

Espera e abandono na fila $M/M/n + G$ e variantes

Camila Cardoso de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Marcos Nascimento Magalhães

São Paulo, julho de 2009

Espera e abandono na fila $M/M/n + G$ e variantes

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Camila Cardoso de Oliveira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Marcos Nascimento Magalhães (orientador) - IME-USP.
- Profa. Dra. Elisabeti Kira - IME-USP.
- Prof. Dr. Rui Carlos Botter - EP-USP.

*Aos meus queridos pais,
Odenéia e José,
pelo incondicional
apoio e carinho.*

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus e a Nossa Senhora da Conceição por terem me dado luz, proteção e possibilitado concluir mais esta etapa da minha vida ao lado de pessoas tão maravilhosas.

Aos meus pais, Odenéia e José, pelos exemplos de trabalho, luta e dedicação. À minha irmã Fabiana, ao meu cunhado Ricardo, ao meu tio Odilon, ao Jorge, às minhas tias Leonor e Odysséia, ao meu tio João, aos meus padrinhos Deraldo e Nádia, agradeço simplesmente a companhia de vocês, as palavras de incentivo e os conselhos que me proporcionaram o conforto necessário nessa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Nascimento Magalhães, pela paciência, dedicação, companheirismo, respeito, idéias e contribuições fundamentais no progresso e elaboração deste trabalho.

A Prof. Dra. Elisabeti Kira pelas valiosas sugestões e contribuições neste trabalho, à minha colega de pesquisa, Gabriela, que através do apoio, amizade, conhecimento e trocas de informações, contribuiu significativamente durante todo este período.

Ao Prof. Dr. Rui Carlos Botter da Escola Politécnica da USP e aos alunos João Umburuçu, Marcelo Mattos e Rodolfo pela imensa contribuição na simulação.

Ao meu namorado, Maxwell, pelo exemplo de vitória, perseverança e profissionalismo, que sempre me incentivou a entrar no curso de mestrado e, principalmente, a não desistir.

As amigas Fabíola e Renata que me auxiliaram com a língua inglesa, aos colegas Alexsandro, Luciana, Valdivino e todos que cursaram as disciplinas comigo, que me ajudaram desde o início do curso, na realização de trabalhos, nos estudos em conjunto, na utilização dos softwares R e Latex.

A todos que contribuíram para que eu pudesse realizar este sonho.

Muito obrigada! Todos estão em meu coração.

Que Deus os ilumine e permita continuar a compartilhar as nossas vidas.

Resumo

O modelo de fila $M/M/n+G$ pode ser usado para descrever o comportamento de uma Central de Atendimento. Nesse modelo as chegadas são Poisson com taxa λ , o atendimento é exponencialmente distribuído com taxa μ , há n atendentes e os tempos de paciência dos clientes têm distribuição geral. A espera do usuário em fila não pode ultrapassar um tempo (paciência) que tem distribuição G e, se isto ocorrer, ele abandona o sistema. Mandelbaum e Zeltyn [2004] mostraram que existe uma relação linear entre o tempo médio de permanência na fila e a probabilidade de abandono nesses modelos quando a paciência é exponencialmente distribuída. No presente trabalho, estudamos essa relação no caso de distribuição de paciência do tipo mista (com partes discreta e contínua), em que buscamos representar a reação dos usuários às mensagens gravadas reproduzidas periodicamente para aqueles que estão esperando atendimento. Utilizamos duas distribuições de paciência: Exponencial Mista e Uniforme Mista e percebemos que não há uma relação linear entre o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono. Observamos que para uma mesma taxa de chegada, o tempo médio de espera na fila é menor para a distribuição de paciência mista quando comparada com a Exponencial ou Uniforme de mesmos parâmetros. Analisamos o que ocorre com essa relação quando alteramos a distribuição do atendimento e percebemos que ela é mais afetada pela média e pelo coeficiente de variação do que pela particular distribuição escolhida para o tempo de serviço.

Palavras-chave: teoria das filas, Central de Atendimento, paciência, abandono e tempo virtual de espera na fila.

Abstract

The $M/M/n + G$ queueing model can be used to describe the behavior of a *Call Center*. This model has Poisson arrivals with rate λ , service times are exponentially distributed with rate μ , n agents and the client's patience time has general distribution. The waiting in line could not exceed a time (patience) which has distribution G , and if it occurs, the client leaves the system. In this models, Mandelbaum and Zeltyn [2004] showed that there is a linear relationship between average waiting time in queue and the probability of abandonment if the distribution of patience is Exponencial. In this work, we study this relationship in the case of patience with mixed distribution (which has discret and continuous parts). Through mixed distributions we try to represent the user's reaction to recorded messages reproduced periodically when they are waiting for service. We have used Mixed Exponencial and Mixed Uniform distributions and, in both of them, there is not a linear relationship between average waiting time in queue and the probability of abandonment. We observe that for the same arrival rate, the average waiting time in line for mixed distribution is smaller than Exponencial or Uniform distributions with the same parameters. Also, we study the effect on waiting time and abandonment of different distributions of service and we observe that it is more affected by the coefficient of variation and average that by the particular distribution chosen for service.

Keywords: theory of queues, *Call Center*, patient, abandonment and virtual waiting time.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Considerações Preliminares	4
1.2 Objetivos	5
1.3 Contribuições	5
1.4 Organização do Trabalho	6
2 O sistema $M/G/1$ e variantes	7
2.1 O sistema $M/G/1$	7
2.1.1 Distribuição do Tempo Virtual de Espera	8
2.2 O Sistema $M/G/1 + G$	13
2.2.1 Densidade do Tempo Virtual de Espera	14
2.2.2 Relação entre tempos de espera Virtual e Real	18
2.2.3 A Probabilidade de Abandono	20
3 O Sistema $M/M/n + G$	23
3.1 Resultados de Baccelli e Hebuterne	23
3.2 Resultados de Brandt e Brandt	27
3.3 Resultados de Mandelbaum e Zeltyn	29
4 Relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ na fila $M/M/n + G$	33

4.1 Resultados Descritivos	33
4.2 Resultados Descritivos para Distribuição de Paciência do tipo Mista	36
4.2.1 Distribuição de Paciência Exponencial Mista	37
4.2.2 Distribuição de Paciência Uniforme Mista	41
5 Simulação	47
5.1 Descrição do Modelo de Simulação	47
5.2 Validação do Modelo de Simulação	48
5.3 Alteração na Distribuição do Atendimento	55
6 Conclusão e Pesquisas Futuras	79
A Algoritmo para construir a curva $E(W) \times P(Ab)$	81
B Algoritmo no software ARENA	85
Referências Bibliográficas	99

List of Symbols

n	Número de servidores.
r	Número de lugares na sala de espera.
ρ	Intensidade de tráfego.
L	Comprimento da fila.
$A(\cdot)$	Função distribuição dos tempos entre chegadas.
T	Variável aleatória dos tempos entre chegadas.
λ	Taxa de chegada de clientes no sistema.
t_n	tempo de chegada do n -ésimo cliente.
S	Variável aleatória dos tempos de atendimento.
$B(\cdot)$	Função distribuição do tempo de atendimento.
μ	Taxa de atendimento.
s_n	tempo de atendimento do n -ésimo cliente.
g_n	tempo de paciência do n -ésimo cliente.
R	Variável aleatória do tempo de paciência.
\bar{R}	média de R .
$G(\cdot)$	Função distribuição dos tempos de paciência.
$g(\cdot)$	Função densidade dos tempos de paciência.
$\bar{G}(\cdot)$	Função sobrevivência do tempo de paciência.
$\frac{1}{\theta}$	Taxa individual de abandono.
U	Variável aleatória do tempo virtual de espera na fila.
$V(\cdot)$	Função distribuição do tempo virtual de espera.
$v(\cdot)$	Função densidade do tempo virtual de espera.
W	Variável aleatória do tempo real de espera $\min(U, R)$.
w_n	tempo real de espera do n -ésimo cliente.
$E(W)$	Tempo médio de espera na fila inclusive dos clientes que abandonam.
$P(Ab)$	Probabilidade de Abandono.
$\delta_{\Delta t}$	Número de clientes que chegam no intervalo $(t, t + \Delta t]$.

Listas de Figuras

1.1	Central de Atendimento vista como um Modelo de Filas.	2
2.1	Tempo Virtual de Espera na fila.	8
4.1	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Exponencial, Uniforme e Hiper-exponencial.	34
4.2	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Exponencial, Uniforme e Hiper-exponencial. Caso de pequenas taxas de chegada.	35
4.3	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Determinística e Mistura de Determinísticas.	36
4.4	Funções de Distribuição de Paciência Exponencial e Exponencial Mista.	38
4.5	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial.	39
4.6	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial - pequenas taxas de chegada.	39
4.7	Gráfico de $\lambda \times E(W)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial.	40
4.8	Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial.	41
4.9	Funções de Distribuição de Paciência Uniforme e Uniforme Mista.	42
4.10	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme.	43
4.11	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme - pequenas taxas de chegada.	43
4.12	Gráfico de $\lambda \times E(W)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme.	44
4.13	Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme.	45
5.1	Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparação com simulação - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial.	49

5.2 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparação com simulação - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme.	50
5.3 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparação com simulação - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	51
5.4 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparação com simulação - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	51
5.5 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial.	56
5.6 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal; Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	59
5.7 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	62
5.8 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	63
5.9 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	63
5.10 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	64
5.11 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	65
5.12 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	65
5.13 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	66
5.14 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	67
5.15 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	67
5.16 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Gama, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	68
5.17 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Gama, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	69
5.18 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Gama, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	69
5.19 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	70

5.20 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	71
5.21 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	71
5.22 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	72
5.23 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	72
5.24 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	73
5.25 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	74
5.26 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	74
5.27 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	75
5.28 Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Erlang, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	76
5.29 Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Erlang, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	76
5.30 Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Erlang, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	77

Lista de Tabelas

5.1	IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial	52
5.2	IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme	53
5.3	IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	54
5.4	IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.	55
5.5	Tempos médios de espera na fila - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial	57
5.6	Probabilidades de abandono - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial.	58
5.7	Tempos médios de espera na fila - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	60
5.8	Probabilidades de abandono - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial Mista do Caso 3.	61

Capítulo 1

Introdução

Durante as duas últimas décadas, houve um grande crescimento tanto no número de empresas que fornecem serviço via telefone, como na variedade dos serviços oferecidos. No final dos anos 80, as filiais de multinacionais, cartões de crédito, editoras e as operadoras de telefonia incentivaram o uso desse tipo de serviço. No início dos anos 2000 foi a vez da *Internet* se associar a eles, permitindo às empresas, a comunicação com os clientes por diversos canais, os *Contact Centers*, também conhecidos como Centrais de Relacionamento, cujo objetivo é cativar e fidelizar clientes. Segundo a Associação Brasileira de Telesserviços (ABT) é surpreendente o crescimento do *telemarketing* no Brasil. O setor cresceu em 2008, 10% com relação ao ano anterior. O número de empregos diretos em 2008 foi de 850000 e deve alcançar 900000 até o final de 2009, além de ser o maior gerador de primeiro emprego no país com 45% deles ocupados por jovens. Segundo a ABT, o investimento das empresas de *Call Center* foi maior recentemente pois precisaram se adaptar às novas regras criadas pelo governo através do Decreto 6523/2008 que regulamentou a Lei 8078/1990, fixando normas gerais sobre o Serviço de Atendimento ao Consumidor (SAC).

Uma Central de Atendimento, também conhecida por *Call Center*, é composta por estruturas físicas e de pessoal, que têm por objetivo administrar ligações telefônicas, distribuindo-as automaticamente aos servidores e possibilitando o atendimento aos usuários finais. Entre outras, a função de um *Call Center* é resolver demandas dos consumidores sobre informação, dúvida, reclamação, suspensão ou cancelamento de contratos e serviços, realização de pesquisas de mercado, vendas e outros serviços por telefone.

A administração de um *Call Center* é complexa dado o grande número de variáveis envolvidas em seu funcionamento, com diversos grupos de agentes com diferentes habilidades e diversas classes de clientes que necessitam atendimento específico. De acordo com tutorial de Gans e outros [8], numa situação ideal, uma Central de Atendimento com centenas de servidores poderia atender milhares de chamadas telefônicas por hora, com nível médio de ocupação de atendentes entre 90% e 95%. Além disso, cerca de metade dos clientes receberia atendimento quase que imediatamente, com tempo de espera medido em segundos e fração de abandono do sistema representando, no máximo, 2% dos clientes. No entanto, é muito difícil encontrar um *Call Center* com funcionamento ideal.

Dimensionar adequadamente a capacidade de uma Central de Atendimento pode proporcionar não apenas um melhor atendimento aos clientes (eficácia) mas também menores custos de operação (eficiência). Para trabalhos relacionados ver Gans e outros [8], Franzese [7] e referências lá indicadas.

Nas Centrais de Atendimento a fila é invisível pois, mesmo que a fila exista fisicamente, o cliente não pode enxergá-la, dificultando sua avaliação da velocidade do atendimento. Uma vez na fila, o cliente pode desistir de aguardar, de acordo com sua paciência. O atendimento pode ser realizado de forma automatizada (com gravações, utilizando as chamadas *VRU*-unidades de resposta por voz), através de atendentes ou um misto deles. O fornecimento do serviço pode ser realizado por um ou mais atendentes. As chamadas podem ser originadas de fora da Central de Atendimento ou de dentro da própria Central. O processo de serviço, assim como o processo de chegada das ligações, pode ser determinístico ou aleatório. Neste trabalho, focamos nas ligações iniciadas de fora para dentro da Central, isto é, ligações de clientes à Central e não exploraremos os modelos *VRU*. Além disso, assumimos que as chegadas já absorvem as novas tentativas ou retorno das ligações, o que é razoável, já que nem sempre este retorno é imediato.

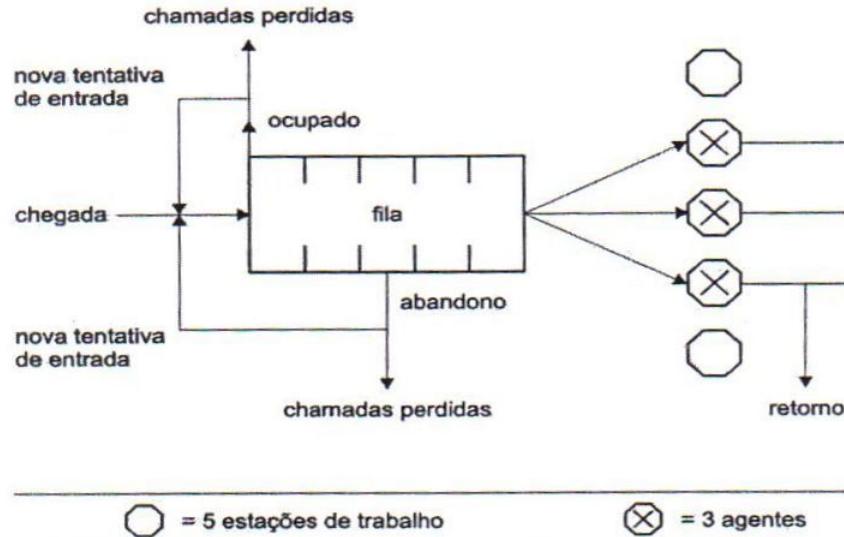


Figura 1.1: Central de Atendimento vista como um Modelo de Filas.

Um *Call Center* pode ser interpretado como um modelo de filas, ver Magalhães [15]. Uma fila é formada sempre que há a impossibilidade do cliente receber um serviço imediatamente e pode ser representada pela Figura 1.1. Descrevemos, em seguida, uma Central de Atendimento em termos de um modelo de filas. Clientes que chegam quando todas as linhas estão ocupadas caracterizam uma chamada perdida, pois encontram sinal de ocupado. Os clientes que não encontram o sinal de ocupado terão sua ligação aceita. Uma chamada aceita será imediatamente enviada para algum atendente livre, se houver algum. Se todos os agentes estiverem ocupados, o cliente é alocado na fila e espera até que um dos atendentes fique livre, seguindo a disciplina *FCFS - First Come First*

Served, ou seja, o atendimento será por ordem de chegada na fila. Se o tempo de espera na fila antes de iniciar o atendimento do cliente ultrapassar sua paciência, ele abandona a fila. Caso contrário, ele aguarda o atendimento. Tanto os clientes que encontram o sinal de ocupado quanto os clientes que abandonam podem retornar as ligações fazendo uma nova tentativa de entrada ou podem desistir do serviço. Além disso, os clientes que forem atendidos podem dar um retorno positivo ou negativo sobre o atendimento. O modelo descrito assume múltiplas habilidades dos agentes, ou seja, eles podem atender vários tipos de clientes, o que é comum em muitos *Call Centers*.

Adotaremos, neste trabalho, a seguinte convenção para descrever as características de uma fila:

$$A/S/m/k + G,$$

sendo,

- A -distribuição dos tempos entre chegadas;
- S -distribuição dos tempos de atendimento;
- m -quantidade de atendentes;
- k -capacidade do sistema;
- G -distribuição dos tempos de paciência.

Os modelos de variáveis aleatórias mais usadas para A , S e G são:

- M -distribuição Exponencial;
- E_k -distribuição Erlang-K;
- LN -distribuição Lognormal;
- D -distribuição Determinística;
- U -distribuição Uniforme;

Quando desejamos considerar uma distribuição geral, sem especificação, usamos a letra G . Quando k é omitido, temos uma fila com capacidade infinita, ou seja, há linhas suficientes para não permitir o sinal de ocupado, o que tem se tornado comum devido a popularização das linhas telefônicas.

1.1 Considerações Preliminares

O modelo predominante na análise do desempenho de *Call Centers* é o $M/M/n$, também chamado de Erlang-C. O modelo assume que as chegadas seguem um processo de Poisson com taxa λ , os tempos de atendimento são independentes e identicamente distribuídos com função Exponencial de taxa μ e há n atendentes. Em aplicações, o estudo de modelos de filas tem como objetivo a melhoria do desempenho do sistema. Segundo Mandelbaum e Zeltyn [18], o modelo Erlang-C é deficiente para descrever um *Call Center* principalmente devido ao fato deste modelo não considerar a paciência do cliente enquanto espera, o que poderia culminar em abandono do sistema por parte do cliente.

O modelo de fila com abandono mais simples é o $M/M/n+M$, também chamado de Erlang-A. Em Garnett e outros [9] esse modelo foi estudado e observou-se que ele fornece boas aproximações para as medidas de desempenho analisadas. Este modelo é similar ao modelo Erlang-C, porém ele considera que os clientes que chegam no sistema são impacientes, com tempos de paciência seguindo uma distribuição Exponencial (de média θ^{-1}). No entanto, segundo Brown e outros [5] a distribuição do tempo de paciência pode estar longe de ser Exponencial. Por esse motivo, Mandelbaum e Zeltyn [18] acreditam que um bom modelo seria a fila $M/M/n + G$, em que os tempos de paciência seguem uma distribuição qualquer.

Segundo Feinberg e outros [6], o nível de serviço operacional é quantificado em termos de ocupação e medidas de desempenho. Por isso, sugerem o foco em medidas que envolvam abandono, espera e novas tentativas de receber atendimento através da rediscagem.

A probabilidade de abandono é talvez a mais importante medida operacional para o desempenho de um *Call Center*. O abandono de clientes não é ínfimo, nem é um aspecto insignificante para o desempenho do sistema, ver Garnett e outros [9]. Através dele os clientes informam indiretamente se o serviço é digno de espera. Outra medida mais comumente usada é o tempo de espera que, de forma direta, indica o sucesso do atendimento.

Mandelbaum e Zeltyn [18] observaram que, na fila $M/M/n+G$, quando a distribuição da paciência é Exponencial, há uma relação linear exata entre o tempo médio de espera na fila inclusive dos que abandonam ($E(W)$) e a probabilidade de abandono ($P(Ab)$). A prova é baseada na equação de balanço, relativa à taxa de abandono em regime estacionário:

$$\theta E(L) = \lambda P(Ab),$$

em que L é o comprimento da fila, θ é a taxa individual de abandono e λ é a taxa de chegada.

Usando a fórmula de Little, segue:

$$\theta\lambda E(W) = \lambda P(AB).$$

$$\theta E(W) = P(AB). \quad (1.1)$$

Além disso, no mesmo artigo, os autores perceberam que para distribuições de paciência Uniforme e Hiperexponencial há uma relação muito próxima da linearidade entre essas medidas para taxas não tão altas de abandono (menos que 30%). Por outro lado, a distribuição de paciência Determinística implica numa relação estritamente não-linear.

Utilizamos uma variável aleatória para a paciência do tipo mista, com parte discreta e parte contínua, buscando representar a reação dos usuários a mensagens eletrônicas. Freqüentemente, quando espera-se por atendimento num *Call Center*, de tempos em tempos, uma gravação informa que os atendentes estão todos ocupados e pede que o cliente aguarde mais alguns instantes para ser atendido. Acreditamos que a distribuição de paciência do tipo mista representa as interferências dessas mensagens.

1.2 Objetivos

O objetivo desta dissertação é analisar a relação entre o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono do cliente para distribuições de paciência do tipo mista. Com isso, procuramos avaliar o impacto causado nessa relação por mensagens eletrônicas aos clientes que aguardam atendimento. Além disso, através de simulação, mostramos como diferentes distribuições de atendimento podem causar alterações nas medidas de desempenho. O interesse concentra-se em avaliar os efeitos de diferentes médias e variâncias para a distribuição de atendimento quando a distribuição de paciência é do tipo mista.

1.3 Contribuições

A motivação para este trabalho foi considerar que gravações eletrônicas podem interferir na paciência do cliente enquanto espera atendimento. A maioria dos *Call Centers* utiliza-se desse recurso, e acreditamos que, se agregarmos esse fato à modelagem da fila, estaremos mais próximos do que acontece na prática. Além disso, uma demanda crescente na sociedade é que os *Call Centers* realizem um serviço que envolva qualidade e eficiência, desse modo, acreditamos que o modelo estudado possa ajudar no entendimento da operacionalidade do sistema.

1.4 Organização do Trabalho

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta uma breve introdução sobre Centrais de Atendimento e descreve o problema de interesse, assim como os objetivos do trabalho e as contribuições. O Capítulo 2 descreve o modelo de fila $M/G/1$ e variantes em que o foco está no tempo virtual de espera do cliente na fila. No Capítulo 3 são apresentados alguns resultados que nos auxiliam no estudo da relação existente entre $E(W)$ e $P(Ab)$. No Capítulo 4 é apresentado o modelo $M/M/n + G$ com distribuição de paciência G do tipo mista. O Capítulo 5 traz simulações do modelo $M/G/n + G$ em que o atendimento segue uma distribuição qualquer e a paciência é do tipo mista. No Capítulo 6 encontra-se a conclusão do trabalho.

Capítulo 2

O sistema $M/G/1$ e variantes

Para modelos tratados neste capítulo, os tempos de atendimento não são exponencialmente distribuídos. A apresentação segue as linhas desenvolvidas no artigo Baccelli e Hebuterne [2], e descreve alguns resultados para as filas $M/G/1$ e $M/G/1 + G$.

2.1 O sistema $M/G/1$

A fila $M/G/1$ é um sistema composto de um único servidor com chegadas seguindo um processo de Poisson homogêneo com taxa λ . Os clientes chegam nos instantes $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, e os tempos entre chegadas são denotados por $T_n = t_{n+1} - t_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$; $t_0 = 0$. Esses tempos são variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuídas com função distribuição $A(x) = P(T_n \leq x)$, $n = 0, 1, \dots$ tal que:

$$A(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A disciplina de atendimento é FCFS. Assim, se o cliente chega num instante em que o servidor está livre, seu atendimento começa imediatamente. Por outro lado, se o servidor estiver ocupado, então seu atendimento começa imediatamente após a saída do cliente que o antecedeu na chegada.

A duração dos tempos de atendimento sucessivos $\{s_n, n \in N\}$ são variáveis aleatórias positivas independentes e identicamente distribuídas com função distribuição denotada por $B(x)$. Além disso, esses tempos são independentes dos tempos de chegadas.

A média do tempo de serviço é denotada por $\frac{1}{\mu}$ tal que:

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty x dB(x),$$

a qual assumimos ser finita.

A intensidade de tráfego será $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, em que $0 < \rho < \infty$.

2.1.1 Distribuição do Tempo Virtual de Espera

Uma forma simples de modelar o abandono pode ser feita da seguinte maneira: o cliente que chega no sistema encontra um tempo oferecido de espera, que é definido como o tempo que o cliente deveria esperar se sua paciência fosse infinita. Se o tempo oferecido de espera exceder o tempo de paciência desse cliente, então ele abandona, caso contrário o cliente aguarda atendimento. Chamamos o tempo oferecido de espera de *tempo virtual de espera*.

O tempo virtual de espera, denotado por $U(t)$, é o tempo que um determinado cliente chegando num instante t deveria esperar (se sua paciência fosse infinita) até entrar em atendimento. Derivaremos sua função distribuição de probabilidade.

Considere $U(0)$ o tempo de ocupação inicial do servidor, ou seja, se $U(0) = 0$, o servidor está livre no instante $t = 0$. Se $U(0) \neq 0$, então $U(0)$ fornece o instante quando o servidor deixa de estar ocupado pela primeira vez, se nenhum novo cliente juntar-se à fila.

Quando $t > 0$, $U(t)$ decresce linearmente com coeficiente angular igual a -1 . O valor de $U(t)$ decresce com esta inclinação até que um novo cliente chegue e, nesse instante, $U(t)$ aumenta do tempo de atendimento desse cliente. Assim, nos instantes t_n , o valor de $U(t)$ aumenta s_n , $n \in N$. Depois disso, $U(t)$ decresce continuamente com a mesma inclinação até o próximo cliente chegar e assim por diante. Se num determinado instante t , $U(t) = 0$, ele permanecerá em 0 até que um novo cliente chegue. Digamos que isso ocorra em $t + v$, então, $U(t + v) = s$, em que s é o tempo de serviço desse cliente que chegou.

O comportamento do tempo virtual é ilustrado na Figura 2.1.

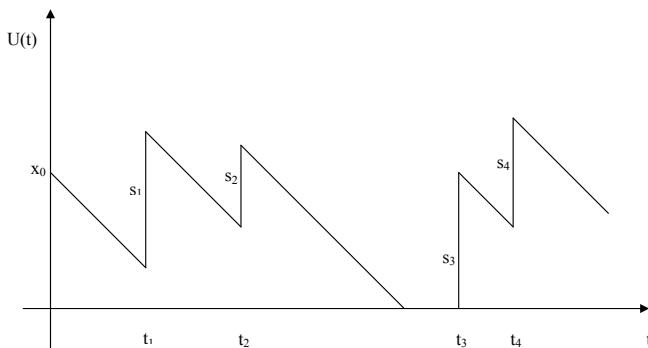


Figura 2.1: Tempo Virtual de Espera na fila.

Claramente os t_n são pontos de descontinuidade para $U(t)$; nestes pontos assumimos que $U(t)$ é contínuo a direita, $U(t) = U(t_n^+)$. Para $t_n \leq t < t_{n+1}$, temos:

$$U(t) = \begin{cases} U(t_n) - (t - t_n), & \text{se } U(t_n) > t - t_n; \\ 0, & \text{se } U(t_n) \leq t - t_n. \end{cases}$$

e

$$U(t_{n+1}) = U(t_{n+1}^-) + s_{n+1}.$$

O processo $\{U(t); 0 \leq t < \infty\}$ é um processo de Markov com parâmetro e espaço de estados contínuos.

