Analizando a
Redundância Ativa
em sistemas k-de-n:F
sob condições de dependência

IRAN MARTINS DO CARMO

*Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Doutor em Estatística*

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. VANDERLEI DA COSTA BUENO

São Paulo, janeiro de 2006

Resumo

Neste trabalho analisamos o problema da alocação ótima de um, ou vários, *sparcs* em um sistema $k - de - n : F$ de componentes dependentes utilizando a redundância ativa. Os tempos de vida dos *sparcs* são independentes entre si e independentes dos tempos de vida dos componentes do sistema. Consideramos a modelagem matemática de duas maneiras: primeiro caracterizamos a redundância ativa através de uma transformação no processo de contagem da falha do componente com uma representação semimartingal; segundo caracterizamos a redundância ativa através da transformação do compensador do mesmo processo de contagem. Os resultados são obtidos usando ordenação estocástica e conceitos da Teoria de Total Positividade.

Abstract

In this work we analyze the problem of optimal allocation of, either one, or several, spares in a k -out-of- $n:F$ system of dependent components through active redundancy. The spares lifetimes are independent and independent of the system's components lifetimes. We consider the mathematical formulation in two way: firstly we characterize active redundancy through a transformation of the semimartingale representation of the component failure counting process; second we characterize active redundancy through a transformation of the same process compensator. We get the results using stochastic order and concepts of Total Positivity Theory.

Sumário

Introdução	1
1 Redundância ativa dispondo de um único <i>spare</i>	4
1.1 Introdução	4
1.2 Modelagem matemática	6
1.2.1 Processo de falha dos componentes	6
1.2.2 Representação semimartingal do tempo de vida	9
1.2.3 Compensador do tempo de vida de um sistema	13
1.3 Sistema em série	17
1.4 Sistemas $k - de - n : F$	21
2 Redundância ativa dispondo de vários <i>sparcs</i>	25
2.1 Introdução	25
2.2 Modelagem matemática	26
2.3 Sistema em série	27
2.4 Sistema $k - de - n : F$	32
3 Redundância ativa através da transformação do compensador	36
3.1 Introdução	36
3.2 Transformação do compensador	38
3.3 Comparação entre redundância ativa e redundância <i>standby</i> minimal	44

3.4	Sistema $k - de - n : F$ e função RR_2	46
3.5	Exemplo construtivo onde $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2	51
3.6	Sistema $k - de - n : F$ e as medidas P_i e P_j	56
A	Apêndice	60
	Bibliografia	64

Introdução

Um dos objetivos da Teoria da Confiabilidade é otimizar a confiabilidade de um sistema que depende de seus componentes. Uma das maneiras de proceder com essa otimização é realizar operações de redundância entre o componente do sistema e um outro objeto que denominaremos *spare*. Existem dois tipos de redundância bem conhecidas na literatura, a *redundância ativa* e a *redundância standby*. A primeira representada pelo máximo entre os tempos de vida do sistema e do *spare*, e a segunda é dada pela convolução desses tempos de vida.

O problema é onde alocar o(s) *spare(s)* a fim de otimizar o tempo de vida do sistema. Este problema é muito importante na Teoria da Confiabilidade, veja por exemplo os trabalhos de Boland *et al* (1992), Singh e Misra (1994), Meng (1996), Prasad *et al* (1999), Mi (2004), Bueno (2005), entre outros.

Boland *et al* (1992) utiliza um único *spare* para realizar a operação de redundância. Ele analisa o problema para os dois tipos de redundância em sistemas k -de- n : G (sistemas que funcionam se pelo menos k , $k \leq n$, de seus n componentes funcionarem), de componentes estocasticamente independentes. Para redundância ativa ele utiliza a ordenação estocástica dos componentes e mostra que a alocação ótima é no componente estocasticamente mais fraco. Com a redundância *standby*, ele utiliza a ordenação da razão de verossimilhança, e dá condições suficientes sob

as quais, nos sistemas em série, a alocação ótima é no componente estocasticamente mais fraco, enquanto que nos sistemas em paralelo, é no componente estocasticamente mais forte.

Nas outras referências encontra-se solução para o problema sob diferentes hipóteses, mas todas consideram os componentes do sistema independentes entre si, exceto o trabalho de Bueno (2005a). Neste trabalho ele definiu um tipo particular de redundância *standby*, chamando-a de **redundância standby minimal**, que constitui-se em substituir o componente, quando este vir a falhar, por um outro, em condições idênticas às do que falhara, no instante imediatamente anterior a sua falha. Utiliza este conceito e apresenta condições sob as quais, existe um espaço de probabilidade, onde a alocação ótima é no componente mais fraco, para sistemas $k - de - n : F$ (sistemas que falham quando k , $1 \leq k \leq n$, ou mais de seus componentes falharem), com tempos de vida dependentes.

Nesta tese analisamos o problema de otimizar a confiabilidade do sistema através da alocação de um *spare* utilizando a redundância ativa. Consideramos inicialmente um único *spare* e depois o caso de vários *sparcs*, e admitimos nos dois casos que os componentes sejam estocasticamente dependentes. Neste último caso o tempo de vida do *spare* é idênticamente distribuído ao tempo de vida do componente onde se faz a redundância, e os *sparcs* tem tempos de vida independentes entre si e independente dos tempos de vida dos componentes.

Na formulação matemática do problema, utilizamos a Teoria de Processos Estocásticos e Martingais, tendo como principais bibliografias os textos de Aven e U. Jensen (1999), Bremaud (1982) e Dellacherie e Meyer (1980). As conclusões foram obtidas em termos de ordem estocástica, a qual é explorada extensivamente em Shaked e Shanthikumar (1994).

No Capítulo 1 consideramos a redundância ativa através da transformação do processo de contagem, dispondo de um único *spare*. Primeiro determinamos o resultado para sistemas em série, somente com a hipótese de ordenação estocástica dos componentes do sistema. Em seguida, com o conceito de função TP_2 , e informação após o nível crítico dos componentes, otimizamos a confiabilidade de sistemas $k - de - n : F$.

O Capítulo 2 segue os moldes do 1, mas agora os *sparcs* são i.i.d. (independente e identicamente distribuido) com os componentes onde se faz a redundância. Portanto, consideramos a redundância ativa utilizando vários *sparcs*. Nos sistemas em série, utilizamos a hipótese de ordenação ($P - q.c.$) dos compensadores dos componentes do sistema e nos sistemas $k - de - n : F$ supomos que $\exp[-A_i(t)]$ seja TP_2 , com informação após o nível crítico dos componentes.

No Capítulo 3 analisamos a redundância ativa considerando a transformação dos compensadores, dispondo de vários *sparcs*. Na primeira seção comparamos a confiabilidade dos sistemas utilizando a propriedade de funções reversas de ordem dois (RR_2) e o Teorema de Kwieciński e Szekli (1991). Em seguida obtivemos um exemplo construtivo em que $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2 , onde $A_i(t)$ é o compensador correspondente ao componente com tempo de vida S_i , $i = 1, \dots, n$. Na última Seção utilizamos as medidas de probabilidade P_i e P_j , determinadas pela derivada de Radon Nikodym, correspondentes à redundância ativa dos componentes S_i e S_j respectivamente.

Capítulo 1

Redundância ativa dispondo de um único *spare*

1.1 Introdução

Neste Capítulo consideramos o problema da alocação ótima de um *spare* para efetuar uma redundância ativa, em um componente, de um sistemas $k - de - n : F$. Admitimos que os tempos de vida dos componentes do sistema são dependentes, e o tempo de vida do *spare* é independente dos tempos de vida dos componentes.

Na formulação matemática do problema utilizamos a representação semimartingal para os processos de contagem dos componentes e do sistema, bem como do *spare*, com seus correspondentes processos intensidade de falha, relativo à informação da dinâmica dos componentes e do *spare* no tempo. A redundância ativa foi caracterizada a partir da transformação do processo de contagem do componente.

Trabalhamos inicialmente com os sistemas em série, com a hipótese de ordenação estocástica de seus componentes, e em seguida com os sistemas $k - de - n : F$, utilizando o conceito de função TP_2 e a informação após o nível crítico dos componentes. A conclusão foi obtida a partir da comparação das esperanças matemática dos com-

pensadores do sistema, para as n escolhas possíveis.

1.2 Modelagem matemática

1.2.1 Processo de falha dos componentes

Consideremos um sistema coerente ϕ com n componentes $C_1, C_2, \dots, C_n$ e o vetor aleatório $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_n)$, onde os S_i 's, $i = 1, \dots, n$, são variáveis aleatórias positivas, finitas, definidas em um mesmo espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, que representam os tempos de vida dos componentes. Assumimos que $P(S_i \neq S_j) = 1$, para todo $i \neq j, i, j$ em $E = \{1, 2, \dots, n\}$, isto é, os tempos de vida podem ser dependentes mas não admitimos falhas simultâneas. Consideremos também um componente C , cujo tempo de vida é indicado pela variável aleatória S , positiva, finita, definida em $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, e independente dos S_i 's, com $P(S_i \neq S) = 1$, para todo i em $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

A evolução dos componentes no tempo define um processo pontual marcado, através dos tempos de falha e das correspondentes marcas.

Denotaremos por

$$S_{(1)} < S_{(2)} < \dots < S_{(n)}$$

a ordenação dos tempos de vida $S_1, S_2, \dots, S_n$, conforme suas ocorrências no tempo, e por

$$V_i = \{j : S_{(i)} = S_j\}$$

as correspondentes marcas.

Convencionamos que

$$S_{(n+1)} = S_{(n+2)} = \dots = \infty$$

e

$$V_{n+1} = V_{n+2} = \dots = \emptyset,$$

e temos a definição:

Definição 1.1:

O processo de falha dos componentes é o processo pontual marcado

$$(S_{(m)}, V_m)_{m \geq 1}.$$

A formulação matemática das observações é dada pela família de sub σ -álgebras de $\mathfrak{F}$, denotada por

$$\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0},$$

onde

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{1_{\{S > s\}}, 1_{\{S_{(i)} > s, X_i = j\}}, 0 < s \leq t, i, j \in E\}, \quad (1.1)$$

com $1_{\{A\}}$ representando a função indicadora do conjunto A .

A σ -álgebra $\mathfrak{F}_t$ satisfaz as condições usuais de Dellacherie:

- são contínuas à direita, isto é,

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{s < t} \mathfrak{F}_s;$$

- completas (contém todos conjuntos de medida nula).

Intuitivamente, a cada instante t o observador sabe se o(s) evento(s) $\{S_{(i)} \leq t, X_i = j\}$, $\{S \leq t\}$ ocorreu(ram) ou não, e se ele(s) ocorreu(ram), sabe exatamente o(s) valor(es) de $S_{(i)}$, (S) e a marca X_i .

Seja τ , uma variável aleatória positiva, finita, definida em $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, representando o tempo de vida do sistema ϕ . O tempo de vida τ é completamente determinado pelos tempos de vida de seus componentes através da estrutura série-paralelo

$$\tau = \tau(\mathbf{S}) = \min_{1 \leq j \leq r} \max_{i \in K_j} S_i,$$

(Barlow e Proschan (1981)), onde K_j , $1 \leq j \leq r$, são os conjuntos de cortes minimais de ϕ , isto é, conjuntos com quantidade mínima de componentes para os quais a falha de todos seus componentes acarreta a falha do sistema.

De maneira equivalente, podemos representar o sistema coerente através de uma função binária de variáveis binárias $\Phi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, denominada **função estrutura do sistema**, na forma

$$\Phi(X(t)) = \min_{1 \leq j \leq r} \max_{i \in K_j} X_i(t),$$

onde K_j , $1 \leq j \leq r$, são os conjuntos de cortes minimais, $X_t(i) = 1_{\{S_i > t\}}$, $1 \leq i \leq n$, são processos contínuos à direita, com limite à esquerda, indicando o funcionamento do componente i no instante t . O tempo de vida do sistema é

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \Phi_t = 0\}.$$

Sejam

$$N(t) = 1_{\{\tau \leq t\}},$$

e

$$N_j(t) = 1_{\{S_j \leq t\}}, \quad j \in E,$$

os processos pontuais das falhas do sistema e dos componentes respectivamente.

Note que

$$1_{\{S_j \leq t\}} = \sum_{i \geq 1} 1_{\{S_{(i)} \leq t, X_i = j\}},$$

e que $N(t)$ e $N_j(t)$ são $\mathbb{F}$ -submartingais.

