Processos com Memória Longa Compartilhada

João Ricardo Sato

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu apoio
financeiro do CNPq

— São Paulo, Junho de 2004 —

Processos com Memória Longa Compartilhada

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e apresentada por João Ricardo Sato
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 29 de junho de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin (orientador) (IME-USP)
- Prof. Dr. Chang Chiann (IME-USP)
- Prof. Dr. Denisard Cneio de Oliveira Alves (FEA-USP)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo a avaliação de três estimadores do parâmetro de integração fracionária d e de um teste para memória longa compartilhada. Os estimadores a serem avaliados são: o estimador de Geweke e Porter-Hudak, o estimador usando o periodograma suavizado e o estimador semiparamétrico truncado de Whittle. A avaliação dos estimadores será no contexto de processos ARFIMA+ARMA, e em relação a variações nos termos autoregressivos e de médias móveis, tanto do termo de memória curta quanto do termo de memória longa. Além disso, serão introduzidos o conceito de modelos com memória longa compartilhada e um método de identificação através da análise de correlação canônica para séries temporais multivariadas proposto, por Ray e Tsay (1997). Por fim, serão apresentadas três aplicações sobre dados reais dos tópicos estudados: uma para a velocidade do vento em São Paulo e Piracicaba e outras duas para séries das bolsas de valores de Hong Kong, Nova Zelândia, Singapura, Brasil e Reino Unido.

Abstract

The goal of this project is the evaluation of three long memory parameter estimators and a common long range dependence test. The estimators evaluated are: the Geweke and Porter-Hudak, the smoothed periodogram and the semiparametric truncated Whittle estimators. The evaluation is in the context of processes ARFIMA+ARMA, and related to variations in the autoregressive and moving average coefficients, both in the short and long memory terms. Furthermore, we describe common long range dependence processes and an identification approach (Ray and Tsay, 1997) for them, using the canonical correlation analysis. Finally, three applications to real data are presented: the first one to the wind's speed in the Brazilian cities of São Paulo and Piracicaba, and the other ones to financial time series of the stock markets of Hong Kong, New Zealand, Singapore, Brazil and the United Kingdom.

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as oportunidades oferecidas. Gostaria de agradecer principalmente aos meus pais, pela formação e apoio incondicional dados. Um especial agradecimento ao Prof. Pedro Alberto Morettin, que desde meu segundo ano de graduação se disponibilizou a ensinar-me, e pelo exemplo de competência e caráter. Agradeço também aos meus irmãos Cristiane, Rafael, Paula, Priscila e a todos os familiares por estarem presentes em minha vida, e a Cristina pelo carinho e apoio. Aos meus amigos Fábio, Luis Gustavo, Ricardo, Igor, Renatinha, Carlos, Marcus, Noemi, Ronaldo, Regina, Ayumi, Seiko Takano, Márcio Masaki, Tatyana, Carlão, André, Marcelo, Paulo, Márcio Medeiros, Mayra, Cleber, Marcos, Juvêncio, Miriam, Gladys, Fred, Elias, Sueli, Juan, Kelly, Sumaya, Célia, Cristiane, Andre, Karina e Allan. Finalmente, meus sinceros agradecimentos aos professores Carlos Bragança Pereira, Chang Chiann, Mariane Streibel, Clélia Toloi e aos demais professores do Departamento de Estatística do IME-USP.

Conteúdo

Introdução	1
1 Conceitos e Definições	4
2 Modelos Clássicos de Séries Temporais	9
2.1 Processo Linear	9
2.2 Modelos da família ARIMA(p,d,q)	10
2.2.1 Modelo Autoregressivo	11
2.2.2 Modelo de Médias Móveis	12
2.2.3 Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis	13
2.2.4 Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis Integrado	14
2.3 Modelos Heterocedásticos Condicionais	15
2.3.1 Modelos da Família GARCH	17
2.3.2 Modelo de Volatilidade Estocástica	18
3 Modelos de Memória Longa	19
3.1 Modelos de Memória Longa	19
3.1.1 Definição de Memória Longa	20

3.1.2	Medidas de Memória Longa	20
3.1.3	Ruído Branco Fracionário	22
3.1.4	Modelo ARFIMA(p,d,q)	24
3.1.5	Estimador de Geweke e Porter-Hudak	26
3.1.6	Estimador usando o Periodograma Suavizado	29
3.1.7	Estimador Truncado de Whittle	32
3.1.8	Modelo de Volatilidade Estocástica de Memória Longa	33
4	Memória Longa Compartilhada	35
4.1	Processos com Memória Longa Compartilhada	35
4.2	Teste de Correlação Canônica para MLC	37
5	Simulações	42
5.1	Avaliação de Estimadores	42
5.1.1	Conjunto 1: Processos ARMA	43
5.1.2	Conjunto 2: Razão de Desvios e Memória Longa	44
5.1.3	Conjunto 3: Variações no Termo de Memória Longa	47
5.1.4	Conjunto 4: Variações no Termo de Memória Curta	52
5.2	Avaliação do Teste de Memória Longa Compartilhada	57
5.2.1	Conjunto 5: Teste MLC	57
5.2.2	Conjunto 6: Teste MLC - Variações no Termo de Memória Longa	58
5.2.3	Conjunto 7: Teste MLC - Variações no Termo de Memória Curta	59
5.3	Síntese de Conclusões	60
5.3.1	Desempenho dos Estimadores de d	60
5.3.2	Desempenho do Teste MLC	61
6	Aplicações	63

<i>Conteúdo</i>	<i>iii</i>
6.1 Velocidade do Vento	63
6.2 Bolsas de Hong Kong, Nova Zelândia e Singapura	68
6.3 Bolsas de Valores do Brasil e Reino Unido	71
7 Conclusões e Resultados	77
A Tabelas das Simulações dos Estimadores de d	79
B Tabelas das Simulações do Teste MLC	92
Referências	100

Introdução

Nos estudos estatísticos de determinadas séries observadas no tempo, verifica-se que existe uma dependência entre as observações, e esta decai hiperbolicamente com o tempo. Em outras palavras, o valor atual da série depende de muitos valores passados ou defasados da mesma, e a correlação entre as observações possui um decaimento hiperbólico conforme aumenta-se a defasagem. Séries que apresentam essa característica são denominadas séries com persistência ou memória longa.

Os primeiros estudos com o objetivo de compreender as propriedades de séries com memória longa foram realizados por Hurst(1951, 1956, 1957) e Lawrance e Kottegoda (1977), principalmente na área de climatologia e hidrologia. A partir de 1980 os modelos de memória longa também começaram a ser utilizados na área econométrica para a modelagem de taxas de juros e inflação, e atualmente vem sendo amplamente aplicados na modelagem da volatilidade de ativos financeiros ou transformações de potências da série de retornos (Ding, Granger e Engle, 1993). O tempo de “memória” ou dependência das observações é quantificado através do *parâmetro de memória longa*, geralmente denotado por d . Para valores de $d = 0$, dizemos que a série não possui memória longa, para $d > 0$ a série é persistente, e para $d < 0$ a série é antipersistente (Diebolt e Guiraud, 2000).

Atualmente, a identificação e modelagem de fatores comuns vem ganhando importância na área financeira. Deseja-se avaliar, por exemplo, se o valor da taxa de câmbio e o preço de determinadas ações são regidos por componentes comuns (Baillie, 1996). Dessa forma, refina-se a avaliação da influência de alterações macroeconômicas em ativos financeiros, além de facilitar a realização de previsões.

Um dos objetivos deste trabalho é a avaliação de estimadores do parâmetro de memória

longa no contexto de processos de memória curta adicionados à processos persistentes. Os estimadores a serem avaliados são o *estimador de Geweke e Porter-Hudak* ($\hat{d}_{GPH}$), o *estimador utilizando o periodograma suavizado* ($\hat{d}_s$) e o *estimador truncado de Whittle* ($\hat{d}_{TW}$). Além disso, também há interesse na avaliação da performance do *teste de memória longa compartilhada através da análise de correlação canônica* (Ray e Tsay, 1997), que tem como objetivo testar se duas séries temporais são regidos pelos mesmos componentes de memória longa. Nos capítulos seguintes, veremos que a estimação de d e os teste de memória longa compartilhada estão fortemente relacionados.

O capítulo 1 apresenta algumas definições e conceitos básicos na modelagem de séries temporais. Estes conceitos serão amplamente utilizados nos capítulos subsequentes. Uma síntese dos modelos clássicos de séries temporais pode ser encontrada no capítulo 2, onde são descritos o conceito de filtros, modelos para séries estacionárias e séries não-estacionárias, modelos heterocedásticos condicionais e uma introdução à modelagem de séries financeiras.

No capítulo 3 são descritos diversos estudos relacionados a processos de memória longa, tais como definições, métodos de identificação, estimação, propriedades e características importantes desses processos. A metodologia dos três estimadores do parâmetro de persistência a serem avaliados encontram-se neste capítulo. No último tópico, definimos o modelo de volatilidade estocástica de memória longa (Breidt, Crato e de Lima, 1998), que será utilizado em aplicações práticas.

O teste de memória longa compartilhada (MLC) através da análise de correlação canônica é apresentado no capítulo 4. Este teste, basicamente, utiliza a análise de correlação canônica para verificar se a matriz de covariância cruzada de séries temporais multivariadas possui posto completo para lags grandes. Se a matriz não possuir posto completo, a metodologia é utilizada para encontrar vetores de combinações lineares das séries, de forma que essas combinações não possuam memória longa. O posto da matriz é testado utilizando as estatísticas T e T^* , cujos comportamentos serão avaliados neste trabalho.

A avaliação dos estimadores do parâmetro de persistência e do teste MLC é feita através de simulações, cujos resultados são apresentados no capítulo 5. As tabelas correspondentes às simulações podem ser encontradas nos apêndices A e B.

Aplicações sobre dados reais das metodologias apresentadas podem ser encontradas no capítulo 6. Apresentamos uma aplicação na área de climatologia para velocidade do vento

em São Paulo e Piracicaba, e duas aplicações financeiras para a volatilidade dos índices das bolsas de valores de Hong Kong, Nova Zelândia, Singapura, Brasil e Reino Unido.

Por fim, serão apresentadas as conclusões e resultados deste trabalho, bem como os apêndices.

Conceitos e Definições

Neste capítulo serão introduzidas algumas definições e conceitos básicos para o estudo estatístico de séries temporais. Mais detalhes podem ser encontrados em Shumway e Stoffer(2000) e Morettin e Toloi(1987).

Uma série temporal é o conjunto de qualquer tipo de observações indexadas no tempo, tais como a temperatura em determinada hora e local, preços de ativos financeiros, índice de inflação(IPCA) etc. Em geral expressa-se uma série temporal por X_t , onde t indica o instante de tempo da observação. Os modelos utilizados em séries temporais são processos estocásticos, ou seja, seguem leis probabilísticas.

Os processos de séries temporais mais simples são processos denominados *estacionários*. Em termos práticos, verifica-se que os processos estacionários possuem média e variância constante ao longo do tempo, ou seja, as observações parecem flutuar em torno de um mesmo nível e com variabilidade constante. Existem duas formas de estacionariedade: a estrita e a fraca.

Definição 1.0.1. *Um processo é denominado estritamente estacionário se todas as distribuições finito-dimensionais das variáveis aleatórias são idênticas para qualquer instante de tempo.*

Definição 1.0.2. *Um processo é denominado fracamente estacionário (ou estacionário de segunda ordem) se a esperança e a variância das variáveis aleatórias são constantes ao longo do tempo, se as variáveis possuem segundo momento finito e a função de autocorrelação só depende da defasagem e não do tempo.*

Se um processo for gaussiano ele será determinado apenas pelo primeiro e segundo

momento, dessa forma, se o processo for fracamente estacionário (ou de segunda ordem), ele será estritamente estacionário. Por simplicidade, consideraremos como processos estacionários, somente os processos fracamente estacionários.

Muitas vezes, deseja-se verificar se existe alguma dependência entre os valores atuais de uma série com seus valores passados, de forma a facilitar previsões. Uma ferramenta muito útil para quantificar essa dependência são as funções de autocovariância e autocorrelação da série.

Definição 1.0.3. *A função de autocovariância $\gamma(h)$ de um processo estacionário é definida por*

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E[X_t X_{t-h}] - E[X_t]E[X_{t-h}],$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\gamma(0) = \text{var}(X_t) > 0$;
2. $\gamma(0) \geq \gamma(h)$;
3. é simétrica, ou seja, $\gamma(-h) = \gamma(h)$;
4. é sempre positiva definida.

Definição 1.0.4. *A função de autocorrelação ($\rho(h)$) de uma série temporal é definida por*

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\text{var}(X_t)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-h})}{\text{var}(X_t)},$$

Para séries observadas, em geral não se conhecem os valores verdadeiros dos termos acima, dessa forma, na prática utiliza-se um estimador para $\rho(h)$, dado por

$$\hat{\rho}(h) = \sum_{t=1}^N \frac{(x_t - \bar{x})(x_{t-h} - \bar{x})}{N\hat{\sigma}^2}, \quad (1.1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^N \frac{(x_t - \bar{x})^2}{N}, \quad (1.2)$$

$$\bar{x} = \sum_{t=1}^N \frac{x_t}{N}. \quad (1.3)$$

Suponha agora que temos duas séries temporais estacionárias X_t e Y_t . Seria interessante se pudessemos encontrar uma forma de mensurar não só a dependência dos valores

atuais das duas séries, mas também entre seus valores defasados. Com esse objetivo, foram definidas as funções de covariância e correlação cruzadas.

Definição 1.0.5. A função de covariância cruzada ($\gamma_{XY}(h)$) é dada por

$$\gamma_{XY}(h) = \text{Cov}(X_t, Y_{t-h}) = E[X_t Y_{t-h}] - E[X_t]E[Y_{t-h}].$$

Definição 1.0.6. A função de correlação cruzada ($\rho_{XY}(h)$) é dada por

$$\rho_{XY}(h) = \frac{\gamma_{XY}}{\sqrt{\gamma_X(0)\gamma_Y(0)}}.$$

Na prática, como não se conhece os verdadeiros valores dos termos acima, utiliza-se um estimador para $\hat{\rho}_{XY}(h)$, dado por

$$\hat{\rho}_{XY}(h) = \sum_{t=1}^N \frac{(x_t - \bar{x})(y_{t-h} - \bar{y})}{N\hat{\sigma}_X\hat{\sigma}_Y}. \quad (1.4)$$

Um outro instrumento para avaliar a dependência de uma série com seus valores passados foi proposto por Box, Jenkins e Reisel (1994), e é denominada a função de autocorrelação parcial (f.a.c.p.). Seja ϕ_{kj} o j -ésimo coeficiente de um modelo $\text{AR}(k)$, de tal modo que ϕ_{kk} é o coeficiente correspondente ao termo da k -ésima defasagem da série. A quantidade ϕ_{kk} é considerada uma função de k e é denominada função de autocorrelação parcial de uma série.

Um artifício freqüentemente utilizado é aplicar a transformação de Fourier aos dados de forma a descrever a série não mais no domínio de tempo mas da freqüência. A vantagem na utilização dessa transformação é que eliminam-se os problemas inerentes à correlação serial, pois os componentes (funções senos e cossenos) são ortogonais.

Definição 1.0.7. O espectro ou função densidade espectral ($f(\lambda)$) de uma série X_t é definido como sendo a transformada de Fourier da função de autocovariância do processo, ou seja

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \exp(-i\lambda h),$$

se $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. Assim, a transformação inversa é

$$\gamma(h) = \int_{w=-\pi}^{\pi} f(w) \exp(iwh) dw.$$

Teorema 1.0.1. *Seja X_t um processo da forma:*

$$X_t = \sum_{s=1}^{\infty} c_s a_{t-s},$$

onde c_s é uma série de constantes com $\sum_{s=1}^{\infty} c_s < \infty$ e a_t uma série temporal. Em outras palavras, temos que a série X_t é uma série filtrada de a_t . Seja a função de transferência $A(\lambda)$, tal que

$$A(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s \exp(-is\lambda).$$

Se $f_a(\lambda)$ é o espectro do processo a_t , então o espectro ($f_x(\lambda)$) do processo X_t é dado por

$$f_x(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_a(\lambda).$$

Como em aplicações práticas a função de autocovariância do processo não é conhecida, em geral utiliza-se uma estimativa para função densidade espectral. Um estimador freqüentemente utilizado é denominado periodograma e foi introduzido por Schuster (1906). Antes de definirmos o periodograma, considere as transformações senos e cossenos de uma série X_t na freqüência (λ).

Definição 1.0.8. *A transformação cosseno ($X_c(\lambda)$) é definida pela expressão*

$$X_c(\lambda) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n X_t \cos(2\pi t\lambda).$$

Definição 1.0.9. *A transformação seno ($X_s(\lambda)$) é definida pela expressão*

$$X_s(\lambda) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n X_t \sin(2\pi t\lambda).$$

Definição 1.0.10. *Considere as transformações senos e cossenos de uma série X_t . O periodograma é um estimador do espectro e é definido por*

$$I(\lambda) = X_c^2(\lambda) + X_s^2(\lambda).$$

Definição 1.0.11. *A transformada discreta de Fourier de uma série X_t de tamanho n é dada por*

$$\xi(\lambda) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n X_t \exp(-2\pi i \lambda t),$$

onde $\lambda = k/n$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Pode-se verificar que o periodograma também pode ser representado por

$$I(\lambda) = |\xi(\lambda)|^2.$$

Verifica-se que o periodograma é assintoticamente não viesado, porém possui variância $f^2(\lambda)$ (Brillinger, 1981). Portanto, o periodograma é um estimador não consistente para a função densidade espectral. Resultados assintóticos mostram que as transformações senos e cossenos tendem conjuntamente para variáveis com distribuição normal com média zero e variância $f(\lambda)/2$. Dessa forma, verifica-se uma propriedade importante do periodograma, dada por

$$\frac{2(I(\lambda))}{f(\lambda)} \sim \chi_2^2 \quad (1.5)$$

Utilizando a propriedade acima, é possível a construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, e diversas outras ferramentas no domínio da frequência.

Modelos Clássicos de Séries Temporais

Neste capítulo, serão apresentados alguns modelos tradicionais utilizados em séries temporais. Primeiramente, será introduzido o conceito de *Processo Linear*. Em seguida, serão apresentados modelos da família *ARIMA* introduzidos por Box e Jenkins (1994), modelos heterocedásticos da família *GARCH* propostos por Engle(1982) e *volatilidade estocástica* desenvolvido por Taylor (1980, 1986) e outros. Tais modelos são freqüentemente utilizados na modelagem de séries temporais financeiras, pois são aplicáveis à previsão de retornos e volatilidades.

2.1 Processo Linear

A classe de processos lineares em séries temporais possui uma grande abrangência de modelos, permitindo a modelagem de grande parte das séries estacionárias.

Um processo linear pode ser definido como a saída de um filtro linear, cuja entrada é um processo ruído branco, ou seja,

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \psi_0 w_t + \psi_1 w_{t-1} + \psi_2 w_{t-2} + \dots \\ &= \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde w_t 's são ruídos branco com média zero e variância σ^2 .

Sob determinadas condições, o processo pode ser representado por uma regressão de

observações passadas da série , ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + \dots + w_t \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \tilde{X}_{t-j} + w_t\end{aligned}\quad (2.2)$$

onde $\tilde{X} = X_t - \mu$.

A função de autocovariância do processo é dada por

$$\gamma_x(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+h} \psi_j. \quad (2.3)$$

A função densidade espectral do processo é dada por

$$f_x(\lambda) = 2\sigma^2 \Psi(e^{-i\lambda}). \quad (2.4)$$

onde $\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$

Proposição 2.1.1. *Um processo linear será estacionário se*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty.$$

Propriedades:

a) Se X_t é um processo linear estacionário com função de autocorrelação $\rho_x(h)$, $E(w_t^4) < \infty$, e w_t é um ruído branco, para cada $h = 1, 2, \dots$

$$\hat{\rho}_x(h) \xrightarrow{D} N(\rho_x(h), \tau^2),$$

onde τ^2 é uma função de $\rho_x(h)$ e $\hat{\rho}_x(h)$ é a função de autocorrelação amostral.

b) Se X_t é um processo ruído branco, então $\rho(h) = 0$ para $h \neq 0$, $\sigma_{\hat{\rho}(h)} = 1/\sqrt{n}$ e

$$\hat{\rho}_x(h) \xrightarrow{D} N(0, 1/\sqrt{n}),$$

c) Se X_t e Y_t forem conjuntamente não-correlacionados e pelo menos um dos processos for ruído branco, então $\hat{\rho}_{xy}(h) \xrightarrow{D} N(0, 1/\sqrt{n})$

2.2 Modelos da família ARIMA(p,d,q)

2.2.1 Modelo Autoregressivo

Observando a função de autocorrelação de algumas séries temporais, verifica-se que existe dependência entre o valor atual da série e seus valores passados. Além disso, nota-se que esta dependência é cada vez menor para pontos mais distantes no tempo. Portanto, é natural tentar prever o valor de X_t através de uma regressão linear sobre p valores passados da série.

Um modelo *autoregressivo* de ordem p , é um caso particular da representação (2.2), pois a partir do índice $p + 1$ os coeficientes são iguais zero. Denota-se o processo por $AR(p)$ e é definido por

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + a_t, \quad (2.5)$$

onde a_t é ruído branco com média nula e variância σ^2 . O processo também pode ser representado, utilizando-se o operador B (*backward*)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{X}_t = a_t,$$

ou

$$\phi(B) \tilde{X}_t = a_t, \quad (2.6)$$

onde $B \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t-1}$ e $\phi(B)$ é denominado polinômio autoregressivo.

Proposição 2.2.1. *Um processo autoregressivo será estacionário se as raízes do polinômio $\phi(B)$ estiverem fora do círculo unitário. Este processo sempre será invertível.*

A função de autocovariância de ordem k de um processo $AR(p)$ é dada por

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad (2.7)$$

e $\gamma_0 = \text{Var}(X_t)$, logo, a função de autocorrelação de ordem k do processo é

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}. \quad (2.8)$$

Observação 2.2.1. A função de autocorrelação de um $AR(p)$ decai exponencialmente para zero ou através de senóides amortecidas. Além disso, a função de autocorrelação parcial de um $AR(p)$ é nula para lags maiores que p . Portanto uma forma de identificar estes processos é a análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais.

