais.

Capítulo 4

Aplicação ao Risco Subscrição

4.1 – RISCO DE SUBSCRIÇÃO E ALGUMAS PROVISÕES TÉCNICAS

O risco de subscrição de uma sociedade seguradora é o risco de uma situação econômica adversa que contraria tanto as expectativas da sociedade no momento da elaboração de sua política de subscrição quanto às incertezas existentes na estimativa de provisões.

As principais provisões técnicas são:

1. PPNG – Provisão de Prêmios Não Ganhos;
2. PIP – Provisão de Insuficiência de Prêmios;
3. PSL – Provisão de Sinistro a Liquidar;
4. IBNR – Provisão de Sinistros Ocorridos e Não Avisados “Incured But Not Report”.

Hoje as seguradoras podem operar em gamas linhas de negócios tais como:

- Automóvel
- Responsabilidade Civil
- Lucros Cessantes
- Roubo
- Incêndio
- Riscos Nomeados
- Riscos Operacionais
- Transporte
- Riscos de Engenharia
- Marítimo
- Aeronáutico
- Risco de Petróleo
- Riscos Nucleares
- Global de Bancos
- Habitacional
- Garantia
- Fiança Locatícia

- Satélites
- Garantia Estendida
- Animais
- Agrícola
- Penhor Rural
- Floresta
- RD

Com o grande crescimento de linhas de negócios das seguradoras, cresce a necessidade de melhores garantias para com os segurados. Com isso o órgão regulador, a SUSEP, tem focado na sofisticação de modelos onde os mesmos passam a considerar correlação entre os riscos gerados por cada linha de negócio.

Conforme a Resolução CNSP N° 158, de 2006, a Superintendência de Seguros Privados – SUSEP, regulamenta que o capital adicional aos riscos de subscrição como uma função $CA(P, S, R)$, onde P são os prêmios, S os Sinistros e R as regiões de atuações da seguradora.

4.2 – MODELO PROPOSTO

Definimos o modelo para perdas agregadas como sendo uma somatória de perdas agregadas, como segue:

$$L = \sum_{n=1}^N X_n = X_1 + \dots + X_n$$

onde L é a perda agregada, N é o número de perdas anuais (frequência de sinistros) e X_n a quantia de perdas (severidades dos sinistros). Referimo-nos a perdas agregadas como sendo o montante de sinistros ocorridos no ano em uma classe de negócio.

Como o modelo tem duas origens de aleatoriedade, frequência e severidade, ambas devem ser modeladas. Adotaremos as seguintes premissas:

1. N e $(X_1, X_2, \dots)$ são variáveis aleatórias independentes;
2. $(X_1, X_2, \dots)$ é um conjunto de variáveis aleatórias independentes (dependentes);
3. $(X_1, X_2, \dots)$ segue a mesma distribuição marginal.

Realizaremos duas simulações de uma carteira hipotética em que utilizaremos a condição 2 onde $(X_1, X_2, \dots)$ são independentes e no caso dependentes.

Como em uma seguradora existem n linhas de negócios, restringir-nos-emos a duas linhas de negócios, podendo facilmente ser estendida para mais linhas de negócios.

Vamos denotar L_1, L_2 as perdas agregadas da linha 1 e linha 2, respectivamente. Assim a perda agregada global das duas linhas de negócios seguem:

$$L = L_1 + L_2 = \sum_{n=1}^{N_1} X_n + \sum_{m=1}^{N_2} Y_m$$

onde adotamos as seguintes premissas:

1. N_1 e N_2 são variáveis aleatórias Poisson independentes.
2. X_n e Y_m são variáveis aleatórias Lognormais independente ou dependente com correlação ρ .

O modelo proposto estará estimando à parte do capital adicional aos riscos de subscrição relativo a sinistros e compara com a provisão de prêmios não ganhos “PPNG”.

O Capital adicional será definido como segue:

$$CA = VaR(L) - Min(PPNG, E[L])$$

em que $VaR(L) = P[L \leq \alpha]$ e α é o nível de confiança, PPNG é a provisão de prêmios não ganhos e $E[L]$ é a perda média esperada.

Estamos supondo uma carteira com 2000 apólices, na qual 1000 apólices são da linha de negócio X (por exemplo Aeronáuticos) e outras 1000 da linha de negócio Y (Responsabilidade Civil), supondo que cada apólice pode sinistrar mais de uma vez. Realizaremos dez mil realizações para carteira.