1.2.2 Representação semimartingal do tempo de vida

No que segue usaremos os conceitos:

- uma variável aleatória τ , com valores em $R_+ \cup \{\infty\}$ é chamada um **$\mathbb{F}$ -tempo de parada** se, e somente se, $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ para todo $t \geq 0$;
- um $\mathbb{F}$ -tempo de parada τ é chamado **previsível** se existe uma sequência crescente $(\tau_n)_{n \geq 0}$, de $\mathbb{F}$ -tempos de parada, $\tau_n < \tau$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$;
- um $\mathbb{F}$ -tempo de parada τ é **totalmente inacessível** se $P(\tau = \sigma < \infty) = 0$ para todo $\mathbb{F}$ -tempo de parada previsível σ .

Para um estudo de processo estocástico, aplicado à teoria de confiabilidade, recomendamos o livro recente de Aven e Jensen (1999).

Por simplicidade de notação, as relações $\subset, =, \leq, < e \neq$ entre conjuntos mensuráveis e variáveis aleatórias, respectivamente, serão consideradas válidas com probabilidade um, ou seja, suprimiremos o termo $P - q.c.$, desde que esteja claro no contexto.

O processo

$$1_{\{S_j \leq t\}} = \sum_{i \geq 1} 1_{\{S_{(i)} \leq t, X_i = j\}},$$

$j \in E$ é um $\mathbb{F}$ -submartingal e pela decomposição de Doob e Meyer (Teorema A.1), temos

$$1_{\{S_j \leq t\}} = A_j(t) + M_j(t), \tag{1.2}$$

onde $A_j(t)$ é um $\mathbb{F}$ -processo compensador, e $M_j(t)$ um $\mathbb{F}$ -martingal. O compensador é um processo crescente, previsível, contínuo á direita, nulo na origem, isto é, $A_j(0) = 0$, e $A_j(t)$ é $P - q.c.$ único. O martingal $M_j(t)$ é uniformemente integrável (U.I.) e tem média zero.

Assumiremos que S_j , $1 \leq j \leq n$ e S são $\mathbb{F}$ -tempos de parada totalmente inacessíveis. Segue do Lema A.3 que $1_{\{S_j \leq t\}}$ admite a representação semimartingal

$$1_{\{S_j \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{S_j > s\}} a_j(s) ds + M_j(t), \quad (1.3)$$

onde $a_j = (a_j(t))_{t \geq 0}$ é um processo estocástico progressivamente mensurável, com

$$E\left[\int_0^t |a_j(s)| ds\right] < \infty$$

para todo $t \geq 0$ e $M_j = (M_j(t))_{t \geq 0}$ é um $\mathbb{F}$ -martingal U.I. de média zero. a_j é chamado o $\mathbb{F}$ -processo intensidade de $1_{\{S_j \leq t\}}$ e $A_j = (A_j(t))_{t \geq 0}$, com

$$A_j(t) = \int_0^t 1_{\{S_j > s\}} a_j(s) ds,$$

seu $\mathbb{F}$ -processo compensador que é crescente, previsível, contínuo e nulo na origem.

Analogamente, para o processo de contagem $1_{\{S \leq t\}}$, temos

$$1_{\{S \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{S > s\}} b(s) ds + M(t) \quad (1.4)$$

onde $b = (b(t))_{t \geq 0}$ é um processo estocástico progressivamente mensurável com

$$E\left[\int_0^t |b(s)| ds\right] < \infty$$

para todo $t \geq 0$ e $M = (M(t))_{t \geq 0}$ é um $\mathbb{F}$ -martingal, U.I., de média zero. $B = (B(t))_{t \geq 0}$ com

$$B(t) = \int_0^t 1_{\{S > s\}} b(s) ds,$$

é seu $\mathbb{F}$ -processo compensador e b seu $\mathbb{F}$ -processo intensidade.

Definição 1.2: (Redundância Ativa)

Considere X e Y variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, onde X representa o tempo de vida de um objeto (componente ou sistema) e Y o tempo de vida do *spare*.

A **redundância ativa** entre o objeto e o *spare* é a operação que produz o tempo de vida R , dado por

$$R = \max\{X, Y\} = X \vee Y.$$

Intuitivamente a redundância ativa do componente (ou sistema) equivale a colocar o *spare* em paralelo com este componente (ou sistema).

Seja S_j^a o tempo de vida correspondendo à redundância ativa entre os componentes C_j , com tempo de vida S_j e o *spare* com tempo de vida S ; o processo pontual associado é representado por $1_{\{S_j^a \leq t\}}$. Considerando as representações semimartingais de $1_{\{S_j \leq t\}}$ e $1_{\{S \leq t\}}$, dadas em 1.3 e 1.4 respectivamente, segue o

Teorema 1.3:

Sejam S_j e S $\mathbb{F}$ -tempos de parada totalmente inacessíveis, então $1_{\{S_j^a \leq t\}}$ é um $\mathbb{F}$ -semimartingal regular com representação

$$1_{\{S_j^a \leq t\}} = \int_0^t [1_{\{S \leq s\}} a_j(s) + 1_{\{S_j \leq s\}} b(s)] 1_{\{S_j \vee S > s\}} ds + R(t).$$

Prova

Como

$$1_{\{S_j^a \leq t\}} = 1_{\{S_j \vee S \leq t\}} = 1_{\{S_j \leq t\}} \cdot 1_{\{S \leq t\}},$$

aplicando a Proposição A.2

$$\begin{aligned} 1_{\{S_j \leq t\}} \cdot 1_{\{S \leq t\}} &= 1_{\{S_j \leq 0\}} \cdot 1_{\{S \leq 0\}} + \int_0^t 1_{\{S \leq s^-\}} d[1_{\{S_j \leq s\}}] \\ &\quad + \int_0^t 1_{\{S_j \leq s^-\}} d[1_{\{S \leq s\}}] + \sum_{0 < s \leq t} \Delta 1_{\{S_j \leq t\}} \Delta 1_{\{S \leq t\}}. \end{aligned}$$

Desde que $P(S_j = S) = 0$ temos $\sum_{0 < s \leq t} \Delta 1_{\{S_j \leq t\}} \Delta 1_{\{S \leq t\}} = 0$.

Assim

$$\begin{aligned}
1_{\{S_j^a \leq t\}} &= \int_0^t 1_{\{S < s\}} d[1_{\{S_j < s\}}] + \int_0^t 1_{\{S_j \leq s\}} d[1_{\{S \leq s\}}] \\
&= \int_S^t d[1_{\{S_j \leq s\}}] + \int_{S_j}^t d[1_{\{S \leq s\}}] \\
&= 1_{\{S_j \leq t\}} - 1_{\{S_j \leq t \wedge S\}} + 1_{\{S \leq t\}} - 1_{\{S \leq t \wedge S_j\}} \\
&= \int_0^t 1_{\{S_j > s\}} a_j(s) ds + M_j(t) - \int_0^t 1_{\{S > s\}} \cdot 1_{\{S_j > s\}} a_j(s) ds - M_j(t \wedge S) \\
&\quad + \int_0^t 1_{\{S > s\}} b(s) ds + M_S(t) - \int_0^t 1_{\{S_j > s\}} \cdot 1_{\{S > s\}} b(s) ds - M_S(t \wedge S_j) \\
&= \int_0^t [1_{\{S \leq s\}} a_j(s) + 1_{\{S_j \leq s\}} b(s)] 1_{\{S_j \vee S > s\}} ds + R(t)
\end{aligned}$$

■

Portanto $a_j^a = (a_j^a(t))_{t \geq 0}$ com

$$a_j^a(t) = [1_{\{S \leq s\}} \cdot a_j(s) + 1_{\{S_j \leq s\}} \cdot b(s)] \cdot 1_{\{S_j^a > s\}}$$

é a $\mathbb{F}$ -intensidade de $1_{\{S_j^a \leq t\}}$ e $A_j^a = (A_j^a(t))_{t \geq 0}$ com $A_j^a(t) = \int_0^t a_j^a(s) ds$, seu $\mathbb{F}$ -compensador, enquanto que

$$R(t) = M_j(t) - M_j(t \wedge S) + M_S(t) - M_S(t \wedge S_j)$$

é um $\mathbb{F}$ -martingal, U.I., de média zero.

1.2.3 Compensador do tempo de vida de um sistema

O processo pontual da falha do sistema ϕ , $1_{\{\tau \leq t\}}$, é um $\mathbb{F}$ -submartingal, e pela decomposição de Doob e Meyer (Teorema A.1):

$$1_{\{\tau \leq t\}} = A(t) + M(t), \quad (1.5)$$

onde $A(t)$ e $M(t)$ são os $\mathbb{F}$ -processos compensador e martingal, respectivamente, de $1_{\{\tau \leq t\}}$.

Uma pergunta natural é qual a relação entre os tempos de vida dos componentes e o tempo de vida do sistema, do ponto de vista dos correspondentes processos de falha? Qual a contribuição do risco de falha dos componentes para predizer o risco de falha do sistema? Arjas (1981) responde essa questão, determinando uma relação entre os $\mathbb{F}$ -processos compensadores dos componentes e o $\mathbb{F}$ -processo compensador do sistema utilizando o conceito de nível crítico.

Um componente i , é crítico para o sistema (Barlow e Proschan (1981)) no instante t se

$$\Phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \Phi(0_i, \mathbf{X}(t)) = 1,$$

onde $(1_i, \mathbf{x})$ representa o vetor $\mathbf{x}$ com a i -ésima componente fixada e igual a 1, e $(0_i, \mathbf{x})$ representa o vetor $\mathbf{x}$ com a i -ésima componente fixada e igual a 0.

No que segue utilizaremos o conceito de nível crítico dos componentes:

Definição 1.4: (Nível crítico)

O nível crítico do componente i , $1 \leq i \leq n$, é definido por

$$Y_i = \inf\{t \geq 0 : \Phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \Phi(0_i, \mathbf{X}(t)) = 1\}$$

onde

$$(\cdot_i, \mathbf{X}(t)) = (X_1(t), \dots, X_{i-1}(t), \cdot_i, X_{i+1}(t), \dots, X_n(t)).$$

Claramente o componente i contribui para a falha do sistema após seu nível crítico, Y_i , isto é, o primeiro instante a partir do qual sua falha acarreta a falha do sistema.

Observe que o nível crítico de qualquer dos componentes de um sistema em série é $Y_i = 0$, enquanto que o nível crítico de um componente colocado em paralelo com um subsistema, formando um sistema, é o tempo de vida do subsistema.

Teorema 1.5: (Arjas (1981))

Sob a notação acima, o $\mathbb{F}$ -processo compensador do processo $N(t) = 1_{\{\tau \leq t\}}$ é

$$A(t) = \sum_{j=1}^n [A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y_i)]^+,$$

onde $A_i(t) = \int_0^t 1_{\{S_i > s\}} a_s(i) ds$ e $[a]^+ = \max\{a, 0\}$.

Definição 1.6: (Sistema $k - de - n : F$)

Um sistema com n componentes é denominado $k - de - n : F$, $1 \leq k \leq n$, se sua falha ocorre no instante da k -ésima falha dos componentes.

O tempo de vida de um sistema $k - de - n : F$ é a k -ésima estatística de ordem ($\tau = S_{(k)}$) e os níveis críticos de seus componentes são iguais a $(k - 1)$ -ésima falha. Portanto $Y_i = S_{(k-1)}$, $i \in E$. Segue como um corolário do Teorema 1.5:

Corolário 1.7:

Para um sistema $k - de - n : F$, com tempo de vida τ , o $\mathbb{F}$ -processo compensador de $I_{\{\tau \leq t\}}$ é

$$A(t) = \sum_{j=1}^n [A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y)]^+,$$

onde os $A_j(t)$, $j \in E$, são os $\mathbb{F}$ -processos compensadores dos processos $1_{\{S_j \leq t\}}$ e Y o nível crítico dos componentes.

Como

$$\{\tau > t\} = \{\cap_{1 \leq j \leq r} \cup_{i \in K_j} \{S_i > t\}\},$$

e os S_i 's são $\mathbb{F}$ -tempos de parada totalmente inacessíveis, τ é um $\mathbb{F}$ -tempo de parada totalmente inacessível, e segue do Teorema A.1 e Lema A.3 que o processo $N(t) = 1_{\{\tau \leq t\}}$ tem a seguinte representação semimartingal:

$$N(t) = \int_0^t 1_{\tau > s} a(s) ds + M(t), \quad (1.6)$$

onde $a = (a(t))_{t \geq 0}$ é um processo estocástico progressivamente mensurável, com

$$E\left[\int_0^t |a(s)| ds\right] < \infty$$

para todo $t \geq 0$ e $M = (M(t))_{t \geq 0}$ é um $\mathbb{F}$ -martingal, U.I., de média nula. a é chamado o $\mathbb{F}$ -processo intensidade de $N(t)$ e $A = (A(t))_{t \geq 0}$, com

$$A(t) = \int_0^t 1_{\tau > s} a(s) ds,$$

seu $\mathbb{F}$ -processo compensador, o qual é único, crescente, contínuo, previsível com $A(0) = 0$.

