

**Uma classe de modelos de regressão para sistemas em  
série e em paralelo com número aleatório de  
componentes**

Alice Lemos de Moraes

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Doutorado em Estatística

Orientador: Prof. Dra. Silvia Lopes de Paula Ferrari

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro de  
CAPES/CNPq

São Paulo, julho de 2015

# Uma classe de modelos de regressão para sistemas em série e em paralelo com número aleatório de componentes

Esta é a versão original da tese elaborada pela candidata Alice Lemos de Moraes, tal como submetida à Comissão Julgadora.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço à minha mãe, Marcia, pelo apoio às minhas decisões, em especial àquela que me levou a fazer este doutorado.

Agradeço à professora Silvia por ter me orientado desde o começo do doutorado e, acima de tudo, por tudo que aprendi com ela.

Agradeço ao meu querido amigo Wagner por estar ao meu lado sempre.

Agradeço aos meus amigos e à minha família por serem pacientes e entenderem minha ausência.

Agradeço aos meus amigos do IME que, certamente, tornaram essa jornada mais doce.

“Nothing is permanent in this wicked world,  
not even our troubles”  
Charles Spencer Chaplin

Nesta tese estendemos a classe de distribuições Weibull série de potência (WSP) e nomeamos essa nova classe de Weibull série de potência estendida (WSPE). As distribuições WSPE estão relacionadas a sistemas em paralelo e em série com número desconhecido de componentes, enquanto as distribuições WSP (Morais e Barreto-Souza, *Computational Statistics & Data Analysis*, 2011) estão relacionadas apenas a sistemas em série. Diferentemente das distribuições WSP, para as quais a distribuição de Weibull é um caso especial limite, a distribuição de Weibull é um caso particular de todas as distribuições WSPE. Provamos que as distribuições desta classe são identificáveis desde que satisfaçam uma simples condição. Também provamos resultados de ordem estocástica e ordem da função de risco, evidenciando que as formas das distribuições WSPE são claramente mais flexíveis que as formas das distribuições WSP. Definimos um modelo de regressão para variáveis resposta com distribuição WSPE, modelando seu parâmetro de escala e seus quantis. Apresentamos a estimação dos parâmetros do modelo via máxima verossimilhança e provamos sua consistência e normalidade assintótica. Apesar da construção desta classe ser motivada por sistemas em série e em paralelo, as distribuições WSPE são adequadas para modelar uma larga gama de dados positivos. Adicionalmente, estendemos o modelo de regressão proposto para comportar dados censurados e com respostas multivariadas. Para ilustrar potenciais usos do modelo, nós os aplicamos a bancos de dados reais. Os códigos implementados em R estão disponíveis no Apêndice B.

**Palavras-chave:** sistemas em série, sistemas em paralelo, distribuição de Weibull, distribuições de série de potência, modelo de regressão, censura.

---

## Abstract

---

In this thesis we extend the Weibull power series (WPS) class of distributions and named this new class as extended Weibull power series (EWPS) class of distributions. The EWPS distributions are related to series and parallel systems with a random number of components, whereas the WPS distributions (Morais and Barreto-Souza, *Computational Statistics & Data Analysis*, 2011) are related to series systems only. Unlike the WPS distributions, for which the Weibull is a limiting special case, the Weibull law is a particular case of the EWPS distributions. We prove that the distributions in this class are identifiable under a simple assumption. We also prove stochastic and hazard rate order results and highlight that the shapes of the EWPS distributions are markedly more flexible than the shapes of the WPS distributions. We define a regression model for the EWPS response random variable to model a scale parameter and its quantiles. We present the maximum likelihood estimator and prove its consistency and normal asymptotic distribution. Although the construction of this class was motivated by series and parallel systems, the EWPS distributions are suitable for modeling a wide range of positive data sets. Additionally, we extend the proposed regression models to deal with censored data and with multivariate measurements. To illustrate the potential uses of the models we apply them to real data sets. The codes implemented in R are available in the Appendix B.

**Keywords:** series system, paralel system, Weibull distribution, power series distribution, regression model, censoring.

---

## Sumário

---

<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Uma classe de modelos de regressão para sistemas em série e em paralelo com número aleatório de componentes</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Conceitos preliminares . . . . .	7
2.3 A classe de distribuições WSPE . . . . .	9
2.4 Modelo de regressão WSPE e estimação . . . . .	17
2.5 Estimação de quantis . . . . .	22
2.6 Aplicação 1: Tensão de ruptura de fibras de coco . . . . .	24
2.7 Discussão sobre uma extensão mais ampla da classe de distribuições . . . . .	28
2.8 Observações finais . . . . .	29
<b>3 Modelos bivariados para sistemas em série e em paralelo</b>	<b>31</b>
3.1 Introdução . . . . .	31
3.2 Modelo bivariado para sistemas em série . . . . .	32
3.3 Modelo bivariado para sistemas em paralelo . . . . .	41
3.4 Modelos de regressão e estimação . . . . .	45
3.5 Modelo bivariado para sistemas mistos . . . . .	49
3.6 Extensão multivariada . . . . .	50
3.7 Aplicação 2: Tensão de ruptura e módulo de elasticidade de fibras de coco . . . . .	51
3.8 Considerações finais . . . . .	58

<b>4</b>	<b>Modelo WSPE para dados censurados</b>	<b>60</b>
4.1	Introdução . . . . .	60
4.2	Modelo de regressão WSPE com censura aleatória à direita . . . . .	62
4.3	Discussão sobre modelos com fração de cura . . . . .	67
4.4	Aplicações a dados reais . . . . .	69
4.4.1	Aplicação 3: Tensão de ruptura de fibras de coco . . . . .	69
4.4.2	Aplicação 4: Displasia broncopulmonar . . . . .	71
4.5	Observações finais . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>76</b>
5.1	Reparametrização dos modelos WSPE . . . . .	76
5.2	Discussão sobre estimação dos parâmetros dos modelos WSPE . . . . .	77
5.2.1	Correção preventiva de viés . . . . .	80
5.3	Formas alternativas de construção de modelos para sistemas com múltiplas medições . . . . .	84
5.4	Comentários finais . . . . .	85
<b>A</b>	<b>Tabelas com AIC's da aplicação sobre tensão de ruptura e módulo de elasticidade de fibras de coco</b>	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Códigos implementados em R</b>	<b>89</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

---

## Lista de Abreviaturas

---

AIC	critério de informação de Akaike
fdp	função de densidade
fda	função de distribuição acumulada
fp	função de probabilidade
iid	independente e identicamente distribuído
WBE	Weibull binomial estendida
WBNE	Weibull binomial negativa estendida
WGB <sub>p</sub>	Weibull geométrica bivariada para sistemas em paralelo
WGB <sub>s</sub>	Weibull geométrica bivariada para sistemas em série
WGE	Weibull geométrica estendida
WLB <sub>p</sub>	Weibull logarítmica bivariada para sistemas em paralelo
WLB <sub>s</sub>	Weibull logarítmica bivariada para sistemas em série
WLE	Weibull logarítmica estendida
WPE	Weibull Poisson estendida
WPB <sub>p</sub>	Weibull Poisson bivariada para sistemas em paralelo
WPB <sub>s</sub>	Weibull Poisson bivariada para sistemas em série
WSP	Weibull série de potência
WSPB	Weibull série de potência bivariada
WSPB <sub>p</sub>	Weibull série de potência bivariada para sistemas em paralelo
WSPB <sub>s</sub>	Weibull série de potência bivariada para sistemas em série
WSPE	Weibull série de potência estendida
MV	máxima verossimilhança
RV	razão de verossimilhanças
SP	série de potência

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Visão microscópica com aumento de 500 vezes de uma fibra de coco após ser rompida (reproduzida de Tomczak <i>et al.</i> (2007)). . . . .	2
2.1	Função de densidade da WPE para alguns valores de $\theta$ , $\lambda$ e $\alpha$ . . . . .	11
2.2	Função de risco da distribuição WPE para alguns valores de $\theta$ , $\lambda$ e $\alpha$ . . . . .	15
2.3	Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE. . . . .	25
2.4	Gráficos Q-Q dos resíduos quantílicos. . . . .	27
2.5	Gráficos dos quantis ajustados do modelo WPE para $\xi = 0,1, 0,5$ e $0,9$ . Linhas sólidas são as estimativas pontuais dos quantis e as pontilhadas delimitam a região de 95% de confiança. . . . .	27
3.1	Densidade da distribuição de Weibull Poisson bivariada para sistemas em série para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (3, 3)$ (esquerda) e para $\theta = 2$ , $\lambda = (0, 3; 2)$ e $\alpha = (1, 1)$ (direita). . . . .	34
3.2	Correlação em função de $\theta$ entre os componentes das distribuições $WPB_s$ , $WGB_s$ e $WLB_s$ para algumas escolhas do parâmetro $\alpha$ . . . . .	36
3.3	Função de risco conjunta da distribuição $WPB_s$ para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (3, 3)$ (esquerda) e para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 3)$ e $\alpha = (5, 2)$ (direita). . . . .	38
3.4	Função de risco da distribuição $WPB_s$ condicional a $Y_2 = y_2$ para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (3, 3)$ (esquerda) e para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (5; 0, 9)$ (direita). . . . .	39
3.5	Função de risco da distribuição $WPB_s$ de $Y_1$ condicional em $Y_2 \geq y_2$ para $\theta = 20$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (1, 1)$ (esquerda) e para $\theta = 10$ , $\lambda = (2, 5)$ e $\alpha = (4; 0, 8)$ (direita) . . . . .	40
3.6	Razão de riscos condicionais da distribuição $WPB_p$ para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (3, 3)$ (esquerda) e para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 3)$ e $\alpha = (5, 1)$ (direita). . . . .	41

3.7	Densidade da Weibull Poisson bivariada para sistemas em paralelo para $\theta = 10$ , $\lambda = (1, 1)$ e $\alpha = (3, 3)$ (esquerda) e para $\theta = 2$ , $\lambda = (0, 3; 2)$ e $\alpha = (1, 1)$ (direita). . . . .	43
3.8	Gráfico do módulo de elasticidade versus tensão de ruptura das fibras de coco.	52
3.9	Gráficos tensão de ruptura contra comprimento e diâmetro das fibras de coco.	53
3.10	Gráficos do módulo de elasticidade contra comprimento e diâmetro das fibras de coco. . . . .	53
3.11	Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLB, WGB e WPB bivariados para sistemas em série e para sistemas em paralelo. . . . .	54
3.12	Resíduos quantílicos dos modelos $WLB_s$ , $WGB_s$ e $WPB_s$ para a tensão de ruptura (linha de cima) e resíduos quantílicos dos modelos $WLB_s$ , $WGB_s$ e $WPB_s$ para o módulo de elasticidade (linha de baixo). . . . .	57
3.13	Resíduos quantílicos dos modelos $WLB_p$ , $WGB_p$ e $WPB_p$ para a tensão de ruptura (linha de cima) e resíduos quantílicos dos modelos $WLB_p$ , $WGB_p$ e $WPB_p$ para o módulo de elasticidade (linha de baixo). . . . .	57
3.14	Quantis ajustados de ordem $\xi = 0,1; 0,5$ e $0,9$ , para o modelo $WPB_p$ para tensão de ruptura (linha de cima) e módulo de elasticidade (linha de baixo) de fibras de coco. . . . .	58
4.1	Densidades da distribuição WPE para alguns valores de $\alpha$ , com $\theta = 5$ e $\lambda = 1$ fixos (esquerda) e função de risco da distribuição WPE para valores de $\alpha$ , com $\theta = 10$ e $\lambda = 1$ (direita). . . . .	61
4.2	Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE com a modelagem do parâmetro $\alpha$ . . . . .	70
4.3	Tempo recebido de oxigênio versus tipo de tratamento. . . . .	72
4.4	Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE ajustados aos dados de displasia broncopulmonar. . . . .	73
4.5	Estimativa da razão entre os quantis dos tempos de tratamento com e sem reposição de surfactante. . . . .	75
5.1	Log-verossimilhanças perfiladas para $\theta$ para duas amostras aleatórias geradas a partir da distribuição $WGE(1; 1; 0,5)$ . . . . .	78

---

## Lista de Tabelas

---

2.1	Quantidades úteis de algumas séries de potência. . . . .	10
2.2	Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses), log-verossimilhança maximizada, estatística da razão de log-verossimilhanças (RV) e AIC para os modelos de regressão Weibull, WLE, WGE e WPE. . . . .	25
2.3	Estatísticas de teste de normalidade dos resíduos quantílicos para os modelos ajustados (valores- $p$ em parênteses). . . . .	26
3.1	Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses) para os modelos de regressão WLB, WGB e WPB para sistemas em série. . . . .	55
3.2	Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses) para os modelos de regressão WLB, WGB e WPB para sistemas em paralelo. . . . .	55
3.3	Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses) para os modelos de regressão Weibull, WLE, WGE e WPE da modelagem do módulo de elasticidade das fibras. . . . .	56
3.4	AIC para os modelos de regressão $WLB_s$ , $WGB_s$ , $WPB_s$ , $WLB_p$ , $WGB_p$ , $WPB_p$ , Weibull, WLE, WGE e WPE da modelagem conjunta da tensão de ruptura e do módulo de elasticidade das fibras. . . . .	56
4.1	Log-verossimilhanças maximizadas, AIC's, estatísticas do teste da razão de verossimilhanças e seus respectivos valores- $p$ para os modelos de regressão Weibull, WLE, WGE e WPE . . . . .	71
4.2	Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses), log-verossimilhança maximizada e estatística da razão de log-verossimilhança (RV) e AIC para os modelos de regressão Weibull, WLE (reparametrizado), WGE e WPE ajustados aos dados de displasia broncopulmonar. . . . .	73

A.1 AIC para os submodelos dos modelos ajustados na Seção 3.7 com partes sistemáticas dadas em (3.14) e (3.15) . . . . .	88
--	----



# CAPÍTULO 1

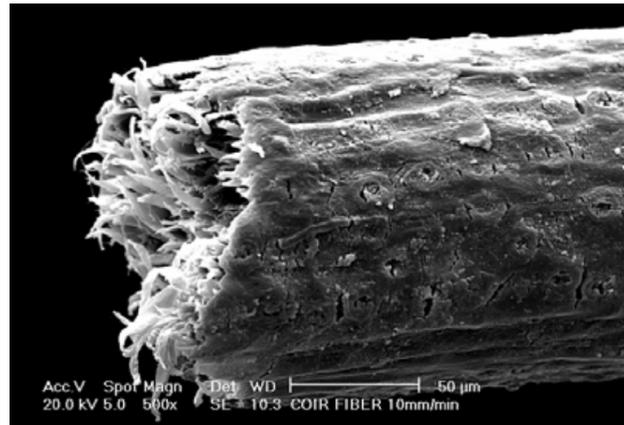
---

## Introdução

---

A distribuição de Weibull foi introduzida na literatura por mais de um autor, e recebeu diferentes nomes (Stoyan, 2013). O nome consagrado nos dias atuais veio do nome de um de seus autores, Waloddi Weibull (Weibull, 1939), que introduziu e aplicou esta distribuição a dados de resistência de materiais. Diversas medidas de resistência podem ser feitas em materiais, tais como tensão de ruptura e módulo de elasticidade. Distribuições mais amplas que a distribuição de Weibull também podem ser usadas para modelar dados desse tipo, algumas vezes num contexto mais refinado. Alguns materiais podem ser vistos como um sistema em paralelo ou em série com número aleatório de componentes e observa-se uma ou mais de uma medida mecânica nesse sistema até que ele falhe. Por exemplo, consideremos o caso de fibras de coco. Hoje em dia materiais de fontes renováveis têm sido estudados para substituir os materiais derivados do petróleo, que geralmente têm um custo maior, tanto no sentido financeiro, quanto no sentido ambiental. As fibras de coco, em uma visualização microscópica, são uma coleção de microfibras. A Figura 1.1, reproduzida de Tomczak *et al.* (2007), ilustra uma visão microscópica de uma fibra de coco. A ruptura da fibra acontece quando todas as microfibras se rompem. Então, a força de ruptura das fibras de coco pode ser explicada por um modelo de sistema em paralelo.

Modelos baseados em sistemas em paralelo e em série têm sido aplicados não apenas



**Figura 1.1:** *Visão microscópica com aumento de 500 vezes de uma fibra de coco após ser rompida (reproduzida de Tomczak et al. (2007)).*

no contexto de materiais, mas também em estudos de saúde. Neste caso, os sistemas em série e em paralelo são chamados de esquema de primeira e esquema de última ativação, respectivamente. Yakovlev *et al.* (1993) propuseram a abordagem do esquema de primeira ativação. Cooner *et al.* (2007) ilustraram alguns usos de ambos os esquemas, de primeira e de última ativação, assumindo a possibilidade de uma fração de cura.

Morais e Barreto-Souza (2011) introduziram uma classe de distribuições que estão relacionadas a sistemas em série com quantidade desconhecida de componentes. Esta classe também pode ser vista como uma composição de distribuições de Weibull e distribuições discretas de série de potência. Neste trabalho ampliamos esta classe de forma a permitir que suas distribuições estejam também associadas a sistemas em paralelo. Além disso, por poderem ser feitas várias medidas de resistência em um mesmo material, fazemos uma abordagem multivariada para esses sistemas.

A motivação deste trabalho gira em torno da resistência de materiais e sistemas em série e em paralelo. Os modelos apresentados aqui, porém, podem ser aplicados a toda gama de dados contínuos positivos.

Este trabalho está organizado como se segue. Primeiramente introduzimos, no Capítulo 2, a classe de distribuições Weibull série de potência estendida (WSPE) e apresentamos algumas de suas propriedades. A seguir, propomos o modelo de regressão WSPE. Nossa abordagem inicial é focada em modelar o parâmetro de escala quando assume-se que a resposta é uma variável aleatória WSPE. Porém, em muitas situações práticas, o objetivo principal da análise dos dados é em fazer inferência sobre quantis e não sobre o parâmetro

---

de escala. Neste capítulo apresentamos uma abordagem para se fazer inferência acerca de quantis da variável resposta seguindo o modelo de regressão WSPE proposto.

No Capítulo 3 propomos uma classe de modelos bivariados baseado em sistemas em série, a qual chamaremos de Weibull série de potência bivariada (WSPB). Propomos uma versão desse modelo para sistemas em paralelo e uma extensão multivariada. Derivamos algumas de suas propriedades. Apresentamos um modelo de regressão para essa classe, modelando dois parâmetros de escala.

No Capítulo 4 consideramos a presença de censura a direita no modelo de regressão WSPE. Além de modelar o parâmetro de escala, nesse capítulo fazemos também a modelagem de um parâmetro de forma.

No Capítulo 5 fazemos uma discussão final dos modelos apresentados, discutimos acerca de problemas de estimação dos modelos e comentamos sobre os modelos de fração de cura.

No Apêndice B disponibilizamos a implementação da estimação dos modelos WSPE e WSPB em R, além de outras funções usadas ao longo da tese.

---

### Uma classe de modelos de regressão para sistemas em série e em paralelo com número aleatório de componentes

---

Neste trabalho estendemos a classe de distribuições Weibull série de potência (WSP) e nomeamos esta nova classe de Weibull série de potência estendida (WSPE). As distribuições WSPE são relacionadas a sistemas em série e em paralelo em que o número de componentes desses sistemas é aleatório, enquanto as distribuições WSP ([Morais e Barreto-Souza, 2011](#)) podem ser associadas apenas a sistemas em série. A distribuição de Weibull é um caso particular de todas as distribuições WSPE, diferentemente das distribuições WSP para as quais a lei Weibull é um caso especial limite. Provamos que sob uma simples suposição as distribuições nesta classe são identificáveis. Também provamos algumas ordens estocásticas destacando que as formas das distribuições WSPE são relevantemente mais flexíveis que as formas das densidades das distribuições WSP. Definimos um modelo de regressão WSPE, modelando o parâmetro de escala e abordamos a estimação de quantis. Propomos a estimação via máxima verossimilhança e provamos a consistência e normalidade assintótica desses estimadores. Embora a construção dessa classe tenha sido motivada por sistemas em série e em paralelo, as distribuições WSPE são apropriadas para modelar dados positivos de maneira geral. Para ilustrar potenciais usos deste modelo, apresentamos uma aplicação a um conjunto de dados

reais sobre tensão de ruptura de fibras de coco e apresentamos um mecanismo simples de diagnóstico.

## 2.1 Introdução

Estudos de confiabilidade geralmente têm enfoque em estudar a falha de certas unidades experimentais. Em alguns casos pode-se assumir que existe um mecanismo que leva à falha dessas unidades como, por exemplo, um sistema em paralelo ou em série. Por exemplo, considere fibras de coco como unidades experimentais e sua ruptura como falha. A Figura 1.1 ilustra a arquitetura de uma fibra de coco. A ruptura desse material acontece no momento em que todas suas microfibras se rompem, o que caracteriza um sistema em paralelo. Nesse caso, o número de componentes do sistema é desconhecido. Alguns modelos têm sido propostos na literatura para modelar o tempo de falha de sistemas em série ou em paralelo, e muitos estudos consideram uma quantidade fixa e conhecida de componentes do sistema. Por sistemas reais poderem ser mais complicados, com frequência pode ser mais apropriado considerar que o sistema tenha uma quantidade desconhecida de componentes.

[Nakagawa e Zhao \(2012\)](#) apresentaram um modelo para o tempo até a falha de sistemas em paralelo assumindo uma distribuição de Poisson truncada em zero para o número de componentes. [Marshall e Olkin \(1997\)](#) definiram uma classe de distribuições a partir do mínimo e do máximo de uma quantidade geométrica de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid). Quando essas variáveis aleatórias tem suporte positivo, as distribuições resultantes estão associadas a sistemas em série e em paralelo. [Kuş \(2007\)](#) construiu uma distribuição relacionada a sistemas em série baseado no mínimo de uma quantidade Poisson de variáveis aleatórias iid com distribuição exponencial. [Crescenzo e Pellerey \(2011\)](#) apresentam resultados estocásticos para o tempo até a falha de sistemas em série e em paralelo cujos componentes são não-identicamente distribuídos. A distribuição limite do máximo de uma quantidade aleatória de variáveis aleatórias independentes foi discutida por [Barndorff-Nielsen \(1964\)](#). [Barakat e El-Shandidy \(2004\)](#) encontraram o comportamento assintótico de estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho aleatório.

Modelos baseados em sistemas em série e em paralelo com um número aleatório de componentes têm sido usados não apenas sob o contexto de estudos de resistência de materiais, mas também em estudos médicos e em outras áreas. Em estudos de pesquisa médica, os sistemas em série em paralelo são chamados de esquemas de primeira e última ativação, respectivamente. [Yakovlev \*et al.\* \(1993\)](#) propuseram um modelo para o esquema de primeira ativação. [Cooner \*et al.\* \(2007\)](#) ilustraram alguns usos de ambos os esquemas de primeira e última ativação assumindo a possibilidade de indivíduos de longa duração.

[Morais e Barreto-Souza \(2011\)](#) introduziram a classe de distribuições Weibull série de potência (WSP), que está relacionada ao tempo até a falha de sistemas em série com quantidade aleatória de componentes. Nesse trabalho os autores assumem que os tempos até a falha dos componentes do sistema são iid, com distribuição de Weibull, e que a quantidade de componentes do sistema tem distribuição de série de potência truncada em zero. Aqui propomos uma extensão dessa classe incluindo sistemas em paralelo para permitir mais flexibilidade das distribuições dessa classe, que será denotada por Weibull série de potência estendida (WSPE). As distribuições WSP têm algumas restrições que serão relaxadas após a extensão proposta.

Nesse capítulo, primeiramente, introduzimos a classe de distribuições WSPE e derivamos algumas de suas propriedades. Em seguida, propomos um modelo de regressão WSPE. Nossa abordagem será de modelar o parâmetro de escala quando a resposta é assumida ser uma variável aleatória WSPE. O parâmetro de escala é de interesse prático visto que é diretamente proporcional aos quantis da variável resposta.

Esse capítulo está organizado como a seguir. Na Seção 2.2 fazemos uma breve apresentação de alguns conceitos preliminares da classe de distribuições WSP úteis para a construção de sua extensão. Na Seção 2.3, definimos a classe de distribuições WSPE e derivamos algumas de suas propriedades. Na Seção 2.4, definimos um modelo de regressão para respostas com distribuição WSPE, discutimos sua estimação baseada em máxima verossimilhança e apresentamos algumas propriedades assintóticas do estimador. Na Seção 2.5, apresentamos uma estratégia para fazer inferência acerca dos quantis a partir de uma transformação simples do parâmetro de escala. Na Seção 2.6, fazemos uma aplicação do modelo de regressão WSPE a um conjunto de dados reais para ilustrar potenciais usos do novo modelo

e apresentamos um mecanismo simples com fins de diagnóstico. Na Seção 2.7, discutimos sobre uma ampliação dos modelos contidos na classe de distribuições WSPE. Na Seção 2.8, fazemos algumas considerações finais.

## 2.2 Conceitos preliminares

As distribuições WSP (Morais e Barreto-Souza, 2011) são construídas a partir da composição entre a classe de distribuições discretas de série de potência e a lei de Weibull como segue. Seja  $a_n \geq 0$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , com  $a_1 > 0$  e seja

$$C(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n, \quad \forall \theta \in (-s, s), \quad (2.1)$$

em que  $s > 0$  é o raio de convergência. Considere a função  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$p(n; \theta) = \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)}, \quad \theta \in (-s, s), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Se  $\theta > 0$ ,  $p(n; \theta)$  em (2.2) é a função de probabilidade (fp) das distribuições de série de potência truncadas em zero (Noack, 1950). Usamos a notação  $N \sim \text{SP}(\theta; C)$  para  $N$  sendo uma variável aleatória com fp  $p(n; \theta)$  em (2.2), com  $\theta > 0$ . As distribuições de Poisson, logarítmica, geométrica e binomial (com  $m$  sendo o número conhecido de réplicas dos experimentos de Bernoulli), todas truncadas em zero, são casos especiais da classe de distribuições de série de potência truncadas.

Sejam  $Z_1, Z_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com  $Z_1 \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha)$ , i.e,  $Z_1$  tem distribuição de Weibull com parâmetro de escala  $\lambda > 0$  e parâmetro de forma  $\alpha > 0$ , com função densidade de probabilidade (fdp)

$$g(z; \lambda, \alpha) = \alpha \lambda^{-\alpha} z^{\alpha-1} e^{-(z/\lambda)^\alpha}, \quad z > 0, \lambda > 0, \alpha > 0. \quad (2.3)$$

Seja  $N \sim \text{SP}(\theta; C)$ . Note que aqui é assumido que  $\theta$  é positivo. A classe de distribuições WSP é definida pela distribuição marginal de  $Z_{(1)} = \min\{Z_1, \dots, Z_N\}$ , cuja função de distribuição

acumulada (fda) correspondente é dada por

$$F(y; \lambda, \alpha, \theta) = 1 - \frac{C(\theta S(y; \lambda, \alpha))}{C(\theta)}, \quad y > 0, \quad (2.4)$$

em que  $S(y; \lambda, \alpha) = \exp\{-(y/\lambda)^\alpha\}$ , para  $y > 0$ , é a função de sobrevivência da distribuição Weibull( $\lambda, \alpha$ ). A fdp da WSP é dada por

$$f(y; \lambda, \alpha, \theta) = \frac{\theta g(y; \lambda, \alpha)}{C(\theta)} C'(\theta S(y; \lambda, \alpha)), \quad y > 0, \quad (2.5)$$

para  $\lambda, \alpha > 0$  e  $0 < \theta < s$ .

As distribuições WSP ocorrem, por exemplo, em estudos de confiabilidade. Assuma que uma máquina tem  $N$  defeitos iniciais desconhecidos, e que  $Z_i$  é o tempo até a falha devido ao  $i$ -ésimo defeito,  $i = 1, \dots, N$ . Se assumirmos que os  $Z_i$ 's são iid com  $Z_1 \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha)$  e  $N \sim \text{SP}(\theta; C)$ , então o tempo  $Y$  até a primeira falha ocorrer tem distribuição WSP com fdp (2.5). Em outras palavras,  $Y$  é o tempo até a falha de um sistema em série com um número aleatório  $N$  de componentes, em que  $N \sim \text{SP}(\theta; C)$ .

Na próxima seção estendemos o espaço paramétrico de  $\theta$  incluindo valores negativos e damos o nome de Weibull série de potência estendida (WSPE) à classe de distribuições resultante. Quando essa extensão é feita, a caracterização original das distribuições WSP, que são baseadas em um sistema em série, não valem para  $\theta < 0$ . Provamos que para algumas distribuições WSPE existe uma caracterização em sistema em paralelo quando  $\theta < 0$ . Essa extensão permite mais flexibilidade para as formas da densidade e função de risco. Damos alguns resultados sobre ordem de função de risco e ordem estocástica, assim destacando a relevância da extensão proposta. Embora a construção dessa classe tenha sido motivada por sistemas em série e em paralelo, este modelo pode ser adequado para dados positivos em geral.

A distribuição de Weibull é um caso limite das distribuições WSP. Na extensão que propomos, definimos a lei de Weibull como caso especial quando  $\theta = 0$  e mostramos que essa definição é apropriada. Para as distribuições WSPE, a lei de Weibull representa um sistema com um único componente.

## 2.3 A classe de distribuições WSPE

Morais e Barreto-Souza (2011) introduziram a classe de distribuições WSP, que são relacionadas a sistemas em série com quantidade desconhecida de componentes. As formas da densidade e função de risco dessas distribuições são bem flexíveis, mas existem algumas restrições às suas formas que serão relaxadas pela extensão que introduzimos nesta seção. Provamos que, fixados os parâmetros de escala e forma,  $\lambda$  e  $\alpha$  respectivamente, a função de risco de qualquer distribuição WSP está uniformemente acima da função de risco da distribuição de Weibull. A extensão da WSP que propomos inclui distribuições para as quais o oposto pode ocorrer.

Como visto na Seção 2.2, as distribuições WSP estão indexadas por três parâmetros,  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\theta \in (0, s)$ . Propõe-se estender a classe de distribuições WSP permitindo que  $\theta$  tome valores negativos. Para formalizar essa extensão, apresentamos a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1.** *Para cada série de potência  $C(\cdot)$  como definido em (2.1), seja  $S^* = \{\theta \in (-s, 0) : C'(\theta) = 0\}$ . Então, para todo  $y > 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $\alpha > 0$ ,  $f(y; \lambda, \alpha, \theta)$  em (2.5) é não-negativa para todo  $\theta \in (s^*, 0)$ , em que*

$$s^* = \begin{cases} \max S^*, & \text{se } S^* \neq \emptyset \\ -s, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

*Prova.* Primeiro provamos a existência de  $s^*$ . Temos que  $C'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\theta^{n-1} \rightarrow a_1$  quando  $\theta \rightarrow 0$ , e  $a_1 > 0$ . Então,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $C'(\theta) > 0$  para  $\theta \in (-\varepsilon, 0)$ . Então, já que  $C(\cdot)$  é uma função diferenciável, se  $S^* \neq \emptyset$ , o máximo de  $S^*$  existe. Isso prova que  $s^*$  está bem definida.

Para completar a prova é suficiente mostrar que  $\theta C'(\theta b)/C(\theta) > 0$ ,  $\forall \theta \in (s^*, 0)$  e  $\forall b \in (0, 1)$ . Temos que  $C(0) = 0$  e, da construção de  $s^*$ ,  $C(\theta)$  é estritamente negativa em  $\theta \in (s^*, 0)$ . Então,  $\theta C'(\theta b)/C(\theta) > 0$  para  $\theta \in (s^*, 0)$ . Se  $C(\theta) > 0$  para  $\theta \in (s^*, 0)$ , o resultado segue análogo.  $\square$

A Proposição 2.3.1 afirma que é sempre possível encontrar um intervalo aberto  $(s^*, 0)$  tal que  $f(y; \lambda, \alpha, \theta)$  em (2.5) é não-negativa para todo  $\theta \in (s^*, 0)$ . Note que, para qualquer

$\theta \in (s^*, 0)$ , temos que  $\int_0^\infty f(y; \lambda, \alpha, \theta)dy = 1$  e, então,  $f(\cdot; \lambda, \alpha, \theta)$  é uma função de densidade. Portanto, é possível definir uma extensão das distribuições WSP como segue.

**Definição 2.3.2.** *Para uma dada função  $C(\cdot)$  em (2.1), a distribuição WSPE com parâmetros  $\lambda, \alpha > 0$  e  $\theta \in (s^*, s)$ , com  $s^*$  como dado em (2.6), é definida pela fdp em (2.5) quando  $\theta \neq 0$ , e pela fdp da distribuição de Weibull com parâmetro de escala  $\lambda > 0$  e parâmetro de forma  $\alpha > 0$  dada em (2.3) quando  $\theta = 0$ .*

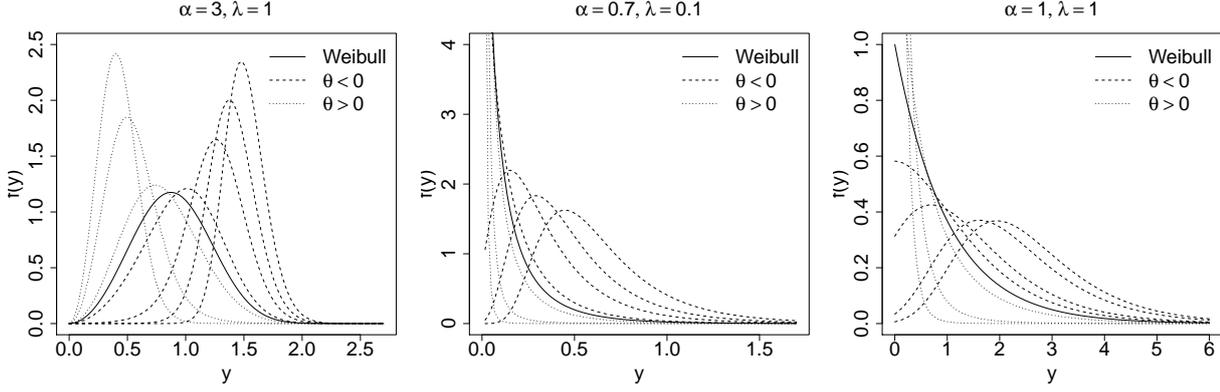
Usamos a notação  $Y \sim \text{WSPE}(\lambda, \alpha, \theta; C)$  quando  $Y$  é uma variável a distribuição dada na Definição 2.3.2. Na Tabela 2.1 damos algumas quantidades úteis para a construção de algumas distribuições WSPE. Na última coluna temos o nome da respectiva série de potência com fp dada em (2.2) quando  $\theta > 0$ . Nos casos 4 e 5,  $m > 1$  é um número inteiro conhecido e, para  $\theta > 0$ ,  $m$  é o número de réplicas do ensaio binomial ou o número fixo de fracassos antes de  $n$  sucessos da distribuição binomial negativa. No caso 6,  $\mathcal{I}_{\{\text{odd}\}}(n)$  é uma função indicadora de  $n$  ímpar. Se  $C(\cdot)$  é escolhida como nos casos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 chamamos a WSPE correspondente de Weibull Poisson (WPE), Weibull geométrica (WGE), Weibull logarítmica (WLE), Weibull binomial (WBE), Weibull binomial negativa (WBNE) e Weibull logarítmica II (WLIIE) estendidas, respectivamente. Os nomes desses casos especiais se referem à distribuição de série de potência usada para a sua construção para  $\theta > 0$ . A extensão do espaço paramétrico para  $\theta$  proposta aqui agrega mais flexibilidade para as formas das densidades como podemos ver na Figura 2.1.