A função distribuição de $U(t)$ é dada por:

$$V(x_0; t, x) = P(U(t) \leq x | U(0) = x_0), \quad t > 0 \quad \text{e} \quad x_0 \geq 0;$$

e

$$V(x_0; 0, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_0; \\ 1, & \text{se } x \geq x_0. \end{cases}$$

Em particular $V(x_0; t, 0)$ é a probabilidade do sistema estar vazio no tempo t . Por conveniência adotaremos $V(x_0; t, x) = V(t, x)$, desconsiderando o resíduo no instante zero.

Teorema 2.1.1 *O processo $U(t)$ satisfaz a seguinte relação:*

$$V(t + \Delta t, x) = (1 - \lambda \Delta t)V(t, x + \Delta t) + \lambda \Delta t \int_0^{x+\Delta t} V(t, x + \Delta t - y) dB(y) + o(\Delta t). \quad (2.1)$$

Demonstração:

Seja $\delta_{\Delta t}$ o número de clientes que chegam no intervalo $(t, t + \Delta t]$ de comprimento Δt , então:

- $P(\delta_{\Delta t} = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t);$
- $P(\delta_{\Delta t} = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t);$
- $P(\delta_{\Delta t} > 1) = o(\Delta t).$

Considerando $U(t)$ sobre os consecutivos intervalos $(0, t]$ e $(t, t + \Delta t]$, o evento $[U(t + \Delta t) \leq x]$ pode ocorrer de várias maneiras, mutuamente exclusivas, de acordo com o número de chegadas no intervalo $(t, t + \Delta t]$. Vamos analisar cada caso separadamente:

Caso 1 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ nenhum usuário chega e $U(t) \leq x + \Delta t$ quando $U(t) > \Delta t$. Isso ocorre com probabilidade:

$$(1 - \lambda\Delta t)V(t, x + \Delta t) + o(\Delta t).$$

Note que, sob a condição $\delta_{\Delta t} = 0$, temos:

$$U(t + \Delta t) = \begin{cases} U(t) - \Delta t, & \text{se } U(t) > \Delta t; \\ 0, & \text{se } U(t) \leq \Delta t. \end{cases}$$

Assim, quando $U(t) > \Delta t$: $U(t + \Delta t) \leq x \Leftrightarrow U(t) - \Delta t \leq x \Leftrightarrow U(t) \leq x + \Delta t$, ou seja, a probabilidade do evento $U(t + \Delta t) \leq x$, dado que no intervalo $(t, t + \Delta t]$ não chegou nenhum usuário, é:

$$(1 - \lambda\Delta t)V(t, x + \Delta t) + o(\Delta t).$$

Caso 2 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ um usuário chega e seu serviço é menor que $x - U(t) + \Delta t$ quando $U(t) > \Delta t$ ou menor que $x - U(t) + \theta_t \Delta t$ quando $U(t) \leq \Delta t$. Isso ocorre com probabilidade:

$$\lambda\Delta t \int_0^x V(t, x + \Delta t - y) dB(y) + o(\Delta t).$$

Neste caso, $\delta_{\Delta t} = 1$, então:

$$U(t + \Delta t) = \begin{cases} U(t) - \Delta t + S, & \text{se } U(t) > \Delta t; \\ U(t) - \theta_t \Delta t + S, & \text{se } U(t) \leq \Delta t, \end{cases}$$

em que $\theta_t \Delta t$ é uma fração de Δt , em que $0 \leq \theta_t \leq 1$.

Assim, quando $U(t) > \Delta t$: $U(t + \Delta t) \leq x \Leftrightarrow U(t) + S \leq x + \Delta t$, ou seja, a probabilidade do evento $U(t + \Delta t) \leq x$, dado que no intervalo $(t, t + \Delta t]$ um usuário chega, é:

$$(\lambda\Delta t + o(\Delta t))P(U(t) + S \leq x + \Delta t | \delta_{\Delta t} = 1, U(t) > \Delta t).$$

Como S e U são variáveis aleatórias positivas com função distribuição $B(\cdot)$ e $V(x, t)$ respectivamente, então, a probabilidade dessa ocorrência é:

$$\lambda\Delta t \int_0^{x+\Delta t} V(t, x + \Delta t - y) dB(y) + o(\Delta t).$$

Caso 3 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ chegam mais de um usuários. Isso ocorre com probabilidade $o(\Delta t)$, pois sob a condição $\delta_{\Delta t} > 1$, temos que $P(\delta_{\Delta t} > 1) = o(\Delta t)$. Logo, a probabilidade do evento $U(t + \Delta t) \leq x$, dado que no intervalo $(t, t + \Delta t]$ mais de um usuário chegam, é $o(\Delta t)$.

Com a aplicação do Teorema da Probabilidade Total a expressão (2.1) é válida e completamos a prova do Teorema 2.1.1.

■

A partir de (2.1), obtém-se uma equação íntegro-diferencial conhecida como equação de Takács. Ela será utilizada para obtermos a função distribuição do tempo virtual de espera na fila M/G/1, que é o objetivo desta subseção.

Da definição de derivada, temos:

$$\frac{V(t, x + \Delta t) - V(t, x)}{\Delta t} = d_x V(t, x) + o(\Delta t);$$

para quase todo $x \geq 0$, então:

$$V(t, x + \Delta t) = V(t, x) + d_x V(t, x) \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) no primeiro termo do lado direito da equação (2.1), ficamos com:

$$V(t + \Delta t, x) = (1 - \lambda \Delta t) [V(t, x) + d_x V(t, x) \Delta t] + \lambda \Delta t \int_0^{x+\Delta t} V(t, x + \Delta t - y) dB(y) + o(\Delta t).$$

Então:

$$V(t + \Delta t, x) = V(t, x) + d_x V(t, x) \Delta t - \lambda \Delta t V(t, x) - \lambda \Delta t^2 d_x V(t, x) + \lambda \Delta t \int_0^{x+\Delta t} V(t, x + \Delta t - y) dB(y) + o(\Delta t).$$

Subtraindo $V(t, x)$ nos dois membros da igualdade acima, dividindo por Δt e fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, ficamos com:

$$d_t V(t, x) = d_x V(t, x) - \lambda V(t, x) + \lambda \int_0^x V(t, x - y) dB(y);$$

que podemos reescrever como:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -\lambda V(t, x) + \lambda \int_0^x V(t, x - y) dB(y). \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é conhecida como equação íntegro-diferencial de Takács e é válida para quase todo $x \geq 0$ e $t \geq 0$. A equação não é verificada para x e t em que $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ tem um acúmulo de probabilidade, denominado impulso. Isso ocorre, em particular, quando $x = 0$.

A equação de Takács é resolvida com o auxílio da técnica de transformada. A transformada de Laplace-Stieltjes (TLS) de $V(t, x)$ é dada por:

$$V^*(t, s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-sx} dV(t, x), \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0, \quad s \in C \quad e \quad t \in R^+.$$

Com o auxílio de uma relação existente entre a Transformada de Laplace (TL) e a Transformada de Laplace-Stieltjes (TLS), ver Kleinrock [14], temos que a TL de $V(t, x)$ é igual a:

$$\frac{V^*(t, s) + V(t, 0^-)}{s}.$$

Similarmente, a TL de $B(x)$ é:

$$\frac{B^*(s) + B(0^-)}{s}.$$

em que $B^*(s)$ é a TLS de $B(x)$.

Como S e U são variáveis aleatórias não negativas, temos que $B(0^-) = V(t, 0^-) = 0$. Já o último termo da equação (2.3) é a convolução entre $B(x)$ e $V(t, x)$ e, de acordo com as propriedades da TL, é dada por:

$$\frac{\lambda V^*(t, s) B^*(s)}{s}.$$

A TL de $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ é $V^*(t, s)$. Mas essa transformação inclui $V(t, 0^+)$, a transformação do impulso localizado na origem dessa derivada parcial. Por isso, devemos subtraí-lo, já que a equação (2.3) não é verificada para $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ quando $x = 0$.

Assim, a expressão (2.3) com o uso de transformadas, será:

$$\left(\frac{1}{s}\right) \frac{\partial V^*(t, s)}{\partial t} = [V^*(t, s) - V(t, 0^+)] - \lambda \left[\frac{1 - B^*(s)}{s}\right] V^*(t, s). \quad (2.4)$$

A solução dessa equação está em Takács [19].

Estamos interessados em investigar a função (2.4) em regime estacionário. Assumindo que o limite de $V(t, x)$ existe quando $t \rightarrow \infty$ e $\rho < 1$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x) = V(x);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V^*(t, s) = V^*(s).$$

Logo, da equação (2.4), temos:

$$V^*(s) = V(0^+) + \lambda \left[\frac{1 - B^*(s)}{s}\right] V^*(s), \quad (2.5)$$

em que $V(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, 0^+)$. Como $V(0^+)$ é a probabilidade do sistema estar vazio numa chegada, temos que $V(0^+) = 1 - \rho$ e, então, obtemos a chamada equação transformada de Pollaczek-Khinchin (ver [10]) para o tempo virtual de espera:

$$V^*(s) = \frac{s(1 - \rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}.$$

Expandindo o lado direito como série geométrica¹, temos:

$$V^*(s) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda}{s} [1 - B^*(s)] \right\}^n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\rho \mu}{s} [1 - B^*(s)] \right\}^n.$$

No entanto,

$$\frac{\mu [1 - B^*(s)]}{s}$$

é a TLS de

$$Y(x) = \mu \int_0^x [1 - B(y)] dy.$$

Podemos dizer que $Y(x)$ é a função distribuição do tempo de serviço restante do cliente que está sendo atendido no instante em que um novo cliente chega e, portanto:

$$V^*(s) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} [\rho Y^*(s)]^n.$$

Esta expressão fornece, depois de inverter termo a termo utilizando a propriedade de convolução, a função distribuição do tempo virtual de espera na fila M/G/1:

$$V(x) = \begin{cases} (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y^n(x), & \text{se } \rho < 1; \\ 0, & \text{se } \rho \geq 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2 O Sistema $M/G/1 + G$

O modelo $M/G/1 + G$ é similar ao modelo $M/G/1$ porém, assumimos que os clientes que chegam no sistema são impacientes. Denotamos por g_n e w_n o tempo de paciência e o tempo real de espera do n -ésimo cliente, respectivamente.

Em Baccelli e Hebuterne [2] o n -ésimo cliente entra no sistema se e somente se o tempo real de espera para acessar o servidor não exceder sua paciência, ou seja:

¹Note que $\frac{\lambda}{s} [1 - B^*(s)] < 1$, pois para $\rho < 1$, temos que $1 - B^*(s) = 1 - \int_0^\infty e^{-st} dB(t) \leq 1 - \int_0^\infty (1 - st) dB(t) = s/\mu = sp/\lambda < s/\lambda$.

Se $g_n \leq w_n$, o n -ésimo cliente é impaciente e não entra no sistema;

Se $g_n > w_n$, o n -ésimo cliente permanece na fila.

As seqüências $\{g_n, n \in N\}$ e $\{w_n, n \in N\}$ são seqüências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição $G(\cdot)$ e $W(\cdot)$, respectivamente.

Consideramos que $G(0) = 0$ e $\bar{G}(x) = P(R > x) = 1 - G(x)$ é a função sobrevivência da paciência.

2.2.1 Densidade do Tempo Virtual de Espera

Analogamente à fila $M/G/1$, em Baccelli e Hebuterne [2] há uma generalização da equação de Takács para o modelo $M/G/1+G$. Seguiremos a mesma notação anterior, isto é, $U(t)$ indica o tempo virtual de espera e V sua função de distribuição.

Teorema 2.2.1 *O processo $U(t)$ satisfaz a seguinte relação no sistema $M/G/1+G$:*

$$V(t + \Delta t, x) = V(t, x + \Delta t) - \lambda \Delta t \int_0^{x+\Delta t} [1 - B(x + \Delta t - u)] \bar{G}(u) dV(t, u) + o(\Delta t). \quad (2.7)$$

Demonstração:

Temos que, após condicionamento,

$$V(t + \Delta t, x) = P(U(t + \Delta t) \leq x) = \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u) dV(t, u).$$

Considerando $U(t)$ sobre os consecutivos intervalos $(0, t]$ e $(t, t + \Delta t]$, o evento $[U(t + \Delta t) \leq x]$ pode ocorrer das seguintes maneiras, mutuamente exclusivas, de acordo com o número de chegadas no intervalo $(t, t + \Delta t]$: nenhum usuário chega no sistema, um usuário chega e não abandona, um usuário chega e abandona ou chegam mais de um usuário nesse intervalo de tempo. Vamos analisar cada caso separadamente:

Caso 1 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ nenhum usuário chega e $U(t) \leq x + \Delta t$ quando $U(t) > \Delta t$. Isso ocorre com probabilidade:

$$(1 - \lambda \Delta t) V(t, x + \Delta t) + o(\Delta t).$$

Sob a condição $\delta_{\Delta t} = 0$, temos:

$$U(t + \Delta t) = \begin{cases} U(t) - \Delta t, & \text{se } U(t) > \Delta t; \\ 0, & \text{se } U(t) \leq \Delta t. \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 0) P(\delta_{\Delta t} = 0 | U(t) = u) dV(t, u) \\
&= (1 - \lambda \Delta t) \int_0^\infty 1_{\{u - \Delta t \leq x\}} dV(t, u) + o(\Delta t) \\
&= (1 - \lambda \Delta t) \int_0^{x + \Delta t} dV(t, u) + o(\Delta t) \\
&= (1 - \lambda \Delta t) V(t, x + \Delta t) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Caso 2 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ um usuário chega, permanece na fila sem abandonar e seu serviço é menor que $x - U(t) + \Delta t$ quando $U(t) > \Delta t$ ou menor que $x - U(t) + \theta_t \Delta t$ quando $U(t) \leq \Delta t$. Isso ocorre com probabilidade:

$$\lambda \Delta t \int_0^{x + \Delta t} B(x + \Delta t - u) \bar{G}(u) dV(t, u) + o(\Delta t).$$

Note que, sob a condição $\delta_{\Delta t} = 1$ e o cliente não abandonar, temos:

$$U(t + \Delta t) = \begin{cases} U(t) - \Delta t + S, & \text{se } U(t) > \Delta t; \\ U(t) - \theta_t \Delta t + S, & \text{se } U(t) \leq \Delta t. \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 1) P(\delta_{\Delta t} = 1 | U(t) = u) dV(t, u) = \\
& \lambda \Delta t \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 1, R > U(t*)) P(R > U(t*) | \delta_{\Delta t} = 1, U(t) = u) dV(t, u) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Considerando $t*$ o instante da chegada do cliente e assumindo que $t* \approx t$, temos que a probabilidade dessa ocorrência será igual a:

$$\begin{aligned}
& \lambda \Delta t \int_0^\infty 1_{\{u - \Delta t \leq x\}} P(S \leq x + \Delta t - u) P(R > u | \delta_{\Delta t} = 1, U(t) = u) dV(t, u) + o(\Delta t) = \\
& \lambda \Delta t \int_0^{x + \Delta t} B(x + \Delta t - u) \bar{G}(u) dV(t, u) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Caso 3 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ um usuário chega, mas não permanece na fila devido a sua impaciência e $U(t) \leq x + \Delta t$ quando $V(t) > \Delta t$. Isso ocorre com probabilidade:

$$\lambda \Delta t \int_0^{x + \Delta t} (1 - \bar{G}(u)) dV(t, u) + o(\Delta t).$$

Sob a condição $\delta_{\Delta t} = 1$ e o cliente abandonar, temos:

$$\int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 1) P(\delta_{\Delta t} = 1 | U(t) = u) dV(t, u) =$$

$$\lambda \Delta t \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 1, R \leq U(t*)) P(R \leq U(t*) | \delta_{\Delta t} = 1, U(t) = u) dV(t, u) + o(\Delta t).$$

Novamente considerando $t* \approx t$, temos que a probabilidade dessa ocorrência será igual a:

$$\lambda \Delta t \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 1, R \leq u) P(R \leq u | \delta_{\Delta t} = 1, U(t) = u) dV(t, u) + o(\Delta t) =$$

$$\lambda \Delta t \int_0^\infty P(U(t + \Delta t) \leq x | U(t) = u, \delta_{\Delta t} = 1, R \leq u) (1 - \bar{G}(u)) dV(t, u) + o(\Delta t).$$

Note que o cliente que chegou no sistema e abandonou a fila imediatamente é equivalente à situação de nenhum usuário chegar. Assim, temos:

$$\lambda \Delta t \int_0^\infty 1_{\{u - \Delta t \leq x\}} (1 - \bar{G}(u)) dV(t, u) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t \int_0^{x + \Delta t} [1 - \bar{G}(u)] dV(t, u) + o(\Delta t).$$

Caso 4 - No intervalo $(t, t + \Delta t]$ chegam mais de um usuários. Isso ocorre com probabilidade $o(\Delta t)$, pois sob a condição $\delta_{\Delta t} > 1$, temos que $P(\delta_{\Delta t} > 1) = o(\Delta t)$. Logo, a probabilidade do evento $U(t + \Delta t) \leq x$, dado que no intervalo $(t, t + \Delta t]$ mais de um usuário chega, é $o(\Delta t)$.

Com a aplicação do Teorema da Probabilidade Total e após algumas simplificações, temos que a expressão (2.7) é válida e provamos o Teorema 2.2.1.

■

De acordo com o Teorema 2.2.1 e com a definição de derivada, conseguimos obter a equação de Takács para a fila $M/G/1 + G$.

Substituindo $V(t, x + \Delta t)$ por $V(t, x) + d_x V(t, x) \Delta t + o(\Delta t)$ no primeiro termo do lado direito da equação (2.7), temos:

$$V(t + \Delta t, x) = V(t, x) + d_x V(t, x) \Delta t - \lambda \Delta t \int_0^{x + \Delta t} [1 - B(x + \Delta t - u)] \bar{G}(u) dV(t, u) + o(\Delta t).$$

Subtraindo $V(t, x)$, dividindo por Δt e fazendo $\Delta t \rightarrow 0$ nos dois lados da igualdade acima obtemos a generalização da equação íntegro-diferencial de Takács para o tempo virtual de espera, que é dada por:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \lambda \int_0^x [1 - B(x - u)] \bar{G}(u) dV(t, u). \quad (2.8)$$

Através da equação de Takács e com o uso de transformadas conseguimos encontrar a equação funcional para a função de distribuição de probabilidade do tempo virtual de espera na fila $M/G/1 + G$.

Considerando $V_{\bar{G}}^*(t, s)$ a TLS de $\bar{G}(x)V(t, x)$, temos:

$$V_{\bar{G}}^*(t, s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-sx} \bar{G}(x) dV(t, x).$$

Usando a relação

$$V^*(t, s) = s \int_{0^-}^{\infty} e^{-sx} V(t, x) dx,$$

multiplicando a equação (2.8) por e^{-sx} e integrando de $[0, \infty[$, obtemos a transformada da equação de Takács na fila $M/G/1 + G$:

$$\frac{1}{s} \frac{\partial V^*(t, s)}{\partial t} = [V^*(t, s) - V(t, 0)] - \lambda \left[\frac{1 - B^*(s)}{s} \right] V_{\bar{G}}^*(t, s). \quad (2.9)$$

Assumindo a existência dos limites:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, 0) = V(0);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V^*(t, s) = V^*(s);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{\bar{G}}^*(t, s) = V_{\bar{G}}^*(s);$$

e, sob a condição $1 - \rho \bar{G}(\infty) > 0$, obtemos:

$$V^*(s) = V(0) + \lambda \left[\frac{1 - B^*(s)}{s} \right] V_{\bar{G}}^*(s). \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é a transformada da equação de Takács na fila $M/G/1 + G$. Denotando por $V(0)$ a massa na origem e por $v(x)$ a função densidade de probabilidade para o tempo virtual de espera, a equação (2.10) pode ser invertida obtendo:

$$v(x) = \lambda V(0) + \lambda [1 - B(x)] + \lambda \int_0^x v(u) \bar{G}(u) [1 - B(x-u)] du, \quad (2.11)$$

com

$$V(0) + \int_0^{\infty} v(x) dx = 1.$$

2.2.2 Relação entre tempos de espera Virtual e Real

Em Baccelli e Hebuterne [2], encontramos a distribuição do tempo virtual em função do tempo real de espera. A cadeia de Markov de parâmetro discreto e espaço de estados contínuo $\{w_n, n \in N\}$ é imersa no processo Markoviano de parâmetro e espaço de estados contínuos $\{U(t), t \in R^+\}$:

$$w_n = U(t_n^-).$$

Esta propriedade permite estabelecer uma convergência de $U(t)$ como consequência de teoremas limites de processos semi-regenerativos. Assim:

$$\begin{aligned} K_t(x, I) &= P(U(t) \in I, T_1 > t | U(0^+) = x), \quad I \in \mathcal{B}(R^+) \\ &= P(U(t) \in I | T_1 > t, U(0^+) = x)P(T_1 > t | U(0^+) = x) \\ &= 1_{(x-t)^+}(I)[1 - A(t)], \end{aligned}$$

em que $1_u(I) = 1$ se $u \in I$ e $u \in R^+$ e T_1 é o primeiro tempo de parada para U .

Assumindo $V^+(x)$, $x \in R^+$ a função distribuição de $U(t_n^+)$, então:

$$\begin{aligned} V^+(x) &= \int_0^x P(U(t_n^+) \leq u | U(t_n^-) = u) dW(u) \\ &= \int_0^x P(u + S \leq x) \bar{G}(u) dW(u) + \int_0^x (1 - \bar{G}(u)) dW(u) \\ &= \int_0^x B(x-u) \bar{G}(u) dW(u) + \int_0^x (1 - \bar{G}(u)) dW(u) \\ &= \int_0^x [B(x-u) \bar{G}(u) + 1 - \bar{G}(u)] dW(u) \\ &= \int_0^x [1 - \bar{G}(u)(1 - B(x-u))] dW(u). \end{aligned}$$

Utilizando limite de processos semi-regenerativos, ver Cinlar [11], temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(U(t) \in I) = \frac{1}{E(T_1)} \int_0^\infty dV^+(x) \int_0^\infty K_t(x, I) dt = \lambda \int_0^\infty dV^+(x) \int_0^t 1_{(x-y)^+}(I)[1 - A(y)] dy.$$

Ou seja,

$$V(x) = \lambda \int_0^\infty [1 - A(t)] V^+(x+t) dt,$$

e, então:

$$V(x) = \lambda \int_0^\infty [1 - A(t)] \left[W(t+x) - \int_0^{t+x} \bar{G}(u)[1 - B(x-u+t)]dW(u) \right] dt. \quad (2.12)$$

Como as chegadas seguem um processo de Poisson, temos que $[1 - A(t)] = e^{-\lambda t}$. Logo a equação acima pode ser escrita como segue:

$$V(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left[W(t+x) - \int_0^{t+x} \bar{G}(u)[1 - B(x-u+t)]dW(u) \right]. \quad (2.13)$$

Assim, obtemos a função de distribuição do tempo virtual de espera em função do tempo real de espera.

Agora, apresentaremos outro resultado encontrado em [2] e [1], referente a uma equação recursiva para a seqüência $\{w_n, n \in N\}$ de tempos reais de espera na fila $M/G/1+G$. Seja $w_0 \in R^+$ a condição inicial, para $n \geq 0$ temos:

$$w_{n+1} = [w_n + s_n - t_{n+1}]^+, \quad \text{se } g_n > w_n;$$

$$w_{n+1} = [w_n - t_{n+1}]^+, \quad \text{se } g_n \leq w_n.$$

Assumindo que $\{w_n, n \in N\}$ é uma Cadeia de Markov com espaço de estados R^+ e núcleo de transição dado por:

$$P(x, I) = P(w_{n+1} \in I | w_n = x), \quad x \in R^+ \quad \text{e} \quad I \in \mathcal{B}(R^+)$$

$$P(x, I) = P(R > x) \int_{R^+} \int_{R^+} 1_{x+y-z}^+(I) dB(y) dA(z) + P(R \leq x) \int_{R^+} 1_{x-z}^+(I) dA(z),$$

em que $1_u(I) = 1$ se $u \in I$.

Seja $W(x)$, $x \in R^+$ a função distribuição de w_n , isto é:

$$P(w_{n+1} \leq x) = \int_0^\infty P(w_{n+1} \leq x | w_n = u) dW(u). \quad (2.14)$$

Então, obtemos a seguinte equação integral:

$$W(x) = \int_0^\infty \bar{G}(u) \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x-u+t} dB(y) dA(t) dW(u) + \int_0^\infty (1 - \bar{G}(u)) \int_{u-x}^\infty dA(t) dW(u); \quad I = [0, u].$$

Portanto,

$$W(x) = \int_0^\infty \bar{G}(u) \int_0^\infty B(x - u + t) dA(t) dW(u) + \int_0^\infty (1 - \bar{G}(u))(1 - A(u - x)) dW(u).$$

Podemos reescrever a segunda parte da integral acima como:

$$W(x) = \int_0^\infty \bar{G}(u) \int_0^\infty B(x - u + t) dA(t) dW(u) + \int_0^\infty \int_0^{t+x} (1 - \bar{G}(u)) dW(u) dA(t).$$

Assim:

$$W(x) = \int_0^\infty \bar{G}(u) \int_0^\infty B(x - u + t) dA(t) dW(u) + \int_0^\infty \left[W(t + x) - \int_0^{t+x} \bar{G}(u) dW(u) \right] dA(t).$$

Finalmente, obtemos:

$$W(x) = \int_0^\infty dA(t) \left[W(t + x) - \int_0^{t+x} \bar{G}(u)[1 - B(x - u + t)] dW(u) \right]. \quad (2.15)$$

Além disso, temos que $dA(t) = \lambda e^{-\lambda t} dt$, portanto a equação acima fica:

$$W(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left[W(t + x) - \int_0^{t+x} \bar{G}(u)[1 - B(x - u + t)] dW(u) \right]. \quad (2.16)$$

Note que as funções estacionárias de w_n e $U(t)$, W e V respectivamente, coincidem na fila $M/G/1 + G$. Basta verificarmos as igualdades das equações (2.13) e (2.16).

2.2.3 A Probabilidade de Abandono

A probabilidade de abandono $P(Ab)$, como dito anteriormente, representa a fração dos clientes que não estão dispostos a esperar pelo serviço e declaram, de modo indireto, que o serviço oferecido não é merecedor de uma espera maior daquela que já realizaram.

Teorema 2.2.2 No modelo $M/G/1 + G$, a probabilidade de abandono satisfaz a seguinte equação:

$$1 - V(0) = \rho[1 - P(Ab)]. \quad (2.17)$$

Demonstração:

Podemos definir $P(Ab)$ como a probabilidade do cliente abandonar o sistema se sua paciência for menor que o tempo virtual de espera.

Assim, temos:

$$P(Ab) = \int_0^\infty [1 - \bar{G}(x)]dV(x). \quad (2.18)$$

Através da equação (2.9):

$$V^*(s) = V(0) + \lambda \frac{[1 - B^*(s)]}{s} V_{\bar{G}(s)}^*,$$

temos que, para $s = 0$, $V^*(0) = 1$, $V_{\bar{G}(0)}^* = \int_{0^-}^\infty \bar{G}(x)dV(x)$ e a fração $\frac{[1 - B^*(s)]}{s}$ é indeterminada. Aplicando L'Hospital, temos:

$$\frac{-\lambda \partial B^*(s)}{\partial s} = -\lambda \int_{0^-}^\infty \frac{\partial e^{-sx}}{\partial s} \bar{G}(x)dV(x) = \lambda \int_{0^-}^\infty x dB(x) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Assim a equação (2.9), para $s = 0$, é igual a:

$$1 = V(0) + \rho \int_{0^-}^\infty \bar{G}(x)dV(x). \quad (2.19)$$

Logo, das equações (2.18) e (2.19), obtemos (2.17).