Observação 1.8:

i) Como a confiabilidade do sistema no instante t é $P(\tau > t) = 1 - P(\tau \leq t)$, e

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t) &= E[N(t)] \\ &= E[A(t)] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^n [A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y_i)]^+\right] \\ &= \sum_{j=1}^n E[[A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y_i)]^+] \end{aligned}$$

podemos aumentar a confiabilidade do sistema no instante t , $P(\tau > t)$, minimizando a quantidade

$$E[A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y_i)]^+$$

com $i \in E$.

ii) No caso da escolha de um componente para realizar a redundância ativa, qual dos C_i 's escolher? Isto é, qual dos

$$E[A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y_i)]^+$$

minimizar?

1.3 Sistema em série

Desejamos otimizar a confiabilidade de sistemas $k - de - n : F$ mediante uma redundância ativa sobre um dos componentes do sistema. Denotaremos o tempo de vida de um sistema $k - de - n : F$ por $\tau_{k:F}(\mathbf{S}) = S_{(k)}$, onde $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$ é o vetor aleatório dos tempos de vida dos componentes e indicaremos por

$$\tau_{k:F}^i = \tau_{k:F}(S_1^*, \dots, S_{i-1}^*, S_i^a, S_{i+1}^*, \dots, S_n^*),$$

o tempo de vida do sistema com $S_i^a = S_i \vee S$ que é o tempo de vida correspondente à redundância no componente i .

Contamos a falha desse sistema através do processo pontual

$$N^i(t) = 1_{\{\tau_{k:F}^i \leq t\}},$$

com o correspondente $\mathbb{F}$ -processo compensador, $A^i(t)$, $1 \leq i \leq n$.

Provaremos inicialmente o resultado para sistemas em série, isto é, sistemas $1 - de - n : F$.

Teorema 1.9:

Sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$, $\mathbb{F}$ -tempos de parada totalmente inacessíveis, representando os tempos de vida dos componentes de um sistema em série; e S_i^a , $i \in E$, os correspondentes tempos de vida resultantes de uma redundância ativa no componente i , onde o *spare* tem tempo de vida S , totalmente inacessível e independente dos S_i 's. Se

$$S_1 \leq^{st} S_2 \leq^{st} \dots \leq^{st} S_n,$$

então

$$\tau_{1:F}^1 \geq^{st} \tau_{1:F}^2 \geq^{st} \dots \geq^{st} \tau_{1:F}^n.$$

Prova

Em um sistema em série o nível crítico de todos os componentes é 0. Logo, pelo Corolário 1.7, seu $\mathbb{F}$ -processo compensador é

$$A(t) = A(t \wedge \tau_{1:F}) = \sum_{i=1}^n A_i(t \wedge \tau_{1:F})$$

onde, de 1.3,

$$A_i(t) = \int_0^t 1_{\{S_i > s\}} a_i(s) ds.$$

Assim, o $\mathbb{F}$ -processo compensador do processo $N^i(t)$ será

$$A^i(t) = A_i^a(t \wedge \tau_{1:n}^i) + \sum_{m=1, m \neq i}^n A_m(t \wedge \tau_{1:n}^i),$$

com $i \in E$.

Basta provar que $P(\tau_{1:F}^i \leq t) \leq P(\tau_{1:F}^j \leq t)$, isto é, que

$$E[A^i(t)] \leq E[A^j(t)],$$

para $i \leq j$, $i, j \in E$.

Sem perda de generalidade, é suficiente provar para $n = 2$. Se S é o tempo de vida do *spare* com o $\mathbb{F}$ -processo compensador

$$B(t) = \int_0^t 1_{\{S > s\}} b(s) ds,$$

segue do Teorema 1.3 que $A^1(t)$, o $\mathbb{F}$ -processo compensador de $1_{\{\tau_{1:F}^1 \leq t\}}$, com $\tau_{1:F}^1 =$

$\tau_{1:F}(S_1^a, S_2)$, é

$$\begin{aligned}
 A^1(t) &= \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee S) \wedge S_2 > s\}} 1_{\{S_1 \leq s\}} 1_{\{S > s\}} b(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee S) \wedge S_2 > s\}} 1_{\{S \leq s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee S) \wedge S_2 > s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds \\
 &= \int_0^t 1_{\{S_2 > s\}} 1_{\{S_1 \leq s\}} 1_{\{S > s\}} b(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S_2 > s\}} 1_{\{S \leq s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee S) > s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, o $\mathbb{F}$ -processo compensador $A^2(t)$ de $1_{\{\tau_{1:F}^2 \leq t\}}$, com $\tau_{1:F}^2 = \tau_{1:F}(S_1, S_2^a)$, é

$$\begin{aligned}
 A^2(t) &= \int_0^t 1_{\{S_2 \vee S > s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S_1 > s\}} 1_{\{S_2 \leq s\}} 1_{\{S > s\}} b(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S_1 > s\}} 1_{\{S \leq s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds.
 \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
 A^1(t) - A^2(t) &= \int_0^t 1_{\{S > s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds \\
 &\quad - \int_0^t 1_{\{S > s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S > s\}} [1_{\{S_2 > s\}} - 1_{\{S_1 > s\}}] b(s) ds \\
 &= \int_0^t 1_{\{S > s\}} [1_{\{S_2 > s\}} (a_2(s) + b(s)) - 1_{\{S_1 > s\}} (a_1(s) + b(s))] ds \\
 &= A_2(t \wedge S \wedge S_2) + B(t \wedge S \wedge S_2) - A_1(t \wedge S \wedge S_1) - B(t \wedge S \wedge S_1).
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
E[A_2(t \wedge S \wedge S_2) + B(t \wedge S \wedge S_2)] &= P(S_2 \leq t \wedge S \wedge S_2) + P(S \leq t \wedge S \wedge S_2) \\
&= 2P(t \wedge S \wedge S_2 \geq S \wedge S_2) \\
&\quad - P(S \wedge S_2 < t \wedge S \wedge S_2 \leq S \vee S_2) \\
&= 2P(S \wedge S_2 \leq t) - P(t \wedge S \wedge S_2 \geq S \wedge S_2) \\
&= 2P(S \wedge S_2 \leq t) - P(S \wedge S_2 \leq t) \\
&= P(S \wedge S_2 \leq t) \\
&\leq P(S \wedge S_1 \leq t) \\
&= P(S_1 \leq t \wedge S \wedge S_1) + P(S \leq t \wedge S \wedge S_1) \\
&= E[A_1(t \wedge S \wedge S_1) + B(t \wedge S \wedge S_1)].
\end{aligned}$$

Portanto

$$E[A^1(t)] \leq E[A^2(t)],$$

que completa a prova. ■

Assim, em sistemas em série, concluímos que para otimizar a confiabilidade do sistema deve-se realizar a redundância no componente "mais fraco".

1.4 Sistemas $k - de - n : F$

Trataremos agora com os sistemas $k - de - n : F$, e utilizaremos o resultado de Bueno (2005) que propõe analisar o tempo de vida do sistema após o nível crítico de seus componentes, trabalhando com a família de σ -álgebras $(\mathfrak{S}_{Y_i+t})_{t \geq 0}$, onde

$$\mathfrak{S}_{Y_i+t} = \{A \in \mathfrak{S}_\infty : A \cap \{Y_i + t \leq s\} \in \mathfrak{S}_s, \quad s \geq 0\},$$

e os tempos de vida

$$S_i^* = ((S_i - Y_i)^+ | \mathfrak{S}_{Y_i}), \quad (1.7)$$

$i \in E$, com o processo de contagem correspondente

$$1_{\{S_i^* \leq t\}} = E[N_i(Y_i + t) - N_i(Y_i) | \mathfrak{S}_{Y_i}] = E[1_{\{Y_i < S_i \leq Y_i + t\}} | \mathfrak{S}_{Y_i}].$$

Segue que

$$C_i(t) = E[A_i(Y_i + t) - A_i(Y_i) | \mathfrak{S}_{Y_i}]$$

é o $\mathfrak{S}_{Y_i+t}$ -processo compensador de $1_{\{S_i^* \leq t\}}$. Neste contexto obtém a representação de um sistema coerente como uma estrutura em série (Teorema A.5).

Para obter o próximo teorema, utilizaremos o Teorema A.5 e a definição de funções TP_2 , Totalmente Positiva de Ordem 2 (*Total Positivity of Order 2*), da Teoria de Positividade Total (Karlin(1968)).

Definição 1.10: (Função TP_2)

Uma função real, bivariada, positiva $K(x, y)$, definida para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, é (TP_2) se, e somente se,

$$K(x_1, y_2)K(x_2, y_1) \leq K(x_1, y_1)K(x_2, y_2)$$

para todo $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$, $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$.

Teorema 1.11:

Sejam $S_1, S_2, \dots, S_n$ $\mathbb{F}$ -tempos de parada totalmente inacessíveis, representando os tempos de vida de n componentes de um sistema $k - de - n : F$; e S_i^a , $i \in E$, os correspondentes tempos de vida resultantes de uma redundância ativa onde o *spare* tem tempo de vida S , totalmente inacessível e independente dos S_i 's. Considere S_i^* 's, $i \in E$, como em 1.7. Sob $\mathfrak{S}_{Y+t}$, se $K(i, t) = \exp[-A_i(t)]$, com $t \in [0, \infty)$, é TP_2 , então

$$\tau_{k:F}^1 \geq^{st} \tau_{k:F}^2 \geq^{st} \dots \geq^{st} \tau_{k:F}^n.$$

Prova

Do Corolário 1.7, o $\mathbb{F}$ -processo compensador do sistema $k - de - n : F$ é

$$A(t) = A(t \wedge \tau_{k:F}) = \sum_{i=1}^n [A_i(t \wedge \tau_{k:F}) - A_i(Y)]^+,$$

onde $Y = S_{(k-1)}$.

Então pelos Teoremas A.5 e 1.9, basta provar que, para todo $1 \leq i, j \leq n$, com $i < j$,

$$\begin{aligned} S_i^* &= ((S_i - Y)^+ | \mathfrak{S}_Y) \\ &\leq^{st} ((S_j - Y)^+ | \mathfrak{S}_Y) \\ &= S_j^*. \end{aligned}$$

Da hipótese de que $\exp[-A_j(t)]$ é TP_2 , temos

$$\exp[-A_i(Y)].\exp[-A_j(t+Y)] \geq \exp[-A_i(t+Y)].\exp[-A_j(Y)]$$

e portanto

$$A_j(t+Y) - A_j(Y) \leq A_i(t+Y) - A_i(Y).$$

Assim

$$\begin{aligned}
 P(S_j^* \leq t) &= E[C_j(t)] \\
 &= E[A_j(t + Y) - A_j(Y)] \\
 &\leq E[A_i(t + Y) - A_i(Y)] \\
 &= E[C_i(t)] \\
 &= P(S_i^* \leq t),
 \end{aligned}$$

concluindo a prova. ■

Se $\exp[-A_i(t)]$ é TP_2 temos que, para $s \leq t$,

$$A_j(t) - A_j(s) \leq A_i(t) - A_i(s).$$

Fazendo $s = 0$ e lembrando que $A_i(0) = 0$, para todo i , temos $A_i(t) \geq A_j(t)$, $P - q.c.$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, com $i < j$. Logo,

$$\mathbb{E}A_i(t) \geq \mathbb{E}A_j(t),$$

e temos

$$P(S_i \leq t) \geq P(S_j \leq t),$$

ou seja

$$S_i \leq^{st} S_j,$$

e interpretamos o componente i , como sendo "mais fraco" (em termos de desigualdade estocástica) do que o componente j .

A ordenação $A_i \leq A_j$ acima é a Ordem do Risco Acumulado, que implica na Ordem Estocástica Multivariada, enquanto que a Ordem da Razão de Verossimelhança

Multivariada implica na Ordem do Risco Acumulado. Para mais detalhes veja por exemplo Shaked e Shanthikumar (1994).

Observação 1.12:

i) Sob o Teorema 1.11, entendemos que, após o nível crítico, otimizaremos a confiabilidade do sistema através da redundância ativa, alocando o componente redundante ao componente mais fraco do sistema $k - de - n : F$.

ii) Desde que, em nenhum momento, não mencionamos qualquer relação entre os componentes do sistema, nossos resultados são válidos para componentes estocasticamente dependentes.

iii) O Teorema 1.9, generaliza o Teorema de Boland(1992), A.5, para o caso de sistemas em série.

Capítulo 2

Redundância ativa dispondo de vários *sparcs*

2.1 Introdução

Neste Capítulo a modelagem matemática é semelhante à do Capítulo 1 e a redundância ativa foi caracterizada a partir da transformação do processo de contagem do componente.