**Tabela 2.1:** *Quantidades úteis de algumas séries de potência.*

	$a_n$	$C(\theta)$	$C'(\theta)$	$s^*$	$s$	Nome (para $\theta > 0$ )
Caso 1	$n!^{-1}$	$e^\theta - 1$	$e^\theta$	$-\infty$	$\infty$	Poisson
Caso 2	$n^{-1}$	$-\log(1 - \theta)$	$(1 - \theta)^{-1}$	$-1$	$1$	Logarítmica
Caso 3	$1$	$\theta(1 - \theta)^{-1}$	$(1 - \theta)^{-2}$	$-1$	$1$	Geométrica
Caso 4	$\binom{m}{n}$	$(\theta + 1)^m - 1$	$m(\theta + 1)^{m-1}$	$-1$	$\infty$	Binomial
Caso 5	$\frac{\Gamma(m + n - 1)}{(n - 1)! \Gamma(m)}$	$\theta(1 - \theta)^{-m}$	$\frac{\{\theta(m - 1) + 1\}}{(1 - \theta)^{m+1}}$	$\frac{1}{1 - m}$	$1$	Binomial Negativa
Caso 6	$2n^{-1} \mathcal{I}_{\{\text{odd}\}}(n)$	$\log\left(\frac{1 + \theta}{1 - \theta}\right)$	$\frac{2}{1 - \theta^2}$	$-1$	$1$	Logarítmica II

Como  $C'(\theta) = \sum_{n=1}^\infty n a_n \theta^{n-1}$ ,  $\theta \in (-s, s)$ , de (2.5) temos que

$$f(y; \lambda, \alpha, \theta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} g(y; \lambda n^{-1/\alpha}, \alpha), \quad (2.7)$$



**Figura 2.1:** Função de densidade da WPE para alguns valores de  $\theta$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$ .

para  $y > 0$ ,  $\lambda, \alpha > 0$  e  $\theta \in (s^*, 0) \cup (0, s)$ , em que  $g(y; \lambda, \alpha)$  é a fdp da distribuição de Weibull com parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  dada em (2.3). Então, as densidades da WSPE são combinações lineares infinitas de densidades Weibull. Em particular, para  $\theta > 0$ , as densidades da WSPE são misturas de densidades Weibull com pesos determinados pelas leis de série de potência. Esta propriedade é importante para obter uma expressão para os momentos e para provar identificabilidade. Segue de (2.7) e do teorema da convergência dominada que o  $r$ -ésimo momento de  $Y \sim \text{WSPE}(\lambda, \alpha, \theta; C)$ ,  $\theta \neq 0$ , é dado por

$$E(Y^r) = \frac{\Gamma(r/\alpha + 1)\lambda^r}{C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{n^{r/\alpha}}, \quad r > 0. \quad (2.8)$$

Note que todos os momentos são finitos porque  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \theta^n n^{-r/\alpha}| \leq C(|\theta|) < \infty$ ,  $\theta \in (s^*, s)$ .

O domínio da fdp em (2.5) tomada como função de  $\theta$  não contém o ponto  $\theta = 0$ . Relembramos que a distribuição WSPE é definida como a distribuição de Weibull quando  $\theta = 0$ . Como a lei de Weibull é um caso especial limite de todas as distribuições WSPE quando  $\theta \rightarrow 0$ , como declarado na proposição seguinte, a definição da distribuição WSPE como sendo a distribuição de Weibull quando  $\theta = 0$  é justificada.

**Proposição 2.3.3.** Quando  $\theta \rightarrow 0$ , a fda dada em (2.4) converge para a fda da distribuição de Weibull com parâmetros de escala  $\lambda$  e de forma  $\alpha$ .

*Prova.* Similar à prova da Proposição 3.1 em [Morais e Barreto-Souza \(2011\)](#).  $\square$

Sob uma suposição simples acerca de  $C(\cdot)$ , as distribuições WSPE são identificáveis, como afirma a proposição seguinte.

**Proposição 2.3.4.** *Uma distribuição WSPE com parâmetros  $\lambda, \alpha > 0$  e  $\theta \in (s^*, s)$  é identificável se e somente se  $C(\cdot)$  não é uma função ímpar.*

*Prova.* Da fda  $F(y; \lambda, \alpha, \theta)$  em (2.4) é fácil verificar que, se a função  $C(\cdot)$  é ímpar, então a distribuição WSPE não é identificável. Assuma, então, que a identificabilidade não vale. Então, existem dois vetores diferentes de parâmetros,  $\Theta_1 = (\alpha_1, \lambda_1, \theta_1)$  e  $\Theta_2 = (\alpha_2, \lambda_2, \theta_2)$  para os quais  $f(y; \lambda_1, \alpha_1, \theta_1) = f(y; \lambda_2, \alpha_2, \theta_2), \forall y > 0$ . Escrevendo  $\theta_2 = m\theta_1$  e de (2.7) temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_i \theta_1^{i+n} m^i g(y; \lambda_1 n^{-1/\alpha_1}, \alpha_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_i \theta_1^{i+n} m^n g(y; \lambda_1 n^{-1/\alpha_2}, \alpha_2), \quad \forall y > 0.$$

Tomando o primeiro termo do polinômio em  $\theta_1$  em ambos os lados da equação acima, temos que  $g(y; \lambda_1, \alpha_1) = g(y; \lambda_2, \alpha_2), \forall y > 0$  e, como a distribuição de Weibull é identificável,  $\lambda_1 = \lambda_2$  e  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Então, de agora em diante, sejam  $\lambda = \lambda_1$  e  $\alpha = \alpha_1$ . Da fda  $F(y; \lambda, \alpha, \theta)$  em (2.4) temos que  $C(\theta_2) \sum_n a_n \theta_1^n (e^{-(y/\lambda)^\alpha})^n = C(\theta_1) \sum_n a_n \theta_2^n (e^{-(y/\lambda)^\alpha})^n, \quad \forall y > 0$  e, daí, temos que

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n = \frac{C(\theta_1)}{C(\theta_2)}, \quad \forall n \in K, \quad (2.9)$$

em que  $K = \{k \in \mathbb{N} : a_k > 0\}$ . Se  $K$  contém tanto valores pares quanto ímpares, então (2.9) implica que  $\theta_1 = \theta_2$  o que é absurdo devido à suposição de não-identificabilidade. Se  $K$  contém apenas valores ímpares, então (2.9) é satisfeita para  $\theta_1 = -\theta_2$  e, conseqüentemente, a função  $C(\cdot)$  é ímpar.

□

Quando  $C(\cdot)$  é ímpar, temos que  $f(y; \lambda, \alpha, \theta) = f(y; \lambda, \alpha, -\theta)$ , para qualquer  $\theta \in (s^*, 0)$ . Este é o único caso em que a extensão da WSP, ao incluir valores negativos ao espaço paramétrico de  $\theta$ , não é uma vantagem. Claramente, para os casos de 1 a 5 da Tabela 2.1,  $C(\cdot)$  não é ímpar.

Para algumas distribuições WSPE existe uma interpretação física quando  $\theta < 0$ . Essa caracterização, porém, não é baseada em um sistema em série, mas sim em um sistema em paralelo. Considere um sistema em paralelo com uma quantidade aleatória  $N$  de componentes

e sejam  $Z_1, Z_2, \dots$  variáveis aleatórias iid em que  $Z_i \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha)$  é o tempo até a falha devido ao  $i$ -ésimo componente. Para  $\theta < 0$ , sob algumas condições sobre a lei de  $N$  (veja a Proposição 2.3.5), a distribuição marginal de  $\max\{Z_1, \dots, Z_N\}$  é uma distribuição WSPE. Em outras palavras, enquanto para  $\theta > 0$  a interpretação da WSPE é inteiramente baseada na falha do primeiro componente, para algumas distribuições WSPE, quando  $\theta < 0$ , temos uma interpretação que considera a falha do sistema quando todos os seus componentes falham. Na próxima proposição damos uma condição suficiente para a existência de uma caracterização em sistema em paralelo para as distribuições WSPE quando  $\theta \in (s^*, 0)$ .

**Proposição 2.3.5.** *Sejam  $Z_1, Z_2, \dots$  variáveis aleatórias iid com  $Z_1 \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha)$ . Seja  $N \sim SP(t(\theta); C)$ , em que  $t : (s^*, 0) \rightarrow (0, s)$  e  $s^*$  é dado em (2.6). Assuma que  $t(\cdot)$  satisfaz*

$$C^{(i)}(t(\theta)) = \frac{(-1)^{i-1} a_i i! \theta^i C(t(\theta))}{t(\theta)^i C(\theta)}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

em que

$$C^{(i)}(\tau) = \frac{d^i C(\tau)}{d\tau^i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-i)!} a_n \tau^{n-i}, \quad \text{para } \tau \in (-s, s).$$

Então, se  $\theta \in (s^*, s)$ , a fdp de  $Z = \max\{Z_1, \dots, Z_N\}$  é dada em (2.5).

*Prova.* Sem perda de generalidade, considere  $\alpha = \lambda = 1$ . A fda de  $Z$  é dada por

$$\begin{aligned} P(Z \leq y) &= \frac{C(t(\theta)(1 - e^{-y}))}{C(t(\theta))} \\ &= \frac{1}{C(t(\theta))} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_n t(\theta)^n \binom{n}{i} (-1)^i e^{-iy} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i! C(t(\theta))} e^{-iy} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-i)!} t(\theta)^n \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} t(\theta)^i e^{-iy}}{i! C(t(\theta))} C^{(i)}(t(\theta)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i (\theta e^{-y})^i}{C(\theta)} = F(y; \lambda, \alpha, \theta), \quad (2.11)$$

em que  $F$  é a fda da distribuição WSPE dada em (2.4).

□

A Proposição 2.3.5 afirma que para algumas distribuições WSPE existe uma caracte-

rização em paralelo quando  $\theta \in (s^*, 0)$ . Para o caso 1 da Tabela 2.1, que se refere à distribuição de Poisson quando  $\theta > 0$ , a condição da Proposição 2.3.5 é satisfeita tomando  $t(\theta) = -\theta$ ,  $\theta < 0$ . Isso também ocorre para os casos 2 e 3 (que se referem às distribuições geométrica e logarítmica quando  $\theta > 0$ , respectivamente) tomando  $t(\theta) = \theta/(\theta - 1)$ ,  $\theta \in (-1, 0)$ , para ambos os casos.

Na Proposição 2.3.6 damos algumas condições necessárias sobre as séries de potência para que as distribuições WSPE correspondentes admitam uma caracterização em sistema em paralelo quando  $\theta < 0$ .

**Proposição 2.3.6.** *Seja  $t : (s^*, 0) \rightarrow (0, s)$ . Se a função de densidade em (2.5) para  $\theta < 0$  pode ser obtida através de um sistema em paralelo tomando  $N \sim SP(t(\theta); C)$ , então valem as seguintes afirmações:*

- (i) se  $a_n = 0$ , então  $a_m = 0$  para  $m > n$ ;
- (ii)  $t(\cdot)$  é a única solução de  $E(N) = a_1\theta/C(\theta)$ ;
- (iii) a função  $t(\theta)$  é decrescente em  $\theta$ .

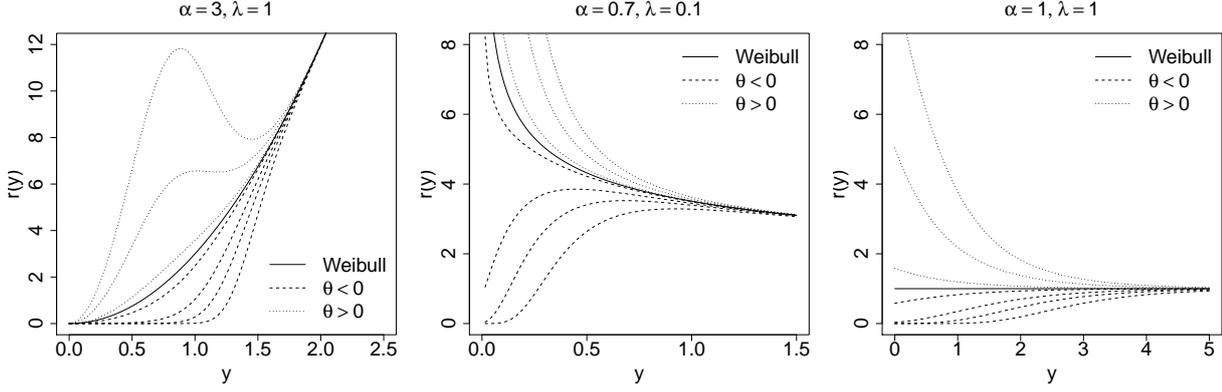
*Prova.* (i) Por suposição, a fda em (2.10) é igual à fda em (2.11). Como ambas são polinômios em  $e^{-y}$ , se  $a_n = 0$ , então  $C^{(n)}(t(\theta)) = 0$ , para todo  $\theta \in (s^*, s)$  o que implica que  $a_m = 0$ ,  $\forall m > n$ .

(ii) Igualando o primeiro coeficiente dos polinômios em  $e^{-y}$  em (2.10) e (2.11), temos que  $E(N) = a_1\theta/C(\theta)$ . Então,  $t(\theta)$  é a solução de  $E(N) = a_1\theta/C(\theta)$  e, como o valor esperado de uma variável aleatória de série de potência é monótona em seu parâmetro, a solução é única.

(iii) Temos que  $\theta/C(\theta)$  é decrescente em  $\theta$ . Então, de  $E(N) = a_1\theta/C(\theta)$ ,  $E(N)$  é crescente em  $t(\theta)$  e decrescente em  $\theta$  e, então,  $t(\theta)$  é decrescente em  $\theta$ .

□

As vantagens da extensão do espaço paramétrico da distribuição WSP vão além da possibilidade de uma caracterização em paralelo. Por exemplo, a função de risco de uma distribuição WSPE para  $\theta < 0$  pode tomar formas que as distribuições WSPE para  $\theta > 0$



**Figura 2.2:** Função de risco da distribuição WPE para alguns valores de  $\theta$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$ .

não permitem. A função de risco  $r(\cdot; \lambda, \alpha, \theta)$  de uma distribuição  $WSPE(\lambda, \alpha, \theta; C)$  é dada por

$$r(y; \lambda, \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta y^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha\right\} \frac{C' \left(\theta \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha\right\}\right)}{C \left(\theta \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha\right\}\right)}, & y > 0, \quad \theta \neq 0, \\ \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} y^{\alpha-1}, & y > 0, \quad \theta = 0, \end{cases}$$

para  $\lambda, \alpha > 0$  e  $\theta \in (s^*, s)$ . A Figura 2.2 apresenta algumas curvas da função de risco da Weibull Poisson estendida para algumas escolhas de  $\theta$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$ .

As curvas apresentadas na Figura 2.2 dão uma ideia sobre o comportamento da função de risco da distribuição WPE. Note que as curvas para  $\theta > 0$  estão uniformemente acima da função de risco para  $\theta = 0$ , e as funções de risco para  $\theta < 0$  estão uniformemente abaixo da função de risco da Weibull. Para a distribuição WPE e para algumas outras distribuições WSPE existe uma ordem da função de risco tomadas como função de  $\theta$  que explica o comportamento das curvas apresentadas na Figura 2.2. Na Proposição 2.3.8 damos algumas propriedades acerca de ordem estocástica das distribuições WSPE. Primeiramente, relembremos algumas definições sobre ordem estocástica.

**Definição 2.3.7. (i)** Uma variável aleatória  $X_1$  é dita ser menor que  $X_2$  em ordem estocástica, e escrevemos  $X_1 \leq_{st} X_2$ , se  $P(X_1 > x) \leq P(X_2 > x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**(ii)** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias não-negativas absolutamente contínuas. Sejam  $r_1(\cdot)$  e  $r_2(\cdot)$  suas respectivas funções de risco. Se  $r_1(x) \geq r_2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $X_1$  é dita ser

menor que  $X_2$  na ordem de função de risco, e escrevemos  $X_1 \leq_{hr} X_2$ .

**Proposição 2.3.8.** *Sejam  $Y_{\theta_1} \sim WSPE(\lambda, \alpha, \theta_1; C)$  e  $Y_{\theta_2} \sim WSPE(\lambda, \alpha, \theta_2; C)$  com  $\theta_1 < \theta_2$ .*

*Se*

(i)  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < s$  ou

(ii)  $s^* < \theta_1 < 0$  e existe caracterização em sistema em paralelo,

então  $Y_{\theta_2} \leq_{st} Y_{\theta_1}$  e  $Y_{\theta_2} \leq_{hr} Y_{\theta_1}$ .

*Prova.* Seja  $N_\theta \sim SP(\theta; C)$ ,  $\theta > 0$ , e seja  $M_\theta(t)$ ,  $t > 0$ , a função geradora de momentos de  $N$ . Se  $0 < \theta_1 < \theta_2$ , temos que  $M_{\theta_1}(t) \leq M_{\theta_2}(t)$ . Então, do Teorema 5.1 de Shaked e Wong (1997), temos que  $Y_{\theta_2} \leq_{st} Y_{\theta_1}$  e  $Y_{\theta_2} \leq_{hr} Y_{\theta_1}$ . Como temos convergência fraca de  $Y_\theta \rightarrow Y_0$  quando  $\theta \rightarrow 0^+$ , em que  $Y_0 \sim Weibull(\lambda, \alpha)$ , as ordens estocásticas e de função de risco continuam válidas para  $\theta_1 = 0$ . Para  $\theta_1 < 0$  e sob a existência de caracterização de sistema em paralelo a prova segue de forma similar.

□

Para  $\theta \geq 0$ , fixados os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$ , existe sempre uma ordem estocástica e uma ordem da função de risco. Neste caso, que corresponde às distribuições WSP, a função de risco está sempre uniformemente acima da função de risco da distribuição de Weibull. Para  $\theta < 0$ , dependendo da escolha da série de potência em (2.1), essas ordens continuam a existir e a função de risco da distribuição WSPE fica uniformemente abaixo da função de risco da distribuição de Weibull. Este resultado enfatiza a relevância de se estender o espaço paramétrico de  $\theta$ .

Note que as funções de risco plotadas na Figura 2.2 estão todas próximas às funções de risco da distribuição de Weibull para valores grandes de  $y$ . Essa propriedade é válida para todas as distribuições WSPE como afirma a próxima proposição.

**Proposição 2.3.9.** *Seja  $r_0(\cdot; \lambda, \alpha)$  a função de risco da distribuição de Weibull( $\lambda, \alpha$ ) e  $r(\cdot; \lambda, \alpha, \theta)$  a função de risco da distribuição WSPE( $\lambda, \alpha, \theta; C$ ). Então,  $|r(y; \lambda, \alpha, \theta) - r_0(y; \lambda, \alpha)| \rightarrow 0$  quando  $y \rightarrow \infty$  para todo  $\lambda, \alpha > 0$  e  $\theta \in (s^*, s)$ .*

*Prova.* Seja  $\theta \neq 0$ . Expandindo  $C'(\theta e^{-(y/\lambda)^\alpha})$  e reorganizando os termos da soma temos que

$$\frac{r(y; \lambda, \alpha, \theta)}{r_0(y; \lambda, \alpha)} = \frac{\theta e^{-(y/\lambda)^\alpha} C'(\theta e^{-(y/\lambda)^\alpha})}{C(\theta e^{-(y/\lambda)^\alpha})} = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \theta^i e^{-i(y/\lambda)^\alpha} i a_i}{C(\theta e^{-(y/\lambda)^\alpha})}. \quad (2.12)$$

Obter o limite de (2.12) quando  $y \rightarrow \infty$  é equivalente a tomar o limite quando  $b \equiv e^{-(y/\lambda)^\alpha}$  vai a zero. Aplicando a regra de L'Hôpital uma vez no segundo termo do lado direito de (2.12), temos que (2.12) vai a 1 quando  $y \rightarrow \infty$  ou  $b \rightarrow 0$ .

□

## 2.4 Modelo de regressão WSPE e estimação

Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  um vetor de variáveis aleatórias independentes. Seja  $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$  uma matriz de covariáveis  $n \times k$  fixas com  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})^\top$ , e  $\eta_i = x_i^\top \beta$ , para  $i = 1, \dots, n$ , em que  $\beta \in \mathbb{R}^k$  é um vetor desconhecido de parâmetros. O modelo de regressão Weibull série de potência estendido é definido por  $Y_i \stackrel{ind}{\sim} \text{WSPE}(\lambda_i, \alpha, \theta; C)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com

$$h(\lambda_i) = \eta_i, \quad (2.13)$$

em que  $h(\cdot)$  é uma função de ligação invertível e três vezes diferenciável que mapeia  $(0, \infty)$  em  $\mathbb{R}$  e  $\alpha > 0$ ,  $\theta \in (s^*, s)$  e  $\beta$  são parâmetros desconhecidos. Uma escolha possível para  $h(\cdot)$  é a função logarítmica.

Agora discutimos estimação via máxima verossimilhança do modelo de regressão WSPE. Seja  $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  um vetor de  $n$  variáveis aleatórias independentes seguindo o modelo de regressão WSPE. Seja  $\Theta = (\beta^\top, \alpha, \theta)^\top$  um vetor de parâmetros. A função de log-verossimilhança total é dada por

$$\ell \equiv \ell(\Theta; \mathcal{Y}, X) = n \log \alpha + \sum_{i=1}^n \log W_i - \sum_{i=1}^n W_i + \sum_{i=1}^n L_{1i}(\theta) + c,$$

em que  $W_i = (Y_i/\lambda_i)^\alpha$ ,  $c$  é uma constante que não depende dos parâmetros e

$$L_{1i}(\theta) = \begin{cases} \log \left[ \frac{C'(\theta e^{-W_i})}{C(\theta)} \theta \right], & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

O vetor escore associado é dado por  $U_n(\Theta) = (\partial\ell/\partial\beta, \partial\ell/\partial\alpha, \partial\ell/\partial\theta)^\top$ , em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ell}{\partial\beta} &= \alpha X^\top D_1 Y^*, \\ \frac{\partial\ell}{\partial\alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{1}^\top D_2 Y^*, \\ \frac{\partial\ell}{\partial\theta} &= \begin{cases} \frac{n}{\theta} - n \left( \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} \right) + \frac{1}{\theta} \text{tr}(D_3), & \theta \neq 0, \\ \frac{a_2}{a_1} \text{tr}(2D_4 - I), & \theta = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}_{n \times 1}$  é um vetor coluna de 1's,  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  são matrizes diagonais  $n \times n$  dadas por

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\eta_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \frac{d\lambda_n}{d\eta_n} \right), \\ D_2 &= \text{diag} (\log W_1, \dots, \log W_n), \\ D_3 &= \text{diag} (L_{21}(\theta), \dots, L_{2n}(\theta)), \\ D_4 &= \text{diag} (e^{-W_1}, \dots, e^{-W_n}), \end{aligned}$$

em que  $W_i = (Y_i/\lambda_i)^\alpha$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $Y^*$  é um vetor coluna  $n \times 1$  dado por

$$Y^* = (W_1 (1 + L_{21}(\theta)) - 1, \dots, W_n (1 + L_{2n}(\theta)) - 1)^\top,$$

e

$$L_{2i}(\theta) = \begin{cases} \frac{C''(\theta e^{-W_i})}{C'(\theta e^{-W_i})} \theta e^{-W_i}, & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

A estimativa de máxima verossimilhança (MV) de  $\Theta$ , que denotaremos por  $\hat{\Theta}$ , é obtida solucionando o sistema não linear de equações  $U_n(\Theta) = 0$ . Para alguns modelos WSPE e para algumas escolhas da função de ligação a solução desse sistema pode ser simplificada. Por

exemplo, se a função de ligação escolhida é a logarítmica, a matriz  $D_1$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Seja

$$K_n(\Theta) = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \Theta \partial \Theta^\top} \quad (2.14)$$

a matriz de informação observada total. Seus elementos são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta^\top} &= \alpha X^\top \{D_7 D_8 - D_1^2 [D_8 + \alpha(D_8 + I) - \alpha D_5^2 (D_6 + D_3)]\} X, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta^\top} &= X^\top D_1 \{D_8 + D_2 D_5 [D_3 + D_5 (I - D_6) - D_8]\} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{\alpha^2} \text{tr} \{D_2^2 [D_8 + I - D_5^2 (D_6 + D_3)] + I\}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \beta^\top} &= \begin{cases} \alpha \theta^{-1} X^\top D_1 D_5 (D_6 + D_3) \mathbf{1}, & \theta \neq 0, \\ \frac{\alpha 2a_2}{a_1} X^\top D_1 D_4 D_5 \mathbf{1}, & \theta = 0, \end{cases} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta} &= \begin{cases} -\theta^{-1} \alpha^{-1} \text{tr}(D_2 D_5 (D_6 + D_3)), & \theta \neq 0, \\ \frac{2a_2}{a_1} \text{tr}(D_2 D_4 D_5), & \theta = 0, \end{cases} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} &= \begin{cases} -n \left[ \frac{1}{\theta^2} + \frac{C'''(\theta)C(\theta) - C'(\theta)^2}{C(\theta)^2} \right] + \frac{1}{\theta^2} \text{tr}(D_6), & \theta \neq 0, \\ \frac{a_2(a_2 - 2a_1)}{a_1^2} - \frac{4a_2^2}{a_1^2} \text{tr}(D_4^2), & \theta = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

em que  $D_5$ ,  $D_6$  e  $D_7$  são matrizes diagonais  $n \times n$  dadas por

$$\begin{aligned} D_5 &= \text{diag}(W_1, \dots, W_n), \\ D_6 &= \text{diag}[L_{31}(\theta), \dots, L_{3n}(\theta)], \\ D_7 &= \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{d^2 \lambda_1}{d\eta_1^2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \frac{d^2 \lambda_n}{d\eta_n^2}\right), \end{aligned}$$

e

$$L_{3i}(\theta) = \begin{cases} \left[ \frac{C'''(\theta e^{-W_i})}{C'(\theta e^{-W_i})} - \left( \frac{C''(\theta e^{-W_i})}{C'(\theta e^{-W_i})} \right)^2 \right] \theta^2 e^{-2W_i}, & \theta \neq 0 \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

Para a distribuição WPE,  $D_6$  é uma matriz de zeros  $n \times n$ . Se a função de ligação escolhida é a logarítmica,  $D_7$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

Enunciamos a seguir a consistência e normalidade assintótica do estimador de MV.

**Lema 2.4.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+2}$  o espaço paramétrico e  $\omega \subset \Omega$  uma região aberta contendo*

o verdadeiro valor do vetor de parâmetros  $\Theta^{(0)} = (\beta_0^\top, \alpha_0, \theta_0)$ . Então, valem as seguintes afirmações.

(i) Cada derivada de terceira ordem da função de log-verossimilhança existe e é dominada por uma função integrável que não depende dos parâmetros, para todo  $\Theta \in \omega$ .

(ii)

$$E(Y^*) = \mathbf{0}_n, \quad E(\mathbf{1}^\top D_1 Y^*) = \frac{n}{\alpha} \quad e \quad E\left(\frac{C''(\theta e^{-W}) e^{-W}}{C'(\theta e^{-W})}\right) = \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} - \frac{1}{\theta},$$

em que  $\mathbf{0}_n$  é um vetor coluna  $n \times 1$  de zeros e, então, o valor esperado de cada elemento do vetor escore é zero.

(iii) As integrais  $E(U_n(\Theta)U_n(\Theta))$  podem ser diferenciadas sob o sinal de integração, para todo  $\Theta \in \omega$ , e então  $E(U_n(\Theta)U_n(\Theta)^\top) = -E(K_n(\Theta))$ .

(iv)

$$\frac{1}{n}U_n(\Theta^{(0)}) \rightarrow \mathbf{0}_{k+2} \quad \text{em probabilidade e} \quad \frac{1}{n}K_n(\Theta^{(0)}) \rightarrow J \quad \text{em probabilidade,}$$

em que  $J$  é uma matriz finita  $(k+2) \times (k+2)$ .

*Prova.* (i) Para  $\theta \neq 0$  é trivial mostrar que todas as terceiras derivadas existem. Para provar que as terceiras derivadas existem para  $\theta = 0$ , é suficiente mostrar que o limite da terceira derivada para  $\theta \neq 0$  quando  $\theta \rightarrow 0$  existe. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \ell}{\partial \theta^3} &= -nA(\theta) + \sum_{i=1}^n B_i(\theta)e^{-3W_i} \\ &\rightarrow -n \frac{2a_2^3 - 6a_1a_2a_3}{a_1^3} + \sum_{i=1}^n \frac{16a_2^3 - 48a_1a_2a_3}{a_1^3} e^{-3W_i}, \quad \text{as } \theta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

em que

$$A(\theta) = \frac{1}{C(\theta)^3} (2C'(\theta)^3 + C'''(\theta)C(\theta)^2 - 2C(\theta)^3\theta^{-3} - 3C(\theta)C'(\theta)C''(\theta))$$

e

$$B_i(\theta) = \frac{1}{C'(\theta e^{-w_i})} (C''''(\theta e^{-w_i})C'(\theta e^{-w_i})^2 + 2C''(\theta e^{-w_i})^3 - 3C''''(\theta e^{-w_i})C''(\theta e^{-w_i})C'(\theta e^{-w_i})).$$

Similarmente, pode ser mostrado que todas as terceiras derivadas existem quando  $\theta = 0$ .

Como  $A(\theta)$  e  $B_i(\theta)$  são funções contínuas de  $\theta$ , existem  $s^* < s^{*'} < 0 < s' < s$  e constantes  $c_1, c_2 < \infty$  tais que  $|A(\theta)| < c_1$  e  $|B_i(\theta)| < c_2, \forall i, \forall \theta \in [s^{*'}, s']$ . Pela desigualdade triangular,

$$\left| \frac{\partial^3 \ell}{\partial \theta^3} \right| < n c_1 + c_2 \sum_{i=1}^n e^{-3W_i} < n(c_1 + c_2),$$

e então  $\partial^3 \ell / \partial \theta^3$  é dominada pela função integrável  $n(c_1 + c_2)$ , que não depende dos parâmetros.

A prova para as outras derivadas de terceira ordem é similar.

(ii) A prova segue usando as expansões  $C'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \theta^{n-1}$  e  $C''(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n \theta^{n-2}$  e permutando os sinais de integral e soma.

(iii) A prova segue de (i) e (ii) e do teorema da convergência dominada.

(iv) Os componentes do vetor escore e os componentes da matriz de informação dependem da variável resposta apenas através de  $W_i, i = 1, \dots, n$ . Sob a suposição  $\Theta = \Theta^{(0)}$ , as variáveis aleatórias  $W_1, \dots, W_n$  são iid. Então, o resultado segue de (ii), (iii), e da lei dos grandes números.

□

**Proposição 2.4.2.** *Seja  $Y_i \stackrel{ind}{\sim} WSPE(\lambda_i, \alpha, \theta; C)$ , em que  $\lambda_i$  satisfaz (2.13). Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{k+2}$  o espaço paramétrico e seja  $\omega \in \Omega$  uma região aberta que contenha o verdadeiro valor do vetor de parâmetros  $\Theta^{(0)} = (\beta_0^\top, \alpha_0, \theta_0)$ . Assuma que valem as seguintes condições:*

C1 -  $C(\cdot)$  não é ímpar.

C2 - O posto de  $X$  é  $k$ .

C3 -  $\exists m < \infty$  tal que  $|x_{ij}| < m$ , para todo  $i, j$ .

C4 -  $J$  é positiva definida para  $\Theta \in \omega$ .

Então, com probabilidade tendendo a 1 quando  $n \rightarrow \infty$ , existem soluções  $\hat{\Theta}_n$  das equações de verossimilhança tais que

1.  $\widehat{\Theta}_n$  é consistente;
2.  $\sqrt{n}(\widehat{\Theta}_n - \Theta)^\top \xrightarrow{D} N_{k+2}(0, J^{-1})$ , em que  $N_k(0, \Sigma)$  é a distribuição normal  $k$ -variada com média zero e matriz de covariância  $\Sigma$ .

*Prova.* Sob os verdadeiros valores dos parâmetros o vetor escore e a matriz de informação total dependem da variável resposta apenas através das variáveis aleatórias iid  $W_1, \dots, W_n$ . Do Lema 2.4.1, a prova segue similarmente à prova do Teorema 5.1 em Lehmann & Casella (1998, p. 463).

□

Seja  $(\Theta_1, \Theta_2)$  uma partição do vetor de parâmetros e  $d \leq k + 2$  a dimensão de  $\Theta_1$ . Considere a hipótese nula  $H_0 : \Theta_1 = \Theta^{(0)}$ . Do Lema 2.4.1 e da Proposição 2.4.2 temos que, sob  $H_0$ , a distribuição assintótica das estatísticas escore, razão de verossimilhança e Wald é  $\chi_d^2$  (veja Sen et al., 2009, p 261). Então, através dessas estatísticas é possível testar a adequação da regressão WSPE contra seu principal modelo aninhado, a regressão Weibull.