■

Capítulo 3

O Sistema $M/M/n + G$

O modelo $M/M/n + G$ tem chegadas seguindo um processo de Poisson com taxa λ , atendimento seguindo uma distribuição Exponencial com taxa μ , n atendentes e distribuição geral de paciência G . Considere \bar{G} a função sobrevida do tempo de paciência R . Assumimos que o cliente encontra, em estado estacionário, um tempo virtual de espera na fila U , então o tempo real de espera do cliente na fila é igual a $W = \min(U, R)$.

Iniciamos este capítulo com uma apresentação de alguns resultados teóricos que são relevantes para este trabalho. Começaremos com uma revisão dos resultados obtidos em Baccelli e Hebuterne [2] e Brandt e Brandt [3]. Por fim, descrevemos uma relação de ordem entre algumas medidas de desempenho e alguns resultados de tráfego leve obtidos em Mandelbaum e Zeltyn [18].

3.1 Resultados de Baccelli e Hebuterne

Baccelli e Hebuterne [2] assumem que podemos calcular o tempo virtual de espera U dos clientes que chegam no instante de sua chegada. Se esse tempo exceder seu tempo de paciência, o cliente abandona imediatamente e não se junta à fila.

Seja $\{O(t), U(t), t \in R^+\}$ um processo Markoviano em que $O(t)$ é o número de atendentes ocupados no instante t e $U(t)$ é o tempo virtual de espera do cliente que chegou no instante t . Considere as funções:

$$\begin{cases} v(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(O(t)=n, \frac{x < U(t) < x+\epsilon)}{\epsilon}, & x \geq 0; \\ \pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(O(t) = j, U(t) = 0), & 0 \leq j \leq n-1. \end{cases} \quad (3.1)$$

em que π_j é a distribuição estacionária e $v(x)$ é a função densidade de probabilidade do tempo virtual de espera.

Teorema 3.1.1 A única solução das expressões (3.1), em regime estacionário, é dada por:

$$v(x) = \lambda \pi_{n-1} \exp \left\{ \lambda \int_0^x (\bar{G}(u) - n\mu u) du \right\},$$

e

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{1}{j!} \pi_0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1;$$

em que

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (1 + \lambda J) \right]^{-1}$$

e

$$J = \int_0^\infty \exp \left\{ \lambda \int_0^x \bar{G}(u) du - n\mu x \right\} dx.$$

Demonstração:

A prova do Teorema 3.1.1, segue das equações de balanço. Na ausência de fila, o modelo $M/M/n+G$ se comporta como $M/M/n$, assim as equações de Kolmogorov são dadas por:

$$\lambda \pi_0 = \mu \pi_1 \quad \text{e} \quad (\lambda + \mu_j) \pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu(j+1) \pi_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-2. \quad (3.2)$$

As equações acima podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\lambda \pi_j = \mu(j+1) \pi_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq n-2. \quad (3.3)$$

Para o estado $(n-1)$ com $\epsilon > 0$, note que, para $t > 0$;

$$\begin{aligned} P\{O(t) = n-1\} &= P\{O(t-\epsilon) = n-1\} (1 - (\lambda + \mu(n-1))\epsilon) + \\ &\quad P\{O(t-\epsilon) = n-2\} \lambda \epsilon + P\{O(t-\epsilon) = n, 0 < U(t) \leq \epsilon\} + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Esta última equação e a segunda expressão em (3.1) implicam, em regime estacionário, que:

$$(\lambda + \mu(n-1)) \pi_{n-1} = \lambda \pi_{n-2} + v(0). \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4), temos:

$$\lambda \pi_{n-1} = v(0). \quad (3.5)$$

De (3.3), (3.4) e (3.5) verificamos que

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (1 + \lambda J) \right]^{-1} \quad (3.6)$$

e J é definido por:

$$J = \int_0^\infty \exp \left\{ \lambda \int_0^x \bar{G}(u) du - n\mu x \right\} dx. \quad (3.7)$$

Para determinar π_0 , note que para $x \geq 0$, $t > 0$ e $h > 0$, temos:

$$\begin{aligned} P\{U(t+h) > x\} &= P\{U(t) > x+h\} + P\{U(t+h) > x; U(t) = 0\} \\ &\quad + P\{U(t+h) > x; 0 < U(t) \leq x+h\}. \end{aligned}$$

Em equilíbrio,

$$\int_x^\infty v(y) dy = \int_{x+h}^\infty v(y) dy + \lambda h \exp\{-n\mu x\} \pi_{n-1} + \int_0^x \lambda h \exp\{-n\mu(x-u)\} v(u) \bar{G}(u) du + o(h). \quad (3.8)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.8) corresponde a uma chegada no sistema com $(n-1)$ atendentes ocupados e um atendente livre. Esta chegada aumentará em mais de x o tempo virtual de espera com probabilidade $\exp\{-n\mu x\}$ (se todos os atendentes estivessem ocupados os intervalos de tempo entre términos de atendimento tem distribuição $Exp(n\mu)$). O segundo termo do lado direito descreve uma chegada no sistema com o tempo virtual de espera U . Neste caso o cliente entrará na fila com probabilidade $\bar{G}(u)$.

Derivando a equação (3.8) com relação a h e fazendo $h \rightarrow 0$, obtemos:

$$v(x) = \lambda \pi_{n-1} \exp\{-n\mu x\} + \lambda \int_0^x \bar{G}(u) v(u) \exp\{-n\mu(x-u)\} du, \quad x > 0. \quad (3.9)$$

A função:

$$H(x) = \exp\{n\mu x\} v(x) \quad (3.10)$$

resolve a equação integral

$$H(x) = \lambda \pi_{n-1} + \lambda \int_0^x \bar{G}(u) H(u) du. \quad (3.11)$$

Por outro lado, a solução de (3.11) é igual a:

$$H(x) = \lambda \pi_{n-1} + \exp \left\{ \lambda \int_0^x \bar{G}(u) du \right\}. \quad (3.12)$$

De (3.10) e (3.12), obtemos:

$$v(x) = \lambda \pi_{n-1} \exp \left\{ \lambda \int_0^x (\bar{G}(u) - n\mu x) du \right\}. \quad (3.13)$$

Das condições de normalização, temos:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + P\{U > 0\} = 1, \quad (3.14)$$

e

$$P\{U > 0\} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j = \int_0^\infty v(x)dx = \lambda \pi_{n-1} J, \quad (3.15)$$

em que a equação (3.15) segue de (3.13) e de (3.7).

Finalmente, de (3.14) e (3.15), obtemos (3.6). ■

Outro resultado encontrado em Baccelli e Hebuterne [2] se refere a probabilidade de abandono, ou seja, a probabilidade do cliente abandonar o sistema se sua paciência for menor que o tempo virtual de espera. Temos:

Teorema 3.1.2

$$P(Ab) = \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j\right) + \pi_{n-1}. \quad (3.16)$$

Demonstração:

Podemos definir $P(Ab)$ como:

$$P(Ab) = \int_0^\infty [1 - \bar{G}(x)]v(x)dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} P(Ab) &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{n\mu}{\lambda} + \frac{n\mu}{\lambda} - \bar{G}(x)\right] v(x)dx \\ &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right] v(x)dx + \int_0^\infty \left[\frac{n\mu}{\lambda} - \bar{G}(x)\right] v(x)dx \\ &= \left[1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right] \int_0^\infty v(x)dx + \int_0^\infty \left[\frac{n\mu}{\lambda} - \bar{G}(x)\right] \lambda \pi_{n-1} e^{\lambda \int_0^x \bar{G}(u)du - n\mu x} dx \\ &= \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j\right) + \int_0^\infty [n\mu - \lambda \bar{G}(x)] \pi_{n-1} e^{\lambda \int_0^x \bar{G}(u)du - n\mu x} dx. \end{aligned}$$

E daí segue que:

$$P(Ab) = \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j\right) + \pi_{n-1}. \quad \blacksquare$$

3.2 Resultados de Brandt e Brandt

Apresentaremos uma síntese dos resultados de Brandt e Brandt (ver [3] e [4]), onde foram considerados o sistema $M(k)/M(k)/n + G$, em que as taxas de chegada e de atendimento dependem do número (k) de clientes no sistema. Em Mandelbaum e Zeltyn [18] estes resultados foram adaptados para o sistema $M/M/n + G$ e é o que descreveremos aqui. Diferentemente do que encontra-se em [2], os clientes abandonam no final de seu tempo de paciência.

Assumimos que o sistema é estável. A condição de estabilidade será definida posteriormente em (3.17). Se k clientes estão no sistema, então $l = (k - n)_+ = \max(0, k - n)$ estão esperando na fila para serem atendidos. Os clientes que estão aguardando foram numerados de acordo com sua posição na fila.

Considere:

$N(t)$, número de clientes no sistema no instante t ;

$L(t) = (N(t) - n)_+$, comprimento da fila no instante t ;

$(X_1(t), \dots, X_{L(t)}(t))$, tempo de paciência residual de espera dos clientes ordenados de acordo com sua posição na fila;

$(Z_1(t), \dots, Z_{L(t)}(t))$, tempo de paciência original de espera dos clientes ordenados de acordo com sua posição na fila;

$\pi_k = P(N(t) = k)$, distribuição estacionária do número de clientes no sistema.

$P_k(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l) = P(N(t) = k; X_1(t) \leq x_1, \dots, X_{L(t)}(t) \leq x_l; Z_1(t) \leq z_1, \dots, Z_{L(t)}(t) \leq z_l)$.

Para um fixado $k > n$, o suporte de $P_k(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l)$ está contido em:

$$\Omega_l = \{(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l) \in R_{2l}^+: z_1 - x_1 \geq 0, \dots, z_l - x_l \geq 0\}.$$

A densidade é dada por:

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l) = \frac{\partial^{2l}}{\partial x_1 \dots \partial x_l \partial z_1 \dots \partial z_l} P_k(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l).$$

Resolvendo um sistema de equações integrais para o vetor dos tempos residual e original de espera dos clientes, Brandt e Brandt [3] obtiveram a condição de estabilidade, a distribuição de ocupação e de tempos de espera em regime estacionário e são dados por:

$$\pi_k = \omega \frac{n! \lambda^k \mu^{n-k}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n;$$

$$\pi_k(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l) = I\{(x_1, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l) \in \Omega_l\} \omega \lambda^k \prod_{i=1}^l g(z_i) e^{-n\mu(z_1-x_1)}, \quad k > n. \quad (3.17)$$

Define-se g como sendo a densidade da paciência G .

Ou seja:

$$\begin{aligned}\pi_k &= \omega \frac{n! \lambda^k \mu^{n-k}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n; \\ \pi_k &= \omega \lambda^k F_{k-n}, \quad k > n;\end{aligned}$$

sendo ω a constante de normalização, dada por:

$$\omega^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n! \lambda^k \mu^{n-k}}{k!} + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{n+j} F_j,$$

e F_j são constantes dadas por:

$$F_j = \frac{1}{j!} \int_0^\infty F(\xi)^j e^{-\xi} d\xi, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$F(\xi) = \int_0^{\frac{\xi}{n\mu}} \bar{G}(u) du, \quad \xi \in R^+.$$

Usando a fórmula de Little, o tempo médio de espera na fila $E(W)$ é dado por:

$$E(W) = \frac{\sum_{k=n+l}^{\infty} (k-n)\pi_k}{\lambda}. \quad (3.18)$$

A taxa de abandono α_l dado l clientes na fila, é definida por:

$$\begin{aligned}\alpha_l &= \frac{\sum_{i=1}^l \int_{R_+^{2l-1}} \pi_{n+l}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_l; z_1, \dots, z_l) dx_1, \dots, dx_{i-1}, dx_{i+1}, \dots, dx_l dz_1, \dots, dz_l}{\pi_{n+l}}; \\ \alpha_l &= \frac{F_{l-1}}{F_l} - n\mu.\end{aligned}$$

A probabilidade de abandono é apresentada, alternativamente a (3.16), por:

$$P(Ab) = \frac{\sum_{l=n+1}^{\infty} \alpha_{l-n} \pi_l}{\lambda}. \quad (3.19)$$

As demonstrações são omitidas, mas encontram-se em [3] e [4].

3.3 Resultados de Mandelbaum e Zeltyn

Apresentaremos alguns dos resultados encontrados em Mandelbaum e Zeltyn [18]. Uma relação de ordem estocástica para as distribuições dos tempos de paciência G_1 e G_2 , apresentada no Lema 3.3.1, implica em relações de ordem entre o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono para as correspondentes $M/M/n + G_1$ e $M/M/n + G_2$. Daí segue o Teorema 3.3.2 que, para uma paciência média fixa \bar{R} , a distribuição de paciência Determinística (todos os clientes estão dispostos a esperar \bar{R}) maximiza o tempo médio de espera, o comprimento médio da fila e a probabilidade de espera enquanto minimiza probabilidade de abandono na fila $M/M/n+G$. Além disso, apresentamos os resultados de *tráfego leve* em que a razão assintótica entre $P(Ab)$ e $E(W)$ é obtida quando a taxa de chegada converge para zero.

A partir de uma relação de ordem estocástica entre as distribuições de paciência é possível estabelecer relações de ordem entre diferentes medidas de desempenho.

Lema 3.3.1 *Considere a fila $M/M/n + G$ com λ , μ e n fixos. Assuma que para duas distribuições de paciência G_1 e G_2 , a desigualdade:*

$$\int_0^x \bar{G}_1(u)du \geq \int_0^x \bar{G}_2(u)du, \quad (3.20)$$

prevaleça para todo $x > 0$, em que \bar{G}_1 e \bar{G}_2 são as funções de sobrevivência de G_1 e G_2 , respectivamente.

Seja $P^{(i)}(Ab)$, $P^{(i)}(Ab|W > 0)$, $P^{(i)}(Ab|U > 0)$, $P^{(i)}(W > 0)$ e $P^{(i)}(U > 0)$ para $i = 1, 2$ as características em equilíbrio da correspondente fila $M/M/n + G_i$.

Então:

- a) $P^{(1)}(U > 0) \geq P^{(2)}(U > 0)$; $P^{(1)}(W > 0) \geq P^{(2)}(W > 0)$;
- b) $P^{(1)}(Ab) \leq P^{(2)}(Ab)$; $P^{(1)}(Ab|U > 0) \leq P^{(2)}(Ab|U > 0)$.

Demonstração:

Assuma que G_1 é estocasticamente maior que G_2 , isto é, $\bar{G}_1(x) \geq \bar{G}_2(x)$, $x \geq 0$. Então a desigualdade (3.20) prevalece automaticamente.

Parte a):

Da equação (3.7), considere $J_i = \int_0^\infty \exp\{\lambda \int_0^x \bar{G}_i(u)du - n\mu x\}dx$, $i = 1, 2$; em que J_1 e J_2 correspondem às distribuições G_1 e G_2 , respectivamente.

Da desigualdade (3.20), temos que $J_1 \geq J_2$. Além disso:

$$P^{(i)}(U > 0) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j^{(i)}.$$

Sabendo que:

$$\pi_j^{(i)} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} \pi_0^{(i)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad i = 1, 2;$$

e ainda que:

$$\pi_0^{(i)} = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (1 + \lambda J_i) \right]^{-1}.$$

Temos que $\pi_0^{(1)} \leq \pi_0^{(2)}$, portanto:

$$P^{(1)}(U > 0) \geq P^{(2)}(U > 0).$$

Da definição $P(W > 0 | V > 0) = \bar{G}(0)$, temos que $P^{(i)}(W > 0) = P^{(i)}(U > 0) \bar{G}_i(0)$ e $\bar{G}_1(0) \geq \bar{G}_2(0)$, então:

$$P^{(1)}(W > 0) \geq P^{(2)}(W > 0).$$

Parte b):

Sabendo que a probabilidade de abandono é dada por:

$$P(Ab) = \left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j\right) + \pi_{n-1},$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{n\mu} [1 - P(Ab)] &= \frac{\lambda}{n\mu} \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{n\mu}{\lambda}\right) \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j\right) + \pi_{n-1} \right] \right\} \\ &= \frac{\lambda}{n\mu} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{n\mu}{\lambda} - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \frac{n\mu}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \pi_{n-1} \right] \right\} \\ &= \frac{\lambda}{n\mu} \left\{ \frac{n\mu}{\lambda} + \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j - \frac{n\mu}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j - \pi_{n-1} \right\} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \frac{\lambda}{n\mu} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j - \frac{\lambda}{n\mu} \pi_{n-1} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\lambda}{\mu} \pi_j. \end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{\lambda}{\mu} \pi_j = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{1}{j!} \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{j+1} \frac{1}{j!} \pi_0 = (j+1) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{j+1} \frac{1}{(j+1)!} \pi_0 = (j+1) \pi_{j+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{n\mu} [1 - P(Ab)] &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \pi_{j+1} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j \pi_j \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \pi_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\lambda}{n\mu} \left[1 - P^{(i)}(Ab) \right] = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \pi_j^i, \quad i = 1, 2.$$

Da definição de π_j no Teorema (3.1.1), temos que $\pi_j^{(1)} \leq \pi_j^{(2)}$ para $0 \leq j \leq n-1$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{n\mu} \left[1 - P^{(1)}(Ab) \right] &\geq \frac{\lambda}{n\mu} \left[1 - P^{(2)}(Ab) \right] \\ 1 - P^{(1)}(Ab) &\geq 1 - P^{(2)}(Ab) \\ P^{(1)}(Ab) &\leq P^{(2)}(Ab). \end{aligned}$$

Para demonstrarmos a segunda desigualdade, note que:

$$P^{(i)}(Ab|U > 0) = \frac{P^{(i)}(Ab, U > 0)}{P^{(i)}(U > 0)} = \frac{P^{(i)}(Ab)}{P^{(i)}(U > 0)}.$$

Da primeira parte do lema, provamos que $P^{(1)}(U > 0) \geq P^{(2)}(U > 0)$ e $P^{(1)}(Ab) \leq P^{(2)}(Ab)$, então:

$$\frac{P^{(1)}(Ab)}{P^{(1)}(U > 0)} \leq \frac{P^{(1)}(Ab)}{P^{(2)}(U > 0)} \leq \frac{P^{(2)}(Ab)}{P^{(2)}(U > 0)}.$$

Portanto:

$$P^{(1)}(Ab|U > 0) \leq P^{(2)}(Ab|U > 0).$$

■

Apresentaremos o Teorema (3.3.2) e os resultados de tráfego leve. Omitiremos as demonstrações, porém elas se encontram em [18].

Teorema 3.3.2 *Considere a fila $M/M/n+G$ com λ , μ , n e \bar{R} fixos. Em condições de equilíbrio a distribuição determinística de paciência G_d (todos os clientes estão dispostos a esperar \bar{R}) tem as seguintes propriedades, considerando todas as outras distribuições de paciência com mesma média \bar{R} :*

- a) G_d maximiza $P(W > 0)$;
- b) G_d minimiza $P(Ab)$ e $P(Ab|W > 0)$;
- c) G_d maximiza $E[W]$;
- d) G_d maximiza $E[L]$.

■

As partes a) e b) do Teorema (3.3.2) seguem do Lema (3.3.1), contudo ressaltamos que a inequação (3.20) não implica relações de ordem para $E(W)$ ou $E(L)$.

Lema 3.3.3 *Considere a fila $M/M/n+G$ com todos os parâmetros fixos, exceto λ . Assuma que $\lambda \rightarrow 0$. (Abaixo indexamos as medidas de desempenho em equilíbrio por um índice λ). Então:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_\lambda(Ab)}{E_\lambda[W]} = \alpha_1 = \frac{1}{\int_0^\infty \bar{G}(x) \exp\{-n\mu x\} dx} - n\mu, \quad (3.21)$$

em que α_1 é a taxa de abandono dado que tem um cliente na fila. Além disso,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P_\lambda(Ab|W > 0) = 1 - n\mu \int_0^\infty \bar{G}(x) \exp\{-n\mu x\} dx = P\{R < S\}; \quad (3.22)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_\lambda[W|W > 0] = \int_0^\infty \bar{G}(x) \exp\{-n\mu x\} dx = E[min\{R, S\}]; \quad (3.23)$$

em que a paciência R é independente da v.a. S .

■

As relações do Lema (3.3.3) podem ser explicadas intuitivamente. Considere que a taxa de chegada é muito pequena e assuma que os clientes encontram fila. Muito provavelmente este cliente é o único na fila, então seu tempo de espera no sistema será o tempo de serviço que tem distribuição $Exp(n\mu)$, o que implica as relações acima.

Capítulo 4

Relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ na fila $M/M/n + G$

Neste Capítulo são apresentados os resultados descritivos da relação entre o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono na fila $M/M/n + G$ para algumas distribuições de paciência utilizadas em Mandelbaum e Zeltyn [18]. Em seguida, com base na comparação dos gráficos obtidos, validamos o algoritmo que foi desenvolvido e observamos a relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ para distribuições de paciência do tipo mista.

4.1 Resultados Descritivos

Em Brandt e Brandt [3] foi desenvolvido um algoritmo em *Matlab* para o caso em que a paciência é o mínimo entre uma constante e um tempo distribuído exponencialmente. Neste trabalho, utilizamos o *software R* para desenvolver o mesmo algoritmo e obter os resultados da Seção 3.2 adaptados para a fila $M/M/n+G$ (ver Apêndice A). Tal algoritmo permite calcular valores tanto do tempo médio de espera na fila quanto da probabilidade de abandono para qualquer distribuição de paciência, desde que a distribuição dos tempos entre chegadas e do atendimento sejam exponencialmente distribuídos. A dificuldade na obtenção desses valores foi a necessidade de truncar a função de distribuição da paciência e utilizar uma aproximação para a constante de normalização quando a sala de espera é infinita. Utilizamos $r = 150$ para o tamanho da sala de espera por ser suficiente para que não permita o bloqueio de nenhum cliente no sistema.

Consideramos a fila $M/M/n + G$ com taxa de atendimento $\mu = 1$ cliente por minuto e $n = 10$ atendentes. Variamos a taxa de chegada de clientes na fila (λ) de 1 a 50, em intervalos de 0,25 cliente por minuto; e calculamos as medidas de desempenho $E(W)$ e $P(Ab)$, em regime estacionário, para diferentes distribuições de paciência com média ($\frac{1}{\theta}$) igual a 2 minutos.

Começamos comparando as seguintes distribuições de paciência:

- Exponencial (média=2);
- Uniforme [0,4];
- Hiperexponencial (50-50% mistura de duas exponenciais com médias 1 e 3 minutos).

As distribuições têm coeficiente de variação (que é a razão entre a média e o desvio-padrão - CV) iguais a 1; 0,6 e 0,8, respectivamente.

Conforme a expressão (1.1), sabemos que a distribuição de paciência Exponencial implica numa relação linear para $E(W) \times P(AB)$. Observe, na Figura 4.1, que a distribuição de paciência Uniforme produz uma curva convexa e a Hiperexponencial produz uma curva côncava. Contudo, quando consideramos pequenas taxas de chegada (ou baixo índice de congestionamento - $\frac{\lambda}{n\mu}$), ver Figura 4.2, ambas produzem uma curva muito próxima da linearidade. Ainda com relação à Figura 4.2, podemos ilustrar a fórmula do Lema 3.3.3, em que a taxa de abandono, dado que há um cliente na fila (α_1), é igual a 0,5; 0,26 e 0,66, enquanto que a razão entre $E(W)$ e $P(AB)$ para uma pequena taxa de chegada ($\lambda = 3$) é igual a 0,5; 0,26 e 0,65; para a distribuição de paciência Exponencial, Uniforme e Hiperexponencial, respectivamente.

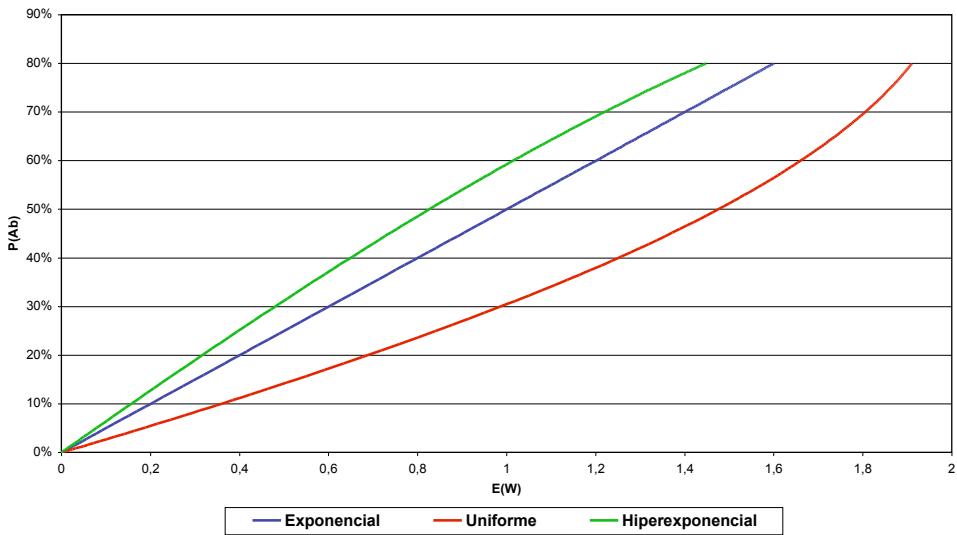


Figura 4.1: Gráfico de $E(W) \times P(AB)$ para tempos de paciência Exponencial, Uniforme e Hiperexponencial.

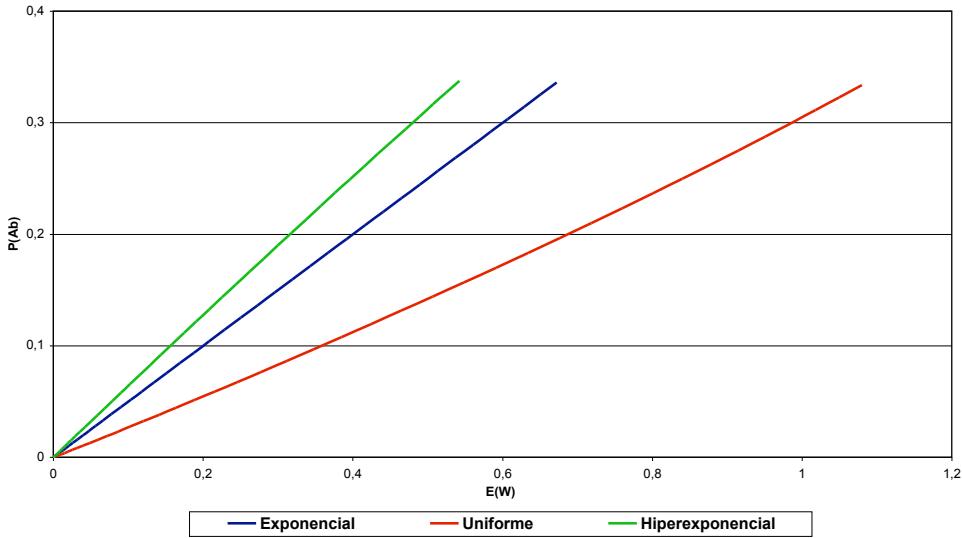


Figura 4.2: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Exponencial, Uniforme e Hiperexponencial. Caso de pequenas taxas de chegada.

A relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ não é linear para as seguintes distribuições de paciência:

- Determinística: todos os clientes estão dispostos a esperar exatamente 2 minutos;
- Mistura de Determinísticas: (50-50% mistura de duas constantes 0.2 e 3.8).

Note que, na Figura 4.3, a curva $E(W) \times P(Ab)$ produzida pela distribuição Determinística de paciência é estritamente convexa. Já a curva obtida pela mistura de Determinísticas produz uma curva peculiar que começa côncava e torna-se convexa. Assim, quando o índice de congestionamento é baixo, os clientes com pouca paciência abandonam (a curva é quase linear); para índices de congestionamento de moderados a altos, a probabilidade de abandonar praticamente permanece constante, enquanto o tempo de espera cresce até um determinado instante que os clientes começam a abandonar por falta de paciência.