2.2.2 Modelo de Médias Móveis

A caracterização de um processo de *médias móveis* é menos intuitiva que a de um processo *AR*, pois consiste em uma regressão onde as variáveis explicativas são os valores passados dos erros aleatórios. Em outras palavras, um modelo de *médias móveis* de ordem q é um caso particular da representação (2.1), onde apenas os coeficientes a partir do índice $q + 1$ são iguais à zero. Denota-se este processo por $MA(q)$, e é definido por

$$\tilde{X}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (2.9)$$

onde a_t é ruído branco com média nula e variância σ^2 . O processo também pode ser descrito, utilizando-se o polinômio B (*backward*)

$$\tilde{X}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t,$$

ou

$$\tilde{X}_t = \theta(B) a_t, \quad (2.10)$$

onde $\theta(B)$ é denominado operador de médias móveis.

Proposição 2.2.2. *Um processo de médias móveis é sempre estacionário. Para que o processo seja invertível, é necessário que as raízes do polinômio $\theta(B)$ estejam fora do círculo unitário.*

A função de autocovariância de um processo $MA(q)$ é dada por

$$\gamma_k = (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2, \quad (2.11)$$

para $k = 1, \dots, q$, caso contrário $\gamma_k = 0$.

A função de autocorrelação do processo é

$$\rho_k = \frac{(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q)}{(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)}. \quad (2.12)$$

Observação 2.2.2. A função de autocorrelação de um $MA(q)$ é nula para lags maiores que q . A função de autocorrelação parcial decai para zero exponencialmente. Portanto, este processo pode ser identificado analisando as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais. Note que a f.a.c. e f.a.c.p. deste processo possuem comportamento inverso ao processo autoregressivo.

2.2.3 Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis

Um modelo *autoregressivo e de médias móveis* é uma união de processos autoregressivos de ordem p e processos de médias móveis de ordem q . É frequentemente utilizado por ser mais parcimonioso que os dois modelos anteriores. O processo é denotado por $ARMA(p, q)$ e é definido da seguinte forma:

$$\tilde{X}_t - \phi_1 \tilde{X}_{t-1} - \dots - \phi_p \tilde{X}_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (2.13)$$

onde a_t é ruído branco com média nula e variância σ^2 . O processo também pode ser representado, utilizando-se o operador B (*backward*)

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)a_t, \quad (2.14)$$

Proposição 2.2.3. *Um processo de médias móveis será estacionário se as raízes do polinômio $\phi(B)$ estiverem fora do círculo unitário. Para que o processo seja invertível é necessário que as raízes do polinômio $\theta(B)$ estejam fora do círculo unitário.*

A função de autocovariância de um processo $ARMA(p, q)$ é dada por

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{\tilde{X}_a}(k) - \theta_1 \gamma_{\tilde{X}_a}(k-1) - \theta_q \gamma_{\tilde{X}_a}(k-q), \quad (2.15)$$

onde $\gamma_{\tilde{X}_a}(k)$ é a função de covariância cruzada entre $\tilde{X}_t$ e a_t . Como $\tilde{X}_{t-k}$ só depende de choque a_t ocorridos até o instante $t-k$, obtemos:

$$\gamma_{\tilde{X}_a}(k) = \theta_{-k} \sigma_a^2,$$

se $k \leq 0$, caso contrário $\gamma_{\tilde{X}_a}(k) = 0$.

A função de autocorrelação do processo, para $k > q$ é

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}. \quad (2.16)$$

Observação 2.2.3. A função de autocorrelação de um $ARMA(p, q)$ possui o mesmo comportamento de um $AR(p)$ para lags maiores que q , ou seja, decai exponencialmente. A função de autocorrelação parcial decai para zero exponencialmente a partir do lag p .

O espectro do processo $ARMA(p, q)$ é dada por

$$f_x(\lambda) = \frac{\sigma_a^2 |\theta(e^{-i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\lambda})|^2}. \quad (2.17)$$

2.2.4 Modelo Autoregressivo e de Médias Móveis Integrado

Na prática, muitas vezes observa-se séries não-estacionárias e que não possuem tendência determinística (como na forma polinomial, por exemplo), porém observa-se a estacionariedade na primeira diferença da série. Temos que um processo $ARMA$ é estacionário se as raízes da equação característica $\phi(B)$ estiverem fora do círculo unitário. O modelo $ARIMA$ foi proposto para a modelagem de processos na qual pelo menos uma das raízes se encontra sobre o círculo unitário. Processos dessa forma são denominados *processos não-estacionários homogêneos*.

Considere o seguinte modelo:

$$\varphi(B)\tilde{X} = \theta(B)a_t \quad (2.18)$$

onde $\varphi(B)$ é um operador não-estacionário, ou seja, pelo menos uma das raízes da equação características encontra-se sobre o círculo unitário. Pode-se também representar o modelo utilizando o operador diferença Δ , da seguinte forma

$$\phi(B)\Delta^d\tilde{X} = \theta(B)a_t \quad (2.19)$$

onde $\Delta^d = (1 - B)^d$.

Este processo é denominado *autoregressivo e de médias móveis integrados* denotado por $ARIMA(p, d, q)$. Verifica-se que este modelo assume que a d -ésima diferença da série pode ser representada por um processo $ARMA(p, q)$ estacionário e invertível. Basicamente, existem três formas explícitas de se representar um modelo $ARIMA(p, d, q)$, que serão apresentados a seguir.

A primeira representação é através de choques aleatórios. Este modelo representa o processo X_t como saída de um filtro linear cuja entrada são ruídos branco. O modelo é dado por:

$$\tilde{X}_t = \psi(B)a_t. \quad (2.20)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação por $\varphi(B)$, obtemos

$$\varphi(B)\tilde{X}_t = \varphi(B)\psi(B)a_t,$$

mas temos também que

$$\varphi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)a_t,$$

logo

$$\varphi(B)\psi(B) = \theta(B).$$

Portanto, para obtermos os coeficientes ψ do filtro linear, basta expandir os polinômios

$$(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d})(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q). \quad (2.21)$$

Uma segunda representação é dada utilizando-se equações de diferenças, onde expressa-se o valor atual de X_t como função dos valores passados de X_t e valores passados dos a_t . O modelo é representado por

$$\tilde{X} = \varphi_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} \tilde{X}_{t-p-d} - \theta_{t-1} a_{t-1} - \dots - \theta_{t-q} a_{t-q} + a_t. \quad (2.22)$$

O modelo também pode ser representado na forma invertida, onde o processo X_t é representado como função dos valores passados de X_t e do valor atual de a_t . O modelo é representado por

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{X}_{t-j} + a_t \quad (2.23)$$

Os coeficientes π são obtidos equacionando-se os coeficientes de B em

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \theta(B)\pi(B) \\ (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}) &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots). \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3 Modelos Heterocedásticos Condicionais

Nos mercados financeiros existem diversos *ativos* no qual o capital pode ser investido. Exemplificando, suponha que ações de uma empresa A sejam comercializadas na bolsa de valores. Cada ação (ativo) representa uma pequena quantidade do patrimônio da empresa e portanto possui um preço P_t variável ao longo do tempo, pois está sujeito às flutuações do mercado.

O *retorno simples* de k períodos de um ativo financeiro é definido por

$$R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1.$$

Note que o retorno simples é simplesmente a variação percentual do preço do ativo em um determinado período de tempo de amplitude k .

A volatilidade de um ativo financeiro é definida como o potencial de variabilidade do preço em um determinado período de tempo. Em outras palavras, se o preço das ações da empresa A apresenta uma variabilidade muito grande, dizemos que o ativo possui grande volatilidade. Nos mercados financeiros, a volatilidade de um ativo é de grande importância, pois mede o risco que um investidor assume ao comprá-lo. Isto vem do fato de que se o preço do ativo possui grande potencial para subir, também possui grande potencial para cair. A forma mais usual de se quantificar a volatilidade de um ativo é através do *desvio-padrão* da série de retornos, pois quanto maior a variabilidade dos retornos, maior será a variabilidade da série de preços.

Empiricamente, verifica-se que a série de retornos não possui distribuição de probabilidade normal, suposição em geral assumida para a estimação de modelos ARIMA (geralmente estimado pelo método da máxima verossimilhança). Porém, tal condição é satisfeita para a série de log-retornos. O log-retorno de k períodos de um ativo financeiro é definido por:

$$r_t[k] = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right),$$

ou seja, os retornos de grande parte dos ativos financeiros, possui distribuição de probabilidade *lognormal*. Outra vantagem na utilização de log-retornos é que o log-retorno de um ativo em k períodos, é simplesmente a soma dos log-retornos de cada período.

Além disso, temos que a variabilidade da série de log-retornos não é constante. Determinadas características da volatilidade podem ser observadas em séries de ativos financeiros, principalmente de ações de bolsas de valores, entre elas,

- existência de conglomerados de volatilidade;
- retornos altos são em geral seguidos por novos retornos altos;
- quando o nível de preço de determinado ativo está baixo aumenta-se a incerteza dos investidores sobre o rumo do preço do ativo, impactando em um aumento na volatilidade da série de retornos.

2.3.1 Modelos da Família GARCH

Os modelos da família *GARCH* foram propostos por Engle(1982) para a modelagem da taxa inflacionária britânica, e são modelos não-lineares, no que se refere a variância. Verifica-se que grande parte das séries financeiras apresentam conglomerados de volatilidades, ou seja, a volatilidade apresenta um comportamento inercial, de forma que suas variações se dão lentamente.

Modelo GARCH

Em geral, utiliza-se os modelos da família *ARIMA* para a modelagem da função média da série de log-retornos da série conjuntamente com modelos da família *GARCH* para a modelagem da variância condicional. Um modelo *ARIMA*(p, q) para a função média do log-retorno r_t é dado por:

$$r_t = \phi_0 \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}, \quad (2.25)$$

onde a_t é ruído branco. Um modelo *GARCH*(r, s) para a volatilidade da série é dado por:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1$ e $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$ para todo i, j .

Note que no modelo *GARCH* a variância é a soma ponderada de valores passados da volatilidade σ_t^2 e dos quadrados dos erros aleatórios a_t^2 . Temos também que embora a série a_t seja não-correlacionada com seus valores passados, apresenta dependência descrita por uma função quadrática. Portanto, uma forma de identificação destes modelos é observar a função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial do quadrado da série padronizada.

Modelo EGARCH e TARCH

Observa-se que embora o modelo *GARCH* incorpore o comportamento inercial da volatilidade, o impacto de retornos negativos e positivos é modelado da mesma forma. Porém, empiricamente, retornos negativos são seguidos de acréscimo na volatilidade. O modelo *EGARCH* (Nelson, 1991) para a volatilidade foi construído de forma a incorporar distintamente retornos positivos e negativos, e é dado por:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i |\epsilon_{t-i}| + \sum_{i=1}^r \gamma_i \epsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.27)$$

onde ϵ_{t-i} é ruído branco com distribuição normal padrão. Se pelo menos um dos coeficientes γ_i for estatisticamente significativo, verifica-se a existência do efeito de assimetria dos retornos na volatilidade.

Uma forma alternativa para se incorporar o impacto assimétrico dos retornos é dada pelo modelo *TARCH* (Glosten, Jagannathan e Runkle, 1993), definido por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^r \gamma_i r_{t-i}^2 d_{t-i} + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.28)$$

com $d_t = 1$ se $r_t < 0$, e zero caso contrário.

2.3.2 Modelo de Volatilidade Estocástica

O modelo de *volatilidade estocástica*, proposto por Taylor (1980, 1986) e outros, é uma forma alternativa aos modelos da família *GARCH* para a modelagem do comportamento inercial da volatilidade dos retornos. Note que no modelo *GARCH* a volatilidade depende apenas de seus valores passados e dos valores passados da série de log-retornos, portanto, dada a informação até o instante $t - 1$ a volatilidade no tempo t é determinística. O modelo de *volatilidade estocástica* inclui um componente aleatório para a volatilidade, e é definido por:

$$\log(r_t^2) = K + h_t + u_t, \quad (2.29)$$

$$h_t = \alpha h_{t-1} + \nu_t, \quad (2.30)$$

onde $K = \log(\sigma^2) + E[\log(\epsilon_t^2)]$, $u_t = \log(\epsilon_t^2) - E[\log(\epsilon_t^2)]$, com $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ e $\nu_t \sim N(0, \sigma_\nu)$ ruídos brancos.

Verifica-se que o modelo de *volatilidade estocástica* é um caso particular de um modelo de espaço de estados. Logo pode-se utilizar esta formulação para realizar a estimação dos parâmetros e previsão, através do filtro de Kalman por exemplo.

Modelos de Memória Longa

Verifica-se que a função de autocorrelação dos processos descritos no capítulo anterior possuem decaimento rápido para zero e em taxa exponencial ou geométrica(memória curta). Neste capítulo serão apresentados alguns modelos que possuem decaimento mais lento e em taxa hiperbólica da função de autocorrelação, denominados *modelos de memória longa* ou de *integração fracionária*. Em seguida, serão apresentados alguns testes e medidas para a persistência.

3.1 Modelos de Memória Longa

Os modelos de memória longa foram primeiramente desenvolvidos por estatísticos envolvidos na área de climatologia e hidrologia. Hurst(1951, 1956, 1957) analisou diversas séries temporais geofísicas buscando compreender a persistência existente nas séries de vazão de água, para um melhor planejamento de reservatórios. Modelos estatísticos para a análise de vazão de rios foram sugeridos também por Lawrance e Kottegoda (1977), enquanto que Hipel e Mcleod (1978a,b) consideraram algumas aplicações na área climatológica, onde verifica-se a presença de memória longa nas séries de velocidade do vento e temperatura.

Somente na década de 1980 os modelos de memória longa começaram a ser utilizados na área econométrica, quando verificou-se que eram adequados para a previsão de determinados tipos de taxas de juros, inflação, etc. (Baillie, 1996). Provavelmente, um dos maiores sucessos foi a modelagem da volatilidade de ativos financeiros e transformações

de potências da série de retornos.

3.1.1 Definição de Memória Longa

Em termos gerais, dizemos que uma série y_t possui persistência ou memória longa, se y_t é correlacionado com y_{t-j} para valores grandes de j , de forma que a correlação decai hiperbolicamente conforme j cresce. Formalmente, considere que y_t é uma série temporal com função de autocorrelação ρ_j no lag j . A condição de estacionariedade de qualquer processo é satisfeita se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \rho_j^2 < \infty. \quad (3.1)$$

Segundo McLeod e Hipel (1978), o processo possui memória longa se a quantidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\rho_j| \quad (3.2)$$

não for finita. Dizemos que o processo y_t é integrado de ordem d , ou $I(d)$ se

$$(1 - B)^d y_t = u_t, \quad (3.3)$$

onde B é operador *backward*, $-0,5 < d < 0,5$ e u_t é um processo estacionário.

Para $0 < d < 0,5$ o processo possui memória longa, e observa-se que a função de autocorrelação é positiva e decai hiperbolicamente. Alguns autores (Diebolt e Guiraud, 2002) consideram que para $-0,5 < d < 0$, o processo não possui memória longa, pois há alternância do sinal da função de autocorrelação. Dessa forma, este tipo de processo é denominado antipersistente, mas não está no escopo deste trabalho.

3.1.2 Medidas de Memória Longa

A primeira estatística para quantificar o efeito de memória longa foi proposta por Hurst (1951) e é denominada estatística (R/S) (*rescaled range*), definida por

$$R = \left[\max_{1 \leq j \leq T} \left(\sum_{t=1}^j (y_t - \bar{y}) \right) - \min_{1 \leq j \leq T} \left(\sum_{t=1}^j (y_t - \bar{y}) \right) \right] \frac{1}{S}, \quad (3.4)$$

onde R é a amplitude, $\bar{y}$ é a média amostral, e

$$S = \left(\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}{T} \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$

é o desvio padrão amostral. Hurst(1951) mostrou que

$$T^{-H}[R/S] \xrightarrow{P} \text{constante}, \quad (3.6)$$

quando $T \rightarrow \infty$, e H é o denominado coeficiente de Hurst. Uma propriedade interessante da estatística R/S é que

$$\log[E(R/S)] \approx \text{constante} + H[\log(T)]. \quad (3.7)$$

Assim, o coeficiente de Hurst H pode ser estimado por $\log \frac{R/S}{\log(T)}$, ou através do coeficiente de inclinação estimado de uma regressão entre $\log \frac{R}{S}$ e $\log(T)$ para valores distintos de T . Como um processo de memória curta possui um valor de H igual à 0,5, séries com estimativas de H que excedem relevantemente 0,5 podem ser intepreradas como séries de memória longa.

Contudo, alguns estudos indicam que a estatística R/S possui sérias deficiências na presença de dados gerados pela combinação de processos de memória longa e processos de memória curta. Uma estatística modificada foi proposta por Lo(1991), e é definida por

$$Q = \frac{R}{\sigma(q)}, \quad (3.8)$$

onde

$$\sigma^2(q) = c_0 + 2 \sum_{j=1}^q w_j(q) c_j, \quad (3.9)$$

c_j é a função de autocovariância amostral no lag j da série e w_j é a janela de Bartlett com pesos

$$w_j(q) = 1 - \left[\frac{j}{q+1} \right], \quad (3.10)$$

para valores de $q < T$. A escolha de q deve ser baseada na ordem dos processos de memória curta envolvidos.

3.1.3 Ruído Branco Fracionário

Um dos processos mais simples de memória longa é o ruído branco fracionário, proposto independentemente por Granger (1980), Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981), e é definido por

$$(1 - B)^d(y_t - \nu) = \epsilon_t, \quad (3.11)$$

onde $E[\epsilon_t] = 0$, $E[\epsilon_t^2] = \sigma^2$, $E(y_t) = \nu$, e $E[\epsilon_t \epsilon_s] = 0$ para $s \neq t$ onde o parâmetro fracionário d é não-inteiro. Sem perda de generalidade, vamos considerar $E(y_t) = \nu = 0$. Verifica-se que este processo será estacionário se $d < 0,5$ e será invertível se $d > -0,5$.

O modelo pode ser escrito como um processo autoregressivo de ordem infinita

$$y_t = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k y_{t-k} + \epsilon_t, \quad (3.12)$$

onde os coeficientes π_k podem ser obtidos através da expansão binomial,

$$(1 - B)^d = 1 - dB + \frac{d(d-1)B^2}{2!} - \frac{d(d-1)(d-2)B^3}{3!} + \dots, \quad (3.13)$$

para qualquer $d > -1 \in \mathbf{R}$. Ou seja, o coeficiente autoregressivo no lag k é dado por

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{d(d-1)(d-2)\dots(d-k+1)(-1)^{k-1}}{k!} \\ &= \frac{(-d)(1-d)(2-d)\dots(k-1-d)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Um ruído branco com integração fracionária também pode ser escrito na forma de choques aleatórios (decomposição de Wold), dada por

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-k} \\ &= (1 - B)^{-d} \epsilon_t \\ &= \left(1 + dB + \frac{d(d+1)B^2}{2!} + \frac{d(d+1)(d+2)B^3}{3!} + \dots \right) \epsilon_t. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto, temos que os pesos ψ_k são dados por

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)}, \quad (3.16)$$

A função de autocovariância do processo é

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}, \\ \gamma_k &= \sigma^2 \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(k+1-d)\Gamma(1-d)\Gamma(d)},\end{aligned}$$

e a função de autocorrelação é dada pela expressão

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{d}{1-d}, \\ \rho_2 &= \frac{d(1+d)}{(1-d)(2-d)}, \\ \rho_k &= \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)}.\end{aligned}$$

A Figura 3.1 ilustra o decaimento da função de autocorrelação de um ruído branco fracionário com $d = 0.4$.

Figura 3.1: Função de Autocorrelação (ρ_k) para $d = 0.4$

O espectro de um processo ruído branco fracionário é dado por

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]^{-2d}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Utilizando a aproximação de Stirling quando $k \rightarrow \infty$, temos que $\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \approx k^{a-b}$. Assim podemos fazer as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}\psi_k &\approx \Gamma(d)^{-1} k^{d-1} \approx c_1 k^{d-1}, \\ \pi_k &\approx \Gamma(-d)^{-1} k^{-d-1} \approx c_2 k^{-d-1}, \\ \rho_k &\approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1} \approx c_3 k^{2d-1}.\end{aligned}$$

Uma propriedade interessante dos processos ruído branco fracionários é que função densidade espectral nas baixas frequências pode ser aproximada por

$$f(\lambda) \approx \lambda^{-2d}. \quad (3.18)$$

Note que existe um forte contraste entre a função densidade espectral deste processo e a de séries com $d = 0$ que são próximas de zero nas baixas frequências. Veremos mais tarde que alguns autores aproveitam-se deste fato para a determinação de métodos de detecção de memória longa.

3.1.4 Modelo ARFIMA(p,d,q)

O modelo *autoregressivo e de médias móveis com integração fracionária* foi introduzido por Granger e Joyeux (1980), Granger (1980) e Hosking (1981) e caracteriza-se pela sua grande flexibilidade. Um modelo *ARFIMA*(p, d, q) é definido por

$$\phi(B)(1-B)^d(y_t - \mu) = \theta(B)\epsilon_t, \quad (3.19)$$

onde d denota o parâmetro de diferença fracionária e ϵ_t é um ruído branco com variância σ^2 . Verifica-se que a função de autocorrelação apresenta um lento decaimento para zero em taxa hiperbólica. Nas baixas frequências com $d > 0$, uma aproximação para o espectro é $f(\lambda) \approx \lambda^{-2d}$. Temos que o processo possui variância infinita se $d > 0,5$.

Note que para o modelo ARMA tradicional é um caso particular do modelo ARFIMA, quando $d = 0$. Verifica-se também que o efeito do parâmetro d para observações mais distantes decai hiperbolicamente, mas os efeitos dos parâmetros p e q decai exponencialmente. Portanto, na modelagem de processos *ARFIMA*(p, d, q), o parâmetro d deve ser escolhido de forma a explicar a estrutura de correlação nos lags mais altos, e os parâmetros p e q

nos lags baixos. Logo, a estrutura de autocorrelação de um processo $ARFIMA(p, d, q)$ é muito próxima a de um ruído branco fracionário no lag j , para valores de j suficientemente grandes.