## 2.5 Estimação de quantis

O quantil de ordem  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ), de forma abreviada quantil  $\xi$ , da distribuição de uma variável aleatória  $Y$  com fda  $F_{Y;\theta}(\cdot)$ , denotado por  $q_\xi$ , é a solução de  $q_\xi = \inf\{y : F_{Y;\theta}(y) \leq \xi\}$ . Se  $Y$  tem uma distribuição contínua, o quantil  $\xi$  de  $Y$  pode ser expresso como

$$q_\xi = F_{Y;\theta}^{-1}(\xi). \quad (2.15)$$

Seja  $q_\xi$  o quantil  $\xi$  de uma distribuição WSPE, para um valor fixo de  $\xi \in (0, 1)$ . Segue de (2.15) e (2.4) que o quantil  $\xi$  pode ser escrito como

$$q_\xi = \lambda B_\xi(\theta)^{1/\alpha}, \quad (2.16)$$

em que

$$B_\xi(\theta) = -\log\left(\frac{C^{-1}((1-\xi)C(\theta))}{\theta}\right), \quad \text{para } \theta \neq 0, \quad (2.17)$$

e  $C^{-1}(\cdot)$  é a função inversa de  $C(\cdot)$ . Note que a função inversa de  $C(\cdot)$  existe visto que ela é monótona. Para  $\theta = 0$ ,  $B_\xi(\theta) = (-\log(1 - \xi))^{1/\alpha}$ . Claramente, para qualquer  $\xi$  fixo,  $q_\xi$  é um parâmetro de escala. Os quantis de diferentes ordens seguem a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{q_\xi}{q_{\xi'}} = \left( \frac{B_\xi(\theta)}{B_{\xi'}(\theta)} \right)^{1/\alpha}, \quad \xi \neq \xi'.$$

Sejam  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\alpha}$  os estimadores de MV de  $\beta$ ,  $\theta$  e  $\alpha$ . Da propriedade de invariância dos estimadores de MV temos que

$$\hat{q}_{\xi,i} = \hat{\lambda}_i B_\xi(\hat{\theta})^{1/\hat{\alpha}},$$

é o estimador de MV de  $q_{\xi,i}$ , em que  $\hat{\lambda}_i = h^{-1}(\hat{\eta}_i)$ . Aqui,  $\hat{\eta}_i = x_i^\top \hat{\beta}$ . Para a função de ligação logarítmica, i.e.,  $h(\lambda_i) = \log(\lambda_i)$ , podemos escrever  $q_{\xi,i} = \exp\{\beta_0^* + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki}\}$ , em que  $\beta_0^* = \beta_0 + \alpha^{-1} \log B_\xi(\theta)$  é um intercepto modificado. Neste caso, o efeito das covariáveis em qualquer quantil e no parâmetro de escala é o mesmo.

A expansão em série de Taylor de segunda ordem de  $\hat{q}_{\xi,i}$  em torno de  $(\hat{\beta}^\top, \hat{\alpha}, \hat{\theta})^\top = (\beta^\top, \alpha, \theta)^\top$  é dada por

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\xi,i} &\approx q_{\xi,i} + \frac{\hat{\theta} - \theta}{\alpha} \lambda_i B'_\xi(\theta) B_\xi(\theta)^{1/\alpha - 1} - \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)}{\alpha^2} h^{-1}(\eta_i) B_\xi(\theta)^{1/\alpha} \log(B_\xi(\theta)) \\ &\quad + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \eta_i} B_\xi(\theta)^{1/\alpha} \sum_{j=1}^k (\hat{\beta}_j - \beta_j) x_{ij}. \end{aligned}$$

Daí, uma expressão aproximada para a variância de  $\hat{q}_{\xi,i}$  é dada por

$$\text{Var}(\hat{q}_{\xi,i}) \approx E_i^\top \Sigma E_i, \quad (2.18)$$

em que  $\Sigma$  é a matriz de covariância assintótica de  $\hat{\Theta} = (\hat{\beta}, \hat{\alpha}, \hat{\theta})$ ,  $E_i = (\varepsilon_{1i}^\top, \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{3i})^\top$  é o vetor com os elementos dados por

$$\varepsilon_{1i} = \frac{d\lambda_i}{d\eta_i} B_\xi(\theta)^{1/\alpha} x_i, \quad \varepsilon_{2i} = -\alpha^{-2} \lambda_i B_\xi(\theta)^{1/\alpha} \log(B_\xi(\theta)), \quad \varepsilon_{3i} = \lambda_i \alpha^{-1} B'_\xi(\theta) B_\xi(\theta)^{1/\alpha - 1}.$$

Note que, como  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})^\top$ , o elemento  $\varepsilon_{1i}$  também é um vetor de tamanho  $k$ . Na prática, a matriz  $\Sigma$  pode ser estimada por  $K_n^{-1}(\hat{\Theta})$  dado em (2.14).

## 2.6 Aplicação 1: Tensão de ruptura de fibras de coco

Nesta seção ilustramos uma aplicação do modelo de regressão WSPE a um conjunto de dados reais de Tomczak *et al.* (2007) sobre tensão de ruptura de fibras de coco de diferentes tamanhos e diferentes diâmetros. Ajustamos os modelos Weibull Poisson estendido (WPE), Weibull logarítmico estendido (WLE) e Weibull geométrico estendido (WGE), que são distribuições da classe WSPE com funções  $C(\cdot)$  como definidas na Tabela 2.1. Os resultados são avaliados contra o modelo de regressão Weibull. Para essa aplicação, o modelo de regressão é especificado usando a função de ligação logarítmica, isto é,

$$\lambda_i = \exp\{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}\}, \quad i = 1, \dots, 225.$$

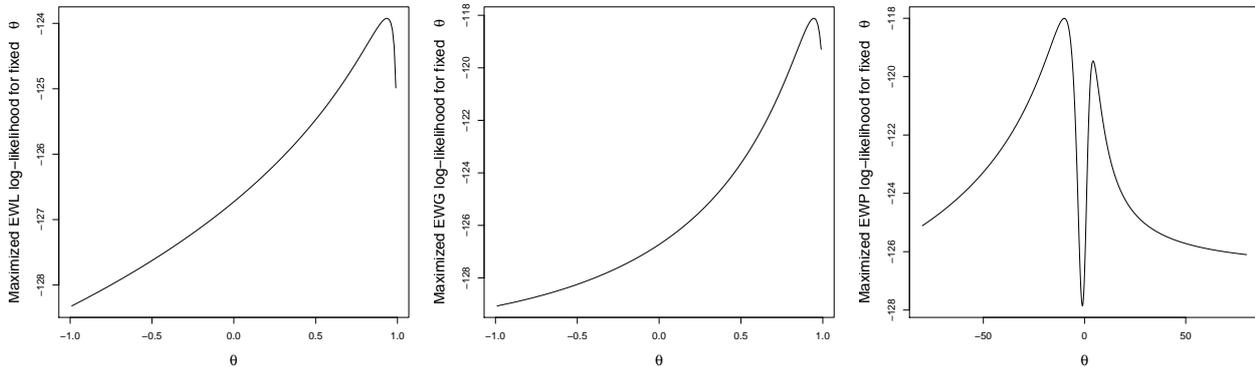
Portanto, o modelo de regressão para o quantil  $\xi$  é

$$q_{\xi,i} = \exp\{\beta_0^* + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}\}, \quad i = 1, \dots, 225,$$

em que  $\beta_0^* = \beta_0 + \alpha^{-1} \log B_\xi(\theta)$ ,  $x_{1i}$  é o tamanho em milímetros (mm) da  $i$ -ésima fibra e  $x_{2i}$  é o logaritmo do diâmetro (mm) da  $i$ -ésima fibra. Por ter sido usada a função de ligação logarítmica, o efeito das covariáveis no parâmetro de escala e em todos os quantis é o mesmo, como discutido na Seção 2.5.

Para obter os estimadores de MV, construímos uma função de log-verossimilhança perfilada fixando uma grade de valores para o parâmetro  $\theta$ . Os códigos implementados em R estão disponíveis no Apêndice B. Começamos com  $\theta = 0$ , i.e., o modelo de regressão Weibull. Os valores estimados dos parâmetros para  $\theta = 0$  fixado foram usados como valores iniciais para obter as estimativas dos parâmetros para  $\theta = 0,01$  fixado; os parâmetros estimados para  $\theta = 0,01$  fixo são usados como valores iniciais para obter as estimativas dos parâmetros para  $\theta = 0,02$  fixado, e assim por diante, e de forma similar para os valores negativos de  $\theta$ . Em torno do máximo global, consideramos a função de log-verossimilhança em uma grade mais fina de valores de  $\theta$ . Usamos o mesmo procedimento para os valores negativos de  $\theta$ . Para cada valor fixo de  $\theta$ , encontramos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros usando o método BFGS implementado no software R. A Figura 2.3 apresenta as curvas da

log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE.



**Figura 2.3:** Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE.

Os parâmetros estimados, o valor da log-verossimilhança maximizada  $\hat{\ell}$  e o critério de informação de Akaike (AIC) para os diferentes modelos de regressão são dados na Tabela 2.2. Também realizamos o teste da razão de log-verossimilhança (RV) da hipótese nula  $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$  contra  $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0$ , i.e., o modelo Weibull foi testado contra um determinado modelo WSPE. Sob a hipótese nula, a distribuição assintótica da estatística de teste RV é uma  $\chi_1^2$ . As estatísticas de RV usadas para testar o modelo Weibull contra os modelos WLE, WGE e WPE são dados na Tabela 2.2 com seus respectivos valores- $p$  entre parênteses. Para os níveis de significância usuais, os testes da RV rejeitam a distribuição de Weibull em favor das distribuições WGE e WPE. Os AIC's indicam que os modelos de regressão WGE e WPE ajustam melhor os dados que os modelo WLE e Weibull.

**Tabela 2.2:** Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses), log-verossimilhança maximizada, estatística da razão de log-verossimilhanças (RV) e AIC para os modelos de regressão Weibull, WLE, WGE e WPE.

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\ell}$	RV	AIC
Weibull	-0,2750 (0,0989)	-0,0132 (0,0038)	-0,5729 (0,0555)	3,2631 (0,1583)	-	-126,7286	-	261,4
WLE	-0,0613 (0,1225)	-0,0116 (0,0038)	-0,5541 (0,0568)	4,4998 (0,6588)	0,9355 (0,0775)	-123,9225	5,6122 (0,0178)	257,8
WGE	0,0982 (0,1491)	-0,0109 (0,0040)	-0,5876 (0,0622)	5,0520 (0,3679)	0,9455 (0,0405)	-118,1125	17,2323 ( $< 0,001$ )	246,2
WPE	-1,1728 (0,2179)	-0,0119 (0,0040)	-0,5813 (0,0615)	1,3694 (0,1859)	-10,0190 (3,2091)	-118,0037	17,4498 ( $< 0,001$ )	246,0

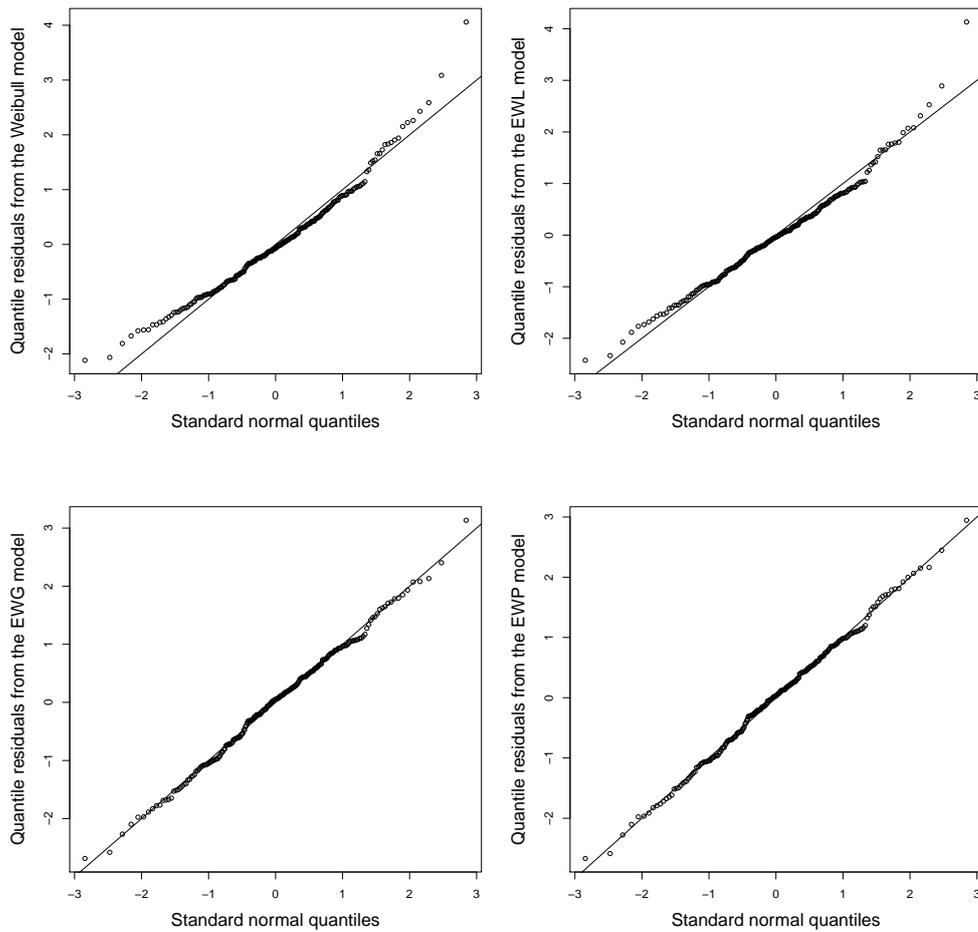
Com objetivo de fazer uma análise de diagnóstico, usamos os resíduos quantílicos propostos por [Dunn e Smyth \(1996\)](#). Seja  $Y \sim \text{WSPE}(\lambda, \alpha, \theta; C)$  e seja  $Q_r = \Phi^{-1}(F(Y; \lambda, \alpha, \theta))$ , em que  $\Phi(\cdot)$  é a fda da distribuição normal padrão e  $F(Y; \lambda, \alpha, \theta)$  é a fda dada em (2.4). Então,  $F(Y; \lambda, \alpha, \theta)$  é uniformemente distribuída no intervalo unitário e  $Q_r$  tem distribuição normal padrão. Então, se a suposição do modelo de regressão WSPE é razoável, espera-se que os resíduos quantílicos definidos por  $Q_{r,i} = \Phi^{-1}(F(y_i; \hat{\lambda}_i, \hat{\alpha}, \hat{\theta}))$ , para  $i = 1, \dots, n$ , se comportem como variáveis aleatórias  $N(0, 1)$  iid. Aqui,  $y_i$  denota a  $i$ -ésima resposta observada.

A Figura 2.4 apresenta os gráfico de Quantil-Quantil (Q-Q) para os resíduos quantílicos dos quatro diferentes modelos WSPE ajustados. É notável que os modelos WGE e WPE ajustam melhor os dados que os outros dois modelos e que a distribuição Weibull é inapropriada. Essas conclusões são confirmadas através dos testes de normalidade de Shapiro-Wilk e Anderson-Darling, como mostrado na Tabela 2.3. Nenhum dos dois testes rejeita a hipótese de normalidade dos resíduos para os modelos WGE e WPE. A comparação entre os modelos WPE e WGE revela que o primeiro aparentemente é a melhor escolha: seus resíduos quantílicos concordam quase perfeitamente com os quantis da distribuição normal padrão, apresenta o maior valor- $p$  em todos os testes de normalidade e é o único modelo que captura o sistema em paralelo das fibras de coco.

**Tabela 2.3:** Estatísticas de teste de normalidade dos resíduos quantílicos para os modelos ajustados (valores- $p$  em parênteses).

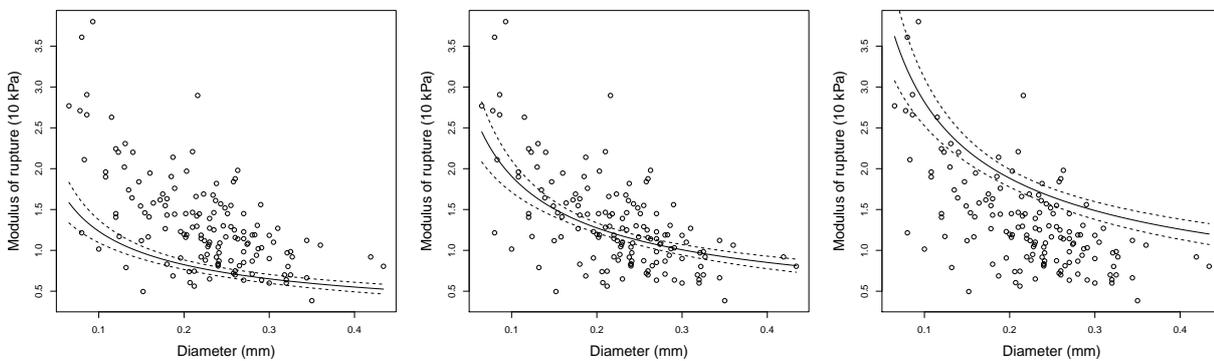
Modelo	Shapiro-Wilk	Anderson-Darling
Weibull	0,9719 (0,0002)	1,1515 (0,0051)
WLE	0,9810 (0,0039)	0,6785 (0,0754)
WGE	0,9970 (0,9456)	0,2565 (0,7201)
WPE	0,9975 (0,9778)	0,2039 (0,8738)

A Figura 2.5 apresenta gráficos dos quantis estimados de ordem 0,1, 0,5 e 0,9 do modelo WPE contra o diâmetro da fibra para um tamanho de fibra igual a 20 mm. As linhas sólidas



**Figura 2.4:** Gráficos  $Q-Q$  dos resíduos quantílicos.

são as curvas dos quantis e as pontilhadas delimitam o intervalo de aproximadamente 95% de confiança. Os intervalos de confiança são obtidos de acordo com a distribuição normal assintótica dos quantis estimados e a variância aproximada é dada em (2.18).



**Figura 2.5:** Gráficos dos quantis ajustados do modelo  $WPE$  para  $\xi = 0,1, 0,5$  e  $0,9$ . Linhas sólidas são as estimativas pontuais dos quantis e as pontilhadas delimitam a região de 95% de confiança.

## 2.7 Discussão sobre uma extensão mais ampla da classe de distribuições

As distribuições WSP introduzidas por [Morais e Barreto-Souza \(2011\)](#) são baseadas em composições entre a lei Weibull com parâmetros de escala e forma  $\lambda$  e  $\alpha$ , respectivamente, e a classe de distribuições discretas de série de potência, com parâmetro  $\theta > 0$ . Neste capítulo apresentamos uma extensão das distribuições WSP, chamando essas novas distribuições Weibull série de potência estendidas (WSPE), que admite que  $\theta$  assumam valores negativos. A construção das distribuições WSPE é baseada na série de potência  $C(\cdot)$  dada em (2.1), com raio de convergência  $s$ . Determinamos que o espaço paramétrico de  $\theta$  deve estar contido no intervalo  $(-s, s)$ . Para algumas distribuições WSPE, porém, o espaço paramétrico de  $\theta$  pode ser ainda mais estendido para um intervalo  $(s^\dagger, s)$ , com  $s^\dagger \leq -s$ . Neste caso, os resultados da Seção 2 podem não ser válidos para  $\theta \leq -s$  já que eles são obtidos a partir da expansão de  $C(\theta)$  em série de potência. As distribuições WGE e WLE são dois exemplos para ilustrar isso. Em ambos os casos, o espaço paramétrico de  $\theta$  pode ser estendido para  $(-\infty, 1)$ . Para as outras séries de potência relacionadas na Tabela 2.1, suas respectivas distribuições WSPE não admitem essa expansão mais ampla, ou seja,  $\theta$  não pode ser menor que  $s^*$ .

Para formalizar este conceito definimos  $D : (s^\dagger, s) \rightarrow \mathbb{R}$  como uma função que admite todas as derivadas e tal que  $D(\theta) = C(\theta)$ ,  $\forall \theta \in (-s, s)$ . Note que  $D(\theta)$  não é escrita como uma série de potência quando  $\theta \in (s^\dagger, -s)$ . Tomando  $\mathcal{D} = \{\theta \in (s^\dagger, 0) : D'(\theta) = 0\}$ , seja

$$d^* = \begin{cases} \max \mathcal{D}, & \text{se } \mathcal{D} \neq \emptyset \\ s^\dagger, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É possível checar que a função em (2.5) continua sendo uma densidade para  $\theta \in (d^*, 0)$ . Após essa expansão mais ampla do espaço paramétrico, a identificabilidade continua valendo se e somente se  $C(\theta)$  não é ímpar, para  $\theta \in (s^*, 0)$ . Já a caracterização por sistema em paralelo não é garantida para  $\theta \in (s^\dagger, -s)$  mesmo que seja válida para  $\theta \in (-s, 0)$ . Para as distribuições WGE e WLE, a caracterização por sistema em paralelo é válida para qualquer  $\theta < 0$  tomando  $t(\theta) = \theta/(\theta - 1)$ .

Alguns resultados obtidos podem ser ampliados para uma classe mais ampla que a WSPE, não apenas em considerar  $\theta \leq -s$ , mas por assumir que o tempo até a falha de cada componente segue uma distribuição contínua e não-negativa qualquer que não só a Weibull. Em outras palavras, a construção da classe depende de uma função de sobrevivência (veja (2.4)) que não precisa necessariamente ser relativa à distribuição de Weibull. Alguns resultados apresentados ao longo do trabalho dependem da distribuição de Weibull apenas através de sua função de sobrevivência, que poderia ser trocada pela função de sobrevivência de outra distribuição. A suposição da distribuição de Weibull é requerida principalmente nas seções sobre estimação. Neste trabalho, a escolha da distribuição de Weibull para a construção da classe tem uma motivação aplicada devido à popularidade de seu uso para modelagem em dados de sobrevivência e confiabilidade.

## 2.8 Observações finais

Estendemos a classe de distribuições proposta por [Morais e Barreto-Souza \(2011\)](#) de tal forma que a distribuição de Weibull é um caso especial dessa nova classe. Essa classe estendida, que denominamos por Weibull série de potência estendida (WSPE), é baseada na composição entre a lei de Weibull e a classe de distribuições de série de potência.

As distribuições WSP estão associadas a sistemas em série com um número aleatório de componentes. Existe uma ordem estocástica e uma ordem da função de risco de acordo com o parâmetro  $\theta$ , herdado da distribuição de série de potência. A função de risco da WSP está sempre acima da função de risco da distribuição de Weibull. Essa é uma limitação da classe WSP que é contornada quando a extensão proposta nesse trabalho é considerada. A função de risco da distribuição WSPE pode estar uniformemente acima ou uniformemente abaixo da função de risco da Weibull, bem como podem se cruzar.

A função  $C(\cdot)$  (veja (2.2)) em alguns casos pode ser ímpar. Neste caso, não existe ganho em considerar valores negativos para o parâmetro  $\theta$  no sentido de que a fdp da WSPE como função de  $\theta$  é ímpar, o que resulta em um modelo não identificável. Então, a fim de aumentar a flexibilidade das formas da densidade, não é recomendado o uso de uma função  $C(\cdot)$  ímpar.

Propomos um modelo de regressão para a classe de distribuições WSPE. Uma estru-

tura de regressão linear foi definida para o parâmetro de escala. Discutimos estimação por máxima verossimilhança, derivamos a matriz de informação total observada e obtivemos a distribuição assintótica para estes estimadores. Como em estudos de sobrevivência existe geralmente um interesse em estudar os quantis da variável resposta e não a escala, damos uma opção para estimação pontual e intervalar de quantis. Ajustamos os modelos de regressão WPE, WGE e WLE a um conjunto de dados reais sobre tensão de ruptura de fibras de coco de diferentes tamanhos e diâmetros para ilustrar a aplicabilidade dos modelos de regressão WSPE e apresentamos um mecanismo simples com fins de diagnóstico.

---

### Modelos bivariados para sistemas em série e em paralelo

---

#### 3.1 Introdução

Foram introduzidos na literatura bastantes modelos univariados com interpretação física voltada à ideia de sistemas em série ou em paralelo. Versões multivariadas, porém, foram ainda relativamente pouco trabalhadas. [Marshall e Olkin \(1997\)](#) introduziram uma forma de adicionar parâmetros a um modelo bivariado a partir da composição entre esse modelo e uma distribuição geométrica bivariada, em uma ideia similar à de sistemas em série e em paralelo. Embora apresentem uma ideia de construção de modelos bivariados, [Marshall e Olkin \(1997\)](#) não apresentam propriedades para as distribuições resultantes. Recentemente, seguindo a ideia de [Marshall e Olkin \(1997\)](#), [Kundu e Gupta \(2014\)](#) introduziram o modelo bivariado Weibull geométrico, considerando uma composição entre uma distribuição Weibull bivariada e uma distribuição geométrica bivariada.

O modelo WSP bivariado introduzido aqui, o qual denotaremos por WSPB, tem motivação na aplicação apresentada na Seção 2.6. Nessa aplicação, é medida uma força aplicada em fibras de coco até que se rompam. Essas fibras são compostas por microfibras, cuja quantidade é desconhecida, que caracterizam os componentes do sistema latente. Porém, além da força medida em cada fibra até sua ruptura, foi medido também o módulo de elasticidade

da fibra no momento de sua ruptura. Temos, então, em cada fibra, duas medidas tomadas no momento em que ela se rompe, ou seja, no momento em que o sistema falha.

No caso univariado, como visto no Capítulo 2, é possível derivar um modelo para o tempo de vida de um sistema em série com quantidade desconhecida de componentes e, através de uma extensão do espaço paramétrico, permitir uma interpretação baseada em sistemas série e em paralelo. Extensão similar para o caso bivariado não é possível. Portanto, obteremos dois modelos bivariados separadamente, um baseado em um sistema em série, outro em um sistema em paralelo. Apesar da motivação para a construção do modelo estar associada à falha de sistemas em paralelo e em série, os modelos apresentados aqui podem ser adequados a qualquer conjunto de dados positivos bivariados e positivamente correlacionados.

Este capítulo está organizado como se segue. Na Seção 3.2 construímos o modelo WSPB baseado em sistemas em série e apresentamos algumas de suas propriedades. Na Seção 3.3 apresentamos uma versão de modelo bivariado relacionado a sistemas em paralelo. Na Seção 3.4 propomos um modelo de regressão para modelar os parâmetros de escala das distribuições relacionadas a sistemas em série e outro para modelar os parâmetros de escala da distribuição WSPB construída a partir de sistemas em paralelo. Nessa mesma seção abordamos a estimação dos parâmetros via máxima verossimilhança. Na Seção 3.5 comentamos sobre a construção de um modelo bivariado misto, em que um componente do vetor bivariado está associado a um sistema em série enquanto o outro componente está associado a sistemas em paralelo. Na Seção 3.6 fazemos uma extensão multivariada do modelo WSPB. Na Seção 3.7 aplicamos os modelos bivariados para sistemas em série e em paralelo ao conjunto de dados reais que motivou a construção desses modelos, sobre ruptura de fibras de coco. Encerramos com algumas considerações finais na Seção 3.8.

## 3.2 Modelo bivariado para sistemas em série

Sejam  $Y_{ij} \sim \text{Weibull}(\lambda_j, \alpha_j)$ , para  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 1, 2$ , variáveis aleatórias independentes. Seja  $N$  uma variável aleatória discreta com distribuição de série de potência com parâmetro  $\theta \in (0, s)$ , como definido em (2.2). Dado  $N = n$ , as variáveis aleatórias

$$Y_1 = \min\{Y_{11}, \dots, Y_{N1}\} \quad \text{e} \quad Y_2 = \min\{Y_{12}, \dots, Y_{N2}\}$$

são independentes e suas respectivas distribuições de probabilidade são Weibull( $n^{-1/\alpha_1}\lambda_1, \alpha_1$ ) e Weibull( $n^{-1/\alpha_2}\lambda_2, \alpha_2$ ). Segue, então, que a função de sobrevivência do vetor  $(Y_1, Y_2)$  é dada por

$$\begin{aligned} S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) &\equiv P(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2) \\ &= \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)}{C(\theta)}, \quad y_1, y_2 > 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$ . A função  $C(\cdot)$  e a quantidade  $s$  são definidas em (2.1). A densidade conjunta de  $(Y_1, Y_2)$  é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) &= \frac{\theta \alpha_1 \alpha_2 y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1}}{\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} C(\theta)} e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \\ &\times \left\{ C''\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right) \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right. \\ &\left. + C'\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right) \right\}, \quad y_1, y_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

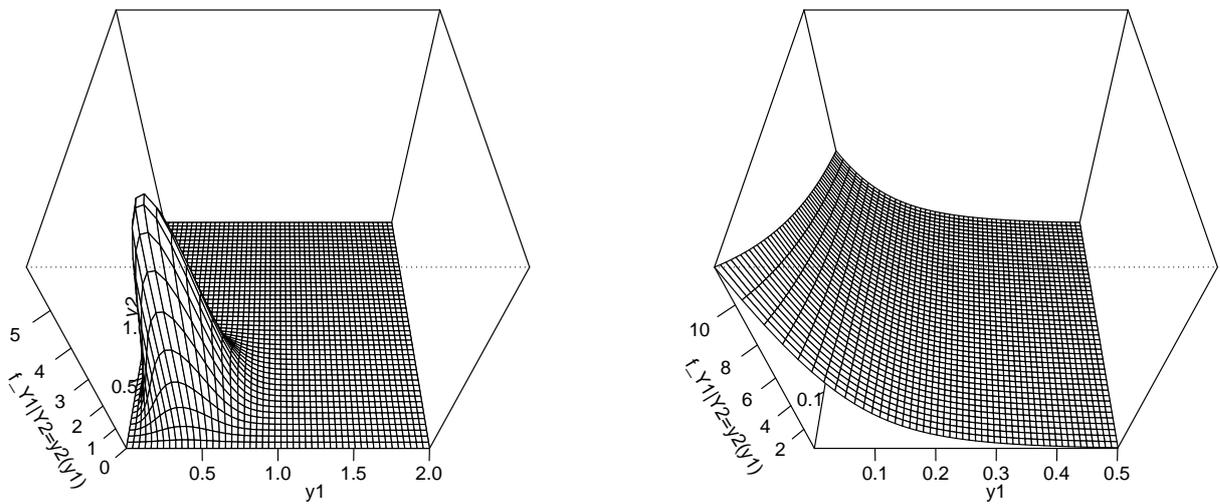
**Definição 3.2.1.** Para uma dada função  $C(\cdot)$  em (2.1), o modelo Weibull série de potência bivariado para sistemas em série (WSPB<sub>s</sub>) com parâmetros  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$  é definido pela densidade em (3.2).

Será usada a notação WSPB<sub>s</sub>( $\lambda, \alpha, \theta; C$ ), com  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , para denotar a distribuição WSPB para sistemas em série com parâmetros  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$  e uma dada função  $C(\cdot)$ . Pela própria construção do modelo, é imediato perceber que a distribuição marginal de  $Y_1$  é WSPE( $\lambda_1, \alpha_1, \theta; C$ ), bem como a distribuição marginal de  $Y_2$  é WSPE( $\lambda_2, \alpha_2, \theta; C$ ).

Assim como no caso univariado, a escolha da função  $C(\cdot)$  determina uma família de distribuições dentro da classe de distribuições WSPB<sub>s</sub>. Para escolhas de  $C(\cdot)$  dentre as apresentadas na Tabela 2.1 atribuímos nomes especiais. No caso de serem escolhidas as funções  $C(\cdot)$  como nos casos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 chamamos a distribuição WSPB<sub>s</sub> correspondente de Wei-

bull Poisson bivariada ( $WPB_s$ ), Weibull geométrica bivariada ( $WGB_s$ ), Weibull logarítmica bivariada ( $WLB_s$ ), Weibull binomial bivariada ( $WBB_s$ ), Weibull binomial negativa bivariada ( $WBNB_s$ ) e Weibull logarítmica II bivariada ( $WLIIB_s$ ) para sistemas em série, respectivamente.

Na Figura 3.1 apresentamos gráficos da densidade da distribuição de Weibull Poisson bivariada para sistemas em série, que é obtida usando a função  $C(\cdot)$  da distribuição de Poisson truncada em zero dada na Tabela 2.1.



**Figura 3.1:** Densidade da distribuição de Weibull Poisson bivariada para sistemas em série para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (3, 3)$  (esquerda) e para  $\theta = 2$ ,  $\lambda = (0, 3; 2)$  e  $\alpha = (1, 1)$  (direita).

A fda de  $(Y_1, Y_2)$  é

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = 1 - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)}{C(\theta)} - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)}{C(\theta)} + \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)}{C(\theta)}, \quad y_1, y_2 > 0.$$

Como  $C'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \theta^{n-1}$  e  $C''(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n \theta^{n-2}$ , para  $\theta \in (0, s)$ , de (3.2) temos que

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} g(y_1; \lambda_1 n^{-1/\alpha_1}, \alpha_1) g(y_2; \lambda_2 n^{-1/\alpha_2}, \alpha_2), \quad (3.3)$$

para  $y_1, y_2 > 0$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$ , em que  $g(y; \lambda, \alpha)$  é a fdp da distribuição Weibull com parâmetros de escala  $\lambda$  e de forma  $\alpha$  dada em (2.3). Então, as densidades conjuntas das distribuições  $WSPB_s$  são misturas do produto de duas densidades Weibull, com pesos determinados pela distribuição discreta de série de potência. Segue de (3.3) e do teorema da convergência monótona que a esperança de  $Y_1^{r_1} Y_2^{r_2}$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$  é dada por

$$E(Y_1^{r_1} Y_2^{r_2}) = \frac{\Gamma\left(\frac{r_1}{\alpha_1} + 1\right) \Gamma\left(\frac{r_2}{\alpha_2} + 1\right) \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2}}{C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{n^{\frac{r_1}{\alpha_1} + \frac{r_2}{\alpha_2}}}. \quad (3.4)$$

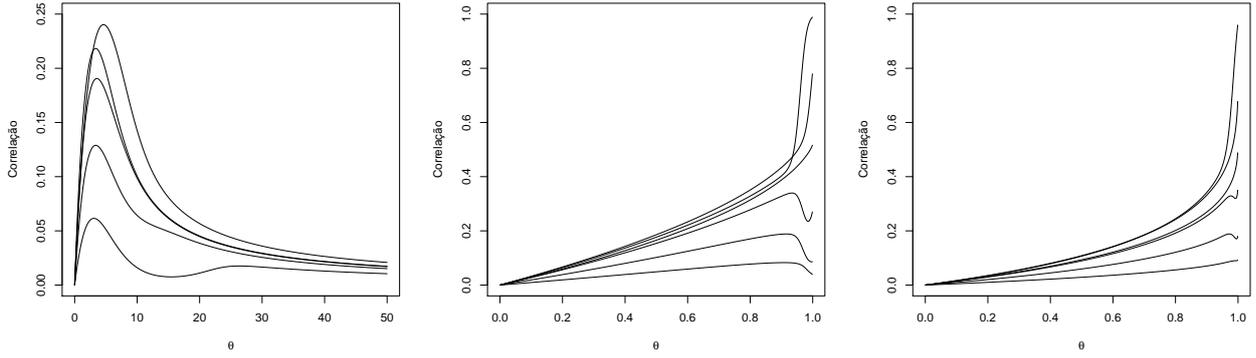
Para quaisquer escolhas de  $r_1 \in \mathbb{N}$  e  $r_2 \in \mathbb{N}$ , a esperança  $E(Y_1^{r_1} Y_2^{r_2})$  é finita visto que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n n^{-\frac{r_1}{\alpha_1} - \frac{r_2}{\alpha_2}} \leq C(\theta) < \infty$ ,  $\theta \in (0, s)$ .