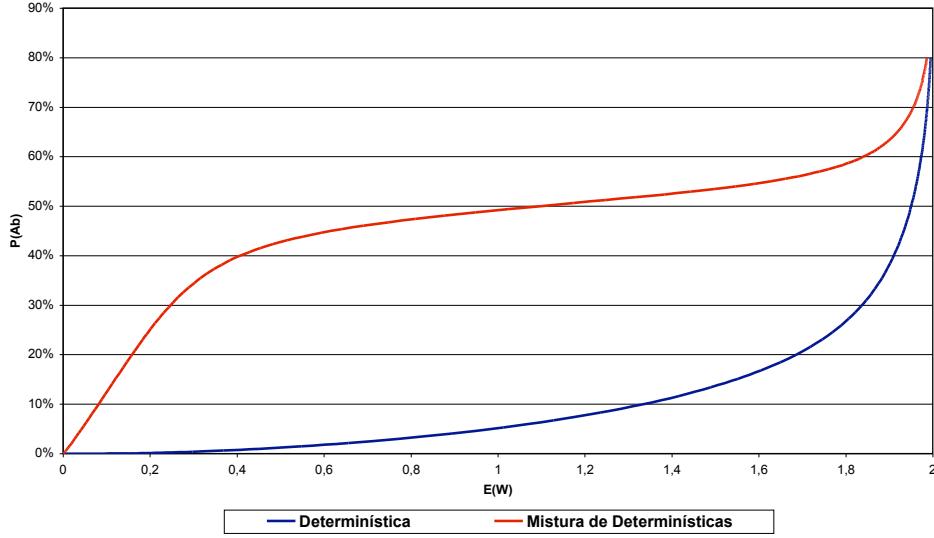


Figura 4.3: Gráfico de $E(W) \times P(AB)$ para tempos de paciência Determinística e Mistura de Determinísticas.

4.2 Resultados Descritivos para Distribuição de Paciência do tipo Mista

Acreditamos que mensagens eletrônicas recebidas de tempos em tempos pelos clientes podem interferir na paciência enquanto esperam por atendimento. Para expressar este fato, recorremos à função distribuição do tempo de paciência do tipo Mista e, particularmente, utilizamos as distribuições Exponencial e Uniforme Mistas.

Para modelarmos a função distribuição do tempo de paciência Mista, consideramos a seguinte situação: os clientes estão aguardando atendimento seguindo uma distribuição de paciência proporcional à Exponencial (ou Uniforme). Os mais impacientes vão desistindo do atendimento enquanto os mais pacientes permanecem aguardando até que ocorre uma mensagem eletrônica. Nesse momento, o cliente que esperou até essa mensagem, ‘joga uma moeda honesta’ para decidir se permanece ou não esperando, ou seja, a probabilidade condicional do cliente não abandonar a fila dado que já esperou até a primeira mensagem é de 50%. Aqueles que permaneceram após a primeira mensagem seguem aguardando atendimento de acordo com uma distribuição de paciência proporcional à Exponencial (ou Uniforme) até a próxima mensagem e, novamente, o processo se repete. Chamamos de Caso 1 quando há a interferência de apenas uma mensagem eletrônica, Caso 2 quando há duas mensagens eletrônicas e Caso 3 quando há três mensagens eletrônicas, sendo que essas mensagens ocorrem de meio em meio minuto. Vale ressaltar que estamos desconsiderando o tempo de duração da mensagem eletrônica no tempo de espera. Além disso, com esta modelagem, pode-se melhorar uma política de paciência de acordo com um *Call Center*.

4.2. RESULTADOS DESCRIPTIVOS PARA DISTRIBUIÇÃO DE PACIÊNCIA DO TIPO MISTA37

Para ajustar os parâmetros das distribuições Exponencial e Uniforme Mistas, impusemos que a média da paciência fosse 2 minutos, escolhemos $n = 10$, $\mu = 1$ cliente por minuto, variamos λ de 1 a 50 em intervalos de 0,25 cliente por minuto e calculamos $E(W)$ e $P(Ab)$, em regime estacionário, para as diferentes distribuições, buscando assim fazer comparações com os modelos apresentados na Seção 4.1.

O cálculo das medidas de desempenho se deram a partir dos resultados em [3] e [4] apresentados na Seção 3.2.

Obtivemos, para cada função de distribuição (Exponencial Mista e Uniforme Mista), as curvas entre $E(W)$ e $P(Ab)$ para cada caso considerado.

4.2.1 Distribuição de Paciência Exponencial Mista

Abaixo relacionamos as funções de distribuição de paciência obtidas em cada caso, todas com média de 2 minutos.

- Caso 1:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 0,45 - 0,45e^{-0,31x} & 0 \leq x < 1/2; \\ 1 - 0,45e^{-0,31x+0,16} & x \geq 1/2. \end{cases}$$

- Caso 2:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 0,23 - 0,23e^{-0,19x} & 0 \leq x < 1/2; \\ 0,73 - 0,23e^{-0,19x+0,095} & 1/2 \leq x < 1; \\ 1 - 0,23e^{-0,19x+0,095} & x \geq 1. \end{cases}$$

- Caso 3:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 0,12 - 0,12e^{-0,11x} & 0 \leq x < 1/2; \\ 0,62 - 0,12e^{-0,11x+0,055} & 1/2 \leq x < 1; \\ 0,88 - 0,12e^{-0,11x+0,11} & 1 \leq x < 3/2; \\ 1 - 0,12e^{-0,11x+0,16} & x \geq 3/2. \end{cases}$$

Observe na Figura 4.4 os gráficos das funções de distribuição Exponencial Mista e da Exponencial. Note que o ponto de descontinuidade da função distribuição do Caso 1 ocorre no ponto 0,5; para a função distribuição do Caso 2 ocorrem nos pontos 0,5 e 1 e, para a função distribuição do Caso 3 ocorrem pontos de descontinuidade em 0,5; 1 e 1,5; justamente nos instantes em que ocorrem as mensagens eletrônicas.

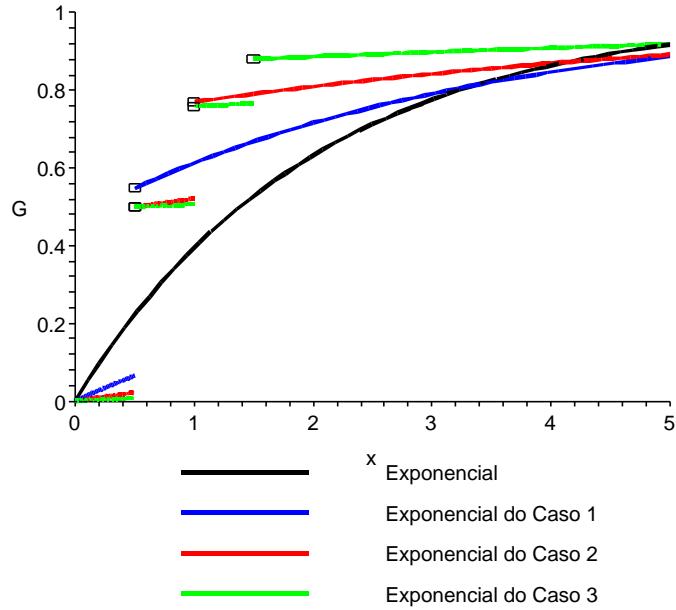


Figura 4.4: Funções de Distribuição de Paciência Exponencial e Exponencial Mista.

A relação entre $E(W)$ e $P(AB)$ para todos os casos envolvendo distribuição de paciência Exponencial Mista está representada na Figura 4.5. A Figura 4.6 apresenta a mesma relação, porém para pequenas taxas de chegada ($\lambda < 15$).

Podemos perceber, na Figura 4.5, que não há linearidade para nenhum dos casos apresentados. As curvas produzidas pela paciência Exponencial Mista dos Casos 1 e 2 possuem um ponto de inflexão, onde há uma mudança da concavidade da curva, aproximadamente nos instantes 0,6 e 0,8 minuto, respectivamente. Entendemos que os clientes mais impacientes abandonam rapidamente (produzindo uma curva convexa) e os mais pacientes demoram um pouco mais para abandonar (produzindo uma curva côncava). Já a curva do Caso 3 não apresenta ponto de inflexão para $P(AB)$ até 80%, provocando um rápido abandono. Para uma melhor comparação, adicionamos às curvas produzidas pela distribuição de paciência Exponencial Mista, a curva produzida pela distribuição de paciência Exponencial. Na Figura 4.5 observamos que a curva produzida pela distribuição de paciência Exponencial tem valores inferiores às curvas produzidas pelas distribuições mistas dos Casos 1, 2 e 3 quando $E(W) > 0,4$. Na Figura 4.6, apresentamos a relação entre $E(W)$ e $P(AB)$ quando as taxas de chegada são pequenas ($\lambda < 15$). Podemos perceber que as curvas produzidas pelas distribuições mistas dos Casos 1, 2 e 3 são convexas e que todas as curvas são similares para $P(AB) < 15\%$.

4.2. RESULTADOS DESCRIPTIVOS PARA DISTRIBUIÇÃO DE PACIÊNCIA DO TIPO MISTA39

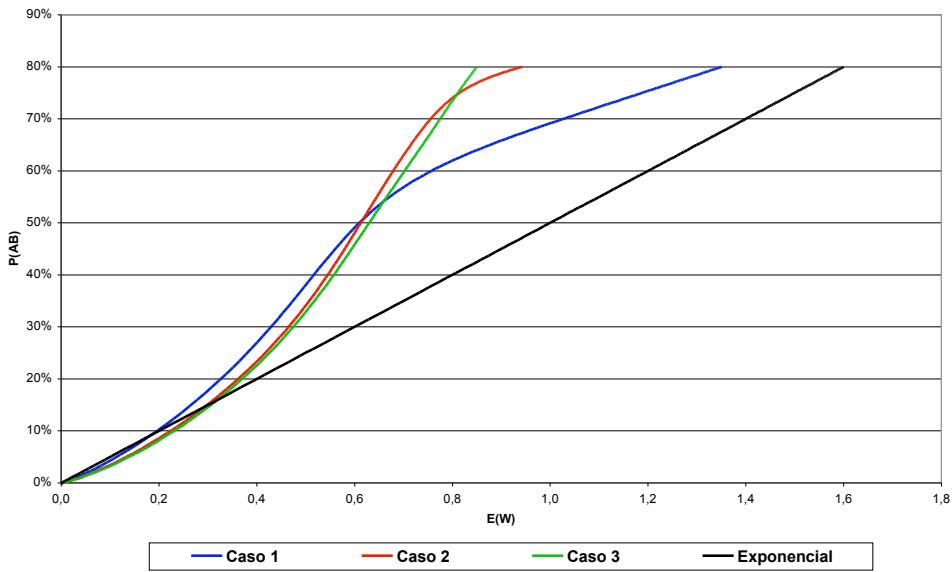


Figura 4.5: Gráfico de $E(W) \times P(AB)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial.

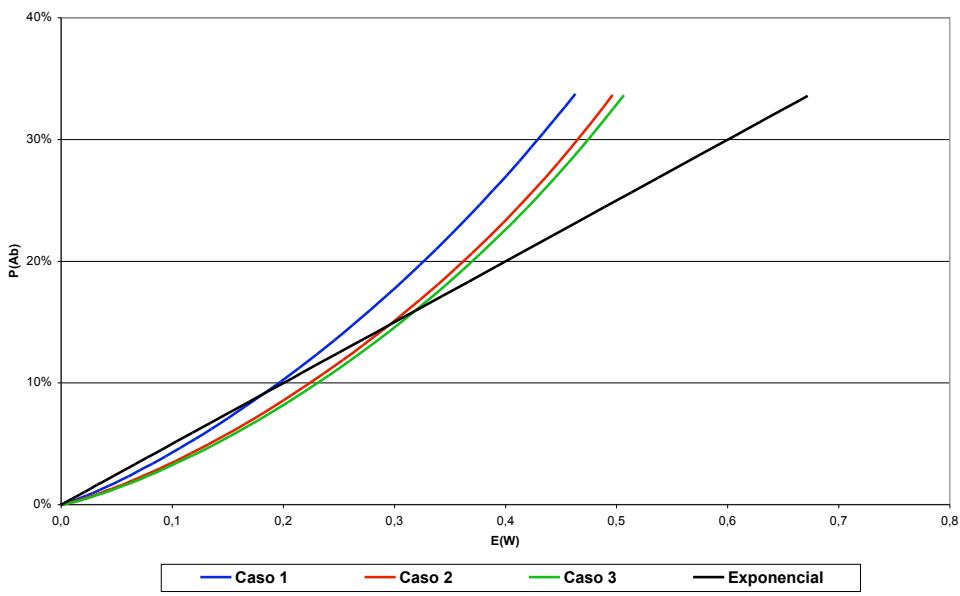


Figura 4.6: Gráfico de $E(W) \times P(AB)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial - pequenas taxas de chegada.

As Figuras 4.7 e 4.8 mostram a relação entre a taxa de chegada para o tempo médio de espera na fila e para a probabilidade de abandono, respectivamente, quando a distribuição de paciência é Exponencial Mista. Observando o gráfico da Figura 4.7, percebemos que, para taxas de chegada acima de 21 clientes por minuto, o tempo médio de espera na fila para a distribuição de paciência Exponencial do Caso 1 é maior com relação aos Casos 2 e 3. A relação $\lambda \times E(W)$ para as distribuições do Caso 2 e 3 são muito similares e a curva produzida pela distribuição de paciência Exponencial tem valores superiores às curvas produzidas pela distribuição de paciência Exponencial Mista. Já as curvas da Figura 4.8 são muito próximas, levando a concluir que, para uma determinada taxa de chegada, apenas o tempo médio de espera na fila é afetado. Percebemos que a distribuição de paciência Exponencial Mista diminui o tempo médio de espera na fila, o que é vantajoso para um *Call Center*, pois diminui a ocupação do sistema e aqueles que aguardam atendimento esperam menos e ficam mais satisfeitos.

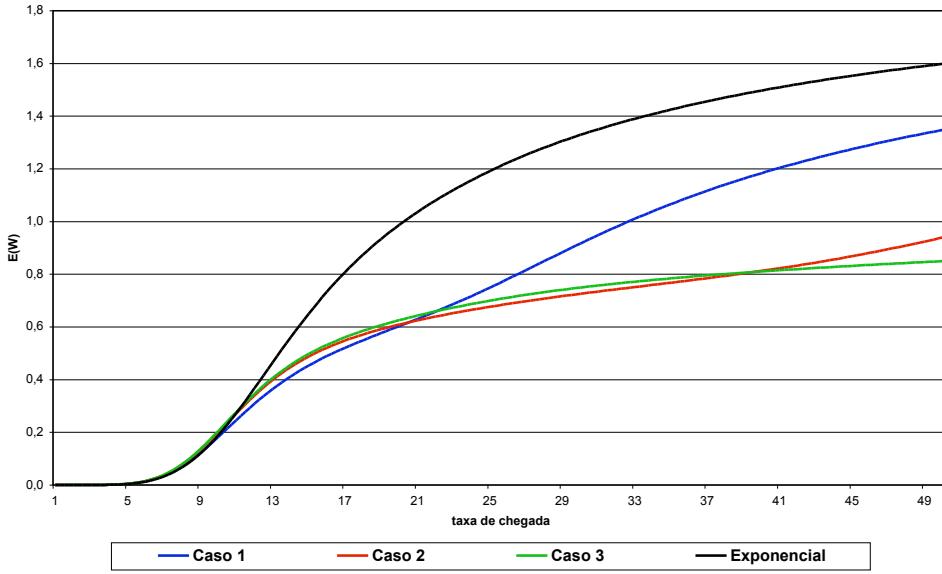


Figura 4.7: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial.

4.2. RESULTADOS DESCRIPTIVOS PARA DISTRIBUIÇÃO DE PACIÊNCIA DO TIPO MISTA41

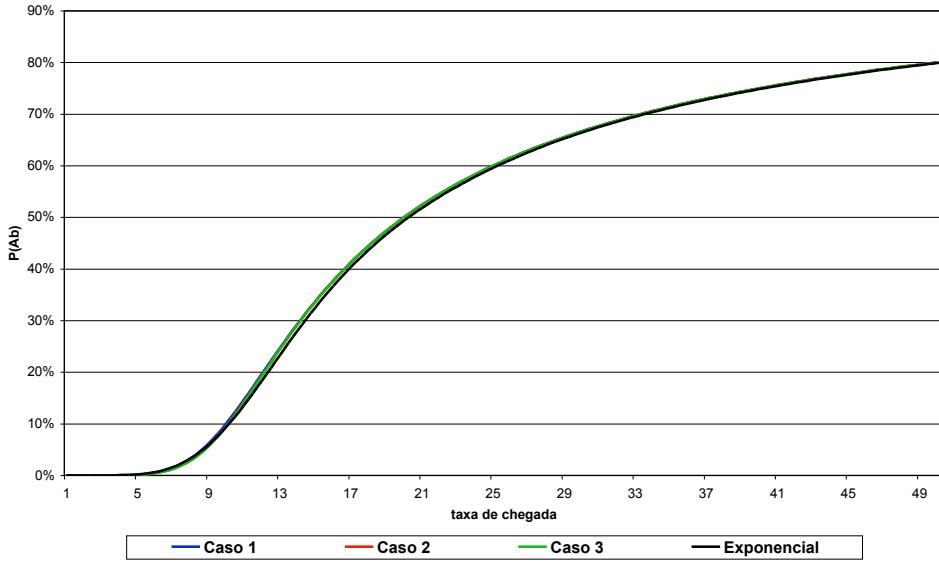


Figura 4.8: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ para tempos de paciência Exponencial Mista e Exponencial.

4.2.2 Distribuição de Paciência Uniforme Mista

Abaixo relacionamos as funções de distribuição obtidas em cada caso. Todas as distribuições com média de 2 minutos.

- Caso 1:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{2x}{3} & 0 \leq x < 1/2; \\ \frac{37+2x}{57} & 1/2 \leq x < 10; \\ 1 & x \geq 10. \end{cases}$$

- Caso 2:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{2x}{7} & 0 \leq x < 1/2; \\ \frac{3}{7} + \frac{2x}{7} & 1/2 \leq x < 1; \\ \frac{113}{133} + \frac{x}{133} & 1 \leq x < 20; \\ 1 & x \geq 20. \end{cases}$$

- Caso 3:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{2x}{15} & 0 \leq x < 1/2; \\ \frac{7+2x}{15} & 1/2 \leq x < 1; \\ \frac{2}{3} + \frac{2x}{15} & 1 \leq x < 3/2; \\ \frac{1019}{1095} + \frac{2x}{1095} & 3/2 \leq x < 38; \\ 1 & x \geq 38. \end{cases}$$

Observe, na Figura 4.9 os gráficos das funções de distribuição Uniforme Mista e Uniforme[0,4]. Note que os pontos de descontinuidade da função distribuição do Caso 1 ocorre no ponto 0,5; para a função distribuição do Caso 2 ocorrem nos pontos 0,5 e 1 e, para a função distribuição do Caso 3 ocorrem nos pontos 0,5; 1 e 1,5; justamente nos instantes em que ocorrem as mensagens eletrônicas.

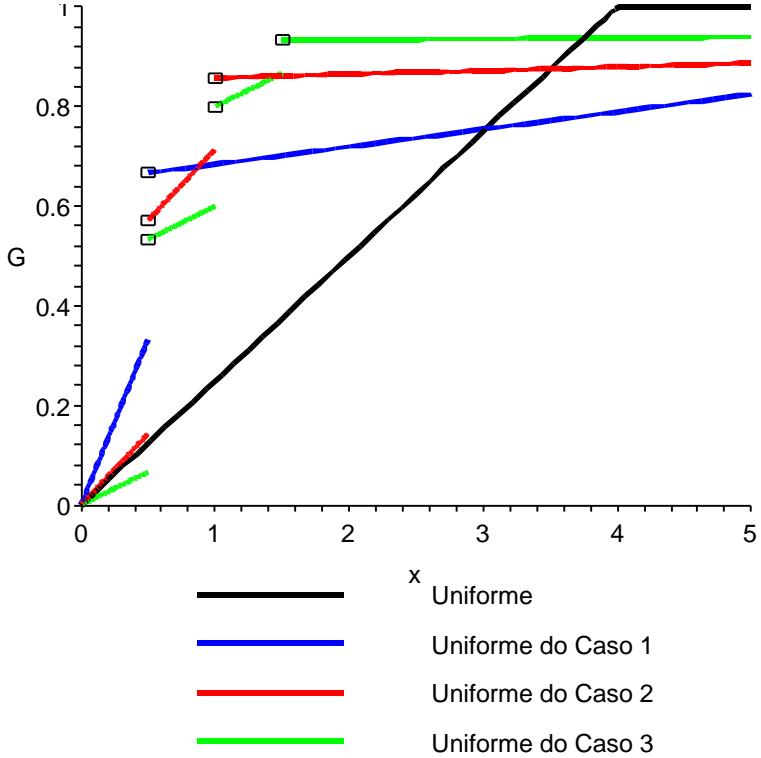


Figura 4.9: Funções de Distribuição de Paciência Uniforme e Uniforme Mista.

A relação entre $E(W)$ e $P(AB)$ para todos os casos envolvendo distribuição de paciência Uniforme Mista está representada na Figura 4.10. A Figura 4.11 apresenta a mesma relação, porém para pequenas taxas de chegada ($\lambda < 15$).

Podemos perceber, na Figura 4.10, que não há linearidade entre $E(W)$ e $P(AB)$ quando a paciência é do tipo Uniforme Mista. A curva produzida pela distribuição Uniforme Mista do Caso 1 é bem distinta das demais, sendo que até 0,5 minuto ela é quase linear e depois se mantém praticamente constante. As curvas produzidas pela distribuição Uniforme Mista dos Casos 2 e 3 são razoavelmente similares, apesar da curva do Caso 2 apresentar o ponto de inflexão para $P(AB)$ até 80%. Quando comparamos a curva produzida pela distribuição de paciência Uniforme com as Uniformes Mistas dos Casos 1, 2 e 3, percebemos que a Uniforme tem valores inferiores às outras. Quando consideramos pequenas taxas de chegada ($\lambda < 15$), notamos que a distribuição Uniforme Mista do Caso 1 está mais próxima da linearidade do que os Casos 2 e 3, ver Figura 4.11, mas a relação é convexa para todo os Casos.

4.2. RESULTADOS DESCRIPTIVOS PARA DISTRIBUIÇÃO DE PACIÊNCIA DO TIPO MISTA43

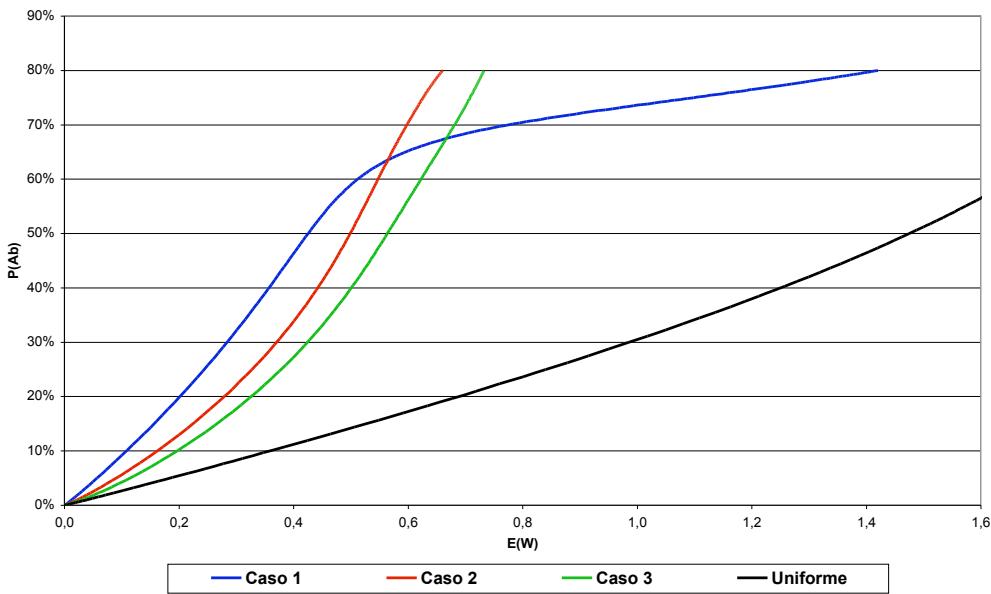


Figura 4.10: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme.

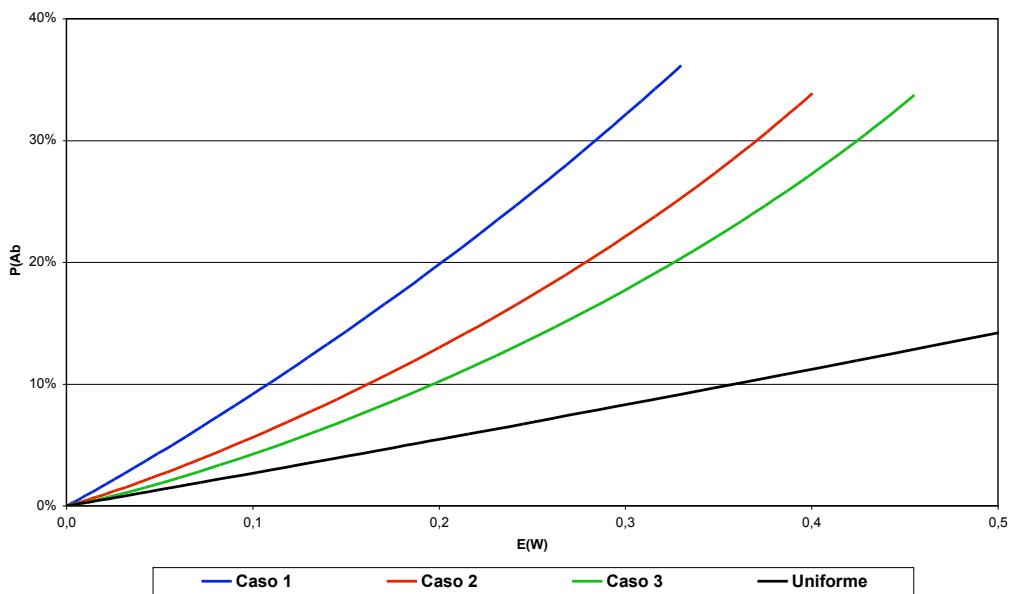


Figura 4.11: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme - pequenas taxas de chegada.

Observando a relação entre a taxa de chegada para, respectivamente, o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono com paciência Uniforme Mista (ver Figuras 4.12 e 4.13), notamos que a curva produzida pela distribuição Uniforme Mista do Caso 1 na Figura 4.12 se distingue dos Casos 2 e 3. O tempo médio de espera na fila para a paciência Uniforme Mista do Caso 3 é aproximadamente 0.1 minuto maior do que o Caso 2, para taxas de chegada acima de 20 clientes por minuto. Quando comparamos a curva produzida pela distribuição de paciência Uniforme com as curvas produzidas pela distribuição de paciência Uniforme Mista, notamos que a Uniforme tem valores superiores às Uniformes Mistas. Na Figura 4.13 podemos perceber uma leve distinção entre a probabilidade de abandono para cada caso de distribuição de paciência quando as taxas de chegada são pequenas ($\lambda < 15$), contudo a relação $\lambda \times P(AB)$ é indistinguível para taxas maiores de chegada. Assim como a paciência Exponencial Mista, a distribuição Uniforme Mista diminui o tempo médio de espera na fila enquanto mantém a probabilidade de abandono indistinguível para uma determinada taxa de chegada.