Proposição 3.1.1. *Se $\{X_t\}$ é um processo $ARFIMA(p, d, q)$, então*

- 1) *O processo será estacionário se $d < 0,5$ e as raízes do polinômio $\phi(B)$ estiverem fora do círculo unitário.*
- 2) *O processo será invertível se $d > -0,5$ e as raízes do polinômio $\theta(B)$ estiverem fora do círculo unitário.*

A representação na forma de choques aleatórios do processo é dada por

$$X_t = \psi(B)\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad (3.20)$$

onde $\psi_0 = 1$ e $\psi(B) = (1 - B)^d \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$. Portanto, temos

$$f_X(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_\epsilon(\lambda), \quad (3.21)$$

onde

$$A(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_t e^{-i\lambda t} = \psi(e^{-i\lambda}) = (1 - e^{-i\lambda})^{-d} \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})}, \quad (3.22)$$

$$|A(\lambda)|^2 = \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-2d} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}. \quad (3.23)$$

Portanto, temos que o espectro de um processo ARFIMA pode ser representado por

$$f_X(\lambda) = \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-2d} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2} \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}. \quad (3.24)$$

Sowell(1986, 1992a) mostrou que a função de autocovariância deste processo é da forma

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \xi_j \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^q \theta_n \theta_m C(d, d, p + n - m - k, \lambda_j), \quad (3.25)$$

onde λ_j é a j -ésima raiz do polinômio $\phi(B)$ e

$$\xi_j = \{\lambda_j \prod_{i=1, p} (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{i=1, p; k \neq i} (\rho_i - \rho_k)\}^{-1}, \quad (3.26)$$

$$C(w, v, k, \rho) = G(w, v, k) [\rho^{2p} F(v + k, 1; 1 - w + k; \rho) + \quad (3.27)$$

$$+ F(w - k, 1; 1 - v - k; \rho) - 1], \quad (3.28)$$

$$G(w, v, k) = \frac{\Gamma(1 - w - v) \Gamma(v + k)}{\Gamma(1 - w + k) \Gamma(1 - v) \Gamma(v)}. \quad (3.29)$$

e $F(a, b; c; x)$ é a função hipergeométrica

$$F(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)(b(b+1))}{c(c+1)1}x^2 + \dots \quad (3.30)$$

3.1.5 Estimador de Geweke e Porter-Hudak

O método da regressão espectral foi proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) e é freqüentemente utilizado para a estimação do parâmetro d de um processo de memória longa $I(d)$. Este método baseia-se na relação entre a função densidade espectral de um processo ARFIMA(p,d,q) e suas respectivas coordenadas harmônicas.

Se $\{X_t\}$ é um processo $ARFIMA(p, d, q)$ com $E[X_t] = 0$ e $|d| < 0,5$, vimos que a função densidade espectral de X_t pode ser representada por

$$f_x(\lambda) = \left(2\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-2d} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2 \sigma_\epsilon^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2 2\pi}.$$

Se $U_t = (1 - B)^d X_t$ é um processo $ARMA(p, q)$, então sua função densidade espectral pode ser escrita como

$$f_u(\lambda) = \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2 \sigma_\epsilon^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2 2\pi}$$

Logo, temos que

$$f_x(\lambda) = \left(2\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-2d} f_u(\lambda) \quad (3.31)$$

Note que o termo $\left(2\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-2d}$ da função densidade espectral está relacionado à propriedade de memória longa da série (parâmetro d), enquanto que $f_u(\lambda)$ está relacionado aos componentes de memória curta (parâmetros AR e MA). Além disso, uma propriedade muito importante de um processo de memória longa é que nas freqüências próximas de zero, a função densidade espectral pode ser aproximada por $f(\lambda) \approx \lambda^{-2d}$. Um processo de memória curta possui $f(\lambda) \approx 0$ nas baixas freqüências. Portanto, é razoável obter informações e medidas de memória longa com base no espectro em freqüências muito próximas a zero. Assim, o método proposto por Geweke e Porter-Hudak utiliza uma estimativa do espectro, o periodograma $I_x(\lambda)$, para a estimação do parâmetro d .

Tome a equação (3.31)

$$\begin{aligned} f_x(\lambda) &= \left[4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]^{-d} f_u(\lambda), \\ &= \frac{f_u(0)}{f_u(0)} \left[4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]^{-d} f_u(\lambda), \end{aligned}$$

e tomando o logaritmo em ambos os lados,

$$\ln(f_x(\lambda)) = \ln(f_u(0)) + (-d)\ln \left(4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{f_u(\lambda)}{f_u(0)} \right). \quad (3.32)$$

Definimos as coordenadas harmônicas por $\lambda = \lambda_{j,T} = \frac{2\pi j}{T}$. Adicionando $\ln[I_x(\lambda_{j,t})]$ em ambos os lados da equação, temos

$$\ln(I_x(\lambda_{j,T})) = \ln(f_u(0)) + (-d)\ln \left(4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{f_u(\lambda_{j,T})}{f_u(0)} \right) + \ln \left(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right) \quad (3.33)$$

Note que se o termo $\lambda_{j,T}$ assume valores próximos a zero, o termo $\ln \frac{f_u(\lambda_{j,T})}{f_u(0)}$ assume valores desprezíveis. Portanto, selecionamos $j = 1, 2, \dots, g(T)$, $g(T) < T$, de forma que $\lambda_{j,T}$ aproxima-se de zero quando $T \rightarrow \infty$. Assim, nas baixas frequências, o logaritmo do periodograma pode ser aproximado por

$$\ln(I_x(\lambda_{j,T})) \approx \ln(f_u(0)) - d \ln \left(4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right), \quad (3.34)$$

para $j = 1, 2, \dots, g(T)$.

Modificando a notação, de forma a facilitar a interpretação dos termos (Geweke e Porter-Hudak, 1993), seja

$$\begin{aligned} y_j &= \ln(I_x(\lambda_{j,T})), \\ x_j &= \ln \left[4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right], \\ \epsilon_j &= \ln \left(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right) - E \left[\ln \left(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right) \right], \\ a &= \ln(f_u(0)) + E \left[\ln \left(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right) \right], \\ b &= -d. \end{aligned}$$

Segue-se que a equação (3.34) pode ser representada na forma de um modelo de regressão linear simples dado por

$$y_j = a + bx_j + \epsilon_j \quad (3.35)$$

para $j = 1, 2, \dots, g(T)$. O método proposto por Geweke e Porter-Hudak consiste na utilização do método de mínimos quadrados ordinários, para estimar $b = -d$. No entanto, lembremos que uma condição essencial para a validade do modelo é que os termos ϵ_j sejam assintoticamente independentes e com média nula, e o número de pontos utilizados na regressão deve aumentar se aumentarmos o tamanho da série, de forma a garantir a consistência. Assim, escolhemos $g(T)$ de forma que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{g(T)}{T} = 0, \quad (3.36)$$

para que sejam analisados somente os valores do periodograma nas baixas frequências. Além disso, se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = \infty, \quad (3.37)$$

e temos os resultados seguintes,

Proposição 3.1.2. *Seja $\{X_t\}$ um processo ARFIMA(p, d, q) com $d < 0$. Se $T \rightarrow \infty$, então os termos $\{-\ln\left(\frac{I_X(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})}\right)\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, T-1$, são independentes e seguem uma distribuição de Gumbel com média 0,557216 (constante de Euler) e variância $\frac{\pi^2}{6}$.*

Proposição 3.1.3. *(Chen et al., 1993) Seja $0 < d < 0,5$ e f_X positiva e contínua. Para um inteiro $k > 0$ e índices $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$, denote o cumulante conjunto de $Z_t, Z_{t+t_1}, \dots, Z_{t+t_{k-1}}$ por $c_k^z(t_1, \dots, t_{k-1})$ e assuma que para qualquer $k > 0$*

$$\sum_{t_1, \dots, t_{k-1} = -\infty}^{\infty} |c_k^z(t_1, \dots, t_{k-1})| < \infty.$$

Considerando $I_X(\lambda_{j,T})$ um estimador para f_X , segue de Yajima(1989) que $I_X(\lambda_{j,T})/f_X$ são variáveis assintoticamente χ_2^2 e independentes.

Utilizando as proposições 3.1.2 e 3.1.3, verifica-se que os termos $\epsilon_j = \ln\left(\frac{I_X(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})}\right) - E\left[\ln\left(\frac{I_X(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})}\right)\right]$ são assintoticamente independentes e com média nula. As funções mais indicadas para $g(T)$ são da forma $g(T) = cT^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$.

Proposição 3.1.4. *(Geweke e Porter-Hudak, 1983). O estimador do parâmetro de memória longa $\hat{d}_{GPH}$ tem distribuição assintótica normal com média d e variância $\frac{\pi^2/6}{\sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2}$, onde $g(T) = cT^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ e $\pi^2/6$ é a variância de $\ln(\chi_2^2)$.*

Além disso, Geweke e Porter-Hudak mostraram que pode-se estimar também o desvio padrão de $\hat{d}$ através do desvio padrão estimado do coeficiente de inclinação do modelo de regressão, tornando a implementação do método extremamente simples.

3.1.6 Estimador usando o Periodograma Suavizado

Sabe-se que o periodograma é um estimador não consistente para a função densidade espectral $f(\lambda)$. Com o intuito de melhorar o método descrito anteriormente, Chen et al.(1993) e Reisen(1994) sugeriram a utilização de um estimador suavizado, que seja consistente para $f(\lambda)$. Assim, no lugar de (3.34) utilizamos

$$\ln(f_X^T(\lambda_{j,T})) \approx \ln(f_U(0)) - d \ln \left(4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{f_X^T(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})} \right), \quad (3.38)$$

onde $f_X^T(\lambda_{j,T})$ é o periodograma suavizado, definido por

$$f_X^T(\lambda_{j,T}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-m}^m k\left(\frac{s}{m}\right) R(s) \cos(s\lambda_{j,T}), \quad (3.39)$$

com $\lambda_{j,T} = \frac{2\pi j}{T}$, $j = 1, 2, \dots, T$, $k(z)$ uma função par e contínua no intervalo $(-1, 1)$ com $k(0) = 1$, denominada função geradora da janela espectral e $R(s)$ a função de autocovariância amostral no lag s . O parâmetro m é uma função $m(T)$ de T , de tal forma que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{m(T)}{T} \right) &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} m(T) &= \infty. \end{aligned}$$

Usualmente, tomamos $m = T^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$.

Diversas janelas podem ser utilizadas para a suavização do periodograma. Porém, as mais utilizadas são as janelas de Bartlett, Daniel, Blackman-Tukey, Hanning, Hamming, Parzen e Bartlett-Priestley (Chen et al., 1993). Veja Priestley (1981) para detalhes e a Tabela 3.1.

Assim como na seção anterior, pode-se escrever um modelo de regressão linear simples, dado por

$$y_j = a + bx_j + \epsilon_j \quad (3.40)$$

Janela Espectral	$k(u)$	$\alpha = \int_{-1}^1 k^2(u)du$
Bartlett	$1 - u $	$2/3$
Daniell	$\text{sen}(\pi u)/\pi u$	$0,90282336$
Blackman-Tukey	$1 - 2a + 2\cos(\pi u)$	$2(1 - 4a + 6a^2)$
Hanning	$0,5 + 0,5\cos(\pi u)$	$0,75$ ($a = 0,25$)
Hamming	$0,54 + 0,46\cos(\pi u)$	$0,7948$ ($a = 0,23$)
Parzen	$(1 - 6u^2 + 6u^3)$ se $ u \leq 0,5$ $2(1 - u)^3$ se $0,5 \leq u \leq 1$	$0,53928571$
Bartlett Pristley	$\frac{3}{\pi^2 u^2} \left\{ \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u) \right\}$	$1,2$

Tabela 3.1: Janelas Espectrais de Suavização

onde

$$\begin{aligned}
y_j &= \ln(f_X^T(\lambda_{j,T})), \\
x_j &= \ln \left[4\text{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right], \\
\epsilon_j &= \ln \left(\frac{f_X^T(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})} \right) - E \left[\ln \left(\frac{f_X^T(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})} \right) \right], \\
a &= \ln(f_U(0)) + E \left[\ln \left(\frac{f_X^T(\lambda_{j,T})}{f_X(\lambda_{j,T})} \right) \right], \\
b &= -d.
\end{aligned}$$

Em seguida, estima-se o parâmetro d do modelo de regressão linear simples através do métodos de mínimos quadrados ordinários. O modelo será válido se os termos ϵ_j forem assintoticamente independentes e com média nula, além de que o número de pontos utilizados na regressão deve aumentar se aumentarmos o número de pontos da série. Porém o desvio padrão de $\hat{d}$ não pode mais ser estimado através do desvio padrão estimado do coeficiente de inclinação da reta de regressão.

Priestley(1981) mostrou que $f_X^T(\lambda_{j,T})$ é assintoticamente não viesado, com variância dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [\text{Var}(f_X^T(\lambda))] = \begin{cases} f_X^2\left(\frac{m}{T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} k(u)du, & \text{se } \lambda \neq 0, \pi, -\pi, \\ 2f_X^2\left(\frac{m}{T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} k(u)du, & \text{se } \lambda \in \{0, \pi, -\pi\}. \end{cases}$$

Proposição 3.1.5. (Anderson, 1971). Seja $f_X(\lambda)$ a função densidade espectral de um modelo ARFIMA(p, d, q), $d \in (-0,5; 0)$, e $f_X^T(\lambda)$ um estimador suavizado, como o descrito

anteriormente. Então os termos $\ln \left(\frac{f_X^T(\lambda_{j,T})}{f_X^T(\lambda_{j,T})} \right)$ são não-correlacionados com distribuição normal de média zero e variância dada por

$$\text{Var} \left[\ln \left(\frac{f_X^T(\lambda_{j,T})}{f_X^T(\lambda_{j,T})} \right) \right] \approx \begin{cases} \frac{m}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du, & \text{se } \lambda \neq 0, \pi, -\pi, \\ \frac{2m}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du, & \text{se } \lambda \in 0, \pi, -\pi. \end{cases}$$

Proposição 3.1.6. (Chen et al., 1993). Se $d \in (0; 0,5)$, o estimador suavizado $f_X^T(\lambda)$ pode ser aproximado em distribuição por $f_X(\lambda)\chi_\nu^2/\nu$, onde ν é o correspondente grau de liberdade, dado por

$$\nu = \frac{2T}{m\alpha}, \quad (3.41)$$

$$\alpha = \int_{-1}^1 k^2(u) du. \quad (3.42)$$

Note que para as janelas espectrais apresentadas o valor de α pode ser encontrado na Tabela 3.1.

Segundo Chen et al.(1993) os erros ϵ_j do modelo de regressão espectral possui um comportamento de uma variável log-gamma, e conseqüentemente

$$E(\epsilon_j) \approx \psi(\nu/2) - \ln(\nu/2) \quad (3.43)$$

$$\text{Var}(\epsilon_j) \approx \psi'(\nu/2), \quad (3.44)$$

onde $\psi = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x))$ e $\psi' = \frac{d^2}{dx^2} \ln(\Gamma(x))$ são as funções digama e trigama, respectivamente. Verifica-se que os erros ϵ_j não são assintoticamente independentes, mas quando $T \rightarrow \infty$ temos que $m/T \rightarrow 0$ e $\nu \rightarrow \infty$, implicando que $E(\epsilon_j) \rightarrow 0$ e $\text{Var}(\epsilon_j) \rightarrow 0$, ou seja, uma distribuição degenerada, e conseqüentemente o estimador suavizado de d possui assintoticamente uma distribuição degenerada.

Chen et al.(1993) mostraram que o estimador suavizado $\hat{d}_s$ é assintoticamente normal,

$$\hat{d}_s \sim N \left(d, \frac{\psi'(\nu/2)}{\sum_{j=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2} \right), \quad (3.45)$$

onde $g(T)$ é da forma $g(T) = cT^\xi$, com $0 < \xi < 1$ e c constante.

Reisen(1994) em um estudo completamente independente, mostrou que a distribuição

assintótica de $\hat{d}_s$ também pode ser expressa na forma

$$\hat{d}_s \sim N \left(d, \frac{m \int_{-1}^1 k(u)^2 du}{\sum_{j=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2} \right). \quad (3.46)$$

Reisen(1994) e Chen et al.(1993) mostraram através de simulações que a estimação do parâmetro d utilizando o periodograma suavizado é melhor que utilizando o periodograma bruto, em relação a variabilidade e erro quadrático médio. No entanto Chen et al.(1993) verificaram que para séries finitas os estimadores suavizados possuem um ligeiro viés. Além disso, Chen et al.(1993) mostraram que as janelas espectrais com melhor performance são as janelas de Daniel e Bartlett-Priestley.

3.1.7 Estimador Truncado de Whittle

Este estimador foi proposto por Robinson (1995) e baseia-se também na estimação semiparamétrica do parâmetro d , assim como o estimador de Geweke e Porter-Hudak. No entanto, verifica-se que é assintoticamente mais eficiente e mais robusto em determinadas situações.

O método considera a aproximação de Whittle(1953) para o negativo da função de verossimilhança de um modelo $ARFIMA(p, d, q)$ gaussiano, dada por

$$L = \frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^m \frac{2\pi I(\lambda_j)}{I(T\lambda_j)} + \sum_{j=1}^m \log(I(\lambda_j)) \frac{2\pi}{T} \right]. \quad (3.47)$$

Como nas baixas frequências a função densidade espectral de um processo de memória longa pode ser aproximado por $c\lambda_j^{-2d}$, o negativo da função de verossimilhança aproximada é

$$L \approx \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^m \frac{I(\lambda_j)}{c\lambda_j^{-2d}} + \sum_{j=1}^m \log(c\lambda_j^{-2d}) \right]. \quad (3.48)$$

Minimizando a função e relação a c , uma estimativa para o parâmetro de memória longa é o valor de d que minimiza a quantidade

$$\log \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{I(\lambda_j)}{\lambda_j^{-2d}} \right) + \frac{2d}{m} \sum_{j=1}^m \log(\lambda_j), \quad (3.49)$$

onde $m = g(T)$, e deve satisfazer a condição

$$\frac{1}{m} + \frac{m}{T} \rightarrow 0,$$

quando $T \rightarrow \infty$. Note que na realidade, o estimador Truncado de Whittle d_{tw} é o valor d que maximiza uma função aproximada da verossimilhança.

Além de ser teoricamente mais eficiente que o estimador GPH, Velasco (1999) mostrou que, sob determinadas condições, o estimador é consistente para $d \in (-0, 5; 1)$ e assintoticamente normal para $d \in (-0, 5; 0, 75)$. Robinson e Henry(1999) mostraram também que o limite em distribuição deste estimador não é afetado por heterocedasticidade.

3.1.8 Modelo de Volatilidade Estocástica de Memória Longa

Recentemente verificou-se que a volatilidade de diversos ativos financeiros são processos que apresentam memória longa (Ding, Granger e Engle, 1993). Um dos modelos mais populares nesta situação é o modelo de volatilidade estocástica proposto por Breidt, Crato e de Lima (1998). O modelo de volatilidade estocástica simples já foi descrito no capítulo 2 e o modelo de volatilidade estocástica de memória longa é apenas uma generalização. É definido por

$$r_t = \sigma_t \xi_t, \quad (3.50)$$

$$\sigma_t = \sigma \exp\left\{\frac{x_t}{2}\right\}, \quad (3.51)$$

onde r_t é o retorno simples ou log-retorno do ativo de interesse, x_t é um processo de memória longa com média nula e independente do ruído branco ξ_t .

Note que tomando o logaritmo dos quadrados dos retornos, temos

$$\begin{aligned} \ln(r_t^2) &= \ln(\sigma^2) + x_t + \ln(\xi_t^2) \\ &= \ln(\sigma^2) + E[\ln(\xi_t^2)] + x_t + (\ln(\xi_t^2) - E[\ln(\xi_t^2)]) \\ &= c + x_t + \epsilon_t. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Portanto, podemos escrever $\ln(r_t^2)$ como a soma de uma constante, um processo de memória longa e um processo de memória curta com média nula. No entanto, verifica-se que se assumirmos que ξ_t segue uma distribuição gaussiana, o termo de memória curta

ϵ_t possui distribuição qui-quadrado. Veremos mais tarde que esta representação é extremamente útil para a identificação de processos de memória longa compartilhada, tema do próximo capítulo.

Memória Longa Compartilhada

Neste capítulo serão apresentados conceitos e métodos relativos a processos de memória longa compartilhada em séries temporais, com enfoque no método de identificação proposto por Ray e Tsay(1997) através da análise de correlação canônica, cujo desempenho será avaliado no capítulo 5.

4.1 Processos com Memória Longa Compartilhada

Freqüentemente dados de séries temporais são observados simultaneamente em um intervalo de tempo, ou seja, é possível observar k séries temporais no mesmo instante, tais como a temperatura, velocidade do vento e índice de umidade em um determinado local. Com o avanço computacional dos últimos anos, as análises multivariadas estão sujeitas a um maior refinamento, de forma que o estudo de relações entre séries simultâneas vem atraindo a atenção de pesquisadores da área de econometria, climatologia e hidrologia, principalmente na tentativa de identificar componentes comuns às séries.

Engle e Granger(1987), Stock e Watson(1998) e Johansen(1991) introduziram o conceito de séries co-integradas, onde é possível encontrar combinações lineares estacionárias de séries não-estacionárias. Em termos práticos, verifica-se que séries co-integradas são séries que apresentam tendências semelhantes, ou seja, parecem “flutuar” sobre uma mesma onda. Embora este conceito de co-integração tenha sido especificado para séries não-estacionárias com parâmetro de integração $d = 1$, o conceito de co-integração fracionária foi proposto por Cheung e Lai (1993). Veremos mais tarde que a memória longa

compartilhada é um caso particular de co-integração fracionária.

Além disso, diversos estudos mostraram a aplicabilidade da análise de correlação canônica (Hottelling, 1936) na modelagem de séries temporais. Box e Tiao (1977) propuseram um método de decomposição de séries estacionárias k -dimensionais em k componentes ortogonais ordenados do menos previsível ao mais previsível. Verifica-se, em geral, que a série mais previsível é não-estacionária e representa a dinâmica de crescimento das séries, enquanto que a série menos previsível é estacionária. Tsay e Tiao (1985), Tsay (1987) e Tiao e Tsay (1989) estudaram diversos métodos de identificação de estruturas de processos ARMA multivariados, visando a construção de modelos parcimoniosos. Na realidade, verifica-se que os métodos em séries temporais que utilizam análise de correlação canônica visam obter combinações lineares com características peculiares e que, em grande parte dos casos, não herdam a estrutura das séries originais. O teste para memória longa compartilhada (MLC), proposto por Ray e Tsay (1997), verifica se existem combinações lineares de séries com memória longa, onde as combinações não apresentam persistência, ou seja, possuem memória curta.