De (3.4), a covariância entre  $Y_1$  e  $Y_2$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$  é dada por

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \lambda_1 \lambda_2 \Gamma\left(\frac{1}{\alpha_1} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha_2} + 1\right) \text{Cov}\left(N^{-\frac{1}{\alpha_1}}, N^{-\frac{1}{\alpha_2}}\right),$$

em que  $N \sim SP(\theta; C)$ , com função de probabilidade dada em (2.2). Para encontrar o coeficiente de correlação entre  $Y_1$  e  $Y_2$ , o desvio padrão de  $Y \sim WSPE(\lambda, \alpha, \theta; C)$  é obtido a partir de (2.8) e é dado por  $\lambda^2 \Gamma(2/\alpha + 1) E(N^{-2/\alpha}) - [\lambda \Gamma(1/\alpha + 1) E(N^{-1/\alpha_2})]^2$ . A correlação entre os componentes de uma variável aleatória  $WSPB_s$  é sempre positiva. Além disso, a correlação não depende dos parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Na Figura 3.2 apresentamos a correlação entre os componentes do vetor aleatório  $WSPB_s$  em função do parâmetro  $\theta$ , para algumas escolhas de  $\alpha$ , para os modelos obtidos a partir das funções  $C(\cdot)$  apresentadas na Tabela 2.1 referentes às distribuições de Poisson, geométrica e logarítmica.

No caso univariado apresentado no Capítulo 2 tomamos a distribuição de Weibull quando  $\theta = 0$ . Aqui,  $\theta = 0$  não faz parte do espaço paramétrico visto que não é possível fazer a ampliação do modelo multivariado nos mesmos moldes do caso univariado. Então, o valor zero não é ponto interior do espaço paramétrico para  $\theta$  e, portanto,  $\theta = 0$  não será incluído no modelo bivariado. Ainda assim, estudamos as propriedades limite do modelo quando



**Figura 3.2:** Correlação em função de  $\theta$  entre os componentes das distribuições  $WPB_s$ ,  $WGB_s$  e  $WLB_s$  para algumas escolhas do parâmetro  $\alpha$ .

$\theta \rightarrow 0^+$ , como segue no próximo resultado.

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ , em que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$ . Se  $\theta \rightarrow 0^+$ , então  $(Y_1, Y_2)$  converge em distribuição para  $(M_1, M_2)$ , em que  $M_1$  é independente de  $M_2$ ,  $M_1 \sim Weibull(\lambda_1, \alpha_1)$  e  $M_2 \sim Weibull(\lambda_2, \alpha_2)$ .*

*Prova.* A função de sobrevivência conjunta em (3.1) pode ser reescrita como

$$S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = \frac{a_1 e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \theta^{n-1} \left\{ e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right\}^n}{a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \theta^{n-1}}.$$

Temos que  $S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}$ , que é o produto das funções de sobrevivência marginais de  $M_1$  e  $M_2$

□

A Proposição 3.2.2 nos diz que quando  $\theta$  converge para zero há independência entre os componentes do vetor de variáveis aleatórias  $WSPB_s$ . Mais do que isso, como a correlação é sempre positiva, as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$ ,  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ , serão independentes apenas no caso limite apresentado na Proposição 3.2.2, quanto  $\theta \rightarrow 0^+$ .

Seja  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ . Então, a fda da variável aleatória  $Y_{(1)} = \min\{Y_1, Y_2\}$  é

$$P(Y_{(1)} \leq y) = 1 - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)}{C(\theta)}, \quad y > 0,$$

e a fda de  $Y_{(2)} = \max\{Y_1, Y_2\}$  é

$$P(Y_{(2)} \leq y) = 1 - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)}{C(\theta)} - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)}{C(\theta)} + \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)}{C(\theta)}, \quad y > 0.$$

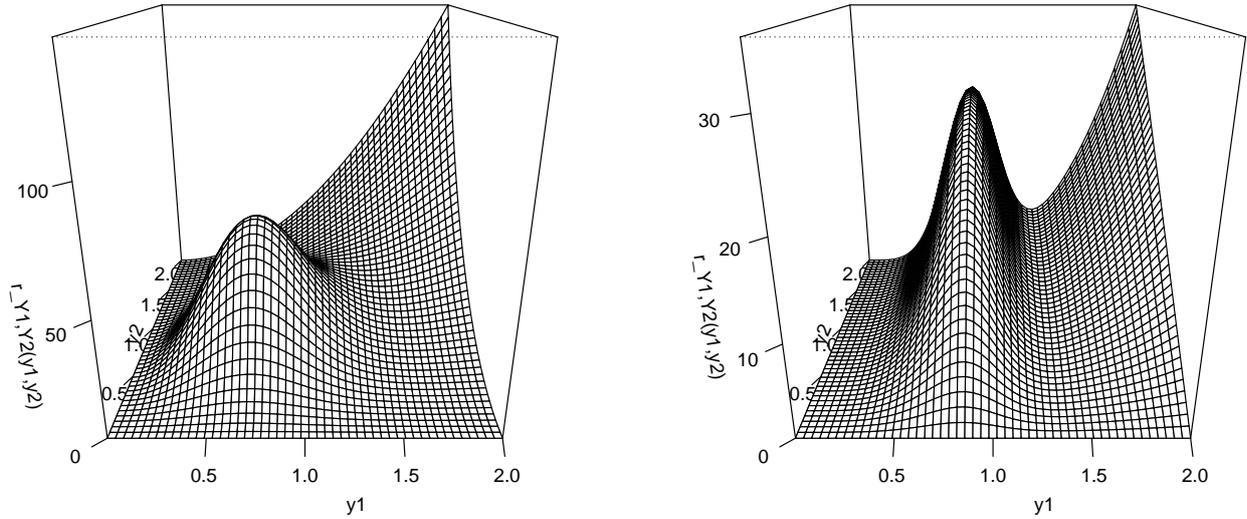
Se  $\lambda_1 = \lambda_2$  e  $\alpha_1 = \alpha_2$ , a distribuição de  $Y_{(1)}$  é  $\text{WSPE}(\lambda_1 2^{-1/\alpha_1}, \alpha_1, \theta; C)$ .

No contexto de dados de tempo de vida, uma quantidade de interesse é a função de risco, que fornece informação sobre o risco instantâneo de falha. No caso bivariado, temos três versões para a função de risco. A primeira é a função de risco conjunta. As outras duas são versões condicionais da função de risco. A função de risco conjunta da distribuição  $\text{WSPB}_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$  é dada por

$$\begin{aligned} r_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) &\equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P(Y_1 \in [y_1, y_1 + \Delta), Y_2 \in [y_2, y_2 + \Delta) | Y_1 \geq y_1, Y_2 \geq y_2)}{\Delta^2} \\ &= \frac{f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)}{S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)} \\ &= \frac{\theta \alpha_1 \alpha_2 y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1} e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}{\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)} \times \left\{ C' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + C'' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right\}. \end{aligned}$$

Na Figura 3.3 apresentamos a funções de risco conjunta para algumas escolhas de parâmetros para a distribuição  $\text{WPB}_s$ .

Além da função de risco conjunta, podemos ter interesse nas funções de risco de um componente  $Y_1$  do vetor aleatório dado o outro componente,  $Y_2$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim \text{WSPB}_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ . Duas possibilidades são o risco de  $Y_1 | Y_2 = y_2$  e de  $Y_1 | Y_2 > y_2$ . O risco de  $Y_1$  dado que  $Y_2 = y_2$  é



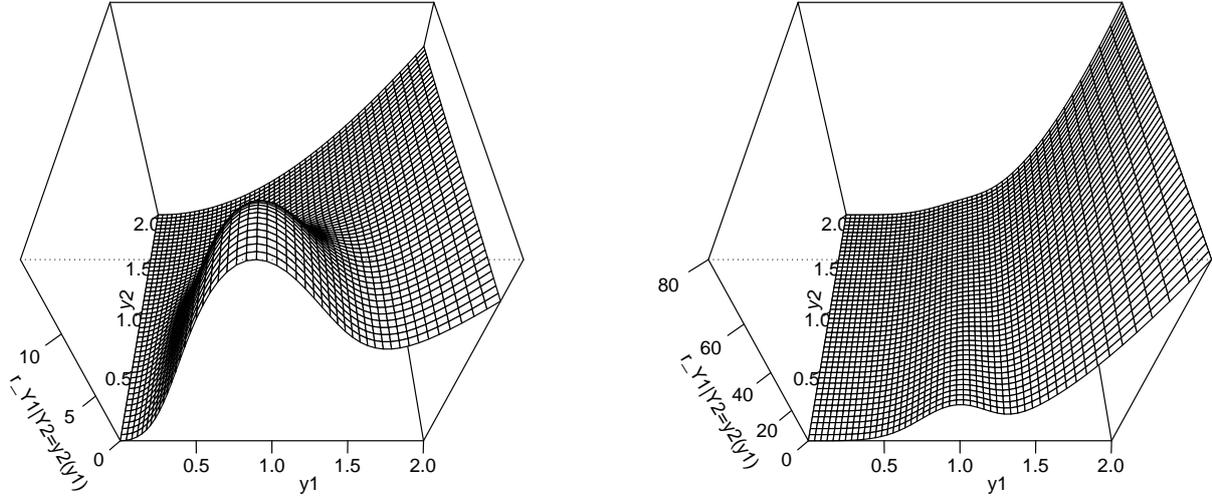
**Figura 3.3:** Função de risco conjunta da distribuição  $WPB_s$  para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (3, 3)$  (esquerda) e para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 3)$  e  $\alpha = (5, 2)$  (direita).

$$\begin{aligned}
 r_{Y_1|Y_2=y_2}(y_1; \lambda, \alpha, \theta) &\equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P(Y_1 \in [y_1, y_1 + \Delta] | Y_1 \geq y_1, Y_2 = y_2)}{\Delta} \\
 &= \frac{f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)}{-\frac{\partial}{\partial y} S_{Y_1, Y_2}(y_1, y) \Big|_{y=y_2}} \\
 &= \frac{\alpha_1 y_1^{\alpha_1 - 1}}{\lambda_1^{\alpha_1}} \left[ 1 + \frac{C'' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}{C' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right)} \right].
 \end{aligned}$$

Na Figura 3.4 apresentamos as funções de risco de  $Y_1|Y_2 = y_2$  para algumas escolhas de parâmetros.

Uma outra opção de estudo de risco é o risco de  $Y_1$  dado que  $Y_2 > y_2$ , apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 r_{Y_1|Y_2 > y_2}(y_1; \lambda, \alpha, \theta) &\equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P(Y_1 \in [y_1, y_1 + \Delta] | Y_1 \geq y_1, Y_2 > y_2)}{\Delta} \\
 &= \frac{-\frac{\partial}{\partial y} S_{Y_1, Y_2}(y, y_2) \Big|_{y=y_1}}{S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)} \\
 &= \frac{\alpha_1 y_1^{\alpha_1 - 1} C' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}{\lambda_1^{\alpha_1} C \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right)}.
 \end{aligned}$$



**Figura 3.4:** Função de risco da distribuição  $WPB_s$  condicional a  $Y_2 = y_2$  para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (3, 3)$  (esquerda) e para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (5; 0, 9)$  (direita).

Na Figura 3.5 apresentamos as funções de risco de  $Y_1$  condicional a  $Y_2 > y_2$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ , para algumas escolhas de parâmetros. Na proposição a seguir fazemos um estudo de propriedades caudais das três funções de risco apresentadas.

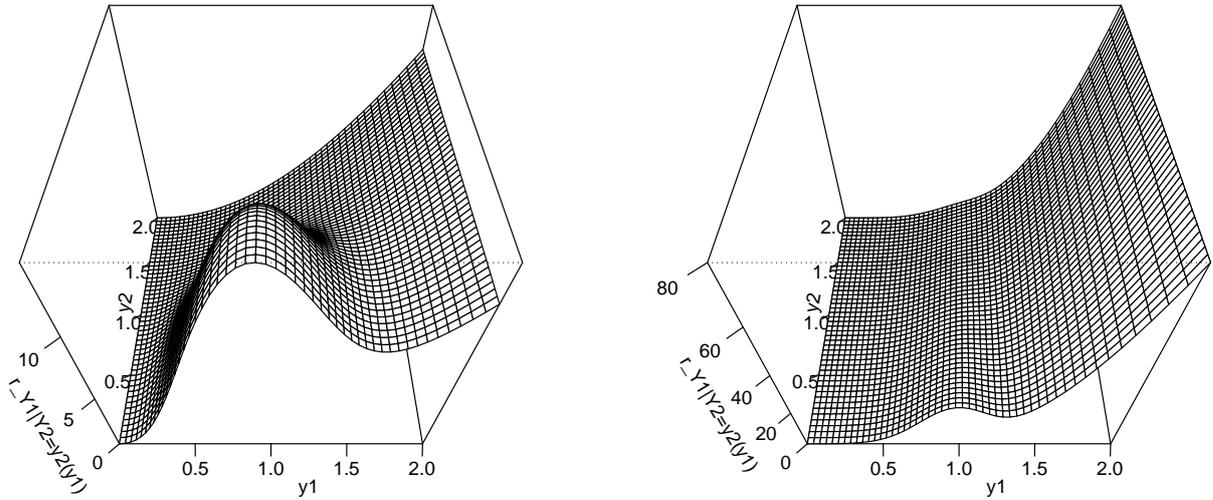
**Proposição 3.2.3.** *Seja  $r_0(\cdot; \lambda, \alpha)$  a função de risco da distribuição Weibull( $\lambda, \alpha$ ). Sejam  $r_{Y_1, Y_2}(\cdot, \cdot; \lambda, \alpha, \theta)$  a função de risco conjunta de  $(Y_1, Y_2)$ ,  $r_{Y_1|Y_2=y_2}(\cdot; \lambda, \alpha, \theta)$  a função de risco de  $Y_1|Y_2 = y_2$  e  $r_{Y_1|Y_2>y_2}(\cdot; \lambda, \alpha, \theta)$  a função de risco de  $Y_1|Y_2 > y_2$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim WSPB_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ . Então,*

1.  $\left| r_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) - r_0(y_1; \lambda_1, \alpha_1)r_0(y_2; \lambda_2, \alpha_2) \right| \xrightarrow{y_1, y_2 \rightarrow \infty} 0;$
2.  $\left| r_{Y_1|Y_2=y_2}(y_1; \lambda, \alpha, \theta) - r_0(y_1; \lambda_1, \alpha_1) \right| \xrightarrow{y_1 \rightarrow \infty} 0;$
3.  $\left| r_{Y_1|Y_2>y_2}(y_1; \lambda, \alpha, \theta) - r_0(y_1; \lambda_1, \alpha_1) \right| \xrightarrow{y_1 \rightarrow \infty} 0.$

*Prova.* Para provar 1, expandindo as funções  $C(\cdot)$ ,  $C'(\cdot)$  e  $C''(\cdot)$  chegamos a

$$\frac{r_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta)}{r_0(y_1; \lambda_1, \alpha_1)r_0(y_2; \lambda_2, \alpha_2)} = \frac{a_1 e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n \theta^{n-1} e^{-n\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - n\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}{a_1 e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \theta^{n-1} e^{-n\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - n\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}$$

$$\xrightarrow{y_1, y_2 \rightarrow \infty} 1$$



**Figura 3.5:** Função de risco da distribuição  $WPB_s$  de  $Y_1$  condicional em  $Y_2 \geq y_2$  para  $\theta = 20$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (1, 1)$  (esquerda) e para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (2, 5)$  e  $\alpha = (4; 0, 8)$  (direita)

A prova de 2 e de 3 é similar à prova de 1.

□

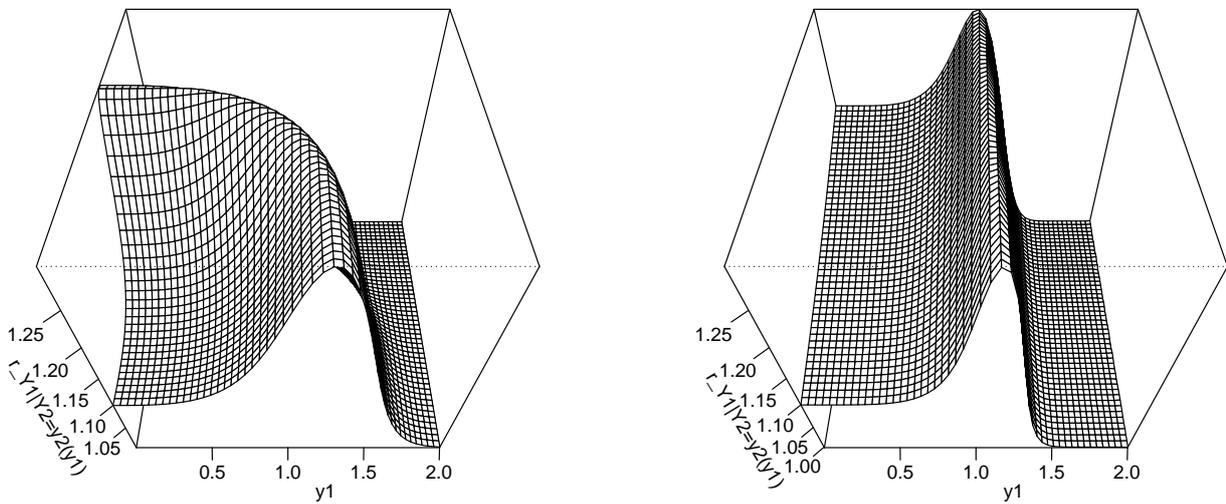
De acordo com a Proposição 3.2.3, o comportamento caudal da função de risco conjunta é próximo ao comportamento caudal do vetor formado por duas variáveis aleatórias independentes com distribuição Weibull. Nas versões de risco condicional, o comportamento caudal da função de risco é próximo ao comportamento de uma variável aleatória Weibull.

Uma quantidade com interpretação prática é a razão entre os riscos condicionais. A título de interpretação, considere que  $Y_1$  representa o tempo até a falha de um sistema e que  $Y_2$  é alguma outra medida feita nesse sistema tomada no instante de sua falha. Essa razão fornece informação do risco instantâneo do sistema falhar dado que  $Y_2$  é igual a  $y_2$  com relação ao risco instantâneo do sistema falhar se  $Y_2$  é maior que  $y_2$ . Para as distribuições  $WSPB_s$  a razão entre as funções de risco é dada por

$$\zeta(y_1, y_2) \equiv \frac{f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)}{\left. \frac{\partial}{\partial y} S_{Y_1, Y_2}(y_1, y) \right|_{y=y_2} \left. \frac{\partial}{\partial y} S_{Y_1, Y_2}(y, y_2) \right|_{y=y_1}}$$

$$= \frac{C' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) + C'' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}{\left[ C \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \right]^{-1} \left[ C' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \right]^2 \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}}.$$

Na Figura 3.6 apresentamos a razão de riscos condicionais para algumas escolhas dos parâmetros do modelo  $WSPB_s$ . Como os comportamentos caudais de ambos os riscos condicionais são os mesmos, essa razão de risco tende a 1 quando  $y_1 \rightarrow \infty$ .



**Figura 3.6:** Razão de riscos condicionais da distribuição  $WPB_p$  para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (3, 3)$  (esquerda) e para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 3)$  e  $\alpha = (5, 1)$  (direita).

### 3.3 Modelo bivariado para sistemas em paralelo

O Capítulo 2 foi baseado em uma extensão da distribuição WSP, ampliando o espaço paramétrico de  $\theta$  permitindo-o ser negativo. Aqui, porém,  $\theta$  é sempre positivo visto que não é possível estender o espaço paramétrico nos mesmo moldes do Capítulo 2. Essa restrição ficará mais clara após definirmos o modelo que será introduzido nessa seção. No caso univariado, para algumas distribuições da classe, quando  $\theta$  é negativo existe uma caracterização baseada em um sistema em paralelo latente. Por isso, para se ter a opção de um modelo bivariado

construído a partir de sistemas em paralelo, construímos o modelo a seguir.

Sejam  $Y_{ij} \sim \text{Weibull}(\lambda_j, \alpha_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 1, 2$  independentes. Seja  $N$  uma variável aleatória discreta com distribuição de série de potência com parâmetro  $\theta$ , como definido em (2.2). Dado  $N = n$ , as variáveis

$$Y_1 = \max\{Y_{11}, \dots, Y_{N1}\} \quad \text{e} \quad Y_2 = \max\{Y_{12}, \dots, Y_{N2}\}$$

são independentes e suas respectivas distribuições são Weibull exponenciada (Mudholkar e Srivastava, 1993). A função de distribuição acumulada condicional de  $Y_1|N = n$  é  $G(y) = \{1 - e^{-(y/\lambda_1)^{\alpha_1}}\}^n$  e a de  $Y_2|N = n$  é  $G(y) = \{1 - e^{-(y/\lambda_2)^{\alpha_2}}\}^n$ . Segue que a função de distribuição acumulada marginal do vetor  $(Y_1, Y_2)$  é dada por

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = \frac{C\left(\theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right)}{C(\theta)}, \quad y_1, y_2 > 0,$$

com  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $\theta \in (0, s)$ , em que  $C(\cdot)$  e  $s$  são definidas em (2.1). A função densidade conjunta de  $(Y_1, Y_2)$  é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) &= \left\{ C''\left(\theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right) \theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right) + C'\left(\theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right) \right\} \times \\ &\quad \frac{\theta \alpha_1 \alpha_2 y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1}}{\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} C(\theta)} e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}, \quad y_1, y_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

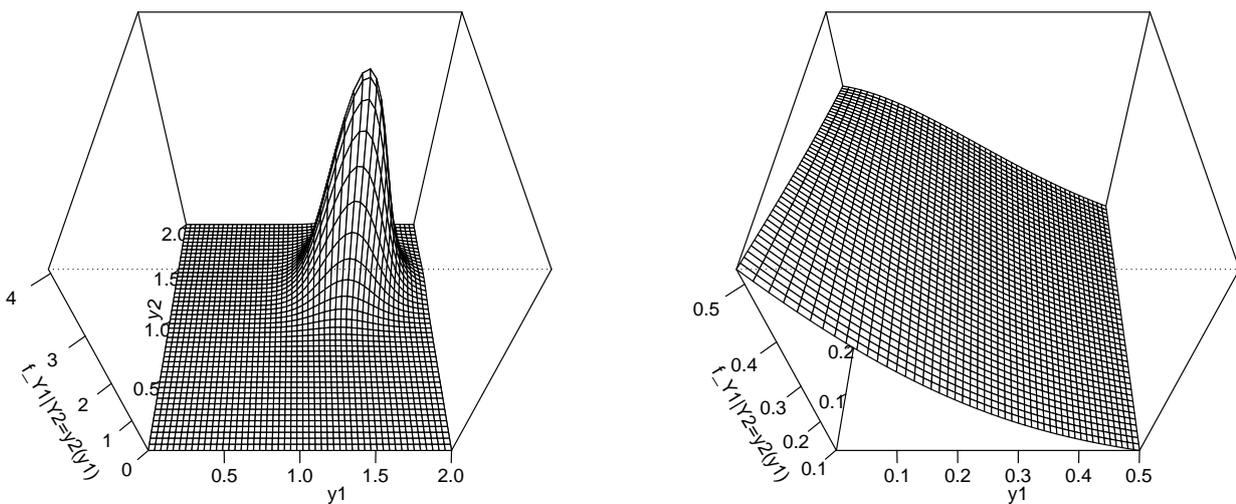
**Definição 3.3.1.** Para uma dada função  $C(\cdot)$  em (2.1), o modelo Weibull série de potência bivariado para sistemas em paralelo ( $WSPB_p$ ) com parâmetros  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$  é definido pela densidade em (3.5).

Será usada a notação  $WSPB_p(\lambda, \alpha, \theta; C)$ , com  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , para denotar a distribuição WSPB para sistemas em paralelo com parâmetros  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$  e uma dada função  $C(\cdot)$ . Para escolhas de  $C(\cdot)$  dentre as apresentadas na Tabela 2.1 atribuímos nomes especiais. No caso de serem escolhidas as funções  $C(\cdot)$  como nos casos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 chamamos a  $WSPB_p$  correspondente de Weibull Poisson bivariada ( $WPB_p$ ), Weibull geométrica bivariada ( $WGB_p$ ), Weibull logarítmica bivariada ( $WLB_p$ ), Weibull binomial

bivariada ( $WBB_p$ ), Weibull binomial negativa bivariada ( $WBNB_p$ ) e Weibull logarítmica II bivariada ( $WLIIB_p$ ) para sistemas em paralelo, respectivamente.

No Capítulo 2 obtivemos um modelo baseado em sistemas em paralelo a partir da extensão do espaço paramétrico do parâmetro  $\theta$ , proveniente das distribuições discretas de série de potência. Para os modelos bivariados definidos neste capítulo construímos o modelo baseado em sistemas em paralelo separadamente do modelo baseado em sistemas em série por não ser possível a unificação desses dois modelos nos mesmos moldes do Capítulo 2. Para verificar essa impossibilidade, vamos tomar o caso especial quando a função  $C(\cdot)$  é proveniente da distribuição de Poisson. Se a extensão fosse possível, as funções  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, -\theta)$  em (3.2) e  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta)$  em (3.5) deveriam coincidir para  $\theta > 0$ . Tomando  $\theta = 1$ , essas funções no ponto  $(1, 1)$  são, respectivamente, 0,16169 e 0,16437, para  $\lambda = \alpha = (1, 1)$ . Portanto, ao se tomar o parâmetro  $\theta$  negativo, a função em (3.2) não coincide com a densidade em (3.5), o que implica na impossibilidade de se estender o espaço paramétrico de  $\theta$  de forma similar ao caso univariado.

Na Figura 3.7 apresentamos gráficos da densidade da Weibull Poisson bivariada para sistemas em paralelo, que é obtida usando a função  $C(\cdot)$  da distribuição de Poisson truncada em zero dada na Tabela 2.1.



**Figura 3.7:** Densidade da Weibull Poisson bivariada para sistemas em paralelo para  $\theta = 10$ ,  $\lambda = (1, 1)$  e  $\alpha = (3, 3)$  (esquerda) e para  $\theta = 2$ ,  $\lambda = (0, 3; 2)$  e  $\alpha = (1, 1)$  (direita).

A função de sobrevivência conjunta de  $Y_1$  e  $Y_2$  é

$$S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = 1 - \frac{C\left(\theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\right)}{C(\theta)} - \frac{C\left(\theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right)}{C(\theta)} + \frac{C\left(\theta\left(1 - e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right)}{C(\theta)}, \quad y_1, y_2 > 0.$$

A distribuição marginal de  $Y_1$  é, por construção, a distribuição do tempo de falha de um sistema em paralelo com tamanho desconhecido de componentes. Para determinada escolha de  $C(\cdot)$ , se existir  $t(\cdot)$  que satisfaça as condições da Proposição 2.3.5, a distribuição de  $Y_1$  é WSPE( $\lambda, \alpha, t^{-1}(\theta)$ ). Conclusão análoga é tomada para a distribuição marginal da variável  $Y_2$ . Note que as distribuições bivariadas construídas a partir de sistemas em série da Definição 3.2.1 sempre têm marginais WSPE. Na abordagem de sistemas em paralelo isso não é garantido, mas é verdade para os modelos construídos a partir das distribuições Poisson, geométrica e logarítmica, salvo pela transformação no parâmetro proveniente das distribuições de série de potência.

Como  $C'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \theta^{n-1}$  e  $C''(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n \theta^{n-2}$ , para  $\theta \in (0, s)$ , de (3.5) temos que

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} g(y_1; \lambda_1, \alpha_1, n) g(y_2; \lambda_2, \alpha_2, n), \quad (3.6)$$

para  $y_1, y_2 > 0$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$  em que  $g(y; \lambda, \alpha, n) = n \alpha y^{\alpha-1} \lambda^{-\alpha} e^{-(y/\lambda)^\alpha} (1 - e^{-(y/\lambda)^\alpha})^{n-1}$  é a fdp da distribuição Weibull exponenciada. Então, as densidades conjuntas da WSPB $_p$  são misturas do produto de duas densidades Weibull exponenciadas, com pesos determinados pela distribuição discreta de série de potência. Segue de (3.6), do teorema da convergência monótona e da expansão binomial dos termos  $(1 - e^{-(y_1/\lambda_1)^{\alpha_1}})^{n-1}$  e  $(1 - e^{-(y_2/\lambda_2)^{\alpha_2}})^{n-1}$  que a esperança de  $Y_1^{r_1} Y_2^{r_2}$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim \text{WSPB}_s(\lambda, \alpha, \theta; C)$ , é dada por

$$E(Y_1^{r_1} Y_2^{r_2}) = \frac{\Gamma\left(\frac{r_1}{\alpha_1} + 1\right) \Gamma\left(\frac{r_2}{\alpha_2} + 1\right) \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2}}{C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n K(n, r_1) K(n, r_2), \quad (3.7)$$

em que  $K(n, r_j) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i i^{-r_j}$ ,  $j = 1, 2$ .

De (3.7), a covariância entre  $Y_1$  e  $Y_2$ , com  $(Y_1, Y_2) \sim \text{WSPB}_p(\lambda, \alpha, \theta; C)$  é dada por

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \lambda_1 \lambda_2 \Gamma\left(\frac{1}{\alpha_1} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha_2} + 1\right) \text{Cov}(K(N, r_1), K(N, r_2)),$$

em que  $N \sim \text{SP}(\theta; C)$ , com função de probabilidade dada em (2.2). Para encontrar a correlação entre  $Y_1$  e  $Y_2$ , os desvios padrão marginais de  $Y_1$  e de  $Y_2$  são obtidos a partir de (3.7) e são dados por  $\lambda_j^2 \Gamma(2/\alpha_j + 1) E(K(N, 2)) - [\lambda_j \Gamma(1/\alpha_j + 1) E(K(N, 1))]^2$ ,  $j = 1, 2$ , respectivamente. O comportamento limite das distribuições  $\text{WSPB}_p$  quando  $\theta \rightarrow 0^+$  é mostrado na proposição a seguir.

**Proposição 3.3.2.** *Seja  $(Y_1, Y_2) \sim \text{WSPB}_p(\lambda, \alpha, \theta; C)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\theta \in (0, s)$ . Se  $\theta \rightarrow 0^+$ , então  $(Y_1, Y_2)$  converge em distribuição para  $(M_1, M_2)$ , em que  $M_1$  é independente de  $M_2$ ,  $M_1 \sim \text{Weibull}(\lambda_1, \alpha_1)$  e  $M_2 \sim \text{Weibull}(\lambda_2, \alpha_2)$ .*

*Prova.* Similar à prova da Proposição 3.2.2. □

Assim como no modelo  $\text{WSPB}_s$ , quando  $\theta \rightarrow 0^+$  os componentes de vetor bivariado com distribuição  $\text{WSPB}_p$  são independentes. A correlação dessas variáveis, que é sempre positiva, implica que a independência ocorre exclusivamente no caso limite quando  $\theta \rightarrow 0^+$ .

### 3.4 Modelos de regressão e estimação

Nessa seção apresentamos dois modelos de regressão  $\text{WSPB}$ , tanto para o modelo associado a sistemas em série quanto para o modelo relacionado a sistemas em paralelo, e a estimação de seus parâmetros por máxima verossimilhança.

As quantidades usadas ao longo desta seção dependem de uma função  $\mathbb{I}$  em que  $\mathbb{I} = 1$  se o modelo é  $\text{WSPB}_p$  e  $\mathbb{I} = 0$  se o modelo é  $\text{WSPB}_s$ .