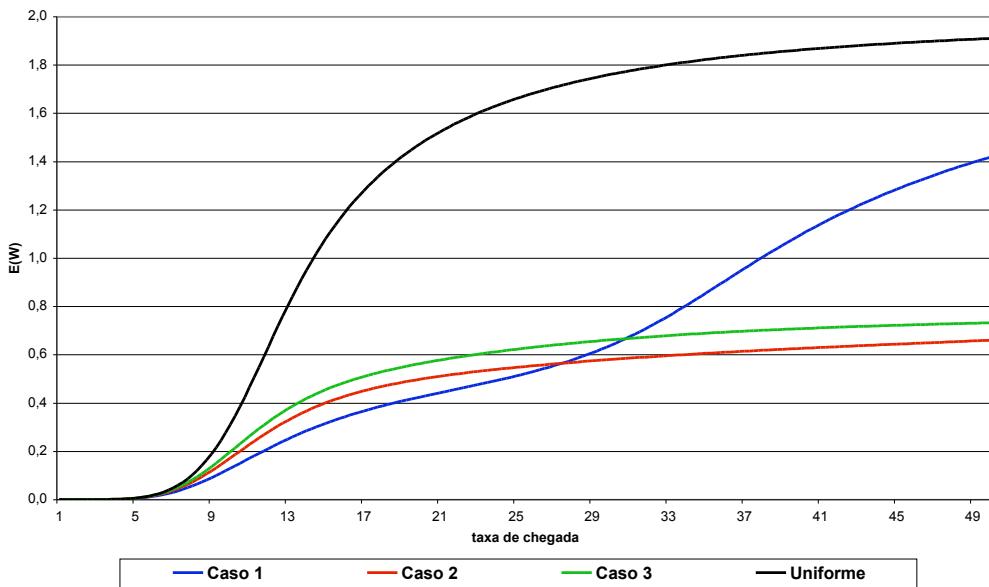


Figura 4.12: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme.

4.2. RESULTADOS DESCRIPTIVOS PARA DISTRIBUIÇÃO DE PACIÊNCIA DO TIPO MISTA45

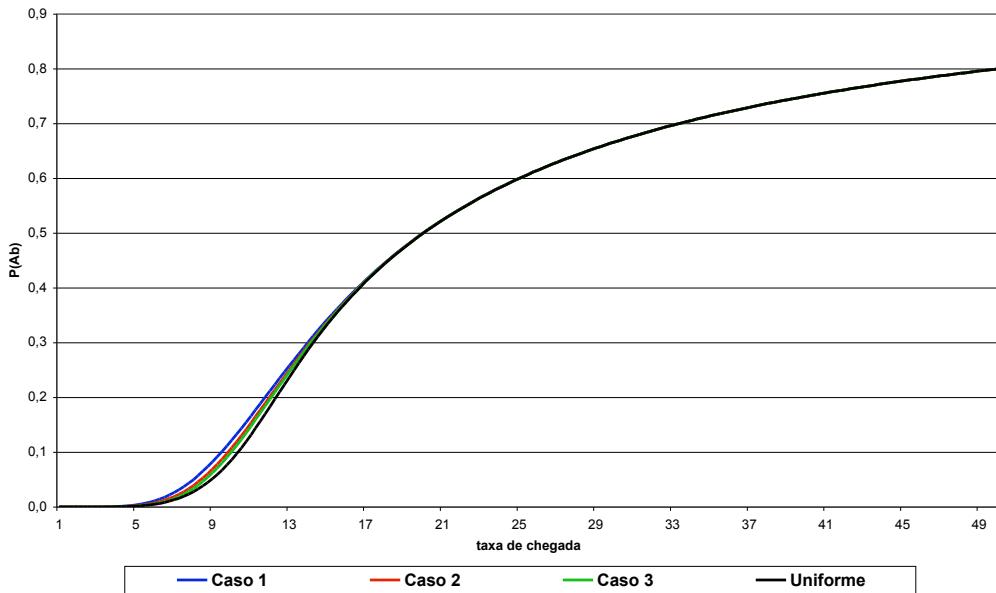


Figura 4.13: Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ para tempos de paciência Uniforme Mista e Uniforme.

Capítulo 5

Simulação

Neste trabalho, até aqui, assumimos que os tempos de atendimento são exponencialmente distribuídos, entretanto, não é o que ocorre em muitos *Call Centers*. Por exemplo, Brown [5] estudou um pequeno *Call Center* do Banco de Israel em que a distribuição Lognormal fornecia uma excelente aproximação para os tempos de serviço.

Elaboramos simulações do sistema $M/G/n + G$, tendo em vista que resultados exatos não estão disponíveis (ver Whitt [20]). O objetivo é perceber o quanto a mudança na distribuição dos tempos de serviço afeta o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono, assim como a relação entre essas medidas de desempenho.

Primeiramente serão apresentadas as informações referentes à construção de um modelo de simulação para a fila $M/G/n + G$. A seguir, discutimos a validação desse modelo e, por último, serão exibidos os resultados obtidos quando perturbamos o modelo.

5.1 Descrição do Modelo de Simulação

As simulações foram implementadas com o auxílio do *software* de simulação de processos Arena 11.0 (ver Apêndice B). Tal programa foi escolhido por facilitar a construção de estruturas que representam modelos de filas. Ele trabalha com conceitos gráficos para compor cada componente em um sistema e, assim, torna-se possível acompanhar visualmente as características do modelo e também o fluxo de usuários. A animação do processo facilita a detecção de erros e a comunicação com outras áreas. Ele também permite testar rapidamente vários tipos de cenários.

O Arena 11.0 é iniciado com a mesma semente do gerador de números aleatórios para possibilitar a obtenção de resultados idênticos, se necessário. Utilizamos 30 replicações, ou seja, foram usadas seguidamente 30 rodadas de simulação do modelo. Dessa forma, ao término de cada execução, o último número aleatório gerado é utilizado como semente da rodada seguinte. Obtemos, assim, resultados que incorporam as aleatoriedades envolvidas, possivelmente sendo similares, mas não idênticos.

Utilizamos um período de *warm up* de 15 minutos apesar da taxa de congestionamento ser superior a 1 para taxas de chegada maiores que 10, ou seja, a partir do sistema vazio esperamos um intervalo de tempo até que o sistema passe a operar no que acreditamos que possa ser o regime estacionário. Desse momento em diante inicia-se a contagem das estatísticas. Para todas as réplicas, adotamos um limite máximo de 1000 chegadas.

Todos os clientes que chegam no sistema são imediatamente enviados para algum servidor livre, se houver algum. Se todos os atendentes estiverem ocupados, o cliente aguarda na fila até que um dos atendentes fique livre ou até sua paciência esgotar e ele abandonar a fila.

Para definir o abandono utilizou-se um processo paralelo de controle dos tempos de permanência dos usuários no sistema. No instante de chegada sorteia-se tempos de tolerância e atribui-se ao usuário, ou seja, o tempo máximo que poderia esperar até que fosse atendido. Assim, a cada milésimo de segundo os tempos de permanência dos usuários na fila eram verificados e, se algum deles ultrapassasse sua tolerância, era automaticamente retirado do sistema caracterizando um abandono.

O tempo médio de espera na fila é a média dos tempos que os clientes (inclusive os que abandonaram) ficaram aguardando na fila e a probabilidade de abandono é dada pela fração dos clientes que abandonaram dentre aqueles que entraram no sistema.

5.2 Validação do Modelo de Simulação

Antes de buscarmos conclusões através da simulação, validamos o modelo construído. Para tanto, utilizamos os valores do tempo médio de espera e da probabilidade de abandono obtidos no Capítulo anterior com o uso do algoritmo feito em *R* (que resultou em gráficos idênticos aos contidos em [18], já que não tínhamos os valores numéricos). Mais especificamente, rodamos a simulação para algumas taxas de chegada entre 1 e 50, atendimento Exponencial com média de 1 minuto e as seguintes distribuições de paciência com média de 2 minutos:

- Exponencial;
- Uniforme;
- Exponencial Mista do Caso 3;
- Uniforme Mista do Caso 3;

Para melhor aferirmos a simulação, construímos intervalos de confiança para o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono. Para ambas as quantidades utilizamos como valor da variância, que é desconhecida, a estimativa obtida através da variância amostral e utilizamos o Teorema Central do Limite (ver [16]).

Podemos ver na Figura 5.1 que os resultados obtidos com a simulação estão muito próximos dos resultados numéricos obtidos no *R*. Além disso, com confiança de 95%, 17 dos 22 valores reais para o tempo médio de espera e 16 dos 22 valores reais para a probabilidade de abandono encontram-se nos intervalos obtidos com a simulação.

Para a distribuição de paciência Uniforme há, também, boa concordância. Para tempos médios ligeiramente maiores (de 1,6 em diante), os resultados obtidos com a simulação se afastam dos resultados numéricos (ver Figura 5.2). Mesmo assim, com confiança de 95%, 15 dos 22 valores reais para o tempo médio de espera e 15 dos 22 valores reais para a probabilidade de abandono encontram-se dentro dos intervalos construídos com a simulação, o que nos pareceu satisfatório.

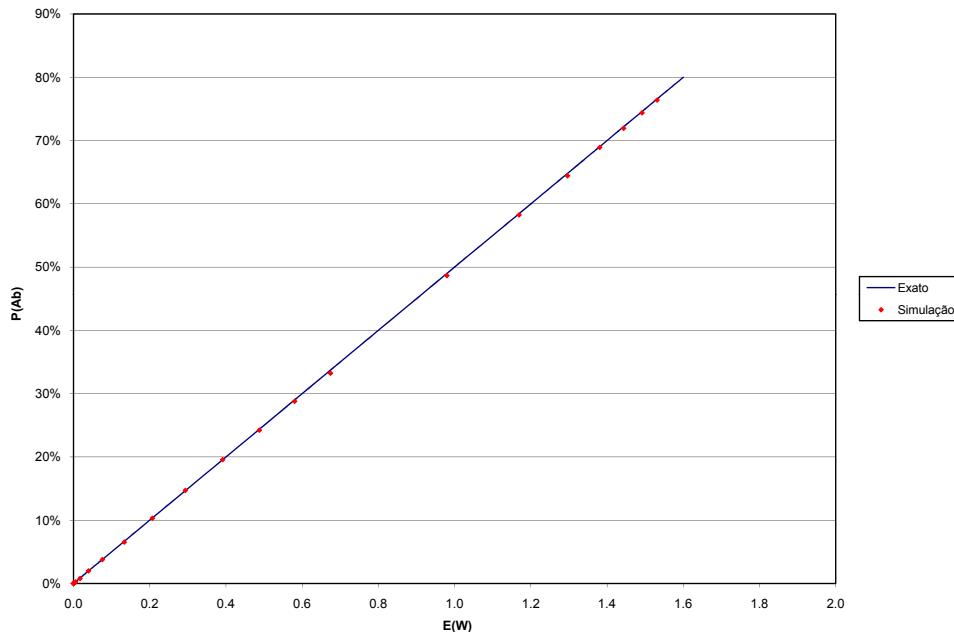


Figura 5.1: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparaçāo com simulação - Atendimento Exponencial, Paciēncia Exponencial.

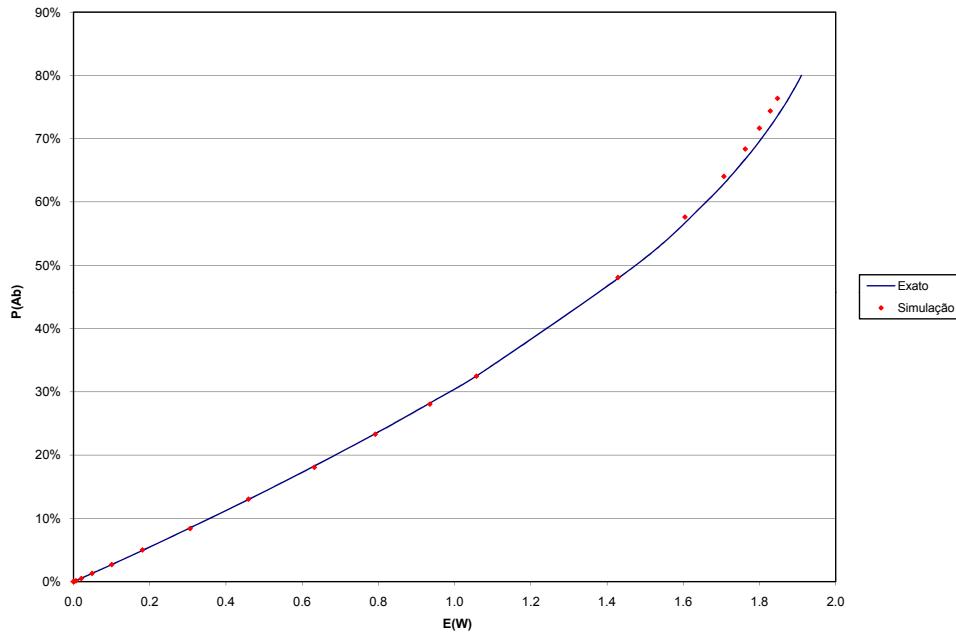


Figura 5.2: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparaçāo com simulação - Atendimento Exponencial, Paciēncia Uniforme.

Para a distribuição Exponencial Mista do Caso 3, ver Figura 5.3, temos uma excelente concordância entre os resultados obtidos com a simulação e os resultados numéricos, com 21 dos 22 valores reais para o tempo médio de espera e 20 dos 22 valores reais para a probabilidade de abandono encontrando-se dentro dos intervalos construídos para as respectivas medidas de desempenho através da simulação. A Figura 5.4 se refere à distribuição Uniforme Mista do Caso 3 e mostra boa aproximação entre os resultados obtidos na simulação com os resultados obtidos no R , com todos os 22 valores reais para o tempo médio de espera e 20 dos 22 valores reais para a probabilidade de abandono encontrando-se dentro dos intervalos obtidos com a simulação para as respectivas medidas de desempenho.

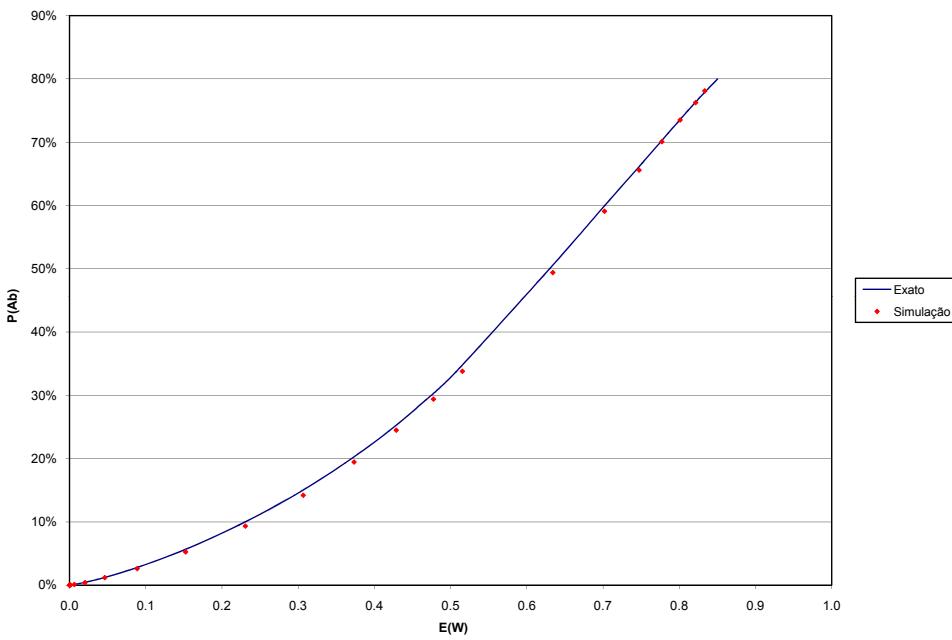


Figura 5.3: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparação com simulação - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

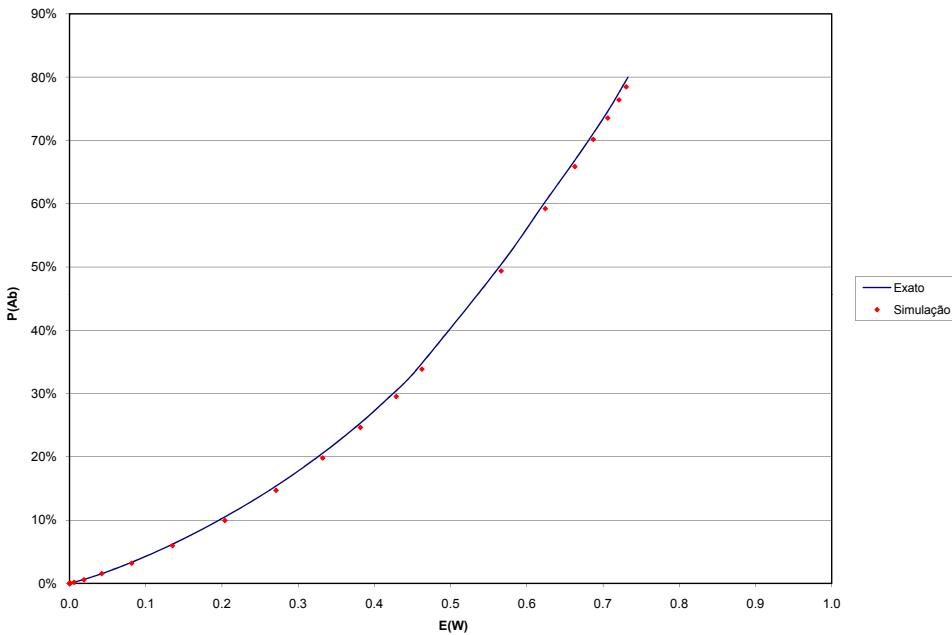


Figura 5.4: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Comparação com simulação - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

Os dados apresentados nas Figuras 5.1 a 5.4 são agora reapresentados nas Tabelas 5.1 a 5.4 com a indicação dos respectivos intervalos de confiança (IC).

Taxa de chegada	Paciência Exponencial				
	E(W)		P(Ab)		
	IC	Referência	IC	Referência	
1	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%	
2	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%	
3	0.0001 ± 0.0001	0.0001	0.00% ± 0.01%	0.01%	
4	0.0011 ± 0.0004	0.0012	0.04% ± 0.02%	0.06%	
5	0.0055 ± 0.0012	0.0054	0.24% ± 0.07%	0.27%	
6	0.0172 ± 0.0026	0.0165	0.79% ± 0.15%	0.83%	
7	0.0392 ± 0.0044	0.0392	1.97% ± 0.28%	1.96%	
8	0.0757 ± 0.0070	0.0776	3.78% ± 0.49%	3.88%	
9	0.1331 ± 0.0104	0.1340	6.52% ± 0.64%	6.70%	
10	0.2068 ± 0.0142	0.2079	10.30% ± 0.79%	10.39%	
11	0.2931 ± 0.0175	0.2956	14.68% ± 0.92%	14.78%	
12	0.3912 ± 0.0203	0.3915	19.56% ± 1.06%	19.57%	
13	0.4878 ± 0.0229	0.4892	24.22% ± 1.07%	24.46%	
14	0.5804 ± 0.0212	0.5838	28.78% ± 1.05%	29.19%	
15	0.6743 ± 0.0214	0.6719	33.23% ± 1.03%	33.60%	
20	0.9798 ± 0.0213	0.9997	48.65% ± 0.94%	50.00%	
25	1.1693 ± 0.0240	1.1998	58.23% ± 0.91%	59.98%	
30	1.2962 ± 0.0271	1.3341	64.42% ± 0.80%	66.71%	
35	1.3808 ± 0.0269	1.4288	68.92% ± 0.74%	71.44%	
40	1.4434 ± 0.0271	1.5000	71.92% ± 0.69%	75.00%	
45	1.4919 ± 0.0277	1.5556	74.39% ± 0.64%	77.78%	
50	1.5310 ± 0.0267	1.6000	76.38% ± 0.63%	80.00%	

Tabela 5.1: IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial.

	Paciência Uniforme				
	E(W)		P(Ab)		
Taxa de chegada	IC	Referência	IC	Referência	
1	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%	
2	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%	
3	0.0001 ± 0.0001	0.0002	0.00% ± 0.01%	0.00%	
4	0.0011 ± 0.0004	0.0013	0.03% ± 0.02%	0.03%	
5	0.0060 ± 0.0014	0.0061	0.13% ± 0.05%	0.16%	
6	0.0202 ± 0.0032	0.0194	0.47% ± 0.10%	0.51%	
7	0.0487 ± 0.0060	0.0486	1.29% ± 0.23%	1.29%	
8	0.1004 ± 0.0107	0.1022	2.69% ± 0.40%	2.75%	
9	0.1805 ± 0.0174	0.1885	4.99% ± 0.58%	5.14%	
10	0.3061 ± 0.0245	0.3110	8.38% ± 0.75%	8.63%	
11	0.4590 ± 0.0308	0.4645	13.04% ± 0.89%	13.15%	
12	0.6317 ± 0.0306	0.6338	18.06% ± 1.02%	18.33%	
13	0.7919 ± 0.0312	0.8004	23.28% ± 1.06%	23.67%	
14	0.9352 ± 0.0310	0.9507	28.05% ± 1.08%	28.76%	
15	1.0569 ± 0.0263	1.0796	32.45% ± 1.05%	33.39%	
20	1.4285 ± 0.0230	1.4750	48.05% ± 0.94%	50.00%	
25	1.6043 ± 0.0220	1.6600	57.61% ± 0.87%	60.00%	
30	1.7063 ± 0.0203	1.7611	64.05% ± 0.85%	66.67%	
35	1.7624 ± 0.0198	1.8225	68.36% ± 0.78%	71.43%	
40	1.7995 ± 0.0192	1.8625	71.67% ± 0.69%	75.00%	
45	1.8280 ± 0.0183	1.8901	74.37% ± 0.66%	77.78%	
50	1.8473 ± 0.0177	1.9100	76.38% ± 0.59%	80.00%	

Tabela 5.2: IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme.

Taxa de chegada	Paciência Exponencial Mista - Caso 3			
	E(W)		P(Ab)	
	IC	Referência	IC	Referência
1	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%
2	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%
3	0.0001 ± 0.0001	0.0002	0.00% ± 0.00%	0.00%
4	0.0012 ± 0.0005	0.0014	0.00% ± 0.01%	0.02%
5	0.0063 ± 0.0014	0.0062	0.09% ± 0.05%	0.11%
6	0.0203 ± 0.0029	0.0194	0.40% ± 0.13%	0.42%
7	0.0463 ± 0.0050	0.0464	1.20% ± 0.21%	1.22%
8	0.0887 ± 0.0083	0.0909	2.61% ± 0.37%	2.87%
9	0.1522 ± 0.0111	0.1517	5.24% ± 0.61%	5.63%
10	0.2307 ± 0.0126	0.2226	9.33% ± 0.92%	9.50%
11	0.3067 ± 0.0122	0.2950	14.18% ± 1.04%	14.21%
12	0.3733 ± 0.0121	0.3618	19.44% ± 1.14%	19.30%
13	0.4287 ± 0.0103	0.4193	24.50% ± 1.17%	24.39%
14	0.4775 ± 0.0101	0.4671	29.38% ± 1.18%	29.21%
15	0.5155 ± 0.0090	0.5065	33.80% ± 1.08%	33.64%
20	0.6341 ± 0.0074	0.6300	49.39% ± 0.89%	50.01%
25	0.7019 ± 0.0076	0.7022	59.08% ± 0.89%	60.00%
30	0.7472 ± 0.0077	0.7512	65.59% ± 0.76%	66.67%
35	0.7772 ± 0.0084	0.7855	70.08% ± 0.74%	71.43%
40	0.8010 ± 0.0093	0.8114	73.50% ± 0.71%	75.00%
45	0.8215 ± 0.0092	0.8324	76.26% ± 0.60%	77.78%
50	0.8333 ± 0.0092	0.8500	78.11% ± 0.56%	80.00%

Tabela 5.3: IC para $E(W)$ e $P(AB)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

	Paciência Uniforme Mista - Caso 3			
	E(W)		P(Ab)	
Taxa de chegada	IC	Referência	IC	Referência
1	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%
2	0.0000 ± 0.0000	0.0000	0.00% ± 0.00%	0.00%
3	0.0001 ± 0.0001	0.0002	0.00% ± 0.00%	0.00%
4	0.0012 ± 0.0004	0.0013	0.02% ± 0.02%	0.03%
5	0.0061 ± 0.0013	0.0059	0.14% ± 0.07%	0.16%
6	0.0190 ± 0.0026	0.0181	0.56% ± 0.14%	0.57%
7	0.0422 ± 0.0044	0.0426	1.53% ± 0.24%	1.54%
8	0.0815 ± 0.0070	0.0821	3.18% ± 0.42%	3.35%
9	0.1352 ± 0.0090	0.1357	5.95% ± 0.61%	6.22%
10	0.2037 ± 0.0110	0.1982	9.93% ± 0.90%	10.10%
11	0.2709 ± 0.0113	0.2625	14.68% ± 0.97%	14.72%
12	0.3321 ± 0.0111	0.3225	19.82% ± 1.07%	19.69%
13	0.3816 ± 0.0098	0.3749	24.63% ± 1.12%	24.65%
14	0.4286 ± 0.0091	0.4188	29.53% ± 1.13%	29.37%
15	0.4624 ± 0.0070	0.4550	33.84% ± 0.98%	33.74%
20	0.5663 ± 0.0064	0.5638	49.37% ± 0.94%	50.01%
25	0.6240 ± 0.0067	0.6224	59.21% ± 0.97%	60.00%
30	0.6630 ± 0.0067	0.6618	65.87% ± 0.79%	66.67%
35	0.6871 ± 0.0068	0.6891	70.17% ± 0.71%	71.43%
40	0.7060 ± 0.0072	0.7081	73.53% ± 0.72%	75.00%
45	0.7208 ± 0.0066	0.7219	76.41% ± 0.62%	77.78%
50	0.7304 ± 0.0061	0.7325	78.47% ± 0.55%	80.00%

Tabela 5.4: IC para $E(W)$ e $P(Ab)$ - Atendimento Exponencial, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

Das 88 medidas para o tempo médio de espera, 75 encontram-se dentro do intervalo construído com 95% de confiança. Isto indica que em 85% das medidas obtidas, a simulação produziu resultados aceitáveis. E, para a probabilidade de abandono, das 88 medidas, 71 encontram-se dentro do intervalo construído com 95% de confiança. Isto indica que em, aproximadamente, 81% das medidas obtidas a simulação produziu resultados aceitáveis. Quando restringimos os resultados às pequenas taxas de chegada (até 15 clientes por minuto), 100% dos valores reais para ambas medidas de desempenho estão contidos nos respectivos intervalos com 95% de confiança. Com isso, conclui-se que o modelo de simulação desenvolvido está validado.

5.3 Alteração na Distribuição do Atendimento

Mandelbaum e Schwartz [17] mostraram que diferentes distribuições de serviço com dois primeiros momentos iguais podem causar uma diferença na performance do sistema $M/G/100$. Nesta Seção, queremos analisar as alterações na relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ decorrentes da mudança nos parâmetros da distribuição de atendimento. Mais especificamente, faremos alterações na média e no coeficiente de variação das distribuições de serviço para determinadas distribuições de paciência. O intuito foi

analisar o modelo $M/M/n+G$ com relação às alterações nas distribuições de atendimento e paciência.

Escolhemos as distribuições de atendimento a seguir, em que mantivemos a média igual a 1 minuto.

- Lognormal com média 1 e coeficiente de variação 1,2;
- Erlang com média 1 e parâmetro de escala 2;
- Determinística com média 1.

