**Análise estocástica do movimento Browniano fracionário: Equações de
evolução e ergodicidade**

Alberto Masayoshi Faria Ohashi

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Doutor em Estatística

Área de Concentração: **Análise Estocástica**
Orientador: **Prof. Paulo Régis Caron Ruffino**

São Paulo – janeiro - 2006

"martingales, Markov dependence and stationarity are the only three dependence concepts so far isolated which are sufficiently general and sufficiently amenable to investigation, yet with a great number of deep properties" (M.Loéve, *Ann. Probab.* **1** (1973), p.6).

Este trabalho é dedicado aos meus pais Masaru Ohashi e Valéria Maria Faria Ohashi.

Agradecimentos

Gostaria aqui de registrar os meus agradecimentos às pessoas que foram importantes diretamente e indiretamente para a realização deste trabalho. Primeiro e acima de tudo, gostaria de agradecer a meus pais Masaru Ohashi e Valéria Maria Faria Ohashi que sempre me apoiaram e incentivaram na difícil jornada que foi este doutorado. Sem eles nada disso aconteceria e teria sentido algum para mim.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Paulo Ruffino pela amizade, incondicional apoio, incentivo e confiança no meu trabalho. Sem dúvida alguma, sem a sua orientação e apoio, o resultado desta tese e de meu doutorado, em geral, seria muito prejudicado. Agradeço também, ao professor Pedro Catuogno pelo incentivo e conversas sempre produtivas sobre matemática.

Gostaria de agradecer ao meu orientador estrangeiro David Elworthy da universidade de Warwick pelo incentivo, amizade e apoio incondicional durante minha estadia no *Mathematics Research Centre* de Warwick. Agradeço também a Martin Hairer pelo companheirismo no trabalho e a Hazel Higgins pela sempre prontidão em tornar minha permanência em Warwick a mais agradável possível. Agradeço aos amigos de doutorado em Warwick Pavel Bubbak, Anestis Fotiadis e Maria Elvira pelo companheirismo, aos meus colegas de casa Teijo Arpognen e Andrey Mallyutin. Um agradecimento especial a Liza Yuki Goto e a Marie-Pierre Bavouzet.

Durante minha permanência no Brasil na USP-IME algumas pessoas foram importantes para a realização deste trabalho. Gostaria de agradecer a William Pereira, Elmo Menezes, Ira Martins, Michel Ferreira da Silva, Fabiano Coelho, Airton Bolfe, Eduardo Queiroz, Gustavo Andrade e Gil Carneiro pela amizade e companheirismo. Gostaria de agradecer aos professores do IME Pedro Paulo Schirmer, Vanderley Bueno e Vladimir Belitsky pela sempre disponibilidade de ouvir minhas dúvidas e anseios. Além do mais, gostaria de agradecer ao secretário da pós-graduação do IME Pinho que sempre esteve disposto a me ajudar em todas as horas.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer aos meus amigos de Recife: Felipe Valença, Juliana Valença, João Otávio Cavalcanti, Fernando Galvão, Marcos Bezerra de Melo, German Ponce e Leonardo Rabelo. Estas pessoas estiveram comigo desde o início dos meus estudos na matemática.

Resumo

Esta tese estuda questões relacionadas a funcionais do movimento Browniano fracionário (mBf). Duas questões fundamentais são abordadas: 1) a existência e unicidade de soluções para equações de evolução estocásticas perturbadas pelo mBf e 2) ergodicidade de sistemas induzidos por difusões dirigidas pelo mBf. Na primeira parte, provamos a unicidade de solução para uma classe de equações de evolução não-lineares com ruído multiplicativo sob condições de Lipschitz. Através de um argumento de ponto fixo sobre um espaço de limite indutivo apropriado, provamos a existência e unicidade de uma solução *mild*. Em particular, as soluções são dadas nos espaços de distribuições estocásticas do tipo Kondratiev. No caso linear com ruído aditivo, a solução forte é obtida. Aplicações às equações diferenciais parciais estocásticas parabólicas são dadas. Na segunda parte, estudamos questões relacionadas a ergodicidade de sistemas não-Markovianos. Introduzimos os conceitos de *irreducibilidade* e propriedade *forte Feller* para uma classe ampla de sistemas não-Markovianos e estabelecemos a conexão com a unicidade do estado estacionário. Como principal aplicação, provamos a existência e unicidade de uma solução estacionária para equações diferenciais estocásticas (dimensão finita) com ruído multiplicativo perturbadas pelo mBf. Para provarmos a propriedade *forte Feller* introduzida neste trabalho, estabelecemos uma generalização da fórmula de Bismut-Elworthy para equações diferenciais estocásticas perturbadas pelo mBf de parâmetro $H > 1/2$.

Abstract

This thesis studies some questions related to functionals of fractional Brownian motions (fBm). Two fundamental questions are studied: 1) the existence and uniqueness of solutions for stochastic evolution equations driven by a fBm and 2) the ergodicity of diffusions driven by a fBm. In the first part, we study a class of nonlinear stochastic evolution equations with multiplicative noise under Lipschitz conditions. By using a fixed point argument in an appropriate inductive limit space, we prove the existence and uniqueness of a *mild* solution. In particular, the solutions are given on the Kondratiev space of stochastic distributions. In the linear case with additive noise we obtain a strong solution. Applications to parabolic stochastic partial differential equations driven by a fBm with arbitrary Hurst parameter are given. In the second part, we study ergodic properties of non-Markovian systems. We introduce the concepts of *irreducibility* and *strong Feller* property for a wide class of non-Markovian processes and we establish the connection with the uniqueness of the stationary state. As the main application, we prove the existence and uniqueness of a stationary solution for a finite dimensional system of stochastic differential equations with multiplicative noise driven by a fBm. In order to prove the *strong Feller* property introduced in this work, we establish a generalization of the well-known Bismut-Elworthy formula for stochastic differential equations driven by a fBm with parameter $H > 1/2$.

Sumário

0.1	Fundamentação Teórica	1
0.2	Principais Resultados	6
1	Revisão da <i>White Noise Analysis</i>	13
2	Equações de evolução estocásticas perturbadas pelo ruído fracionário	20
2.1	Introdução	20
2.2	Preliminares	22
2.2.1	Ruído Fracionário em Dimensão Infinita e Calculo de Wick	24
2.3	Equações de Evolução Estocásticas com Ruído Fracionário	30
2.3.1	Demonstração dos Teoremas 3.1 e 3.2	34
3	Ergodicidade de equações diferenciais estocásticas perturbadas pelo movimento Browniano fracionário	48
3.1	Introdução	48
3.2	Preliminares	51
3.3	Um Resultado Ergódico Abstrato	54
3.4	Construção do Sistema Dinâmico Estocástico	61
3.4.1	Representação do mBf	61
3.4.2	Espaço de Ruído e o Processo de Ruído Estacionário	62
3.4.3	Definição do Sistema Dinâmico Estocástico	69
3.5	Unicidade da Medida Invariante	73
3.5.1	Propriedade Forte Feller	73
3.5.2	Demonstração do Principal Resultado	88
3.6	Apêndice	92
	Bibliografia	98

Introdução

0.1 Fundamentação Teórica

A tese está situada numa particular área da matemática, comumente chamada de análise estocástica, cujo objeto de interesse é estabelecer conexões entre problemas advindos da teoria de probabilidade e problemas puramente analíticos e/ou geométricos. Tal estudo começou com Norbert Wiener e Kolmogorov. Foi Wiener em 1923 que construiu uma medida de probabilidade no espaço das funções contínuas (a medida de Wiener), fornecendo pela primeira vez um tratamento matemático rigoroso do movimento Browniano, antes estudado por Bachelier [4] e Einstein [15]. Em 1931, Kolmogorov deduz uma equação diferencial parcial de segunda ordem para as probabilidades de transição de processos de Markov com trajetórias contínuas, revelando uma profunda conexão entre equações diferenciais e processos estocásticos. Em meados de 1940, Kiyosi Itô [37, 35, 36] estabelece os fundamentos do cálculo estocástico. Sua principal motivação era estabelecer o tratamento rigoroso da equação diferencial estocástica que governa o processo de difusão de Kolmogorov. Desta forma, as equações integrais estocásticas (formalmente chamadas de equações diferenciais estocásticas) criadas por K. Itô é essencialmente uma análise infinitesimal para trajetórias de processos estocásticos.

Alguns anos se passaram, até que a comunidade matemática percebeu a necessidade de se estabelecer uma análise estocástica em dimensão infinita análoga a teoria de espaços de Sobolev e do cálculo de variações determinístico. A razão básica é de que importantes funcionais de Wiener (i.e., funcionais de caminhos Brownianos), tais como soluções de equações diferenciais estocásticas, não são Fréchet diferenciáveis. Isto levou a um grupo de autores estabelecer os fundamentos da análise estocástica em dimensão infinita.

Seja $\{B(t), t \in \mathbf{R}\}$ o movimento Browniano padrão. Em geral, o interesse é o estudo de funcionais de Wiener:

$$f(B(t), t \in T), \quad T : \text{um intervalo de } \mathbf{R}. \quad (0.1)$$

Com o objetivo de estudar tais funcionais, Hida [25, 26, 27] propôs considerar em lugar da expressão (0.1), o seguinte funcional

$$\psi(\dot{B}(t), t \in T), \quad (0.2)$$

onde $\{\dot{B}(t); t \in \mathbf{R}\}$ é um "ruído branco": $\dot{B}(t) = \frac{d}{dt}B(t)$. A principal razão de se considerar a expressão (0.2) em vez de (0.1) é que $\{\dot{B}(t); t \in \mathbf{R}\}$ é o análogo contínuo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Portanto, podemos

pensar $\dot{B}(t) = \frac{d}{dt}B(t)$ como um sistema de "coordenadas" e podemos chamar ψ na expressão (0.2) um *funcional de ruído branco*. O preço que temos de pagar pelo uso do *ruído branco* em vez do movimento Browniano como argumento de funcionais é que temos de lidar com funcionais de distribuições $\dot{B}$ em vez de funcionais de funções contínuas B . Com esta idéia, Hida introduz a chamada "*white noise analysis*" estabelecendo uma teoria de distribuições sobre espaços de dimensão infinita, onde $\dot{B}$ é uma distribuição (estocástica).

Em 1976, Malliavin [47] estende os operadores gradiente, divergente e Ornstein-Uhlenbeck para o caso de dimensão infinita. Sua principal motivação era uma demonstração probabilística do famoso teorema de Hörmander sobre operadores hipoelepticos no contexto de equações diferenciais parciais de segunda ordem parabólicas e elípticas. A principal contribuição técnica de Malliavin foi a introdução da chamada *matriz de Malliavin* cujas entradas são formadas pelas derivadas de Gross-Sobolev. Sob condições de não-degeneracidade da matriz, um vetor aleatório é absolutamente contínuo com respeito a medida de Lebesgue. Sob este aspecto, vários funcionais de Wiener (no sentido da expressão (0.1)) têm derivadas de todas as ordens. Sob esta mesma linha, S. Watanabe [61], I. Shigekawa [62, 63], S. Kusuoka e D. Stroock [39, 40, 41, 42, 43], desenvolveram uma extensiva teoria de Sobolev para espaços de dimensão infinita. Hoje em dia tal cálculo é informalmente chamado de 'cálculo de Malliavin' e formalmente chamado por 'cálculo estocástico de variações'. É importante alertarmos que o nome 'cálculo estocástico de variações' é talvez não muito adequado, desde que este se refere não ao cálculo de variações no sentido clássico de minimizar funcionais de caminhos, mas as variações no espaço de caminhos usados para definir certas derivadas de funcionais de Wiener. Tais derivadas, juntamente com o cálculo diferencial correspondente, têm papel fundamental na teoria. Com várias aplicações às equações diferenciais parciais, análise harmônica, geometria Riemanniana, controle estocástico, teoria potencial, etc., o cálculo de Malliavin é sem dúvida um dos métodos mais importantes em teoria de probabilidade.

Uma nova visão sobre propriedades infinitesimais de trajetórias de processos estocásticos pode ser desenvolvida através das contribuições citadas acima. Em particular, Walsh [60] nos anos oitenta apresenta uma monografia dando um significado para o que chamamos de equações diferenciais parciais estocásticas (EDP estocásticas). Walsh considerou a seguinte equação estocástica de Poisson

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= -W(x); x \in D \\ u(x) &= 0; x \in \partial D\end{aligned}\tag{0.3}$$

onde $D \subset \mathbf{R}^d$ é um aberto limitado com fronteira ∂D regular, Δ é o Laplaciano e $W(x)$ é a derivada (no sentido usual de teoria de distribuições clássica) do (d -parâmetro) movimento Browniano $B(x)$ sobre um espaço de probabilidade arbitrário $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Walsh mostra que para qualquer d , existe uma única aplicação mensurável $u(x, \omega)$ resolvendo (0.3).

Mais precisamente, existe um espaço de Sobolev $H^{-n}(\mathbf{R}^d)$ e uma aplicação mensurável

$$u : \Omega \rightarrow H^{-n}(\mathbf{R}^d)$$

com $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que (0.3) vale, no sentido de distribuições, para quase todo $\omega \in \Omega$. A construção de Walsh nos leva ao problema de definirmos multiplicação de distribuições quando consideramos EDP estocásticas onde o ruído aparece de forma multiplicativa. Uma alternativa seria considerar a derivada $W(x)$ não no sentido de distribuições de Schwartz mas sim no sentido da "white noise analysis" como na expressão (0.2). Por exemplo, Holden et al [28, 29], usando a teoria "white noise" de Hida, consideram em vez de soluções dadas por

$$\omega \mapsto u(\cdot, \omega) \in H^\alpha(\mathbf{R}^d),$$

eles consideram soluções dadas por funções

$$x \mapsto u(x, \cdot) \in (S)_{-1}; \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

onde $(S)_{-1}$ é o espaço de Kondratiev munido do produto Wick como operação produto. Veja por exemplo, [28] e [33] para maiores detalhes. Deve ser comentado que existem outras abordagens para o estudo de EDP estocásticas. Analogamente ao caso determinístico, podemos tratar EDP estocásticas como equações diferenciais estocásticas em dimensão infinita utilizando-se a teoria de semigrupos. Veja por exemplo as monografias [9] e [21].