Sejam  $(Y_{ij}, Y_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, 2$ , vetores aleatórios independentes, com

$$(Y_{i1}, Y_{i2}) \sim \text{WSPB}_s(\lambda_i, \alpha, \theta; C), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

ou

$$(Y_{i1}, Y_{i2}) \sim \text{WSPB}_p(\lambda_i, \alpha, \theta; C), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

em que  $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  e

$$h_1(\lambda_{i1}) = \eta_{i1}, \quad h_2(\lambda_{i2}) = \eta_{i2}, \quad (3.10)$$

$\eta_{i1} = x_i^\top \beta$ ,  $\eta_{i2} = z_i^\top \gamma$ ,  $x_i^\top = (x_{i1}, \dots, x_{ik_1})$ ,  $z_i^\top = (z_{i1}, \dots, z_{ik_2})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^{k_1}$  e  $\gamma \in \mathbb{R}^{k_2}$ . As funções de ligação  $h_1(\cdot)$  e  $h_2(\cdot)$  são duas vezes diferenciáveis, invertíveis e ambas mapeiam  $\mathbb{R}^+$  em  $\mathbb{R}$ . O componente aleatório em (3.8) e os componentes sistemáticos em (3.10) definem o modelo de regressão  $\text{WSPB}_s$ . O componente aleatório em (3.9) e os componentes sistemáticos em (3.10) definem o modelo de regressão  $\text{WSPB}_p$ . Seja  $\Theta = (\beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \theta)$  o vetor de parâmetros desconhecidos. A log-verossimilhança para as  $n$  observações é dada por

$$\begin{aligned} \ell \equiv \ell(\Theta) &= n \log \theta - n \log C(\theta) + n \log \alpha_1 + n \log \alpha_2 - \sum_{i=1}^n W_{i1} - \sum_{i=1}^n W_{i2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \log W_{i1} + \sum_{i=1}^n \log W_{i2} - \sum_{i=1}^n \log Y_{i1} - \sum_{i=1}^n \log Y_{i2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \log \{ C'(\theta (\mathbb{I} - e^{-W_{i1}}) (\mathbb{I} - e^{-W_{i2}})) + \\ &\quad C''(\theta (\mathbb{I} - e^{-W_{i1}}) (\mathbb{I} - e^{-W_{i2}})) \theta (\mathbb{I} - e^{-W_{i1}}) (\mathbb{I} - e^{-W_{i2}}) \}, \end{aligned}$$

em que  $W_{ij} = (Y_{ij}/\lambda_{ij})^\alpha$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, 2$ . O vetor gradiente  $\partial \ell / \partial \Theta^\top = (\partial \ell / \partial \beta^\top, \partial \ell / \partial \gamma^\top, \partial \ell / \partial \alpha_1, \partial \ell / \partial \alpha_2, \partial \ell / \partial \theta)$  tem componentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\alpha_1} \text{tr} \{ D_{12}(I - D_{11}) + I - D_1 D_{11} D_{12} \}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\alpha_2} \text{tr} \{ D_{22}(I - D_{21}) + I - D_1 D_{21} D_{22} \}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= \alpha_1 X^\top \{ D_{11} + I + D_1 D_{11} \} D_{13} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \gamma} &= \alpha_2 Z^\top \{ D_{21} + I + D_1 D_{21} \} D_{23} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= n \left( \frac{1}{\theta} - \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} \right) + \frac{1}{\theta} \text{tr}(D_1), \end{aligned}$$

com  $D_1, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, D_{13}, D_{23}$  matrizes diagonais  $n \times n$  dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{diag}(L_{11}, \dots, L_{n1}), \\ D_{11} &= \text{diag}(W_{11}, \dots, W_{n1}), \\ D_{12} &= \text{diag}(\log W_{11}, \dots, \log W_{n1}), \\ D_{21} &= \text{diag}(W_{12}, \dots, W_{n2}), \\ D_{22} &= \text{diag}(\log W_{12}, \dots, \log W_{n2}), \\ D_{13} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \eta_{11}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n1}} \frac{\partial \lambda_{n1}}{\partial \eta_{n1}}\right), \\ D_{23} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_{12}} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \eta_{12}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n2}} \frac{\partial \lambda_{n2}}{\partial \eta_{n2}}\right) \end{aligned}$$

e

$$L_{i1} = \frac{2C''(\theta e^{-W_{i1}-W_{i2}}) \theta e^{-W_{i1}-W_{i2}} + C'''(\theta e^{-W_{i1}-W_{i2}}) \theta^2 e^{-2W_{i1}-2W_{i2}}}{C'(\theta e^{-W_{i1}-W_{i2}}) + C''(\theta e^{-W_{i1}-W_{i2}}) \theta e^{-W_{i1}-W_{i2}}},$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $K_n(\Theta) = -\partial^2 \ell / \partial \Theta \partial \Theta^\top$  a matriz de informação observada total. Seus elementos são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta^\top} &= \alpha_1 X^\top [\alpha_1 D_{11} (D_2 D_{11} - I) D_{13}^2 + (D_{11} + I + D_1 D_{11}) (D_{14} - D_{13}^2)] X, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \gamma \partial \beta^\top} &= \alpha_1 \alpha_2 X^\top D_{11} D_2 D_{23} D_{21} D_{13} Z, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1 \partial \beta^\top} &= X^\top [D_{11} (I + D_1) + D_{11} D_{12} (I - D_{11} D_2 + D_1) - I] \mathbf{1}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \beta^\top} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X^\top D_{21} D_{11} D_{22} D_2 D_{13} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \beta^\top} &= \frac{\alpha_1}{\theta} X^\top D_2 D_{11} D_{13} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \gamma \partial \gamma^\top} &= \alpha_2 Z^\top [\alpha_2 D_{21} (D_2 D_{21} - I) D_{23}^2 + (D_{21} + I + D_1 D_{21}) (D_{24} - D_{23}^2)] Z, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1 \partial \gamma^\top} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} Z^\top D_{11} D_{21} D_{12} D_2 D_{23} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \gamma^\top} &= Z^\top [D_{21} (I + D_1) + D_{21} D_{22} (I - D_{21} D_2 + D_1) - I] \mathbf{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \gamma^\top} &= \frac{\alpha_2}{\theta} Z^\top D_2 D_{21} D_{23} \mathbf{1}, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_1^2} &= \frac{1}{\alpha_1^2} \text{tr}(D_{11} D_{12}^2 (D_2 D_{11} - D_1 - I) - I), \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \text{tr}(D_2 D_{11} D_{12} D_{21} D_{22}), \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \alpha_1} &= -\frac{1}{\theta \alpha_1} \text{tr}(D_2 D_{11} D_{12}), \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2^2} &= \frac{1}{\alpha_2^2} \text{tr}(D_{21} D_{22}^2 (D_2 D_{21} - D_1 - I) - I), \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \alpha_2} &= -\frac{1}{\theta \alpha_2} \text{tr}(D_2 D_{21} D_{22}), \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} &= n \left[ \frac{1}{\theta^2} + \frac{C''(\theta)}{C(\theta)} - \left( \frac{C''(\theta)}{C(\theta)} \right)^2 \right] - \frac{1}{\theta^2} \text{tr}(D_1 - D_2),
\end{aligned}$$

em que  $D_2$ ,  $D_{14}$  e  $D_{24}$  são matrizes diagonais  $n \times n$  dadas por

$$\begin{aligned}
D_2 &= \text{diag}(L_{12}, \dots, L_{n2}), \\
D_{14} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{d^2 \lambda_{11}}{d\eta_{11}^2}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n1}} \frac{d^2 \lambda_{n1}}{d\eta_{n1}^2}\right), \\
D_{24} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_{12}} \frac{d^2 \lambda_{12}}{d\eta_{12}^2}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n2}} \frac{d^2 \lambda_{n2}}{d\eta_{n2}^2}\right),
\end{aligned}$$

e

$$L_{2i}(\theta) = -\frac{\partial L_{i1}}{\partial W_{i1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para obter as estimativas de MV, construímos uma função de log-verossimilhança perfilada fixando uma grade de valores para o parâmetro  $\theta$ , assim como foi feito na estimação univariada. Começamos com  $\theta = 0$ , i.e., o modelo de regressão Weibull. Os valores estimados dos parâmetros, com  $\theta = 0$  fixado, foram usados como valores iniciais para obter as estimativas dos parâmetros para  $\theta = 0,01$  fixado; os parâmetros estimados, com  $\theta = 0,01$  fixo, são usados como valores iniciais para obter as estimativas dos parâmetros para  $\theta = 0,02$  fixado, e assim por diante. Em torno do máximo global, consideramos a função de log-verossimilhança em uma grade mais fina de valores de  $\theta$ . Para cada valor fixo de  $\theta$ , encontramos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros usando o método BFGS implementado no software R. No Apêndice B disponibilizamos os códigos implementados em R.

### 3.5 Modelo bivariado para sistemas mistos

Nos modelos construídos nas Seções 3.2 e 3.3 a estrutura do sistema latente era a mesma para ambos os componentes do vetor de variáveis aleatórias. Então, ou os dois componentes estão relacionados a um sistema em série, ou os dois componentes estão relacionados a sistemas em paralelo. É possível, porém, construir um modelo baseado em um esquema misto de sistemas, em que um componente do vetor bivariado de variáveis aleatórias está associado a um sistema em paralelo, enquanto o outro está associado a um sistema em série.

Nesta seção comentamos brevemente sobre a construção de um modelo bivariado com esquema misto de sistemas latentes seguindo uma ideia similar à ideia da construção dos modelos das Seções 3.2 e 3.3.

Sejam  $Y_{ij} \sim \text{Weibull}(\lambda_j, \alpha_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 1, 2$ , variáveis aleatórias independentes. Seja  $N$  uma variável aleatória discreta com distribuição de série de potência com parâmetro  $\theta \in (0, s)$ , como definido em (2.2). Dado  $N = n$ , as variáveis aleatórias

$$Y_1 = \min\{Y_{11}, \dots, Y_{N1}\} \quad \text{e} \quad Y_2 = \max\{Y_{12}, \dots, Y_{N2}\}$$

são independentes, a distribuição condicional de  $Y_1$  é  $\text{Weibull}(n^{-1/\alpha} \lambda_1, \alpha_1)$  e a de  $Y_2$  é Weibull exponenciada com fda dada por  $G(y) = [1 - e^{-(y/\lambda_2)^{\alpha_2}}]^n$ . Segue que a fda marginal do vetor  $(Y_1, Y_2)$  é dada por

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = \frac{C\left(\theta \left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right)}{C(\theta)} - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}} \left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right)}{C(\theta)}, y_1, y_2 > 0.$$

A função de sobrevivência e a densidade de  $Y_1$  e de  $Y_2$  são dadas, respectivamente, por

$$S_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) = \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}}\right)}{C(\theta)} - \frac{C\left(\theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}} \left(1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right)}{C(\theta)}, y_1, y_2 > 0$$

e

$$\begin{aligned}
 f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2; \lambda, \alpha, \theta) &= \frac{\theta \alpha_1 \alpha_2 y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1}}{\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} C(\theta)} e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \\
 &\times \left\{ C'' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}} \left( 1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \right) \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}} \left( 1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \right. \\
 &\left. + C' \left( \theta e^{-\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1}} \left( 1 - e^{-\left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}} \right) \right) \right\}, \quad y_1, y_2 > 0. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Algumas propriedades deste modelo são similares aos modelos WSPB<sub>s</sub> e WSPB<sub>p</sub>. Por exemplo, quanto o parâmetro  $\theta$  converge para zero, um vetor bivariado de variáveis aleatórias com densidade dada em (3.11) converge em distribuição para um vetor composto por duas variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição de Weibull.

### 3.6 Extensão multivariada

É possível que várias medidas, digamos  $k$ , sejam feitas em um mesmo sistema. Nesse caso, podemos definir um modelo  $k$ -variado como a seguir.

Considere as sequências de variáveis aleatórias independentes  $Y_{ij} \sim \text{Weibull}(\lambda_j, \alpha_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 1, \dots, k$ . Seja  $N$  uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade dada em (2.2), com parâmetro  $\theta \in (0, s)$ . Dado  $N = n$ , as variáveis aleatórias

$$Y_j = \min \{Y_{1j}, \dots, Y_{Nj}\}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.12)$$

são independentes e suas respectivas distribuições condicionais são  $\text{Weibull}(n^{-1/\alpha_j} \lambda_j, \alpha_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Tomando a distribuição marginal do vetor  $(Y_1, \dots, Y_k)$  temos uma distribuição  $k$ -variada para modelar conjuntamente  $k$  respostas medidas em um único sistema. A função marginal de sobrevivência para o vetor  $(Y_1, \dots, Y_k)$  é

$$S_{Y_1, \dots, Y_k}(y_1, \dots, y_k; \lambda, \alpha, \theta) = \frac{C \left( \theta e^{-\sum_{i=1}^k \left(\frac{y_i}{\lambda_i}\right)^{\alpha_i}} \right)}{C(\theta)}, \quad y_1, \dots, y_k > 0,$$

com  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ ,  $\theta \in (0, s)$ ,  $s$  e  $C(\cdot)$  dados

em (2.1). A densidade de  $(Y_1, \dots, Y_k)$  é dada por

$$f_{Y_1, \dots, Y_k}(y_1, \dots, y_k; \lambda, \alpha, \theta) = \sum_{j=1}^k C^{(j)} \left( \theta e^{-\sum_{l=1}^k \left(\frac{y_l}{\lambda_l}\right)^{\alpha_l}} \right) \theta^{j-1} e^{-(j-1) \sum_{l=1}^k \left(\frac{y_l}{\lambda_l}\right)^{\alpha_l}} \times \frac{\theta}{C(\theta)} \prod_{i=1}^k \frac{\alpha_i y_i^{\alpha_i - 1} e^{-\left(\frac{y_i}{\lambda_i}\right)^{\alpha_i}}}{\lambda_i^{\alpha_i}}, \quad y_1, \dots, y_k > 0. \quad (3.13)$$

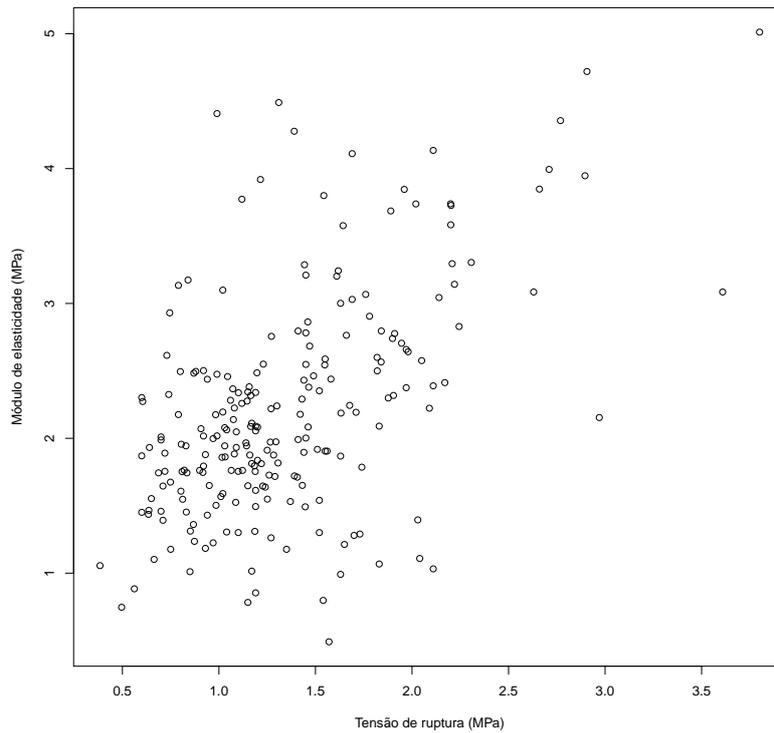
Pela própria construção do modelo, pode-se chegar ao seguinte resultado. Se  $(Y_1, \dots, Y_k)$  é um vetor de variáveis aleatórias com densidade dada por (3.13), então, o vetor  $(Y_1, \dots, Y_{k_1})$ , com  $k_1 < k$ , tem densidade  $f_{Y_1, \dots, Y_{k_1}}(y_1, \dots, y_{k_1}; \lambda, \alpha, \theta)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , dada em (3.13). De forma similar, pode-se obter um modelo  $k$ -variado associado a modelos em paralelo substituindo o mínimo em (3.12) pelo máximo.

### 3.7 Aplicação 2: Tensão de ruptura e módulo de elasticidade de fibras de coco

Aplicamos nessa seção os modelos propostos neste capítulo ao conjunto de dados que foi considerado no Capítulo 2. Os dados são de um experimento em que medidas de tensão de ruptura e módulo de elasticidade foram tomadas em fibras de coco de tamanhos e diâmetros diferentes. No Capítulo 2, estudamos a tensão de ruptura das fibras supondo a distribuição WSPE para a variável resposta. Aqui, vamos modelar conjuntamente as duas variáveis avaliadas em cada fibra de coco. Os códigos implementados em R usados nessa aplicação estão disponíveis no Apêndice B.

A Figura 3.8 apresenta um gráfico da tensão de ruptura versus o módulo de elasticidade das fibras de coco. Como pode ser observado, existe uma associação positiva entre essas duas variáveis. O coeficiente de correlação de Pearson para essas duas quantidades é 0,5342.

Para essa aplicação, ajustamos tanto o modelo bivariado para sistemas em série quanto o modelo bivariado para sistemas em paralelo. Consideramos que  $(Y_{i1}, Y_{i2}) \sim \text{WSPB}_s(\lambda_i, \alpha, \theta; C)$  ou que  $(Y_{i1}, Y_{i2}) \sim \text{WSPB}_s(\lambda_i, \alpha, \theta; C)$ , em que  $Y_{i1}$  representa a tensão de ruptura,  $Y_{i2}$  representa o módulo de elasticidade do  $i$ -ésimo indivíduo e  $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$ . A parte sistemática de ambos os modelos de regressão é especificada usando a função de ligação logarítmica, isto



**Figura 3.8:** Gráfico do módulo de elasticidade versus tensão de ruptura das fibras de coco.

é,

$$\lambda_{i1} = \exp\{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}\}, \quad (3.14)$$

$$\lambda_{i2} = \exp\{\gamma_0 + \gamma_1 x_{i1} + \gamma_2 x_{i2}\}, \quad i = 1, \dots, 225. \quad (3.15)$$

em que  $x_{i1}$  é o tamanho em milímetros (mm) da  $i$ -ésima fibra e  $x_{i2}$  é o logaritmo do diâmetro (mm) da  $i$ -ésima fibra. Nas Figuras 3.9 e 3.10 apresentamos os gráficos das variáveis resposta tensão de ruptura e módulo de elasticidade contra as variáveis explicativas tamanho e diâmetro das fibras. Ambas as respostas apresentam um comportamento decrescente com relação ao diâmetro das fibras. O módulo de elasticidade aparentemente cresce com o aumento do comprimento da fibra. Visualmente não é possível identificar alguma tendência entre tensão de ruptura e o tamanho da fibra.

Inicialmente consideramos as mesmas variáveis explicativas para ambas as partes sistemáticas do modelo. Para fazer a seleção das variáveis, estimamos todos os 16 sub-modelos para cada distribuição atribuída à variável resposta e avaliamos o critério informação de Akaike (AIC). Para ambos os casos, em série e em paralelo, os modelos escolhidos pelo AIC

foram aqueles com todas as covariáveis. Portanto, daqui em diante as análises e conclusões serão feitas para os modelos completos, exatamente como descrito pelas partes sistemáticas em (3.14) e (3.15). No Apêndice A disponibilizamos uma tabela com os AIC's obtidos para todos os modelos ajustados.

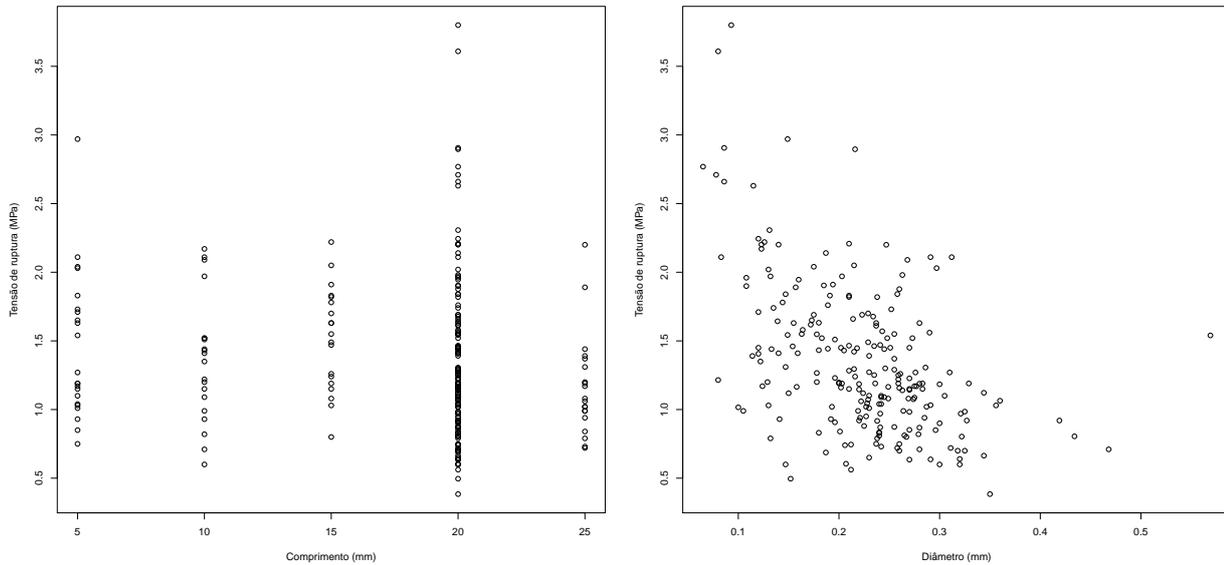


Figura 3.9: Gráficos tensão de ruptura contra comprimento e diâmetro das fibras de coco.

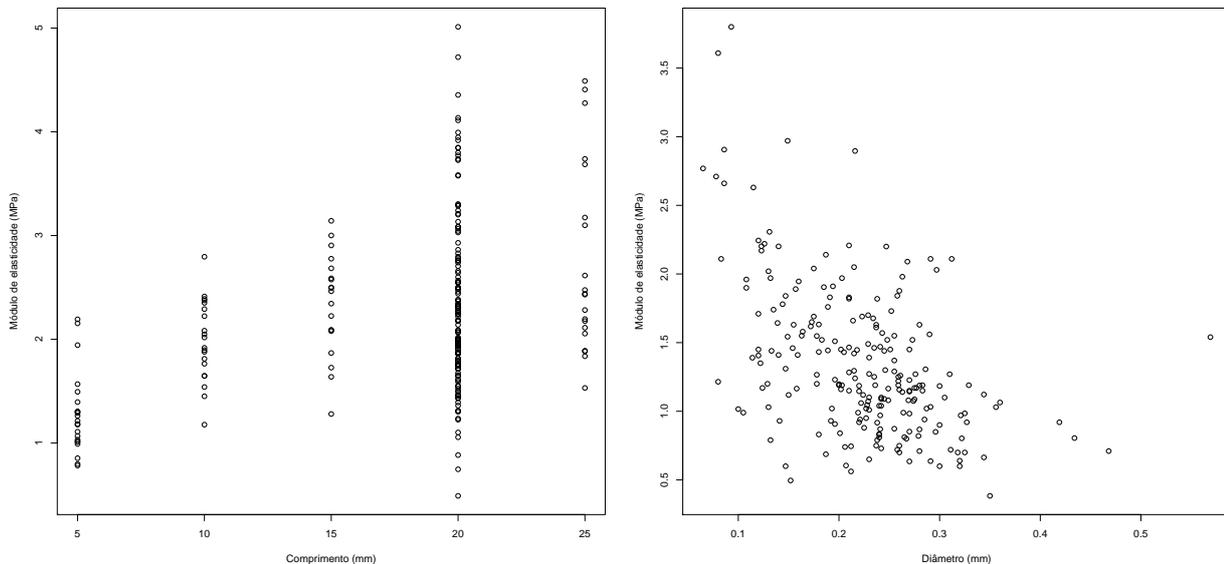
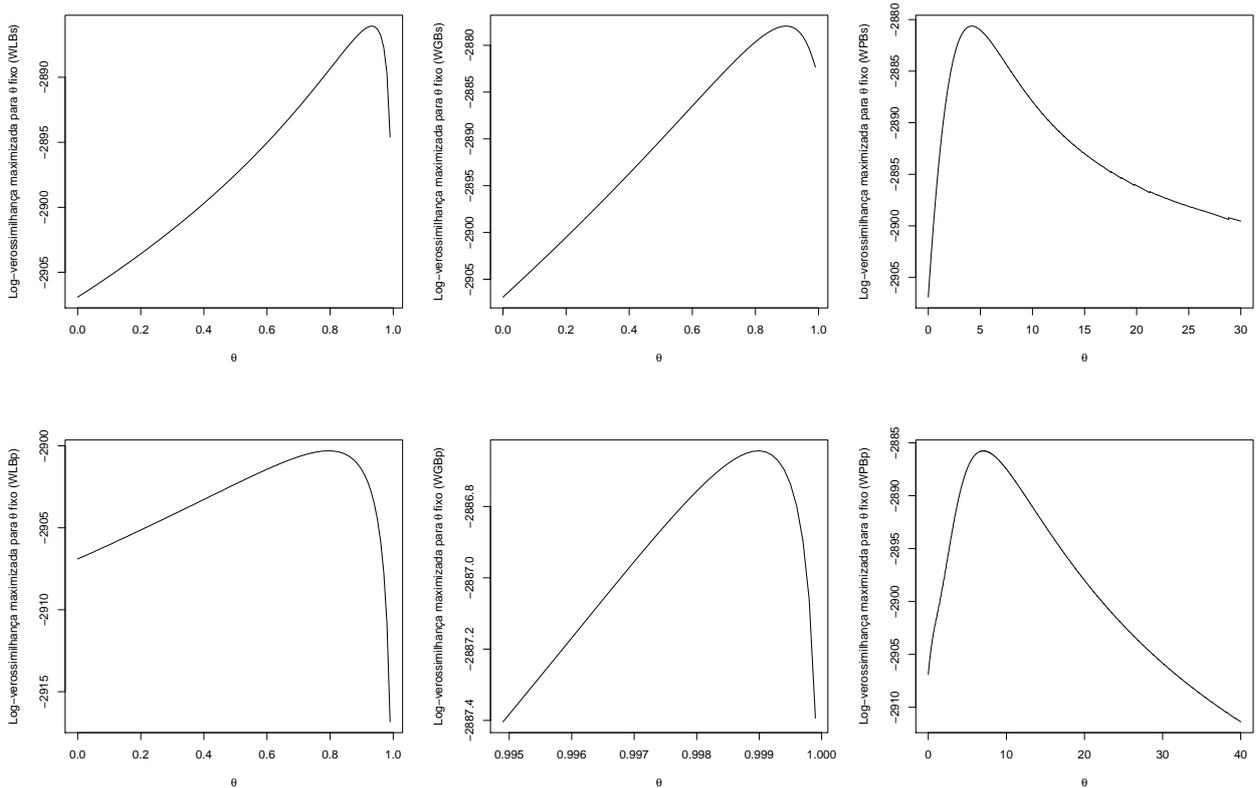


Figura 3.10: Gráficos do módulo de elasticidade contra comprimento e diâmetro das fibras de coco.

A Figura 3.11 apresenta as curvas da log-verossimilhança perfilada do modelo completo, ou seja, incluindo todas as variáveis explicativas, para os modelos de regressão WLB, WGB,

e WPB, tanto para sistemas em série, quanto para sistemas em paralelos. O perfil do modelo ajustado para a distribuição  $WGB_p$  apresentado na Figura 3.11 é referente a uma parte da grade onde o máximo está localizado. Como neste caso o máximo está muito próximo de 1, a visão completa da curva prejudica a visualização do máximo e, portanto, apresentamos a curva mais concentrada em torno do máximo.



**Figura 3.11:** Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLB, WGB e WPB bivariados para sistemas em série e para sistemas em paralelo.

Para contrastar com os ajustes dos modelos  $WSPB_s$  e  $WSPB_p$ , ajustamos também um modelo de regressão Weibull para cada variável resposta, que equivale ao caso limite dos modelos WSPB quando  $\theta \rightarrow 0^+$ . Consideramos  $Y_{i1} \sim \text{Weibull}(\lambda_{i1}, \alpha)$  e  $Y_{i2} \sim \text{Weibull}(\lambda_{i2}, \alpha)$ , com  $\lambda_{i1}$  e  $\lambda_{i2}$  dados por (3.14) e (3.15), respectivamente, para  $i = 1, \dots, n$ . Também ajustamos os modelos WSPE para cada resposta, isto é,  $Y_{i1} \sim \text{WSPE}(\lambda_{i1}, \alpha, \theta; C)$  e  $Y_{i2} \sim \text{WSPE}(\lambda_{i2}, \alpha, \theta; C)$  com partes sistemáticas definidas respectivamente por (3.14) e (3.15), para  $i = 1, \dots, n$ .

Os parâmetros estimados dos diferentes modelos de regressão bivariada em série e em paralelo são dados nas Tabelas 3.1 e 3.2. Para os modelos  $WLB_s$ ,  $WGB_s$  e  $WPB_s$  os valores das

log-verossimilhanças maximizadas obtidas foram  $-295,6$ ,  $-287,5$  e  $-290,2$ , respectivamente. Para os modelos  $WLB_p$ ,  $WGB_p$  e  $WPB_p$  os valores das log-verossimilhanças maximizadas obtidas foram  $-309,8$ ,  $-297,9$  e  $-295,3$ , respectivamente. Os valores estimados dos parâmetros dos modelos que consideram independência entre as variáveis respostas estão nas Tabelas 2.2 e 3.3.

**Tabela 3.1:** Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses) para os modelos de regressão  $WLB$ ,  $WGB$  e  $WPB$  para sistemas em série.

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\theta}$
$WLB_s$	$-0,038$ (0,105)	$-0,011$ (0,004)	$-0,533$ (0,057)	$4,446$ (0,274)	$-0,244$ (0,094)	$0,028$ (0,003)	$-0,495$ (0,049)	$5,680$ (0,356)	$0,932$ (0,029)
$WGB_s$	$0,071$ (0,131)	$-0,012$ (0,004)	$-0,565$ (0,062)	$4,704$ (0,269)	$-0,161$ (0,107)	$0,027$ (0,003)	$-0,526$ (0,050)	$5,928$ (0,332)	$0,899$ (0,041)
$WPB_s$	$0,003$ (0,122)	$-0,013$ (0,004)	$-0,588$ (0,058)	$4,001$ (0,195)	$-0,220$ (0,096)	$0,027$ (0,003)	$-0,535$ (0,045)	$5,037$ (0,257)	$4,166$ (0,853)

**Tabela 3.2:** Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses) para os modelos de regressão  $WLB$ ,  $WGB$  e  $WPB$  para sistemas em paralelo.

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\theta}$
$WLB_p$	$-0,408$ (0,108)	$-0,014$ (0,004)	$-0,561$ (0,054)	$2,778$ (0,190)	$-0,543$ (0,091)	$0,027$ (0,003)	$-0,507$ (0,045)	$3,556$ (0,247)	$0,800$ (0,091)
$WGB_p$	$-2,171$ (0,227)	$-0,012$ (0,004)	$-0,611$ (0,060)	$0,970$ (0,076)	$-1,957$ (0,182)	$0,027$ (0,003)	$-0,564$ (0,047)	$1,205$ (0,096)	$0,994$ (0,002)
$WPB_p$	$-0,980$ (0,147)	$-0,012$ (0,004)	$-0,594$ (0,059)	$1,610$ (0,144)	$-1,015$ (0,120)	$0,028$ (0,003)	$-0,552$ (0,047)	$2,009$ (0,188)	$7,049$ (1,303)

As conclusões inferenciais acerca do efeito das covariáveis nas variáveis resposta é comum em todos os casos ajustados. Todos os modelos ajustados concordam que a tensão de ruptura e o módulo de elasticidade diminuem com o aumento do diâmetro da fibra de coco. Além disso, concordam que, com o aumento do tamanho da fibra, a tensão de ruptura tende a diminuir enquanto o módulo de elasticidade tende a aumentar.

Na Tabela 3.4 apresentamos os AIC's para os modelos completos ajustados. Para os modelos em que foi considerado independência entre as variáveis resposta, o AIC é dado pela soma dos AIC's resultantes do modelo ajustado para cada variável resposta. De acordo

**Tabela 3.3:** Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses) para os modelos de regressão Weibull, WLE, WGE e WPE da modelagem do módulo de elasticidade das fibras.

Modelo	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\theta}$
Weibull	-0,444 (0,086)	0,028 (0,003)	-0,516 (0,047)	4,166 (0,208)	—
WLE	-0,314 (0,112)	0,028 (0,003)	-0,511 (0,049)	5,250 (0,790)	0,862 (0,166)
WGE	-0,201 (0,106)	0,028 (0,003)	-0,536 (0,050)	6,002 (0,432)	0,896 (0,059)
WPE	-0,986 (0,139)	0,028 (0,003)	-0,546 (0,047)	2,051 (0,245)	-6,498 (1,610)

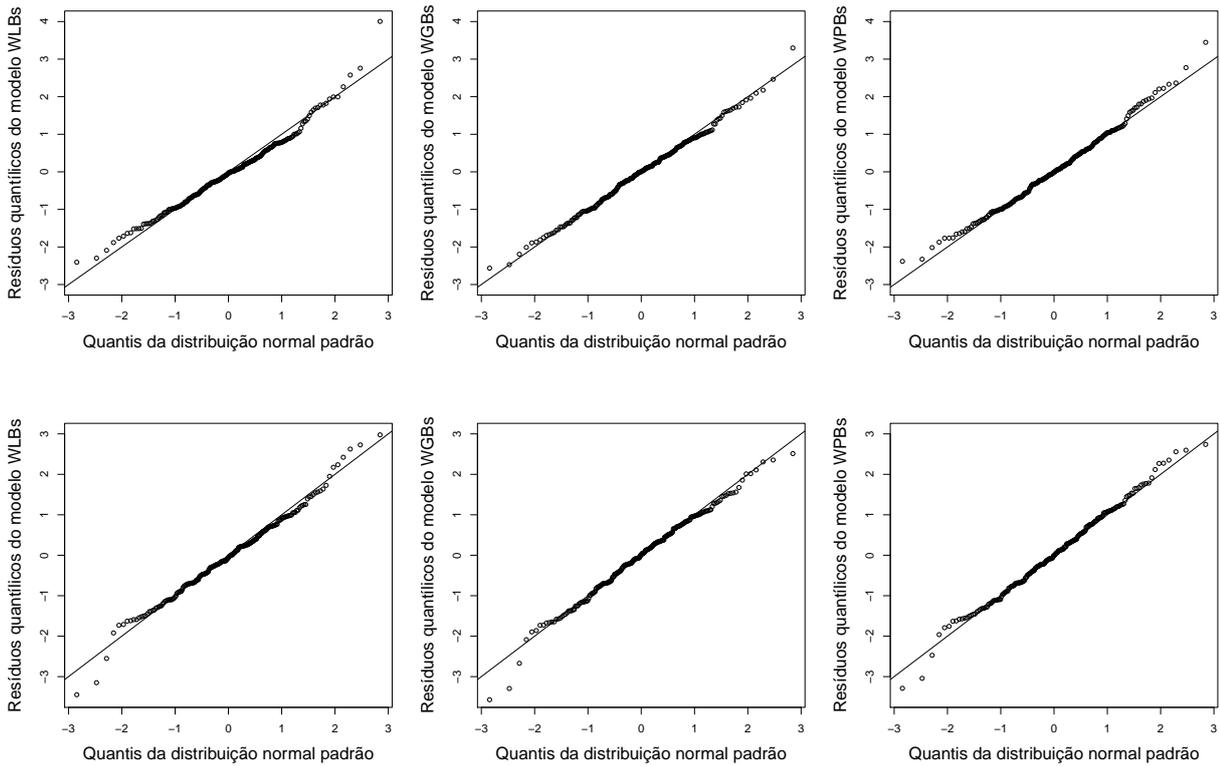
com esse critério, o modelo que melhor se adequou aos dados é o  $WGB_s$ , seguido dos modelos  $WPB_s$  e  $WPB_p$ . Ainda de acordo com o AIC, os modelos que assumem a independência entre as variáveis resposta são os menos indicados para modelar esse conjunto de dados, incluindo o modelo Weibull, que teve o maior AIC.

**Tabela 3.4:** AIC para os modelos de regressão  $WLB_s$ ,  $WGB_s$ ,  $WPB_s$ ,  $WLB_p$ ,  $WGB_p$ ,  $WPB_p$ , Weibull, WLE, WGE e WPE da modelagem conjunta da tensão de ruptura e do módulo de elasticidade das fibras.