As distribuições acima foram escolhidas por serem usadas com freqüência na literatura. Brown [5] analisou o desempenho de um *Call Center* e verificou que o atendimento seguia uma distribuição Lognormal com média 1 e coeficiente de variação aproximadamente igual a 1,2. Com relação à escolha da Erlang (E_2), lembramos que é uma distribuição muito utilizada para o atendimento. No caso da escolha do atendimento determinístico, nossa intenção foi tentar verificar se essa distribuição de atendimento maximiza ou minimiza algumas medidas de desempenho (fazendo um comparativo com o Teorema 3.3.2).

Primeiramente, analisamos as alterações provocadas por estas diferentes distribuições de atendimento quando a paciência é exponencialmente distribuída com média de 2 minutos.

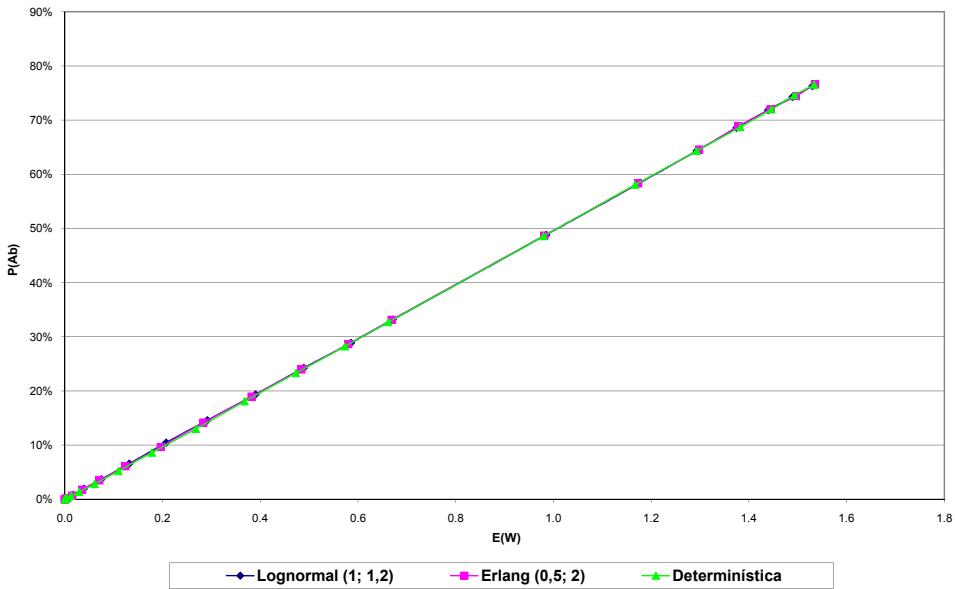


Figura 5.5: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial.

Observando a Figura 5.5, percebemos que há indícios de uma insensibilidade na relação $E(W) \times P(Ab)$ com relação à distribuição do atendimento, já que a linearidade da curva $E(W) \times P(Ab)$ se manteve. Nas Tabelas 5.5 e 5.6 apresentamos os valores obtidos na simulação. Note que a Determinística parece minimizar, para taxas de chegada entre 5 e 30, o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono em relação às distribuições Lognormal e Erlang. Apesar disso, há uma compensação de valores que parece tornar insensível a relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ conforme verificado na Figura 5.5.

Tempo médio de espera na fila			
taxa de chegada	Lognormal (1; 1,2)	Erlang (0,5; 2)	Determinística
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0001	0.0002
4	0.0011	0.0011	0.0012
5	0.0055	0.0051	0.0043
6	0.0173	0.0150	0.0123
7	0.0387	0.0353	0.0293
8	0.0747	0.0703	0.0610
9	0.1318	0.1236	0.1096
10	0.2073	0.1959	0.1780
11	0.2915	0.2833	0.2682
12	0.3901	0.3816	0.3679
13	0.4890	0.4839	0.4730
14	0.5855	0.5800	0.5733
15	0.6712	0.6683	0.6620
20	0.9849	0.9815	0.9798
25	1.1736	1.1732	1.1671
30	1.2932	1.2981	1.2928
35	1.3743	1.3783	1.3825
40	1.4393	1.4443	1.4458
45	1.4888	1.4959	1.4930
50	1.5298	1.5352	1.5335

Tabela 5.5: Tempos médios de espera na fila - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial.

Probabilidade de Abandono			
taxa de chegada	Lognormal (1; 1,2)	Erlang (0,5; 2)	Determinística
1	00.00%	00.00%	00.00%
2	00.00%	00.00%	00.00%
3	00.01%	00.00%	00.00%
4	00.04%	00.05%	00.04%
5	00.22%	00.21%	00.17%
6	00.79%	00.68%	00.59%
7	01.93%	01.78%	01.35%
8	03.72%	03.49%	02.81%
9	06.56%	06.09%	05.19%
10	10.44%	09.67%	08.61%
11	14.58%	14.13%	12.98%
12	19.37%	18.94%	18.08%
13	24.25%	23.95%	23.29%
14	28.85%	28.64%	28.21%
15	33.14%	33.12%	32.69%
20	48.80%	48.71%	48.56%
25	58.23%	58.30%	58.05%
30	64.31%	64.55%	64.28%
35	68.55%	68.83%	68.71%
40	71.83%	72.04%	71.97%
45	74.26%	74.42%	74.54%
50	76.27%	76.60%	76.54%

Tabela 5.6: Probabilidades de abandono - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial.

Quando consideramos a distribuição de paciência Exponencial Mista do Caso 3 com mesma média (2 minutos), podemos ver na Figura 5.6, que há uma leve alteração na relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ principalmente para baixas taxas de chegada, porém a insensibilidade permanece para quando a distribuição de paciência é mista. Nas Tabelas 5.7 e 5.8 notamos que a Determinística, entre as distribuições analisadas, minimiza a probabilidade de abandono para $5 < \lambda \leq 35$, mas não minimiza o tempo médio de espera como no caso da paciência Exponencial.

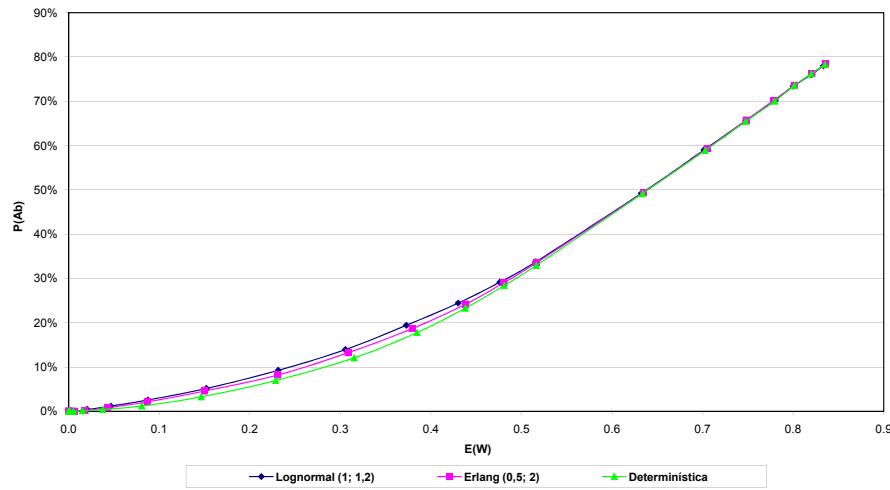


Figura 5.6: Gráfico de $E(W) \times P(AB)$ - Atendimento Lognormal; Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Tempo Médio de Espera			
taxa de chegada	lognormal (1; 1,2)	erlang (0,5; 2)	determinística
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0001	0.0002
4	0.0013	0.0012	0.0013
5	0.0062	0.0058	0.0050
6	0.0204	0.0179	0.0153
7	0.0465	0.0430	0.0375
8	0.0875	0.0865	0.0807
9	0.1521	0.1499	0.1462
10	0.2312	0.2308	0.2286
11	0.3056	0.3086	0.3153
12	0.3728	0.3795	0.3846
13	0.4300	0.4384	0.4379
14	0.4760	0.4806	0.4811
15	0.5155	0.5165	0.5165
20	0.6321	0.6347	0.6337
25	0.7016	0.7050	0.7029
30	0.7478	0.7480	0.7476
35	0.7803	0.7781	0.7793
40	0.7999	0.8015	0.8012
45	0.8196	0.8207	0.8199
50	0.8334	0.8356	0.8353

Tabela 5.7: Tempos médios de espera na fila - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Probabilidade de Abandono			
taxa de chegada	lognormal (1; 1,2)	erlang (0,5; 2)	determinística
1	00.00%	00.00%	00.00%
2	00.00%	00.00%	00.00%
3	00.00%	00.00%	00.00%
4	00.01%	00.00%	00.00%
5	00.09%	00.05%	00.02%
6	00.39%	00.20%	00.10%
7	01.19%	00.80%	00.42%
8	02.57%	02.14%	01.22%
9	05.16%	04.57%	03.26%
10	09.24%	08.19%	06.95%
11	13.93%	13.25%	12.07%
12	19.43%	18.70%	17.77%
13	24.45%	24.24%	23.31%
14	29.14%	29.05%	28.41%
15	33.72%	33.54%	32.96%
20	49.21%	49.43%	49.18%
25	59.03%	59.37%	58.93%
30	65.64%	65.72%	65.43%
35	70.28%	70.19%	70.04%
40	73.40%	73.63%	73.54%
45	75.96%	76.31%	76.17%
50	78.03%	78.43%	78.33%

Tabela 5.8: Probabilidades de abandono - Atendimento Lognormal, Erlang e Determinístico; Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Com isso, notamos que a distribuição do atendimento não provoca grandes alterações na relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ para os casos estudados.

Como há indícios de uma insensibilidade com relação à distribuição do atendimento na relação $E(W) \times P(AB)$, vamos analisar a relação entre essas medidas, porém modificando a média de atendimento. Acreditamos que o modelo seja sensível não com relação à distribuição dos serviços, mas sim às modificações da média do atendimento.

Primeiramente, usando a distribuição de paciência Exponencial Mista do Caso 3, variamos a média respectivamente em 1, 2 e 3 minutos em uma distribuição Determinística para o serviço. Percebemos que há uma alteração na relação $E(W) \times P(AB)$, principalmente para espera de até meio minuto, ver Figura 5.7. As Figuras 5.8 e 5.9 mostram que a Determinística com média 3 maximiza ambas as medidas de desempenho se comparadas com as Determinísticas de média 1 e 2, o que já era esperado, pois aumentando a média do atendimento a fila de espera irá aumentar, consequentemente o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono também.

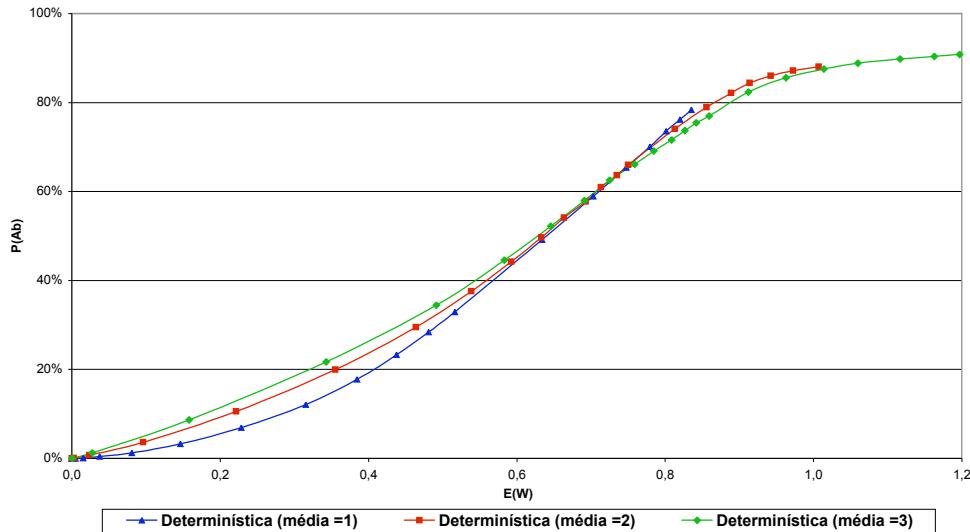
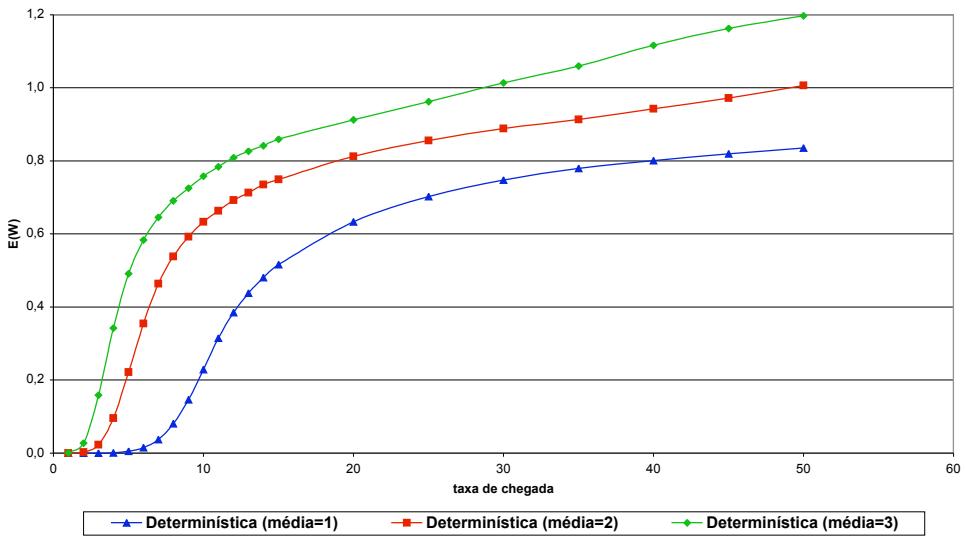
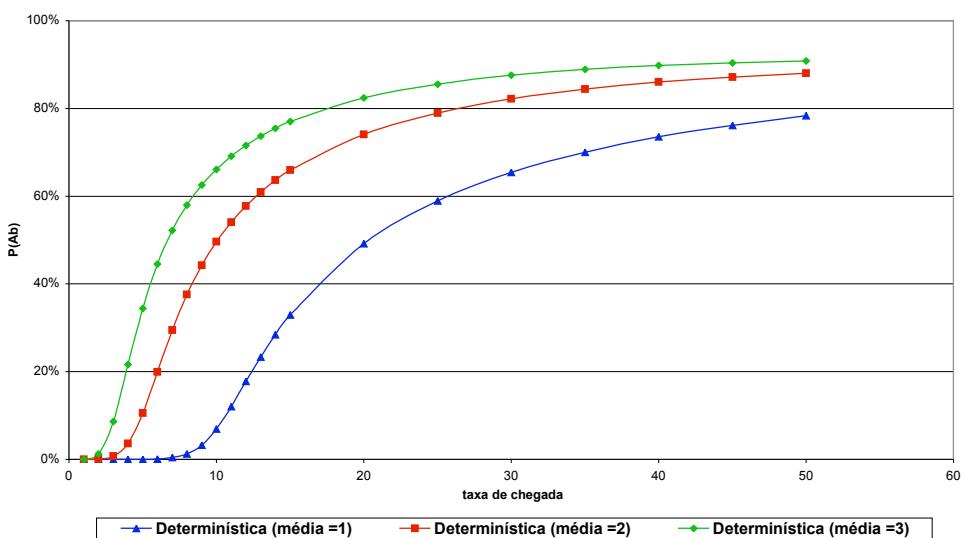


Figura 5.7: Gráfico de $E(W) \times P(AB)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Figura 5.8: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.Figura 5.9: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Agora, vamos variar a média da distribuição Determinística para o atendimento nos valores 1, 2 e 3 minutos usando a distribuição de paciência Uniforme Mista do Caso 3 (ver Figura 5.10). Note que se repete o que ocorreu com o uso da paciência Exponencial Mista do Caso 3, ou seja, há uma maior alteração na relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ para um tempo médio de espera de até 0,5 minuto. Novamente, nos exemplos estudados, a distribuição Determinística de atendimento com média 3 maximiza ambas as medidas de desempenho, conforme indicadas pelas Figuras 5.11 e 5.12.

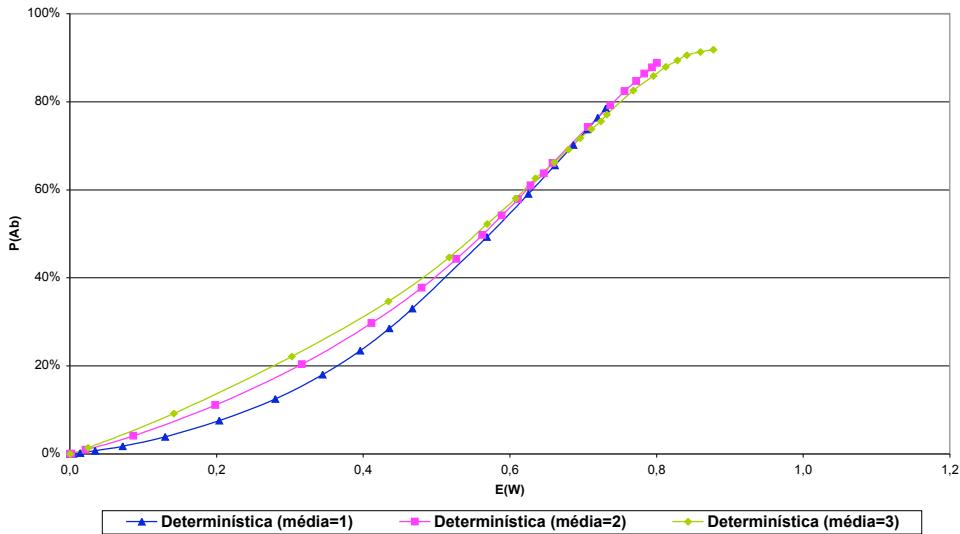


Figura 5.10: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

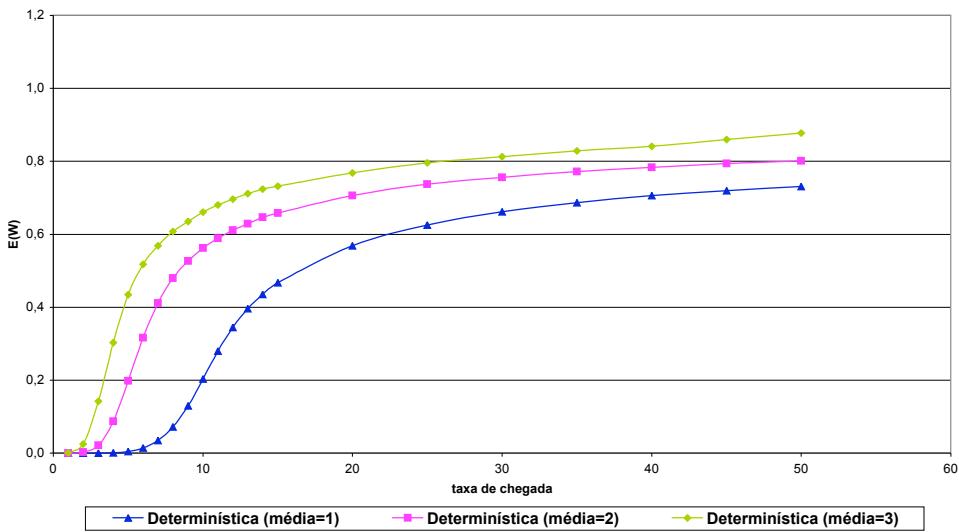


Figura 5.11: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

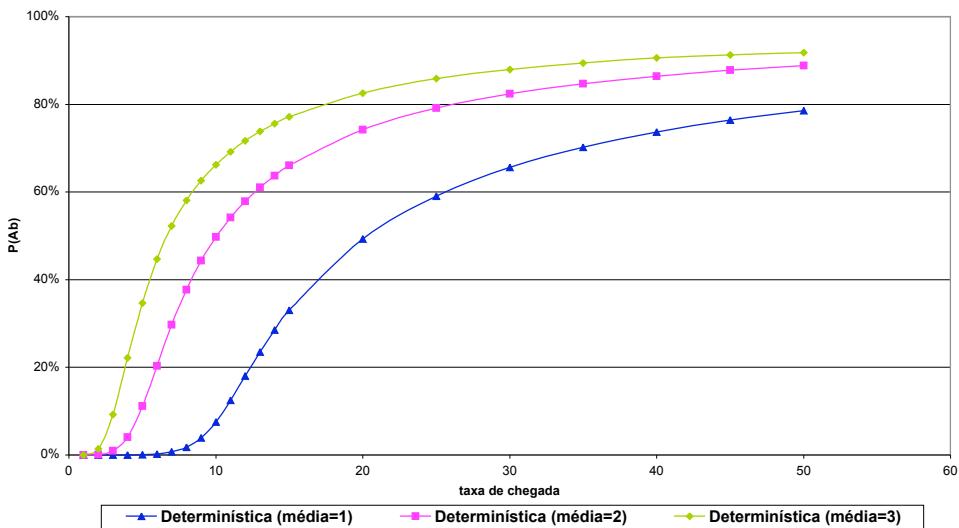


Figura 5.12: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Determinístico, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

Agora, com distribuição de paciência Uniforme Mista do Caso 3, vamos variar a média da distribuição Lognormal para o atendimento, porém mantivemos o coeficiente de variação (CV) constante. Para isso, usamos a Lognormal (1; 1, 2); a Lognormal (2; 2, 4) e a Lognormal (3; 3, 6) todas com CV igual a 1,2. Podemos perceber na Figura 5.13 que conforme a média da distribuição do atendimento aumenta, a concavidade da curva $E(W) \times P(Ab)$ diminui. Também podemos perceber nas Figuras 5.14 e 5.15 que conforme a média da distribuição do atendimento aumenta, o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono aumentam.

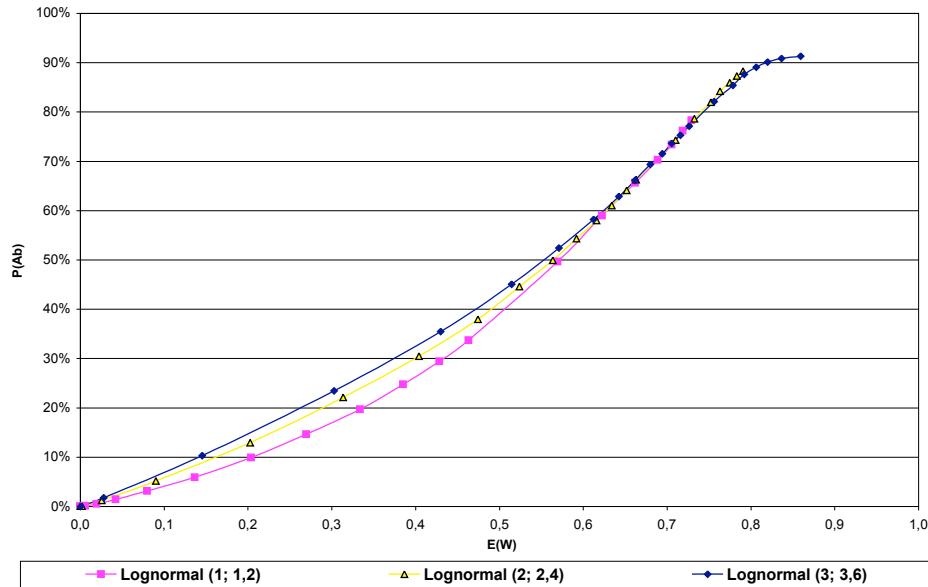


Figura 5.13: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

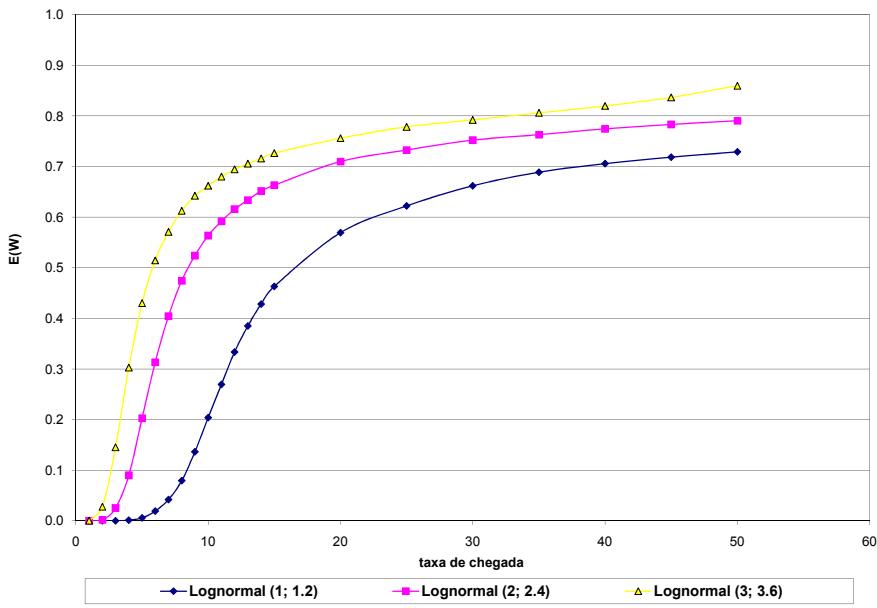


Figura 5.14: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

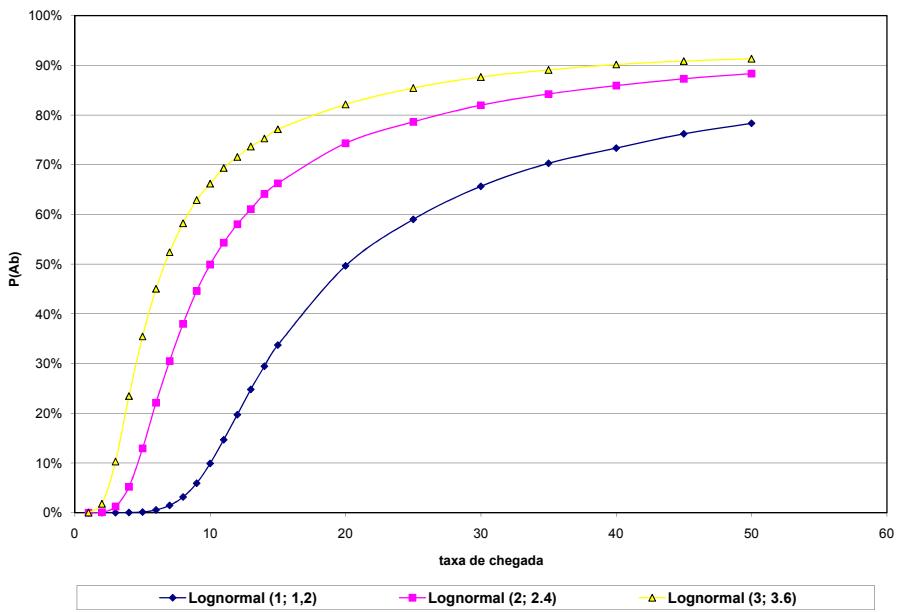


Figura 5.15: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

Usamos também a distribuição de atendimento Gama, em que variamos a média da distribuição, mas mantivemos o CV constante. Escolhemos as médias para o atendimento iguais a 1, 2 e 3 minutos e coeficiente de variação igual a 2 para a distribuição de paciência Exponencial Mista do Caso 3. Para isso, utilizamos as seguintes distribuições de atendimento: $\text{Gama}(4, \frac{1}{4})$, $\text{Gama}(8, \frac{1}{4})$ e $\text{Gama}(12, \frac{1}{4})$ em que o primeiro parâmetro é o de escala. Podemos notar que apesar do tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono aumentarem conforme a média do atendimento aumenta, a relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ pouco se altera. Veja as Figuras 5.16, 5.17 e 5.18.