Além de problemas de existência e unicidade de soluções suaves para equações estocásticas, podemos citar o estudo qualitativo de tais soluções, tais como ergodicidade. Neste caso, a teoria de processos de Markov desenvolvida ao longo dos últimos 60 anos por diferentes autores exerce papel fundamental. Por exemplo, considere a seguinte equação de evolução estocástica num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$

$$dX_t = (AX_t + FX_t)dt + GX_t dB_t; \quad X_0 = \omega_0 \in \mathcal{H}, \quad (0.4)$$

onde B é um movimento Browniano cilíndrico num espaço de Hilbert V tal que $V \supset \mathcal{H}$, A um gerador infinitesimal sobre $\mathcal{H}$, F uma aplicação não-linear em $\mathcal{H}$ e G um operador linear limitado em V . Sob certas hipóteses de regularidade sobre A, F e G , pode-se mostrar que (0.4) define um fluxo estocástico sobre $\mathcal{H}$, no sentido de que existe uma família de aplicações contínuas $\Phi_t : \Omega \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $\omega_t = \Phi_t(B, \omega_0)$ é a solução de (0.4) com condição inicial ω_0 e ruído B . Além disso, pode-se mostrar que (0.4) gera um semigrupo Markoviano Feller $\mathcal{P}_t$ sobre $\mathcal{H}$, dado por $\mathcal{P}_t \varphi(\omega_0) = \mathbb{E}_{\omega_0} \varphi(\omega_t)$. Aqui, φ denota qualquer função limitada mensurável de $\mathcal{H}$ para $\mathbf{R}$, $\mathbb{E}_{\omega_0}$ denota o valor esperado das soluções de (0.4) com respeito às condições iniciais ω_0 . Lembremos que uma *medida*

invariante para (0.4) é uma medida de probabilidade μ_* em $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{P}_t^* \mu_* = \mu_*$ para todo $t > 0$, onde $\mathcal{P}_t^*$ é o semigrupo sobre medidas dual à $\mathcal{P}_t$. Geralmente, a existência da medida invariante é obtida através de usuais argumentos de compacidade. A unicidade da medida invariante é em geral bem mais delicada. A importância da unicidade é ilustrada pelo fato que este implica

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\omega_t) dt = \int_{\mathcal{H}} \varphi(\omega) \mu_*(d\omega), \quad (0.5)$$

para toda função contínua limitada φ e quase toda- μ_* condição inicial $\omega_0 \in \mathcal{H}$. Em geral, a unicidade da medida invariante implica ergodicidade do sistema dinâmico canônico adjacente. Vários métodos podem ser usados no estudo da unicidade da medida invariante μ_* . Por exemplo, podemos explorar propriedades estruturais de sistemas Markovianos tais como irreducibilidade e propriedade forte Feller para mostrar a unicidade da medida invariante. Lembremos as seguintes definições.

Definição 0.1: Dizemos que um semigrupo Markoviano $\mathcal{Q}_t$ sobre um espaço Polônês $\mathcal{X}$ é *forte Feller* no tempo $t > 0$ se $\mathcal{Q}_t \varphi$ é uma função contínua limitada para toda φ função mensurável e limitada em $\mathcal{X}$.

Definição 0.2: Dizemos que um semigrupo Markoviano $\mathcal{Q}_t$ é *topologicamente irreduzível* no tempo $t > 0$ se $\mathcal{Q}_t(x; U) > 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo U aberto não-vazio de $\mathcal{X}$.

Um resultado padrão usualmente atribuído à Doob and Khasminski [12] afirma que

Teorema 0.3: *Se um processo de Markov sobre um espaço Polônês $\mathcal{X}$ com probabilidades de transição $\mathcal{Q}_t$ é topologicamente irreduzível e forte Feller, então existe no máximo uma medida de probabilidade invariante.*

irreducibilidade topológica em geral requer algum tipo de não-degeneracidade do termo de difusão G em (0.4). A propriedade forte Feller é em geral mais delicada, dependendo da natureza intrínseca da equação. Lembremos que se $\mathcal{P}_t$ é gerado por uma difusão com coeficientes suaves em $\mathbf{R}^d$, o teorema de Hörmander [30] nos fornece um critério eficiente para sabermos se o respectivo semigrupo é forte Feller. Infelizmente, devido ao fato da inexistência de uma medida de Lebesgue em dimensão infinita, difusões em dimensão infinita não podem ser estudados diretamente utilizando-se do teorema de Hörmander. Além disso, a propriedade forte Feller se mostra bem menos comum em dimensão infinita. Porém, em alguns casos de não-degeneracidade do ruído podemos usar a bem conhecida fórmula de Bismut-Elworthy [17] para provarmos a propriedade forte Feller,

$$\nabla \mathcal{P}_t \varphi(x) \xi = \frac{1}{t} \mathbf{E} \left[\varphi(X(t, x)) \int_0^t \langle G^{-1}(X(s, x)) J_{0,s}(x) \xi, dB \rangle \right], \quad (0.6)$$

onde ∇ denota a derivada de Fréchet em $\mathcal{H}$, $x, \xi \in \mathcal{H}$, φ uma função teste e F e G operadores suaves na equação (0.4). Aqui, $X(\cdot, x)$ denota a solução de (0.4) com condição inicial $x \in \mathcal{H}$, $J_{0,s}(x)\xi$ é o jacobiano de $X(s, x)$ na variável x e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de $\mathcal{H}$. Além disso, a integral acima é a usual integral de Itô. A importância da fórmula (0.6) reside no seguinte resultado elementar.

Proposição 0.4: *Um semigrupo Markoviano $\{\mathcal{Q}_s; s \geq 0\}$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é forte Feller no tempo $t > 0$ se para toda $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{R}$ com $\|\varphi\|_\infty := \sup_{z \in \mathcal{H}} |\varphi(z)|$ e $\|\nabla \varphi\|_\infty$ finitos temos que*

$$|\nabla \mathcal{Q}_t \varphi(x)| \leq C(\|x\|) \|\varphi\|_\infty, \quad (0.7)$$

onde $C : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função não-decrescente.

Obviamente que se $\mathcal{Q}_t$ satisfaz a estimativa acima então a função $x \mapsto \mathcal{Q}_t(x, \cdot)$ é contínua se o espaço das medidas de probabilidade em $\mathcal{X}$ for equipado com a topologia da variação total. Deve ser notado que a propriedade forte Feller é equivalente à continuidade da função $x \mapsto \mathcal{Q}_t(x, \cdot)$ se o espaço das medidas de probabilidade em $\mathcal{X}$ for equipado com a topologia da convergência forte. Além disso, a topologia da convergência forte é mais fraca que a topologia da variação total. De fato, em exemplos concretos é bem raro provarmos a propriedade forte Feller sem a obtenção de algum tipo de estimativa sobre o gradiente de $\mathcal{Q}_t \varphi(x)$. A dificuldade de provarmos a propriedade forte Feller sem passarmos por estimativas como (0.7) reside no fato que a topologia da convergência forte de medidas não é metrizável. Dito isto, gostaríamos de dizer que a continuidade da função $x \mapsto \mathcal{Q}_t(x, \cdot)$ na topologia da variação total nos parece mais natural em casos concretos do que a topologia da convergência forte, muito embora o teorema de Doob em (0.3) seja válido nesta topologia.

Nos parágrafos anteriores discutimos brevemente alguns resultados e métodos fundamentais para a análise estocástica do movimento Browniano (em geral semimartingales e processos Markovianos). Porém, devido ao crescente interesse em estudar problemas físicos e financeiros através de processos estocásticos que exibem um grau de dependência não-trivial, observa-se nos últimos anos um grande interesse sobre processos com incrementos dependentes. Um exemplo canônico de tal processo é o chamado movimento Browniano fracionário (mBf). Introduzido por Kolmogorov e estudado inicialmente por Mandelbrot e Van Ness [48], o mBf de parâmetro $H \in (0, 1)$ é um processo Gaussiano centrado $\{B_t^H, t \geq 0\}$ com função de covariância dada por

$$\mathbf{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} \left(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} \right),$$

onde se $H = 1/2$ então B^H é o movimento Browniano padrão e B^H é um semimartingale se, e somente se, $H = 1/2$ (veja por exemplo Lin [44] para maiores detalhes). A

análise estocástica para o mBf é uma área importante a ser explorada, visto que se trata de um processo gaussiano (não semimartingale) com propriedades mais gerais do que o movimento Browniano tradicional, o qual é uma caso particular. A dificuldade principal reside no fato de que não sendo um processo semimartingale, a análise estocástica usual desenvolvida nas últimas décadas não se aplica. Recentemente, uma série de artigos sobre integração estocástica e equações diferenciais estocásticas para o mBf tem surgido. Porém, até o momento o problema continua em aberto. De fato, não existe uma integração estocástica canônica que nos leve a resolução de equações diferenciais estocásticas e a extensão da formula de Itô de forma natural. Porém, quando $H > 1/2$ então podemos utilizar a integral de Young [64, 65] para o estudo de equações estocásticas com mBf.

Até o momento três abordagens merecem destaque na tentativa de se estabelecer um cálculo estocástico para o mBf: O cálculo de Malliavin, a "white noise analysis" e a "rough path theory". Deve ser notado que desde que o mBf é um processo gaussiano então o cálculo de Malliavin e a "white noise analysis" podem ser aplicados. Em relação ao primeiro (veja por exemplo [1] e [2]), a estratégia natural é o desenvolvimento da integral estocástica através do operador divergente sobre o espaço gaussiano do mBf, idéia esta já utilizada no estudo do cálculo estocástico antecipativo. Em relação a segunda (veja [31],[16] e [5]), a idéia básica é a construção do mBf no espaço white noise e a introdução de um cálculo de Wick natural que estenda resultados para $H \neq 1/2$. A "rough path theory" introduzida por Lyons [46] é até agora a única abordagem que permite resolver equações diferenciais estocásticas perturbadas pelo mBf de parâmetro $H > 1/3$ (Veja [7] e [8]). Até o momento, a resolução de equações estocásticas através da "rough path theory" está restrita à equações onde o termo de *drift* é globalmente limitado, não cobrindo portanto condições de crescimento linear.

Dito isto, vamos resumir na próxima seção as principais contribuições da tese.

0.2 Principais Resultados

Equações diferenciais estocásticas em dimensão infinita perturbadas pelo mBf somente recentemente começaram a ser estudadas. Por exemplo, Maslowsky e Nualart [49] estudam a seguinte equação estocástica parabólica

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathcal{L}u(t, x) + f(u(t, x)) + b(u(t, x)) \frac{\partial B^H(t, x)}{\partial t} \quad (0.8)$$

onde f and b são coeficientes com algumas propriedades de regularidade, $\mathcal{L}$ é um operador diferencial elíptico de ordem $2m$ sobre $L^2(\mathbf{R}^d)$ and B^H é um mBf com operador de covariância nuclear. Utilizando uma abordagem *pathwise* e métodos de semigrupo,

eles obtiveram um resultado de existência e unicidade para (0.8) somente se $H > \frac{d}{4m}$ para $H > \frac{1}{2}$. Equações de evolução lineares com ruído aditivo perturbadas por um mBf cilíndrico foram estudadas por Duncan et al [14] e Tindel et al [59] no sentido de Skorohod.

Usando métodos da "white noise analysis", Hu et al [31] estuda uma equação do calor linear sobre $[0, \infty) \times \mathbf{R}^d$ com ruído aditivo fracionário de parâmetro $H = (h_0, h_1, \dots, h_d) \in (0, 1)^{d+1}$. Hu [32] estuda uma equação do calor linear com ruído fracionário multiplicativo para $\frac{1}{2} < H < 1$.

Na primeira parte da tese estudamos equações estocásticas em dimensão infinita perturbadas por um ruído fracionário na abordagem da "white noise analysis". Nosso interesse é a seguinte equação diferencial estocástica

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + FX(t) + BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t); \quad X(0) = \theta \in S(E)_{-1}, \quad (0.9)$$

onde A é um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo sobre um espaço de Hilbert separável E , F uma função Lipschitz, B um operador linear limitado em E e $\mathbb{W}_H$ é o ruído fracionário de parâmetro $H \in (0, 1)$. Aqui, $\diamond$ denota o produto Wick no espaço de Kondratiev $S(E)_{-1}$. Nossos resultados permitem solucionar a equação (0.8) para qualquer $H \in (0, 1)$ e $d \geq 1$. O preço que temos de pagar pelo ruído multiplicativo e arbitrariedade da dimensão espacial d e de $H \in (0, 1)$ é que nossas soluções são (em geral) distribuições estocásticas, em vez de variáveis aleatórias com algum grau de integrabilidade. Tal particularidade não é surpreendente devido ao fato que estamos lhe dando com funcionais do tipo (0.2) em vez de (0.1).

Queremos estudar soluções forte e generalizadas de (0.9) no espaço $S(E)_{-1}$. Por solução forte, queremos dizer uma função $S(E)_{-1}$ -continuamente diferenciável satisfazendo (0.9). Por solução generalizada, queremos dizer a chamada solução *mild* da equação dada por

$$X(t) = S(t)\theta + \int_0^t S(t-s)FX(s)ds + \int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds, \quad (0.10)$$

onde $\{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ é o semigrupo fortemente contínuo gerado por A e as integrais acima são consideradas na topologia limite indutiva de $S(E)_{-1}$. É fácil ver que uma solução forte deve ser dada por (0.10). Nosso principal teorema de existência e unicidade é o seguinte.