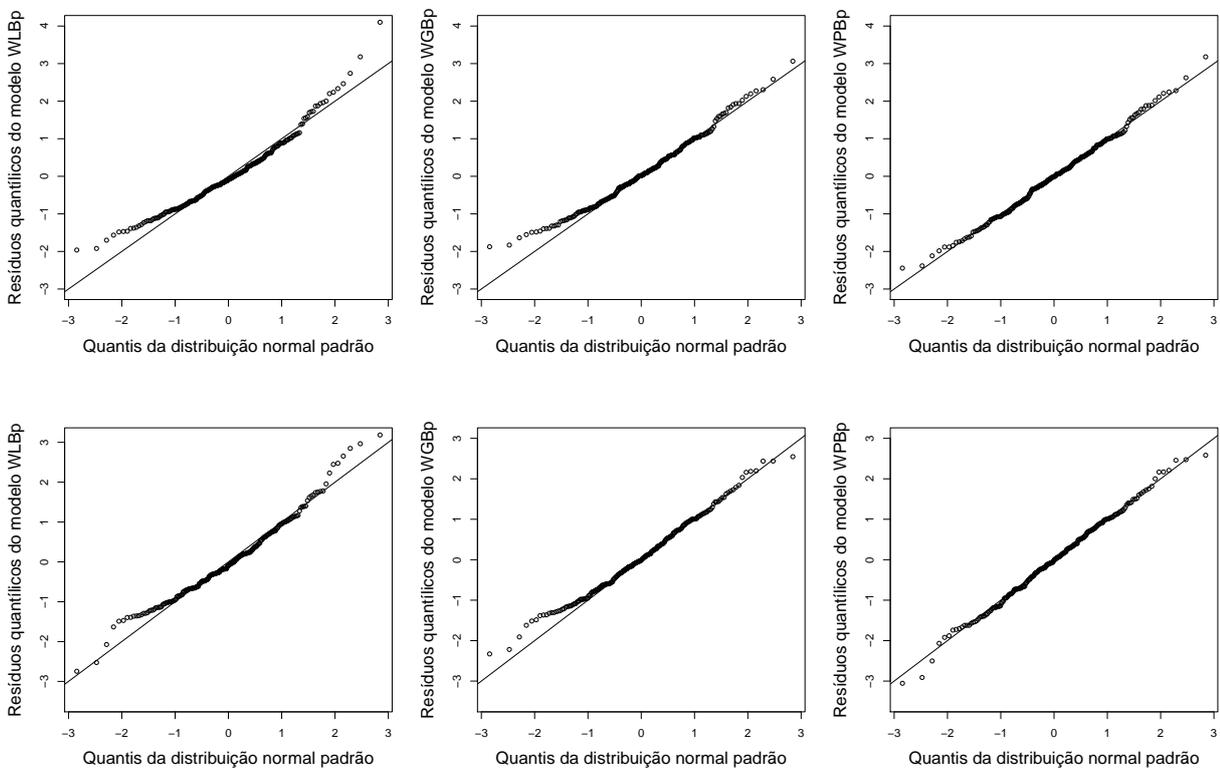
Modelo	AIC	Modelo	AIC	Modelo	AIC
WLE	644,6	$WLB_s$	609,3	$WLB_p$	637,8
WGE	630,3	$WGB_s$	<b>593,1</b>	$WGB_p$	613,9
WPE	627,4	$WPB_s$	598,4	$WPB_p$	608,7
Weibull	649,0				

Para fazer uma análise de diagnóstico, usamos os resíduos quantílicos propostos por Dunn e Smyth (1996), como descrito na Seção 2.6, obtidos marginalmente para a tensão de ruptura e para o módulo de elasticidade. Na Figura 3.12 apresentamos um gráfico de Quantil-Quantil para cada uma das variáveis respostas, para os modelos  $WLB_s$ ,  $WGB_s$  e  $WPB_s$ . Na Figura 3.13 apresentamos um gráfico de Quantil-Quantil para cada uma das variáveis respostas, para os modelos  $WLB_p$ ,  $WGB_p$  e  $WPB_p$ . Dentre os gráficos apresentados, os modelos  $WLB_s$ ,  $WLB_p$  e  $WGB_p$  parecem ser os menos adequados para ajustar os dados. Dentre os demais modelos, os resíduos quantílicos referentes ao modelo  $WPB_p$ , de acordo

com os gráficos, são os que mais se aproximam dos quantis da distribuição normal padrão.

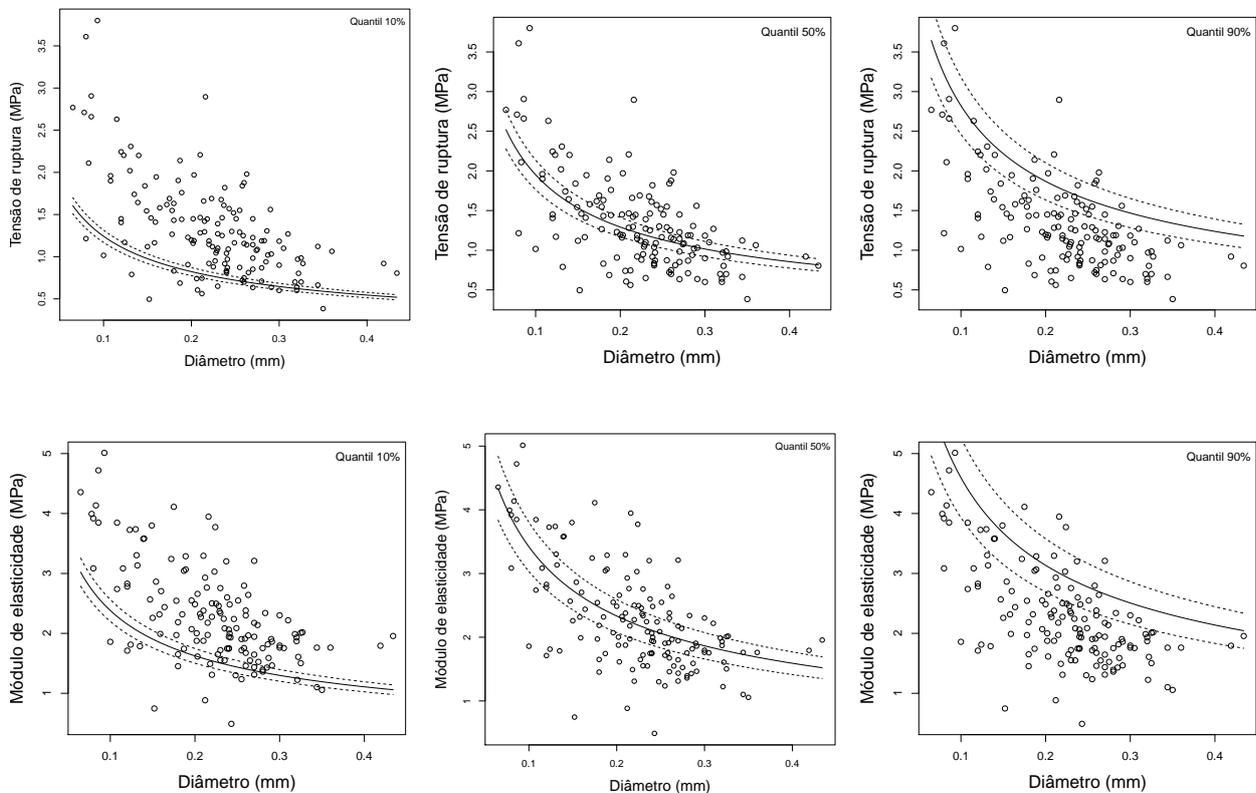


**Figura 3.12:** Resíduos quantílicos dos modelos  $WLB_s$ ,  $WGB_s$  e  $WPB_s$  para a tensão de ruptura (linha de cima) e resíduos quantílicos dos modelos  $WLB_s$ ,  $WGB_s$  e  $WPB_s$  para o módulo de elasticidade (linha de baixo).



**Figura 3.13:** Resíduos quantílicos dos modelos  $WLB_p$ ,  $WGB_p$  e  $WPB_p$  para a tensão de ruptura (linha de cima) e resíduos quantílicos dos modelos  $WLB_p$ ,  $WGB_p$  e  $WPB_p$  para o módulo de elasticidade (linha de baixo).

Os modelos selecionados pelo AIC,  $WGB_s$  e  $WPB_p$ , parecem adequados para modelar os dados de acordo com o resultado dos gráficos de quantil-quantil para seus resíduos quantílicos. O gráfico de quantil-quantil, porém, evidenciou melhor ajuste do modelo  $WPB_p$  em relação ao modelo  $WGB_s$ . Dentre esses dois modelos, apenas o modelo  $WPB_p$  capta o sistema em paralelo latente das fibras de coco. Portanto, apresentamos na Figura 3.14 as curvas de quantis do modelo  $WPB_p$  ajustado para as variáveis resposta módulo de elasticidade e tensão de ruptura, calculadas como descrito em (2.16), em função do diâmetro das fibras com tamanho de 20mm. Foram considerados quantis de ordem  $\xi = 0,1; 0,5$  e  $0,9$ .



**Figura 3.14:** *Quantis ajustados de ordem  $\xi = 0,1; 0,5$  e  $0,9$ , para o modelo  $WPB_p$  para tensão de ruptura (linha de cima) e módulo de elasticidade (linha de baixo) de fibras de coco.*

### 3.8 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos uma versão bivariada para o modelo apresentado na Seção 2, que denominamos por Weibull série de potência bivariada (WSPB). Consideramos que em um mesmo sistema duas ou mais medidas são tomadas no momento de sua falha. Desta forma, temos duas variáveis aleatórias cuja estrutura de dependência é decorrente de com-

partilharem um mesmo sistema latente.

A classe de distribuições WSPE é baseada em sistemas em série e em paralelo, a depender do valor de um parâmetro do modelo,  $\theta$ . Quando  $\theta$  é positivo, as distribuições WSPE estão associadas a um sistema em série latente. Quando  $\theta < 0$ , as distribuições WSPE podem estar associadas a um sistema em paralelo. Porém, na versão bivariada proposta aqui para esses modelos, construída baseada em sistemas em série, simplesmente tomar  $\theta$  negativo não leva a distribuição a ter uma interpretação relacionada a sistemas em paralelo. Neste caso, foi necessário construir dois modelos bivariados, um relacionado a sistemas em série, outro relacionado a sistemas em paralelo.

Apresentamos propriedades para ambos os modelos WSPB, tanto o construído a partir de um sistema em série, quanto o construído a partir de um sistema em paralelo. Propomos um modelo de regressão para cada uma das classes de distribuições WSPB. Comentamos sobre a construção de um modelo bivariada misto, no sentido de que um componente do vetor de variáveis aleatórias é relacionado a sistemas em série, enquanto o outro a sistemas em paralelo. Comentamos também sobre uma extensão multivariada do modelo WSPB. Por fim, fizemos nessa seção uma aplicação ao conjunto de dados que motivou a construção do modelo bivariado, evidenciando a adequabilidade dos modelos propostos.

---

### Modelo WSPE para dados censurados

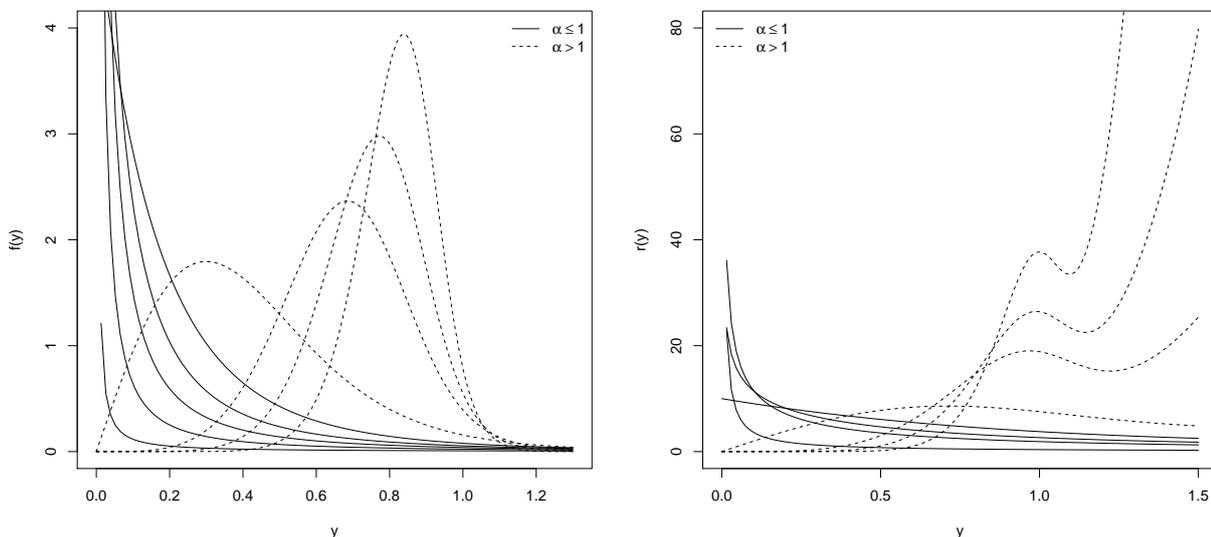
---

Nesse capítulo introduzimos um modelo de regressão WSPE mais amplo que o abordado no Capítulo 2, modelando um parâmetro de forma, além do parâmetro de escala. Apresentamos algumas propriedades da distribuição WSPE que justificam a modelagem desse parâmetro de forma. Consideramos também dados censurados, mais especificamente censura à direita, que são mais frequentes em situações práticas. Fazemos uma discussão sobre modelos de longa duração. Aplicamos o modelo de regressão a dois bancos de dados reais, um deles com presença de censura, para exemplificar seus potenciais usos.

#### 4.1 Introdução

As distribuições WSPE são uma composição entre a classe de distribuições de série de potência e a distribuição de Weibull. A classe de distribuições WSPE é dada na Definição 2.3.2 no Capítulo 2, em que apresentamos um modelo de regressão WSPE modelando seu parâmetro de escala  $\lambda$ , mantendo os parâmetros  $\theta$  e  $\alpha$  constantes para todos os indivíduos. Uma vantagem em se modelar o parâmetro  $\lambda$  é por este ser diretamente proporcional a qualquer quantil da distribuição tendo, então, uma interpretação prática. Porém, considerar o mesmo parâmetro de forma  $\alpha$  para todos os indivíduos pode ser uma restrição não realística.

O parâmetro  $\alpha$  é responsável por uma variedade de formas das distribuições WSPE, como pode ser visto na Figura 4.1. Nesta figura apresentamos algumas formas da densidade e da função de risco da distribuição WSPE considerando  $C(\theta) = e^\theta - 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Essa função  $C(\cdot)$  utilizada é referente à constante normalizadora da distribuição de Poisson truncada em zero. Como pode ser visto na Figura 4.1, fixados os parâmetros  $\lambda$  e  $\theta$ , as formas da densidade e da função de risco variam amplamente ao se modificar o parâmetro  $\alpha$ , indo de formas decrescentes a unimodais. De fato, algumas formas das distribuições WSPE são regidas pelo parâmetro  $\alpha$ , o que pode tornar inapropriado considerar o mesmo valor de  $\alpha$  para todos os indivíduos em um modelo de regressão. parâmetro  $\alpha$ , indo de formas decrescentes a unimodais. De fato, algumas formas das distribuições WSPE são regidas pelo parâmetro  $\alpha$ , o que pode tornar inapropriado considerar o mesmo valor de  $\alpha$  para todos os indivíduos em um modelo de regressão. [Morais e Barreto-Souza \(2011\)](#) provaram que, para  $\theta \geq 0$ , se  $\alpha \in (0, 1]$  a densidade da WSPE é sempre decrescente, para toda escolha de  $\lambda$  e  $C(\cdot)$ . Essa propriedade não pode ser estendida para  $\theta < 0$ .



**Figura 4.1:** Densidades da distribuição WPE para alguns valores de  $\alpha$ , com  $\theta = 5$  e  $\lambda = 1$  fixos (esquerda) e função de risco da distribuição WPE para valores de  $\alpha$ , com  $\theta = 10$  e  $\lambda = 1$  (direita).

O interesse em estudos de sobrevivência e confiabilidade é observar em um dado indivíduo o tempo até a ocorrência de determinado evento, geralmente denominado por falha. Porém, é frequente que indivíduos saiam do estudo antes de ser observada a falha. Nesses casos, o tempo em que o indivíduo sai do estudo é denominado censura. Estudos com dados

censurados são extremamente comuns em situações práticas, principalmente quando ocorre o que se chama censura à direita. Os dados censurados podem e devem ser considerados no processo de estimação do modelo visto que são uma informação parcial do tempo até a falha, pois sabe-se que esta ocorreria após o tempo de censura. Neste capítulo, portanto, além da modelagem do parâmetro de forma  $\alpha$ , vamos considerar a estimação dos parâmetros do modelo de regressão WSPE com presença de censura.

Este capítulo está organizado como se segue. Na Seção 4.2, sugerimos um modelo de regressão para variáveis resposta com distribuição WSPE, na presença de censura aleatória à direita. Ainda na Seção 4.2, propomos a estimação do modelo via máxima verossimilhança. Na Seção 4.3, discutimos sobre modelos para dados com indivíduos de longa duração e fazemos uma conexão com os modelos apresentados neste trabalho. Na Seção 4.4, refazemos a aplicação da Seção 2.6 modelando o parâmetro de forma além do parâmetro de escala. Fazemos uma segunda aplicação a um banco de dados sobre o tempo de tratamento de bebês com displasia broncopulmonar, que conta com observações censuradas. Na Seção 4.5 apresentamos algumas conclusões finais.

## 4.2 Modelo de regressão WSPE com censura aleatória à direita

Seja  $T$  uma variável aleatória com distribuição  $WSPE(\lambda, \alpha, \theta; C)$ , definida em 2.3.2. Para efeito de interpretação, vamos chamar  $T$  de tempo até a falha. Existem situações em que  $T$  não é totalmente observado. Estudos de confiabilidade podem ser longos e observar o tempo de falha de todos seus indivíduos pode ser inviável. Pode acontecer também que o tempo final do estudo seja pré-determinado e em parte dos indivíduos não se observe a falha ou alguns indivíduos podem sair do estudo por razão diferente do evento de interesse. Quando não se observa a falha, dizemos que o tempo  $S$  em que o indivíduo saiu do estudo é um tempo de censura. A censura é uma informação parcial da falha pois sabe-se que esta ocorreria em um tempo  $T > S$ . A informação observada em um indivíduo, portanto, é o mínimo entre os

tempos de falha e de censura, dada por

$$Y = \min\{T, S\}.$$

Definimos a variável indicadora

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } T \leq S, \\ 0, & \text{se } T > S, \end{cases}$$

para registrar se a observação  $Y$  é proveniente de um tempo de falha ou de censura.

Neste trabalho vamos considerar censura aleatória à direita. Vamos supor que a distribuição do tempo de censura  $S$  não envolve os parâmetros  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $\theta$ , sendo, nesse sentido, não-informativa. Se a distribuição da censura for degenerada em um tempo  $\tau$ , ocorre o que se chama censura do tipo I.

Sejam  $T_1, \dots, T_n$   $n$  variáveis aleatórias independentes com  $T_i \sim \text{WSPE}(\lambda_i, \alpha_i, \theta; C)$ . Sejam  $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$  e  $Z = (z_1, \dots, z_n)^\top$  matrizes de covariáveis fixas  $n \times k_1$  e  $n \times k_2$ , respectivamente, com  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik_1})^\top$  e  $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{ik_2})^\top$ . Sejam  $\eta_{1i} = x_i^\top \beta$  e  $\eta_{2i} = z_i^\top \gamma$ , para  $i = 1, \dots, n$ , em que  $\beta \in \mathbb{R}^{k_1}$  e  $\gamma \in \mathbb{R}^{k_2}$  são vetores desconhecido de parâmetros. As matrizes  $X$  e  $Z$  podem ou não ter colunas em comum, inclusive podem ser iguais. O modelo de regressão Weibull série de potência estendido proposto neste capítulo é definido por  $T_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{WSPE}(\lambda_i, \alpha_i, \theta; C)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com parte sistemática dada por

$$h_1(\lambda_i) = \eta_{1i}, \quad h_2(\alpha_i) = \eta_{2i}$$

em que  $h_1(\cdot)$  e  $h_2(\cdot)$  são funções de ligação invertíveis e duas vezes diferenciáveis que mapeiam  $(0, \infty)$  em  $\mathbb{R}$ ,  $\theta \in (s^*, s)$ , e  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros desconhecidos.

Sejam  $S_1, \dots, S_n$   $n$  variáveis aleatórias iid cuja distribuição não depende dos parâmetros envolvidos na distribuição de  $T_i, \dots, T_n$ , representando os tempos até a censura de cada indivíduo  $i$ . Na prática, realizações da variável  $T_i$  nem sempre são observadas para todos indivíduos. O que se observa são realizações das variáveis  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definidas por

$$Y_i = \min\{T_i, S_i\},$$

e

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se } T_i \leq S_i, \\ 0, & \text{se } T_i > S_i. \end{cases}$$

Note que  $\delta_i = 0$  se a observação  $i$  é censurada e  $\delta_i = 1$  caso contrário. Considerando a presença de censura na amostra, a função de log-verossimilhança para o modelo de regressão apresentado nessa seção é dada por

$$\begin{aligned} \ell \equiv \ell(\Theta; Y, X, Z) &= - \sum_{i=1}^n \delta_i W_i + \sum_{i=1}^n \delta_i \log W_i + \sum_{i=1}^n \delta_i \log \alpha_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \delta_i L_{1i}(\theta) + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) L_{0i}(\theta) + c, \end{aligned}$$

em que  $W_i = (Y_i/\lambda_i)^{\alpha_i}$ ,  $c$  é uma constante que não depende dos parâmetros,

$$L_{1i}(\theta) = \begin{cases} \log \left[ C'(\theta e^{-W_i}) \frac{\theta}{C(\theta)} \right], & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0, \end{cases}$$

e

$$L_{0i}(\theta) = \begin{cases} \log \left[ C(\theta e^{-W_i}) \frac{1}{C(\theta)} \right], & \theta \neq 0, \\ -W_i, & \theta = 0. \end{cases}$$

O vetor escore associado é dado por  $U_n(\Theta) = (\partial \ell / \partial \beta, \partial \ell / \partial \alpha, \partial \ell / \partial \theta)^\top$ , com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= X^\top D_0 D_2 \{ D_1 [\delta(I + D_3) + (I - \delta)D_4] - \delta \} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \gamma} &= Z^\top D_6 \{ \delta(I + D_5) - D_1 D_5 [\delta(I + D_3) + (I - \delta)D_4] \} \mathbf{1}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= \frac{r}{\theta} - n \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} + \frac{1}{\theta} \text{tr} \{ \delta D_3 + (I - \delta)D_4 \}, \end{aligned}$$

em que  $D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  e  $D_6$  são matrizes diagonais dadas por

$$\begin{aligned} D_0 &= \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \\ D_1 &= \text{diag}\{W_1, \dots, W_n\}, \\ D_2 &= \text{diag}\left\{\frac{1}{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\eta_{11}}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \frac{d\lambda_n}{d\eta_{1n}}\right\}, \\ D_3 &= \text{diag}\{L_{21}(\theta), \dots, L_{2n}(\theta)\}, \\ D_4 &= \text{diag}\{L_{31}(\theta), \dots, L_{3n}(\theta)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_5 &= \text{diag}\{\log W_1, \dots, \log W_n\}, \\ D_6 &= \text{diag}\left\{\frac{1}{\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{d\eta_{21}}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \frac{d\alpha_n}{d\eta_{2n}}\right\}, \end{aligned}$$

em que

$$L_{2i}(\theta) = \begin{cases} \log \left[ \frac{C''(\theta \exp\{-W_i\})}{C'(\theta \exp\{-W_i\})} \theta e^{-W_i} \right], & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0, \end{cases}$$

e

$$L_{3i}(\theta) = \begin{cases} \log \left[ \frac{C'(\theta \exp\{-W_i\})}{C(\theta \exp\{-W_i\})} \theta e^{-W_i} \right], & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

Seja  $K_n(\Theta) = -\partial^2 \ell / \partial \Theta \partial \Theta^\top$  a matriz de informação observada total. Seus elementos são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta^\top} &= -X^\top \{ \delta [D_7(D_1 - I) + D_4^2(I - D_8 D_1^2 - D_1^2 D_2) + D_1 D_2 D_7] + \\ &\quad (I - \delta) [D_1 D_3 D_7 - D_1^2 D_4^2 (D_9 + D_3)] \} X, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \gamma^\top} &= X^\top D_1 D_4 D_5 D_6 (\partial(D_1 D_8 - I) + (I - \delta) D_1 D_9) Z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \gamma \partial \gamma^\top} &= -Z^\top \{ \delta [ D_6^2 ( D_1 D_5^2 ( I - D_1 D_8 - D_1 D_2 + D_2 ) + I ) - D_7 ( I + D_5 ( I - D_1 ( I + D_2 ) ) ) ] + \\
&\quad ( I - \delta ) [ D_1 D_3 D_4^2 D_5^2 ( I - D_1 ) + D_1 D_5 ( D_3 D_7 - D_1 D_5 D_6^2 D_9 ) ] \} Z, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \beta^\top} &= -\frac{1}{\theta} X^\top D_1 D_4 [ \partial ( D_2 + D_8 ) + ( I - \delta ) ( D_3 + D_9 ) ] \mathbf{1}, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \gamma^\top} &= -\frac{1}{\theta} Z^\top D_1 D_5 D_6 [ \delta ( D_2 + D_8 ) + ( I - \delta ) ( D_3 + D_9 ) ] \mathbf{1}, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta} &= -\frac{r}{\theta} - n \left[ \frac{C''(\theta)}{C(\theta)} - \left( \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} \right)^2 \right] + \frac{1}{\theta^2} \text{tr} \{ \delta D_8 + ( I - \delta ) D_9 \},
\end{aligned}$$

em que  $D_7$ ,  $D_8$  e  $D_9$  são matrizes diagonais  $n \times n$  dadas por

$$\begin{aligned}
D_7 &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \frac{d^2 \lambda_1}{d\eta_{11}^2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \frac{d^2 \lambda_n}{d\eta_{1n}^2} \right\}, \\
D_8 &= \text{diag} \{ L_{41}(\theta), \dots, L_{4n}(\theta) \}, \\
D_9 &= \text{diag} \{ L_{51}(\theta), \dots, L_{5n}(\theta) \}
\end{aligned}$$

e as quantidades  $L_{4i}(\theta)$  e  $L_{5i}(\theta)$ , para  $i = 1, \dots, n$  são dadas por

$$L_{4i}(\theta) = \begin{cases} \left[ \frac{C'''(\theta e^{-W_i})}{C'(\theta e^{-W_i})} - \left( \frac{C''(\theta e^{-W_i})}{C'(\theta e^{-W_i})} \right)^2 \right] \theta^2 e^{-2W_i}, & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0, \end{cases}$$

e

$$L_{5i}(\theta) = \begin{cases} \left[ \frac{C'''(\theta e^{-W_i})}{C(\theta e^{-W_i})} - \left( \frac{C''(\theta e^{-W_i})}{C(\theta e^{-W_i})} \right)^2 \right] \theta^2 e^{-2W_i}, & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

Para a estimação, assim como feita nas Seções 2.4 e 3.4, fazemos inicialmente a estimação para o modelo Weibull, que é equivalente a considerar  $\theta = 0$ . Fixamos uma grade de valores para  $\theta$ , considerando saltos de tamanho 0,1, por exemplo. Usamos as estimativas feitas para o modelo Weibull para obter as estimativas dos modelos para  $\theta = 0,1$ . Em seguida usamos as estimativas obtidas do modelo com  $\theta = 0,1$  fixo como valores iniciais para estimar os parâmetros do modelo com  $\theta = 0,2$ , e assim sucessivamente para todos os valores positivos da grade de  $\theta$ . De forma equivalente, fazemos o mesmo para a parte negativa da grade de  $\theta$ . Em

torno da região da grade onde se obteve maiores log-verossimilhanças estimadas, refinamos a grade. Assim, obtemos as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo.

### 4.3 Discussão sobre modelos com fração de cura

Em modelos de tempo de vida estuda-se o tempo até a ocorrência de determinado evento. Existem alguns experimentos em que pode-se observar indivíduos de longa duração. Por exemplo, após o tratamento de um tipo de câncer, pacientes são observados até a recidiva da doença. Para alguns indivíduos, é possível que a recidiva nunca aconteça. Nesse caso, esses indivíduos são considerados de longa duração e seu tempo até a recidiva é considerado infinito. Existem muitos modelos para tratar dados desse tipo, em que se considera a possibilidade da ocorrência de indivíduos com tempo infinito até o evento de interesse. Esses modelos consideram uma abordagem parecida com a descrita nessa tese. Em uma interpretação próxima ao sistema em série, supõe-se que o indivíduo tenha  $N$  fatores que podem levá-lo ao evento de interesse, com  $N = 0, 1, \dots$ . Para cada um desses fatores, existe um tempo associado  $Y_i$  que representa um tempo de ativação desse fator. Aqui o evento de interesse pode ocorrer quando um primeiro fator for ativado, ou quando todos eles forem ativados. A diferença para os sistemas em paralelo e em série é a probabilidade positiva de se ter um sistema de tamanho zero. Quando um indivíduo possui um sistema de tamanho zero, ou seja, ele não possui causas que o levam ao evento de interesse, este nunca vai acontecer e, então, o tempo até o evento de interesse é dito ser infinito.

Para descrever um modelo para amostras com indivíduos de longa duração de maneira similar aos modelos propostos nessa tese, considere a sequência de variáveis aleatórias iid  $W_1, \dots$  em que  $S_W(\cdot)$  é a função de sobrevivência de  $W_1$ . Vamos deixar livre a escolha da distribuição de  $W_1$ , que poderia ser, por exemplo, a distribuição de Weibull. Seja  $N$  uma variável aleatória com distribuição de série de potência, com função de distribuição dada por  $P(N = n) = a_n \theta^n / C^*(\theta)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , em que  $a_0 > 0$ ,  $a_i \geq 0 \forall i$ ,  $C^*(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n$ ,  $\theta \in (0, s)$  e  $s$  é o raio de convergência da série  $C^*(\cdot)$ . A variável aleatória  $N$  é uma quantidade que representa o tamanho do sistema latente. Dado  $N = n$ , a variável aleatória  $Y$  que

representa o tempo de vida dos modelos com fração de cura é dada por

$$Y = \begin{cases} \infty, & \text{se } n = 0; \\ \min\{W_1, \dots, W_n\} & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Estamos considerando que a falha ocorre quando o primeiro fator é ativado. Note que  $Y$  é uma variável aleatória com imagem  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . Ela é uma mistura entre o mínimo de variáveis aleatórias iid e uma variável aleatória degenerada em  $\infty$ . Como a variável aleatória  $N$  é não observável, a distribuição de probabilidade marginal do tempo de vida  $Y$  será dada por

$$P(Y = \infty) = \frac{a_0}{C^*(\theta)}, \quad P(Y > y) = \frac{C^*(\theta S_W(y)) - a_0}{C^*(\theta)}, \quad y \in \mathbb{R}^+. \quad (4.1)$$

Os modelos com fração de cura são bem recomendados para situações em que existe a possibilidade de se observar indivíduos com longa duração. Para alguns problemas práticos, porém, considerar uma probabilidade não nula para uma fração de curados pode não ser razoável. Por exemplo, para alguns problemas voltados à confiabilidade, como tempo de duração de pneus, ruptura de materiais, entre outros, seria não realístico adicionar uma probabilidade não nula de que uma unidade experimental tenha longa duração. Além disso, quando consideramos que  $a_0 = 0$ , ou seja, não há fração de curados, temos uma transição do sistema latente em série para um sistema latente em paralelo quando o parâmetro  $\theta$  varia de valores positivos para valores negativos, o que não necessariamente ocorre em modelos com fração de cura. Na proposição a seguir formalizamos essa afirmação.

**Proposição 4.3.1.** *Seja  $S(\cdot)$  a função de sobrevivência para uma variável aleatória definida como em (4.1). Se  $C^*(\theta)$  for crescente no intervalo  $\theta \in (s^*, 0)$ , para algum  $s^* < 0$ , então  $S(\cdot)$  não é uma função de sobrevivência para  $\theta \in (s^*, 0)$ .*

*Prova.* Como  $a_0 > 0$  e  $P(Y = \infty) > 0$ , temos que  $C^*(\cdot)$  é, necessariamente, positiva. A função  $C^*(\theta)$  é contínua e é finita para  $\theta \in (-s, s)$  e, então, existe  $s^* < 0$  tal que, ou  $C^*(\theta)$  é não-negativa e crescente, ou  $C^*(\theta)$  é não-negativa e decrescente, para todo  $\theta \in (s^*, 0)$ . Temos que, se  $C^*(\theta)$  é crescente em  $\theta \in (s^*, 0)$ , para  $y_1 < y_2$  segue que  $S(y_1) < S(y_2)$ , o que

é absurdo visto que toda função de sobrevivência é não-crescente.  $\square$

Pela Proposição 4.3.1 temos que, para uma determinada escolha de  $C^*(\cdot)$ , uma condição necessária para que uma distribuição de probabilidade definida em (4.1) possa ter seu espaço paramétrico estendido para valores negativos do parâmetro  $\theta$  é que ela seja não-crescente no intervalo  $(s^*, 0)$ , para algum  $s^* < 0$ . As séries de potência utilizadas para construção de modelos de fração de cura em geral não satisfazem essa condição, como, por exemplo, as séries de potência referentes às distribuições discretas Poisson, geométrica, logarítmica e binomial. Portanto, ao se considerar probabilidade não nula de fração de curados, não é possível fazer uma extensão do espaço paramétrico do modelo de forma similar ao feito para as distribuições da classe WSP, que resultou na classe de distribuições WSPE introduzida nessa tese.

## 4.4 Aplicações a dados reais

Embora a motivação da construção dos modelos WSPE tenha sido baseada em sistemas latentes em série e em paralelo com quantidade desconhecida de componentes, estes modelos podem ser adequados para modelar dados positivos e contínuos em geral. Nessa seção fazemos duas aplicações do modelo de regressão WSPE apresentado na Seção 4.2 a dados reais. O primeiro banco de dados, sobre tensão de ruptura de fibras de coco, descrito na Seção 2.6, não apresenta censura. Vamos reajustá-lo para estudar a necessidade ou não da modelagem de seu parâmetro de forma  $\alpha$ , além do parâmetro de escala  $\lambda$ . O segundo banco de dados, sobre o tempo de tratamento de bebês com displasia broncopulmonar, conta com presença de censura. Os códigos implementados em R estão disponíveis no Apêndice B.