Exemplificando um modelo de memória longa compartilhada, considere um caso bivariado tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= (y_{1t}, y_{2t})', \\ y_{1t} &= \alpha x_t + w_{1t}, \\ y_{2t} &= x_t + w_{2t}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\alpha > 0$, x_t é um processo memória longa de ordem $d \in (0; 0,5)$, e w_{1t} e w_{2t} são processos de memória curta possivelmente correlacionados. Note que o processo x_t é comum para as duas séries, de forma que y_{1t} e y_{2t} só possuem memória longa devido a este termo. Além disso, é fácil verificar que $\gamma_{y_1}(h) = \gamma_x(h)$ e $\gamma_{y_2}(h) = \alpha^2 \gamma_x(h)$ para valores de h suficientemente grandes, pois $\gamma_{w_1}(h) \rightarrow 0$ e $\gamma_{w_2}(h) \rightarrow 0$. Portanto, para h grande, a função de autocovariância de y_{1t} e y_{2t} são proporcionais, implicando que a matriz de correlação cruzada das séries não possui posto completo. Este fato é a chave do teste de memória longa compartilhada. Considere novamente o modelo (4.1). Note que y_{it} possui memória longa, mas existe um vetor $\mathbf{v} = (1, -\alpha)'$ de tal forma que

$$\begin{aligned} y_t^* &= \mathbf{v}' \mathbf{y}_t = y_{1t} - \alpha y_{2t} \\ &= w_{1t} - \alpha w_{2t}, \end{aligned}$$

ou seja, $y_t^* = \mathbf{v}'\mathbf{y}_t$ é um processo de memória curta, pois é combinação linear somente dos $w_{it}'s$. Como o termo x_t é comum às duas séries, dizemos que y_{1t} e y_{2t} possuem memória longa compartilhada. Este conceito pode ser generalizado para k séries que possuem s combinações lineares distintas de y_{it} que são processos de memória curta.

Um fato importante a ser levado em conta é que, embora a condição de que as séries y_{it} possuam o mesmo parâmetro de memória longa d seja necessária, ela não é suficiente para garantir que as séries possuam componentes comuns de memória longa, característica fundamental existente em processos com memória longa compartilhada.

4.2 Teste de Correlação Canônica para MLC

A forma geral de um modelo com memória longa compartilhada (Ray e Tsay, 1997) é dada por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{w}_t$ possuem dimensão k , $\mathbf{x}_t$ é um processo de memória longa r -dimensional ($0 < r < k$) e $\mathbf{C}$ é uma matriz de coeficientes de ordem $k \times r$. As séries $\mathbf{x}_t$ e $\mathbf{w}_t$ são independentes, e $\mathbf{w}_t$ é um processo de memória curta.

Considere $\Gamma_u(l)$ a matriz de autocovariância no lag l de uma série $\mathbf{u}_t$ multivariada, definida por

$$\Gamma_u(l) = \begin{pmatrix} \gamma_{u_1}(l) & \gamma_{u_1 u_2}(l) & \cdots & \gamma_{u_1 u_k}(l) \\ \gamma_{u_2 u_1}(l) & \gamma_{u_2}(l) & \cdots & \gamma_{u_2 u_k}(l) \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{u_k u_1}(l) & \gamma_{u_k u_2}(l) & \cdots & \gamma_{u_k}(l) \end{pmatrix}$$

onde $\gamma_{u_k}(l)$ é função de autocovariância no lag l da série univariada $u_{k,t}$ e $\gamma_{u_j u_m}(l)$ é função de autocovariância cruzada no lag l das série $u_{j,t}$ e $u_{m,t}$.

Assumindo que as séries do modelo (4.2) são estacionárias, temos que

$$\Gamma_y(l) = \mathbf{C}\Gamma_x(l)\mathbf{C}' + \Gamma_w(l). \quad (4.3)$$

Verifica-se portanto, que a função de autocovariância de $\mathbf{y}_t$ é soma das funções de autocovariância do processo de memória longa com o processo de memória curta. Lem-

bremsos que a f.a.c. de processos de memória longa decai em velocidade hiperbólica para zero, enquanto que a f.a.c. de processos de memória curta decai exponencialmente. Como w_t possui memória curta, temos que, quando $l \rightarrow \infty$,

$$\Gamma_w(l) \rightarrow_e 0, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_y(l) \rightarrow_e \mathbf{C}\Gamma_x(l)\mathbf{C}', \quad (4.5)$$

onde $\rightarrow_e$ denota convergência em taxa exponencial. Particularmente, se $\mathbf{w}_t$ é um processo MA(q)

$$\Gamma_y(l) = \mathbf{C}\Gamma_x(l)\mathbf{C}', \quad l > q. \quad (4.6)$$

Note que para l grande, se $\mathbf{C}$ possui posto completo, o posto de $\Gamma_y(l) = \mathbf{C}\Gamma_x(l)\mathbf{C}'$ é o mesmo de $\Gamma_x(l)$, ou seja r . Como $r < k$ e $\Gamma_y(l)$ é uma matriz de ordem $k \times k$, $\Gamma_y(l)$ não possui posto completo.

Para verificarmos essas propriedades para mais de um lag, considere $h > 0$ e $j > 0$, seja o vetor $\mathbf{Y}_{h,j,t} = (\mathbf{y}_{t-j}, \mathbf{y}_{t-j-1}, \dots, \mathbf{y}_{t-j-h+1})'$ uma coleção de h valores passados do sistema após j defasagens. A matriz de covariância entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ é dada por $\mathbf{G}(h, j) = [\Gamma_y(j), \dots, \Gamma_y(j+h-1)]$, uma matriz de ordem $k \times hk$. Para o modelo (4.2), utilizando as equações (4.3), (4.4) e (4.5), temos

$$\mathbf{G}(h, j) \rightarrow_e \mathbf{C}[\Gamma_x(j), \Gamma_x(j+1), \dots, \Gamma_x(j+h-1)]\mathbf{C}', \quad (4.7)$$

para $h \geq 1$ e $j < \infty$ suficientemente grande. Note que, como as séries possuem memória longa compartilhada, $\Gamma_x(j)$ não possui posto completo, pois é uma matriz $k \times k$ e só temos $r < k$ processos de memória longa. Dessa forma, é fácil concluir que matriz $\mathbf{G}(h, j)$ não possui posto completo. Conseqüentemente, uma forma de identificação da estrutura do modelo (4.2) é a análise o posto de $\mathbf{G}(h, j)$ para j suficientemente grande.

Segundo Tsay e Tiao (1985), Tsay (1987) e Tiao e Tsay (1989), uma forma conveniente de se verificar o posto da matriz $\mathbf{G}(h, j)$ é considerar as correlações canônicas existentes entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$. Temos que se $\mathbf{G}(h, j)$ possui posto r então existem $s = k - r$ correlações canônicas entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ que são iguais a zero. Na análise estatística multivariada, a análise de correlação canônica é utilizada para encontrar combinações lineares ortogonais que maximizam a correlação entre variáveis (U,V). No entanto, é importante ressaltar que no caso do teste MLC, a análise de correlação canônica é utilizada para testar o posto de matrizes, verificando a significância de seus autovalores.

Proposição 4.2.1. (Ray e Tsay, 1997). *Seja $\mathbf{y}_t$ uma série estacionária k -dimensional com memória longa compartilhada e h número inteiro positivo. Então existem $k - r$ correlações canônicas entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ que convergem para zero, quando $j \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{w}_t$ é um processo MA de ordem q , então existem $s = k - r$ correlações canônicas entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ para todo $j > q$.*

Dados h e j , o quadrado das correlações canônicas entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ são os autovalores da matriz

$$\mathbf{A}(h, j) = [\text{Var}(\mathbf{y}_t)]^{-1} \text{Cov}(\mathbf{Y}_{h,j,t}, \mathbf{y}_t) [\text{Var}(\mathbf{Y}_{h,j,t})]^{-1} \text{Cov}(\mathbf{y}_t, \mathbf{Y}_{h,j,t}). \quad (4.8)$$

Denote os autovalores de $\mathbf{A}(h, j)$ por $0 \leq \rho_1^2 \leq \rho_2^2 \leq \dots \leq \rho_k^2 \leq 1$. Note que o posto da matriz $\mathbf{A}(h, j)$ é o mesmo de $\mathbf{G}(h, j) = \text{Cov}(\mathbf{Y}_{h,j,t}, \mathbf{y}_t)$, pois $\text{Var}(\mathbf{y}_t)$ e $\text{Var}(\mathbf{Y}_{h,j,t})$ possuem posto completo. O posto de $\mathbf{A}(h, j)$ é $(k - s)$, onde s é o número de autovalores iguais a zero. Para testar o posto da matriz $\mathbf{A}(h, j)$, devemos testar as hipóteses

$$H_{SO} : \rho_s^2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_{SA} : \rho_s^2 > 0, \quad (4.9)$$

para $s=1, \dots, k$.

Um estimador para a matriz $\mathbf{A}(h, j)$ é

$$\hat{\mathbf{A}}(h, j) = \hat{\Sigma}_{yy}^{-1} \hat{\Sigma}_{yY} \hat{\Sigma}_{YY}^{-1} \hat{\Sigma}_{Yy}, \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{yy} &= \sum (\mathbf{y}_t - \hat{\mu}_y)(\mathbf{y}_t - \hat{\mu}_y)' / n, \\ \hat{\Sigma}_{yY} &= \sum (\mathbf{y}_t - \hat{\mu}_y)(\mathbf{Y}_{h,j,t} - \hat{\mu}_Y)' / n, \\ \hat{\Sigma}_{YY} &= \sum (\mathbf{Y}_{h,j,t} - \hat{\mu}_Y)(\mathbf{Y}_{h,j,t} - \hat{\mu}_Y)' / n, \\ \hat{\Sigma}_{Yy} &= \hat{\Sigma}_{Yy}', \end{aligned}$$

e $\hat{\mu}_y$, $\hat{\mu}_Y$ são as médias amostrais de $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ respectivamente.

Para testar o posto de $\mathbf{A}(h, j)$, considere a seguinte estatística:

$$T_s = -(n - h) \sum_{i=1}^s \ln(1 - \hat{\rho}_i^2), \quad (4.11)$$

onde $0 \leq \hat{\rho}_1^2 \leq \hat{\rho}_2^2 \leq \dots \leq \hat{\rho}_k^2 \leq 1$ são os autovalores da matriz $\hat{\mathbf{A}}(h, j)$.

Proposição 4.2.2. (Ray e Tsay, 1997). *Seja processo estacionário de memória longa $\mathbf{y}_t$ descrito por (4.2.1), e y_{it}^* variável canônica de $\mathbf{y}_t$ correspondente às s menores correlações canônicas entre $\mathbf{y}_t$ e $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ não correlacionadas serialmente, onde h e j são inteiros positivos. Então a estatística de teste T_s tem distribuição assintótica qui-quadrado com $s[(h-1)k+s]$ graus de liberdade, sob a hipótese nula H_{s0} em (4.9).*

Se $\mathbf{v}_i$ é o autovetor correpondente ao autovalor $\hat{\rho}_i$ da matriz $\hat{\mathbf{A}}(h, j)$, temos que $y_{it}^* = \mathbf{v}_i' \mathbf{y}_t$ é a variável canônica relacionada a $\hat{\rho}_i$. Uma das suposições do teste descrito anteriormente é que as variáveis canônicas são não-correlacionadas serialmente, mas essa suposição muitas vezes não é válida em aplicações práticas. Portanto Ray e Tsay(1997) sugeriram a utilização da estatística modificada

$$T_s^* = -(n-h) \sum_{i=1}^s \ln(1 - \frac{\hat{\rho}_i^2}{g_i}), \quad (4.12)$$

onde $g_i = (1 + 2 \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\rho}_{r,u} \hat{\rho}_{l,u})$ é um fator de correção. Temos que $\hat{\rho}_{r,u}$ e $\hat{\rho}_{l,u}$ são os valores da função de autocorrelação amostral no lag u das variáveis canônicas y_{it}^* e Y_{it}^* respectivamente. Y_{it}^* é definido por $Y_{it}^* = V_i' Y_{h,j,t}$ onde V_i é o autovetor associado ao autovalor $\hat{\rho}_i^2$ da matriz de ordem $hk \times hk$, definida por

$$\hat{\mathbf{D}}(h, j) = \hat{\Sigma}_{YY}^{-1} \hat{\Sigma}_{Yy} \hat{\Sigma}_{yy}^{-1} \hat{\Sigma}_{yY}. \quad (4.13)$$

Como $\hat{\mathbf{A}}(h, j)$ ignora j valores passados de $\mathbf{y}_t$, é razoável supor que y_{it}^* segue um processo MA($j-1$). A fórmula de Barlett para a variância da correlação cruzada amostral entre duas séries temporais pode ser utilizada para derivar a variância assintótica de $\hat{\rho}_i$.

Proposição 4.2.3. (Ray e Tsay, 1997). *Sejam $h, j \geq 1$, $\mathbf{y}_t$ satisfaz as condições descritas na proposição 4.2.1, e as variáveis canônicas y_{it}^* seguindo um processo MA($j-1$). Então a estatística de teste T_s^* possui assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com $s[(h-1)k+s]$ graus de liberdade sob a hipótese nula H_{s0} .*

Tendo em vista os aspectos apresentados, verifica-se que dois parâmetros necessitam ser especificados para a realização do teste MLC: o parâmetro de defasagem j e o número de autocovariâncias h a serem utilizadas. O parâmetro j deve ser escolhido conforme as suposições feitas para a estrutura de autocorrelação dos componentes de memória curta de y_{it} , $i = 1, \dots, k$. Na verdade, j deveria ser suficientemente grande, de forma que todas as

variáveis canônicas y_{it}^* sejam não correlacionadas após o lag j , lembrando que um processo $MA(q)$ apresenta autocorrelação nula após o lag q e que a f.a.c. de um processo $AR(p)$ decai exponencialmente, podendo ser aproximado por um processo MA de ordem grande. Porém, se um j muito grande for escolhido, mesmo que as séries possuam componentes de memória longa, ela pode não ser detectada, invalidando o teste estatístico. O parâmetro h deve ser escolhido de tal forma que $\mathbf{Y}_{h,j,t}$ represente adequadamente a dinâmica existente entre as componentes de memória curta do processo $\mathbf{y}_t$. Na prática, os valores j e h devem ser escolhidos de acordo com os tamanhos das séries, e informações sobre estudos prévios realizados com as séries em questão.

Simulações

Um dos principais objetivos deste trabalho é a avaliação do comportamento de estimadores tradicionais do parâmetro de memória longa “ d ” para processos mistos, ou seja, para processos de memória longa adicionados à processos de memória curta. Esta situação é coerente com modelos de *Memória Longa Compartilhada*(MLC) vistos no capítulo anterior. Um segundo objetivo é o estudo do desempenho e comportamento do teste *MLC* propostos por Ray e Tsay(1997) para processos de memória longa *ARFIMA*(p, d, q) gaussianos adicionados à processos de memória curta com distribuição gaussiana e qui-quadrado.

Neste capítulo serão apresentados os resultados de um conjunto de nove simulações realizadas. Os conjuntos de 1 a 4 (Apêndice A) são referentes aos estimadores do parâmetro de memória longa e os conjuntos 5 ao 7 (Apêndice B) referentes ao teste MLC. Todas as rotinas para estimação, testes e simulação foram implementadas para o software R.

5.1 Avaliação de Estimadores

Os estimadores do parâmetro fracionário a serem avaliados são três: o estimador de Geweke e Porter-Hudak (d_{GPH}), o estimador do periodograma suavizado (d_s) e o estimador semiparamétrico truncado de Whittle (d_{TW}). Devido a sua simplicidade, o estimador de Geweke e Porter Hudak é um dos mais populares e freqüentemente utilizados. No entanto estudos prévios mostram que embora seja não-viesado, possui pouco poder para testar as hipóteses $H_0 : d = 0$ vs $H_A : d \neq 0$, pois apresenta grande variabilidade. Utilizando-se o periodograma suavizado, ou seja, uma estimativa assintoticamente consistente para a

função espectral, obtemos um estimador com menor variabilidade, porém viesado para amostras finitas (Chen et al., 1993). O estimador Truncado de Whittle foi proposto por Robinson(1994) e baseia-se na aproximação de Whittle para a verossimilhança e atualmente está se tornando popular na literatura, devido sua robustez no caso não-estacionário (Velasco, 1999) e heterocedasticidade(Robinson e Henry, 1999).

A função do tamanho da série(T), que especifica o número de pontos a serem utilizados na regressão espectral (para os estimadores d_{GPH} e d_s) é dada por $g(T) = T^{0.5}$. A função de especificação do número de pontos a serem utilizados na janela espectral de suavização é $m(T) = T^{0.9}$. Segundo Moura(1995) tal parametrização apresenta bons resultados para os estimadores que utilizam o método da regressão espectral. A janela espectral de suavização utilizada foi a janela de Bartlett-Priestley dada por $k(u) = \frac{3}{\pi^2 u^2} \{ \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u) \}$, que segundo Chen et al.(1993) é a que apresenta o melhor desempenho. Para o estimador truncado de Whittle, o parâmetro de truncamento é dado por $g(T) = T^{0.7}$, pois através de simulações prévias, verificou-se que apresenta bons resultados em relação ao viés e à variabilidade.

5.1.1 Conjunto 1: Processos ARMA

O objetivo deste primeiro conjunto de simulações é avaliar o comportamento dos três estimadores de memória longa em processos ARFIMA(1,0,1), em relação a variações nos coeficientes autoregressivos ϕ e de médias móveis θ . Sabe-se que quanto maior o valor de $|\phi|$ mais lento é o decaimento para zero da função de autocorrelação, embora em taxa exponencial. Portanto, é razoável avaliar se existe alguma relação entre o coeficiente ϕ e os estimadores dos parâmetros de memória longa. Além disso, também desejamos verificar se o coeficiente θ possui algum efeito nos estimadores, pois a função de autocorrelação parcial também decai mais lentamente, conforme cresce o valor de θ .

Os processos y_t simulados são da forma:

$$\phi(B)y_t = \theta(B)\epsilon_t,$$

onde ϵ_t é um ruído branco gaussiano.

Foram simuladas séries de tamanho $T = 500$ (Tabela A.1) e $T = 1000$ (Tabela A.2) para verificar o efeito do tamanho da série nos estimadores. Os coeficientes θ e ϕ estão no

intervalo $[-0,99; 0,99]$, mas seus efeitos foram analisados separadamente, ou seja, se $\theta \neq 0$ então $\phi = 0$ e vice-versa.

Conclusões

Como esperado, a estimação utilizando séries maiores ($T = 1000$) apresenta sempre menor variabilidade, viés e erro quadrático médio do que séries com menor tamanho ($T = 500$). Além disso, verifica-se que valores negativos dos coeficientes autoregressivos e médias móveis praticamente não afetam os estimadores de d . Porém para coeficientes positivos o módulo do viés aumenta gradualmente para os três estimadores.

Neste caso, o estimador de Geweke e Porter-Hudak apresenta pouco viés, mas maior variabilidade. O método do periodograma suavizado apresenta ligeiro viés negativo mas possui menor variabilidade, de forma que possui menor erro quadrático médio. Verifica-se que o estimador truncado de Whittle ($\hat{d}_{TW}$) é o que apresenta a menor variância, porém é o mais afetado por variações nos coeficientes, de forma que se torna altamente viesado, para valores positivos dos coeficientes ϕ e θ . Devido à baixa variabilidade do estimador $\hat{d}_{TW}$, o teste utilizando-o para testar $H_0 : d = 0$ vs $H_A : d \neq 0$ é o mais poderoso. Porém, devido ao viés, apresenta uma baixa cobertura quando a hipótese nula é verdadeira e temos coeficientes ϕ e θ positivos, conseqüentemente, rejeita-se em demasiado a hipótese nula, mesmo que verdadeira. Para cada simulação é possível contruir um intervalo de confiança de $\gamma\%$ para o parâmetro d . A cobertura de um estimador é dada pela proporção de vezes em que o verdadeiro valor da média está contido dentro deste intervalo. As Figuras 5.1 e 5.3 apresentam o viés e as Figuras 5.2 e 5.4 o erro quadrático médio dos estimadores, para variações em ϕ e θ para $T = 1000$.

5.1.2 Conjunto 2: Razão de Desvios e Memória Longa

Neste segundo conjunto de simulações, deseja-se avaliar o comportamento dos estimadores de memória longa em relação à razão dos desvios para diversos valores de d . A razão de desvios(RD) é definida como a razão entre o desvio padrão do termo de memória curta e do termo de memória longa. Os modelos simulados são da forma:

$$y_t = x_t + \lambda w_t,$$

Figura 5.1: Viés dos Estimadores para variações em ϕ quando $d = 0$.

Figura 5.2: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em ϕ quando $d = 0$.

Figura 5.3: Viés dos Estimadores para variações em θ quando $d = 0$.

Figura 5.4: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em θ quando $d = 0$.

onde λ é uma constante, x_t é um ruído branco fracionário e w_t é um ruído branco. Em outras palavras, o processo consiste na soma de uma parcela de memória longa com uma parcela de memória curta. Espera-se que quanto maior a variância do processo de memória curta, maior será o viés na estimação de d . Nas simulações realizadas os processos x_t e w_t possuem o desvio padrão unitário, portanto, é fácil ver que $RD = \lambda$. Os valores de d das simulações são 0,15, 0,30 e 0,45, e os valores de RD são 0, 0,6, 1,0 e 2,0. Além disso, também verificou-se o desempenho dos estimadores assumindo w_t com distribuição gaussiana (Tabelas A.3 e A.4) e qui-quadrado (Tabelas A.5 e A.6).

Conclusões

Como no conjunto anterior, observa-se um melhor desempenho dos estimadores para séries mais longas. Além disso, verificamos que quanto maior a razão de desvios (RD), maior será o módulo do viés dos estimadores. Observa-se também que quanto maior o valor de RD, mais o valor de d será subestimado. Este fato era esperado, pois quanto maior a variância do termo de memória curta, mais rápido será o decaimento para zero da função de autocorrelação. Exceto no caso de $d = 0$, verifica-se que o estimador de Geweke e Porter-Hudak é o que apresenta o menor viés, porém maior variabilidade. O estimador do periodograma suavizado apresenta menor variabilidade, no entanto apresenta maior viés. Embora possua uma variância muito menor que os outros estimadores, o estimador truncado de Whittle é o que apresenta o maior viés, no entanto, sempre apresenta um menor erro quadrático médio. Os resultados são os mesmos para erros com distribuições gaussiana ou qui-quadrado. As Figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 mostram o resultado do impacto de RD sob os estimadores para $T = 1000$.