Teorema 0.5: *Seja $(A, D(A))$ um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo sobre E , $F : E \rightarrow E$ uma função Lipschitz com crescimento linear e B um operador linear limitado em E tal que exista uma base ortonormal $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ e uma sequência de números reais $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ tais que $Be_i = \lambda_i e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então para qualquer $H \in (0, 1)$ e para cada $\theta \in S(F)_{-1}$ existe uma única solução generalizada $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ de (0.9) tomando valores em $S(E)_{-1}$.*

Se considerarmos a equação (0.9) perturbada por um ruído aditivo e linear ($F \equiv 0$), então obtemos o seguinte resultado. A seguir, $\int_0^t f(s) \delta \mathbb{W}_H(s)$ denota a integral Hitsuda-Skorohod com respeito ao ruído fracionário $\mathbb{W}_H$.

Teorema 0.6: *Seja $(A, D(A))$ um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em E e B um operador linear limitado em E . Então para qualquer $H \in (0, 1)$ e para cada $\theta \in D(A)_{-1}$ existe uma única solução forte $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ de (0.9) tomando valores em $S(E)_{-1}$ dada por*

$$X(t) = S(t)\theta + \int_0^t S(t-s)B\delta \mathbb{W}_H(s).$$

Os teoremas acima têm aplicações imediatas na resolução de EDP estocásticas do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathcal{L}u(t, x) &= f(u(t, x)) + b(u(t, x)) \diamond W_H(t, x); (t, x) \in [0, T] \times O, \\ u(0, x) &= u_0(x); x \in O \subset \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (0.11)$$

onde O é um aberto limitado de $\mathbf{R}^d$ com fronteira suave e $\mathcal{L}$ é um operador diferencial de ordem $2m$ dado por

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_{\alpha\beta} \partial^\beta),$$

onde $a_{\alpha\beta}$ são funções reais suaves sobre $\bar{O}$.

A segunda parte da tese é voltada ao problema de ergodicidade de sistemas não-Markovianos. Como principal aplicação, estudamos equações diferenciais estocásticas perturbadas pelo mBf. A fundamentação teórica utilizada é o trabalho de Hairer [22]. Deve ser notado que um dos principais problemas no estudo de propriedades ergódicas de sistemas não-Markovianos é a falta de resultados com respeito à relação entre suas propriedades estruturais e a unicidade do estado estacionário. Esta tese busca preencher tal lacuna, apresentando os conceitos de propriedade *forte Feller* e *irredutibilidade* para uma classe ampla de sistemas não-Markovianos. Essas duas propriedades em conjunto garantem a unicidade do estado estacionário, análogamente ao caso Markoviano clássico.

Nesta linha, nosso principal resultado é o seguinte. Tal resultado é análogo ao famoso teorema de Doob (veja Teorema (0.3)) para sistemas Markovianos.

Teorema 0.7: *Se um sistema dinâmico estocástico quase-Markoviano é irredutível no tempo $t > 0$ e forte Feller no tempo $s > 0$, então existe no máximo uma medida invariante para o sistema.*

Para as definições de *irredutibilidade*, propriedade *forte Feller* e de *quase-Markoviano*, veja Capítulo 3. Sem entrar nos detalhes técnicos das definições e conceitos desenvolvidos, gostaríamos de somente comentar heurísticamente o significado de um sistema dinâmico estocástico *quase-Markoviano*. Primeiramente, para fixar as idéias, lembremos a definição de um processo de Markov.

Definição 0.8: Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ um espaço mensurável onde $\mathcal{X}$ é um espaço Polônes e $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ sua respectiva sigma-álgebra de Borel. Dizemos que um processo $\mathcal{F}_t$ -adaptado $\{X_t, \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ tomando valores em $\mathcal{X}$ sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um *processo de Markov* com distribuição inicial $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ se

$$\text{i) } \mathbb{P}[X_0 \in \Gamma] = \mu(\Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{X});$$

$$\text{ii) para } s, t \geq 0 \text{ e } \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

$$\mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma | X_s], \quad \mathbb{P} - a.s.$$

Considere agora um processo não-Markoviano tomando valores em $\mathcal{X}$. Podemos pensar, por exemplo, em um funcional da forma

$$Z_t := f(Z_t, t \in T), \quad T : \text{um intervalo de } \mathbf{R}_+, \quad (0.12)$$

onde Z_t não é Markoviano. Dado que Z não é um processo de Markov (em geral), então existe uma dependência do futuro de Z em relação ao *passado* do ruído Z na dinâmica que acontece no espaço $\mathcal{X}$. Desta forma, em um dado momento $t + s > 0$ existe um

fluxo de informação não-trivial gerado por Z no intervalo $[0, s)$ que deve ser levada em consideração na construção da dinâmica de $\mathcal{Z}$ em $\mathcal{X}$. Isto nos levaria a desigualdade

$$\mathbb{P}[Z_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_s] \neq \mathbb{P}[Z_{t+s} \in \Gamma | Z_s]$$

para algum $t, s > 0$ e $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Como a propriedade de Markov deve valer para qualquer instante de tempo $t + s > 0$ então somos levados a argumentar que o *passado* de Z tem papel fundamental na lei probabilística que rege a dinâmica de $\mathcal{Z}$ em $\mathcal{X}$, representada pela propriedade ii) na definição 0.8. O termo *passado* do ruído deve ser interpretado como a memória (não-trivial) inserida no sistema pelo ruído não-Markoviano. Esta memória é que deve ser analisada no estudo do comportamento assintótico de Z_t .

Heuristicamente falando, um sistema estocástico *quase-Markoviano* é um sistema pelo qual a probabilidade de que trajetórias distintas no *passado* de Z gerem dinâmicas equivalentes (em lei) no espaço de trajetórias para qualquer condição inicial em $\mathcal{X}$ é positiva. Observa-se que todo sistema Markoviano seria *quase-Markoviano* considerando que neste caso a referida probabilidade seria sempre igual à 1. Em várias situações, incluindo sistemas perturbados pelo mBf, o processo estocástico de interesse é não-Markoviano porém observa-se uma probabilidade positiva de que trajetórias distintas no *passado* do ruído gerem dinâmicas equivalentes para qualquer condição inicial do sistema. A propriedade de *quase-Markov* capta bem tal situação.

Como aplicação deste teorema abstrato, nosso objetivo é o estudo da seguinte equação diferencial estocástica em $\mathbf{R}^d$

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s) ds + \int_0^t \sigma(x_s) dB_H(s), \quad (0.13)$$

onde $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ e $\sigma : \mathbf{R}^d \rightarrow M_{d \times d}$ satisfazem hipóteses de regularidade usuais. Aqui $M_{d \times d}$ denota o espaço das matrizes quadradas reais. A integral acima com respeito ao mBf B_H é interpretada *pathwise* no sentido de Young [64]. A seguir, denotamos por $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d)$ o espaço das funções contínuas $b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ tais que $b(0) = 0$, $\mathbf{P}_H$ a medida de Wiener do mBf em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_-, \mathbf{R}^d)$ e $\mathcal{H}(\omega, \cdot)$ a desintegração da medida de Wiener do mBf em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d)$ com respeito à $\mathbf{P}_H$, onde $\omega \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_-, \mathbf{R}^d)$. Também escrevemos $X(x, \cdot)$ a solução de (0.13) com condição inicial $x \in \mathbf{R}^d$ e $\mathcal{W}$ um espaço de Banach continuamente imerso em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_-, \mathbf{R}^d)$ tal que $\mathbf{P}_H(\mathcal{W}) = 1$.

O ingrediente crucial na demonstração da propriedade *forte Feller* introduzida na tese é uma fórmula de Bismut-Elworthy para a equação (0.13). Esta fórmula é importante para suavisarmos as seguintes aplicações.

$$\mathcal{Q}g(x, \omega) := \int_{\mathcal{C}(1, T)} g(z) R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x, \omega)}(dz), \quad (x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}, \quad (0.14)$$

para $g : \mathcal{C}(1, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ uma função mensurável limitada, R_t a aplicação restrição de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ em $\mathcal{C}(1, T; \mathbf{R}^d)$ e $\mathcal{L}\delta_{(x, \omega)} := X(x, \cdot)^* \mathcal{H}(\omega, \cdot)$. Aqui utilizamos a notação $\ell^* \mu$ para indicar a medida induzida por uma função mensurável ℓ através de uma medida μ . Se T_N é um *tempo de parada*, então escrevemos

$$\mathcal{Q}^N g(x, \omega) := \int_{\mathcal{C}(1, T)} g(z) R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(x, \omega)}(dz), \quad (x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}, \quad (0.15)$$

onde $\mathcal{L}^N \delta_{(x, \omega)} = X^N(x, \cdot)^* \mathcal{H}(\omega, \cdot)$ e $X^N(x, \cdot)$ é a solução de (0.13) parado (*stopped process*) no tempo T_N . Analogamente, consideramos $J^N(x, \cdot)$ o jacobiano de $X^N(x, \cdot)$. Além disso, escrevemos a solução $X(x, \cdot, \omega)$ e seu respectivo jacobiano $J(x, \cdot, \omega)$ dependendo do *passado* do mBf $\omega \in \mathcal{W}$.

A seguir, $H > 1/2$, $\int g dB$ denota a usual integral de Itô, $D_{0+}^{H-1/2}$ a derivada fracionária de ordem $(H - 1/2)$ do tipo Marchaud (veja [56]) e ∇_z a usual derivada em $\mathbf{R}^d$. Além disso, vamos fixar $(x, y) \in \mathbf{R}^{2d}$ e denotar $\bar{B}_{x, y} := \{z \in \mathbf{R}^d; \|z\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)\}$ e B_1 a bola aberta em $\mathbf{R}^d$ na origem de raio 1. Para estabelecermos a propriedade *forte Feller* correspondente à equação (0.13) a seguinte fórmula é fundamental.

Teorema 0.9: *Fixe $1 < T < \infty$, $N > 0$, e considere $\varphi : \mathcal{C}(1, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ uma função limitada Fréchet diferenciável com derivada limitada. Existe um tempo de parada T_N tal que para todo $z \in B_{(x, y)}$, $\xi \in \bar{B}_1$ e $\omega \in \mathcal{W}$ temos*

$$\begin{aligned} \nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) \xi &= \mathbf{E} \left(\varphi(X^N(z, \cdot, \omega)) \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^T \langle \kappa_H D_{0+}^{H-1/2} [h \sigma^{-1}(X^N(z, \cdot, \omega)) J_{0, \cdot}^N(z, \cdot, \omega) \xi](s), dB(s) \rangle_{\mathbf{R}^d} \right), \end{aligned} \quad (0.16)$$

onde h é uma função suave arbitraria tal que $\int_0^1 h(s) ds = 1$, κ_H é uma constante tal que $\kappa_{1/2} = 1$ e a esperança do lado direito é dada pela medida de Wiener.

Observamos que se $H = 1/2$, então a solução da equação (0.13) é um processo Markoviano e portanto todos os objetos escritos acima (dependendo de $\omega \in \mathcal{W}$) independem do passado do mBf ω . Em particular, neste caso a fórmula (0.16) é a usual fórmula de Bismut-Elworthy sendo que no espaço de trajetórias (compare com a fórmula (0.6)). É importante salientar que desde que não temos a propriedade de semigrupo para $H \neq 1/2$, então somos forçados a trabalhar no espaço de trajetórias $\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)$. Desta forma, de um problema inicial em dimensão finita passamos a um problema de dimensão infinita, devido a correlação não-trivial exibida pelo mBf de parâmetro $H > 1/2$.

O próximo resultado é uma aplicação direta do Teorema 0.7 contanto que o sistema dinâmico estocástico induzido pela equação (0.13) seja *quase-Markoviano* e *irreduzível*.

Teorema 0.10: *Existe uma única solução estacionária para a equação (0.13) o qual é adaptada à filtração gerada pelo movimento Browniano fracionário de parâmetro $H > 1/2$.*

Até onde sabemos, tal resultado é o primeiro a mostrar a existência e unicidade de uma solução estacionária para equações diferenciais estocásticas perturbadas pelo mBf com ruído multiplicativo. Os únicos resultados existentes são para equações com ruído aditivo. Hairer [22] prova tal resultado, para $H \in (0, 1)$ arbitrário, fazendo uso de um método de acoplagem que se utiliza da aditividade de forma essencial. Maslowsky e Schmalfuss [50] provam que equações de evolução estocásticas semilineares com ruído aditivo definem *sistemas dinâmicos aleatórios* [3] o qual admitem um único ponto fixo atrator, se $H > 1/2$. Analogamente ao trabalho de Hairer, o argumento utilizado por eles funciona bem no caso aditivo, não parecendo funcionar para o caso multiplicativo. Nosso argumento de *linearização infinitesimal* capta bem a aleatoriedade intrínseca do sistema e nos parece bem mais simples que outros argumentos utilizados até agora.

Capítulo 1

Revisão da *White Noise Analysis*

Por conveniência do leitor iremos resumir brevemente neste capítulo alguns objetos básicos da teoria *white noise* desenvolvida por Hida [25, 26, 27]. O leitor familiar com esta teoria pode seguramente ir direto ao Capítulo 2 onde estudamos uma particular classe de equações de evolução estocásticas na abordagem *white noise*. As referências padrão para uma exposição sistemática e detalhada do material aqui apresentado (e de muito mais) são Kuo [38], Huang e Yan [33] e Hida et al. [27].