### 4.4.1 Aplicação 3: Tensão de ruptura de fibras de coco

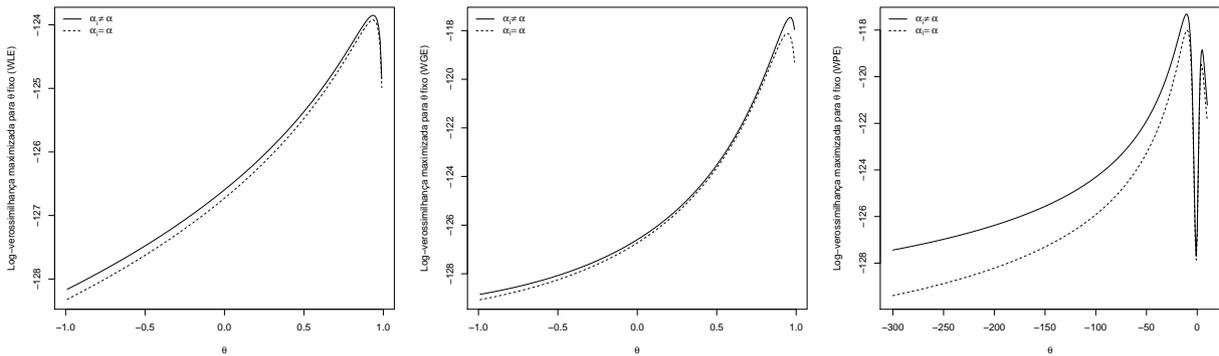
Nesta aplicação utilizamos o banco de dados de Tomczak *et al.* (2007), descrito na Seção 2.6, em que ajustamos os modelos Weibull, WLE, WGE e WPE considerando a parte sistemática

$$\lambda_i = \exp\{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}\}, \quad i = 1, \dots, 225. \quad (4.2)$$

Nesta seção vamos ajustar novamente os modelos Weibull, WLE, WGE e WPE a esse conjunto de dados sobre fibra de coco, considerando, além da parte sistemática (4.2), a parte sistemática

$$\alpha_i = \exp\{\gamma_0 + \gamma_1 x_{1i} + \gamma_2 x_{2i}\}, \quad i = 1, \dots, 225. \quad (4.3)$$

Fizemos a estimação a partir de uma grade de valores para o parâmetro  $\theta$ . As curvas das log-verossimilhanças maximizadas em função de  $\theta$  fixo para os modelos WLE, WGE e WPE estão apresentadas por linhas sólidas nos gráficos da Figura 4.2. As linhas pontilhadas são referentes aos ajustes considerando  $\alpha_i = \alpha$  para todo  $i = 1, \dots, 225$ . Visualmente é possível perceber que a inserção da parte sistemática (4.3) no modelo não gerou alteração perceptível para a estimativa do parâmetro  $\theta$ .



**Figura 4.2:** Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE com a modelagem do parâmetro  $\alpha$ .

Na Tabela 4.1 apresentamos as log-verossimilhanças maximizadas dos modelos ajustados e seus AIC's. Também podem ser encontradas nessa tabela as estatísticas do teste da razão de verossimilhanças (RV) para a hipótese  $H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$  versus  $H_1 : \gamma_1 \neq 0$  ou  $\gamma_2 \neq 0$ , seguidas de seus valores-p obtidos a partir da distribuição  $\chi^2_2$ . Em nenhum dos modelos, para todos os níveis de significância usuais, se rejeita a hipótese de que  $\alpha_i = \alpha, \forall i$ . Portanto, o ajuste feito na Seção 2.6 ao banco de dados sobre tensão de ruptura de fibras de coco segue sendo o mais adequado.

**Tabela 4.1:** Log-verossimilhanças maximizadas, AIC's, estatísticas do teste da razão de verossimilhanças e seus respectivos valores-p para os modelos de regressão Weibull, WLE, WGE e WPE

Modelo	$\hat{\ell}$	AIC	RV	Valor-p
Weibull	-126,5968	265,1935	0,2625	0,8770
WLE	-123,8508	261,7016	0,1480	0,9286
WGE	-117,4574	248,9149	1,3226	0,5162
WPE	-117,3152	248,6303	1,3772	0,5023

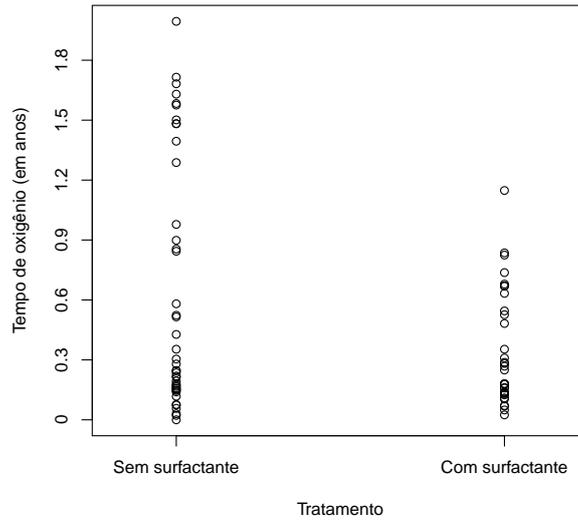
#### 4.4.2 Aplicação 4: Displasia broncopulmonar

Os dados analisados nesta subseção são sobre o tempo em que 78 bebês nascidos com baixo peso e com displasia broncopulmonar foram tratados com oxigênio. Os dados foram coletados no período de dezembro de 1987 a março de 1991 e podem ser encontrados em Yuan (1993). A partir de agosto de 1989, 35 bebês receberam um tratamento adicional com reposição de surfactante. Cinco bebês que ainda estavam recebendo tratamento com oxigênio na última visita recebida foram censurados. Na Figura 4.3 apresentamos o gráfico do tempo de tratamento versus o tipo de tratamento recebido, com ou sem reposição de surfactante. O gráfico sugere que existe uma relação entre o tipo de tratamento e sua duração. Visualmente é possível perceber que os bebês que receberam reposição de surfactante tendem a ter tempo de tratamento menor que aqueles que não receberam.

Ajustamos os modelos de regressão Weibull, WGE, WPE e WLE ao banco de dados. Para todos os modelos a parte sistemática considerada foi

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i), \\ \alpha_i &= \exp(\gamma_0 + \gamma_1 x_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, 78,\end{aligned}$$

em que  $x_i = 1$  se o  $i$ -ésimo bebê recebeu reposição de surfactante e  $x_i = 0$  caso contrário. Para interpretação dos quantis, temos que o quantil de ordem  $\xi$  é dado por



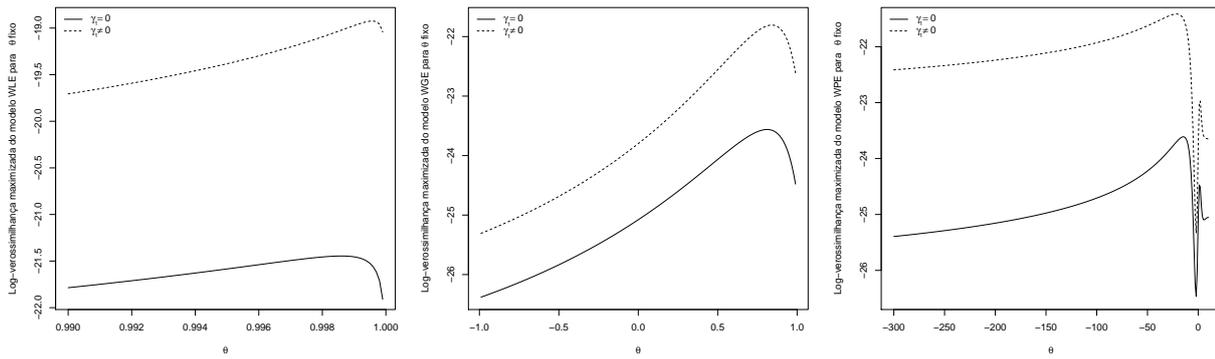
**Figura 4.3:** Tempo recebido de oxigênio versus tipo de tratamento.

$$q_{\xi,i} = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_i B_{\xi}(\theta) e^{-\gamma_0 - \gamma_1 x_i}\right), \quad i = 1, \dots, 78,$$

em que  $B_{\xi}(\theta)$  é definida em (2.17). Portanto, o quantil de ordem  $\xi$  do tempo de tratamento de um bebê tratado com surfactante é  $e^{\beta_1} B_{\xi}(\theta) e^{-\gamma_0 - \gamma_1}$  vezes o tempo de tratamento de um bebê que não recebeu surfactante. Chamamos essa quantidade de razão de quantis de ordem  $\xi$  ( $RQ_{\xi}$ ).

Fizemos a estimação dos parâmetros usando uma grade de valores fixos do parâmetro  $\theta$ , conforme descrito na Seção 4.2. Na Figura 4.4 apresentamos as curvas da log-verossimilhança maximizada perfilada em  $\theta$ . As linhas sólidas representam as curvas para os modelos WLE, WGE e WPE, considerando  $\gamma_1 = 0$  fixo. As linhas pontilhadas representam as curvas para os mesmos modelos ajustados estimando o valor de  $\gamma_1$ . Os valores de  $\theta$  ao redor do máximo da curva da log-verossimilhança maximizada para o modelo WLE estão muito próximos de 1. Para melhorar a visualização, para esse caso restringimos a grade de  $\theta$  para valores entre 0,99 e 1.

Devido à proximidade com a borda da estimativa de máxima verossimilhança de  $\theta$  para o modelo WLE, como pode ser visto na Figura 4.4, optamos por fazer, apenas para esse caso, a reparametrização  $\theta^* = C(\theta) = -\log(1 - \theta)$ . Na Tabela 4.2 apresentamos os resultados das estimativas feitas para os modelos Weibull, WLE (reparametrizado), WGE e WPE,



**Figura 4.4:** Log-verossimilhança perfilada para os modelos de regressão WLE, WGE e WPE ajustados aos dados de displasia broncopulmonar.

juntamente com suas respectivas log-verossimilhanças maximizadas. Entre parênteses estão os desvios padrão das estimativas. Nessa mesma tabela também apresentamos as estatísticas do teste da razão de verossimilhanças para as hipóteses  $H_0 : \gamma_1 = 0$  contra  $H_1 : \gamma_1 \neq 0$ , acompanhados dos seus valores-p entre parênteses, tomados da distribuição  $\chi_1^2$ .

**Tabela 4.2:** Estimativas dos parâmetros (desvios padrão em parênteses), log-verossimilhança maximizada e estatística da razão de log-verossimilhança (RV) e AIC para os modelos de regressão Weibull, WLE (reparametrizado), WGE e WPE ajustados aos dados de displasia broncopulmonar.

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{\ell}$	RV	AIC
Weibull	-0,3998 (0,1750)	-0,5325 (0,2263)	-0,0684 (0,1263)	0,2988 (0,1848)	-	-23,7986	2,5593 (0,1096)	55,5973
WLE	0,7174 (0,2323)	-0,7767 (0,2474)	0,8383 (0,2742)	0,3292 (0,1398)	7,7595 <sup>1</sup> (2,8041)	-18,9242	5,0428 (0,0247)	47,8485
WGE	0,6018 (0,6492)	-0,8251 (0,3696)	0,2132 (0,1517)	0,3367 (0,1781)	0,8400 (0,1704)	-21,8061	3,5112 (0,0610)	53,6122
WPE	-5,5783 (2,8077)	1,0773 (1,1966)	-1,3145 (0,3602)	0,3790 (0,1762)	-21,5152 (22,4429)	-21,4155	4,3906 (0,0361)	52,8310

<sup>1</sup>Estimativa de  $\theta^* = C(\theta) = -\log(1 - \theta)$

Tendo em vista o AIC, o modelo Weibull seria o menos adequado dentre os 4 ajustados, enquanto o WLE se destaca como o melhor modelo. Observando os desvios padrão estimados do modelo WPE, um intervalo com qualquer nível usual de confiança para  $\theta$  englobaria o valor 0, o que nos leva a descartá-lo em favor da distribuição de Weibull. Já para os modelos WLE e WGE, os valores estimados dos desvios padrão são favoráveis ao descarte do modelo Weibull. Pelo teste da razão de verossimilhanças, considerando um nível de significância de

0,05, para os ajustes dos modelo Weibull e WGE seria mais adequado considerar  $\gamma_1 = 0$ , ou seja, manter o mesmo parâmetro de forma para os dois grupos de tratamento. Por outro lado, pelo ajuste dos modelos WLE e WPE a forma deve ser diferenciada entre os grupos de tratamento. Levando em conta todos esses critérios conjuntamente, o modelo WLE se destaca dos demais, sendo o mais recomendado para ajustar este banco de dados. Portanto, para o modelo WLE ajustados obtivemos uma estimativa da razão entre os quantis de ordem  $\xi$  dos grupos de tratamento, dada por

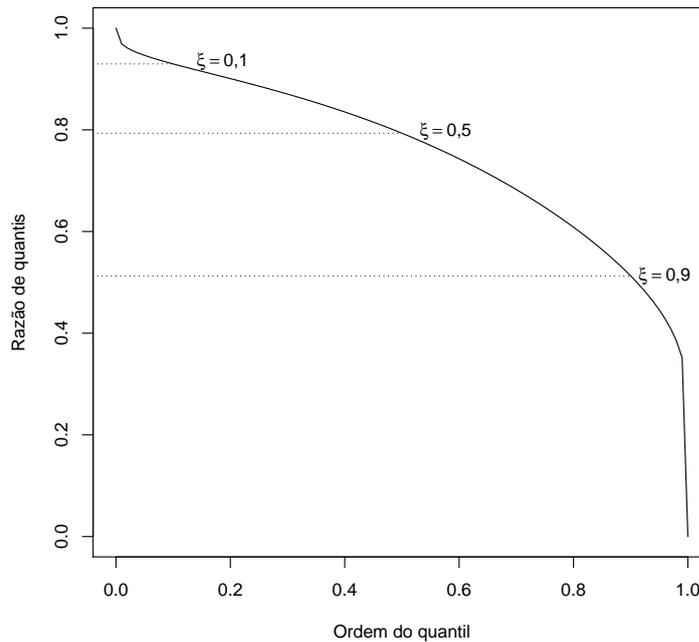
$$\begin{aligned} RQ_\xi &\equiv \frac{\widehat{q}_\xi(x=1)}{\widehat{q}_\xi(x=0)} = e^{-\widehat{\beta}_1 B_\xi(\widehat{\theta})} e^{-\widehat{\gamma}_0 - \widehat{\gamma}_1} \\ &= e^{-0,7767 B_\xi(0,9996)^{0,3111}}, \end{aligned}$$

em que  $\widehat{q}_\xi(x=1)$  é o quantil estimado de ordem  $\xi$  do grupo com reposição de surfactante e  $\widehat{q}_\xi(x=0)$  é o quantil estimado de ordem  $\xi$  do grupo sem reposição de surfactante. Note que  $B_\xi(\cdot)$  é função de  $\theta$  e, para este modelo, estimamos  $-\log(1-\theta)$ . Na Figura 4.4.2 apresentamos a curva da estimativa da razão entre os quantis. Estão destacadas as razões para os quantis de ordem 0,1, 0,5 e 0,9. Como se pode perceber, existe uma redução do tempo de tratamento quando há uso de surfactante para todos os quantis. Para mais de 50% dos bebês esse tempo é reduzido em pelo menos 20% quando se usa reposição de surfactante e para mais de 10% dos pacientes esse tempo de tratamento tende a ser reduzido em mais de 48%.

## 4.5 Observações finais

Nesse capítulo propomos um modelo de regressão para a classe de distribuições WSPE para amostras com presença de censura. Adicionamos no modelo uma parte sistemática relacionando as variáveis explicativas ao parâmetro de forma  $\alpha$ , além do parâmetro de escala  $\lambda$ . Discutimos a respeito dos modelos com fração de cura, fazendo uma relação com os modelos apresentados nesta tese. Mostramos que não é possível estender o espaço paramétrico de modelos com fração de cura de forma similar à extensão feita à classe de distribuições WSP.

Re-analisamos o banco de dados sobre tensão de ruptura de fibras de coco estudado na Seção 2.6 e verificamos que, para esse conjunto de dados, a modelagem do parâmetro  $\alpha$  não



**Figura 4.5:** Estimativa da razão entre os quantis dos tempos de tratamento com e sem reposição de surfactante.

é necessária.

Aplicamos o modelo de regressão apresentado nesta seção a um conjunto de dados sobre o tempo de tratamento de bebês com displasia broncopulmonar, que conta com observações censuradas. Fizemos o ajuste de três modelos da classe de distribuições WSPE, sendo eles o modelo WLE, WGE e WPE, e os comparamos com o modelo Weibull. Para esse conjunto de dados, o modelo selecionado foi o WLE. Analisamos o ajuste feito através de uma razão entre os quantis dos grupos com e sem reposição de surfactante.

Nessa aplicação sobre displasia broncopulmonar um ponto que vale a pena destacar foi a estimativa do parâmetro  $\theta$  do modelo selecionado, WLE. A estimativa para  $\theta$  era de 0,9996, bem próxima à borda do espaço paramétrico. Por estar muito perto da borda, optamos por fazer uma reparametrização em função de  $C(\theta)$ , tornando o processo de estimação mais tratável. Essa aplicação, além de outras não apresentadas aqui nessa tese e que também estimaram  $\theta$  próximo à borda, nos levam a refletir sobre uma re-parametrização da classe de distribuições WSPE. Esse tema será brevemente discutido no capítulo a seguir.

---

### Considerações finais

---

Neste capítulo encaminhamos algumas ideias para futuros trabalhos, relacionadas à estimação e à construção de modelos. Na Seção 5.1, comentamos sobre uma reparametrização dos modelos WSPE e WSPB. Na Seção 5.2, discutimos sobre a necessidade de se fazer uma correção preventiva de viés para os modelos WSPE. Essa abordagem de correção preventiva de viés pode ser adaptada também para os modelos WSPB. Na Seção 5.3, apresentamos algumas formas alternativas de se construir um modelo para múltiplas medições em sistemas latentes em paralelo e em série. Finalmente, na Seção 5.4 apresentamos alguns comentários finais.

### 5.1 Reparametrização dos modelos WSPE

Ao longo da elaboração desta tese foi possível identificar um comportamento comum aos modelos construídos a partir das distribuições geométrica e logarítmica. Frequentemente as estimativas do parâmetro  $\theta$  são próximas ao valor 1, que é borda do espaço paramétrico. Por exemplo, pode-se observar a aplicação do modelo WLE ao banco de dados sobre displasia broncopulmonar apresentada na Seção 4.4. Para esse caso, foi feita uma reparametrização do modelo. Fizemos a estimação de  $C(\theta)$  ao invés do próprio  $\theta$ . A questão levantada é, se sob essa

reparametrização, os modelos WSPE de uma forma geral têm função de log-verossimilhança com um comportamento mais desejável, e este é um ponto inicial a se estudar sobre a melhora da estimação de máxima verossimilhança.

A proposta, portanto, é estudar se há ganho na estimação dos parâmetros dos modelos WSPE reparametrizados, com fda

$$F(y) = 1 - \frac{C\left(C^{-1}(\theta^*)e^{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha}\right)}{\theta^*}, \quad y, \alpha, \lambda > 0, \theta^* = C(\theta) \in (C(s^*), C(s)),$$

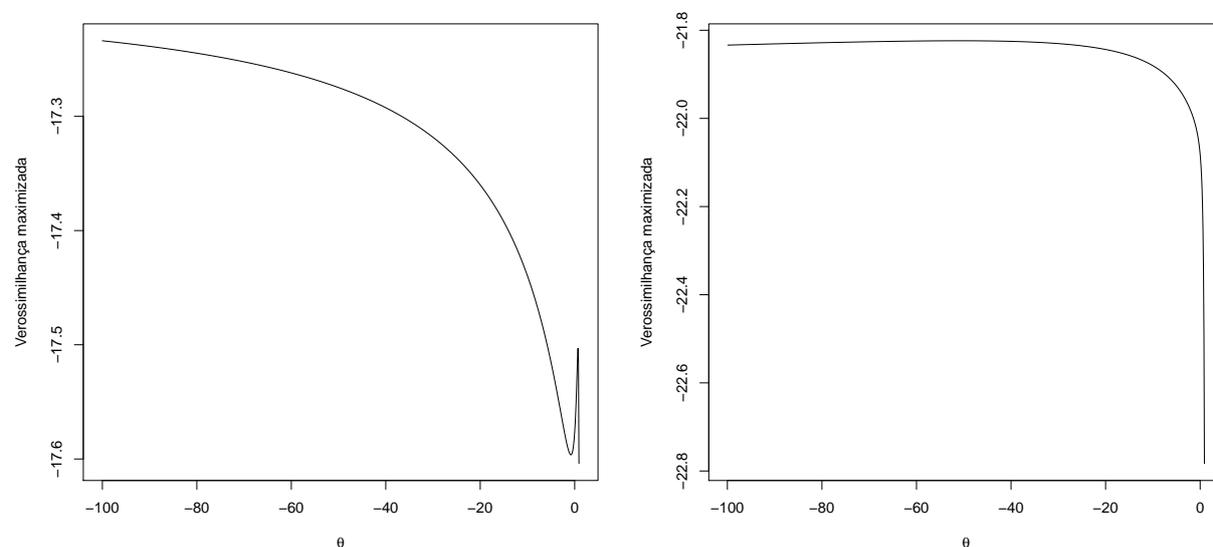
com  $C(\cdot)$  e  $s$  definidos em (2.1) e  $s^*$  definida em (2.6).

## 5.2 Discussão sobre estimação dos parâmetros dos modelos WSPE

Os modelos WSPE têm algumas propriedades desejáveis para o processo de estimação de parâmetros. Eles são identificáveis, desde que a função  $C(\theta)$  não seja ímpar. Além disso, a normalidade assintótica de seus estimadores de máxima verossimilhança pode ser verificada, inclusive quando consideramos no modelo variáveis regressoras. Porém, para amostras de tamanho relativamente pequeno de realizações de variáveis aleatórias WSPE independentes e indenticamente distribuídas (iid), foi possível notar comportamentos indesejáveis da função de verossimilhança. Para alguns bancos de dados, a concavidade desta função é demasiadamente suave, fazendo com que grandes alterações nos valores dos parâmetros gerem minúsculas mudanças no valor da verossimilhança.

Para ilustrar esse problema, considere duas amostras de tamanho 20 geradas a partir de uma distribuição WGE(1, 1, 0.5). Supondo os parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  conhecidos, apresentamos na Figura 5.2 a função de log-verossimilhança perfilada do modelo WGE em função de  $\theta$  para esses bancos de dados. Note que, no gráfico do lado esquerdo, a log-verossimilhança não apresenta o ponto de máximo global na região observada. Nesse caso,  $\hat{\theta}$  é  $-\infty$  ou  $\hat{\theta}$  é um valor excessivamente distante do verdadeiro valor de  $\theta$ . No gráfico do lado direito, é possível perceber que existe um valor de máximo finito. Porém, além de ser extremamente distante do verdadeiro valor de  $\theta$ , a curvatura da log-verossimilhança é demasiadamente

suave, fazendo com que grandes mudanças no valor de  $\theta$  levem a pequenas alterações da log-verossimilhança, acarretando, também, em desvios padrão relativamente grandes.



**Figura 5.1:** Log-verossimilhanças perfiladas para  $\theta$  para duas amostras aleatórias geradas a partir da distribuição  $WGE(1; 1; 0,5)$

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros de modelos ajustados a bancos de dados cuja função de verossimilhança tem comportamento similar ao apresentado na Figura 5.2 tendem a ser bastante viesadas. Pode-se, então, pensar em melhorar o estimador de máxima verossimilhança em termos de redução de viés de duas formas. A primeira forma é corrigir parcialmente o viés do estimador após ter sido feita a estimação subtraindo uma parte do viés do estimador de MV. Essa correção claramente não funciona quando a estimativa é  $-\infty$  ou  $\infty$ . A segunda forma é modificar (preventivamente) a função escore de tal forma que o estimador resultante tenha o viés reduzido. Essa forma de obter estimadores melhorados foi proposta por [Firth \(1993\)](#).

Uma correção preventiva de viés pode ser interessante para os modelos WSPE também devido à seguinte situação. Suponha um modelo WSPE relacionado a um sistema em série, ou seja, o valor do parâmetro  $\theta$  é positivo. Se forem observadas realizações iid desta distribuição WSPE e se todas as observações forem maiores que  $\lambda(\log 2)^{1/\alpha}$ , a estimativa de máxima verossimilhança será sempre negativa, ou seja, será estimado um modelo com sistema em paralelo. Na proposição a seguir formalizamos esse problema.

**Proposição 5.2.1.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias iid com  $X_1 \sim WSPE(\lambda, \alpha, \theta)$  e*

$\theta > 0$ . Sejam  $x_1, \dots, x_n$  suas respectivas realizações e  $\hat{\theta}$  a estimativa de máxima verossimilhança de  $\theta$ . Suponha que os parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  sejam conhecidos. Se  $\min\{x_1, \dots, x_n\} \geq \lambda(\log 2)^{1/\alpha}$ , então  $\hat{\theta} \leq 0$ .

*Prova.* Sem perda de generalidade, considere a transformação  $W_i = (X_i/\lambda)^\alpha$  e  $w_i = (x_i/\lambda)^\alpha$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Basta verificar que a derivada da log-verossimilhança

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - n \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} + \sum_{i=1}^n \frac{C''(\theta e^{-w_i})}{C'(\theta e^{-w_i})} e^{-w_i}$$

é negativa para todo  $\theta > 0$  quando  $\min\{w_1, \dots, w_n\} \geq \log(2)$ . Seja  $D_{1i} = C(\theta)C'(\theta) + \theta C(\theta)C''(\theta e^{-w_i})e^{-w_i} - \theta C'(\theta e^{-w_i})C'(\theta)$  e  $D_{2i} = \theta C(\theta)C'(\theta e^{-w_i})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Podemos escrever

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{D_{1i}}{D_{2i}}.$$

Os denominadores de todas as parcelas da soma acima são positivos para quaisquer valores  $w_1, \dots, w_n$  e  $\theta > 0$ . Expandindo os termos do numerador, podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_{1i} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} j a_j a_k \theta^{j+k-1} e^{-(j-1)w_i} (j-k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} j a_j a_k \theta^{j+k-1} e^{-(j-1)w_i} (j-k) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} j a_j a_k \theta^{j+k-1} e^{-(j-1)w_i} (j-k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} a_j a_k \theta^{j+k-1} (k e^{-(k-1)w_i} (k-j) + j e^{-(j-1)w_i} (j-k)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k a_j a_{j+k} \theta^{2j+k-1} e^{-(j-1)w_i} ((j+k)e^{-kw_i} - j). \end{aligned}$$

O termo  $ka_j a_{j+k} \theta^{2j+k-1} e^{-(j-1)w_i}$  é não-negativo para todo  $j, k$  e  $w_i$ . Considere a função  $I(j, k; w) = (j+k)e^{-kw} - j$ . Para  $w_0 = \log(2)$ , provamos por indução que  $I(j, k; w_0) < 0$ ,  $\forall j, k \in \mathbb{N}$ . É fácil ver que é verdade para  $j = k = 1$ . Supondo que  $I(j, k; w_0) < 0$  para algum  $j \in \mathbb{N}$  e algum  $k \in \mathbb{N}$ , temos  $I(j+1, k; w_0) = I(j, k; w_0) + e^{-kw_0} - 1 < 0$  e  $I(j, k+1; w_0) = I(j, k; w_0)e^{-w_0} + j \left[ e^{-w_0} - 1 + (e^{-k-w_0}j)^{-1} \right] < 0$ . Logo,  $I(j, k; w_0) < 0$  para todo  $j, k \in \mathbb{N}$ .

A função  $I$  é monótona decrescente em  $w$ . Daí,  $I(j, k; w) < 0$  para todo  $j, k \in \mathbb{N}$  e para todo  $w \geq \log(2)$ . Logo, se  $\min\{x_1, \dots, x_n\} \geq \log(2)$ , todas as parcelas  $D_{1i}$  serão não-positivas, com pelo menos um termo estritamente negativo, e a log-verossimilhança será decrescente para todo  $\theta > 0$ , e então  $\hat{\theta} \leq 0$ .

□

A probabilidade de ocorrência de uma amostra proveniente de uma distribuição WSPE com todas as observações maiores que  $\lambda(\log 2)^{1/\alpha}$  claramente decresce rápido com o aumento do tamanho da amostra. Porém, tendo em vista a probabilidade não nula de ocorrer problema de estimação em um cenário simples, com  $\alpha$  e  $\lambda$  conhecidos, em situações mais gerais, com esses parâmetros desconhecidos, esse comportamento seguirá podendo acontecer. Esta é mais uma motivação para se considerar uma correção do vetor escore antes de se fazer a estimação do parâmetros.

### 5.2.1 Correção preventiva de viés

Nesta subsecção discutimos sobre uma correção preventiva de viés para os modelos WSPE, mais especificamente para o caso mais simples em que  $\alpha$  e  $\lambda$  são conhecidos e todas as observações são completamente observadas. Primeiramente, fazemos uma breve revisão de alguns conceitos sobre correção preventiva de viés e, em seguida, fazemos uma aplicação à distribuição WGE.

Sob algumas condições de regularidade, o viés do estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  pode ser escrito como

$$b(\hat{\theta}) = \frac{b_1(\hat{\theta})}{n} + \frac{b_2(\hat{\theta})}{n^2} + \dots,$$

em que  $b_j(\cdot)$  é  $O(1)$  e  $n$  é tamanho de amostra. O estimador de MV pode ser corrigido parcialmente subtraindo-se o viés estimado de maior ordem  $b_1(\hat{\theta})/n$ . Desta forma, o estimador de máxima verossimilhança com correção de viés de primeira ordem é dado por

$$\hat{\theta}_c = \hat{\theta} - \frac{b_1(\hat{\theta})}{n}. \quad (5.1)$$

Cox e Snell (1968) derivaram a fórmula de  $b_1(\theta)$  no caso multidimensional. Em particular, para o caso unidimensional tratado aqui,

$$b_1(\theta) = -\frac{n}{2i(\theta)^2} [E((\ell'(\theta))^3) - E(\ell'(\theta)\ell''(\theta))],$$

com  $i(\theta) = E((\ell'(\theta))^2)$  e  $\ell(\theta)$  é a log-verossimilhança total. Este estimador corrigido, porém, pode não ser útil para alguns casos específicos. Em alguns modelos, por exemplo, para tamanhos moderadamente pequenos de amostra, existe uma probabilidade positiva da função de verossimilhança ser monótona. Nesses casos, a estimativa dos parâmetros está na borda do espaço paramétrico, podendo ser infinito (ou menos infinito) e, evidentemente, uma correção da forma (5.1) não é útil.

Firth (1993) propôs uma correção de viés fazendo uma modificação na função escore antes que seja encontrado o estimador. Dessa forma, comportamentos não desejáveis como os descritos anteriormente são amenizados, resultando em estimadores menos viesados. Em especial, nos casos em que o estimador não corrigido estima o parâmetro como infinito, com a correção de viés é possível obter um valor mais plausível. Por exemplo, essa situação pode ocorrer na estimação do parâmetro de assimetria do modelo skew normal (veja Sartori (2006)).

Para obter o estimador com a correção proposta por Firth (1993), considere a correção na função escore

$$U^*(\theta) = U(\theta) + A(\theta),$$

em que  $A(\theta)$  pode depender dos dados e é  $O_p(1)$  e  $U(\theta) = d\ell(\theta)/d\theta$ . Seja  $\hat{\theta}^*$  um estimador de  $\theta$  que satisfaz  $U^*(\hat{\theta}^*) = 0$ . A partir da expansão de  $U^*(\hat{\theta}^*)$  em torno do verdadeiro valor  $\theta$ , o viés de  $\hat{\theta}^*$  é

$$E(\hat{\theta}^* - \theta) = \frac{b_1(\theta)}{n} + \frac{\mathbb{A}(\theta)}{i(\theta)} + O(n^{-3/2}),$$

em que  $\mathbb{A}(\theta) = E(A(\theta))$ . Para que seja removido o viés de primeira ordem de  $\hat{\theta}^*$ , é preciso que  $A(\theta)$  seja tal que  $\mathbb{A} = -b_1(\theta)i(\theta)/n + O(n^{-1/2})$ . Dois candidatos diretos para  $A$  são

$-b_1(\theta)\ell'(\theta)^2/n$  e  $-b_1(\theta)i(\theta)/n$ .

Pode-se obter  $\hat{\theta}^*$  a partir de  $U^*(\hat{\theta}^*) = 0$ , ou pode-se retornar para uma função de verossimilhança modificada para fazer sua estimação. O logaritmo dessa verossimilhança modificada é dado por

$$\ell^*(\theta) = \ell(\theta) + \int A(\theta)d\theta. \quad (5.2)$$

É interessante se considerar essa verossimilhança modificada para testar os parâmetros do modelo e, também, para avaliar visualmente o efeito da correção na forma da verossimilhança. Em muitos casos é possível ver uma clara acentuação na concavidade da função de verossimilhança (veja [Sartori \(2006\)](#)).

Pode ser complicado encontrar a solução de  $U^*(\hat{\theta}) = 0$ , assim como encontrar a integral indefinida em (5.2). Para essas situações [Kosmidis e Firth \(2010\)](#) sugerem um algoritmo genérico para obter a raiz de  $U^*(\theta^*)$  baseado no algoritmo de Newton-Raphson. Para encontrar as estimativas dos parâmetros pelo método de Newton Raphson temos o processo iterativo

$$\theta^{(j+1)} = \theta^{(j)} + \frac{U^*(\theta^{(j)})}{i^*(\theta^{(j)})},$$

em que  $i^*(\theta) = i(\theta) + dA(\theta)/d\theta$ . Pela possível dificuldade de implementação, [Kosmidis e Firth \(2010\)](#) propõem um algoritmo de *quasi* Newton Raphson, substituindo  $i^*(\theta)$  por  $i(\theta)$ .

A Proposição 5.2 e os exemplos citados nas seções anteriores são indicações para o uso da correção preventiva de viés para os modelos WSPE. Portanto, sugerimos como uma proposta de trabalho futuro tratar da correção preventiva de viés para esses modelos, bem como para os modelos multivariados.

Dada a complexidade do processo de estimação com correção preventiva de viés em modelos mais complexos, apresentamos brevemente aqui o caso mais simples, em que os parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  são conhecidos.

Para a correção preventiva de viés do estimador de  $\theta$  do modelo WSPE consideramos o termo corretivo  $A(\theta) = -b_1(\theta)i(\theta)/n$ . Daí, de uma forma geral, o escore corrigido para os modelos WSPE com  $\alpha$  e  $\lambda$  conhecidos é

$$U^*(\theta) = U(\theta) - \frac{E[(B_1 + B_2)^3] - \text{Cov}(B_1, B_3)}{2(E(B_3) + B_4)},$$

com

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{C''(\theta e^{-W})}{C'(\theta e^{-W})} e^{-W}, \\ B_2 &= \frac{1}{\theta} - \frac{C'(\theta)}{C(\theta)}, \\ B_3 &= \left[ \frac{C'''(\theta e^{-W})}{C'(\theta e^{-W})} - \left( \frac{C''(\theta e^{-W})}{C'(\theta e^{-W})} \right)^2 \right] e^{-2W}, \\ B_4 &= \frac{1}{\theta^2} + \frac{C''(\theta)}{C(\theta)} - \left( \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} \right)^2 \end{aligned}$$

e  $W \sim \text{WSPE}(1, 1, \theta; C)$ . Essas quantidades do termo de correção podem ser bem simplificadas para algumas distribuições WSPE. A seguir apresentamos a correção preventiva de viés para a distribuição WGE.