5.1.3 Conjunto 3: Variações no Termo de Memória Longa

O objetivo deste conjunto de simulações é avaliar o desempenho dos estimadores de d em relação à variações dos coeficientes autoregressivos e de médias móveis no processo de memória longa. Em outras palavras, considere o processo

$$y_t = x_t + \lambda w_t,$$

onde $\phi(B)(1 - B)^d x_t = \theta(B)\epsilon_t$. Ou seja, x_t é um processo ARFIMA(1,d,1) e w_t é um ruído branco. De forma a padronizar as simulações, consideramos $var[x_t] = 1$, $var[w_t] = 1$, $\lambda = 1$ e $d = 0,3$. Deseja-se verificar o comportamento dos estimadores d_{GPH} , d_S e d_{TW}

Figura 5.5: Viés dos Estimadores para variações da Razão de Desvios e Erros Gaussianos.

Figura 5.6: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações da Razão de Desvios e Erros Gaussianos.

Figura 5.7: Viés dos Estimadores para variações da Razão de Desvios e Erros Qui-quadrado.

Figura 5.8: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações da Razão de Desvios e Erros Qui-quadrado.

em relação aos coeficientes θ e ϕ . Os coeficientes θ e ϕ estão no intervalo $[-0,99;0,99]$, mas seus efeitos foram analisados separadamente, ou seja, se $\theta \neq 0$ então $\phi = 0$ e vice-versa. Os resultados das simulações estão nas Tabelas A.7 e A.8.

Conclusões

Primeiramente, observa-se que os estimadores possuem um melhor desempenho para um maior tamanho das séries. Além disso, verifica-se que valores negativos de ϕ e θ praticamente não afetam a estimação de d (com exceção do caso de ϕ na fronteira de não-estacionariedade), porém apresentam viés positivo para valores positivos de ϕ e viés negativo para valores positivos de θ .

Nota-se que embora com pouco viés, o estimador de Geweke e Porter-Hudak apresenta maior variabilidade. O estimador do periodograma suavizado apresenta um viés negativo, porém menor variância, de forma que apresenta menor erro quadrático médio. O estimador truncado de Whittle apresenta a menor variabilidade, porém verifica-se que para coeficientes positivos é o mais afetado. As Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 mostram os resultados da influência dos coeficientes ϕ e θ nos estimadores de d .

Figura 5.9: Viés dos Estimadores para variações em ϕ do processo de ARFIMA.

Figura 5.10: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em ϕ do processo de ARFIMA.

Figura 5.11: Viés dos Estimadores para variações em θ do processo de ARFIMA.

Figura 5.12: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em θ do processo de ARFIMA.

5.1.4 Conjunto 4: Variações no Termo de Memória Curta

Este conjunto de simulações foi realizado com objetivo semelhante ao conjunto anterior, no entanto, neste caso deseja-se avaliar o comportamento dos estimadores em relação à variações dos coeficientes autoregressivos e de médias móveis no processo de memória curta w_t . Considere o seguinte processo

$$y_t = x_t + \lambda w_t,$$

onde $\phi(B)w_t = \theta(B)\epsilon_t$. Em outras palavras, o processo w_t é um ARMA(1,1) e x_t é um ruído branco fracionário. Padronizando as simulações, assumimos $\text{var}[x_t] = 1$, $\text{var}[w_t] = 1$, $\lambda = 1$ e $d = 0,3$ como no caso anterior. Os coeficientes θ e ϕ também estão no intervalo $[-0,99; 0,99]$, com efeitos analisados separadamente. Verificou-se também o desempenho dos estimadores assumindo w_t com distribuições gaussianas (Tabelas A.9 e A.10) e qui-quadrado (Tabelas A.11 e A.12).

Conclusões

Novamente, verificamos que quanto mais longa for a série, melhor o desempenho dos estimadores. Como no caso anterior, observamos que os coeficientes ϕ e θ influenciam

a estimação do parâmetro de memória longa. Porém, neste caso, verifica-se que valores negativos também possuem influência. Observa-se que o viés é negativo para $\phi < 0,5$, mas para $\phi > 0,5$ começa a tornar-se viesado positivamente. Além disso, observa-se que o viés é crescente em relação a θ .

O estimador de Geweke e Porter-Hudak apresenta pouco viés, mas grande variabilidade. O estimador do periodograma suavizado apresenta um melhor desempenho, pois embora subestime o valor de d possui menor variabilidade, e assim possui menor erro quadrático médio. Novamente, verifica-se que embora tenha variância pequena, o estimador truncado de Whittle é o mais afetado por variações em ϕ e θ . Os resultados para erros com distribuições gaussiana e qui-quadrado são os mesmos. As Figuras 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20 mostram os resultados para $T = 1000$.

Figura 5.13: Viés dos Estimadores para variações em ϕ do processo de ARMA Gaussianos.

Figura 5.14: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em ϕ do processo de ARMA Gaussiano.

Figura 5.15: Viés dos Estimadores para variações em θ do processo de ARMA Gaussiano.

Figura 5.16: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em θ do processo de ARMA Gaussiano.

Figura 5.17: Viés dos Estimadores para variações em ϕ do processo de ARMA Qui-quadrado.

Figura 5.18: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em ϕ do processo de ARMA Qui-quadrado.

Figura 5.19: Viés dos Estimadores para variações em θ do processo de ARMA Qui-quadrado.

Figura 5.20: Erro Quadrático Médio dos Estimadores para variações em θ do processo de ARMA Qui-quadrado.

5.2 Avaliação do Teste de Memória Longa Compartilhada

Nesta seção, serão apresentados os resultados das simulações realizadas para avaliar o comportamento e o desempenho do *teste de memória longa compartilhada através da análise de correlação canônica* (Ray e Tsay, 1997).

5.2.1 Conjunto 5: Teste MLC

Considere o modelo de memória longa compartilhada bivariado (4.2)

$$\begin{aligned} y_{1t} &= x_t + w_{1t}, \\ y_{2t} &= \lambda x_t + w_{2t}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde x_t é um ruído branco fracionário com parâmetro d e w_{it} é um ruído branco, $i = 1, 2$. Neste conjunto de simulações, avaliamos o desempenho do teste de *correlações canônicas* para a estrutura de memória longa compartilhada (MLC). Em outras palavras, verificou-

se o desempenho para o teste:

$H_0 : y_{1t}$ e y_{2t} possuem memória longa compartilhada;

$H_A : y_{1t}$ e y_{2t} não possuem memória longa compartilhada,

para diferentes valores dos parâmetros de defasagem j e número de lags h , descritos no capítulo 4.

Foram realizadas $N = 500$ simulações para tamanhos de séries $T = 1000$, $d = 0, 4$, $\lambda = 1$, $\text{var}[x_t] = 1$ e $\text{var}[w_{it}] = 1$. Três tipos de simulações foram realizadas: para $j = 3$ e $h = 5$, para $j = 5$ e $h = 5$, e para $j = 5$ e $h = 10$. Além disso, também consideramos os casos assumindo w_{it} com distribuições gaussianas (Tabela B.1) e qui-quadrado (Tabela B.2). As tabelas mostram os quantis estimados das estatísticas T e T^* descritas no capítulo 4, o quantil esperado da distribuição qui-quadrado, a proporção estimada da rejeição da hipótese de MLC com nível de significância de 5%, e a proporção de rejeição da hipótese de que a combinação linear y^* possui memória curta com nível de significância de 5%, utilizando o estimador truncado de Whittle.

Conclusões

Verifica-se que, independentemente da distribuição do termo de memória curta ou dos parâmetros h e j , os valores observados das estatísticas T e T^* estão muito próximas dos respectivos valores esperados. Além disso, verifica-se que a proporção de rejeição do teste de memória longa utilizando o estimador Truncado de Whittle, possui valores próximos ao nível de significância (5%) indicando que o teste é adequado.

5.2.2 Conjunto 6: Teste MLC - Variações no Termo de Memória Longa

O objetivo deste conjunto de simulações é avaliar o impacto de variações nos coeficientes do termo de memória longa no teste *MLC*. Considere o modelo:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= x_t + w_{1t}, \\ y_{2t} &= \lambda x_t + w_{2t}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde $\phi(B)(1-B)^d(x_t) = \theta(B)\epsilon_t$ é um processo ARFIMA(1,d,1) e w_{it} é um ruído branco, $i = 1, 2$. Como no conjunto anterior, foram realizadas $N = 500$ simulações, assumindo $T = 1000$, $d = 0, 4$, $\lambda = 1$, $\text{var}[x_t] = 1$ e $\text{var}[w_{it}] = 1$. Três tipos de simulações foram realizadas: para $j = 3$ e $h = 5$, para $j = 5$ e $h = 5$, e para $j = 5$ e $h = 10$. Considerou-se

também w_{it} com distribuição gaussiana. Utilizaram-se os valores -0,6, -0,2, 0,2 e 0,6 para os coeficientes ϕ (Tabela B.3) e θ (Tabela B.4), mas seus efeitos foram analisados separadamente, ou seja, se $\theta \neq 0$ então $\phi = 0$ e vice-versa.

Conclusões

Verifica-se que os valores observados das estatísticas T e T^* são muito próximos aos valores esperados independentemente do valor de ϕ e para valores negativos de θ , de forma que as proporções de rejeição da hipótese de MLC estão próximas ao nível de significância (5%). No entanto, se testarmos se as combinações y^* apresentam memória longa, concluímos que temos um melhor desempenho para valores de $h = 5$. Porém, verifica-se que para valores grandes do coeficiente θ , as estatísticas T e T^* subestimam o valor esperado, de forma que a proporção de rejeição é menor que nível de significância, independentemente do valor de j ou h . Verifica-se neste caso, que a proporção de rejeição da hipótese de que a combinação y^* possua memória curta é maior que o nível de significância. Dessa forma, concluímos que o teste não é adequado para valores grandes do coeficiente θ do processo de memória longa.

5.2.3 Conjunto 7: Teste MLC - Variações no Termo de Memória Curta

Este último conjunto de simulações é semelhante ao anterior, mas tem como objetivo a avaliação do efeito de variações nos coeficientes do termo de memória curta no teste MLC. Considere o modelo:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= x_t + w_{1t}, \\ y_{2t} &= \lambda x_t + w_{2t}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $\phi(B)(w_{it}) = \theta(B)\epsilon_t$ é um processo ARMA(1,1) e x_t é um ruído branco fracionário, $i = 1, 2$. Simulou-se o modelo $N = 500$ vezes, assumindo que o tamanho da série é $T = 1000$, $d = 0, 4$, $\lambda = 1$, $var[x_t] = 1$ e $var[w_{it}] = 1$. Novamente três tipos de simulações foram realizadas: para $j = 3$ e $h = 5$, para $j = 5$ e $h = 5$, e para $j = 5$ e $h = 10$. Considerou-se também w_{it} com distribuição gaussiana e qui-quadrada. Utilizaram-se os valores -0,6, -0,2, 0,2 e 0,6 para os coeficientes ϕ (Tabelas B.5 e B.7) e θ (Tabelas B.6 e B.8), mas seus efeitos foram analisados separadamente, ou seja, se $\theta \neq 0$ então $\phi = 0$ e vice-versa. Lembremos que neste caso, a combinação linear y^* é autocorrelacionada,

e portanto o estimador truncado de Whittle não apresenta um bom desempenho, como visto no Conjunto 1. Dessa forma, para testarmos a hipótese de memória curta de y^* utilizaremos o estimador do periodograma suavizado.

Conclusões

Através deste conjunto de simulações foi possível verificar diversas propriedades importantes das estatísticas para o teste MLC, principalmente devido ao fato de que na prática, as combinações lineares y^* apresentam-se autocorrelacionadas.

Primeiramente verifica-se que no caso autoregressivo a estatística T^* apresenta um desempenho indiscutivelmente melhor que a estatística T . Observa-se que a estatística T superestima os valores dos quantis da χ^2 . Porém a estatística T^* subestima os quantis para valores grandes de h . Além disso verifica-se que quanto maior o valor do módulo de ϕ , menos eficaz é a estatística T .

Para o caso do termo de memória curta com médias móveis, verifica-se que a estatística T apresenta um melhor desempenho do que a estatística T^* . Observa-se neste caso, que a estatística T^* subestima os quantis da χ^2 . Além disso, nota-se que quanto maior o valor do módulo de θ , menos eficaz é a estatística T^* .

Os resultados são os mesmo tanto para termos de memória curta com distribuição gaussiana quanto para erros com distribuição qui-quadrado. Em suma, verifica-se que para o caso autoregressivo a estatística T^* é mais eficaz, e para o caso de médias móveis a estatística T é a que apresenta o melhor desempenho.

5.3 Síntese de Conclusões

5.3.1 Desempenho dos Estimadores de d

Fazendo uma análise dos resultados dos conjuntos 1 ao 4, em síntese, temos:

- os três estimadores apresentam melhor desempenho quanto maior o número de observações das séries;
- variações nos coeficientes autoregressivos (ϕ) e de médias móveis (θ) tanto do

termo de memória longa (ARFIMA) quanto do termo de memória curta (ARMA) produzem viés na estimativa de d para os três estimadores;

- para processos ARMA “puros”, valores grandes de ϕ produzem superestimativas de d . No entanto, valores grandes de θ produzem viés negativo;
- para processos ARFIMA + ARMA, valores grandes de ϕ do termo ARFIMA produzem superestimativas de d , por outro lado, valores grandes de θ produzem viés negativo;
- para processos ARFIMA + ARMA, o viés é negativo para $\phi < 0,5$ e torna-se crescente positivo para $\phi > 0,5$ do processo de ARMA. Além disso, nota-se que o módulo do viés é crescente para θ , no entanto o viés é sempre negativo;
- o estimador de Geweke e Porter-Hudak ($\hat{d}_{GPH}$) embora com pouco viés, apresenta maior variabilidade;
- o estimador do periodograma suavizado ($\hat{d}_S$) utilizando a janela de Bartlett-Priestley, embora apresente um ligeiro viés negativo, possui menor variância que ($\hat{d}_{GPH}$), de forma que apresenta um menor erro quadrático médio;
- o estimador truncado de Whittle ($\hat{d}_{TW}$) é o que apresenta a menor variabilidade. Porém verifica-se que é o mais afetado por variações de coeficientes ϕ e θ tanto do termo ARMA quanto do termo ARFIMA. Ou seja, é de grande eficiência para testar a hipótese $H_0 : d = 0$ vs $H_A : d \neq 0$ na ausência de termos autogressivos e de médias móveis, porém o teste apresenta um elevado erro do tipo I, se estes coeficientes forem diferentes de zero;
- os resultados são os mesmos para as distribuições do termo de memória curta gaussiana ou qui-quadrado.

5.3.2 Desempenho do Teste MLC

Analisando o desempenho do teste de memória longa compartilhada através da análise de correlação canônica nos conjuntos de 5 a 7, os principais resultados são:

- no caso Ruído Branco Fracionário + Ruído Branco, os quantis das estatísticas T e T^* assumem valores bem próximos aos esperados, e a combinação linear y^* apresenta $d = 0$ indicando que metodologia é adequada;
- para o caso em que o termo de memória longa é um processo ARFIMA, o teste é adequado para variações dos coeficientes ϕ e $\theta < 0$, porém para valores grandes de θ os quantis das estatísticas T e T^* subestimam o valor verdadeiro da χ^2 ;

• se o termo de memória curta é um processo ARMA, as estatísticas T e T^* possuem características peculiares. No caso autoregressivo verifica-se que a estatística T^* apresenta um melhor desempenho, pois a T superestima os quantis esperados. No caso de médias móveis, verifica-se que a estatística T apresenta o melhor desempenho, pois T^* subestima os quantis esperados;

• é interessante observar que embora os coeficientes das combinações lineares y^* sejam estimados, nas simulações realizadas observa-se que y^* apresenta memória curta, indicando que a metodologia é adequada;

• os resultados são os mesmo tanto para processos com termos de memória curta com distribuição gaussiana ou qui-quadrado.

Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações a dados reais dos estimadores do parâmetro de memória longa e do teste de memória longa compartilhada através da análise de correlação canônica. A primeira aplicação foi realizada a dados diários da velocidade do vento de São Paulo e Piracicaba. Em seguida, serão descritas duas aplicações na área financeira, em séries de volatilidade de índices de bolsas de valores.

6.1 Velocidade do Vento

Os dados desta aplicação são provenientes de estações meteorológicas situadas nos municípios de São Paulo e Piracicaba. O posto meteorológico do município de São Paulo, situa-se junto às dependências Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo (FFLCH). No município de Piracicaba, temos um posto agrometeorológico na Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz (ESALQ), também pertencente à Universidade de São Paulo. Os dados estão disponíveis na Internet.

A velocidade do vento (m/s) foi medida a 2 metros de altura, entre 01/01/2000 e 26/05/2001, de forma que as séries possuem 512 observações. Para estabilizar a variância das séries, para todas as análises realizadas, considerou-se o logaritmo das mesmas. Na Figura 6.1 encontram-se o logaritmo das séries e os respectivos periodogramas. A Figura 6.2 descreve as funções de autocorrelação e autocorrelação cruzada.

Note que as funções de autocorrelação possuem lento decaimento para zero, indicando que as séries possuem memória longa. Além disso, verifica-se que as funções de auto-

Figura 6.1: Logaritmo das séries de velocidade do vento e os respectivos periodogramas.

Figura 6.2: Funções de autocorrelação e autocorrelação cruzada das séries.

correlação cruzada (FFLCH&ESALQ) também decaem lentamente para zero, condição necessária para séries com memória longa compartilhada. Utilizando os estimadores descritos no capítulo 3, obtemos as estimativas descritas nas Tabelas 6.1 e 6.2.

Os estimadores também indicam que há presença de memória longa nas séries. Mesmo

FFLCH	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,187	0,0563	0,001
$\hat{d}_s$	0,324	0,125	0,017
$\hat{d}_{GPH}$	0,334	0,179	0,076

Tabela 6.1: Estimação de d da série de velocidade do vento da FFLCH.

ESALQ	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,225	0,056	0,000
$\hat{d}_s$	0,288	0,125	0,032
$\hat{d}_{GPH}$	0,310	0,166	0,077

Tabela 6.2: Estimação de d da série de velocidade do vento da ESALQ.

o estimador de Geweke e Porter-Hudak, que é o de menor poder, sugere que as séries possuem $d \neq 0$, a um nível significância de 0,08. Na Tabela 6.3, estão os resultados do teste MLC para as duas séries ($j = 2$ e $h = 5$), onde apresentamos as estatísticas T e T^* e os respectivos níveis descritivos para as correlações canônicas ρ_1^2 e ρ_2^2 . Note que T e T^* correspondentes à ρ_1^2 são não significativas a 5%, indicando que as séries possuem memória longa compartilhada.

Dessa forma, o teste MLC indica que as duas séries possuem memória longa com-

	T	p-valor	T^*	p-valor
ρ_1^2	10,972	0,278	8,567	0,478
ρ_2^2	68,515	0,000	46,467	0,001

Tabela 6.3: Estatísticas T e T^* para o teste de memória longa compartilhada da velocidade do vento na FFLCH e ESALQ.

partilhada. Portanto, deve existir uma combinação linear das séries que possua apenas memória curta. O vetor dessas combinações é dado por $(-0,525; 0,908)$, onde a primeira

coordenada refere-se à série FFLCH. Para verificarmos se a combinação linear (y^*) das séries possui memória longa, através da função de autocorrelação (Figura 6.3) e utilizando os estimadores de d (Tabela 6.4).

Note que somente o teste utilizando o estimador Truncado de Whittle rejeita a

Figura 6.3: Combinação linear y^* .

y	d	desvpad	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,164	0,056	0,005
$\hat{d}_S$	0,022	0,125	0,862
$\hat{d}_{GPH}$	0,097	0,203	0,637

Tabela 6.4: Estimação de d da combinação linear y .

hipótese de que y possui $d = 0$. Porém, observa-se que y é autocorrelacionada, e segundo os resultados do conjunto de simulações 1, neste caso o estimador de Whittle é viesado, e possui alto erro do tipo I. Portanto, não há evidências para rejeitar a hipótese que as séries do logaritmo da velocidade do vento nas duas estações meteorológicas possuam memória longa compartilhada.

6.2 Bolsas de Hong Kong, Nova Zelândia e Singapura

Os dados desta aplicação são índices das bolsas de valores de Hong Kong (Hang Seng), Nova Zelândia (NZSE 40) e Singapura (Straits Times), e estão disponíveis no website da Reuters Limited.

Foram coletados índices entre 21/08/1997 a 12/08/2003, totalizando séries de tamanho 1549. Em nossa análise estamos interessados em verificar se a volatilidade das três bolsas de valores seguem um modelo de memória longa compartilhada. Dessa forma, as séries a serem utilizadas serão os logaritmos dos quadrados dos logretornos das séries ($\log(r_t^2)$), pois a abordagem é coerente como o modelo de volatilidade estocástica de memória longa descrito no capítulo 3. É interessante lembrar que neste caso, os termos de memória curta possuem distribuição qui-quadrado, mas através das simulações descritas no capítulo 5, verificamos que isso não afeta os estimadores de d e nem o teste MLC.

É importante alertarmos para o fato de que os retornos muitas vezes são próximos de zero, e o logaritmo não está muito bem definido para esse domínio. Dessa forma, utilizamos a transformação de Füller (1996) dada por

$$x_t^* = \log(r_t^2 + \lambda S_r^2) - \frac{\lambda S_r^2}{r_t^2 + \lambda S_r^2}, \quad (6.1)$$

onde r_t é o logretorno dos índices, S_r^2 a variância amostral dos logretornos e $\lambda = 0,02$.

Os índices das bolsas estão descritos na Figura 6.4 e os respectivos periodogramas das séries de volatilidade (logaritmo do quadrado dos retornos) estão na Figura 6.5. As funções de autocorrelação podem ser encontradas na Figura 6.6.

Observa-se que as funções de autocorrelação decaem lentamente para zero, indicando que as séries de volatilidade apresentam persistência. As estimativas do parâmetro d estão nas Tabelas 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7.