Primeiramente introduziremos o espaço de probabilidade básico que será usado no Capítulo 2. A seguir, d denotará um inteiro positivo e fixo o qual será interpretado como a *dimensão do parâmetro*. Seja $S = S(\mathbf{R}^d)$ o espaço de Schwartz das funções C^∞ em $\mathbf{R}^d$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |x|^k |\partial^\alpha g(x)| < \infty$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multi-índices de inteiros não-negativos e k número natural. Aqui utilizamos a notação padrão

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d} f \quad \text{onde } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Sabemos que S é um espaço de Fréchet sob a família de semi-normas

$$\|f\|_{k,\alpha} := \sup_{x \in \mathbf{R}^d} (1 + |x|^k) |\partial^\alpha f(x)|,$$

onde $k \geq 0$ é um inteiro. O dual topológico $S' = S'(\mathbf{R}^d)$ de S equipado com a topologia fraca* é o espaço das *distribuições temperadas*. Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S')$ a sigma-álgebra de Borel

de S' . Vamos considerar agora a medida de probabilidade μ em $\mathcal{B}$ que é caracterizada pela seguinte propriedade

$$\mathbf{E}[e^{i\langle \cdot, \varphi \rangle}] := \int_{S'} e^{i\langle \omega, \varphi \rangle} \mu(d\omega) = e^{-1/2\|\varphi\|^2} \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}, \quad (1.1)$$

onde $\|\varphi\|^2 = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}^2$, $\langle \omega, \varphi \rangle := \omega(\varphi)$ para $\omega \in S'$ e $\mathbf{E}$ denota o valor esperado com respeito à μ . A existência de tal medida é dada pelo *teorema de Bochner-Milnlos*, o qual pode ser visto em [28]. Chamamos a trinca $(S', \mathcal{B}, \mu)$ de espaço de probabilidade *white noise*. A justificativa para este nome é devido ao seguinte:

De (1.1) segue que

$$\mathbf{E}[\langle \cdot, \varphi \rangle^2] = \|\varphi\|^2; \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.2)$$

Por esta isometria e pela densidade de $\mathcal{S}$ em $L^2(\mathbf{R}^d)$ podemos definir

$$\langle \omega, \varphi \rangle := \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \omega, \varphi_k \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in L^2(\mathbf{R}^d) \quad (1.3)$$

(o limite em $L^2(\mu)$) onde φ_k qualquer sequência em $\mathcal{S}$ tal que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ em $L^2(\mathbf{R}^d)$. Em particular, isto nos permite definir

$$\tilde{B}_t := \tilde{B}_{t_1, \dots, t_d}(\omega) := \langle \omega, \chi_{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_d]} \rangle \quad \text{para } t_k \in \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

onde $[0, t_k]$ é interpretado como $[t_k, 0]$ se $t_k < 0$. Então $\tilde{B}_t$ é (essencialmente) um d -parâmetro movimento Browniano, no sentido de que existe uma versão t -contínua B_t de $\tilde{B}_t$ tal que B_t é um d -parâmetro movimento Browniano. A (d -parâmetro) integral de Itô de $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^d)$ é definida naturalmente por

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(t_1, \dots, t_d) dB_{t_1, \dots, t_d} := \langle \omega, \varphi \rangle. \quad (1.5)$$

Notamos que se $d = 1$ e $\text{supp} \varphi \in [0, \infty)$ então (1.5) coincide com a integral clássica de Itô. O (d -parâmetro) processo *white-noise* W_φ é definido por

$$W_\varphi := \langle \omega, \varphi \rangle \quad \text{para } \varphi \in L^2(\mathbf{R}^d), \omega \in S'.$$

Por integração por partes para integrais de Wiener-Itô temos que

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(t) dB_t = (-1)^d \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial^d \varphi}{\partial t_1 \dots \partial t_d}(t) B_t(\omega) dt.$$

Portanto

$$W_\varphi(\omega) = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(t) dB_t = \left((-1)^d \frac{\partial^d \varphi}{\partial t_1 \dots \partial t_d}, B_t \right)_{\mathbf{R}^d} = \left(\varphi, \frac{\partial^d B}{\partial t_1 \dots \partial t_d} \right),$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{R}^d}$ denota o usual produto interno de $L^2(\mathbf{R}^d)$. Em outras palavras, temos no sentido de distribuições

$$W = \frac{\partial^d B}{\partial t_1 \dots \partial t_d}.$$

Na linguagem do cálculo de Malliavin a quadrupla $(S', \mathcal{B}, \mu; L^2(\mathbf{R}^d))$ forma um *espaço de probabilidade Gaussiano irredutível*, onde W é um processo Gaussiano isonormal. Iremos agora representar o espaço $L^2(\mu)$ como uma particular soma direta ortogonal Hilbertiana através dos subespaços de caos de Wiener - Itô gerados por polinômios de Hermite.

Para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $x \in \mathbf{R}$ considere os *polinômios de Hermite*

$$h_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}).$$

Para uma base ortonormal $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2(\mathbf{R}^d)$ definimos os *polinômios de Hermite generalizados* dados por

$$\mathbf{H}_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^\infty h_{\alpha_i}(\langle \omega, \xi_i \rangle); \quad \alpha \in \mathcal{N}, \quad (1.6)$$

onde $\mathcal{N}$ é o conjunto de sequências α em $\mathbb{N}_0$ tais que $|\alpha| = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i < \infty$.

O seguinte resultado é um caso particular do chamado teorema da *decomposição de caos de Wiener-Itô*. Essencialmente, o resultado nos diz que o espaço dos funcionais quadrado integráveis sobre o espaço de probabilidade gaussiano $(S', \mathcal{B}, \mu; L^2(\mathbf{R}^d))$ é isomorfo ao espaço Fock simétrico sobre $L^2(\mathbf{R}^d)$. Este é um dos mais importantes resultados em análise estocástica.

Teorema 1.1 (Decomposição de Caos de Wiener - Itô): *Considere o espaço de probabilidade Gaussiano $(S', \mathcal{B}, \mu; L^2(\mathbf{R}^d))$ e fixe uma base qualquer $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2(\mathbf{R}^d)$ em (1.6). Então $\{(\alpha!)^{-1/2} \mathbf{H}_\alpha; \alpha \in \mathcal{N}\}$ constitui uma base ortonormal para $L^2(\mu)$. Seja $\mathcal{H}_0 \equiv \mathbf{R}$ e para $n \geq 1$ considere $\mathcal{H}_n$ o subespaço linear fechado gerado por $\{\mathbf{H}_\alpha; \alpha \in \mathcal{N}_n\}$. Então*

$$L^2(\mu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n,$$

a decomposição é independente da escolha da base em $L^2(\mathbf{R}^d)$. Além do mais,

$$L^2(S', \mathcal{B}, \mu) \cong \Gamma(L^2(\mathbf{R}^d)),$$

isto é, o $L^2(\mu)$ é isomorfo ao espaço Fock simétrico sobre $L^2(\mathbf{R}^d)$.

Para a demonstração deste teorema veja, por exemplo, Huang e Yan [33]. O teorema implica que qualquer $f \in L^2(\mu)$ admite uma única representação

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha$$

onde $c_\alpha \in \mathbf{R}$ para cada $\alpha \in \mathcal{N}$ e além disso

$$\|f\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha! c_\alpha^2.$$

Também podemos decompor $L^2(\mu)$ através de integrais múltiplas estocásticas. De fato, as duas decomposições são idênticas, resultado este devido à Itô [34]. Porém, para os propósitos do Capítulo 2 a decomposição acima será mais conveniente. O leitor interessado pode consultar Huang e Yan [33] para maiores detalhes.

Se $\gamma \in (\mathbf{R}^{\mathbb{N}})_c$ (i.e., somente uma quantidade finita de números reais γ_j são diferentes de zero), denotamos $(2\mathbb{N})^\gamma := \prod_i (2i)^{\gamma_i}$. A seguir vamos definir os espaços das funções testes e as respectivas distribuições no contexto estocástico da "white noise analysis".

Definição 1.2: Os espaços de Kondratiev das funções testes e distribuições estocásticas.

Para $0 \leq \varrho \leq 1$, seja $(S)_{\varrho,q}$ o espaço das funções

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_{\alpha} \mathbf{H}_{\alpha} \in L^2(\mu)$$

tais que

$$\|f\|_{\varrho,q}^2 := \sum_{\alpha} c_{\alpha}^2 (\alpha!)^{1+\varrho} (2\mathbb{N})^{q\alpha} < \infty.$$

O espaço das funções teste estocásticas é definido por

$$(S)_{\varrho} := \bigcap_{q=1}^{\infty} (S)_{\varrho,q},$$

onde $(S)_{\varrho}$ é munido da topologia limite projetivo induzida pelos espaços de Hilbert $(S)_{\varrho,q}$.

Para $0 \leq \varrho \leq 1$, seja $(S)_{-\varrho,-q}$ constituído de expansões formais (sequências em $\mathbf{R}$)

$$F = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} b_{\alpha} \mathbf{H}_{\alpha}$$

tais que

$$\|F\|_{-\varrho,-q}^2 := \sum_{\alpha} b_{\alpha}^2 (\alpha!)^{1-\varrho} (2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty.$$

O espaço de distribuições estocásticas é definido por

$$(S)_{-\varrho} := \bigcup_{q=1}^{\infty} (S)_{-\varrho,-q},$$

onde $(S)_{-\varrho}$ é munido da topologia limite indutiva induzida pelos espaços de Hilbert $(S)_{-\varrho,-q}$.

Observe que sendo $(S)_{\varrho}$ um espaço nuclear então $(S)_{-\varrho}$ é o dual topológico de $(S)_{\varrho}$, onde a ação é dada por

$$\langle F, f \rangle = \sum_{\alpha} b_{\alpha} c_{\alpha} \alpha!,$$

para $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} b_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in (S)_{-\varrho}$ e $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in (S)_\varrho$.

É fácil ver que temos as seguintes inclusões

$$(S)_1 \subset (S)_\varrho \subset L^2(\mu) \subset (S)_{-\varrho} \subset (S)_{-1}.$$

Observe a analogia que temos com a teoria de espaços de Sobolev. Neste caso, temos a fundamental trinca de Gelfand

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset L^2(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d).$$

Aqui a medida de Lebesgue é trocada pela medida Bochner-Minlos μ e as funções teste $(S)_\varrho$ apresentam suavidade em termos de condições de crescimento em seus coeficientes de Fourier. Isto é, diferenciabilidade clássica é trocada por integrabilidade.

Os espaços definidos acima têm papel fundamental na análise de equações diferenciais estocásticas onde a integral de Itô é substituída pelo *produto Wick* a ser definido em seguida. Porém antes, vamos a seguinte definição.

Definição 1.3: A *transformada de Hermite* de $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} b_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in (S)_{-1}$, denotada por $\mathcal{H}F$ ou $\tilde{F}$ é definida por

$$\mathcal{H}F = \tilde{F} := \sum_{\alpha} b_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{quando convergente})$$

Para maiores detalhes da transformada de Hermite consulte [28].

Definição 1.4: O *produto Wick* de duas funções generalizadas F e G em $(S)_{-1}$, denotada por $F \diamond G$, é a única função generalizada em $(S)_{-1}$ tal que

$$\mathcal{H}(F \diamond G) = \mathcal{H}F \cdot \mathcal{H}G.$$

Pela definição da transformada de Hermite segue que

$$F \diamond G = \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha b_\beta \mathbf{H}_{\alpha+\beta},$$

para $F = \sum_{\alpha} a_\alpha \mathbf{H}_\alpha$ e $G = \sum_{\beta} b_\beta \mathbf{H}_\beta$ em $(S)_{-1}$.

Contrário à teoria de distribuições determinística clássica, sempre podemos multiplicar (no sentido Wick) distribuições no espaço $(S)_{-1}$, o que é conveniente principalmente em equações estocásticas não-lineares. Este é um dos argumentos favoráveis para

o uso deste ferramental. Porém, um argumento mais forte é devido ao seguinte fato. Se Y_t é um processo estocástico adaptado e, por exemplo, limitado, então

$$\int_0^T Y_t dB_t = \int_0^T Y_t \diamond \mathbb{W}(t) dt$$

onde a integral do lado direito é uma integral do tipo Petti no espaço $(S)_{-1}$ e $\mathbb{W}(t)$ é a derivada do movimento Browniano B_t na topologia $(S)_{-1}$ no ponto t . Isto é, a representação da multiplicação por *white noise* em equações diferenciais estocásticas por integrais de Itô é essencialmente a multiplicação no sentido Wick. Neste sentido, o uso do produto Wick em equações estocásticas é uma extensão natural do mesmo princípio empregado por Itô. Gostaríamos também de enfatizar que o produto Wick se reduz ao produto usual se um dos fatores é determinístico. O ponto desfavorável a uso do produto Wick é a irregularidade deste nos espaço $L^p(\mu)$, mais precisamente, tais espaços não são fechados para produto Wick. Como consequência imediata as soluções de equações estocásticas com ruído multiplicativo no sentido Wick são em geral distribuições estocásticas e não variáveis aleatórias, isto é, 'perdemos' o espaço de probabilidade adjacente. Analogamente ao caso determinístico, temos que pagar um certo preço pelo uso de funções generalizadas estocásticas, muito embora consigamos dar significado matemático e físico para certas equações estocásticas complicadas (veja por exemplo (2.2)).

Capítulo 2

Equações de evolução estocásticas perturbadas pelo ruído fracionário

1

2.1 Introdução

Lembremos que um movimento Browniano fracionário (mBf) de parâmetro $H \in (0, 1)$ é um processo Gaussiano centrado $\{\beta_H(t); t \geq 0\}$ com a seguinte estrutura de covariância

$$\mathbb{E}(\beta_H(t)\beta_H(s)) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.1)$$

Pode-se mostrar que um mBf β_H é um semimartingale se, e somente se, $H = \frac{1}{2}$, onde neste caso é um movimento Browniano padrão (veja por exemplo [44, 11] para maiores detalhes). Portanto, o tradicional cálculo estocástico desenvolvido nas últimas décadas para semimartingales não pode ser aplicado. Uma das alternativas é a construção de uma teoria *white noise* para mBf. Nesta direção, Blinder [5] e Elliot e van der Hoek [16] estudaram a construção do mBf e seu respectivo cálculo estocástico na abordagem da *white noise analysis*. Baseado na representação de Lindstrom's [45], Elliot e van der Hoek desenvolveram uma teoria *white noise* para o mBf sob a medida *white noise* para qualquer $H \in (0, 1)$ fornecendo uma simples decomposição de caos de Wiener para o mBf. Ao mesmo tempo, Blinder constrói a mesma estrutura, sendo que baseada na representação de Mandelbrot-van Ness [48]. Várias outras abordagens também podem ser

¹Parte deste trabalho pode ser visto nos anais da UK-Japan Winter School 2005. Este trabalho [53] está aceito para publicação no Journal of Stochastic Analysis and Applications

consideradas na construção de um cálculo estocástico para o mBf como já anteriormente comentado.