A diferença essencial entre este Capítulo e o anterior, é que a redundância é efetuada considerando o tempo de vida do *sparc* independente e identicamente distribuído com o correspondente tempo de vida do componente onde se faz a redundância ativa e independente dos demais componentes. Portanto, dispomos de vários *sparcs*, e os componentes do sistema podem ser dependentes.

Trabalhamos com os sistemas em série utilizando a hipótese de ordenação ($P - q.c.$) entre os compensadores dos componentes do sistema, e nos sistemas $k - de - n : F$ utilizamos o conceito de função TP_2 com informação após o nível crítico dos componentes. A conclusão foi obtida a partir da comparação das esperanças matemática dos compensadores do sistema, para as n escolhas possíveis.

2.2 Modelagem matemática

Como na Seção 1.2, considere o vetor $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ dos tempos de vida de n componentes os quais são variáveis aleatórias positivas e finitas, definidas em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, com $P(S_i \neq S_j) = 1$, para todo $i \neq j, i, j$ em $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Sejam $T_j, 1 \leq j \leq n$, os tempos de vida de n *sparcs*, que são variáveis aleatórias positivas e finitas, definidas no mesmo espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, independentes e identicamente distribuídos aos S_j , com $P(S_i \neq T_j) = 1$, para todo $i \neq j, i, j$ em E .

Neste contexto, a formulação matemática de nossas observações é dado pela família de sub σ -álgebras de $\mathfrak{F}$, denotada por $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, onde

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{1_{\{T_j > s\}}, 1_{\{S_{(i)} > s, X_i = j\}}, 0 < s \leq t, 1 \leq i \leq n, j \in E\}. \quad (2.1)$$

Assumiremos que S_i , e $T_j, i, j \in E$, são $\mathbb{F}$ -tempos de parada totalmente inacessíveis.

Como na Seção 1.3, $1_{\{S_j \leq t\}}$ tem a representação semimartingal

$$1_{\{S_j \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{S_j > s\}} a_j(s) ds + M_j(t). \quad (2.2)$$

Para o processo de contagem $1_{\{T_j \leq t\}}, 1 \leq j \leq n$, correspondendo aos tempos de vida dos *sparcs*, temos

$$1_{\{T_j \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{T_j > s\}} b_j(s) ds + M_j^s(t), \quad (2.3)$$

onde $(b_j(t))_{t \geq 0}$ é um processo estocástico progressivamente mensurável com

$$E\left[\int_0^t |b_j(s)| ds\right] < \infty,$$

para todo $t \geq 0$ e $M_j^s(t)$ é um $\mathbb{F}$ -martingal, U.I., de média zero, com

$$B_j(t) = \int_0^t 1_{\{T_j > s\}} b_j(s) ds$$

o $\mathbb{F}$ -processo compensador correspondente.

O processo de contagem $1_{\{S_j^a \leq t\}}$ correspondente à redundância ativa do componente com tempo de vida S_j e do *spare* com tempo de vida T_j , isto é $S_j^a = S_j \vee T_j$, tem representação semimartingal dada pelo Teorema 1.3

$$\begin{aligned} 1_{\{S_j^a \leq t\}} &= 1_{\{S_j \leq t\}} 1_{\{T_j \leq t\}} \\ &= \int_0^t [1_{\{T_j \leq s\}} a_j(s) + 1_{\{S_j \leq s\}} b_j(s)] 1_{\{S_j \vee T_j > s\}} ds + R(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $(R(t))_{t \geq 0}$ é um $\mathbb{F}$ -martingale, U.I., de média zero.

No que segue assumiremos as seguintes hipóteses sobre os tempos de vida S_i , $1 \leq i \leq n$ e sobre os tempos de vida dos *sparcs* T_i , $1 \leq i \leq n$:

Hipótese A:

A0) S_i 's e T_i 's, $1 \leq i \leq n$ são totalmente inacessíveis;

A1) T_i e T_j , $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, são independentes;

A2) T_i e S_i são identicamente distribuídos, $1 \leq i \leq n$;

A3) T_i é independente de S_j , $1 \leq i, j \leq n$.

2.3 Sistema em série

Como no Capítulo 1, provaremos primeiro o resultado para sistemas em série, e em seguida para sistemas $k - de - n : F$.

Teorema 2.1:

Em um sistema em série, sejam S_i e T_i , $1 \leq i \leq n$, os tempos de vida dos componentes e dos *sparcs* respectivamente, satisfazendo a Hipótese A. Se

$$A_1(t) \geq A_2(t) \geq \dots \geq A_n(t),$$

$P - q.c.$, então

$$\tau_{1:F}^1 \leq^{st} \tau_{1:F}^2 \leq^{st} \dots \leq^{st} \tau_{1:F}^n.$$

Prova

Como o sistemas é em série, seu $\mathbb{F}$ -processo compensador é

$$A(t) = A(t \wedge \tau_{1:F}) = \sum_{i=1}^n A_i(t \wedge \tau_{1:F})$$

com

$$A_i(t) = \int_0^t 1_{\{S_i > s\}} a_i(s) ds.$$

Devemos provar que $E[A^1(t)] \geq E[A^2(t)]$.

Seja T_i o tempo de vida do *sparc* com o $\mathbb{F}$ -processo compensador

$$B_i(t) = \int_0^t 1_{\{T_i > s\}} b_i(s) ds.$$

Então, da equação 2.4, o $\mathbb{F}$ -processo compensador $A^1(t)$ de $1_{\{\tau_{1:F}^1 \leq t\}}$, com $\tau_{1:F}^1 = \tau_{1:F}(S_1^a, S_2)$, é

$$\begin{aligned}
 A^1(t) &= \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee T_1) \wedge S_2 > s\}} 1_{\{S_1 \leq s\}} 1_{\{T_1 > s\}} b_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee T_1) \wedge S_2 > s\}} 1_{\{T_1 \leq s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee T_1) \wedge S_2 > s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds \\
 &= \int_0^t 1_{\{S_2 > s\}} 1_{\{S_1 \leq s\}} 1_{\{T_1 > s\}} b_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S_2 > s\}} 1_{\{T_1 \leq s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{(S_1 \vee T_1) > s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds \\
 &= A_2(t \wedge (T_1 \vee S_1) \wedge S_2) + B_1(t \wedge T_1 \wedge S_2) \\
 &\quad - B_1(S_1) + A_1(t \wedge S_1 \wedge S_2) - A_1(T_1). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Analogamente $A^2(t)$, o $\mathbb{F}$ -processo compensador de $1_{\{\tau_{1:F}^2 \leq t\}}$, com $\tau_{1:F}^2 = \tau_{1:F}(S_1, S_2 \vee T_2)$ é

$$\begin{aligned}
 A^2(t) &= \int_0^t 1_{\{S_2 \vee T_2 > s\}} 1_{\{S_1 > s\}} a_1(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S_1 > s\}} 1_{\{S_2 \leq s\}} 1_{\{T_2 > s\}} b_2(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t 1_{\{S_1 > s\}} 1_{\{T_2 \leq s\}} 1_{\{S_2 > s\}} a_2(s) ds \\
 &= [A_1(t \wedge (T_2 \vee S_2) \wedge S_1) + B_2(t \wedge T_2 \wedge S_1) \\
 &\quad - B_2(S_2) + A_2(t \wedge S_1 \wedge S_2) - A_2(T_2)]. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Como $E[A_1(T_1)] + E[B_1(S_1)] = 1$ e $E[A_2(T_2)] + E[B_2(S_2)] = 1$, é suficiente provar que

$$E[A_2(t \wedge (T_1 \vee S_1) \wedge S_2)] - E[A_2(t \wedge S_1 \wedge S_2)] + B_1(t \wedge T_1 \wedge S_2)$$

$$\geq E[A_1(t \wedge (T_2 \vee S_2) \wedge S_1)] - E[A_1(t \wedge S_1 \wedge S_2)] + B_2(t \wedge T_2 \wedge S_1).$$

Mas

$$\begin{aligned} & E[A_2(t \wedge (T_1 \vee S_1) \wedge S_2)] - E[A_2(t \wedge S_1 \wedge S_2)] \\ &= P(S_2 \leq (t \wedge T_1) \vee (t \wedge S_1)) - P(S_2 \leq t \wedge S_1) \\ &= P(t \wedge T_1 \wedge S_1 \leq S_2 \leq t \wedge T_1) \\ &= P(S_1 \leq S_2 \leq t \wedge T_1) \\ &= \mathbb{E}[1_{\{S_1 \leq S_2 \leq t \wedge T_1\}}] \\ &= E\{E[1_{\{S_1 \leq S_2 \leq t \wedge T_1\}} | \mathfrak{F}_{S_1}]\} \\ &= E\{E[A_2(t \wedge T_1) - A_2((S_1)) | \mathfrak{F}_{S_1}]\} \\ &= E[A_2(t \wedge T_1) - A_2((S_1))]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned} & E[A_1(t \wedge (T_2 \vee S_2) \wedge S_1)] - E[A_1(t \wedge S_1 \wedge S_2)] \\ &= P(S_2 \leq S_1 \leq t \wedge T_2) \\ &= E[A_1(t \wedge T_2) - A_1((S_2))]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como

$$\begin{aligned} E[B_1(t \wedge T_1 \wedge S_2)] &= \int_0^t P(S_2 \geq x) dF_{T_1}(x) \\ &= 1 - E[A_2(t \wedge T_1)] - P(S_2 > t)P(S_1 > t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

e

$$\begin{aligned} E[B_2(t \wedge T_2 \wedge S_1)] &= \int_0^t P(S_1 \geq x) dF_{T_2}(x) \\ &= 1 - E[A_1(t \wedge T_2)] - P(S_2 > t)P(S_1 > t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

A hipótese do teorema implica que

$$A_1(S_2) \geq A_2(S_1). \quad (2.11)$$

Portanto, das relações de 2.5 a 2.11 temos que

$$E[A^1(t)] \geq E[A^2(t)],$$

o que completa a prova. ■

Do Teorema 2.1, concluímos que para otimizar a confiabilidade de sistemas em série, dispondo de vários *sparcs*, deve-se realizar a redundância no componente "mais forte".

2.4 Sistema $k - de - n : F$

Para provar o teorema a seguir, retomamos o Teorema da Representação em Série de Bueno (2005b), A.5 e a definição de função TP_2 , da Seção 1.4

Teorema 2.2:

Em um sistema $k - de - n : F$, sejam S_i 's e T_i 's, $1 \leq i \leq n$, representando os tempos de vida dos componentes e dos *sparcs*, respectivamente, satisfazendo a Hipótese A. Sob a σ -álgebra $\mathfrak{S}_{Y+t}$, se $K(j, t) = \exp[-A_j(t)]$ é TP_2 , então $\tau_{k:F}^i \leq^{st} \tau_{k:F}^j$, com $i \leq j, 1 \leq i, j \leq n$ e $t \in [0, \infty)$.

Prova

O $\mathbb{F}$ -processo compensador de um sistema $k - de - n : F$ com nível crítico $Y = S_{(k-1)}$ é

$$A(t) = A(t \wedge \tau_{k:F}) = \sum_{i=1}^n [A_i(t \wedge \tau_{k:F}) - A_i(Y)]^+.$$

A prova segue dos Teoremas A.5 e 2.1, bastando provar que $C_i(t) \geq C_j(t)$ para todo $i < j$, $i, j \in E$, onde $C_i(t) = E[A_i(Y + t) - A_i(Y_i) | \mathfrak{S}_Y]$ é o $\mathfrak{S}_{Y+t}$ -processo compensador de $S_i^* = ((S_i - Y)^+ | \mathfrak{S}_Y)$.