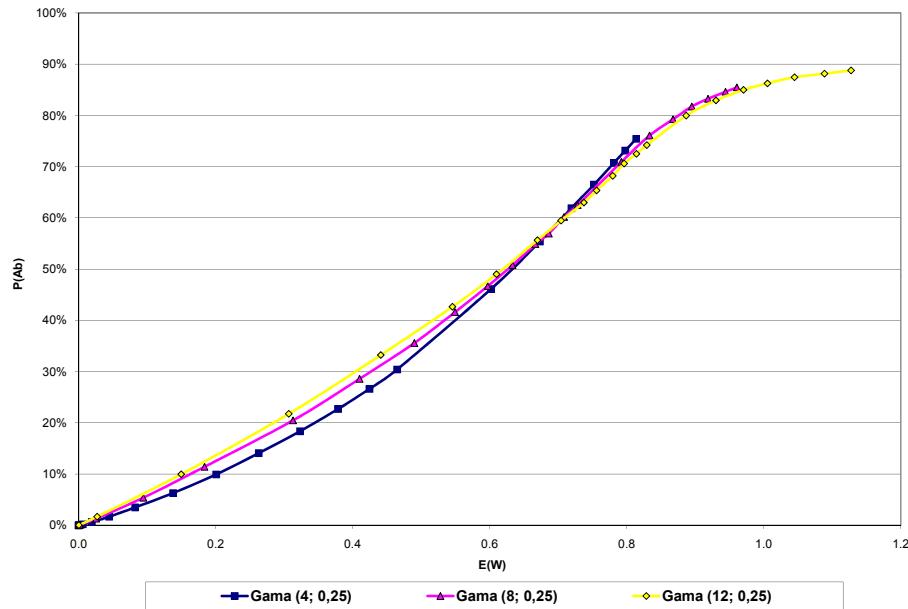
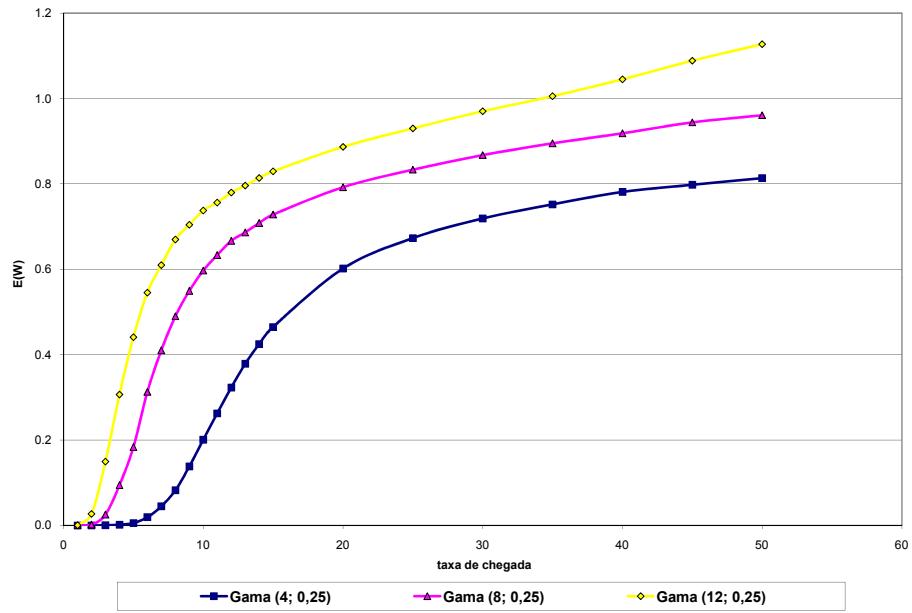
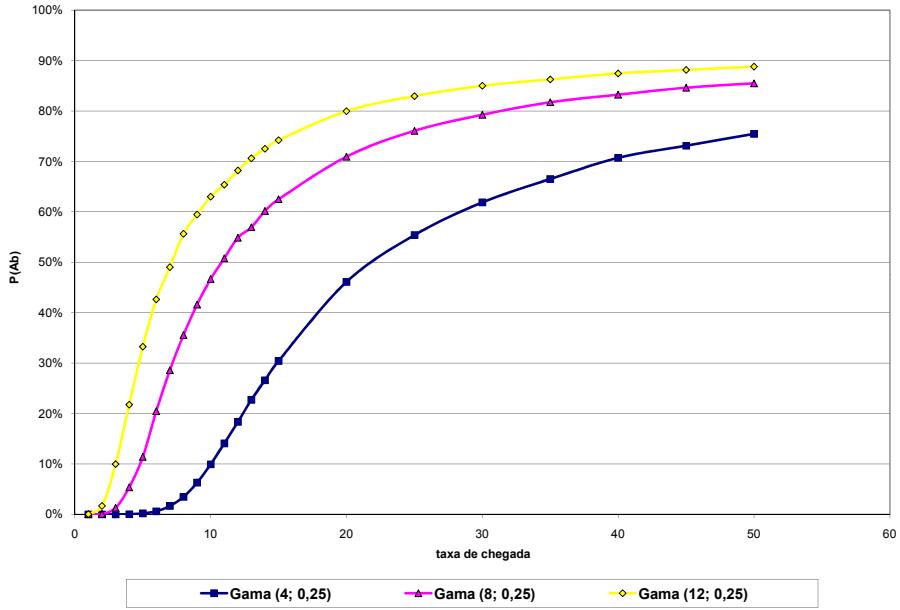


Figura 5.16: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Gama, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Figura 5.17: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Gama, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.Figura 5.18: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Gama, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Notamos que a média da distribuição do atendimento parece afetar mais a relação entre $E(W)$ e $P(AB)$ do que a própria distribuição de atendimento.

Agora, para verificarmos se o coeficiente de variação modifica a relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ assim como a média, vamos manter a média de atendimento e alterar o CV .

Considerando a distribuição Lognormal para o serviço usamos a Lognormal (1; 1,2) com CV igual a 1,2, a Lognormal (1; 4) com CV igual a 4 e a Lognormal (1; 10) com CV igual a 10. A distribuição de paciência será Exponencial Mista e Uniforme Mista do Caso 3. Em ambos os casos há uma pequena alteração na relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$. Observe nas Figuras 5.19 e 5.20 que a concavidade da curva $E(W) \times P(Ab)$ diminui conforme o CV aumenta, porém ambas as curvas obtidas são muito parecidas nos dois gráficos. Vamos avaliar nas Figuras 5.21 a 5.24 o comportamento isolado de $E(W)$ e $P(Ab)$ em função da taxa de entrada para os diferentes atendimentos que estão sendo considerados. Temos indícios que, conforme o CV aumenta, o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono diminuem.

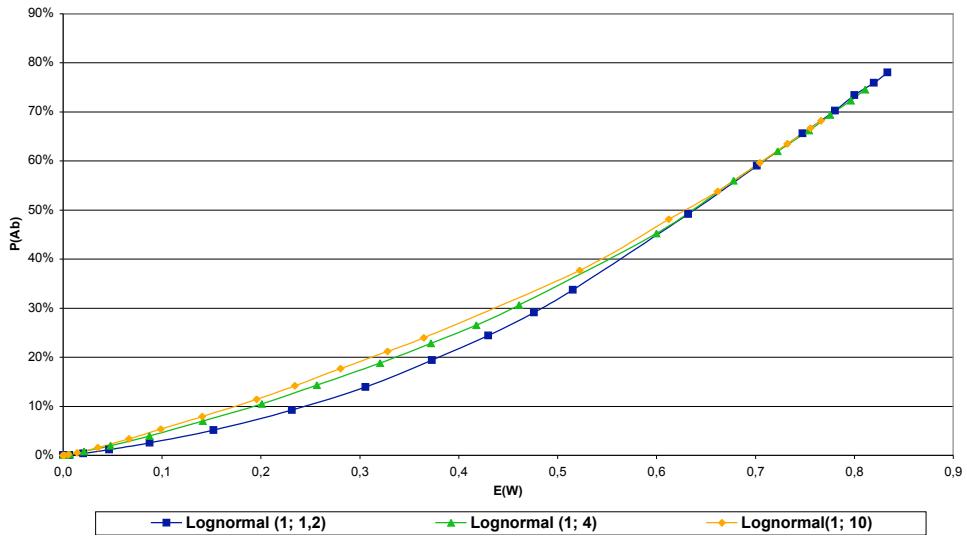
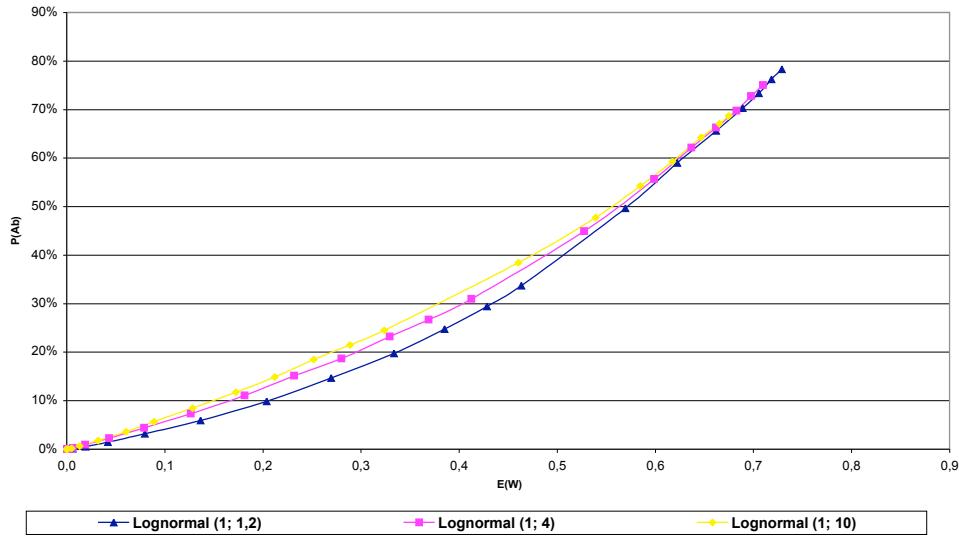
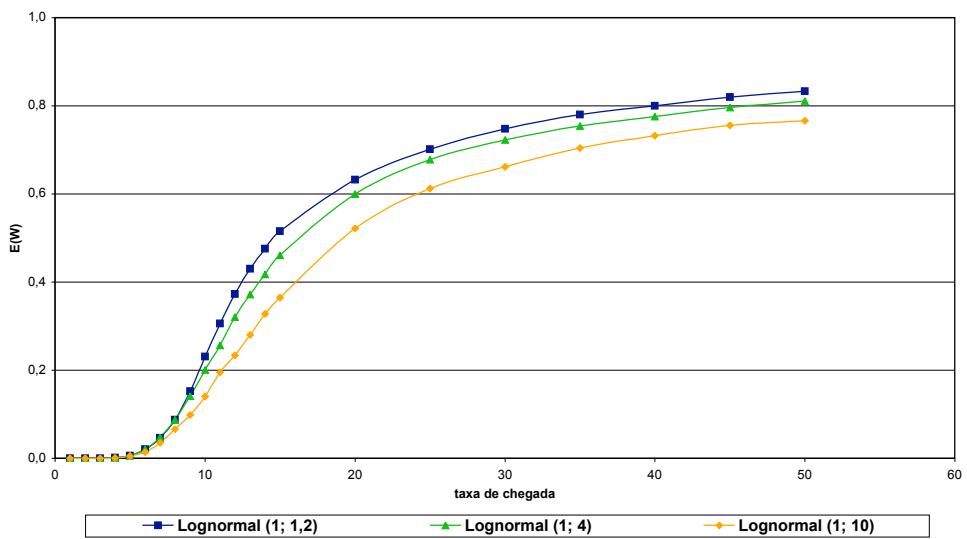


Figura 5.19: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

Figura 5.20: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.Figura 5.21: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

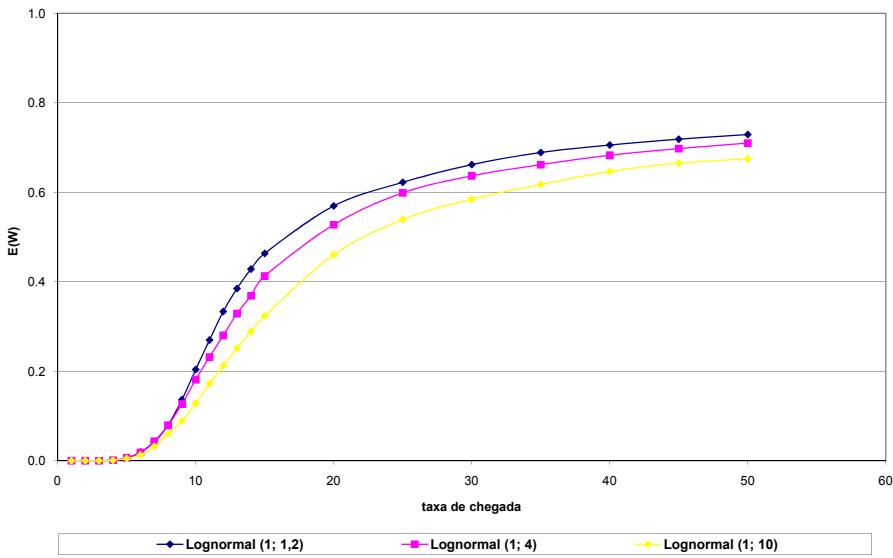


Figura 5.22: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

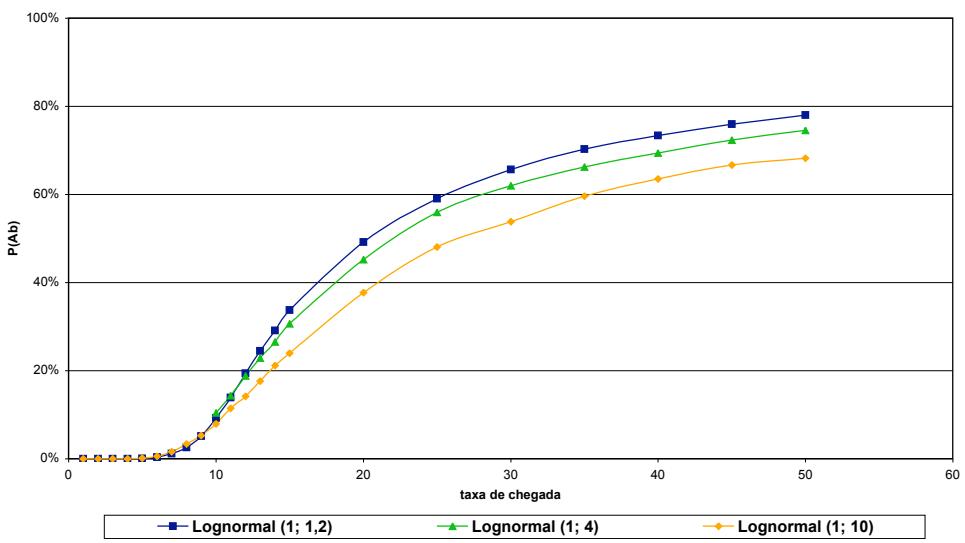


Figura 5.23: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

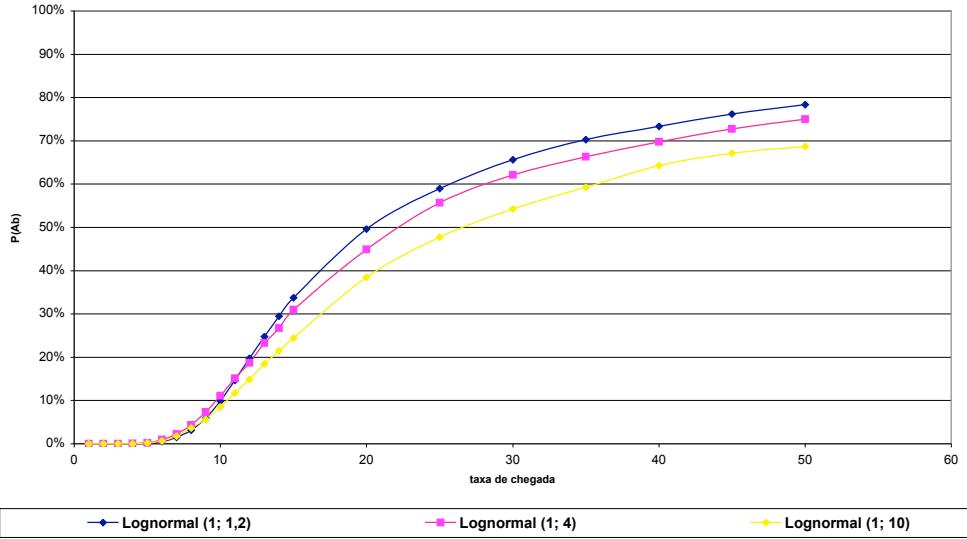


Figura 5.24: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

Usando a distribuição Lognormal (2; 2, 4) com CV igual a 1,2, a Lognormal (2; 8) com CV igual a 4 e a Lognormal (2; 20) com CV igual a 10, todas com média de 2 minutos para o atendimento e considerando a distribuição de paciência Uniforme Mista do Caso 3, notamos que o mesmo comportamento se repete quando comparadas com as Logormais de média 1 e coeficientes de variação 1, 2; 4 e 10. Percebemos que há uma pequena alteração na relação entre $E(W)$ e $P(AB)$, veja a Figura 5.25 e observamos que a concavidade da curva $E(W) \times P(AB)$ diminui conforme o CV aumenta. Nas Figuras 5.26 e 5.27, há indícios que, conforme o CV aumenta, o tempo médio de espera e a probabilidade de abandono diminuem.

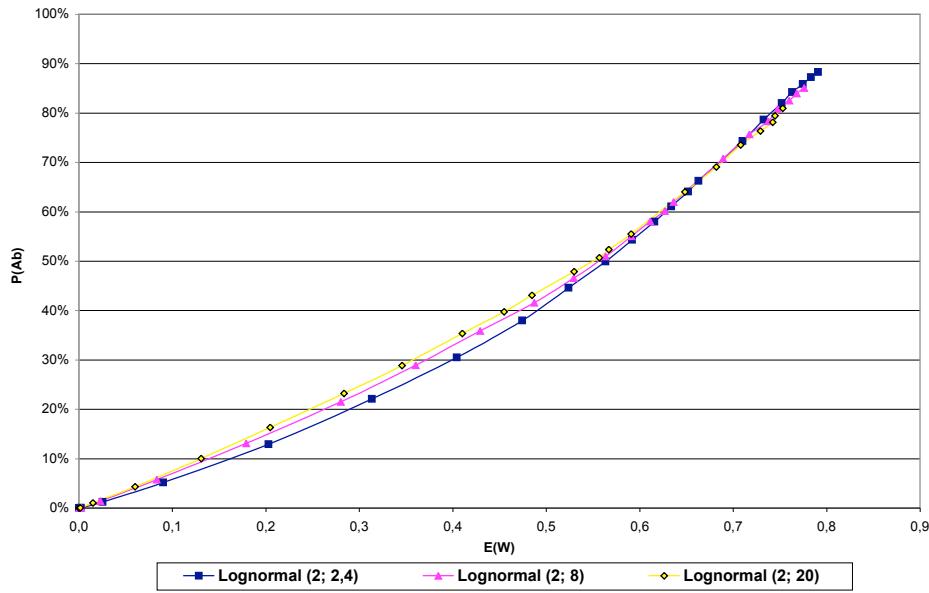


Figura 5.25: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

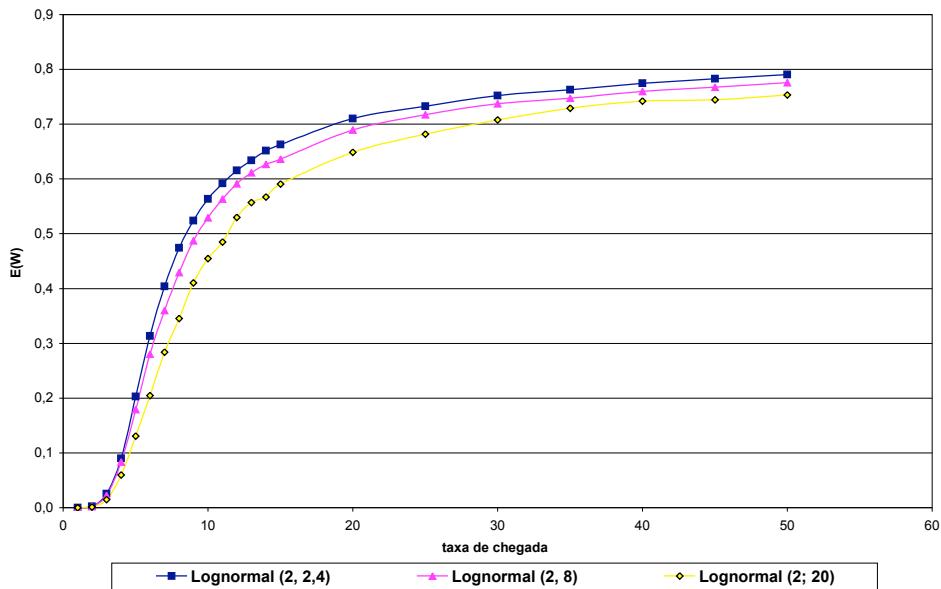


Figura 5.26: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

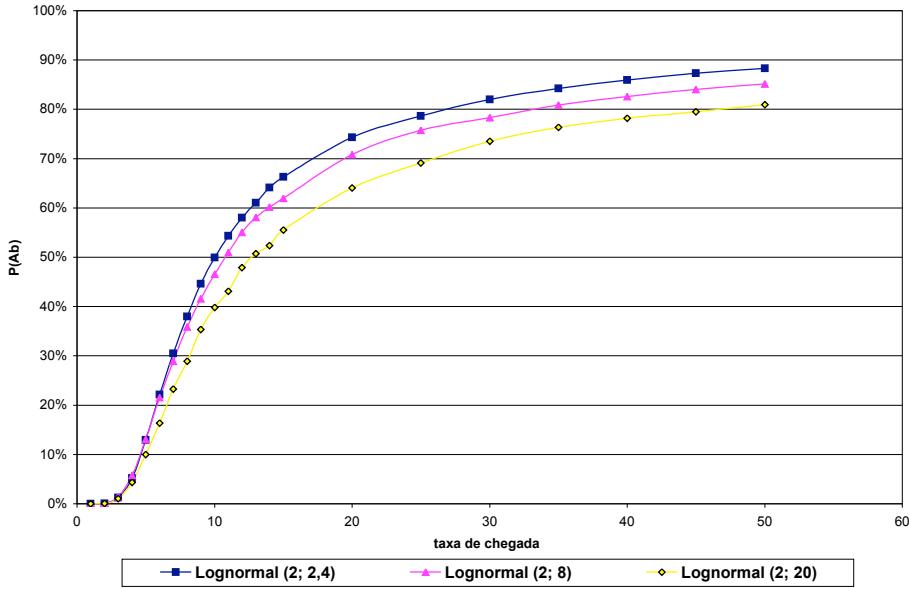


Figura 5.27: Gráfico de $\lambda \times P(Ab)$ - Atendimento Lognormal, Paciência Uniforme Mista do Caso 3.

No entanto, quando a distribuição do atendimento é Erlang, não ocorre o que observamos com a Lognormal. Analisamos a Erlang com média 1 e alteramos o coeficiente de variação em 0,7; 0,5 e 0,3 respectivamente utilizando as distribuições Erlang (0,5; 2), Erlang (0,25; 4) e Erlang (0,1; 10) com distribuição Exponencial Mista do Caso 3 para a paciência. A mudança do CV praticamente não alterou a relação entre $E(W)$ e $P(Ab)$ (ver Figura 5.28) e o mesmo ocorreu quando analisamos o comportamento isolado de $E(W)$ e $P(Ab)$ em função da taxa de entrada para os diferentes atendimentos considerados (veja as Figuras 5.29 e 5.30).

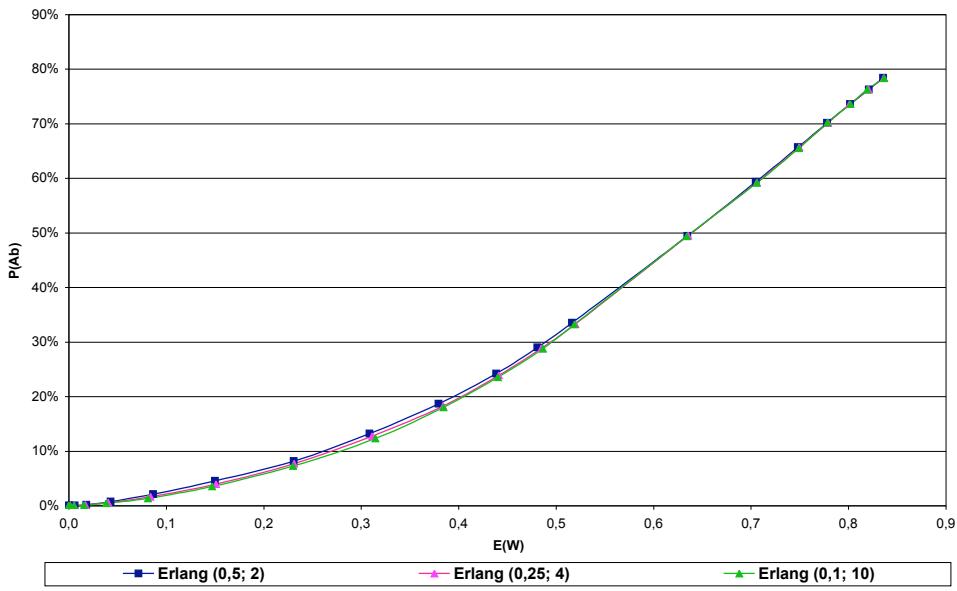


Figura 5.28: Gráfico de $E(W) \times P(Ab)$ - Atendimento Erlang, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

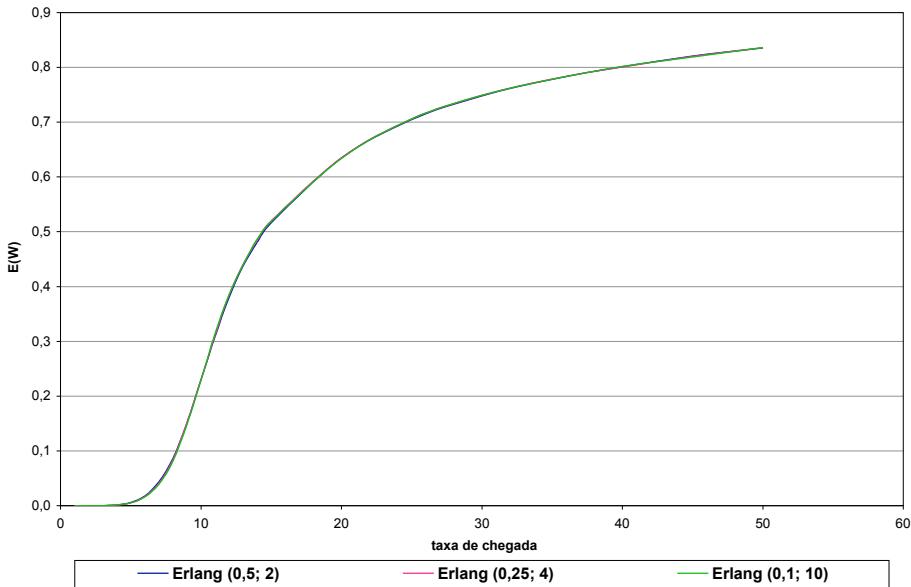


Figura 5.29: Gráfico de $\lambda \times E(W)$ - Atendimento Erlang, Paciência Exponencial Mista do Caso 3.