Os testes também indicam que há evidências de que as séries de volatilidade possuem

HK	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,194	0,038	0,000
$\hat{d}_S$	0,295	0,082	0,001
$\hat{d}_{GPH}$	0,418	0,119	0,001

Tabela 6.5: Estimação de d da série de volatilidade da bolsa de Hong Kong.

Figura 6.4: Índices das Bolsas de Valores.

Figura 6.5: Periodograma das Séries de Volatilidade.

NZ	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,243	0,038	0,000
$\hat{d}_S$	0,278	0,082	0,002
$\hat{d}_{GPH}$	0,335	0,115	0,006

Tabela 6.6: Estimação de d da série de volatilidade da bolsa da Nova Zelândia.

Figura 6.6: Funções de Autocorrelação das séries de volatilidade.

Singapura	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,205	0,038	0,000
$\hat{d}_S$	0,235	0,082	0,007
$\hat{d}_{GPH}$	0,273	0,166	0,108

Tabela 6.7: Estimação de d da série de volatilidade da bolsa de Singapura.

memória longa. O estimador de Geweke e Porter-Hudak não rejeita a hipótese de que a volatilidade da bolsa de Singapura é $I(0)$ a 5% de significância, no entanto, lembremos que é o estimador com maior variabilidade. Os resultados do teste MLC às séries estão na Tabela 6.8. Note que as estatísticas T e T^* referentes a ρ_1^2 e ρ_2^2 são não-significantes, indicando que as três séries possuem o mesmo componente de memória longa.

Assim, o teste MLC ($j = 3$, $h = 5$) indica que as séries de volatilidade das três bolsas

	T	p-valor	T^*	p-valor
ρ_1^2	7,801	0,648	8,046	0,624
ρ_2^2	17,727	0,722	18,748	0,661
ρ_3^2	140,182	0,000	86,962167	0,000

Tabela 6.8: Estatísticas T e T^* para o teste de memória longa compartilhada da volatilidade das bolsas de Hong Kong, Nova Zelândia e Singapura.

possuem memória compartilhada. Além disso, como as estatísticas são não significativas para ρ_1 e ρ_2 , isso significa que há um único processo de memória longa para as três séries.

Portanto, é possível encontrar 2 combinações lineares das séries que possuem memória curta. Os vetores de coeficientes são $(-0,600; -0,077; 0,915)$ e $(-0,481; 0,672; -0,219)$, onde as coordenadas referem-se respectivamente às volatilidade das bolsas de Hong Kong, Nova Zelândia e Singapura. A Figura 6.7 descrevem as séries combinações lineares $(y_1^*$ e $y_2^*)$ e suas respectivas funções de autocorrelação.

Observando as funções de autocorrelação de y_1^* e y_2^* , aparentemente as séries não possuem memória longa. As estimativas do parâmetro d de y_1^* e y_2^* pode ser encontrada nas Tabelas 6.9 e 6.10,

Os testes também indicam que as séries y_1 e y_2 não possuem memória longa. Portanto,

y_1	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,041	0,038	0,283
$\hat{d}_S$	0,091	0,082	0,275
$\hat{d}_{GPH}$	0,064	0,098	0,515

Tabela 6.9: Estimação de d da série combinação linear y_1^* .

y_2	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,041	0,038	0,286
$\hat{d}_S$	0,083	0,082	0,320
$\hat{d}_{GPH}$	-0,011	0,108	0,921

Tabela 6.10: Estimação de d da série combinação linear y_2^* .

não há evidências para rejeitar a hipótese de que as séries de volatilidades das bolsas de valores de Hong Kong, Nova Zelândia e Singapura possuam memória longa compartilhada, e o termo de memória longa é único.

6.3 Bolsas de Valores do Brasil e Reino Unido

Esta aplicação é similar à aplicação anterior, e os índices são do mesmo período. No entanto, deseja-se verificar se a volatilidade das bolsas do Brasil (BOVESPA) e do Reino Unido (FTSE100) possuem memória longa compartilhada. A Figura 6.8 descreve

Figura 6.7: Funções de Autocorrelação das Combinações Lineares das Séries de volatilidade.

os índices e periodograma da volatilidade da bolsa dos dois países. As funções de autocorrelação e autocorrelação cruzada das séries de volatilidade estão na Figura 6.9.

As funções de autocorrelação indicam que as séries possuem memória longa. Porém,

Figura 6.8: Índices das Bolsas de Valores e Periodograma das séries de volatilidade.

a função de autocorrelação cruzada decai rapidamente, sugerindo que não existe memória longa compartilhada neste caso. As estimativas do parâmetro de memória longa estão nas Tabelas 6.11 e 6.12.

Os estimadores também indicam que as séries de volatilidade possuem persistência. Os resultados do teste MLC ($j = 3$, $h = 5$) podem ser encontrados na Tabela 6.13. Note que as estatísticas T e T^* são significativas para ρ_1^2 e ρ_2^2 indicando que as séries não possuem memória longa compartilhada.

Figura 6.9: Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Cruzada das Séries de Volatilidade.

Brasil	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,213	0,038	0,000
$\hat{d}_S$	0,305	0,082	0,001
$\hat{d}_{GPH}$	0,290	0,147	0,055

Tabela 6.11: Estimação de d da série de volatilidade da bolsa do Brasil.

Reino Unido	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,275	0,038	0,000
$\hat{d}_S$	0,400	0,082	0,000
$\hat{d}_{GPH}$	0,427	0,090	0,000

Tabela 6.12: Estimação de d da série de volatilidade da bolsa do Reino Unido.

Dessa forma, o teste indica que as séries de volatilidade não possuem memória longa

	T	p-valor	T^*	p-valor
ρ_1^2	23,973	0,004	21,003	0,013
ρ_2^2	93,995	0,000	61,975	0,000

Tabela 6.13: Estatísticas T e T^* para o teste de memória longa compartilhada da volatilidade das bolsas do Brasil e Reino Unido.

compartilhada. A Figura 6.10 descreve a série de combinação linear (y^*) correspondente à ρ_1^2 , e sua função de autocorrelação. A combinação linear é dada pelo vetor $(-0,530; 0,848)$, onde a primeira coordenada refere-se a série brasileira

Através da função de autocorrelação, observa-se que a persistência ainda permanece. As estimativas do parâmetro d estão na Tabela 6.14

Os estimadores indicam que a série possui persistência. Portanto, rejeita-se a hipótese

y	d	desv.pad.	p-valor
$\hat{d}_{TW}$	0,190	0,038	0,000
$\hat{d}_S$	0,316	0,082	0,000
$\hat{d}_{GPH}$	0,387	0,115	0,002

Tabela 6.14: Estimação de d da combinação linear y .

de que a volatilidade da bolsa do Brasil e Reino Unido possuem memória longa compartilhada.

Figura 6.10: Combinação Linear das Séries de Volatilidade e sua Função de Autocorrelação.

Conclusões e Resultados

Os modelos de memória longa são freqüentemente utilizados, no estudo de séries climatológicas, hidrológicas, e atualmente, seus usos vêm se destacando na modelagem de séries financeiras. Observa-se que modelos de memória longa são adequados principalmente para a volatilidade de ativos financeiros. Estudos das características e da estrutura de dependência de séries multivariadas persistentes atualmente estão tornando-se relevantes para a identificação de componentes comuns às séries. O estudo aprofundado de métodos para identificação de séries multivariadas persistentes foi o objetivo deste trabalho, e diversas características interessantes puderam ser detectadas.

Tendo em vista todos os aspectos apresentados neste trabalho, concluímos primeiramente que o desempenho dos estimadores do parâmetro de persistência, no contexto de processos ARFIMA + ARMA, está muito relacionada com os coeficientes autoregressivos e de médias móveis, tanto do termo de memória longa, quanto ao termo de memória curta. Em geral, o estimador de Geweke e Porter-Hudak ($\hat{d}_{GPH}$) é o que apresenta maior variabilidade, sendo portanto pouco eficiente para a identificação de processos com memória longa. Devido ao viés causado por variações nos parâmetros ϕ e θ , o estimador truncado de Whittle ($\hat{d}$) não apresenta um bom desempenho prático, pois se o utilizarmos para um teste de persistência ($H_0: d = 0$ vs $H_A: d \neq 0$), o teste apresenta grande erro do tipo I no caso de processos que não são ruído branco. Concluímos que o estimador do periodograma suavizado, utilizando a janela de Bartlett-Priestley é o mais indicado para a estimação do parâmetro de memória longa, e conseqüentemente para a identificação de processos persistentes.

Além disso, concluímos também que o teste de memória longa compartilhada através

da análise de correlação canônica (MLC) proposto por Ray e Tsay (1997) apresenta-se adequado e eficiente. No entanto, verifica-se que seu desempenho também é afetado por variações nos coeficientes autoregressivos e de médias móveis, tanto do termo de memória longa, quanto no termo de memória curta. A estatística T^* mostrou maior eficiência no caso autoregressivo e a estatística T mostrou-se mais adequada no caso de médias móveis. Além disso, verificou-se que as combinações lineares das séries sugeridas pelo teste, na maior parte dos casos não possui memória longa, ressaltando a eficiência do método.

Por fim, verifica-se a eficiência e praticidade dos métodos em aplicações a dados reais descritos no capítulo 6, tanto para dados da área de climatologia como para dados financeiros.

Tabelas das Simulações dos Estimadores de d

Neste apêndice encontram-se tabelas referentes aos conjuntos de simulações 1 ao 5. As tabelas contém a média e desvio padrão das estimativas de d . Também são descritas a proporção de rejeição da hipótese $d = 0$, viés e o erro quadrático médio (EQM) de cada estimador.

ϕ	θ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-	-0,006	-0,022	-0,004	0,183	0,140	0,069	0,060	0,078	0,108	-0,006	-0,022	-0,004	0,033	0,020	0,005
-	-0,99	0,000	-0,016	0,035	0,176	0,144	0,069	0,070	0,068	0,140	0,000	-0,016	0,035	0,031	0,021	0,006
-	-0,90	0,014	-0,006	0,035	0,162	0,136	0,067	0,040	0,048	0,152	0,014	-0,006	0,035	0,026	0,018	0,006
-	-0,80	-0,015	-0,035	0,025	0,187	0,145	0,070	0,070	0,084	0,118	-0,015	-0,035	0,025	0,035	0,022	0,006
-	-0,60	0,002	-0,017	0,023	0,191	0,149	0,070	0,086	0,086	0,148	0,002	-0,017	0,023	0,037	0,022	0,005
-	-0,20	-0,008	-0,022	0,016	0,165	0,134	0,068	0,044	0,056	0,096	-0,008	-0,022	0,016	0,027	0,018	0,005
-	0,20	-0,013	-0,026	-0,034	0,175	0,143	0,069	0,060	0,076	0,124	-0,013	-0,026	-0,034	0,031	0,021	0,006
-	0,60	-0,037	-0,050	-0,217	0,172	0,145	0,072	0,050	0,084	0,938	-0,037	-0,050	-0,217	0,031	0,023	0,052
-	0,80	-0,162	-0,158	-0,447	0,170	0,139	0,129	0,162	0,202	1,000	-0,162	-0,158	-0,447	0,055	0,044	0,217
-	0,90	-0,386	-0,261	-0,637	0,183	0,163	0,078	0,582	0,490	1,000	-0,386	-0,261	-0,637	0,183	0,095	0,412
-	0,99	-0,886	-0,333	-0,949	0,171	0,189	0,082	0,998	0,622	1,000	-0,886	-0,333	-0,949	0,814	0,146	0,907
-0,99	-	-0,023	0,082	-0,035	0,182	0,114	0,069	0,068	0,040	0,138	-0,023	0,082	-0,035	0,034	0,020	0,006
-0,90	-	0,006	-0,003	-0,027	0,172	0,146	0,066	0,046	0,080	0,122	0,006	-0,003	-0,027	0,030	0,021	0,005
-0,80	-	0,002	-0,012	-0,033	0,172	0,138	0,067	0,044	0,060	0,126	0,002	-0,012	-0,033	0,030	0,019	0,006
-0,60	-	0,003	-0,016	-0,032	0,181	0,142	0,069	0,076	0,066	0,120	0,003	-0,016	-0,032	0,033	0,021	0,006
-0,20	-	0,005	-0,022	-0,015	0,166	0,133	0,068	0,038	0,064	0,116	0,005	-0,022	-0,015	0,027	0,018	0,005
0,20	-	0,005	-0,016	0,031	0,169	0,140	0,070	0,048	0,056	0,142	0,005	-0,016	0,031	0,029	0,020	0,006
0,60	-	0,036	0,017	0,233	0,195	0,153	0,072	0,080	0,078	0,946	0,036	0,017	0,233	0,039	0,024	0,060
0,80	-	0,158	0,135	0,515	0,183	0,149	0,076	0,162	0,226	1,000	0,158	0,135	0,515	0,058	0,041	0,271
0,90	-	0,379	0,354	0,735	0,169	0,136	0,075	0,594	0,782	1,000	0,379	0,354	0,735	0,173	0,144	0,545
0,99	-	0,939	0,848	0,976	0,184	0,137	0,070	0,994	1,000	1,000	0,939	0,848	0,976	0,917	0,738	0,958

Tabela A.1: Influência de ϕ e θ de processos ARMA em $\hat{d}$ quando $d = 0$ e $T=500$.

ϕ	θ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-	0,011	-0,009	0,003	0,139	0,113	0,048	0,058	0,068	0,068	0,011	-0,009	0,003	0,020	0,013	0,002
-	-0,99	-0,001	-0,017	0,023	0,135	0,112	0,053	0,046	0,072	0,122	-0,001	-0,017	0,023	0,018	0,013	0,003
-	-0,90	0,001	-0,018	0,018	0,143	0,123	0,055	0,064	0,094	0,134	0,001	-0,018	0,018	0,020	0,015	0,003
-	-0,80	-0,003	-0,017	0,017	0,139	0,117	0,051	0,048	0,096	0,100	-0,003	-0,017	0,017	0,019	0,014	0,003
-	-0,60	-0,003	-0,018	0,021	0,133	0,110	0,050	0,044	0,082	0,096	-0,003	-0,018	0,021	0,018	0,012	0,003
-	-0,20	-0,008	-0,023	0,010	0,140	0,113	0,050	0,054	0,076	0,102	-0,008	-0,023	0,010	0,020	0,013	0,003
-	0,20	-0,010	-0,027	-0,026	0,150	0,124	0,053	0,068	0,118	0,126	-0,010	-0,027	-0,026	0,023	0,016	0,004
-	0,60	-0,026	-0,038	-0,163	0,142	0,111	0,051	0,058	0,074	0,922	-0,026	-0,038	-0,163	0,021	0,014	0,029
-	0,80	-0,098	-0,093	-0,364	0,141	0,107	0,057	0,144	0,162	1,000	-0,098	-0,093	-0,364	0,030	0,020	0,136
-	0,90	-0,248	-0,141	-0,551	0,141	0,132	0,060	0,416	0,346	1,000	-0,248	-0,141	-0,551	0,082	0,037	0,307
-	0,99	-0,874	-0,184	-0,956	0,138	0,194	0,109	1,000	0,374	1,000	-0,874	-0,184	-0,956	0,784	0,072	0,925
-0,99	-	-0,002	0,001	-0,019	0,144	0,054	0,048	0,074	0,018	0,092	-0,002	0,001	-0,019	0,021	0,003	0,003
-0,90	-	0,003	-0,010	-0,021	0,148	0,121	0,051	0,068	0,100	0,110	0,003	-0,010	-0,021	0,022	0,015	0,003
-0,80	-	0,001	-0,012	-0,018	0,137	0,118	0,047	0,046	0,086	0,084	0,001	-0,012	-0,018	0,019	0,014	0,002
-0,60	-	-0,013	-0,019	-0,018	0,139	0,113	0,051	0,060	0,070	0,090	-0,013	-0,019	-0,018	0,019	0,013	0,003
-0,20	-	-0,003	-0,019	-0,012	0,147	0,120	0,053	0,068	0,114	0,116	-0,003	-0,019	-0,012	0,022	0,015	0,003
0,20	-	-0,006	-0,016	0,020	0,146	0,120	0,052	0,070	0,096	0,104	-0,006	-0,016	0,020	0,021	0,015	0,003
0,60	-	0,018	0,001	0,174	0,143	0,117	0,054	0,072	0,090	0,950	0,018	0,001	0,174	0,021	0,014	0,033
0,80	-	0,095	0,080	0,435	0,145	0,119	0,060	0,112	0,184	1,000	0,095	0,080	0,435	0,030	0,021	0,193
0,90	-	0,254	0,232	0,674	0,133	0,111	0,060	0,434	0,652	1,000	0,254	0,232	0,674	0,082	0,066	0,458
0,99	-	0,891	0,855	0,967	0,147	0,112	0,054	1,000	1,000	1,000	0,891	0,855	0,967	0,815	0,744	0,938

Tabela A.2: Influência de ϕ e θ de processos ARMA em $\hat{d}$ quando $d = 0$ e $T=1000$.

		Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
	d	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
RD																
	0,15	0,148	0,124	0,144	0,177	0,135	0,067	0,154	0,166	0,704	-0,002	-0,026	-0,006	0,031	0,019	0,005
0,0	0,30	0,324	0,289	0,301	0,163	0,136	0,069	0,496	0,618	0,994	0,024	-0,011	0,001	0,027	0,019	0,005
	0,45	0,465	0,440	0,449	0,173	0,143	0,070	0,780	0,890	1,000	0,015	-0,010	-0,001	0,030	0,020	0,005
	0,15	0,098	0,080	0,086	0,163	0,126	0,079	0,336	0,328	0,654	-0,052	-0,070	-0,064	0,029	0,021	0,010
0,6	0,30	0,269	0,243	0,249	0,169	0,143	0,064	0,358	0,454	0,976	-0,031	-0,057	-0,051	0,030	0,024	0,007
	0,45	0,426	0,399	0,363	0,169	0,138	0,064	0,672	0,836	1,000	-0,024	-0,051	-0,087	0,029	0,022	0,012
	0,15	0,096	0,077	0,081	0,182	0,148	0,070	0,098	0,118	0,352	-0,054	-0,073	-0,069	0,036	0,027	0,010
1,0	0,30	0,225	0,208	0,193	0,175	0,143	0,069	0,262	0,368	0,872	-0,075	-0,092	-0,107	0,036	0,029	0,016
	0,45	0,362	0,338	0,275	0,176	0,146	0,069	0,574	0,722	0,980	-0,088	-0,112	-0,175	0,039	0,034	0,035
	0,15	0,044	0,025	0,037	0,167	0,137	0,065	0,048	0,062	0,138	-0,106	-0,125	-0,113	0,039	0,035	0,017
2,0	0,30	0,152	0,126	0,103	0,175	0,143	0,066	0,118	0,168	0,446	-0,148	-0,174	-0,197	0,053	0,051	0,043
	0,45	0,242	0,218	0,151	0,162	0,140	0,068	0,298	0,396	0,724	-0,208	-0,232	-0,299	0,070	0,073	0,094

Tabela A.3: Influência da Razão de Desvios (RD) em $\hat{d}$ para T=500 e processos de memória curta com distribuição gaussiana.

		Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM			
	d	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	
RD		0,15	0,150	0,132	0,152	0,138	0,114	0,054	0,194	0,302	0,862	0,000	-0,018	0,002	0,019	0,013	0,003
	0,0	0,30	0,295	0,279	0,302	0,145	0,119	0,049	0,564	0,766	1,000	-0,005	-0,021	0,002	0,021	0,015	0,002
		0,45	0,463	0,439	0,452	0,144	0,117	0,051	0,888	0,976	1,000	0,013	-0,011	0,002	0,021	0,014	0,003
0,6		0,15	0,125	0,107	0,121	0,136	0,111	0,052	0,144	0,198	0,742	-0,025	-0,043	-0,029	0,019	0,014	0,004
	0,6	0,30	0,280	0,260	0,263	0,135	0,115	0,050	0,532	0,728	0,998	-0,020	-0,040	-0,037	0,019	0,015	0,004
		0,45	0,439	0,421	0,376	0,139	0,112	0,050	0,864	0,972	1,000	-0,011	-0,029	-0,074	0,020	0,013	0,008
1,0		0,15	0,101	0,081	0,094	0,131	0,114	0,052	0,110	0,154	0,558	-0,049	-0,069	-0,056	0,019	0,018	0,006
	1,0	0,30	0,248	0,223	0,214	0,148	0,116	0,052	0,462	0,618	0,986	-0,052	-0,077	-0,086	0,024	0,019	0,010
		0,45	0,380	0,363	0,304	0,144	0,116	0,055	0,784	0,922	1,000	-0,070	-0,087	-0,146	0,026	0,021	0,024
2,0		0,15	0,060	0,044	0,048	0,134	0,111	0,049	0,066	0,092	0,210	-0,090	-0,106	-0,102	0,026	0,024	0,013
	2,0	0,30	0,162	0,145	0,119	0,140	0,111	0,052	0,230	0,342	0,740	-0,138	-0,155	-0,181	0,039	0,036	0,035
		0,45	0,277	0,258	0,174	0,140	0,118	0,056	0,542	0,702	0,908	-0,173	-0,192	-0,276	0,050	0,051	0,080

Tabela A.4: Influência da Razão de Desvios (RD) em $\hat{d}$ para T=1000 e processos de memória curta com distribuição gaussiana.

		Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM			
	d	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	
RD																	
		0,15	0,129	0,113	0,119	0,177	0,147	0,070	0,122	0,172	0,546	-0,021	-0,037	-0,031	0,032	0,023	0,006
	0,6	0,30	0,265	0,240	0,247	0,178	0,149	0,070	0,348	0,462	0,968	-0,035	-0,060	-0,053	0,033	0,026	0,008
		0,45	0,405	0,387	0,360	0,166	0,139	0,067	0,658	0,810	1,000	-0,045	-0,063	-0,090	0,030	0,023	0,013
1,0																	
		0,15	0,109	0,088	0,093	0,170	0,138	0,065	0,086	0,110	0,394	-0,041	-0,062	-0,057	0,031	0,023	0,008
	0,6	0,30	0,223	0,206	0,200	0,176	0,144	0,073	0,264	0,358	0,894	-0,077	-0,094	-0,100	0,037	0,029	0,015
		0,45	0,357	0,334	0,279	0,172	0,137	0,070	0,526	0,712	0,984	-0,093	-0,116	-0,171	0,038	0,032	0,034
2,0																	
		0,15	0,040	0,024	0,042	0,169	0,138	0,068	0,054	0,060	0,158	-0,110	-0,126	-0,108	0,041	0,035	0,016
	0,6	0,30	0,146	0,123	0,100	0,172	0,139	0,069	0,150	0,160	0,444	-0,154	-0,177	-0,200	0,053	0,051	0,045
		0,45	0,239	0,214	0,154	0,174	0,143	0,071	0,312	0,384	0,722	-0,211	-0,236	-0,296	0,075	0,076	0,093

Tabela A.5: Influência da Razão de Desvios (RD) em $\hat{d}$ para T=500 e processos de memória curta com distribuição Qui-Quadrado.