O caso da distribuição WGE ocorre quando  $C(\theta) = \theta(1 - \theta)^{-1}$  e, nesse caso, temos que  $E[(B_1 + B_3)^3] = 0$ . Então, o escore modificado se simplifica em

$$U^*(\theta) = U(\theta) - \frac{\text{Cov}(B_1, B_3)}{2(E(B_3) + B_4)}$$

e, com algumas manipulações algébricas, temos que

$$A(\theta) = \frac{1}{2(1 - \theta)}.$$

Para o modelo WGE, a integração algébrica de  $A(\theta)$  é viável e a log-verossimilhança modificada se reduz a

$$\ell^*(\theta) = \ell(\theta) - \frac{1}{2} \log(1 - \theta).$$

Espera-se que o valor de  $\theta$  que maximiza  $\ell^*(\theta)$  tenda a ser menos viciado em amostras pequenas ou de tamanhos moderados. Além disso, o comportamento da log-verossimilhança modificada  $\ell^*(\theta)$  pode ser mais desejável que o comportamento da log-verossimilhança original.

Na prática, os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  não são conhecidos. Ao considerá-los desconhecidos, a expressão da log-verossimilhança modificada para se obter um estimador com correção preventiva de viés não será tão simples como a apresentada aqui. Como trabalho futuro, sugerimos a construção de um estimador melhorado a partir da abordagem de viés preventivo proposta por [Firth \(1993\)](#) para modelos de regressão WSPE e WSPB com todos os parâmetros desconhecidos.

### 5.3 Formas alternativas de construção de modelos para sistemas com múltiplas medições

No Capítulo 4 construímos um modelo bivariado para sistemas em série e outro modelo bivariado para sistemas em paralelo, ambos com quantidades desconhecidas de componentes. Fizemos a construção do modelo partindo da ideia de que, em um único sistema, duas ou mais medidas são tomadas no momento de sua falha. Supusemos que, associado à falha de cada componente, são feitas duas medidas independentes e com distribuição de Weibull. Poderíamos, porém, ter considerado no lugar das distribuições de Weibull independentes alguma distribuição bivariada não independente. Desta forma, o vetor de variáveis aleatórias da distribuição resultante teria a correlação entre seus elementos regida não apenas pelo tamanho comum do sistema, mas também pela correlação entre as medidas feitas entre os componentes do sistema latente.

Uma outra forma de se construir um modelo multivariado para sistemas em série ou em paralelo é considerar dois sistemas distintos e não um único sistema como feito no Capítulo 4. Sejam  $Y_{ij} \sim \text{Weibull}(\lambda_j, \alpha_j)$ , para  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 1, 2$ , variáveis aleatórias independentes. Sejam  $(N_1, N_2)$  um vetor com distribuição bivariada com suporte no plano cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , por exemplo, uma modelo bivariado de série de potência com distribuição de probabilidade dada por

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \frac{a_{n_1, n_2} \theta^{n_1 + n_2}}{C^\dagger(\theta)}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

em que  $C^\dagger(\theta) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} \theta^{i+j}$ , com  $a_{i,j} \geq 0$ ,  $a_{1,1} > 0$ ,  $\theta \in (0, s)$  e  $s$  é o raio de convergência de  $C^\dagger(\cdot)$ . Dado  $N_1 = n_1$  e  $N_2 = n_2$ , as variáveis aleatórias

$$Y_1 = \min\{Y_{11}, \dots, Y_{N_1}\} \quad \text{e} \quad Y_2 = \min\{Y_{12}, \dots, Y_{N_2}\}$$

são independentes. A distribuição marginal de  $(Y_1, Y_2)$  pode ser interpretada como o tempo até a falha de dois sistemas cuja dependência se dá pela dependência do tamanho dos sistemas latentes. De forma similar pode-se construir um modelo  $n$ -variado.

## 5.4 Comentários finais

Nesta tese desenvolvemos uma classe de modelos a partir de uma extensão do espaço paramétrico das distribuições WSP, introduzidas por [Morais e Barreto-Souza \(2011\)](#). A classe de modelos proposta recebeu o nome de Weibull série de potência estendida (WSPE). Os modelos WSP estão relacionados a sistemas em série, enquanto os modelos propostos nessa tese podem estar relacionados a sistemas tanto em série quanto em paralelo. Obtivemos propriedades para essa classe, que evidenciaram a relevância da extensão proposta. Para lidar com dados não identicamente distribuídos, propusemos um modelo de regressão para respostas com distribuição WSPE.

A motivação da construção da classe de distribuições WSPE gira em torno do tempo de falha de sistemas em série e em paralelo. Porém, no momento da falha de um sistema, uma ou mais medidas podem ser obtidas. Apresentamos um banco de dados sobre fibras de coco que apresenta essa característica. Uma fibra de coco é formada por uma coleção de microfibras. Definimos o rompimento da fibra como a falha do sistema. Portanto, suas microfibras podem ser vistas como componentes de um sistema em paralelo visto que o rompimento ocorre no momento em que todas as microfibras tenham se rompido. No banco de dados apresentado, fibras de coco receberam uma força até que se rompessem e, nesse momento, foram medidas a tensão de ruptura e o módulo de elasticidade. Temos, portanto, duas medidas tomadas no instante da falha do sistema. Para lidar com esse tipo de situação, construímos um modelo multivariado para medidas feitas em sistemas em série e em paralelo com quantidade

desconhecida de componentes, denominado Weibull série de potência bivariado (WSPB). Encontramos algumas propriedades relevantes desses modelos e propusemos um modelo de regressão.

Considerando que existem situações em que os indivíduos em estudo são parcialmente observados, propusemos um modelo de regressão para dados censurados. Além disso, consideramos a modelagem de um parâmetro responsável por grande variedade de formas das densidades WSPE. Apesar dos modelos apresentados nessa tese serem motivados por situações em que exista um sistema latente em série ou em paralelo, as distribuições WSPE e WSPB podem ser aplicadas a dados positivos em geral. Para ilustrar essa afirmação, modelamos um conjunto de dados com presença de observações censuradas sobre displasia broncopulmonar em bebês nascidos com baixo peso.

Como trabalhos futuros, propomos a reparametrização do modelo conforme comentado na Seção 5.1 e também a correção preventiva dos estimadores dos modelos. Propomos, também, formas alternativas para construção de modelos multivariados para sistemas em série e em paralelo.



## APÊNDICE A

Tabelas com AIC's da aplicação sobre tensão de ruptura e módulo de elasticidade de fibras de coco

**Tabela A.1:** AIC para os submodelos dos modelos ajustados na Seção 3.7 com partes sistemáticas dadas em (3.14) e (3.15)

Parâmetros estimados				AIC					
$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	WLE <sub>s</sub>	WGE <sub>s</sub>	WPE <sub>s</sub>	WLE <sub>p</sub>	WGE <sub>p</sub>	WPE <sub>p</sub>
x		x	x	678,4507	654,1186	679,2297	681,9562	681,9613	722,3362
x	x	x		700,9030	672,9950	694,0541	704,5835	705,9381	744,3066
		x	x	598,6555	590,0390	605,5102	606,4416	604,6840	639,1347
x	x		x	646,0188	641,4143	654,5026	656,8219	649,4172	677,2110
x		x		752,8600	688,8290	725,7270	773,8293	739,8973	807,0070
x	x			743,0339	710,9965	738,2674	749,6119	744,3224	790,5866
x			x	735,4191	708,5761	740,6857	743,9721	738,6404	781,6275
	x	x		709,3009	679,8295	694,8269	710,4710	706,9609	751,9081
		x	x	679,7344	657,1424	677,6616	682,9942	682,2499	721,3306
	x		x	665,4025	668,9311	681,0293	671,5937	690,1438	699,5647
x				797,0154	729,7964	773,3238	820,6660	783,4407	861,4330
		x		754,6973	693,9939	723,8106	774,9482	739,5634	805,4118
	x			759,7893	740,0848	762,3852	759,3594	773,3745	806,4575
			x	742,5961	734,3670	760,1114	748,4049	771,3138	784,1254

---

### Códigos implementados em R

---

#### Quantidades úteis das séries de potência

```
P.S<-function(pws,M=1){
switch(pws,
Poisson=list(an<-function(x) 1/factorial(x),
             C.theta<-function(x) exp(x)-1,
             C1.theta<-function(x) exp(x),
             C2.theta<-function(x) exp(x),
             C3.theta<-function(x) exp(x),
             inv.C<-function(x) log(x+1),
             d.inv.C<-function(x) (x+1)^(-1)),
geometric=list(an<-function(x) 1,
              C.theta<-function(x) x/(1-x),
              C1.theta<-function(x) (1-x)^(-2),
              C2.theta<-function(x) 2*(1-x)^(-3),
              C3.theta<-function(x) 6*(1-x)^(-4),
              inv.C<-function(x) x/(x+1),
```

```
      d.inv.C<-function(x) -(1+x^(-1))^(-2)*(-1)*x^(-2)),
logarithmic=list(an<-function(x) 1/x,
      C.theta<-function(x) -log(1-x),
      C1.theta<-function(x) (1-x)^(-1),
      C2.theta<-function(x) (1-x)^(-2),
      C3.theta<-function(x) 2*(1-x)^(-3),
      inv.C<-function(x) 1-exp(-x),
      d.inv.C<-function(x) exp(-x)),
binomial=list(an<-function(x) gamma(M+x-1)/(gamma(x)*gamma(M)),
      C.theta<-function(x) (1+x)^M-1,
      C1.theta<-function(x) M*(1+x)^(M-1),
      C2.theta<-function(x) M*(M-1)*(1+x)^(M-2),
      C3.theta<-function(x) M*(M-1)*(M-2)*(1+x)^(M-2),
      inv.C<-function(x) (x-1)^(1/M)-1,
      d.inv.C<-function(x) (1/M)*(x-1)^(1/M-1)),
Nbinomial=list(an<-function(x) choose((M+x-2),(x-1)),
      C.theta<-function(x) x*(1-x)^(-M),
      C1.theta<-function(x) (x*(M-1)+1)/(1-x)^(M+1),
      C2.theta<-function(x) (M*x*(M-1)+2*M)/(1-x)^(M+2),
      C3.theta<-function(x) cat("colocar aqui")))
}
```

## Geração de variáveis aleatórias com distribuição WSPE

```
rwps<-function(n,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,
      inv.C=NULL){
if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||
      PS=="logarithmic"){
      C.theta<-P.S(PS)[[2]]
      inv.C<-P.S(PS)[[6]]}
if(length(lambda)==1)
```

```

    result<-lambda*(-log(inv.C((1-runif(n))*C.theta(theta))/theta))^
        (1/alpha)
if(length(lambda)>1){
  m<-length(lambda)
  result<-(-log(inv.C((1-runif(m))*C.theta(theta))/theta))^
    (1/alpha)
  result<-result*lambda}
result
}

```

## Geração de variáveis aleatórias com distribuição WSPB

```

rbwps<-function(n, lambda, theta, alpha, PS=NULL, C.theta=NULL,
               inv.C=NULL, sist=T, method="char"){
  if(PS=="Poisson" || PS=="geometric" || PS=="binomial" ||
     PS=="logarithmic"){
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]
    inv.C<-P.S(PS)[[6]]
    rps<-P.S(PS)[[8]]}
  if(is.vector(lambda)==F) lambda<-c(lambda, lambda)
  if(is.vector(alpha)==F) alpha<-c(alpha, alpha)
  if(sist==T){
    func<-min
  } else {
    func<-max}
  N<-rps(n, theta)
  while(min(N)==0){
    ind<-which(N==0)
    N<-c(N[-ind], rps(length(ind), theta))}
  y1<-y2<-vector(mode="numeric", length=n)
  for(i in 1:n){

```

```
y1[i]<-func(rweibull(N[i], alpha[1], lambda[1]))
y2[i]<-func(rweibull(N[i], alpha[2], lambda[2]))}
if(n==1){
  retorno<-c(y1,y2)
} else {
  retorno<-cbind(y1,y2)}
retorno
}
```

## Densidade da distribuição WSPE

```
dwps<-function(x,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,
               C1.theta=NULL){
  if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||
     PS=="logarithmic"){
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]
    C1.theta<-P.S(PS)[[3]]}
  alpha*theta*x^(alpha-1)*exp(-(x/lambda)^alpha)*
  C1.theta(theta*exp(-(x/lambda)^alpha))/
  (C.theta(theta)*lambda^alpha)
}
```

## Densidade da distribuição WSPB

```
dbwps<-function(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,
                sist=T){
  if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||
     PS=="logarithmic"){
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]
    C1.theta<-P.S(PS)[[3]]
    C2.theta<-P.S(PS)[[4]]}
```

```

}
if(length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)
if(length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)
w1<-(y1/lambda[1])^alpha[1]
w2<-(y2/lambda[2])^alpha[2]
theta*alpha[1]*alpha[2]*y1^(alpha[1]-1)*y2^(alpha[2]-1)/
(lambda[1]^alpha[1]*lambda[2]^alpha[2]*C.theta(theta))*
exp(-w1-w2)*
(C2.theta(theta*((1-sist)-exp(-w1))*((1-sist)-exp(-w2))))*
theta*((1-sist)-exp(-w1))*((1-sist)-exp(-w2))+
C1.theta(theta*((1-sist)-exp(-w1))*((1-sist)-exp(-w2)))
}

```

## Quantis da distribuição WSPE

```

qwps<-function(x,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,
              inv.C=NULL) {
  if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||
     PS=="logarithmic") {
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]
    inv.C<-P.S(PS)[[6]]
  }
  lambda*(-log(inv.C((1-x)*C.theta(theta))/theta))^(1/alpha)
}

```

## Fda da distribuição WSPE

```

pwps<-function(x,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL) {
  if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||
     PS=="logarithmic") {
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]

```

```
}  
if(theta!=0)  
result<-1-C.theta(theta*exp(-(x/lambda)^alpha))/C.theta(theta)  
if(theta==0)  
result<-pweibull(x,alpha,lambda)  
result  
}
```

## Fda da distribuição WSPB

```
pbwps<-function(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,  
               sist=T){  
  if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||  
     PS=="logarithmic"){  
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]  
  }  
  if(length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)  
  if(length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)  
  w1<-(y1/lambda[1])^alpha[1]  
  w2<-(y2/lambda[2])^alpha[2]  
  if(sist==T){  
    result=1-C.theta(theta*exp(-w1))/C.theta(theta)-  
    C.theta(theta*exp(-w2))/C.theta(theta)+  
    C.theta(theta*exp(-w1-w2))/C.theta(theta)  
  } else {  
    result=C.theta(theta*(1-exp(-w1))*(1-exp(-w2)))/C.theta(theta)  
  }  
  result  
}
```

## Função de sobrevivência da distribuição WSPB

```

sbwps<-function(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,
               sist=T) {
  if(PS=="Poisson" || PS=="geometric" || PS=="binomial" ||
     PS=="logarithmic") {
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]
  }
  if(length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)
  if(length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)
  w1<-(y1/lambda[1])^alpha[1]
  w2<-(y2/lambda[2])^alpha[2]
  if(sist==T) {
    result=C.theta(theta*exp(-w1-w2))/C.theta(theta)
  } else {
    result=1-C.theta(theta*(1-exp(-w1)))/C.theta(theta)-
    C.theta(theta*(1-exp(-w1)))/C.theta(theta)+
    C.theta(theta*(1-exp(-w1))*(1-exp(-w2)))/C.theta(theta)
  }
  result
}

```

## Momentos das distribuições WSPE e WSPB

```

func<-function(n,r) {
  result<-vector(mode="numeric",length=length(n))
  for(i in 1:length(n))
    result[i]<-sum(choose(n[i],1:n[i])*(-1)^(1:n[i])/(1:n[i])^r)
  result
}
ebwps<-function(r1,r2,lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,

```

```
      sist=T,maxi=100) {  
if (PS=="Poisson" || PS=="geometric" || PS=="binomial" ||  
    PS=="logarithmic") {  
  an<-P.S(PS)[[1]]  
  C.theta<-P.S(PS)[[2]]  
}  
if (length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)  
if (length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)  
if (sist==T) {  
result=gamma(r1/alpha[1]+1)*gamma(r2/alpha[2]+1)*lambda[1]^r1*  
      lambda[2]^r2/C.theta(theta)*sum(an(1:maxi)*  
theta^(1:maxi)/((1:maxi)^(r1/alpha[1]+r2/alpha[2])))  
} else {  
result=gamma(r1/alpha[1]+1)*gamma(r2/alpha[2]+1)*lambda[1]^r1*  
      lambda[2]^r2/C.theta(theta)*  
sum(an(1:maxi)*theta^(1:maxi)*func(1:maxi,r1)*func(1:maxi,r2))  
}  
result  
}
```

## Covariância entre componentes da distribuição WSPB

```
cov.bwps<-function(lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,  
      sist=T,maxi=100) {  
if (length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)  
if (length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)  
ebwps(1,1,lambda,theta,alpha,PS, C.theta,sist,maxi)-  
ebwps(1,0,lambda[1],theta,alpha[1],PS, C.theta,sist,maxi)*  
ebwps(0,1,lambda[2],theta,alpha[2],PS, C.theta,sist,maxi)  
}
```

## Correlação entre componentes da distribuição WSPB

```
cor.bwps<-function(lambda,theta,alpha,PS=NULL, C.theta=NULL,
                    sist=T,maxi=100){
  if(length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)
  if(length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)
  cov.bwps(lambda,theta,alpha,PS, C.theta,sist,maxi)/(
  sqrt(ebwps(2,0,lambda[1],theta,alpha[1],PS, C.theta,sist,maxi)-
  ebwps(1,0,lambda[1],theta,alpha[1],PS, C.theta,sist,maxi)^2)*
  sqrt(ebwps(0,2,lambda[2],theta,alpha[2],PS, C.theta,sist,maxi)-
  ebwps(0,1,lambda[2],theta,alpha[2],PS, C.theta,sist,maxi)^2))
}
```

## Função de risco conjunta das distribuições WSPB

```
haz.bwps<-function(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS=NULL,C.theta=NULL,
                    sist=T){
  dbwps(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS, C.theta,sist)/
  sbwps(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS, C.theta,sist)
}
```

## Função de risco condicional $Y1|Y2 = y2$

```
haz2.bwps<-function(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS=NULL,C.theta=NULL,
                    sist=T){
  if(PS=="Poisson"||PS=="geometric"||PS=="binomial"||
  PS=="logarithmic"){
    C.theta<-P.S(PS)[[2]]
    C1.theta<-P.S(PS)[[3]]
    C2.theta<-P.S(PS)[[4]]
  }
  if(length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)
```

```
if (length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)
w1<-(y1/lambda[1])^alpha[1]
w2<-(y2/lambda[2])^alpha[2]
if (sist==T) {
result=alpha[1]*y1^(alpha[1]-1)/lambda[1]^alpha[1]*(1+
C2.theta(theta*exp(-w1-w2))*theta*exp(-w1-w2)/
C1.theta(theta*exp(-w1-w2)))
} else {
result=alpha[1]*y1^(alpha[1]-1)*exp(-w1)/lambda[1]^alpha[1]*
(C2.theta(theta*(1-exp(-w1))*(1-exp(-w2)))*theta*(1-exp(-w1))*
(1-exp(-w2))+C1.theta(theta*(1-exp(-w1))*(1-exp(-w2))))/
(C1.theta(theta*(1-exp(-w2)))-C1.theta(theta*(1-exp(-w1))*
(1-exp(-w2)))*theta*(1-exp(-w1)))
}
result
}
```

### Função de risco condicional $Y_1|Y_2 > y_2$

```
haz3.bwps<-function(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS=NULL,C.theta=NULL,
sist=T) {
if (PS=="Poisson" || PS=="geometric" || PS=="binomial" ||
PS=="logarithmic") {
C.theta<-P.S(PS)[[2]]
C1.theta<-P.S(PS)[[3]]
C2.theta<-P.S(PS)[[4]]
}
if (length(lambda)==1) lambda<-c(lambda,lambda)
if (length(alpha)==1) alpha<-c(alpha,alpha)
w1<-(y1/lambda[1])^alpha[1]
w2<-(y2/lambda[2])^alpha[2]
```

```

if(sist==T) {
result=alpha[1]*y1^(alpha[1]-1)/lambda[1]^alpha[1]*
C1.theta(theta*exp(-w1-w2))*theta*exp(-w1-w2)/
C.theta(theta*exp(-w1-w2))
} else {
result=theta*alpha[1]*y1^(alpha[1]-1)/lambda[1]^alpha[1]*
exp(-w1)*(C1.theta(theta*(1-exp(-w1)))-
C1.theta(theta*(1-exp(-w1))*(1-exp(-w2)))*
theta*(1-exp(-w1))*(1-exp(-w2)))/
sbwps(y1,y2,lambda,theta,alpha,PS, C.theta,sist)
}
result
}

```

## Estimação dos parâmetros do modelo WSPE com $\theta$ fixo

```

lnk<-function(lnk) {
  switch(lnk,
    log=list(link<-function(x) log(x),
             inv.link<-function(x) exp(x),
             diff.inv.link<-function(x) exp(x)),
    identity=list(link<-function(x) x,
                  inv.link<-function(x) x,
                  diff.inv.link<-function(x) 1),
    square=list(link<-function(x) sqrt(x),
                inv.link<-function(x) x^2,
                diff.inv.link<-function(x) 2*x)
  )
}

fit.EWPS.fix<-function(form1,form2=NULL,status=NULL,par.,
  PS="Poisson",link1="log",link2="log",metodo="BFGS",theta=0) {

```

```
if(link1=="log"||link1=="identity"||link1=="square"){
  inv.link1<-lnk(link1)[[2]]
  diff.inv.link1<-lnk(link1)[[3]]
}
if(link2=="log"||link2=="identity"||link2=="square"){
  inv.link2<-lnk(link2)[[2]]
  diff.inv.link2<-lnk(link2)[[3]]
}
y<-model.frame(form1)[,1]
x1<-model.matrix(form1)
k1<-length(x1[1,])
if(is.null(status)) status<-rep(1,length(y))
if(!is.null(form2)){
  y2<-model.frame(form2)[,1]
  x2<-model.matrix(form2)
  k2<-length(x2[1,])
}
if(length(PS)==1) PS<-c(PS,1)
if(PS[1]=="Poisson"||PS[1]=="geometric"||PS[1]=="binomial"||
  PS[1]=="logarithmic"||PS[1]=="Nbinomial"){
  C.theta<-P.S(PS[1],M=as.numeric(PS[2]))[[2]]
  C1.theta<-P.S(PS[1],M=as.numeric(PS[2]))[[3]]
  C2.theta<-P.S(PS[1],M=as.numeric(PS[2]))[[4]]
}
loglik<-function(par.){
  betas<-par.[1:(k1)]
  if(is.null(form2)){
    alpha<-par.[k1+1]
  } else{
    gamas<-par.[(k1+1):(k1+k2)]
```

```

alpha<-inv.link2(x2%%gamas)
}
n<-length(y)
r<-sum(status)
lambda<-inv.link1(x1%%betas)
w<-(y/lambda)^alpha
-sum(status*w)+sum(status*log(alpha))+sum(status*log(w))+
sum(status*log(C1.theta(theta*exp(-w))*theta/C.theta(theta)))-
sum(status*log(y))+sum((1-status)*
log(C.theta(theta*exp(-w))/C.theta(theta)))
}
result<-optim(par., loglik, control=list(fnscale=-1), hessian=T,
          method=metodo)
result
}

```

### Estimação dos parâmetros do modelo WSPE via perfil em $\theta$

```

fit.EWPS<-function(form1, form2=NULL, status, PS="Poisson",
          link1="log", link2="log", metodo="BFGS",
          salto=0.1, mini=-10, maxi=10, init=NULL, ref=1,
          perfil=F) {
y<-model.frame(form1)[,1]
x1<-model.matrix(form1)
k1<-length(x1[1,])
if(!is.null(form2)) {
y2<-model.frame(form2)[,1]
x2<-model.matrix(form2)
k2<-length(x2[1,])
} else {
k2=1 }

```

```
if(is.null(form2)) {
  if(max(abs(x1-1))>0) {
    aj1<-survreg(Surv(y,status)~x1[, -1], dist='weibull',init=init)
  } else {
    aj1<-survreg(Surv(y,status)~x1-1, dist='weibull',init=init)
  }
} else{
  aj1<-fit.EWPS.fix(form1,form2,status,init,PS=PS,link1=link1,
                    link2=link2,metodo=metodo,theta=0)
}
if((PS=="geometric") || (PS=="logarithmic")) {
  maxi<-1-salto
  mini<-1+salto
}
grade.pos=seq(0,maxi,salto)
grade.neg--seq(0,-mini,salto)
grade.theta<-sort(c(grade.pos,grade.neg[-1]))
mloglik.pos<-vector(mode="numeric",length=length(grade.pos))
mloglik.neg<-vector(mode="numeric",length=length(grade.neg))
result.pos<-matrix(0,ncol=k1+k2,nrow=length(grade.pos))
result.neg<-matrix(0,ncol=k1+k2,nrow=length(grade.neg))
if(is.null(form2)) {
  mloglik.pos[1]<-mloglik.neg[1]<-aj1[[4]][2]
  result.pos[1,<-result.neg[1,<-c(aj1$coef,1/aj1$scale)
} else {
  mloglik.pos[1]<-mloglik.neg[1]<-aj1$value
  result.pos[1,<-result.neg[1,<-aj1$par
}
for(i in 2:length(grade.pos)) {
  aj<-fit.EWPS.fix(form1,form2,status,result.pos[i-1,],PS=PS,
```

```

        link1=link1,link2=link2,metodo=metodo,theta=grade.pos[i])
mloglik.pos[i]<-aj$value
result.pos[i,]<-aj$par
}
for(i in 2:length(grade.neg)){
aj<-fit.EWPS.fix(form1,form2,status,result.neg[i-1,],PS=PS,
        link1=link1,link2=link2,metodo=metodo,theta=grade.neg[i])
mloglik.neg[i]<-aj$value
result.neg[i,]<-aj$par
}
result<-rbind(result.neg[length(result.neg[,1]):2,],result.pos)
mloglik<-c(mloglik.neg[length(result.neg[,1]):2],mloglik.pos)
ind<-which(mloglik==max(mloglik))
if(perfil==F){
return(c(result[ind,],grade.theta[ind],mloglik[ind]))
} else {
return(list(c(result[ind,],grade.theta[ind],mloglik[ind]),
        cbind(result,grade.theta,mloglik)))
}
}
}

```

## Estimação dos parâmetros do modelo WSPB com $\theta$ fixo

```

fit.BWPS.fix<-function(form1,form2,par.,series1=T,series2=T,
        PS="Poisson",link1="log",link2="log",metodo="BFGS",theta=0){
if(link1=="log"||link1=="identity"||link1=="square"){
inv.link1<-lnk(link1)[[2]]
diff.inv.link1<-lnk(link1)[[3]]
}
if(link2=="log"||link2=="identity"||link2=="square"){
inv.link2<-lnk(link2)[[2]]

```

```
diff.inv.link2<-lnk(link2) [[3]]
}
y1<-model.frame(form1) [,1]
x1<-model.matrix(form1)
k1<-length(x1[1,])
y2<-model.frame(form2) [,1]
x2<-model.matrix(form2)
k2<-length(x2[1,])
if(length(PS)==1) PS<-c(PS,1)
if(PS[1]=="Poisson" || PS[1]=="geometric" || PS[1]=="binomial" ||
   PS[1]=="logarithmic" || PS[1]=="Nbinomial") {
  C.theta<-P.S(PS[1],M=as.numeric(PS[2])) [[2]]
  C1.theta<-P.S(PS[1],M=as.numeric(PS[2])) [[3]]
  C2.theta<-P.S(PS[1],M=as.numeric(PS[2])) [[4]]
}
loglik<-function(par.) {
  alpha1<-par.[1]
  alpha2<-par.[2]
  betas<-par.[3:(k1+2)]
  gamas<-par. [(k1+3):(k1+k2+2)]
  n<-length(y1)
  lambda1<-inv.link1(x1%*%betas)
  lambda2<-inv.link2(x2%*%gamas)
  w1<-(y1/lambda1)^alpha1
  w2<-(y2/lambda2)^alpha2
  w<-((1-series1)+(-1)^(1-series1)*exp(-w1))*
      ((1-series2)+(-1)^(1-series2)*exp(-w2))
  n*log(theta)-n*log(C.theta(theta))-sum(w1)-sum(w2)+
  n*log(alpha1)+n*log(alpha2)+sum(log(w1))+sum(log(w2))+
  sum(log(C1.theta(theta*w)+C2.theta(theta*w)*(theta*w)))-
```

```

sum(log(y1*y2))
}
result<-optim(par., loglik, control=list(fnscale=-1), hessian=T,
             method=metodo)
result
}

```

## Estimação dos parâmetros do modelo WSPB via perfil em $\theta$

```

require(survival)

fit.BWPS<-function(form1, form2, PS="Poisson", series1=T, series2=T,
                  link1="log", link2="log", metodo="BFGS",
                  salto=0.01, maxi=10, ref=1, perfil=F) {
y1<-model.frame(form1)[,1]
x1<-model.matrix(form1)
k1<-length(x1[1,])
y2<-model.frame(form2)[,1]
x2<-model.matrix(form2)
k2<-length(x2[1,])
if(max(abs(x1-1))>0) {
aj1<-survreg(Surv(y1)~x1[, -1], dist='weibull')
} else {
aj1<-survreg(Surv(y1)~x1-1, dist='weibull')
}
if(max(abs(x2-1))>0) {
aj2<-survreg(Surv(y2)~x2[, -1], dist='weibull')
} else {
aj2<-survreg(Surv(y2)~x2-1, dist='weibull')
}
if((PS=="geometric") || (PS=="logarithmic")) {

```

```
maxi<-1-salto
}
grade.theta<-seq(0,maxi,salto)
mloglik<-vector(mode="numeric",length=length(grade.theta))
result<-matrix(0,ncol=2+k1+k2,nrow=length(grade.theta))
mloglik[1]<-aj1[[4]][2]+aj2[[4]][2]
result[1,]<-c(1/aj1$scale,1/aj2$scale,aj1$coef,aj2$coef)
min=0
teste<-mloglik[1]
mcov=0
for(i in 2:length(grade.theta)){
aj<-fit.BWPS.fix(form1,form2,result[i-1,],series1=series1,
                 series2=series2,PS=PS,link1=link1,link2=link2,
                 metodo=metodo,theta=grade.theta[i])
mloglik[i]<-aj$value
result[i,]<-aj$par
if(aj$value>teste){
teste<-aj$value
mcov<-aj$hes
}
}
ind<-which(mloglik==max(mloglik))
if(perfil==F){
return(c(result[ind,],grade.theta[ind],mloglik[ind]))
} else {
return(list(c(result[ind,],grade.theta[ind],mloglik[ind]),
           cbind(result,grade.theta,mloglik),mcov))
}
}
```

---

## Referências Bibliográficas

---

- Barakat e El-Shandidy (2004)** H. M. Barakat e M. A. El-Shandidy. Order statistics with random sample size. *International Journal of Statistics*, 62:233–246. Citado na pág. 5
- Barndorff-Nielsen (1964)** O. Barndorff-Nielsen. On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 15:399–403. Citado na pág. 5
- Cooner et al. (2007)** F. Cooner, S. Banerjee, B. P. Carlin e D. Sinha. Flexible cure rate modeling under latent activation schemes. *Journal of the American Statistical Association*, 102:560–572. Citado na pág. 2, 6
- Cox e Snell (1968)** D. R. Cox e E. J Snell. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 30(2):248–275. Citado na pág. 80
- Crescenzo e Pellerey (2011)** A. Crescenzo e F. Pellerey. Stochastic comparisons of series and parallel systems with randomized independent components. *Operations Research Letters*, 39:380–384. Citado na pág. 5
- Dunn e Smyth (1996)** P. K. Dunn e G. Smyth. Randomized quantile residuals. *Journal of the Computational and Graphical Statistics*, 5:236–244. Citado na pág. 26
- Firth (1993)** D. Firth. Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Electronic Journal of Statistics*, 80:27–38. Citado na pág. 78, 81, 84

- Kosmidis e Firth (2010)** I. Kosmidis e D. Firth. A generic algorithm for reducing bias in parametric estimation. *Electronic Journal of Statistics*, 4:1097–1112. Citado na pág. 82
- Kuş (2007)** C. Kuş. A new lifetime distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51:4497–4509. Citado na pág. 5
- Kundu e Gupta (2014)** D. Kundu e A. K. Gupta. On bivariate weibull-geometric distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 123:19–29. Citado na pág. 31
- Marshall e Olkin (1997)** A. W. Marshall e I. Olkin. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. *Biometrika*, 84(3):641–652. Citado na pág. 5, 31
- Morais e Barreto-Souza (2011)** A. L. Morais e W. Barreto-Souza. A compound class of weibull and power series distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55:1410–1425. Citado na pág. 2, 4, 6, 7, 9, 11, 28, 29, 61, 85
- Nakagawa e Zhao (2012)** T. Nakagawa e X. Zhao. Optimization problems of a parallel system with a random number of units. *IEEE Transactions on Reliability*, 61:543–548. Citado na pág. 5
- Noack (1950)** A. Noack. A class of random variables with discrete distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, 21:127–132. Citado na pág. 7
- Sartori (2006)** N. Sartori. Bias prevention of maximum likelihood estimates for scalar skew normal and skew t distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136(12):4259–4275. Citado na pág. 81, 82
- Stoyan (2013)** D. Stoyan. Weibull, rrsb or extreme-value theorists? *Metrika*, 76:153–159. Citado na pág. 1
- Tomczak et al. (2007)** F. Tomczak, T. H. D. Sydenstricker e K. G. Satyanarayana. Studies on lignocellulosic fibers of brazil. part ii: Morphology and properties of brazilian coconut fibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38:1710–1721. Citado na pág. viii, 1, 2, 24, 69

**Weibull (1939)** W. Weibull. A statistical theory of the strength of materials. Em *Ingeniörsvetenskapsakademiens handlingar*. Generalstabens litografiska anstalts förlag. Citado na pág.

1

**Yakovlev et al. (1993)** A. Y. Yakovlev, B. Asselain, V. J. Bardou, A. Fourquet, T. Hoang, A. Rochefediere e A. D. Tsodikov. A simple stochastic model of tumor recurrence and its applications to data on premenopausal breast cancer. *Biometrie et Analyse de Dormees Spatio-Temporelles*, 12:66–82. Citado na pág. 2, 6