Como por hipótese, $K(j, t) = \exp[-A_j(t)]$, $1 \leq j \leq n$, $t \in [0, \infty)$ é TP_2 , nós temos para $s < t$ que

$$A_1(s) - A_1(t) \leq A_2(s) - A_2(t)$$

e portanto, para todo $B \in \mathfrak{S}_Y$

$$\begin{aligned}
\int_B E[A_2(s+Y) - A_2(t+Y)|\mathfrak{S}_Y]dP &= \int_B (A_2(s+Y) - A_2(t+Y))dP \\
&\geq \int_B (A_1(s+Y) - A_1(t+Y))dP \\
&= \int_B E[A_1(s+Y) - A_1(t+Y)|\mathfrak{S}_Y]dP,
\end{aligned}$$

assim

$$\int_B \{E[A_2(s+Y) - A_2(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] - E[A_1(s+Y) - A_1(t+Y)|\mathfrak{S}_Y]\}dP \geq 0.$$

Fixando

$$B_n = \{E[A_2(s+Y) - A_2(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] - E[A_1(s+Y) - A_1(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] < -\frac{1}{n}\},$$

como $B_n \in \mathfrak{S}_Y$, segue que

$$\int_{B_n} \{E[A_2(s+Y) - A_2(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] - E[A_1(s+Y) - A_1(t+Y)|\mathfrak{S}_Y]\}dP \leq -\frac{1}{n}P(B_n) = 0$$

e $P(B_n) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Mas

$$\begin{aligned}
P\{E[A_2(s+Y) - A_2(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] - E[A_1(s+Y) - A_1(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] < 0\} \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e portanto

$$E[A_2(s+Y) - A_2(t+Y)|\mathfrak{S}_Y] \geq E[A_1(s+Y) - A_1(t+Y)|\mathfrak{S}_Y],$$

$P - q.c.$, finalizando a prova. ■

Da última desigualdade acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\exp[-E[A_1(Y+t) - A_1(Y)|\mathfrak{S}_Y]]}{\exp[-E[A_1(Y+s) - A_1(Y)|\mathfrak{S}_Y]]} &= \frac{\exp[-E[A_1(Y+t)|\mathfrak{S}_Y]]}{\exp[-E[A_1(Y+s)|\mathfrak{S}_Y]]} \\ &\leq \frac{\exp[-E[A_2(Y+t)|\mathfrak{S}_Y]]}{\exp[-E[A_2(Y+s)|\mathfrak{S}_Y]]} \\ &= \frac{\exp[-E[A_2(Y+t) - A_2(Y)|\mathfrak{S}_Y]]}{\exp[-E[A_2(Y+s) - A_2(Y)|\mathfrak{S}_Y]]}, \end{aligned}$$

e podemos enunciar a proposição:

Proposição 2.3:

Se $\exp[-A_i(t)]$ é TP_2 , então $\exp[-C_i(t)]$ é TP_2 .

Observações 2.4:

Sob o Teorema acima, isto é, depois do nível crítico, entendemos que é preferível fazer a redundância ativa no componente mais forte (no sentido de ordenação estocástica). Como na seção anterior, não mencionamos qualquer relação entre os componentes, portanto nossos resultados são válidos para componente estocasticamente dependentes.

A seguir daremos um exemplo de distribuição, derivada de um processo de Weibull, veja Bain (1978), em que $\exp[-A_j(t)]$ tem a propriedade TP_2 .

Exemplo 2.5:

Sejam $\{S_1, \dots, S_n\}$ os tempos de vida ordenados, com função de sobrevivência condicional dada por:

$$\bar{F}(s_i | s_1, s_2, \dots, s_{i-1}) = \exp\left[-\left(\frac{s_i - \eta_i}{\theta}\right)^\beta + \left(\frac{s_{i-1} - \eta_i}{\theta}\right)^\beta\right]$$

para $\eta_i \vee s_{i-1} < s_i$, onde s_i são as observações ordenadas, tendo função densidade:

$$\begin{aligned} f(s_1, s_2, \dots, s_n) &= \prod_{i=1}^n f(s_i | s_1, s_2, \dots, s_{i-1}) \\ &= \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{s_1 - \eta_1}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{s_1 - \eta_1}{\theta}\right)^\beta\right] \\ &\quad \cdot \prod_{i=2}^n \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{s_i - \eta_i}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{s_i - \eta_i}{\theta}\right)^\beta + \left(\frac{s_{i-1} - \eta_i}{\theta}\right)^\beta\right]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} dA_i(s | s_1, s_2, \dots, s_{i-1}) &= \frac{f(s | s_1, s_2, \dots, s_{i-1})}{\bar{F}(s | s_1, s_2, \dots, s_{i-1})} \\ &= \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{s - \eta_i}{\theta}\right)^{\beta-1}, \end{aligned}$$

com $s_{i-1} \leq s < s_i$, $s_0 = 0$.

Em particular, se $\beta = 2$, S_i tem distribuição $(IFR|\mathfrak{S}_s^i)$, tal que $\bar{F}(s_i | s_1, s_2, \dots, s_{i-1})$ é TP_2 sobre s_i e η_i com

$$\mathfrak{S}_t^i = \sigma\{1_{\{S_k > s, X_k = j\}}, 0 < s \leq t, 1 \leq k \leq n, j \in E, j \neq i\}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \frac{2}{\theta^2} \int_{s_{i-1}}^t (s - \eta_i) ds \\ &= \left(\frac{t - \eta_i}{\theta}\right)^2, \end{aligned}$$

com $t > \eta_i$, $t_{i-1} \leq t < t_i$, $t_0 = 0$.

Assim

$$\exp[-A_i(s)] = \bar{F}(s_i | s_1, s_2, \dots, s_{i-1}).$$

Capítulo 3

Redundância ativa através da transformação do compensador

3.1 Introdução

Mantivemos neste Capítulo as mesmas condições iniciais do Capítulo 2, no que diz respeito aos tempos de vida dos componentes e dos *spare*s. A principal diferença entre os dois capítulos está na maneira de modelar o problema. Enquanto no Capítulo 2 (e também no Capítulo 1) a redundância ativa foi caracterizada por uma transformação do processo pontual, agora é através da transformação dos compensadores.

Na primeira seção do Capítulo fizemos a modelagem matemática do problema e a caracterização da redundância ativa através dos compensadores, em seguida comparamos a redundância ativa com a redundância *standby* minimal (veja Bueno (2005a) para mais detalhes sobre este tipo especial de redundância *standby*). Em seguida estabelecemos condições sob as quais respondemos ao problema da alocação ótima sob duas hipóteses.

Primeiro utilizamos o conceito de função RR_2 e o Teorema de Kwieciński e

Szekli (1991), e obtivemos também um exemplo construtivo no qual a transformação $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2 . Estas primeiras seções foram objeto da publicação (*in Press*) de Bueno e Carmo (2006).

Por último, utilizamos as medidas de probabilidade P_i e P_j , determinadas pela derivada de Radon Nikodym, correspondentes à redundância ativa dos componentes S_i e S_j respectivamente.

3.2 Transformação do compensador

Como na Seção 2.2, assumimos a hipótese A e dispomos de n *sparcs* com tempos de vida T_i disponíveis para fazer uma redundância nos tempos de vida S_i , $1 \leq i \leq n$, respectivamente.

A redundância sobre o tempo de vida S_i resulta no tempo de vida $S_i \vee T_i$, com função distribuição

$$P(S_i \vee T_i \leq t) = 1 - P(S_i \vee T_i > t).$$

Nas condições da Hipótese A do Capítulo 2, teremos

$$P(S_i \vee T_i > t) = 2P(S_i > t) - P(S_i > t)^2 = 2\bar{F}_i(t) - \bar{F}_i(t)^2.$$

No caso da independência entre os componentes, no conjunto $\{t < S_i\}$

$$A_i(t) = -\ln P(S_i > t | \mathfrak{F}_t),$$

é o $\mathbb{F}$ -processo compensador do componente i . Desde que

$$P(S_i \vee T_i > t | \mathfrak{F}_t) = \exp[-A_i(t)](2 - \exp[-A_i(t)]),$$

podemos escrever que no conjunto $\{t < S_i \vee S\}$,

$$-\ln P(S_i \vee T_i > t | \mathfrak{F}_t) = A_i(t) - \ln(2 - \exp[-A_i(t)]),$$

é o $\mathbb{F}$ -processo compensador do componente i .

Note que estamos considerando

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{1_{\{S_i \leq s\}}, s \leq t, 1 \leq i \leq n\}. \quad (3.1)$$

No caso de componentes dependentes, queremos propor uma transformação do $\mathbb{F}$ -processo compensador que represente a operação de redundância ativa, e que preserve a intuição acima. Note que

$$\begin{aligned} A_i(t) - \ln(2 - \exp[-A_i(t)]) &= \int_0^t dA_i(s) - \int_0^t \left(\frac{\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right) dA_i(s) \\ &= \int_0^t \left(\frac{2 - 2\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right) dA_i(s). \end{aligned}$$

Para caracterizar a redundância ativa, no caso de componentes dependentes, propomos a seguinte transformação:

$$B_j(t) = \int_0^t \alpha_j(s) dA_j(s)$$

onde

$$\alpha_i(s) = \frac{2 - 2\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]}$$

e $\alpha_j(s) = 1$ para $j \neq i$.

Tecnicamente procuramos uma medida de probabilidade Q , tal que, sob Q , $B_j(t)$ seja o $\mathbb{F}$ -processo compensador de $N_j(t) = 1_{\{S_j \leq t\}}$, com respeito a esta nova medida de probabilidade. Isto segue dos Teoremas 3.1 e 3.2 a seguir.

Teorema 3.1:

O processo $L_i(t)$ definido por

$$L_i(t) = \left(\frac{2 - 2\exp[-A_i(S_i)]}{2 - \exp[-A_i(S_i)]} \right)^{N_i(t)} (2 - \exp[-A_i(t)]),$$

é um $\mathbb{F}$ -martingal local.

Prova

Considere o $\mathbb{F}$ -tempo de parada definido por

$$U_n = \inf\{t \geq 0 : A_i(t) \geq n \text{ or } B_i(t) \geq n\}.$$

Claramente tem-se $U_n \uparrow \infty$ quando $n \uparrow \infty$.

É suficiente provar que o processo

$$L_i^n(t) = \left(\frac{2 - 2 \exp[-A_i(S_i)]}{2 - \exp[-A_i(S_i)]} \right)^{N_i(t \wedge U_n)} (2 - \exp[-A_i(t \wedge U_n)])$$

é um $\mathbb{F}$ -martingal limitado. Assim o processo

$$L_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{U_n \leq t \leq U_{n+1}\}} L_i^n(t)$$

é um $\mathbb{F}$ -martingal local.

Para todo $\mathbb{F}$ -tempo de parada $U \leq U_n$, podemos escrever

$$\begin{aligned} L^n(U) &= 1 - \int_0^U \exp \left[\int_0^s \frac{\exp[-A_i(u)]}{2 - \exp[-A_i(u)]} dA_i(u) \right] \\ &\quad \cdot \left(\frac{\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right) d[N_i(s) - A_i(s)] \end{aligned}$$

visto que se $U < S_i$, teremos $N_i(U) = 0$ e

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^U \exp \left[\int_0^s \frac{\exp[-A_i(u)]}{2 - \exp[-A_i(u)]} dA_i(u) \right] &\left(\frac{\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right) dA_i(s) \\ &= \exp \left[\int_0^U \left(\frac{\exp[-A_i(u)]}{2 - \exp[-A_i(u)]} \right) dA_i(u) \right] \\ &= 2 - \exp[-A_i(U)] \\ &= L^n(U). \end{aligned}$$

Se $U \geq S_i$

$$\begin{aligned}
 1 & - \int_0^U \exp \left[\int_0^s \frac{\exp[-A_i(u)]}{2 - \exp[-A_i(u)]} dA_i(u) \right] \\
 & \cdot \left(\frac{\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right) d[N_i(s) - A_i(s)] \\
 = & \exp \left[\int_0^{S_i} \left(\frac{\exp[-A_i(u)]}{2 - \exp[-A_i(u)]} \right) dA_i(u) \right] \\
 & \cdot \left(\frac{2 - 2 \exp[-A_i(S_i)]}{2 - \exp[-A_i(S_i)]} \right) \\
 = & 2 - 2 \exp[-A_i(S_i)] \\
 = & L^n(U).
 \end{aligned}$$

Como o integrando

$$\exp \left[\int_0^s \frac{\exp[-A_i(u)]}{2 - \exp[-A_i(u)]} dA_i(u) \right] \left(\frac{\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right)$$

é um $\mathbb{F}$ -processo previsível e $N_i(s) - A_i(s)$ é um $\mathbb{F}$ -martingal, $L_i^n(t)$ é um $\mathbb{F}$ -martingal (Bremaud (1982), T6, Cap. 1) e

$$E[L_i^n(t)] = 1.$$

■

Teorema 3.2: Sob a medida de probabilidade Q_i definida pela derivada de Radon Nikodym

$$\frac{dQ_i}{dP} = L_i(\infty),$$

$B_j(t)$ é o $\mathbb{F}$ -processo compensador de $N_j(t)$.

Prova

Do Teorema 3.1, $L_i(t)$, é um $\mathbb{F}$ -martingal com $E[L_i(t)] = 1$ e portanto $L_i(t)$ pode se considerado como uma função densidade. Denotaremos Q_i a medida de probabilidade que é definida pela derivada de Radon Nikodym

$$\frac{dQ_i}{dP} = L_i(\infty).$$

Consideremos a sub σ -algebra de parada $\mathbb{F}^n = (\mathfrak{F}_{t \wedge U_n})_{t \geq 0}$.