	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
<i>RD</i>	$\hat{d}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$
	<i>d</i>														
	0,15	0,127	0,114	0,126	0,138	0,116	0,053	0,156	0,252	0,776	-0,023	-0,036	-0,024	0,020	0,015
	0,30	0,282	0,263	0,258	0,145	0,120	0,054	0,572	0,710	1,000	-0,018	-0,037	-0,042	0,021	0,016
0,6	0,45	0,426	0,402	0,378	0,149	0,121	0,053	0,858	0,954	1,000	-0,024	-0,048	-0,072	0,023	0,017
	0,15	0,101	0,086	0,096	0,143	0,119	0,055	0,130	0,200	0,578	-0,049	-0,064	-0,054	0,023	0,018
1,0	0,30	0,251	0,230	0,210	0,142	0,114	0,052	0,484	0,632	0,980	-0,049	-0,070	-0,090	0,022	0,018
	0,45	0,393	0,370	0,305	0,139	0,114	0,056	0,814	0,926	1,000	-0,057	-0,080	-0,145	0,023	0,019
	0,15	0,057	0,039	0,047	0,140	0,120	0,052	0,082	0,114	0,224	-0,093	-0,111	-0,103	0,028	0,027
2,0	0,30	0,158	0,142	0,118	0,137	0,113	0,055	0,208	0,308	0,714	-0,142	-0,158	-0,182	0,039	0,038
	0,45	0,261	0,247	0,173	0,157	0,122	0,060	0,526	0,694	0,920	-0,189	-0,203	-0,277	0,060	0,056

Tabela A.6: Influência da Razão de Desvios (RD) em $\hat{d}$ para T=1000 e processos de memória curta com distribuição Qui-Quadrado.

ϕ	θ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-0,99	0,288	0,272	0,331	0,187	0,149	0,068	0,424	0,538	0,998	-0,012	-0,028	0,031	0,035	0,023	0,006
-	-0,90	0,316	0,286	0,330	0,172	0,145	0,067	0,448	0,586	1,000	0,016	-0,014	0,030	0,030	0,021	0,005
-	-0,80	0,317	0,288	0,332	0,171	0,146	0,069	0,464	0,610	0,996	0,017	-0,012	0,032	0,030	0,021	0,006
-	-0,60	0,301	0,281	0,328	0,183	0,152	0,067	0,428	0,566	1,000	0,001	-0,019	0,028	0,033	0,023	0,005
-	-0,20	0,309	0,278	0,311	0,178	0,145	0,067	0,440	0,550	0,996	0,009	-0,022	0,011	0,032	0,022	0,005
-	0,20	0,296	0,280	0,262	0,173	0,138	0,067	0,426	0,570	0,988	-0,004	-0,020	-0,038	0,030	0,019	0,006
-	0,60	0,259	0,234	0,085	0,174	0,140	0,067	0,334	0,436	0,346	-0,041	-0,066	-0,215	0,032	0,024	0,051
-	0,80	0,144	0,122	-0,141	0,188	0,144	0,074	0,152	0,176	0,618	-0,156	-0,178	-0,441	0,060	0,053	0,200
-	0,90	-0,066	-0,091	-0,332	0,174	0,145	0,083	0,088	0,128	0,996	-0,366	-0,391	-0,632	0,165	0,174	0,407
-	0,99	-0,628	-0,457	-0,667	0,178	0,164	0,067	0,932	0,884	1,000	-0,928	-0,757	-0,967	0,892	0,600	0,940
-0,99	-	0,294	0,205	0,267	0,160	0,141	0,068	0,420	0,334	0,984	-0,006	-0,095	-0,033	0,026	0,029	0,006
-0,90	-	0,298	0,275	0,264	0,177	0,143	0,069	0,464	0,564	0,978	-0,002	-0,025	-0,036	0,031	0,021	0,006
-0,80	-	0,287	0,266	0,261	0,180	0,146	0,068	0,396	0,556	0,986	-0,013	-0,034	-0,039	0,033	0,023	0,006
-0,60	-	0,293	0,270	0,266	0,172	0,145	0,066	0,418	0,542	0,982	-0,007	-0,030	-0,034	0,030	0,022	0,005
-0,20	-	0,311	0,285	0,284	0,176	0,141	0,070	0,462	0,594	0,990	0,011	-0,015	-0,016	0,031	0,020	0,005
0,20	-	0,292	0,272	0,328	0,178	0,140	0,069	0,420	0,562	0,998	-0,008	-0,028	0,028	0,032	0,020	0,006
0,60	-	0,331	0,309	0,534	0,179	0,147	0,070	0,510	0,640	1,000	0,031	0,009	0,234	0,033	0,022	0,060
0,80	-	0,465	0,439	0,812	0,166	0,139	0,074	0,766	0,902	1,000	0,165	0,139	0,512	0,055	0,039	0,268
0,90	-	0,686	0,645	1,028	0,181	0,148	0,081	0,948	0,992	1,000	0,386	0,345	0,728	0,181	0,141	0,537
0,99	-	1,288	0,960	1,302	0,180	0,123	0,073	1,000	1,000	1,000	0,988	0,660	1,002	1,008	0,451	1,010

Tabela A.7: Influência de ϕ e θ de processos ARFIMA em $\hat{d}$ quando $d = 0,30$ e $T=500$ e processos de memória curta com distribuição gaussiana.

ϕ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
	θ	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-0,99	0,302	0,285	0,321	0,138	0,111	0,047	0,598	0,786	1,000	0,002	-0,015	0,021	0,019	0,003
-	-0,90	0,309	0,290	0,318	0,148	0,126	0,056	0,610	0,762	1,000	0,009	-0,010	0,018	0,022	0,003
-	-0,80	0,300	0,284	0,320	0,148	0,121	0,053	0,586	0,744	1,000	0,000	-0,016	0,020	0,022	0,003
-	-0,60	0,296	0,279	0,320	0,145	0,117	0,051	0,608	0,776	1,000	-0,004	-0,021	0,020	0,021	0,003
-	-0,20	0,296	0,281	0,310	0,148	0,121	0,053	0,570	0,760	1,000	-0,004	-0,019	0,010	0,022	0,003
-	0,20	0,299	0,281	0,279	0,143	0,118	0,050	0,584	0,772	1,000	-0,001	-0,019	-0,021	0,021	0,003
-	0,60	0,281	0,264	0,140	0,145	0,119	0,055	0,536	0,736	0,812	-0,019	-0,036	-0,160	0,021	0,015
-	0,80	0,206	0,194	-0,062	0,141	0,116	0,056	0,314	0,500	0,306	-0,094	-0,106	-0,362	0,029	0,025
-	0,90	0,052	0,035	-0,253	0,146	0,117	0,066	0,086	0,116	1,000	-0,248	-0,265	-0,553	0,083	0,084
-	0,99	-0,572	-0,375	-0,643	0,179	0,170	0,052	0,974	0,844	1,000	-0,872	-0,675	-0,943	0,793	0,485
-0,99	-	0,293	0,142	0,278	0,143	0,148	0,052	0,580	0,362	1,000	0,170	-0,158	-0,022	0,049	0,047
-0,90	-	0,316	0,292	0,285	0,135	0,109	0,052	0,632	0,834	1,000	0,016	-0,008	-0,015	0,018	0,003
-0,80	-	0,307	0,285	0,281	0,143	0,115	0,050	0,606	0,798	1,000	0,007	-0,015	-0,019	0,021	0,003
-0,60	-	0,302	0,285	0,280	0,141	0,121	0,051	0,588	0,772	1,000	0,002	-0,015	-0,020	0,020	0,015
-0,20	-	0,306	0,286	0,289	0,150	0,118	0,053	0,634	0,784	0,998	0,006	-0,014	-0,011	0,023	0,014
0,20	-	0,305	0,281	0,318	0,136	0,116	0,053	0,616	0,766	1,000	0,005	-0,019	0,018	0,019	0,003
0,60	-	0,326	0,305	0,481	0,139	0,119	0,052	0,652	0,812	1,000	0,026	0,005	0,181	0,020	0,014
0,80	-	0,393	0,372	0,735	0,141	0,117	0,058	0,810	0,930	1,000	0,093	0,072	0,435	0,029	0,019
0,90	-	0,538	0,520	0,975	0,142	0,119	0,062	0,952	0,996	1,000	0,238	0,220	0,675	0,077	0,062
0,99	-	1,204	1,065	1,279	0,151	0,106	0,054	1,000	1,000	1,000	0,904	0,765	0,979	0,839	0,596

Tabela A.8: Influência de ϕ e θ de processos ARFIMA em $\hat{d}$ quando $d = 0,30$ e $T=1000$ e processos de memória curta com distribuição gaussiana.

ϕ	θ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-0,99	0,200	0,179	0,170	0,170	0,138	0,067	0,226	0,294	0,804	-0,100	-0,121	-0,130	0,039	0,034	0,021
-	-0,90	0,183	0,164	0,169	0,179	0,149	0,070	0,218	0,252	0,790	-0,117	-0,136	-0,131	0,046	0,041	0,022
-	-0,80	0,196	0,173	0,170	0,178	0,141	0,069	0,246	0,274	0,806	-0,104	-0,127	-0,130	0,042	0,036	0,022
-	-0,60	0,201	0,182	0,179	0,176	0,142	0,068	0,252	0,324	0,840	-0,099	-0,118	-0,121	0,041	0,034	0,019
-	-0,20	0,221	0,200	0,185	0,170	0,137	0,065	0,244	0,352	0,852	-0,079	-0,100	-0,115	0,035	0,029	0,017
-	0,20	0,248	0,234	0,211	0,171	0,135	0,074	0,332	0,436	0,920	-0,052	-0,066	-0,089	0,032	0,023	0,013
-	0,60	0,308	0,276	0,235	0,186	0,154	0,071	0,468	0,566	0,950	0,008	-0,024	-0,065	0,035	0,024	0,009
-	0,80	0,296	0,273	0,239	0,180	0,145	0,072	0,420	0,554	0,956	-0,004	-0,027	-0,061	0,032	0,022	0,009
-	0,90	0,319	0,287	0,241	0,175	0,142	0,070	0,450	0,576	0,954	0,019	-0,013	-0,059	0,031	0,020	0,008
-	0,99	0,294	0,270	0,238	0,180	0,145	0,068	0,436	0,556	0,960	-0,006	-0,030	-0,062	0,032	0,022	0,009
-0,99	-	0,301	0,272	0,294	0,177	0,147	0,069	0,440	0,560	0,986	0,001	-0,028	-0,006	0,031	0,022	0,005
-0,90	-	0,297	0,275	0,286	0,183	0,149	0,069	0,430	0,556	0,992	-0,003	-0,025	-0,014	0,033	0,023	0,005
-0,80	-	0,300	0,271	0,280	0,186	0,147	0,067	0,404	0,566	0,994	0,000	-0,029	-0,020	0,035	0,022	0,005
-0,60	-	0,288	0,263	0,258	0,177	0,146	0,068	0,428	0,518	0,976	-0,012	-0,037	-0,042	0,031	0,023	0,006
-0,20	-	0,253	0,234	0,211	0,176	0,147	0,068	0,326	0,414	0,922	-0,047	-0,066	-0,089	0,033	0,026	0,012
0,20	-	0,207	0,185	0,183	0,184	0,144	0,069	0,254	0,324	0,850	-0,093	-0,115	-0,117	0,042	0,034	0,018
0,60	-	0,180	0,156	0,266	0,171	0,140	0,071	0,184	0,234	0,980	-0,120	-0,144	-0,034	0,044	0,040	0,006
0,80	-	0,224	0,195	0,412	0,171	0,141	0,071	0,266	0,314	1,000	-0,076	-0,105	0,112	0,035	0,031	0,018
0,90	-	0,343	0,321	0,510	0,179	0,141	0,076	0,532	0,690	1,000	0,043	0,021	0,210	0,034	0,020	0,050
0,99	-	0,625	0,589	0,480	0,168	0,136	0,072	0,946	0,984	1,000	0,325	0,289	0,180	0,134	0,102	0,038

Tabela A.9: Influência de ϕ e θ de processos ARMA gaussianos em $\hat{d}$ para processos ARFIMA + ARMA com $d = 0, 30$ e $T=500$.

ϕ	θ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-0,99	0,206	0,194	0,178	0,141	0,113	0,055	0,342	0,512	0,936	-0,094	-0,106	-0,122	0,029	0,024	0,018
-	-0,90	0,215	0,197	0,182	0,148	0,119	0,050	0,358	0,530	0,958	-0,085	-0,103	-0,118	0,029	0,025	0,016
-	-0,80	0,219	0,198	0,180	0,144	0,118	0,053	0,344	0,504	0,952	-0,081	-0,102	-0,120	0,028	0,024	0,017
-	-0,60	0,219	0,199	0,181	0,131	0,111	0,052	0,352	0,540	0,954	-0,081	-0,101	-0,119	0,024	0,022	0,017
-	-0,20	0,236	0,220	0,194	0,144	0,114	0,051	0,420	0,598	0,972	-0,064	-0,080	-0,106	0,025	0,019	0,014
-	0,20	0,267	0,247	0,225	0,133	0,108	0,050	0,496	0,656	0,996	-0,033	-0,053	-0,075	0,019	0,014	0,008
-	0,60	0,294	0,275	0,259	0,132	0,112	0,051	0,578	0,770	1,000	-0,006	-0,025	-0,041	0,017	0,013	0,004
-	0,80	0,286	0,268	0,263	0,140	0,111	0,051	0,532	0,754	0,998	-0,014	-0,032	-0,037	0,020	0,013	0,004
-	0,90	0,299	0,283	0,264	0,140	0,117	0,052	0,588	0,774	0,998	-0,001	-0,017	-0,036	0,020	0,014	0,004
-	0,99	0,297	0,278	0,267	0,151	0,123	0,052	0,590	0,784	0,998	-0,003	-0,022	-0,033	0,023	0,016	0,004
-0,99	-	0,299	0,276	0,299	0,138	0,119	0,048	0,588	0,764	1,000	-0,001	-0,024	-0,001	0,019	0,015	0,002
-0,90	-	0,303	0,288	0,290	0,143	0,114	0,051	0,620	0,790	1,000	0,003	-0,012	-0,010	0,020	0,013	0,003
-0,80	-	0,297	0,277	0,286	0,140	0,114	0,051	0,580	0,732	1,000	-0,003	-0,023	-0,014	0,020	0,014	0,003
-0,60	-	0,279	0,264	0,266	0,142	0,118	0,051	0,536	0,740	0,998	-0,021	-0,036	-0,034	0,021	0,015	0,004
-0,20	-	0,273	0,250	0,234	0,142	0,117	0,052	0,504	0,674	1,000	-0,027	-0,050	-0,066	0,021	0,016	0,007
0,20	-	0,220	0,202	0,198	0,146	0,123	0,051	0,406	0,542	0,978	-0,080	-0,098	-0,102	0,028	0,025	0,013
0,60	-	0,185	0,163	0,239	0,145	0,110	0,051	0,282	0,386	0,994	-0,115	-0,137	-0,061	0,034	0,031	0,006
0,80	-	0,187	0,167	0,377	0,139	0,117	0,052	0,282	0,410	1,000	-0,113	-0,133	0,077	0,032	0,031	0,009
0,90	-	0,264	0,247	0,494	0,134	0,113	0,056	0,464	0,672	1,000	-0,036	-0,053	0,194	0,019	0,016	0,041
0,99	-	0,629	0,607	0,506	0,150	0,118	0,054	0,982	1,000	1,000	0,329	0,307	0,206	0,131	0,108	0,045

Tabela A.10: Influência de ϕ e θ de processos ARMA gaussianos em $\hat{d}$ para processos ARFIMA + ARMA com $d = 0,30$ e $T=1000$.

ϕ	θ	Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
		$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-0,99	0,199	0,178	0,173	0,182	0,146	0,068	0,196	0,276	0,816	-0,101	-0,122	-0,127	0,043	0,036	0,021
-	-0,90	0,202	0,179	0,173	0,180	0,149	0,070	0,234	0,298	0,794	-0,098	-0,121	-0,127	0,042	0,037	0,021
-	-0,80	0,176	0,157	0,156	0,177	0,141	0,080	0,250	0,308	0,796	-0,124	-0,143	-0,144	0,047	0,040	0,027
-	-0,60	0,207	0,177	0,176	0,177	0,148	0,071	0,220	0,302	0,816	-0,093	-0,123	-0,124	0,040	0,037	0,021
-	-0,20	0,230	0,210	0,190	0,183	0,147	0,069	0,278	0,386	0,874	-0,070	-0,090	-0,110	0,038	0,030	0,017
-	0,20	0,257	0,232	0,217	0,184	0,149	0,069	0,328	0,434	0,934	-0,043	-0,068	-0,083	0,036	0,027	0,012
-	0,60	0,297	0,270	0,233	0,185	0,148	0,069	0,404	0,574	0,950	-0,003	-0,030	-0,067	0,034	0,023	0,009
-	0,80	0,309	0,278	0,244	0,182	0,145	0,070	0,414	0,538	0,966	0,009	-0,022	-0,056	0,033	0,022	0,008
-	0,90	0,294	0,273	0,241	0,178	0,146	0,066	0,388	0,556	0,968	-0,006	-0,027	-0,059	0,032	0,022	0,008
-	0,99	0,291	0,269	0,232	0,185	0,148	0,066	0,428	0,556	0,962	-0,009	-0,031	-0,068	0,034	0,023	0,009
-0,99	-	0,294	0,274	0,292	0,175	0,141	0,068	0,402	0,526	0,996	-0,006	-0,026	-0,008	0,031	0,021	0,005
-0,90	-	0,285	0,266	0,283	0,180	0,146	0,068	0,412	0,540	0,992	-0,015	-0,034	-0,017	0,033	0,022	0,005
-0,80	-	0,292	0,264	0,275	0,181	0,148	0,069	0,410	0,512	0,990	-0,008	-0,036	-0,025	0,033	0,023	0,005
-0,60	-	0,296	0,264	0,253	0,173	0,145	0,068	0,386	0,518	0,978	-0,004	-0,036	-0,047	0,030	0,022	0,007
-0,20	-	0,256	0,237	0,215	0,193	0,157	0,071	0,364	0,470	0,928	-0,044	-0,063	-0,085	0,039	0,029	0,012
0,20	-	0,203	0,185	0,187	0,183	0,149	0,073	0,244	0,304	0,848	-0,097	-0,115	-0,113	0,043	0,035	0,018
0,60	-	0,176	0,151	0,267	0,176	0,152	0,069	0,184	0,258	0,976	-0,124	-0,149	-0,033	0,046	0,045	0,006
0,80	-	0,214	0,193	0,409	0,178	0,141	0,073	0,258	0,316	0,998	-0,086	-0,107	0,109	0,039	0,031	0,017
0,90	-	0,352	0,331	0,505	0,187	0,146	0,075	0,556	0,712	1,000	0,052	0,031	0,205	0,038	0,022	0,048
0,99	-	0,898	0,803	0,617	0,144	0,088	0,062	0,996	1,000	1,000	0,598	0,503	0,317	0,378	0,261	0,104

Tabela A.11: Influência de ϕ e θ de processos ARMA com distribuição Qui-quadrado em $\hat{d}$ para processos ARFIMA + ARMA com $d = 0, 30$ e $T=500$.

		Média			Desvio Padrão			Prop. Rejeição à 5%			Viés			EQM		
ϕ	θ	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$	$\hat{d}_{GPH}$	$\hat{d}_S$	$\hat{d}_{TW}$
-	-0,99	0,212	0,192	0,178	0,141	0,114	0,052	0,364	0,516	0,960	-0,088	-0,108	-0,122	0,028	0,025	0,018
-	-0,90	0,218	0,199	0,179	0,140	0,115	0,054	0,356	0,532	0,944	-0,082	-0,101	-0,121	0,026	0,023	0,018
-	-0,80	0,211	0,195	0,180	0,143	0,116	0,053	0,376	0,510	0,954	-0,089	-0,105	-0,120	0,028	0,024	0,017
-	-0,60	0,215	0,201	0,184	0,142	0,117	0,054	0,378	0,530	0,958	-0,085	-0,099	-0,116	0,027	0,023	0,016
-	-0,20	0,233	0,209	0,194	0,148	0,124	0,053	0,400	0,572	0,976	-0,067	-0,091	-0,106	0,026	0,024	0,014
-	0,20	0,261	0,244	0,229	0,138	0,113	0,053	0,494	0,678	0,996	-0,039	-0,056	-0,071	0,020	0,016	0,008
-	0,60	0,290	0,271	0,255	0,148	0,117	0,053	0,584	0,748	0,998	-0,010	-0,029	-0,045	0,022	0,015	0,005
-	0,80	0,310	0,288	0,268	0,137	0,116	0,052	0,610	0,820	0,998	0,010	-0,012	-0,032	0,019	0,014	0,004
-	0,90	0,306	0,285	0,270	0,141	0,110	0,050	0,614	0,796	1,000	0,006	-0,015	-0,030	0,020	0,012	0,003
-	0,99	0,311	0,289	0,269	0,138	0,117	0,051	0,638	0,816	0,998	0,011	-0,011	-0,031	0,019	0,014	0,004
-0,99	-	0,308	0,292	0,303	0,144	0,111	0,048	0,610	0,812	1,000	0,008	-0,008	0,003	0,021	0,012	0,002
-0,90	-	0,304	0,283	0,293	0,148	0,117	0,052	0,610	0,794	0,998	0,004	-0,017	-0,007	0,022	0,014	0,003
-0,80	-	0,293	0,271	0,282	0,134	0,113	0,051	0,588	0,760	1,000	-0,007	-0,029	-0,018	0,018	0,014	0,003
-0,60	-	0,289	0,267	0,266	0,138	0,116	0,051	0,580	0,752	1,000	-0,011	-0,033	-0,034	0,019	0,015	0,004
-0,20	-	0,263	0,246	0,227	0,143	0,122	0,055	0,508	0,670	0,994	-0,037	-0,054	-0,073	0,022	0,018	0,008
0,20	-	0,230	0,210	0,197	0,139	0,112	0,053	0,400	0,588	0,974	-0,070	-0,090	-0,103	0,024	0,021	0,013
0,60	-	0,181	0,161	0,240	0,149	0,123	0,051	0,270	0,412	0,998	-0,119	-0,139	-0,060	0,036	0,034	0,006
0,80	-	0,181	0,161	0,373	0,137	0,116	0,054	0,254	0,376	1,000	-0,119	-0,139	0,073	0,033	0,033	0,008
0,90	-	0,279	0,258	0,496	0,136	0,114	0,059	0,522	0,704	1,000	-0,021	-0,042	0,196	0,019	0,015	0,042
0,99	-	0,768	0,770	0,557	0,128	0,076	0,050	1,000	1,000	1,000	0,468	0,470	0,257	0,235	0,227	0,069

Tabela A.12: Influência de ϕ e θ de processos ARMA com distribuição Qui-quadrado em $\hat{d}$ para processos ARFIMA + ARMA com $d = 0, 30$ e $T=1000$.