Uma extensão natural destes problemas é o estudo de equações diferenciais parciais (EDP) estocásticas perturbadas pelo mBf. Por exemplo, Maslowsky and Nualart [49] estudam a seguinte equação parabólica estocástica

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathcal{L}u(t, x) + f(u(t, x)) + b(u(t, x)) \frac{\partial B^H(t, x)}{\partial t} \quad (2.2)$$

onde f e b são coeficientes com certas propriedades de regularidade, $\mathcal{L}$ é um operador diferencial elíptico de ordem $2m$ sobre $L^2(\mathbf{R}^d)$ and B^H é a mBf com operador de covariância nuclear. Usando uma abordagem *pathwise* e teoria de semigrupos, eles obtiveram um resultado de existência e unicidade de soluções para (2.2) somente se $H > \frac{d}{4m}$ para $H > \frac{1}{2}$. Equações de evolução estocásticas lineares com ruído aditivo perturbadas por um mBf cilíndrico foram estudadas por Duncan et al [14] e Tindel et al [59] no sentido de Skorohod.

Usando métodos da *white noise analysis*, Hu et al [31] estuda uma equação do calor sobre $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ com ruído aditivo com parâmetro de Hurst $H = (h_0, h_1, \dots, h_d) \in (0, 1)^{d+1}$. Hu [32] estuda uma equação do calor linear com ruído multiplicativo para $\frac{1}{2} < H < 1$.

O objetivo deste capítulo é o estudo de equações de estocásticas em dimensão infinita perturbadas pelo mBf sob a abordagem da *white noise analysis*. Estaremos interessados na seguinte equação diferencial estocástica

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + FX(t) + BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t) \quad (2.3)$$

sobre os espaços de distribuições estocásticas. Aqui, F é uma função Lipschitz, A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, B um operador limitado, $\diamond$ o produto Wick e $\mathbb{W}_H$ é o ruído fracionário em dimensão infinita. Este capítulo estende o trabalho de Filinkov and Sorensen [19] para o caso onde a equação de evolução é não-linear com ruído multiplicativo e perturbada pelo ruído fracionário de parâmetro arbitrário. Utilizando-se dos trabalhos [5, 16], nós provamos a existência e unicidade de solução para (2.3) para qualquer $H \in (0, 1)$. Os resultados deste capítulo permitem resolver a equação (2.2) para qualquer $H \in (0, 1)$ e $d \geq 1$ nos espaços de Kondratiev através de transformadas de Hermite e argumentos de ponto fixo.

O capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 contém a notação usada e algumas definições básicas. Na Seção 3, apresentamos os principais resultados junto com algumas aplicações à EDP estocásticas.

2.2 Preliminares

Nesta seção, nós relembremos algumas definições básicas da *white noise analysis* e fixamos a notação usada no decorrer do capítulo. Para uma revisão detalhada da *white noise analysis* e em particular sobre os espaços de Kondratiev, indicamos Holden et al. [28] e Huang e Yan [33]. Vamos começar relembrando algumas definições básicas e propriedades da teoria *white noise*.

O espaço de probabilidade adjacente é o chamado espaço *white noise* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, onde Ω é o espaço $S'(\mathbf{R})$ das distribuições temperadas, $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra gerada pela topologia fraca-estrela de $S'(\mathbf{R})$ e μ é a medida Bochner-Minlos, a única medida de probabilidade tal que

$$\int_{S'} e^{i\langle \omega, \varphi \rangle} \mu(d\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\varphi|^2},$$

para todo $\varphi \in S(\mathbf{R})$, onde $|\varphi|^2 = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})}^2$ and $\langle \omega, \varphi \rangle = \omega(\varphi)$ é a ação de $\omega \in S'(\mathbf{R})$ em $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$. Vamos trabalhar, sobre o espaço de probabilidade Gaussiano $(\Omega, \mathcal{B}, \mu; L^2(\mathbf{R}))$ munido do processo Gaussiano isonormal dado por $\langle \cdot, \varphi \rangle$ onde $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$.

Desde que estamos interessados em estudar equações estocásticas em dimensão infinita na abordagem *white noise* é natural trabalharmos sobre os espaços de Kondratiev onde as distribuições estocásticas são sequências de um espaço de Hilbert adjacente. Filinkov e Sorensen [19] desenvolveram esta idéia utilizando-se da abordagem de Holden et al [28]. Nós iremos brevemente lembrar algumas definições básicas de [19]. Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço de Hilbert separável sobre o corpo dos reais com uma base ortonormal $(e_i)_{i=1}^\infty$. Algumas vezes escrevemos $\|\cdot\|$ em vez de $\|\cdot\|_E$. Denotamos por $L^2(\mu; E)$ o espaço das funções $g : \Omega \rightarrow E$ quadrado-integráveis no sentido Bochner. Lembremos que o polinômio de Hermite generalizado é dado por

$$\mathbf{H}_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \omega, \xi_i \rangle); \quad \alpha \in \mathcal{N},$$

onde $\{h_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ são os polinômios de Hermite, $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}\}$ são as funções de Hermite constituindo uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{N}$ é o conjunto de sequências α em $\mathbb{N}_0$ tal que $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$.

Desde que $\{\mathbf{H}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{N}}$ é uma base ortogonal de $L^2(\mu)$ segue que a família $\{\mathbf{H}_\alpha e_i\}_{\alpha \in \mathcal{N}, i \in \mathbb{N}}$ é uma base ortogonal de $L^2(\mu; E)$ com a seguinte soma ortogonal Hilbertiana

$$L^2(\mu; E) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{H}_i \otimes E,$$

onde $\mathbb{H}_i$ é o subespaço linear fechado gerado pelo conjunto $\{\mathbf{H}_\alpha; \alpha \in \Lambda_k\}$ com $\Lambda_k = \{\alpha \in \mathcal{N}; |\alpha| = k\}$ e $\mathbb{H}_0 = \mathbf{R}$. Portanto, para cada $f \in L^2(\mu; E)$ existe uma única sequência $\{c_{i\alpha}; i \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathcal{N}\}$ de números reais tais que

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\infty} c_{i\alpha} \mathbf{H}_\alpha e_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i \in L^2(\mu; E),$$

onde $f_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_{i\alpha} \mathbf{H}_\alpha \in L^2(\mu)$ e $c_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i\alpha} e_i \in E$. Se $\gamma \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$, denotamos $(2\mathbb{N})^\gamma := \prod_i (2i)^{\gamma_i}$. Sob tal estrutura, a construção dos espaços de Kondratiev em dimensão infinita é imediata.

Definição 2.1: i) Para $\varrho \in [0, 1]$ e $q \in \mathbb{N}$, definimos $S(E)_{\varrho, q}$ como o espaço de funções

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i \in L^2(\mu; E)$$

tais que

$$\|f\|_{\varrho, q}^2 := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|c_\alpha\|^2 (\alpha!)^{1+\varrho} (2\mathbb{N})^{\alpha q} = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|_{\varrho, q}^2 < \infty,$$

onde $|\cdot|_{\varrho, q}$ denota a norma do espaço de Kondratiev (dimensão finita) das funções teste $(S)_{\varrho, k}$.

ii) Para $\varrho \in [0, 1]$ e $q \in \mathbb{N}$, nós definimos $S(E)_{-\varrho, -q}$ como sendo o espaço das sequências (expansões formais) em E

$$F = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} F_i e_i \quad (c_\alpha \in E)$$

tais que

$$\|F\|_{-\varrho, -q}^2 := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|c_\alpha\|^2 (\alpha!)^{1-\varrho} (2\mathbb{N})^{-\alpha q} = \sum_{i=1}^{\infty} |F_i|_{-\varrho, -q}^2 < \infty,$$

onde $\|\cdot\|_{-\varrho, -q}$ é a norma de $(S)_{-\varrho, -q}$, o dual topológico de $(S)_{\varrho, q}$.

Analogamente ao caso de dimensão finita, podemos identificar $S(E)_{-\varrho, -q}$ como o espaço dual de $S(E)_{\varrho, q}$. Também definimos

$$S(E)_{\varrho} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S(E)_{\varrho, k}, \quad S(E)_{-\varrho} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(E)_{-\varrho, -k}.$$

Vamos munir os espaços $S(E)_{\varrho}$ e $S(E)_{-\varrho}$ com as topologias limite projetiva e indutiva, respectivamente, induzida pelos espaços de Hilbert $S(E)_{\beta, r}$ onde $\beta \in [-1, 1]$ e $r \in \mathbb{Z}$. Observe que $S(E)_{-\varrho}$ é o dual de $S(E)_{\varrho}$, onde a ação é dada por

$$\langle F|f \rangle := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \langle b_\alpha, c_\alpha \rangle_E \alpha!.$$

Aqui $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} b_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in S(E)_{-\varrho}$ e $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in S(E)_{\varrho}$. Além do mais, as seguintes inclusões valem

$$S(E)_1 \subset S(E)_{\varrho} \subset S(E)_0 \subset L^2(\mu; E) \subset S(E)_{-0} \subset S(E)_{-\varrho} \subset S(E)_{-1}.$$

2.2.1 Ruído Fracionário em Dimensão Infinita e Calculo de Wick

Blinder [5] e Elliot e van der Hoek [16] obtiveram uma representação do mBf em termos da função indicadora no espaço de probabilidade Gaussiano $(\Omega, \mathcal{B}, \mu; L^2(\mathbf{R}))$. A principal diferença entre estes trabalhos reside em questões de mensurabilidade dos mBfs construídos por cada um. Deve ser notado que desde que estamos trabalhando no ambiente *white noise*, tais diferenças são irrelevantes para nossos propósitos. De fato, tais construções podem ser facilmente interligadas como sugerido por Blinder. Neste capítulo, trabalharemos com a abordagem de Elliot e van der Hoek. A idéia principal é relacionar o mBf de parâmetro $H \in (0, 1)$ ao clássico movimento Browniano através do seguinte espaço

$$L_H^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; |x|^{\frac{1}{2}-H} \hat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

onde $\hat{\cdot}$ denota a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$. Pode se mostrar que o espaço de Schwartz das funções teste e funções indicadoras estão contidos em $L_H^2(\mathbb{R})$.

O seguinte operador é fundamental na construção do mBf no espaço $(\Omega, \mathcal{B}, \mu; L^2(\mathbb{R}))$.

Definição 2.2: O operador $M = M_H$ é definido sobre funções $f \in L_H^2(\mathbb{R})$ através de

$$(\widehat{Mf})(y) = |y|^{1/2-H} \hat{f}(y); \quad y \in \mathbb{R}.$$

Considerando

$$\tilde{\beta}_H(t, \omega) = \langle \omega, M\chi_{[0,t]} \rangle,$$

e escolhendo uma modificação contínua $\beta_H(t)$ do processo acima, obtemos o mBf de parâmetro $H \in (0, 1)$ sobre $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ (veja [16] e [31] para maiores detalhes). Nós gostaríamos somente de salientar aqui que desde que $\beta_H(t) \in L^2(\mu)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $H \in (0, 1)$ então podemos desenvolver sua expansão de caos de Wiener-Itô dada por

$$\beta_H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t M\xi_k(s) ds \mathbf{H}_{\varepsilon_k}, \quad (2.4)$$

onde $\varepsilon_k = (0, 0, \dots, 1, \dots)$ com 1 na k -ésima entrada e 0 caso contrário. Pode-se mostrar que $t \mapsto \beta_H(t)$ é diferenciável no espaço de Hida $(S)_{-0}$ onde

$$\frac{d\beta_H(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k}.$$

Com o intuito de obtermos uma fácil expansão para o mBf em dimensão infinita, faremos uso da seguinte bijeção entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$

$$n(i, j) = j + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}.$$

Esta "contagem diagonal" será útil em várias situações. Quando lidarmos com equações estocásticas em dimensão infinita é natural trabalharmos com um mBf genuinamente

cilíndrico. Seja β_i^H uma sequência de mBfs reais e independentes com as seguintes expansões

$$\beta_i^H(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t M\xi_j(s) ds \mathbf{H}_{\varepsilon_{n(i,j)}}. \quad (2.5)$$

Note que distintos β_n^H -s têm famílias disjuntas de $\mathbf{H}_{\varepsilon_{n(i,j)}}$ em suas representações. O mBf cilíndrico em E é definido pela soma

$$B_H(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^H(t) e_i. \quad (2.6)$$

Note que a soma em (2.6) não converge em $L^2(\mu; E)$. Porém, a convergência se dá no espaço de Hida $S(E)_{-0}$. Para ver isto, vamos reescrever a soma (2.5) da seguinte forma

$$\beta_i^H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^H(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k}; \quad b_{ik}^H(t) = \begin{cases} \int_0^t M\xi_j(s) ds; & k = n(i, j) \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever

$$B_H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^H(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k} e_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^H(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k},$$

$$b_k^H(t) = \delta_{k, n(i,j)} \int_0^t M\xi_j(s) ds e_i.$$

Agora se $q \geq 3$, $t \in \mathbb{R}_+$, e $H \in (0, 1)$ então

$$\begin{aligned} \|B_H(t)\|_{-0, -q}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|b_k^H(t)\|^2 (\varepsilon_k!) (2\mathbb{N})^{-q\varepsilon_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t M\xi_k(s) ds \right|^2 (2k)^{-q} \\ &\leq t^2 2^{-q} C^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{4}{3}-H-q} < \infty. \end{aligned}$$

Aqui acima utilizamos a seguinte estimativa de [16]

$$|M\xi_n(t)| \leq Cn^{\frac{2}{3}-\frac{H}{2}} \text{ for all } t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

O ruído fracionário em E é definido por

$$\mathbb{W}_H(t) := \sum_{i=1}^{\infty} W_i^H(t) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}^H(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k} e_i = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^H(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k},$$

onde

$$W_i^H(t) := \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}^H(t) \mathbf{H}_{\varepsilon_k}; \quad d_{ik}^H(t) = \begin{cases} M\xi_j(t); & k = n(i, j) \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\text{e } d_k^H(t) = \delta_{k, n(i, j)} M\xi_j(t) e_i.$$

Analogamente ao ruído Browniano $\mathbb{W}_H(t)$ para $H = 1/2$, pode-se mostrar que $\mathbb{W}_H(t) \in S(E)_{-0}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $H \in (0, 1)$. Além do mais, usando o fato que $Mg \in C^\infty(\mathbb{R})$ para todo $g \in S(\mathbb{R})$ podemos facilmente mostrar que

$$\frac{dB_H(t)}{dt} = \mathbb{W}_H(t) \text{ in } S(E)_{-0}.$$

Agora podemos definir o produto Wick sobre $S(E)_{-1}$. Considere $F, G \in S(E)_{-1}$ tendo formas

$$F = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} F_i e_i, \quad G = \sum_{\beta \in \mathcal{N}} b_\beta \mathbf{H}_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} G_i e_i$$

onde $c_\alpha, b_\beta \in E$ and $F_i, G_i \in (S)_{-1}$.