Para todo $\mathbb{F}$ -tempo de parada $U \leq U_n$ e para $j = i$,

$$\begin{aligned} E_{Q_i}[B_i(U)] &= E[L_i(U)B_i(U)] \\ &= E\left[\int_0^U L_i(s)dB_i(s)\right] \\ &= E\left[\int_0^U (2 - \exp[-A_i(s)])\left(\frac{2 - 2\exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]}\right)dA_i(s)\right] \\ &= E\left[\int_0^U (2 - 2\exp[-A_i(s)])dN_i(s)\right] \\ &= E[1_{\{S_i \leq U\}}(2 - 2\exp[-A_i(S_i)])] \\ &= E_{Q_i}[N_i(U)]. \end{aligned}$$

A segunda igualdade acima segue da Fórmula Integral de Dellacherie A.6.

Agora para $j \neq i$, temos

$$\begin{aligned} E_{Q_i}[B_j(U)] &= E[L_i(U)A_j(U)] \\ &= E\left[\int_0^U L_i(s)dA_j(s)\right] \\ &= E\left[\int_0^U L_i(s^-)dA_j(s)\right] \\ &= E\left[\int_0^U L_i(s^-)dN_j(s)\right] \\ &= E[1_{\{S_j \leq U\}}L_i(S_j)] \\ &= E_{Q_i}[N_j(U)], \end{aligned}$$

já que $A_j(s)$ é um processo natural crescente e $L_i(S_j^-) = L_i(S_j)$ onde $L(S_j^-)$ é o limite lateral pela esquerda de $L_i(S_j)$.

3.3 Comparação entre redundância ativa e redundância *standby* minimal

Bueno (2005a) definiu um tipo particular de redundância *standby*, denominada *redundância standby minimal*, definida a seguir

Definição 3.3: Uma redundância *standby* minimal de um componente com tempo de vida S_i é a soma $S_i + S$, onde S , o tempo de vida do *spare*, é tal que

$$P(S > t | S_i = s) = P(S_i > t + s | S_i > s). \quad (3.2)$$

Utilizando esta definição ele caracterizou a redundância *standby* minimal através da transformação do compensador dada por:

$$C_j(t) = \int_0^t \alpha_j(s) dA_j(s)$$

onde $\alpha_i(s) = \frac{A_i(s)}{1+A_i(s)}$ e $\alpha_j(s) = 1$ para $j \neq i$.

Se decidirmos fazer uma operação de redundância num componente específico, devemos responder qual tipo de redundância, a *standby* minimal ou a ativa, que deveríamos usar para otimizar estocasticamente o tempo de vida do sistema. Se os componentes são independentes é fácil ver que o tempo de vida devido à operação de redundância *standby* minimal ($S_i + S$) é estocásticamente maior que o tempo de vida $S_i \vee S$, produzido pela operação de redundância ativa onde S é independente e identicamente distribuído a S_i .

No caso de dependência, desde que

$$2 - \exp[x] \leq x + 1$$

teremos que a transformação correspondente à redundância ativa

$$A_i(t) - \ln(2 - \exp[-A_i(t)])$$

é maior que a correspondente à da redundância *standby* minimal

$$A_i(t) - \ln(1 + A_i(t)).$$

Do Corolário 1.7, o $\mathbb{F}$ -processo compensador de um sistema $k - de - n : F$ é

$$A(t) = \sum_{i=1}^n [A_i(t \wedge \tau) - A_i(Y)]^+$$

e como a função $f(x) = \frac{1+x}{2-\exp[x]}$ é crescente em x , temos

$$\begin{aligned} C_i(t) - C_i(Y) &= A_i(t) - \ln(1 + A_i(t)) - A_i(Y) + \ln(1 + A_i(Y)) \\ &\leq A_i(t) - \ln(2 - \exp[-A_i(t)]) - A_i(Y) + \ln(2 - \exp[-A_i(Y)]) \\ &= B_i(t) - B_i(Y), \end{aligned}$$

Assim consideramos que uma redundância ativa produz um tempo de vida inferior ao de uma redundância *standby* minimal, no sentido de processo de risco de falha do componente i sob uma redundância ativa ser maior que o processo de risco de falha do componente i sob uma redundância *standby* minimal.

Portanto, se decidirmos fazer uma operação de redundância num componente específico, por exemplo no componente mais fraco de um sistema $k - de - n : F$, deveríamos usar a redundância *standby* minimal.

3.4 Sistema $k - de - n : F$ e função RR_2

Como nas seções precedentes, denotamos o tempo de vida de um sistema $k - de - n : F$ por $\tau_{k:F}(\mathbf{S}) = S_{(k)}$, onde $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$ é o vetor dos tempos de vida dos componentes do sistema, e o tempo de vida resultante da operação de redundância ativa sobre o componente i por $\tau_{k:F}^i = \tau_{k:F}(S_1, \dots, S_{i-1}, S_i \vee T_i, S_{i+1}, \dots, S_n)$. O processo de contagem $N^i(t) = 1_{\{\tau_{k:F}^i \leq t\}}$ conta a falha desse sistema, e $A^i(t)$, $1 \leq i \leq n$ é o seu correspondente $\mathbb{F}$ -processo compensador.

Usaremos o resultado seguinte de Kwieciński e Szekli (1991).

Teorema 3.4: (Kwieciński and Szekli (1991))

Considere dois processos pontuais N e M com correspondentes processos compensadores

$$A_n(t) = A_n(t|t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \text{ sobre } (T_{n-1}, T_n],$$

$$B_n(t) = B_n(t|s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \text{ sobre } (S_{n-1}, S_n],$$

os quais são contínuos em t . Se $A_n(t) \leq B_n(t)$ para todo t com $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ e $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$, tal que $s_i \leq t_i$, $0 \leq i \leq n-1$, então existe uma medida de probabilidade Q tal que

$$E_Q[\psi(N(t))] \leq E_Q[\psi(M(t))]$$

para toda função ψ , real, contínua à direita com limite pela esquerda, e decrescente. Que é equivalente a dizer $N \leq^{st} M$, sob Q .

A fim de compararmos os compensadores do sistema correspondente às n opções de alocação, utilizaremos a definição de funções Reversas de Ordem dois, RR_2 (Reverse Rule of Order 2), da Teoria de Positividade Total, (Karlin (1968)). Tais funções

são usadas para caracterizar as famílias com a propriedade de razão de verossimilhança decrescente(Kotz e Johnson (Ed) (1985)).

Definição 3.5:

Uma função real e positiva $K(x, y)$, definida para $-\infty < x < \infty$, e $-\infty < y < \infty$ é reversa de ordem dois (RR_2) se, e somente se

$$K(x_1, y_2)K(x_2, y_1) \geq K(x_1, y_1)K(x_2, y_2)$$

para todo $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$, $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$.

Neste ponto é importante relembrar o Teorema 1.5 do Capítulo 1, que estabelece que devemos comparar os processos compensadores dos componentes somente após os níveis críticos dos respectivos componentes.

Teorema 3.6:

Se a transformação $K(j, t) = 2 - \exp[-A_j(t)]$, $1 \leq j \leq n$, $t \in [0, \infty)$ é RR_2 , então existe uma medida de probabilidade Q , tal que, sob Q ,

$$N^1(t) \leq^{st} N^2(t) \leq^{st} \dots \leq^{st} N^n(t).$$

Prova

Segue dos Teoremas 3.1 e 3.2 que a redundância ativa caracterizada pela transformação do compensador $A_i(t)$ do componente i é dada por

$$\begin{aligned} B_i(t) &= \int_0^t \left(\frac{2 - 2 \exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]} \right) dA_i(s) \\ &= A_i(t) - \ln(2 - \exp[-A_i(t)]). \end{aligned}$$

A partir do Corolário 1.7, devemos comparar o valor da esperança dos compen-

sadores da forma

$$\begin{aligned} A^i(t) &= \sum_{j=1}^{i-1} [A_j(t) - A_j(Y)] \\ &\quad + A_i(t) - \ln(2 - \exp[-A_i(t)]) - A_i(Y) + \ln(2 - \exp[-A_i(Y)]) \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n [A_j(t) - A_j(Y)], \end{aligned}$$

com $1 \leq i, j \leq n$.

Sem perda de generalidade, é suficiente provar para $i = 1$ e $j = 2$.

Da hipótese, $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2 , ou seja, para $s \leq t$,

$$2 - \exp[-A_1(s)].2 - \exp[-A_2(t)] \leq 2 - \exp[-A_1(t)].2 - \exp[-A_2(s)],$$

logo, tomando $s = Y$, teremos

$$\left(\frac{2 - \exp[-A_1(t)]}{2 - \exp[-A_1(Y)]} \right) \geq \left(\frac{2 - \exp[-A_2(t)]}{2 - \exp[-A_2(Y)]} \right).$$

Assim

$$-\ln\left(\frac{2 - \exp[-A_1(t)]}{2 - \exp[-A_1(Y)]}\right) \leq -\ln\left(\frac{2 - \exp[-A_2(t)]}{2 - \exp[-A_2(Y)]}\right),$$

e então

$$\begin{aligned} A^1(t) &= A_1(t) - \ln(2 - \exp[-A_1(t)]) - A_1(Y) \\ &\quad + \ln(2 - \exp[-A_1(Y)]) + A_2(t) - A_2(Y) \\ &\quad + \sum_{i=3}^n [A_i(t) - A_i(Y)] \\ &\leq A_1(t) - A_1(Y) + A_2(t) - \ln(2 - \exp[-A_2(t)]) \\ &\quad - A_2(Y) + \ln(2 - \exp[-A_2(Y)]) \\ &\quad + \sum_{i=3}^n [A_i(t) - A_i(Y)] \\ &= A^2(t). \end{aligned}$$

O resultado segue do Teorema 3.4 ■

Como $A_i(0) = 0$ para todo i , se $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2 , teremos $A_i(t) \geq A_j(t)$ para todo $i \leq j$. Portanto interpretamos que o componente i é mais fraco que o componente j , ou seja, o risco de falha do componente i é maior que o do componente j .

Sob o Teorema 3.6, otimizamos a confiabilidade do sistema $k - de - n : F$ escolhendo o componente mais fraco para alocarmos o componente redundante. Como não fizemos referência a qualquer relação entre os componentes do sistema, o resultado vale para componentes dependentes.

No caso de componentes estocasticamente independentes, e valendo a hipótese de que $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2 podemos provar que se $A_i(t) \geq A_j(t)$ então $S_i \leq^{st} S_j$ para todo $i \leq j$, e temos o corolário a seguir.

Corolário 3.7:

Sejam $\{S_1, \dots, S_n\}$ os tempos de vida, que são estocasticamente independentes, dos componentes de um sistema $k - de - n : F$. Se $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2 , então $S_1 \leq^{st} S_2 \leq^{st} \dots \leq^{st} S_n$ e $\tau_{k:F}^1 \geq^{st} \tau_{k:F}^2 \geq^{st} \dots \geq^{st} \tau_{k:F}^n$ para $k = 1, \dots, n$.

Exemplo 3.8:

Sejam $\{S_1, \dots, S_n\}$ tempos de vida estocasticamente independentes de um sistema $k - de - n : F$. Se o i -ésimo tempo de vida de um componente desse sistema tem distribuição Gamma de parâmetros λ e i , $\lambda > 0$ e $i = 1, \dots, n$, então $S_1 \leq^{st} S_2 \leq^{st} \dots \leq^{st} S_n$, e escolhemos o primeiro componente, $i = 1$, para fazer a redundância. Neste caso o tempo de vida do componente "1", aumenta de S_1 para $S_1 \vee S$, onde S

é o tempo de vida do componente redundante que é independente e identicamente distribuído como S_1 .

3.5 Exemplo construtivo onde $2 - \exp[-A_i(t)]$ é RR_2

Propomos encontrar tempos de vida S_i^* , $i = 1, \dots, n$, com $\mathbb{F}$ -processo compensador $A_i^*(t)$ de $1_{\{S_i^* \leq t\}}$ tal que

$$2 - \exp[-A_j^*(t)]$$

tenha a propriedade RR_2 .

Consideramos como em Arjas (1981a), um tempo de vida S_i (ou sua distribuição), que tem taxa de falha crescente relativo a $\mathfrak{F}_t$. Porém, como S_i é $\mathbb{F}$ -mensurável, temos

$$P(S_i > t | \mathfrak{F}_t) = 1_{\{S_i > t\}},$$

o que não é apropriado para nosso propósito.