Tabelas das Simulações do Teste MLC

Neste apêndice encontram-se tabelas referentes aos conjuntos de simulações de 5 a 7, ou seja, das simulações do teste de memória longa compartilhada através da análise de correlação canônica. As tabelas contém os quantis observados das estatísticas T e T^* e os quantis esperados da distribuição qui-quadrado com os devidos graus de liberdade, para diversos valores de h e j . Também são descritas a proporção do número de vezes que a hipótese de memória longa compartilhada é rejeitada utilizando cada uma das estatísticas, e a proporção do número de vezes em a hipótese de que a combinação linear y^* possui memória curta é rejeitada.

		Quantil					Prop. rej(5%)
		0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
h=5 j=3	T	8,506	11,054	14,362	15,981	19,382	0,038
	T^*	8,465	10,967	14,540	16,141	19,343	0,038
	χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
	$\hat{d}_{TW}$						0,074
h=5 j=5	T	8,045	10,812	14,395	16,460	20,970	0,046
	T^*	7,931	10,826	14,437	16,430	20,858	0,044
	χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
	$\hat{d}_{TW}$						0,096
h=10 j=5	T	17,957	22,172	26,602	28,534	37,317	0,034
	T^*	17,875	21,854	26,120	28,339	36,621	0,032
	χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
	$\hat{d}_{TW}$						0,084

Tabela B.1: Influência dos parâmetro h e j no Teste MLC para Erros com Distribuição Gaussiana.

		Quantil					Prop. rej(5%)
		0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
h=5 j=3	T	7,804	10,749	13,358	15,912	22,101	0,048
	T^*	7,773	10,710	13,274	15,483	22,051	0,046
	χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
	$\hat{d}_{TW}$						0,092
h=5 j=5	T	8,112	11,535	14,845	16,698	20,607	0,046
	T^*	8,036	11,330	14,453	16,674	20,083	0,044
	χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
	$\hat{d}_{TW}$						0,084
h=10 j=5	T	17,299	21,873	26,927	28,880	33,070	0,036
	T^*	17,204	21,892	26,517	28,715	33,039	0,028
	χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
	$\hat{d}_{TW}$						0,088

Tabela B.2: Influência dos parâmetro h e j no Teste MLC para Erros com Distribuição Qui-quadrado.

			Quantil					Prop. rej(5%)
			0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
$\phi = -0,6$	h=5 j=3	T	8,114	11,262	14,254	16,778	20,866	0,046
		T^*	8,077	11,212	14,147	16,777	20,261	0,048
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,084
	h=5 j=5	T	7,495	10,508	13,477	15,785	20,134	0,032
		T^*	7,432	10,536	13,184	15,429	18,271	0,028
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,136
	h=10 j=5	T	17,610	21,197	25,328	29,278	32,195	0,042
		T^*	17,323	21,134	25,258	28,056	31,670	0,034
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,138
$\phi = -0,2$	h=5 j=3	T	8,304	11,538	14,947	17,082	20,084	0,054
		T^*	8,161	11,476	14,865	17,082	20,394	0,054
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,078
	h=5 j=5	T	8,192	11,213	14,473	17,017	22,504	0,056
		T^*	8,199	11,119	14,365	16,496	21,624	0,048
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,086
	h=10 j=5	T	18,262	22,660	27,579	30,216	38,404	0,052
		T^*	17,963	22,250	27,187	29,748	37,890	0,044
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,112
$\phi = 0,2$	h=5 j=3	T	8,515	11,590	15,323	17,439	20,249	0,066
		T^*	8,456	11,562	15,570	17,158	20,387	0,064
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,106
	h=5 j=5	T	8,422	11,477	14,728	17,323	22,171	0,054
		T^*	8,352	11,356	14,671	17,157	21,540	0,052
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,086
	h=10 j=5	T	18,617	22,074	26,635	30,126	35,125	0,050
		T^*	18,304	21,900	26,382	29,910	34,631	0,044
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,104
$\phi = 0,6$	h=5 j=3	T	8,213	10,880	13,945	16,198	21,806	0,032
		T^*	8,232	10,810	13,878	16,407	21,691	0,032
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,078
	h=5 j=5	T	8,059	11,111	14,139	17,418	21,307	0,058
		T^*	8,063	11,064	14,084	17,467	21,369	0,054
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,084
	h=10 j=5	T	17,801	21,955	26,452	29,410	35,537	0,042
		T^*	17,618	21,884	26,118	29,512	34,270	0,038
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,088

Tabela B.3: Influência do Coeficiente Autoregressivo (ϕ) do Processo ARFIMA no Teste MLC.

			Quantil					Prop. rej(5%)
			0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
$\theta = -0,6$	h=5 j=3	T	8,404	11,115	13,685	16,197	22,061	0,042
		T^*	8,454	11,122	13,699	16,140	21,804	0,040
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,086
	h=5 j=5	T	8,270	11,288	14,573	16,487	21,752	0,038
		T^*	8,224	11,144	14,638	16,468	21,770	0,038
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,062
	h=10 j=5	T	18,249	22,778	26,567	29,708	35,999	0,044
		T^*	18,085	22,684	25,973	28,914	35,807	0,044
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,086
$\theta = -0,2$	h=5 j=3	T	8,453	11,112	14,498	16,534	21,023	0,042
		T^*	8,362	11,152	14,377	16,385	21,056	0,042
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,074
	h=5 j=5	T	8,027	10,886	14,410	17,308	22,122	0,056
		T^*	8,013	10,908	14,257	17,067	21,655	0,052
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,050
	h=10 j=5	T	17,747	22,417	26,549	28,545	34,010	0,034
		T^*	17,614	22,055	26,321	28,639	33,002	0,026
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,082
$\theta = 0,2$	h=5 j=3	T	8,412	11,245	14,275	16,124	19,756	0,034
		T^*	8,420	11,227	14,238	15,879	19,743	0,040
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,084
	h=5 j=5	T	7,709	10,895	14,242	16,937	22,113	0,052
		T^*	7,668	10,794	14,152	16,701	22,028	0,046
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,122
	h=10 j=5	T	17,678	22,069	26,329	28,544	33,165	0,026
		T^*	17,593	21,816	26,025	28,554	32,344	0,026
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,128
$\theta = 0,6$	h=5 j=3	T	6,432	8,620	10,915	12,445	16,020	0,006
		T^*	6,430	8,523	10,933	12,527	15,703	0,006
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,108
	h=5 j=5	T	6,219	8,284	10,511	11,951	14,806	0,002
		T^*	6,200	8,213	10,485	11,893	14,713	0,004
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_{TW}$						0,150
	h=10 j=5	T	14,742	17,975	21,943	24,353	27,606	0,002
		T^*	14,775	17,830	21,981	23,959	27,462	0,002
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_{TW}$						0,124

Tabela B.4: Influência do Coeficiente de Médias Móveis (θ) do Processo ARFIMA no Teste MLC.

			Quantil					Prop. rej(5%)
			0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
$\phi = -0,6$	h=5 j=3	T	51,500	62,613	74,392	87,457	101,442	0,996
		T^*	29,137	35,642	43,925	46,927	56,683	0,942
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,288
	h=5 j=5	T	14,159	20,302	25,700	30,623	41,337	0,378
		T^*	7,669	10,616	13,530	15,822	22,618	0,032
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,128
	h=10 j=5	T	24,771	33,183	40,437	46,468	59,113	0,324
		T^*	13,254	16,630	19,812	22,665	31,032	0,014
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,122
$\phi = -0,2$	h=5 j=3	T	8,644	11,743	15,060	17,269	23,637	0,054
		T^*	7,850	10,609	13,755	15,940	19,373	0,032
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,096
	h=5 j=5	T	8,278	11,613	14,743	17,012	24,254	0,056
		T^*	7,913	10,491	12,938	14,765	20,724	0,032
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,106
	h=10 j=5	T	18,200	22,767	26,047	28,751	34,489	0,042
		T^*	16,835	20,868	23,917	27,304	32,841	0,034
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,108
$\phi = 0,2$	h=5 j=3	T	7,675	11,370	14,418	16,836	23,040	0,050
		T^*	7,710	10,509	14,087	16,136	20,581	0,034
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,100
	h=5 j=5	T	7,877	10,862	13,803	15,679	21,358	0,042
		T^*	7,593	10,625	13,225	15,314	18,362	0,028
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,120
	h=10 j=5	T	17,900	21,797	25,838	28,897	32,457	0,036
		T^*	16,594	20,177	24,251	26,361	30,127	0,010
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,074
$\phi = 0,6$	h=5 j=3	T	46,112	58,603	69,563	78,548	91,114	0,996
		T^*	25,648	30,211	34,862	37,941	42,408	0,910
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,124
	h=5 j=5	T	11,512	17,412	23,746	27,418	36,993	0,264
		T^*	7,110	9,676	12,636	14,571	19,324	0,020
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,072
	h=10 j=5	T	21,239	27,636	34,695	39,251	47,044	0,182
		T^*	12,188	14,551	17,997	19,623	22,916	0,000
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,110

Tabela B.5: Influência do Coeficiente Autoregressivo (ϕ) do Processo ARMA com Distribuição Gaussiana no Teste MLC.

			Quantil					Prop. rej(5%)
			0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
$\theta = -0,6$	h=5 j=3	T	8,094	11,888	16,218	18,353	23,821	0,074
		T^*	6,696	9,231	12,471	14,082	17,650	0,016
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,102
	h=5 j=5	T	8,277	11,480	14,729	17,373	21,144	0,056
		T^*	6,523	8,800	11,169	13,112	16,810	0,010
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,076
	h=10 j=5	T	17,705	22,459	27,191	31,002	37,674	0,064
		T^*	13,333	16,679	19,510	21,940	27,027	0,002
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,066
$\theta = -0,2$	h=5 j=3	T	8,209	11,103	14,714	16,847	19,841	0,048
		T^*	7,853	10,531	14,002	16,215	19,445	0,030
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,080
	h=5 j=5	T	7,937	10,883	14,101	16,184	19,193	0,040
		T^*	7,792	10,555	13,500	15,093	18,624	0,016
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,068
	h=10 j=5	T	17,795	21,603	25,920	29,081	34,053	0,040
		T^*	16,892	20,670	24,985	27,015	32,075	0,016
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,076
$\theta = 0,2$	h=5 j=3	T	8,413	11,506	14,754	16,295	20,745	0,038
		T^*	7,882	10,694	13,573	14,998	18,915	0,020
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,074
	h=5 j=5	T	8,515	11,291	14,009	16,379	20,791	0,046
		T^*	7,959	10,642	13,312	15,138	19,630	0,028
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,074
	h=10 j=5	T	18,683	23,677	27,205	31,474	38,382	0,064
		T^*	17,739	21,796	25,200	28,440	36,952	0,040
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,082
$\theta = 0,6$	h=5 j=3	T	9,673	12,834	16,822	19,032	24,628	0,094
		T^*	7,296	9,884	12,453	14,112	17,991	0,014
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,092
	h=5 j=5	T	8,911	12,534	15,555	18,268	24,999	0,082
		T^*	6,795	9,402	12,005	14,069	19,407	0,018
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,120
	h=10 j=5	T	18,900	23,704	28,598	31,758	39,353	0,078
		T^*	14,206	17,679	21,148	23,292	27,147	0,004
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,114

Tabela B.6: Influência do Coeficiente de Médias Móveis (θ) do Processo ARMA com Distribuição Gaussiana no Teste MLC.

			Quantil					Prop. rej(5%)
			0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
$\phi = -0,6$	h=5 j=3	T	50,911	63,017	74,194	81,370	93,061	0,998
		T^*	29,389	34,754	41,392	48,378	52,913	0,956
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,302
	h=5 j=5	T	15,105	22,748	30,025	35,892	45,155	0,442
		T^*	8,098	11,487	15,192	16,589	20,097	0,046
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,120
	h=10 j=5	T	23,049	30,550	39,965	45,933	56,290	0,262
		T^*	12,366	15,646	19,055	21,753	27,316	0,004
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,122
$\phi = -0,2$	h=5 j=3	T	8,517	11,876	15,784	18,192	23,781	0,078
		T^*	7,948	11,118	14,253	16,743	19,986	0,050
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,096
	h=5 j=5	T	8,644	11,983	15,175	18,063	22,881	0,070
		T^*	7,929	10,778	14,256	16,475	21,740	0,046
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,082
	h=10 j=5	T	18,130	22,322	27,767	31,017	36,080	0,060
		T^*	16,708	20,887	24,966	27,734	31,938	0,022
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,074
$\phi = 0,2$	h=5 j=3	T	7,985	11,004	13,916	16,032	20,877	0,036
		T^*	7,798	10,364	13,734	15,395	20,332	0,026
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,092
	h=5 j=5	T	7,922	11,055	14,160	17,224	19,964	0,054
		T^*	7,784	10,430	13,399	15,837	18,710	0,030
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,106
	h=10 j=5	T	17,903	21,870	25,797	28,943	36,819	0,044
		T^*	16,776	20,513	24,295	26,549	33,269	0,020
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,062
$\phi = 0,6$	h=5 j=3	T	48,806	61,192	70,718	77,457	90,391	1,000
		T^*	26,150	31,260	35,792	37,459	42,214	0,908
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,100
	h=5 j=5	T	11,176	16,213	23,260	27,822	34,522	0,228
		T^*	6,745	9,617	12,642	14,153	18,447	0,016
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,104
	h=10 j=5	T	20,866	27,837	36,357	42,738	51,899	0,196
		T^*	11,870	14,981	18,096	20,385	23,449	0,002
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,086

Tabela B.7: Influência do Coeficiente Autoregressivo (ϕ) do Processo ARMA com Distribuição Qui-quadrado no Teste MLC.

			Quantil					Prop. rej(5%)
			0,5	0,75	0,90	0,95	0,99	
$\theta = -0,6$	h=5 j=3	T	8,325	12,222	15,604	17,323	21,772	0,066
		T^*	6,908	9,217	12,143	13,453	17,494	0,012
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,094
	h=5 j=5	T	8,408	11,629	15,817	17,436	22,582	0,064
		T^*	6,664	9,044	11,865	14,033	17,106	0,012
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,082
	h=10 j=5	T	16,724	21,932	27,810	31,721	37,249	0,070
		T^*	13,004	16,925	20,252	22,316	25,425	0,004
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,088
$\theta = -0,2$	h=5 j=3	T	7,732	10,757	14,298	17,226	23,038	0,054
		T^*	7,549	10,403	13,648	16,076	20,386	0,042
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,078
	h=5 j=5	T	7,738	11,358	14,761	17,043	21,271	0,052
		T^*	7,587	10,601	13,531	15,936	21,472	0,038
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,088
	h=10 j=5	T	17,201	22,159	27,271	30,046	35,242	0,048
		T^*	16,515	20,846	25,013	28,428	34,157	0,030
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,092
$\theta = 0,2$	h=5 j=3	T	8,088	11,265	14,684	17,072	22,860	0,054
		T^*	7,570	10,687	13,920	15,207	19,546	0,034
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,078
	h=5 j=5	T	8,356	11,797	15,357	18,729	25,204	0,080
		T^*	7,937	10,948	14,639	16,936	23,720	0,054
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,082
	h=10 j=5	T	18,011	23,193	28,192	30,402	37,733	0,054
		T^*	17,069	21,749	25,597	27,746	33,758	0,024
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,110
$\theta = 0,6$	h=5 j=3	T	9,306	12,925	16,787	18,725	27,978	0,094
		T^*	6,999	9,564	11,872	13,386	19,812	0,018
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,116
	h=5 j=5	T	8,923	13,092	16,486	18,426	25,171	0,086
		T^*	7,062	9,823	12,132	14,065	17,707	0,014
		χ^2	8,343	11,389	14,684	16,919	21,666	
		$\hat{d}_S$						0,100
	h=10 j=5	T	18,993	24,050	30,077	33,883	40,613	0,098
		T^*	14,241	17,989	22,096	25,396	31,684	0,016
		χ^2	18,338	22,718	27,204	30,144	36,191	
		$\hat{d}_S$						0,118

Tabela B.8: Influência do Coeficiente de Médias Móveis (θ) do Processo ARMA com Distribuição Qui-quadrado no Teste MLC.

Referências

Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: Wiley.

Baillie, R.T. (1996). Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, **73**, 5-59.

Box, G.E.P and Jenkins, G.M. and Reinsel, G. (1994). *Time Series analysis: Forecasting and Control*. Third Edition. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1977). A canonical analysis of multiple time series. *Biometrika*, **64**, 355-365.

Breidt, F.J., Crato, N. and de Lima, P. (1998). On the detection and estimation of long memory in stochastic volatility. *Journal of Econometrics*, **83**, 35-348.

Brillinger, D.R. (1981). *Time Series: Data Analysis and Theory*. 2nd ed. San Francisco: Holden-Day.

Chen, G., Abraham, B., and Peiris, S. (1993). Lag window estimation of the degree of differencing in fractionally integrated time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **15**, 473-487.

Cheung, Y.W. and Lai, K.S. (1993). A fractional cointegration analysis of purchasing

- power parity. *Journal of Business and Economics Statistics*, **11**, 103-112.
- Diebolt, C. and Guiraud, V. (2002). A note on long memory time series. Unpublished Working Paper. Université Montpellier.
- Ding, Z., Granger, C.W.J. and Engle, R.F. (1993). A long memory property of stocks returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1008.
- Engle, R.F. and Granger, C.W.J. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimating and testing. *Econometrica*, **55**, 251-276.
- Fuller, W.A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*. New York: Wiley.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 221-238.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.
- Granger, C.W.J. (1980). Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, **14**, 227-238.
- Granger, C.W.J. and Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, **1**, 15-39.
- Harvey, A.C. (1993). Long memory in stochastic volatility. Unpublished working paper, London School of Economics, London, UK.
- Hipel, K.W. and McLeod, A.I. (1978a). Preservation of the rescaled adjusted range, 2:

- Simulation Studies Using Box-Jenkins Models, *Water resource research*, **14**, 506-516.
- Hipel, K.W. and McLeod, A.I. (1978b). Preservation of the rescaled adjusted range, 3: Fractional Gaussian noise algorithms, *Water Resource Research*, **14**, 517-518.
- Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, **68**, 165-176.
- Hotteling, H. (1936). Relations between two sets of variates. *Biometrika*, **28**, 321-377.
- Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transaction of the American Society of Civil Engineers*, **116**, 770-799.
- Hurst, H.E. (1956). Methods of using long term storage in reservoirs. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, **1**, 519-543.
- Hurst, H.E. (1957). A suggested statistical model of some time series that occur in nature. *Nature*, **180**, 494.
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of co-integration vectors in gaussian vector regression models. *Econometrica*, **59**, 1551-1580.
- Lawrance, A.J. and Kottegoda, N.T. (1977). Stochastic modelling of riverflow time series. *Journal of the Royal Statistical Society A*, **140**, 1-47.
- Lo, A.W. (1991). Long term memory in stock market prices. *Econometrica*, **59**, 1279-1313.
- McLeod, A.I. and Hipel, K.W. (1978). Preservation of the rescaled adjusted range, 1: A reassessment of the Hurst phenomenon. *Water Resources Research*, **14**, 491-508.
- Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (1981). *Modelos para Previsão de Séries Temporais*. Rio de Janeiro. IMPA.

- Moura, C.B. (1997). *Comparação de estimadores do parâmetro de memória longa do modelo ARFIMA(p,d,q)*. Dissertação de Mestrado (IME-USP, São Paulo).
- Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns. *Econometrica*, **59**, 347-370.
- Ray, B.K. and Tsay, R.S. (1997). Identifying common long-range dependence in a vector time series. Working paper, University of Chicago, Statistics Research Center, Graduate School of Business.
- Reisen, V.A. (1994). Estimation of the fractional difference parameter in the ARIMA(p,d,q) model using the smoothed periodogram. *Journal of Time Series Analysis*, **15**, 335-351.
- Robinson, P.M. (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *Annals of Statistics*, **23**, 1630-1661.
- Robinson, P.M. and Henry, M. (1999). Long and short memory conditional heteroskedasticity in estimating the memory parameters at levels. *Econometric Theory*, **15**, 229-336.
- Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2000). *Time Series Analysis and its Applications*. New York. Springer.
- Shuster, A. (1906). On the periodicities of sunspots. *Phil. Trans. R. Soc. Ser. A*, **206**, 69-100.
- Sowell, F.B. (1986). *Fractionally integrated vector time series*. Ph.D. dissertation (Duke University, Durham, NC).
- Sowell, F.B. (1992). Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models. *Journal of Econometrics*, **53**, 165-188.
- Stock, J.H. and Watson, M.W. (1988). Testing for common trends. *Journal of American Statistician Society*, **83**, 1097-1107.

Taylor, S.J. (1980). Conjectured models for trend in financial prices tests as forecasts. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **42**, 338-362.

Taylor, S.J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: Wiley.

Tiao, G.C. and Tsay, R.S. (1989). Model specification in multivariate time series. *Journal of Royal Statistical Society B*, **51**, 157-213.

Tsay, R.S. (1989). Identifying multivariate time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **10**, 357-372.

Tsay, R.S. and Tiao, G.C. (1985). Use of canonical analysis in time series identification. *Biometrika*, **72**, 299-316.

Velasco, C. (1999). Gaussian semiparametric estimation of non-stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, **20**, 87-127.