Definição 2.3: O *produto Wick* dos elementos $F, G \in S(E)_{-1}$ é dado por

$$F \diamond G := \sum_{i=1}^{\infty} (F_i \diamond G_i) e_i = \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \theta_\gamma \mathbf{H}_\gamma,$$

onde $\theta_\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_{i\alpha} b_{i\beta} e_i \in E$.

Analogamente ao caso de dimensão finita, o espaço $S(E)_{-1}$ é fechado para o produto Wick. Além do mais, temos o seguinte resultado o qual é uma consequência imediata das definições. Por conveniência do leitor, damos os detalhes aqui.

Proposição 2.4: *Se $F \in S(E)_{-0}$ então $F \diamond \mathbb{W}_H(t) \in S(E)_{-0}$, para $t \in \mathbb{R}_+$, $H \in (0, 1)$*

Demonstração: Seja $F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} F_i e_i$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Por definição

$$F \diamond \mathbb{W}_H(t) = \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} c_{i\alpha} d_{ik}^H(t) \right) e_i \mathbf{H}_\gamma.$$

Considere $r > 1, p \geq 3$ e $q \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que $\|F\|_{-0,-q} < \infty$. Então

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \gamma! (2\mathbb{N})^{-(q+p+r)\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} |c_{i\alpha} d_{ik}^H(t)| \right)^2 \\ & \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \gamma! (2\mathbb{N})^{-(q+p+r)\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} |c_{i\alpha}|^2 \sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} |d_{ik}^H(t)|^2 \\ & \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} (2\mathbb{N})^{-r\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} \alpha! (\alpha_k + 1) |c_{i\alpha}|^2 (2\mathbb{N})^{-q(\alpha+\varepsilon_k)} \sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} |d_{ik}^H(t)|^2 (2\mathbb{N})^{-p(\alpha+\varepsilon_k)} \\ & \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} (2\mathbb{N})^{-r\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha! |c_{i\alpha}|^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_{ik}^H(t)|^2 (2k)^{-p} \right) \\ & \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} (2\mathbb{N})^{-r\gamma} \|F\|_{-0,-q}^2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-p} C k^{\frac{4}{3}-H-p} < \infty. \end{aligned}$$

Aqui acima, utilizamos a estimativa (2.7) e o fato de que $\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} (2\mathbb{N})^{-r\gamma} < \infty$ quando $r > 1$.

□

Vamos agora considerar integrais de funções $Z : \mathbf{R} \rightarrow S(E)_0$ no sentido de Petti.

Definição 2.5: Uma função $Z : \mathbf{R} \rightarrow S(E)_{-0}$ é chamada $S(E)_{-0}$ -integrável se

$$\langle Z(\cdot)|f \rangle \in L^1(\mathbf{R}) \quad \text{para todo } f \in S(E)_0.$$

Então a $S(E)_{-0}$ -integral de $Z(\cdot)$ denotada por $\int_{\mathbf{R}} Z(t)dt$ é o unico elemento de $S(E)_{-0}$ tal que

$$\left\langle \int_{\mathbf{R}} Z(t)dt | f \right\rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle Z(t) | f \rangle dt; \quad f \in S(E)_0.$$

Observação 2.6: A existência do unico elemento $\int_{\mathbf{R}} Z(t)dt$ segue do fato que $\int_{\mathbf{R}} \langle Z(t) | \cdot \rangle dt$ é um funcional linear contínuo sobre $S(E)_0$. Tal fato segue facilmente da Proposição 8.1 em Hida et al [27] e da Definição 2.1.

Definição 2.7: Suponha que $F : \mathbf{R} \rightarrow S(E)_{-0}$ é tal que $t \mapsto F(t) \diamond \mathbb{W}_H(t)$ é $S(E)_{-0}$ -integrável. Então definimos a *integral abstrata Hitsuda-Skorohod fracionária* de F por

$$\int_{\mathbf{R}} F(t) \delta \mathbb{W}_H(t) := \int_{\mathbf{R}} F(t) \diamond \mathbb{W}_H(t) dt.$$

Proposição 2.8: Considere $F : \mathbf{R} \rightarrow S(E)_{-0}$ dado por $F(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} b_{\alpha}(t) \mathbf{H}_{\alpha}$ tal que $\{b_{\alpha}(\cdot); \alpha \in \mathcal{N}\}$ satisfaz a seguinte hipótese

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\{ \alpha! (2\mathbb{N})^{-\alpha q} \int_{\mathbf{R}} \|b_{\alpha}(t)\|^2 dt \right\} < \infty \quad \text{para algum } q \in \mathbb{N}.$$

Então $t \mapsto F(t)$ é Hitsuda-Skorohod integrável para qualquer $H \in (0, 1)$.

Demonstração: A demonstração segue facilmente da estimativa (2.7) e Lemma 2.5.7 em Holden et al [28]. Nós omitimos os detalhes. $\square$

2.3 Equações de Evolução Estocásticas com Ruído Fracionário

Nesta seção estudaremos a seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + FX(t) + BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t); \quad X(0) = \theta \in S(E)_{-1}, \quad (2.8)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo sobre E , F é uma função Lipschitz, B é um operador linear e $\mathbb{W}_H$ é o ruído fracionário sobre E . Primeiramente, começaremos com as seguintes definições.

Definição 2.9: i) Seja B um operador linear sobre E e $\varrho \in [0, 1]$. Se $G = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in S(E)_{-\varrho}$, então definimos

$$BG := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} Bc_\alpha \mathbf{H}_\alpha.$$

ii) Seja $(A, D(A))$ um operador linear não-limitado densamente definido sobre E . Se $G = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in S(E)_{-\varrho}$, é tal que $c_\alpha \in D(A)$ para todo $\alpha \in \mathcal{N}$ e

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|Ac_\alpha\|^2 (\alpha!)^{1-\varrho} (2\mathbb{N})^{-\alpha\varrho} < \infty \text{ para algum } \varrho \in \mathbb{N},$$

então escrevemos

$$AG := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} Ac_\alpha \mathbf{H}_\alpha,$$

e denotamos por $D(A)_{-\varrho}$ como sendo o conjunto formado pelos elementos $G \in S(E)_{-\varrho}$ satisfazendo a propriedade acima. Analogamente, se $F : E \rightarrow E$ é uma aplicação Lipschitz com crescimento linear então podemos definir

$$FG := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} Fc_\alpha \mathbf{H}_\alpha,$$

para $G = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha \mathbf{H}_\alpha \in S(E)_{-1}$.

Queremos estudar soluções *forte* e *generalizadas* da equação (2.8) no espaço $S(E)_{-1}$. Por solução forte, queremos dizer uma função continuamente diferenciável tomando valores em $S(E)_{-1}$ satisfazendo a equação (2.8). A solução generalizada é a solução *mild* de (2.8) dada por

$$X(t) = S(t)\theta + \int_0^t S(t-s)FX(s)ds + \int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds, \quad (2.9)$$

onde $\{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ é o semigrupo fortemente contínuo gerado por $(A, D(A))$ e as integrais acima são consideradas na topologia limite indutiva de $S(E)_{-1}$. É fácil ver que uma solução forte de (2.8) deve ser dada por (2.9). A seguir, enunciamos nosso principal teorema de existência e unicidade.

Teorema 2.10: *Seja $(A, D(A))$ um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo sobre E , $F : E \rightarrow E$ uma função Lipschitz com crescimento linear e B um operador linear limitado em E tal que exista uma base ortonormal $(e_i)_{i=1}^\infty$ e uma sequência de números reais $(\lambda_i)_{i=1}^\infty$ tais que $Be_i = \lambda_i e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então para qualquer $H \in (0, 1)$ e para cada $\theta \in S(E)_{-1}$ existe uma única solução generalizada $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ de (2.8) tomando valores em $S(E)_{-1}$.*

Observação 2.11: Podemos considerar B como uma aplicação não-linear. De fato, é possível provar o Teorema (2.10) com outras hipóteses de regularidade sobre os coeficientes. Por exemplo, podemos supor a existência de uma função $\ell \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que

- i) $\|S(t)B(x)\|_E^2 \leq (1 + \|x\|_E^2)\ell^2(t); \quad t > 0, x \in E,$
- ii) $\|S(t)Bx - S(t)By\|_E \leq \ell(t)\|x - y\|_E; \quad t > 0, x, y \in E.$

Sob tais condições pode-se provar o Teorema 2.10 usando argumentos similares aos utilizados neste capítulo. Somente temos de assegurar que $s \mapsto S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)$ seja uma função contínua quando $X(\cdot)$ for contínua.

Observação 2.12: Se tomarmos $F(0) = 0$ no teorema acima, podemos mostrar que a solução $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ toma valores no espaço de Hida $S(E)_{-0}$. Tal fato pode ser facilmente provado checando cuidadosamente a demonstração do Teorema 2.10 com esta hipótese.

Observação 2.13: Outros tipos de não-linearidade também podem ser considerados na equação (2.8) com ruído aditivo. Por exemplo, pode-se considerar $F : D(F) \rightarrow E$ como uma função dissipativa. Neste caso, podemos provar o Teorema 2.10 impondo hipóteses de dissipatividade sobre os coeficientes A and F . A estratégia consiste em aproximar a solução de (2.8) pelas aproximações de Yosida da F .

Se considerarmos a equação (2.8) perturbada por um ruído aditivo e $F \equiv 0$ então podemos provar uma solução forte.

Teorema 2.14: *Seja $(A, D(A))$ um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em E e B um operador linear limitado em E . Então para qualquer $H \in (0, 1)$ e para cada $\theta \in D(A)_{-1}$ existe uma única solução forte $(X(t))_{0 \leq t \leq T}$ de (2.8) tomando valores em $S(E)_{-1}$ dada por*

$$X(t) = S(t)\theta + \int_0^t S(t-s)B\delta\mathbb{W}_H(s).$$

Antes das demonstrações dos teoremas acima vamos aplica-los na resolução de EDP estocásticas do tipo parabólica.

Exemplo 2.15: Seja O um aberto limitado de $\mathbf{R}^d$ com fronteira suave. Considere o seguinte operador diferencial de ordem $2m$ dado por

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_{\alpha\beta} \partial^\beta),$$

onde $a_{\alpha\beta}$ são funções reais suaves sobre $\bar{O}$. Assumimos que L é fortemente elíptico sobre $\bar{O}$. Neste caso, é bem sabido que o operador $-\bar{L}$ definido sobre o espaço de Sobolev $H^{2m}(O) \cap H_0^m(O) \subset L^2(O)$ gera um semigrupo fortemente contínuo sobre $L^2(O)$. Dado $0 < T < \infty$ e $H \in (0, 1)$ considere o seguinte problema de Cauchy

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Lu(t, x) = f(u(t, x)) + b(u(t, x)) \diamond W_H(t, x); (t, x) \in [0, T] \times O,$$

$$u(0, x) = u_0(x); \quad x \in O \subset \mathbf{R}^d, \quad (2.10)$$

onde f is uma função real Lipschitz, b outra função real (a ser definida) e $W_H(t, x)$ o ruído fracionário no tempo para cada $x \in O$. Deve ser notado que desde que estamos lhe dando com distribuições estocásticas, as aplicações acima estão agindo sobre cada elemento de ssuas expansões formais. Para aplicar o Teorema 2.10 temos somente que representar o sistema (2.10) na forma de operadores em dimensão infinita

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + FX(t) + BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t); \quad t \in [0, T], H \in (0, 1),$$

$$X(0) = u_0 \in E, \quad (2.11)$$

de forma usual ao caso determinístico. Tomemos $E = L^2(O)$ e

$$(By)(x) := b(y(x)),$$

$$A\varphi := -L\varphi, \quad \varphi \in D(-L); \quad (Fy)(\xi) := f(y(\xi)), \quad y \in E; x, \xi \in O,$$

com b uma função real que realiza B como um operador limitado sobre E satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10. Alternativamente, B pode ser um operador integral do tipo Hilbert-Schmidt.

Neste ponto, uma pergunta natural seria com relação à suavidade das soluções de (2.8). Isto é, gostaríamos de impor algumas hipóteses sobre os coeficientes da equação (2.8) a fim de obter-se uma solução tomando valores em $L^2(\mu; E)$. A dificuldade para achar tais condições é notória: Devido ao ruído multiplicativo com o produto Wick mesmo se impormos sobre B uma hipótese de posto finito tal que $BY \in L^2(\mu; E)$ para todo $Y \in S(E)_{-1}$ não podemos dizer em geral que

$$\int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds \in L^2(\mu; E), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Isto acontece devido à irregularidade do produto Wick em espaços $L^p(\mu; E)$. No caso linear com ruído aditivo temos uma solução forte dada pela convolução estocástica generalizada. Neste caso, propriedades de regularidade podem ser estudadas adequadamente.