Algoritmo caso 1:

- Simula N_1 e N_2 variáveis aleatórias Poisson independentes com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$.
- Simula $\sum_{n=1}^{N_1} X_n$ e $\sum_{m=1}^{N_2} Y_m$, onde X_n e Y_m são variáveis aleatórias Lognormais independentes com $(\mu = (0,0), \sigma^2 (0.9;0.3))$.
- Formamos o vetor de resultado $L_i = \sum_{n=1}^{N_1} X_n + \sum_{m=1}^{N_2} Y_m$.

Cálculo do capital adicional.

$$CA_1 = VaR(L) - \text{Min}(PPNG, E[L])$$

$$CA_1 = 1515,90 - \text{Min}(PPNG; 1363,92) \geq 151,98$$

Algoritmo caso 2:

- Simula N_1 e N_2 variáveis aleatórias Poisson independentes com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$.
- Simula $\sum_{n=1}^{N_1} X_n$ e $\sum_{m=1}^{N_2} Y_m$, onde X_n e Y_m são variáveis aleatórias Lognormais

dependentes com matriz de covariância, $Cov(X_n, Y_m) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$, e usaremos a

Cópula gaussiana na simulação e depois utilizamos a transformação $\exp(X)$ para transformar as marginais para LogNormais.

- Formamos o vetor de resultado $L_i = \sum_{n=1}^{N_1} X_n + \sum_{m=1}^{N_2} Y_m$.

Cálculo do capital adicional.

$$CA_2 = VaR(L) - \text{Min}(PPNG, E[L])$$

$$CA_2 = 1533,04 - \text{Min}(PPNG, 1365, 20) \geq 167,84$$

Analisando os caso 1 e 2, percebemos que o modelo com dependência é mais conservador, pois $CA_1 < CA_2$.

Considerações Finais

Nos últimos anos, com Basileia e outros órgãos reguladores, cresceu o escopo de modelagem de risco, tais como:

- Risco de Subscrição para seguradoras;
- Risco de Mercado e Risco Operacional para instituições financeiras.

Com o crescimento dos grupos financeiros, nos quais envolvem atividades com os riscos acima, cresceu a procura por modelagem dos riscos dependentes e a necessidade de ferramentas matemáticas que auxiliam na modelagem da dependência.

Uma das ferramentas matemáticas que auxiliam na modelagem da dependência é a cópula e as medidas de dependência utilizadas nesta dissertação.

Mostramos que com a análise de dependência temos uma medida de risco (VaR) mais apurada, no sentido de conservadorismo. Mas alguns cuidados relacionados às medidas de dependência devem ser tomados para que não haja confusões.

Como nosso foco foi análise de dependência, no risco de subscrição, percebemos que o modelo sugerido na dissertação, com algumas alterações, pode vir a ser um modelo avançado, no sentido que a SUSEP sugere para as seguradoras.

BIBLIOGRAFIAS DE REFERÊNCIA

- [1] Barry, R. Janes: “ *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*” Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.
- [2] DFA Committee of the Casualty Actuarial Society, *Overview of Dynamic Financial Analysis*. Available from <http://www.casact.org/research/dfa/index.html>.
- [3] Devroye, L.: “*Non-Uniform Random Variate Generation*”. Springer-Verlag (1986)
- [4] Embrechts, P., F. Lindskog and A. J. McNeil (2001): “*Modelling dependence with copulas and applications to risk management*”, ETH Zurich, preprint.
- [5] Embrechts, P., A. J. McNeil and D. Straumann (1999): “*Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*”, To appear in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. By M. Dempster and H. Moffatt Cambridge University Press.
- [6] Genest, C. and L. Rivest (1993): “*Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*”, Journal of the American Statistical Association, N. 88, pp 1034 -1043.
- [7] Joe, H. and J.J. Xu (1996): “*The estimation method of inference function for margins for multivariate models*”, Department of Statistic, University of British Columbia, Technical Report N . 166.
- [8] Lindskog, F. (2000): “*Modelling Dependence with Copula*”, ETH Zurich.
- [9] Nelsen, R. (1998): “*An Introduction to Copula*”, Springer, New York.
- [10] Romano, C : “*Calibrating and Simulation Copula Function: An Application to the Italian Stock Market*”(2002).
- [11] Sheldon M. Ross (1970): “*Applied Probability Models with Optimization Applications*” University of California, Berkeley
- [12] Anjos, U.U., Ferreira, F. H., Kolev, N. V. e Mendes, B.V.M: “*Modelando Dependência via Cópulas*” Minicurso do 16º SINAPE, Caxambu, MG, 2004.