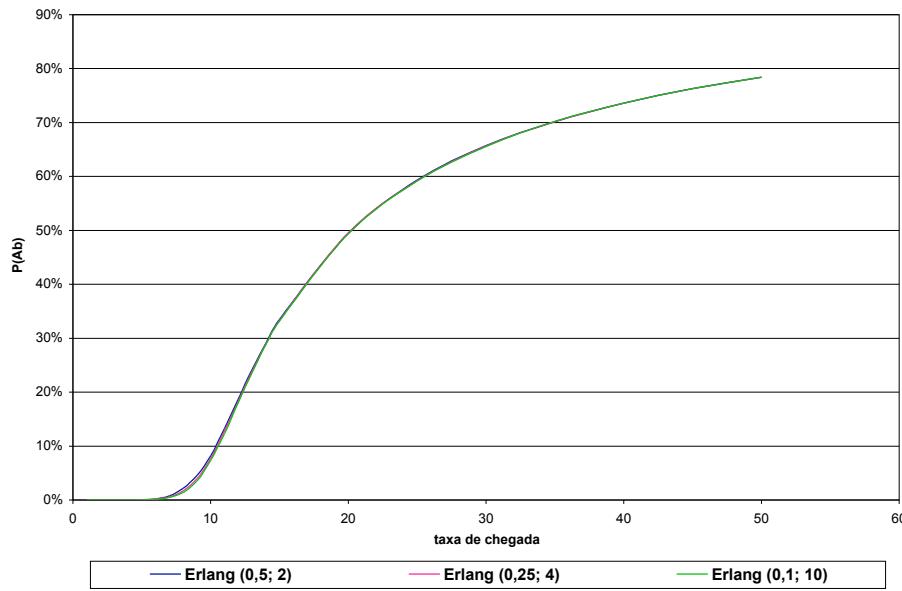


Figura 5.30: Gráfico de $\lambda \times P(AB)$ - Atendimento Erlang, Paciênci Exponencial Mista do Caso 3.

Podemos perceber que o coeficiente de variação da distribuição do atendimento Lognormal, assim como a média, afeta a relação entre $E(W)$ e $P(AB)$. No entanto, quando a distribuição do atendimento é Erlang, a alteração do seu coeficiente de variação não influencia demasiadamente na relação $E(W) \times P(AB)$, talvez porque os coeficientes de variação, apesar de serem diferentes, são muito próximos.

Capítulo 6

Conclusão e Pesquisas Futuras

Este trabalho estudou um modelo de filas com abandono e a relação entre o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono.

Apresentamos o tempo virtual de espera na fila via Equação de Takács e o relacionamos com o tempo real de espera na fila. Em estado estacionário, as funções de distribuição dos tempos real e virtual no sistema $M/G/1 + G$ coincidem.

Descrevemos os diferentes resultados encontrados em Baccelli e Hebuterne e em Brandt e Brandt. Apresentamos os resultados de Mandelbaum para a fila $M/M/n+G$ em que a distribuição de paciência Determinística maximiza o tempo médio de espera na fila e minimiza a probabilidade de abandono com relação às outras distribuições de mesma média. Os resultados de tráfego leve sugerem que, para pequenas taxas de chegada, a razão entre a probabilidade de abandono ($P(Ab)$) e o tempo médio de espera na fila ($E(W)$) é próxima à taxa de abandono da fila dado que há um cliente nela (α_1).

Estudamos o impacto da paciência do tipo Mista no desempenho da fila $M/M/n+G$ com respeito a uma particularidade que tem sido observada em *Call Centers*: a relação linear entre o tempo médio de espera na fila e a probabilidade de abandono quando a distribuição de paciência é Exponencial. Estudamos os Casos 1, 2 e 3 para as distribuições Exponencial e Uniforme Mistas com cada caso correspondendo ao número de intervenções eletrônicas.

Em todos os casos estudados, com as duas distribuições de paciência do tipo mista consideradas, não observamos linearidade entre as medidas de desempenho $E(W)$ e $P(Ab)$. Entretanto, na análise de taxas moderadas de abandono, observamos uma relação próxima da linearidade para essas medidas de desempenho no Caso 1, tanto para a Exponencial Mista quanto para a Uniforme Mista. Nos Casos 2 e 3 de ambas as distribuições, a relação é levemente convexa e as curvas são parecidas. Percebemos, também, que as curvas produzidas da relação entre a taxa de chegada e o tempo médio de espera na fila se distinguem para todos os Casos, tanto da Uniforme Mista quanto da Exponencial Mista. Por outro lado, a relação entre a taxa de chegada e a probabilidade de abandono praticamente não se alteram para ambas as distribuições mistas. Além disso, o tempo médio de espera na fila é menor para as distribuições de paciência mistas quando comparadas com a Exponencial ou a Uniforme de mesmos parâmetros.

Notamos também que a relação $E(W) \times P(Ab)$ é mais afetada pela média e pelo coeficiente de variação do que pelo particular modelo escolhido para o tempo de serviço.

Vamos mencionar a seguir alguns tópicos de pesquisa relacionados ao trabalho aqui apresentado.

Um possível ponto a ser explorado, em estudos futuros, seria uma análise de dados reais, buscando avaliar a adaptação dos modelos de paciência Mista para a realidade de Centrais de Atendimento.

Outro ponto é avaliar os modelos $M/G/n+G$ com serviço e paciência geral. É importante avaliar a insensibilidade das medidas de desempenho quanto ao modelo do tempo de atendimento. Neste sentido, explorar o coeficiente de variação das distribuições de atendimento seria uma alternativa. Ampliar os estudos do modelo $M/G/n + G$ e, como uma análise exata parece ser extremamente complexa, poderia-se recorrer a aproximações e simulações (ver [17] e [20]).

Outra frente de estudo se refere a ótica do processo de chegada. Poderia-se definir a taxa de chegada através de uma função dependente do tempo, $\lambda(t)$, a fim de se considerar a não estacionariedade das chegadas tornando mais realista o modelo. Tal técnica foi adotada por Jennings e outros [12]. Também, como referência inicial desse estudo seria conveniente consultar Jongbloed e Koole [13] que se concentraram no caso em que a taxa de chegada do modelo Poisson é uma variável aleatória com distribuição Gama.

Apêndice A

Algoritmo para construir a curva $E(W) \times P(Ab)$

Este algoritmo foi desenvolvido em *R* para gerar os valores de $E(W)$ e $P(Ab)$ para as diversas escolhas da taxa de chegada. Após isso ele gera a curva $E(W) \times P(Ab)$. Existem possibilidades de escolha dos parâmetros sendo que, o algoritmo apresentado se refere à paciência Exponencial, mas pode ser adaptado para qualquer distribuição.

```
k #é o número de clientes no sistema  
lam=1 #taxa de chegada (1 cliente por minuto)  
n=10 #número de servidores  
mi=1 #taxa de atendimento (1 cliente por minuto)  
a=0.5 #taxa de tolerância  
r=150 #tamanho da sala de espera  
i=1  
c=c(0:200)  
soma=NULL  
prob=NULL  
wesp=NULL  
a0=NULL  
a1=NULL  
alpha=NULL  
sab=NULL  
PAb=NULL  
EW=NULL  
passo=0.25
```

```

while (lam <= 50)
{
for(k in 0:(n+r))
{
for(j in 1:(n-1)){soma[j]<-((factorial(n))*(lam^j)*(mi^(n-j)))/(factorial(j))}

sm<-sum(soma)

Q<-integrate(function(qsi){exp(lam*(1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))-qsi)},0,150)$value

Q1<-integrate(function(qsi){exp(lam*(1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))-qsi)},150,Inf)$value

i_g<-((factorial(n))*(mi^n))+sm+((lam^n)*Q)+((lam^n)*Q1)

if(k<=n)
{
p1<-function(k){(((i_g)^(-1))*(factorial(n))*((mi)^(n-k))*(lam^k))/(factorial(k))}

prob[k+1]<-p1(k)

}
else
{
p2<-function(K){((i_g)^(-1))*(lam^k)*(1/factorial(k-n))*(integrate(function(qsi){(((1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))))^(k-n))*(exp(-qsi))},0,150)$value+integrate(function(qsi){(((1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))))^(k-n))*(exp(-qsi))},150,Inf)$value)}

prob[k+1]<-p2(k)

wesp[k-n]<-(k-n)*prob[k+1]

alpha[k-n]<- (((1/factorial(k-n-1))*(integrate(function(qsi){((1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))))^(k-n-1)*exp(-qsi)},0,150)$value+integrate(function(qsi){((1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))))^(k-n-1)*exp(-qsi)},150,Inf)$value))/((1/factorial(k-n))*(integrate(function(qsi){((1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))))^(k-n)*exp(-qsi)},0,150)$value+integrate(function(qsi){((1/a)*(1-exp((-a*qsi)/(n*mi))))^(k-n)*exp(-qsi)},150,Inf)$value)))-(n*mi)

sab[k-n]<-alpha[k-n]*prob[k+1]

}
}

PAb[(lam+0.75*c[i])]<-(1/lam)*(sum(sab))

EW[(lam+0.75*c[i])]<-(1/lam)*(sum(wesp))

```

```
plot(EW,PAb, type="l", main="Probabilidade de Abandono x Tempo Médio de Espera para Distribuição de Paciência Exponencial")
```

```
lam<-lam+passo
```

```
i<-i+1
```

```
}
```


Apêndice B

Algoritmo no software ARENA

O algoritmo está apresentado em linguagem SIMAN e foi utilizado juntamente com uma planilha Excel. Para maiores esclarecimentos entre em contato com o autor.

```
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Create 5 (Create 7 le excel)  
;  
56$ CREATE, 1,SecondstoBaseTime(0.000011),Entity 1:SecondstoBaseTime(1),1:NEXT(57$);  
57$ ASSIGN: Create 7 le excel.NumberOut=Create 7 le excel.NumberOut + 1:NEXT(50$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 22 (Assign 7 determinar contador_ )  
;  
50$ ASSIGN: v.contador=1:NEXT(51$);  
;  
;  
; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 11 (ReadWrite 1 le do excel e  
armazena em uma variavel_ )  
;  
51$ READ, File 3,RECORDSET(Recordset dados): v.dados(v.contador):NEXT(52$); ;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Decide 12 (Decide 3 leitura nao chegou ao fim?___)
```

```

;

52$ BRANCH, 1: If,v_contador <2,60$,Yes: Else,61$,Yes;

60$ ASSIGN: Decide 3 leitura nao chegou ao fim?___.NumberOut True= Decide 3 leitura nao
chegou ao fim?___.NumberOut True + 1:NEXT(53$);

61$ ASSIGN: Decide 3 leitura nao chegou ao fim?___.NumberOut False= Decide 3 leitura nao
chegou ao fim?___.NumberOut False + 1:NEXT(38$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 23 (Assign 6 acumula contador__)
;

53$ ASSIGN: v_contador=v_contador + 1:NEXT(51$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 7 (Dispose 7)
;

38$ ASSIGN: Dispose 7.NumberOut=Dispose 7.NumberOut + 1;

62$ DISPOSE: Yes;

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Create 1 (Chegadas)
;

63$ CREATE, 1,MinutesToBaseTime(0.01),Entity 1:MinutesToBaseTime(exp_int_cheg),1000:NEXT(64$);

64$ ASSIGN: Chegadas.NumberOut=Chegadas.NumberOut + 1:NEXT(41$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 18 (conta arrivals)
;

41$ ASSIGN: conta_arriv=conta_arriv+1: a_distribuicao=v_dados(1): media=v_caso_escolhido(4):
desvio=v_dados(2): a_tempo=exp_dist(a_distribuicao):NEXT(40$);

;

```

```

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 9 (verifica chegadas)

;

40$ BRANCH, 1: If,conta_arriv<=exp_max_arriv,67$,Yes: Else,68$,Yes;

67$ ASSIGN: verifica chegadas.NumberOut True=verifica chegadas.NumberOut True + 1:NEXT(6$);

68$ ASSIGN: verifica chegadas.NumberOut False=verifica chegadas.NumberOut False + 1:NEXT(42$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 3 (Assign 10 sorteia probabilidade e a pa-
ciencia)

;

6$ ASSIGN: Paciencia_sorteio=unif(0,1):NEXT(43$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 10 (verifica qual a o cenario)

;

43$ BRANCH, 1: If,v_caso_escolhido(1) <=3,69$,Yes: Else,70$,Yes;

69$ ASSIGN: verifica qual a o cenario.NumberOut True=verifica qual a o cenario.NumberOut
True + 1:NEXT(14$);

70$ ASSIGN: verifica qual a o cenario.NumberOut False=verifica qual a o cenario.NumberOut
False + 1:NEXT(48$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.Search 1 (Search 1)

;

14$ FINDJ, 1,1046:v_probabilidade(j,v_caso_escolhido(1)) >=Paciencia_sorteio;

71$ BRANCH, 1: If,J0,72$,Yes: Else,73$,Yes;

72$ DELAY: 0.0,,VA:NEXT(16$);

73$ DELAY: 0.0,,VA:NEXT(15$);

;

```

```

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 10 (Assign 10 pega o valor da paciencia)
; 16$ ASSIGN: Paciencia_sorteio_tempo=v_probabilidade(j,4): Paciencia=Paciencia_sorteio_tempo+
tnow:NEXT(1$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 1 (Verifica se ha espaco na fila)
;

1$ BRANCH, 1: If,NQ(Hold 8 espera caixa vazio.Queue) < 150,74$,Yes: Else,75$,Yes;
74$ ASSIGN: Verifica se ha espaco na fila.NumberOut True=Verifica se ha espaco na fila.NumberOut
True + 1 :NEXT(8$);

75$ ASSIGN: Verifica se ha espaco na fila.NumberOut False=Verifica se ha espaco na fila.NumberOut
False + 1 :NEXT(7$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 3 (Decide 7existe algum caixa desocupado)
;

8$ BRANCH, 1: If, NR(r_atendente) < 10,76$,Yes: Else,77$,Yes;
76$ ASSIGN: Decide 7existe algum caixa desocupado.NumberOut True= Decide 7existe algum
caixa desocupado.NumberOut True + 1:NEXT(17$);

77$ ASSIGN: Decide 7existe algum caixa desocupado.NumberOut False= Decide 7existe algum
caixa desocupado.NumberOut False + 1:NEXT(11$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Process 1 (Atendimento)
;

17$ ASSIGN: Atendimento.NumberIn=Atendimento.NumberIn + 1: Atendimento.WIP=Atendimento.WIP+1
81$ QUEUE, Atendimento.Queue;
80$ SEIZE, 2,VA: r_atendente,1:NEXT(79$);
79$ DELAY: a_tempo,,VA;

```

```
78$ RELEASE: r_atendente,1;

126$ ASSIGN: Atendimento.NumberOut=Atendimento.NumberOut + 1: Atendimento.WIP=Atendimento.WI
1:NEXT(18$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 11 (Assign 29 marca quantos foram atendi-
dos)

;

18$ ASSIGN: v_atendidos=v_atendidos + 1:NEXT(30$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 4 (ReadWrite 4)

;

30$ WRITE, File 2: 1, tempo_espera_fila_inicio, tempo_espera_fila, Paciencia:NEXT(12$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 3 (Dispose 3)

;

12$ ASSIGN: Dispose 3.NumberOut=Dispose 3.NumberOut + 1;

129$ DISPOSE: Yes;

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 5 (Assign 19 marca tempo de fila inicial)

;

11$ ASSIGN: tempo_espera_fila_inicio=tnow:NEXT(9$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.Hold 1 (Hold 8 espera caixa vazio)

;
```

```

9$ QUEUE, Hold 8 espera caixa vazio.Queue; SCAN: NR(r_atendente) < 10:NEXT(19$);
;
;
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 12 (Assign 19 marca tempo de fila)
;
19$ ASSIGN: tempo_espera_fila=tnow - tempo_espera_fila_inicio: a_tempo_teste=tnow:NEXT(32$);
;
;
; Model statements for module: BasicProcess.Process 3 (Atendimento _1)
;
32$ ASSIGN: Atendimento _1.NumberIn=Atendimento _1.NumberIn + 1: Atendimento _1.WIP=Atendimento
_1.WIP+1;
133$ QUEUE, Atendimento _1.Queue;
132$ SEIZE, 2,VA:
r_atendente,1:NEXT(131$);
131$ DELAY: a_tempo,,VA;
130$ RELEASE: r_atendente,1;
178$ ASSIGN: Atendimento _1.NumberOut=Atendimento _1.NumberOut + 1: Atendimento
_1.WIP=Atendimento _1.WIP-1:NEXT(33$);
;
;
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 16 (Assign 29 marca quantos foram atendi-
dos_)
;
33$ ASSIGN: v_atendidos=v_atendidos + 1: a_tempo_atendimento=tnow - a_tempo_teste:NEXT(31$);
;
;
; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 6 (ReadWrite 6)
;
31$ WRITE, File 2: 2, tempo_espera_fila_inicio, tempo_espera_fila, Paciencia:NEXT(12$); ;

```

```

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 4 (Assign 18 conta as pessoas que abandonaram a fila por nao haver espaco)

;

7$ ASSIGN: v_cont_abandono_falta_espaco=v_cont_abandono_falta_espaco + 1:NEXT(34$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 7 (ReadWrite 7)

;

34$ WRITE, File 2: 0, tempo_espera_fila_inicio, tempo_espera_fila, Paciencia:NEXT(0$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 1 (Dispose 1)

;

0$ ASSIGN: Dispose 1.NumberOut=Dispose 1.NumberOut + 1;

181$ DISPOSE: Yes;

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 5 (Dispose 10 erro)

;

15$ ASSIGN: Dispose 10 erro.NumberOut=Dispose 10 erro.NumberOut + 1;

182$ DISPOSE: Yes;

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.Search 3 (Search 3)

;

48$ FINDJ, 1,1902:v_probabilidade_unif(j,v_caso_escolhido(1)-3) >=Paciencia_sorteio;

183$ BRANCH, 1: If,J0,184$,Yes: Else,185$,Yes;

184$ DELAY: 0.0,,VA:NEXT(49$);

```

```
185$ DELAY: 0.0,,VA:NEXT(15$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 21 (Assign 10 pega o valor da paciencia_ )  
;  
49$ ASSIGN: Paciencia_sorteio_tempo=v_probabilidade_unif(j,4): Paciencia=Paciencia_sorteio_tempo+  
tnow:NEXT(1$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 8 (Dispose 8)  
;  
42$ ASSIGN: Dispose 8.NumberOut=Dispose 8.NumberOut + 1;  
186$ DISPOSE: Yes;  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Create 2 (Create 3 le excel)  
;  
187$ CREATE, 1,SecondstoBaseTime(0.0),Entity 1:SecondstoBaseTime(1),1:NEXT(188$);  
188$ ASSIGN: Create 3 le excel.NumberOut=Create 3 le excel.NumberOut + 1:NEXT(4$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 2 (Assign 7 determinar contador)  
;  
4$ ASSIGN: v_contador=1:NEXT(2$);  
;  
;  
; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 1 (ReadWrite 1 le do excel e ar-  
mazena em uma variavel)  
;
```

```
2$ READ, File 3,RECORDSET(Recordset 1): v_probabilidade(v_contador,1), v_probabilidade(v_contador,2),
v_probabilidade(v_contador,3), v_probabilidade(v_contador,4):NEXT(55$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 13 (Decide 13)

;

55$ BRANCH, 1: If,v_contador <=1046,191$,Yes: Else,192$,Yes;

191$ ASSIGN: Decide 13.NumberOut True=Decide 13.NumberOut True + 1:NEXT(3$);

192$ ASSIGN: Decide 13.NumberOut False=Decide 13.NumberOut False + 1:NEXT(54$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 1 (Assign 6 acumula contador)

;

3$ ASSIGN: v_contador=v_contador + 1:NEXT(2$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 9 (Dispose 9)

;

54$ ASSIGN: Dispose 9.NumberOut=Dispose 9.NumberOut + 1;

193$ DISPOSE: Yes;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Create 3 (Cria Controle)

;

194$ CREATE, 1,SecondstoBaseTime(0.001),Entity 2:SecondstoBaseTime(0.1),1:NEXT(195$);

195$ ASSIGN: Cria Controle.NumberOut=Cria Controle.NumberOut + 1:NEXT(26$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 13 (Assign 13 fila inicial)
```

```

;

26$ ASSIGN: fila_inicial=1:NEXT(21$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.Hold 2 (Hold 2)

;

21$ QUEUE, Hold 2.Queue; SCAN: NQ(Hold 8 espera caixa vazio.Queue) > 0:NEXT(20$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.Search 2 (Search 2)

;

20$ SEARCH, Hold 8 espera caixa vazio.Queue,fila_inicial,NQ(Hold 8 espera caixa vazio.Queue):tnow
> Paciencia;

198$ BRANCH, 1: If,J0,199$,Yes: Else,200$,Yes;

199$ DELAY: 0.0,,VA:NEXT(24$);

200$ DELAY: 0.0,,VA:NEXT(23$);

;

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.Remove 1 (Remove 1 fila atendimento)

;

24$ REMOVE: j,Hold 8 espera caixa vazio.Queue,28$:NEXT(25$);

;

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 7 (Decide 5 nao percorreu toda fila?)

;

25$ BRANCH, 1: If,j < NQ(Hold 8 espera caixa vazio.Queue),201$,Yes: Else,202$,Yes;

201$ ASSIGN: Decide 5 nao percorreu toda fila?.NumberOut True= Decide 5 nao percorreu toda
fila?.NumberOut True + 1:NEXT(27$);

202$ ASSIGN: Decide 5 nao percorreu toda fila?.NumberOut False= Decide 5 nao percorreu toda
fila?.NumberOut False + 1:NEXT(23$);

```

```
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 14 (Assign 13 acumula fila inicial)  
;  
27$ ASSIGN: fila_inicial=j:NEXT(20$);  
;  
;  
; Model statements for module: AdvancedProcess.Delay 2 (Delay 2)  
;  
23$ DELAY: 0.00001666666667,,Other:NEXT(26$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 15 (Assign 19 marca tempo de fila...)  
;  
28$ ASSIGN: tempo_espera_fila=tnow - tempo_espera_fila_inicio:NEXT(35$);  
;  
;  
; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 8 (ReadWrite 8)  
;  
35$ WRITE, File 2: 3, tempo_espera_fila_inicio, tempo_espera_fila, Pacienza:NEXT(29$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 6 (Dispose 6)  
;  
29$ ASSIGN: Dispose 6.NumberOut=Dispose 6.NumberOut + 1;  
203$ DISPOSE: Yes;  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Create 4 (Create 5 le excel)
```

```
;  
204$ CREATE, 1,SecondstoBaseTime(0.00001),Entity 1:SecondstoBaseTime(1),1:NEXT(205$);  
205$ ASSIGN: Create 5 le excel.NumberOut=Create 5 le excel.NumberOut + 1:NEXT(13$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 6 (Assign 7 determinar contador 1)  
;  
13$ ASSIGN: v_contador=1:NEXT(39$);  
;  
;  
; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 9 (ReadWrite 9)  
;  
39$ READ, File 3,RECORDSET(Recordset 2): v_caso_escolhido(v_contador):NEXT(36$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Decide 8 (Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?)  
;  
36$ BRANCH, 1: If,v_contador <4,208$,Yes: Else,209$,Yes;  
208$ ASSIGN: Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?.NumberOut True= Decide 3 leitura nao  
chegou ao fim_?.NumberOut True + 1:NEXT(37$);  
209$ ASSIGN: Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?.NumberOut False= Decide 3 leitura nao  
chegou ao fim_?.NumberOut False + 1:NEXT(44$);  
;  
;  
; Model statements for module: BasicProcess.Assign 17 (Assign 6 acumula contador_)  
;  
37$ ASSIGN: v_contador=v_contador + 1:NEXT(39$);  
;  
;
```

```

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 19 (Assign 7 determinar contador 1_)

;

44$ ASSIGN: v_contador=1:NEXT(45$);

;

;

; Model statements for module: AdvancedProcess.ReadWrite 10 (ReadWrite 10)

;

45$ READ, File 3,RECORDSET(Recordset prob unif): v_probabilidade_unif(v_contador,1), v_probabilidade_unif(v_contador,2), v_probabilidade_unif(v_contador,3), v_probabilidade_unif(v_contador,4):NEXT(46$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Decide 11 (Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?_)

;

46$ BRANCH, 1: If,v_contador <1902,210$,Yes: Else,211$,Yes;

210$ ASSIGN: Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?_.NumberOut True= Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?_.NumberOut True + 1:NEXT(47$);

211$ ASSIGN: Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?_.NumberOut False= Decide 3 leitura nao chegou ao fim_?_.NumberOut False + 1:NEXT(5$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Assign 20 (Assign 6 acumula contador__)

;

47$ ASSIGN: v_contador=v_contador + 1:NEXT(45$);

;

;

; Model statements for module: BasicProcess.Dispose 2 (Dispose 2)

;

5$ ASSIGN: Dispose 2.NumberOut=Dispose 2.NumberOut + 1;

212$ DISPOSE: Yes;

```


Referências Bibliográficas

- [1] F. Baccelli, P. Boyer, and G. Hebuterne. *Single-server queues with impatient customers.* *Advanced Applied Probability*, 16:887–905, 1984.
- [2] F. Baccelli and G. Hebuterne. *On queues with impatient customers.* *Performance '81*, pages 159–179, 1981.
- [3] A. Brandt and M. Brandt. *On the $M(n)/M(n)/s$ queue with impatient calls.* *Performance Evaluation*, 35:1–18, 1999.
- [4] A. Brandt and M. Brandt. *Asymptotic results and a Markovian approximation for the $M(n)/M(n)/s+GI$ system.* *Queueing Systems: Theory and Applications - QUESTA*, 41:73–94, 2002.
- [5] L. Brown, N. Gans, A. Mandelbaum, A. Sakov, H. Shen, S. Zeltyn, and L. Zhao. *Statistical analysis of a telephone call center: a queueing science perspective.* *JASA*, pages 3–12, 2002.
- [6] R. Feinberg, I. Kim, K. Hokama, K. Ruyter, and C. Keen. *Operational determinants of caller satisfaction in the call center.* *International Journal of Service Industry Management*, 11:131–141, 2000.
- [7] L. Franzese. *Método para o dimensionamento de Centrais de Atendimento.* Master's thesis, EP-USP, 2005.
- [8] N. Gans, G. Koole, and A. Mandelbaum. *Telephone call centers: a tutorial and literature review.* *Manufacturing and Service Operations Management*, 5:79–141, 2003.
- [9] O. Garnett, A. Mandelbaum, and M. Reiman. *Designing a telephone call-center with impatient customers.* *Manufacturing and Service Operations Management*, 4:208–227, 2002.
- [10] D. Gross and C. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory.* Wiley, 1974.
- [11] E. Çinlar. *Introduction to Stochastic Process.* Prentice-Hall, 1975.
- [12] O. Jennings, A. Mandelbaum, W. Massey, and W. Whitt. *Server staffing to meet time-varying demand.* *Management Science*, 42:1383–1394, 1996.
- [13] G. Jongbloed and M. Koole. *Managing uncertainty in call center using Poisson mixtures.* *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 17:307–318, 2001.
- [14] L. Kleinrock. *Queueing Systems.* Wiley, 1975.
- [15] M. N. Magalhães. *Introdução à Rede de Filas.* 12º SINAPE - Associação Brasileira de Estatística, 1996.

- [16] M. N. Magalhães. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, 2^a edition, 2006.
- [17] A. Mandelbaum and R. Schwartz. *Simulation experiments with M/G/100 queues in the Halfin-Whitt Q.E.D. regime. Technical Report*, pages 1–8, 2002.
- [18] A. Mandelbaum and S. Zeltyn. *The impact of customers' patience on delay and abandonment: some empirically-driven experiments with the M/M/n + G queue*. *Operational Research Spec-trum*, 26:377–411, 2004.
- [19] L. Takács. *Introduction to the Theory of Queues*. Oxford University Press, 1962.
- [20] W. Whitt. *Engineering solution of a basic call-center model*. *Management Science*, 51:221–235, 2005.