Exemplo 2.16: Considere o caso particular do Laplaciano em $O = \{x \in \mathbf{R}^d; 0 < x_i < a_i, i = 1, \dots, d\}$. Neste caso, temos $D(\Delta) = H^2 \cap H_0^1$ onde Δ admite os autovalores

$$\Upsilon = \left\{ -\sum_{i=1}^d \frac{k_i \pi}{a_i^2}; (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d \right\},$$

com autovetores que formam uma base ortonormal de $E = L^2(O)$

$$g_{k_1, \dots, k_d}(x) = \prod_{i=1}^d \left(\frac{2}{a_i} \right)^{1/2} \left(\operatorname{sen} \left(\frac{k_i \pi x_i}{a_i} \right) \right).$$

Por simplicidade escrevemos $\{-\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ para denotar uma ordenação dos autovalores e autovetores, respectivamente. O laplaciano gera um C_0 -semigrupo dado por

$$S(t)y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, \tilde{e}_k \rangle_E \exp(-\tilde{\lambda}_k t) \tilde{e}_k; \quad y \in E.$$

A solução do problema de Cauchy

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta u(t, x) + W_H(t, x); \quad u(0, x) = \theta_0(x) \in D(\Delta),$$

é dado por

$$X(t) = S(t)\theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t S(t-s) d_k^H(s) ds \mathbf{H}_{\epsilon_k}.$$

Agora é fácil ver que se $d = 1$ e $\frac{1}{3} < H < 1$, então $X(t) \in L^2(\mu; E)$ para $0 \leq t \leq T$.

2.3.1 Demonstração dos Teoremas 3.1 e 3.2

Nesta seção, nosso objetivo é a demonstração dos Teoremas 2.10 e 2.14. Devido a não-linearidade, a estratégia de considerar transformadas de Hermite e aplicar o Teorema de Caracterização [28] não funciona para o Teorema 2.10. De forma geral, a dificuldade reside no fato que não podemos identificar uma equação diferencial determinística com coeficientes complexos quando lidamos com transformadas de Hermite de funções não-lineares. Neste caso, o ingrediente para a demonstração do Teorema 2.10 é uma extensão do teorema do ponto fixo de Banach, o qual enunciamos aqui por conveniência do leitor. Primeiramente, comecemos com uma definição.

Definição 2.17: Seja $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ um limite indutivo de espaços de Banach munidos de normas $\|\cdot\|_n$. Dizemos que uma aplicação $\mathcal{K} : J \rightarrow J$ é uma *contração estrita* sobre J se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$,

i) $\mathcal{K}(J_n) \subset J_n$;

ii) Existe $c_n \in [0, 1)$ tal que $\forall x, y \in J_n$, temos que

$$\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\|_n \leq c_n \|x - y\|_n.$$

Usando a estrutura dos espaços de Banach intermediários J_n , Deck [10] mostrou que se $\mathcal{K} : J \rightarrow J$ é uma contração estrita sobre J , então para cada $u \in J$ existe um único $v_u \in J$ o qual é a solução do problema de ponto fixo

$$v = u + \mathcal{K}(v).$$

Seja $C(0, T; S(E)_{-1, -q})$ o espaço formado pelas funções contínuas de $[0, T]$ para $S(E)_{-1, -q}$. Vamos munir tal espaço com a usual topologia da convergência uniforme dada por

$$\|F\|_{-1, -q, \infty} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|F(t)\|_{-1, -q},$$

e consideramos o seguinte limite indutivo de espaços de Banach

$$C(0, T; S(E)_{-1}) = \bigcup_{q=1}^{\infty} C(0, T; S(E)_{-1, -q}).$$

A seguir, faremos uso da transformada de Hermite sobre o espaço $S(E)_{-1}$. Para uma explicação detalhada desta transformada em dimensão finita e infinita, veja por exemplo [28] e [19], respectivamente. Aqui nós somente fixaremos a notação que será usada ao longo deste capítulo. Seja $E_{\mathbb{C}}$ a complexificação do espaço de Hilbert E .

Se $Y = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_{\alpha} \mathbf{H}_{\alpha} \in S(E)_{-1}$ então a *transformada de Hermite* de Y é definida por

$$\mathcal{H}Y(z) = \tilde{Y}(z) := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_{\alpha} z^{\alpha}; \quad z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},$$

quando convergente em $E_{\mathbb{C}}$. Aqui usaremos a seguinte notação: Se $\alpha \in \mathcal{N}$ e $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ então escrevemos $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdots$. A seguir, vamos considerar as seguintes vizinhanças de 0 in $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dadas por

$$\mathbb{K}_q := \{z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; |z_i| < (2i)^{-q}, i \in \mathbb{N}\}; \quad q \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.18: *Seja B um operador limitado sobre E satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10 e fixe $H \in (0, 1)$. Se $X \in C(0, T; S(E)_{-1})$ então para todo $t \in [0, T]$*

$$s \mapsto S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s) \in C(0, t; S(E)_{-1}).$$

Demonstração: Vamos denotar por C uma constante que pode diferir de linha para linha. Considere $X(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha(t) \mathbf{H}_\alpha$ e $BX(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} Bc_\alpha(t) \mathbf{H}_\alpha$. Primeiramente, vamos usar as hipóteses sobre o operador B para expressar $BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t)$ de forma conveniente. Por hipótese existe um sistema ortonormal completo $(e_i)_{i=1}^\infty$ sobre E e uma sequência de números reais $(\lambda_i)_{i=1}^\infty$ tais que $Be_i = \lambda_i e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Nessas condições, temos que

$$BX(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} Bc_\alpha(t) \mathbf{H}_\alpha = \sum_{i=1}^\infty (BX)_i(t) e_i,$$

$$\text{onde } (BX)_i(t) := \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_{i\alpha}(t) \lambda_i \mathbf{H}_\alpha \in (S)_{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t) &= \sum_{i=1}^\infty [(BX)_i(t) \diamond \mathbb{W}_i^H(t)] e_i \\ &= \sum_{i=1}^\infty \left[\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \left(\sum_{\alpha + \epsilon_k = \gamma} c_{i\alpha}(t) \lambda_i d_{ik}^H(t) \right) \mathbf{H}_\gamma \right] e_i \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{H}[BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t)](z) = \sum_{i=1}^\infty [\mathcal{H}(BX)_i(t, z) \cdot \mathcal{H}(W_i^H)(t, z)] e_i, \quad (2.12)$$

para cada $z \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(BX)_i(t, z)$ e $\mathcal{H}(W_i^H)(t, z)$ existam. De fato, podemos reescrever a equação (2.12) como

$$\mathcal{H}[BX(t) \diamond \mathbb{W}_H(t)](z) = \sum_{i=1}^\infty \left\langle B\tilde{X}(t, z), e_i \right\rangle_{E_C} e_i \cdot \widetilde{W}_i^H(t, z)$$

para cada $z \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(BX)_i(t, z)$ e $\mathcal{H}(W_i^H)(t, z)$ existam. Notemos que $W_i^H(t, z) = \sum_{k=1}^\infty d_{ik}^H(t) z_k$ converge absolutamente em $\mathbb{C}$ para cada $z \in \mathbb{K}_q$ ($q \geq 2$). Fixe $q \geq 2$ e con-

sidere a seguinte familia de operadores lineares fortemente contínuos $\{T_z(t); 0 \leq t \leq T, z \in \mathbb{K}_q\}$ dado por

$$T_z(t)x := \sum_{i=1}^{\infty} \langle Bx, e_i \rangle_{E_{\mathbb{C}}} e_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}^H(t) z_k, \quad (2.13)$$

onde $T_z(t)x$ converge absolutamente em $E_{\mathbb{C}}$ para cada $(t, z, x) \in [0, T] \times \mathbb{K}_q \times E_{\mathbb{C}}$, e

$$\|T_z(t)x\|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \|B\| C 2^{-q} \|x\|_{E_{\mathbb{C}}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2}{3} - \frac{H}{2} - q},$$

para todo $x \in E_{\mathbb{C}}$. Vamos reescrever a equação (2.13) da seguinte forma

$$T_z(t)x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Bx \delta_{k,n(i,j)} M \xi_j(t) z_k, e_i \rangle_{E_{\mathbb{C}}} e_i.$$

Dado $X \in C(0, T; S(E)_{-1})$, existe um $q' \in \mathbb{N}$ ($q' \geq 2$) tal que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|c_{\alpha}(s)\|_{E_{\mathbb{C}}} |z^{\alpha}| \leq \sup_{0 \leq v \leq T} \|X(v)\|_{-1, -q'} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} (2\mathbb{N})^{-\alpha q'} \right)^{1/2} < \infty$$

para todo $s \in [0, T]$ e $z \in \mathbb{K}_{q'}$. Então para cada $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{K}_{q'}$ temos que

$$S(t-s)T_z(s)\tilde{X}(s, z) = \sum_{k=1}^{\infty} S(t-s) \left\langle B\tilde{X}(s, z) \delta_{k,n(i,j)} M \xi_j(s) z_k, e_i \right\rangle_{E_{\mathbb{C}}} e_i \in E_{\mathbb{C}}.$$

Afirmamos que dado $t \in [0, T]$, a função

$$s \mapsto S(t-s)T_z(s)\tilde{X}(s, z) \in E_{\mathbb{C}}$$

é contínua para cada $z \in \mathbb{K}_{q'}$. Com efeito, considere

$$g_k(s, z) := S(t-s) \left\langle B\tilde{X}(s, z) \delta_{k,n(i,j)} M \xi_j(s) z_k, e_i \right\rangle_{E_{\mathbb{C}}} e_i.$$

Note que $\|g_k(s, z)\|_{E_{\mathbb{C}}} \leq C k^{\frac{2}{3} - \frac{H}{2} - q'} \forall (s, z) \in [0, t] \times \mathbb{K}_{q'}$, onde

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2}{3}-\frac{H}{2}-q'} < \infty.$$

Pelo teste M de Weierstrass a soma $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\cdot, z)$ converge uniformemente em $[0, t]$ para cada $z \in \mathbb{K}_{q'}$. Isto prova nossa afirmação.

Agora desde $\mathcal{H}(BX)_i(s, z)$ e $\mathcal{H}(W_i^H)(s, z)$ existem em $[0, t] \times \mathbb{K}_{q'}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ segue que

$$\mathcal{H}[S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)](z) = S(t-s)\mathcal{T}_z(s)\tilde{X}(s, z).$$

Desta forma, provamos que $\mathcal{H}[S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)](z)$ é contínua em $[0, t]$ e limitada em $[0, t] \times \mathbb{K}_{q'}$. Pelo Teorema 1 em [19] podemos concluir que a aplicação

$$s \mapsto S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s) \in S(E)_{-1}$$

é contínua. Isto completa a demonstração do lema. $\square$

Demonstração do Teorema 2.10

A estratégia consiste em mostrar que a aplicação

$$\mathcal{K}(X)(t) := \int_0^t S(t-s)FX(s)ds + \int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds$$

é uma contração estrita sobre o espaço de limite indutivo $C(0, T; S(E)_{-1})$. Primeiramente, temos que mostrar que a aplicação acima esta bem definida. Por toda a demonstração, vamos denotar por N uma constante genérica que pode diferir de linha para linha. Por simplicidade, algumas vezes escrevemos $C_{-1, -q}$ e C_{-1} em vez de $C(0, T; S(E)_{-1, -q})$ e $C(0, T; S(E)_{-1})$, respectivamente. Para checar as propriedades de continuidade faremos uso da transformada de Hermite. Fixe $X \in C(0, T; S(E)_{-1})$ com forma

$$X(s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_{\alpha}(s)\mathbf{H}_{\alpha}.$$

É fácil vêr que $s \mapsto S(t-s)FX(s) \in S(E)_{-1}$ é uma função contínua para cada $t \in [0, T]$. Pelo Lema 2.18 sabemos que a aplicação $s \mapsto S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s) \in S(E)_{-1}$ é

contínua e portanto

$$\int_0^t S(t-s)FX(s)ds = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \int_0^t S(t-s)Fc_\alpha(s)ds \mathbf{H}_\alpha$$

$$\int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds = \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \int_0^t S(t-s)(BX(s) \odot \mathbb{W}_H(s))_\gamma ds \mathbf{H}_\gamma$$

onde

$$(BX(s) \odot \mathbb{W}_H(s))_\gamma := \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} \langle c_\alpha(s), Be_i \rangle_E d_{ik}^H(s) \right] e_i \in E.$$

Usando a transformada de Hermite pode-se facilmente checar que as integrais acima são funções contínuas de $[0, T]$ para $S(E)_{-1}$. Portanto, $\mathcal{K} : C_{-1} \rightarrow C_{-1}$ está bem definida.