Consideraremos então um tempo de vida que tem taxa de falha crescente relativo a $\mathfrak{F}_t^i$, onde

$$\mathfrak{F}_t^i = \sigma\{1_{\{S_j > s\}}, s \leq t, j = 1, \dots, n, j \neq i\}.$$

Assim, S_i é $IFR|\mathfrak{F}_t^i$, isto é,

$$P((S_i - t)^+ > s | \mathfrak{F}_t^i) \downarrow t, \quad P - q.c.$$

Claramente teremos também

$$\bar{F}_i(t) = P(S_i > t | \mathfrak{F}_t^i) \downarrow t, \quad P - q.c.$$

Seja $M_i(t)$ uma versão que é contínua à direita com limite à esquerda do processo

$$M_i(t) = E[1_{\{S_i \leq t\}} | \mathfrak{F}_t^i].$$

Segue que $M_i(t)$ é um $\mathfrak{S}_t^i$ -submartingal com $\mathfrak{S}_t^i$ -compensador $C_i(t)$. De Arjas (1981b), se S_i é $(IFR|\mathfrak{S}_t^i)$, $C_i(t)$ é $P - q.c.$ convexo sobre $(0, S_i]$. Agora, como

$$M_i(t) - C_i(t)$$

é um $\mathfrak{S}_t^i$ -martingal, para $s < t$, teremos

$$E[P(S_i \leq t|\mathfrak{S}_t^i) - P(S_i \leq s|\mathfrak{S}_s^i)|\mathfrak{S}_s^i] = E[C_i(t) - C_i(s)|\mathfrak{S}_s^i]$$

e portanto, segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\lim_{s \rightarrow t} E[P(S_i \leq t|\mathfrak{S}_t^i) - P(S_i \leq s|\mathfrak{S}_s^i)|\mathfrak{S}_s^i] = 0,$$

isto é,

$$\lim_{s \rightarrow t} \int_B [P(S_i \leq t|\mathfrak{S}_t^i) - P(S_i \leq s|\mathfrak{S}_s^i)|\mathfrak{S}_s^i] dP = 0$$

para todo $B \in \mathfrak{S}_t^i$.

Como

$$P(S_i > t|\mathfrak{S}_t^i) \downarrow t,$$

$P(S_i \leq t|\mathfrak{S}_t^i)$ é contínuo à esquerda e portanto $\mathfrak{S}_t^i$ -previsível. Segue que

$$C_i(t) = P(S_i \leq t|\mathfrak{S}_t^i).$$

Consideremos agora o $\mathfrak{S}_t$ -compensador de $N_i(t) = 1_{\{S_i \leq t\}}$, onde

$$\mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}_t^i \vee \sigma\{1_{\{S_i > s\}}, | s \leq t\}.$$

Arjas e Yashin (1988) prova que o $\mathfrak{S}_t$ -compensador de $N_i(t)$, $A_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \int_0^t \frac{1_{\{S_i > s\}} dC_i(s)}{\bar{F}_i(s-)} \\ &= -\ln(\bar{F}_i(t \wedge S_i)). \end{aligned}$$

Procuramos um $\mathfrak{S}_t$ -compensador de $N_i(t)$, $A_i^*(t)$, uma transformação de $A_i(t)$ tal que

$$2 - \exp[-A_i^*(t)]$$

tenha a propriedade RR_2 . Como S_i é $(IFR|\mathfrak{S}_t^i)$, podemos convenientemente escolher $\bar{F}_i(t)$ como uma função PF_2 , (uma função TP_2 sob *shift*) tal que $2 - \exp[-A_i^*(t)]$ tenha a propriedade RR_2 . Propomos a transformação do compensador

$$A_i^*(t) = \int_0^t \frac{1}{2 \exp[-A_i(s)] - 1} dA_i(s).$$

num domínio apropriado.

Seja agora

$$\begin{aligned} L_i(t) &= \left(\frac{1}{2 \exp[-A_i(s)] - 1} \right)^{N_i(t)} \exp[A_i(t) - A_i^*(t)] \\ &= 1 - \int_0^t \exp\left[- \int_0^s \frac{(2 \exp[-A_i(u)] - 2)}{(2 \exp[-A_i(u)] - 1)} dA_i(u)\right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{(2 \exp[-A_i(s)] - 2)}{(2 \exp[-A_i(s)] - 1)} \right] d[N_i(s) - A_i(s)]. \end{aligned}$$

Como $N_i(s) - A_i(s)$ é um $\mathfrak{S}_t$ -martingal e o integrando é $\mathfrak{S}_t$ -previsível, $L_i(t)$ é um $\mathfrak{S}_t$ -martingal local. Supomos que $L_i(t)$ é uniformemente integrável.

Contudo,

$$E[L_i(t)] = 1,$$

assim $L_i(t)$ pode ser considerado como uma função densidade e podemos definir uma medida Q_i pela derivada de Radon Nikodym

$$\frac{dQ_i}{dP} = L_i(S_i).$$

Portanto, aplicando o Teorema de Girsanov (Bremaud (1981)) teremos que $A_i^*(t)$ é o $\mathfrak{S}_t$ -compensador de $N_i(t)$ sob a medida Q_i .

Segue que

$$\begin{aligned} 2 - \exp([A_j^*(t)]) &= 2 - \exp\left[\int_0^t \frac{1}{2 \exp[-A_i(s)] - 1} dA_i(s)\right] \\ &= \exp[A_i(t)] \\ &= \frac{1}{\overline{F}_i(t)} \end{aligned}$$

o qual tem a propriedade RR_2 .

Definimos o tempo de vida do componente S_i^* por:

$$Q(S_i^* > t | \mathfrak{S}_t) = \exp[-A_i^*(t)],$$

com $1 \leq i \leq n$.

Para dar um exemplo prático, considere novamente os tempos de vida ordenados com função de sobrevivência condicionada como no exemplo 2.5:

$$\overline{F}(t_i | t_1, t_2, \dots, t_{i-1}) = \exp\left[-\left(\frac{t_i - \eta_i}{\theta}\right)^\beta + \left(\frac{t_{i-1} - \eta_i}{\theta}\right)^\beta\right]$$

para $\eta_i \vee t_{i-1} < t_i$, onde t_i são as observações ordenados e com função densidade:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \prod_{i=1}^n f(t_i | t_1, t_2, \dots, t_{i-1}) \\ &= \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{t_1 - \eta_1}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t_1 - \eta_1}{\theta}\right)^\beta\right] \\ &\quad \cdot \prod_{i=2}^n \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{t_i - \eta_i}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t_i - \eta_i}{\theta}\right)^\beta + \left(\frac{t_{i-1} - \eta_i}{\theta}\right)^\beta\right]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} dA_i(t | t_1, t_2, \dots, t_{i-1}) &= \frac{f(t | t_1, t_2, \dots, t_{i-1})}{\overline{F}(t | t_1, t_2, \dots, t_{i-1})} \\ &= \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{t - \eta_i}{\theta}\right)^{\beta-1}, \end{aligned}$$

com $t_{i-1} \leq t < t_i$, $t_0 = 0$.

Em particular podemos tomar $\beta = 2$, e neste caso S_i é apropriadamente uma distribuição $(IFR|\mathfrak{S}_t^i)$ tal que $\bar{F}(t_i|t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$ é TP_2 (sob *shift*) sobre t_i e η_i .

Portanto

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \frac{2}{\theta^2} \int_{\eta_i}^t (s - \eta_i) ds \\ &= \left(\frac{t - \eta_i}{\theta}\right)^2, \end{aligned}$$

com $t > \eta_i, \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad t_0 = 0$

e

$$\begin{aligned} A_i^*(t) &= \int_0^t \frac{1}{2 \exp[-A_i(s)] - 1} dA_i(s) \\ &= -\ln(2 - \exp[(\frac{t - \eta_i}{\theta})^2]) \end{aligned}$$

sobre $\eta_i + 0,83\theta > t \geq \eta_i, \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad t_0 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$

Segue que podemos definir o tempo de vida do componente S_i^* por :

$$Q(S_i^* > t|\mathfrak{S}_t) = 2 - \exp[(\frac{t - \eta_i}{\theta})^2],$$

sobre

$$\eta_i + 0,83\theta > t \geq \eta_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

3.6 Sistema $k - de - n : F$ e as medidas P_i e P_j

Com relação ao componente i , seja $A_i(t)$ o $(P, \mathfrak{F}_t)$ -processo compensador do processo $1_{\{S_i \leq t\}}$, $i \in E$, que é não decrescente, $P - q.c.$ único, previsível com $A_i(0) = 0$. Admitimos que $1_{\{S_i \leq t\}}$ tenha intensidade $a_i(t)$, de forma que

$$A_i(t) = \int_0^t 1_{\{S_i > s\}} a_i(s) ds.$$

Portanto, para $t \geq S_i$,

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \int_0^{S_i} 1_{\{S_i > s\}} a_i(s) ds + \int_{S_i}^t 1_{\{S_i > s\}} a_i(s) ds \\ &= \int_0^{S_i} 1_{\{S_i > s\}} a_i(s) ds \\ &= A_i(S_i). \end{aligned}$$

que é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro 1. Prova-se que as variáveis $A_1(S_1), A_2(S_2), \dots, A_n(S_n)$, são i.i.d., independentes e identicamente distribuídas (Norros (1986)).

Considere novamente o processo $L_i(t)$,

$$L_i(t) = \left(\frac{2 - 2 \exp[-A_i(S_i)]}{2 - \exp[-A_i(S_i)]} \right)^{N_i(t)} (2 - \exp[-A_i(t)]).$$

$L_i(t)$ é um $(P_i, \mathfrak{F}_t)$ -martingal local. Desde que é limitado, é um $(P_i, \mathfrak{F}_t)$ -martingal.

Note que

$$L^i = \lim_{t \uparrow \infty} L^i(t) = L^i = 2 - \exp[-A_i(S_i)] = L^i(S_i).$$

Assim definimos P_i como a derivada de Radon Nikodim

$$\frac{dP_i}{dP} = L_i(S_i).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
P_i(\Omega) &= \int_{\Omega} L^i(S_i) dP \\
&= \mathbb{E}[L^i(S_i)] \\
&= \mathbb{E}[L^i(0)] \\
&= \mathbb{E}[1] = 1.
\end{aligned}$$

Portando, $L_i(S_i)$ pode ser considerado como uma função densidade sob a medida de probabilidade P_i e

$$\mathbb{E}_{P_i}[A_i(t)] = \mathbb{E}[A_i(t).L^i(S_i)].$$

Os $B_m(t)$ $\mathbb{F}$ -compensadores de $1_{\{S_i \leq t\}}$ sob a nova medida P_i , representando a redundância ativa sobre do componente i , conforme Seção 3.2 é

$$B_m(t) = \int_0^t \alpha_m(s) dA_m(s)$$

onde

$$\alpha_i(s) = \frac{2 - 2 \exp[-A_i(s)]}{2 - \exp[-A_i(s)]}$$

e $\alpha_m(s) = 1$ para $m \neq i$, ou seja,

$$B_i(t) = A_i(t) - \ln[2 - \exp(-A_i(t))].$$

Para um $k - de - n : F$, com nível crítico Y , teremos

$$\begin{aligned}
A^i(t) &= \sum_{m=1}^n [B_m(t \wedge \tau) - B_m(Y)]^+ \\
&= 1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \sum_{m=1}^n [B_m(t \wedge \tau) - B_m(Y)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_i}[A^i(t)] &= \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \sum_{m=1}^n [B_m(t \wedge \tau) - B_m(Y)]\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{\mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \sum_{m=1}^n [B_m(t \wedge \tau) - B_m(Y)] \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&\stackrel{*}{=} \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \mathbb{E}_{P_i}\left\{\sum_{m=1}^n [B_m(t \wedge \tau) - B_m(Y)] \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}_{P_i}\left\{[B_m(t \wedge \tau) - B_m(Y)] \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - M_m(t \wedge \tau) - 1_{\{S_m \leq Y\}} + M_m(Y) \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}} \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{\sum_{m=1}^n \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \cdot (1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}}) \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{\mathbb{E}_{P_i}\left\{\sum_{m=1}^n [1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \cdot (1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}})] \mid \mathfrak{F}_Y\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}_{P_i}\left\{1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \cdot \sum_{m=1}^n (1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}})\right\} \\
&= \mathbb{E}\{L^i \cdot 1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \cdot \sum_{m=1}^n (1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}})\}.
\end{aligned}$$

Em (*), $1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}}$ é $\mathfrak{F}_Y$ -mensurável, veja Dellacherie e Meyer (1980) (Teorema 6, Cap.1).

Analogamente, obtém-se que

$$\mathbb{E}_{P_j}[A^j(t)] = \mathbb{E}\{L^j \cdot 1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \cdot \sum_{m=1}^n (1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}})\}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_i}[A^i(t)] - \mathbb{E}_{P_j}[A^j(t)] &= \mathbb{E}\{[L^i - L^j] \cdot 1_{\{Y \leq t \wedge \tau\}} \cdot \sum_{m=1}^n (1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}})\} \\
&= \mathbb{E}\{[L^i - L^j] \cdot \sum_{m=1}^n [1_{\{S_m \leq t \wedge \tau\}} - 1_{\{S_m \leq Y\}}]^+\}.
\end{aligned}$$

Portanto a diferença $\mathbb{E}_{P_i}[A^i(t)] - \mathbb{E}_{P_j}[A^j(t)]$ tem o mesmo sinal de $L^i - L^j$. Logo temos o seguinte teorema:

Teorema 3.9:

Sob as condições acima, se

$$A_1(t) \geq A_2(t) \geq \dots \geq A_n(t), \quad P - q.c.,$$

então

$$\mathbb{E}_{P_1}[A^1(t)] \geq \mathbb{E}_{P_2}[A^2(t)] \geq \dots \geq \mathbb{E}_{P_n}[A^n(t)].$$

Prova

Observe inicialmente que $A_i(S_i) \geq A_j(S_j)$, pois sob $\{S_i \leq S_j\}$,

$$A_i(S_i) \geq A_j(S_i) = A_j(S_j),$$

por outro lado, sob $\{S_i \leq S_j\}$,

$$A_i(S_i) = A_j(S_i) \geq A_j(S_j).$$

Assim

$$\begin{aligned} L^i - L^j &= (2 - 2 \exp[-A_i(S_i)]) - (2 - 2 \exp[-A_j(S_j)]) \\ &= 2[A_i(S_i) - A_j(S_j)] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

■

Desde que $A_i(t) \geq A_j(t)$ implica em $S_i \leq^{st} S_j$, $i \leq j, i, j \in E$, e que P_i é uma medida correspondendo á redundância ativa do componente i , deve-se fazer a redundância ativa no componente "mais forte".

Apêndice A

Alguns resultados utilizados nos Capítulos

Teorema A.1: (Decomposição de Doob-Meyer)

Seja $X = (X_t)_{t \geq 0}$ um processo aleatório contínuo à direita e adaptado a filtragem $(\Omega, \mathfrak{F}, F^n, \mathbb{P})$. Então X é um submartingal uniformemente integrável se, e somente se, tem a decomposição

$$X = A + M$$

onde $A = (A_t)_{t \geq 0}$ é um processo previsível, contínuo à direita, não-decrescente, e integrável, com $A_0 = 0$ e $M = (M_t)_{t \geq 0}$ é um martingal uniformemente integrável. A decomposição é única a menos de indistingüibilidade.

Proposição A.2: (Integração por partes)

Sejam a e b funções *cadlag* sobre $\mathbb{R}_+$, de variação limitada. Então, para cada $t \in \mathbb{R}_+$

$$a(t).b(t) = \int_0^t a(s^-)a(ds) + \int_0^t b(s)a(ds) + \sum_{s \leq t} \Delta a(s).\Delta b(t),$$

onde $a(s^-)$ é o limite pela esquerda em s e $\Delta a(s) = a(s) - a(s^-)$.

Lema A.3: (Dellacherie e Meyer (1980))

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F}, P)$ um espaço de probabilidade filtrado e T um $\mathbf{F}$ -tempo de parada.

(i) Se o processo $V = (V_t)$, $V_t = I(T \leq t)$, tem uma representação semimartingal

$$V_t = \int_0^t I(T \geq s)A_s ds + M_t, t \in \mathbb{R}_+,$$

então T é um tempo de parada totalmente inacessível e o martingal M é quadrado integrável de média zero.

(ii) Se T é um tempo de parada totalmente inacessível então o processo $V = (V_t)$, $V_t = I(T \leq t)$, tem uma única (P -q.c.) decomposição $V = A + M$, onde M é um martingal U.I. e A é contínuo (P -q.c., compensador previsível).

Teorema A.4: (Boland)

Sejam $S, S_1, S_2, \dots, S_n$ variáveis aleatórias independentes, representando os tempos de vida de um *spare* e dos componentes de um sistema k -de- $n : G$, respectivamente.

Se

$$S_1 \leq^{st} S_2 \leq^{st} \dots \leq^{st} S_n,$$

então

$$\tau_{k:n}^1 \geq^{st} \tau_{k:n}^2 \geq^{st} \dots \geq^{st} \tau_{k:n}^n,$$

onde $\tau_{k:n}^i$ representa o tempo de vida do sistema com redundância ativa sobre o componente i , $1 \leq i \leq n$.

Teorema A.5: Bueno (2005b)

Sejam $\tau, S_1, S_2, \dots, S_n$, os tempos de vida de um sistema coerente e de seus componentes, respectivamente. Considere $S_i^* = [(S_i - Y_i)^+ \mid \mathfrak{S}_{Y_i}]$, $1 \leq i \leq n$, onde Y_i é o nível crítico do componente i . Sob a σ -álgebra $\mathfrak{S}_{Y+t}$, se

$$\tau^* = \min_{\{i: Y_i < \infty\}} S_i^*,$$

então

$$\tau = \tau^*,$$

$P - q.c.$, onde $\mathfrak{S}_{Y+t} = \{A \in \mathfrak{S}_\infty : A \cap \{Y + t \leq s\} \in \mathfrak{S}_s, s \geq 0\}$.

Prova:

Observe inicialmente que

$$1_{\{S_i^* \leq t\}} = \mathbb{E}[N_i(Y_i + t) - N_i(Y_i) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] = \mathbb{E}[1_{\{Y_i < T_i \leq Y_i + t\}} \mid \mathfrak{S}_{Y_i}],$$

então o $\mathfrak{S}_{Y+t}$ -compensador de $1_{\{S_i^* \leq t\}}$ é dado por

$$C_i(t) = \mathbb{E}[A_i(Y_i + t) - A_i(Y_i) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}],$$

pois, $N_i(t) - A_i(t)$ é um $\mathfrak{S}_t$ -martingal uniformemente integrável, e assim aplicando o Teorema da Amostragem Opcional, para $s \leq t$, temos

$$\mathbb{E}[N_i(Y_i + t) - A_i(Y_i + t) \mid \mathfrak{S}_{Y_i+s}] = N_i(Y_i + s) - A_i(Y_i + s).$$

Então

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{\mathbb{E}[N_i(Y_i + t) - N_i(Y_i) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] - \mathbb{E}[A_i(Y_i + t) - A_i(Y_i) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] \mid \mathfrak{S}_{Y_i+s}\} = \\ & \mathbb{E}\{\mathbb{E}[N_i(Y_i + t) - A_i(Y_i + t) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] \mid \mathfrak{S}_{Y_i+s}\} - \mathbb{E}\{\mathbb{E}[N_i(Y_i) - A_i(Y_i) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] \mid \mathfrak{S}_{Y_i+s}\} = \\ & \mathbb{E}[N_i(Y_i + s) - A_i(Y_i + s) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] - \mathbb{E}[N_i(Y_i) - A_i(Y_i) \mid \mathfrak{S}_{Y_i}] \end{aligned}$$

e concluímos que $B_i(t)$ é o $\mathfrak{F}_{Y+t}$ -compensador de $1_{\{S_i^* \leq t\}}$.

Por outro lado $\tau \in \mathfrak{F}_t$ e

$$\{\tau = s\} \Leftrightarrow \{\tau \in \bigcap_{1 \leq m < \infty} [s, s + \frac{1}{m})\} \Leftrightarrow \{s \in \bigcap_{1 \leq m < \infty} (\tau - \frac{1}{m}, \tau]\}$$

é um conjunto previsível. Logo $1_{\{\tau=s\}}$ é um $\mathfrak{F}_t$ -processo previsível.

Agora $\{\tau = s\} = \bigcup_{i \in \Gamma_\phi(s)} \{T_i = s\}$ e segue que $w \in \{\tau = s\}$ se, e somente se, $w \in \{T_i = s\}$ para algum $i \in \Gamma_\phi(s)$. Contudo $\{i \in \Gamma_\phi(s)\} \cap \{T_i = s\}$ é equivalente a $\{Y_i < T_i = \tau = s\}$ e $\{Y_i < T_i\} \in \mathfrak{F}_{Y_i} \subset \mathfrak{F}_{Y_i+s}$. Assim $\{\tau = s\} \in \mathfrak{F}_{Y_i+s}$ e portanto $1_{\{\tau=s\}}$ é um $\mathfrak{F}_{Y_i+t}$ -processo previsível.

Dessa forma, se $N(t) = 1_{\{\tau \leq t\}}$ e $N^*(t) = 1_{\{\tau^* \leq t\}}$ teremos

$$\begin{aligned} 1 = P(\tau = \tau) &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{\tau=s\}} dN(s)\right] \stackrel{a}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{\tau=s\}} dA(s)\right] \stackrel{b}{=} \\ &\mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{\tau=s\}} dA^*(s)\right] \stackrel{c}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{\tau=s\}} dN^*(s)\right] = \mathbb{E}[1_{\{\tau=\tau^*\}}] = P(\tau = \tau^*). \end{aligned}$$

A igualdade (a) segue da $\mathfrak{F}_t$ -previsibilidade de τ , (b) do conceito de esperança condicional e (c) deve-se ao fato de que τ também é $\mathfrak{F}_{Y_i+s}$ -tempo de parada previsível.

■

Teorema A.6: (Fórmula Integral de Dellacherie)

Sejam A_t um processo crescente adaptado a $\mathfrak{F}_t$, e M_t um $(P, \mathfrak{F}_t)$ -martingal, contínuo a direita e uniformemente integrável. Então, para todo $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada T

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T M_t dA_t\right] = \mathbb{E}[M_T A_T].$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. Arjas: *A stochastic process approach to multivariate reliability system: notions based on conditional stochastic order*, Mathematics of Operations Research, **6**(2) (1981a), 263-276.
- [2] E. Arjas: *The failure and hazard processes in multivariate reliability systems*, Mathematics of Operations Research, **6** (1981b), 551-562.
- [3] E. Arjas and A. Yashin: *A note on random intensities and conditional survival functions*, Journal of Applied Probability. **25** (1988), 630 - 635.
- [4] T. Aven e U. Jensen: *Stochastic Models in Reliability*, Springer-Verlag, New York (1999).
- [5] L. J. Bain: *Statistical analysis of reliability and life-testing models: theory and methods*, Marcel Dekker, New York (1978).
- [6] R. E. Barlow and F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability models*, Hold, Rinehart and Wiston , Silver Spring, MD, (1981).
- [7] Boland P., El-Newehi E., Proschan F. : *Stochastic order for redundancy allocations in series and parallel systems*, Advanced Applied Probability. **24** (1992), 161-171.

- [8] P. Bremaud: *Point Processes and Queues*, Springer-Verlag, New York (1982).
- [9] V.C. Bueno: *Minimal standby redundancy allocation in a $k - out - of - n : F$ system of dependent components*, European Journal of Operational Research. **165** (2005a), 786 - 793.
- [10] V.C. Bueno: *A series representation of a coherent system*, RT-MAE-IME-Universidade de São Paulo, **20** (2005b).
- [11] V. C. Bueno e I. M. Carmo: *Active redundancy allocation for a $k - out - of - n : F$ system of dependent components*, European Journal of Operational Research, (In Press) (2006).
- [12] C. Dellacherie e P.A. Meyer: *Probabilities and Potential*, B. North-Holland, Amsterdam (1980).
- [13] S. Karlin: *Total Positivity*, Stanford, University Press (1968).
- [14] S. Kotz and N. Johnson,(Eds): *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Volume 5. Wiley, New York (1985).
- [15] A. Kwieciński and R. Szekli : *Compensator conditions for stochastic ordering of point processes*, Journal of Applied Probability. **28** (1991), 751-761.
- [16] F. C. Meng: *More on optimal allocation of components in coherent systems*, Journal of Applied Probability. **33** (1996), 548-556.
- [17] J. Mi: *A unified way of comparing the reliability of coherent systems*, IEEE Transactions on Reliability, **52** (2003), 38-43.
- [18] I. Norros : *A compensator representation of multivariate lifelength distributions, with applications*, Scandinavian Journal of Statistics, **13** (1986),99-112.

- [19] Prasad, V.R., Kuo, W. and Oh Kim, K.M. : *Optimal allocation of identical, multi functional sapres in a series system*, IEEE Transactions on Reliability. 48 (1999), 2, 118-126.
- [20] M. Shaked and J. G. Shanthikumar: *Stochastic orders and their applications*, Academic Press, New York (1994).
- [21] Singh*, H. and Misra, N. : *On redundancy allocation in systems*, Journal of Applied Probability. 31 (1994), 1004 - 1014.