A seguir vamos mostrar que se $X \in C_{-1,-q}$ então $\int_0^t S(t-s)FX(s)ds \in C_{-1,-q}$ para $q \geq 2$. Fixe $t \in [0, T]$. Pela hipótese de crescimento linear e o fato que $\sup_{0 \leq v \leq T} \|X(v)\|_{-1,-q} < \infty$ temos que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| \int_0^t S(t-s)Fc_\alpha(s)ds \right\|_E^2 (2\mathbb{N})^{-\alpha q} \leq N \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} (2\mathbb{N})^{-\alpha q} + NT < \infty.$$

Portanto, podemos concluir que $\int_0^t S(t-s)FX(s)ds \in S(E)_{-1,-q}$ para todo $t \in [0, T]$. Agora afirmamos que se $X \in C_{-1,-q}$ com $q \geq 3$, então

$$\int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds \in S(E)_{-1,-q}$$

para todo $t \in [0, T]$. Com efeito, fixe $t \in [0, T]$. Temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \left\| \int_0^t S(t-s) (BX(s) \odot \mathbb{W}_H(s))_\gamma ds \right\|_E^2 (2\mathbb{N})^{-\gamma q} \\
& \leq NT \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \int_0^t \left\| (BX(s) \odot \mathbb{W}_H(s))_\gamma \right\|_E^2 (2\mathbb{N})^{-\gamma q} \\
& \leq NT \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha + \varepsilon_k = \gamma} \left(\int_0^t \|c_\alpha(s)\|_E^2 |d_{ik}^H(s)|^2 ds \right) (2\mathbb{N})^{-\gamma q} \\
& = NT \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \varepsilon_k} \int_0^t \|c_\alpha(s)\|_E^2 |d_{ik}^H(s)|^2 ds (2\mathbb{N})^{-(\alpha + \varepsilon_k)q} \\
& \leq NT \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \varepsilon_k} \delta_{k,n(i,j)} j^{\frac{4}{3}-H} \int_0^t \|c_\alpha(s)\|_E^2 ds (2\mathbb{N})^{-(\alpha + \varepsilon_k)q} \\
& = NT \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k,n(i,j)} j^{\frac{4}{3}-H} (2k)^{-q} \right) \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \int_0^t \|c_\alpha(s)\|_E^2 ds (2\mathbb{N})^{-\alpha q} \right) \\
& \leq NT^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{4}{3}-H-q} \right) \|X(v)\|_{-1,-q,\infty}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Acima, utilizamos a estimativa (2.7) e o fato que $X \in C_{-1,-q}$. Desta forma, podemos concluir que $\mathcal{K}(C_{-1,-q}) \subset C_{-1,-q}$ para todo $q \geq 3$. Agora fixe $q \geq 3$ e considere $X, Y \in C_{-1,-q}$ com formas

$$X(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha(t) \mathbf{H}_\alpha, \quad Y(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} b_\alpha(t) \mathbf{H}_\alpha.$$

Devido a linearidade de B e a lei distributiva do produto Wick em $S(E)_{-1}$, temos que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{K}(X) - \mathcal{K}(Y)](t) &= \int_0^t S(t-s) [FX(s) - FY(s)] ds \\
&+ \int_0^t S(t-s) B[X(s) - Y(s)] \diamond \mathbb{W}_H(s) ds,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
& \|[\mathcal{K}(X) - \mathcal{K}(Y)](t)\|_{-1,-q} \leq \left\| \int_0^t S(t-s)[FX(s) - FY(s)]ds \right\|_{-1,-q} \\
& + \left\| \int_0^t S(t-s)B[X(s) - Y(s)] \diamond \mathbb{W}_H(s)ds \right\|_{-1,-q}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Iremos analisar separadamente as duas partes da desigualdade acima. Estimemos a primeira parte. Através das estimativas usuais para um C_0 semigrupo e dado que por hipótese F é globalmente Lipschitz, temos que

$$\left\| \int_0^t S(t-s)[Fc_\alpha(s) - Fb_\alpha(s)]ds \right\|_E^2 \leq NT^2 \sup_{0 \leq u \leq t} \|c_\alpha(u) - b_\alpha(u)\|_E^2,$$

onde $c_\alpha(\cdot)$ e $b_\alpha(\cdot)$ são funções contínuas em $[0, T]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \left\| \int_0^t S(t-s)[Fc_\alpha(s) - Fb_\alpha(s)]ds \right\|_E^2 (2\mathbb{N})^{-\alpha q} \\
& \leq NT^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \sup_{0 \leq u \leq t} \|c_\alpha(u) - b_\alpha(u)\|_E^2 (2\mathbb{N})^{-\alpha q} \\
& = NT^2 \sup_{0 \leq v \leq T} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} \|c_\alpha(u) - b_\alpha(u)\|_E^2 (2\mathbb{N})^{-\alpha q} = NT^2 \|X - Y\|_{-1,-q,\infty}^2.
\end{aligned}$$

Estimemos agora a segunda parte da desigualdade. Pelo Lema 2.18, dado $t \in [0, T]$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \int_0^t S(t-s)B[X(s) - Y(s)] \diamond \mathbb{W}_H(s)ds \\
& = \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \int_0^t S(t-s)(B[X(s) - Y(s)] \odot \mathbb{W}_H(s))ds \mathbf{H}_\gamma,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(t-s)B[X(s) - Y(s)] \diamond \mathbb{W}_H(s) ds \right\|_{-1, -q} \\ & \leq NT2^{-q/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{4}{3}-H-q} \right)^{1/2} \|X - Y\|_{-1, -q, \infty}. \end{aligned}$$

Portanto, por (2.14) e as estimativas anteriores temos que

$$\|\mathcal{K}(X) - \mathcal{K}(Y)\|_{-1, -q, \infty} \leq \left[NT + NT2^{-\frac{q}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{4}{3}-H-q} \right)^{1/2} \right] \|X - Y\|_{-1, -q, \infty}.$$

Consequentemente, se

$$NT + NT2^{-\frac{q}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{4}{3}-H-q} \right)^{1/2} \in [0, 1) \quad (2.15)$$

para qualquer $q \geq 3$ então a transformação $\mathcal{K}$ admite um único ponto fixo X em C_{-1} . A condição extra (2.15) em T pode ser facilmente removida considerando a equação sobre intervalos $[0, \tilde{T}]$, $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$, $\dots$ onde $\tilde{T}$ satisfaz (2.15). Desta forma, mostramos que $\mathcal{K}$ é uma contração estrita sobre $C(0, T; S(E)_{-1})$ para todo $H \in (0, 1)$ e portanto para cada $\theta \in S(E)_{-1}$ existe um único $X \in C(0, T; S(E)_{-1})$ tal que

$$X(\cdot) = S(\cdot)\theta + \mathcal{K}(X)(\cdot).$$

Isto completa a demonstração do Teorema.

Observação 2.19: Se considerarmos a equação linear (F linear) com ruído multiplicativo, então podemos obter um resultado similar de existência e unicidade utilizando-se diretamente a transformada de Hermite. Neste caso, novamente obtemos uma solução *mild*. Além do mais, pode-se mostrar facilmente que o valor esperado *generalizado* da solução no Teorema 2.10 é dado por

$$\mathbb{E}X(t) = S(t)\mathbb{E}\theta + \int_0^t S(t-s)F\mathbb{E}X(s)ds$$

considerando que $\mathbb{E} \left[\int_0^t S(t-s)BX(s) \diamond \mathbb{W}_H(s)ds \right] = 0$.

Agora nosso objetivo é a demonstração do Teorema 2.14. Começaremos com o seguinte lema.

Lema 2.20: *Seja B um operador linear limitado em E e $H \in (0, 1)$. Então a aplicação $t \mapsto B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z)$ é continuamente diferenciável em $[0, T]$ para cada $z \in \mathbb{K}_{2q}$ com $q \geq 4$.*

Demonstração: Denotaremos por N uma constante genérica que pode diferir de linha para linha. Começemos observando que $B\mathbb{W}_H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Bd_k^H(t)\mathbf{H}_{\varepsilon_k} \in S(E)_{-0, -r}$ para todo $t \in [0, T]$ com $r \geq 3$, onde $B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z)$ é limitado em $[0, T] \times \mathbb{K}_r$ para $r \geq 3$. Além do mais,

$$\frac{dBd_k^H(t)}{dt} = \delta_{k,n(i,j)}(M\xi_j)'(t)Be_i$$

para cada $t \in [0, T]$ e escrevemos

$$\Phi(t, z) := \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k(t)z_k,$$

onde $\kappa_k(t) := \delta_{k,n(i,j)}(M\xi_j)'(t)Be_i$. Afirmamos que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy \leq K n^{\frac{7}{6}-\frac{H}{2}}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par vet isto, lembremos que existem constantes η e γ tais que

$$|\xi_n(t)| \leq \begin{cases} \eta n^{-\frac{1}{12}}; & |t| \leq 2\sqrt{n}, \\ \eta \exp(-\gamma t^2); & |t| > 2\sqrt{n}. \end{cases}$$

Veja por exemplo Thangavelu [58] para maiores detalhes. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy \\
&= \int_{-2\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy + \int_{-\infty}^{-2\sqrt{n}} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy + \int_{2\sqrt{n}}^{\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy \\
&\leq N n^{\frac{7}{6}-\frac{H}{2}} + 2N \int_{2\sqrt{n}}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} \exp(-\gamma y^2) dy.
\end{aligned}$$

Note que podemos achar $y_0 > 0$ tal que se $y > y_0$ então $|y|^{\frac{3}{2}-H} \exp(-\gamma y^2) \leq \frac{1}{y^2}$. Além do mais, podemos supor que $y_0 > 2\sqrt{n}$. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{2\sqrt{n}}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} \exp(-\gamma y^2) dy &\leq N \int_{2\sqrt{n}}^{y_0} |y|^{\frac{3}{2}-H} dy + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \\
&\leq N y_0^{\frac{5}{2}-H} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Isto é, $2N \int_{2\sqrt{n}}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} \exp(-\gamma y^2) dy \leq N y_0^{\frac{5}{2}-H} + N$ e portanto podemos achar uma constante $K > 0$ que não depende de $H \in (0, 1)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy \leq K n^{\frac{7}{6}-\frac{H}{2}}.$$

Por definição

$$(M\xi_n)(t) = (-i)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} |x|^{\frac{1}{2}-H} \xi_n(x) dx,$$

e portanto

$$(M\xi_n)'(t) = (-i)^{n-1}i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x |x|^{\frac{1}{2}-H} \xi_n(x) dx,$$

onde a seguinte estimativa vale

$$|(M\xi_n)'(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\frac{3}{2}-H} |\xi_n(y)| dy \leq K n^{\frac{7}{6}-\frac{H}{2}} ; t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Fixando $H \in (0, 1)$ e tomando $z \in \mathbb{K}_q$ para $q \geq 4$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|\kappa_k(t)\|_{E_{\mathbb{C}}} |z_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \|\kappa_k(t)\|_{E_{\mathbb{C}}} |z_k| (2k)^{-\frac{q}{2}} (2k)^{\frac{q}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\kappa_k(t)\|_{E_{\mathbb{C}}}^2 (2k)^{-q} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 (2k)^q \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k,n(i,j)} \|B\|^2 |(M\xi_n)'(t)|^2 (2k)^{-q} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{-q} \right)^{1/2} \\ &\leq C \|B\| 2^{-\frac{q}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(H+q-\frac{7}{3})} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{-q} \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Desta forma, as aplicações $(z, t) \mapsto B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z)$ e $\Phi(t, z)$ estão bem definidas em $[0, T] \times \mathbb{K}_q$ com $q \geq 4$. Além do mais, $\Phi(t, z)$ é limitada em $[0, T] \times \mathbb{K}_q$. Logo temos que $B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z)$ é diferenciável em $[0, T]$ para cada $z \in \mathbb{K}_{2q}$ onde

$$\frac{dB\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z)}{dt} = \Phi(t, z).$$

Desde que $\Phi(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k(t) z_k$ é limitado em $[0, T] \times \mathbb{K}_q$ e $\kappa_k(\cdot)$ é uma função contínua em $[0, T]$ para cada k , então podemos concluir que a função $\Phi(t, z)$ é contínua para cada $z \in \mathbb{K}_{2q}$ com $q \geq 4$. Tais afirmações seguem das Proposições 19 e 20 em [19]. Isto completa a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 2.14

Afirmamos que

$$\tilde{X}(t, z) := S(t)\tilde{\theta}(z) + \int_0^t S(t-s)B\widetilde{\mathbb{W}}_H(s, z)ds$$

satisfaz o seguinte problema de Cauchy

$$\frac{d\tilde{X}(t, z)}{dt} = A\tilde{X}(t, z) + B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z); \quad (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{K}_q \quad (2.16)$$

$$\tilde{X}(0, z) = \tilde{\theta}(z) \in D(A)$$

para cada $z \in \mathbb{K}_q$ ($q \geq 8$). Isto segue facilmente do Lema 2.20. Além do mais,

$$A\tilde{X}(t, z) = S(t)B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z) - B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z) + \int_0^t S(s)\left(B\widetilde{\mathbb{W}}_H\right)'(z, t-s)ds$$

em $[0, T] \times \mathbb{K}_q$. Sabemos do Lema 2.20 que existem constantes N_1 e N_2 tais que

$$\left\| B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z) \right\|_{E_C} \leq N_1, \quad \left\| \left(B\widetilde{\mathbb{W}}_H \right)'(t, z) \right\|_{E_C} \leq N_2$$

para todo $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{K}_q$ ($q \geq 8$) e portanto, pelas estimativas usuais para um C_0 -semigrupo podemos achar constantes $\bar{N}_1$ e $\bar{N}_2$ tais que

$$\left\| S(t)B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z) \right\|_{E_C} \leq \bar{N}_1, \quad \left\| \int_0^t S(s)\left(B\widetilde{\mathbb{W}}_H\right)'(z, t-s)ds \right\|_{E_C} \leq \bar{N}_2$$

para todo $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{K}_q$ ($q \geq 8$).

Agora observe que

$$A\tilde{X}(t, z) + B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z)$$

é uma função contínua em $[0, T]$ para cada $z \in \mathbb{K}_q$, limitada em $[0, T] \times \mathbb{K}_q$ para $q \geq 8$ e com forma $\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} z^{\alpha}$. Pelo Teorema da Caracterização (veja por exemplo [19] e [28]) existe uma única função $t \mapsto F(t) \in S(E)_{-1}$ tal que

$$\mathcal{H}F(t)(z) = A\tilde{X}(t, z) + B\widetilde{\mathbb{W}}_H(t, z) \text{ on } [0, T] \times \mathbb{K}_q.$$

Considerando

$$X(t) := S(t)\theta + \int_0^t S(t-s)B\delta\mathbb{W}_H(s)$$

seque da Proposição 20 em [19] que $X(\cdot)$ é a única função continuamente diferenciável satisfazendo (2.16). Isto completa a demonstração do Teorema. $\square$

Capítulo 3

Ergodicidade de equações diferenciais estocásticas perturbadas pelo movimento Browniano fracionário

1

3.1 Introdução

Propriedades ergódicas de sistemas Markovianos têm sido extensivamente estudados nos últimos anos em vários contextos. Em particular, a ergodicidade de equações diferenciais estocásticas (EDE). Vários autores têm estudado o problema de ergodicidade de sistemas Markovianos induzidos por equações estocásticas em dimensão finita e infinita perturbadas pelo movimento Browniano. Contudo, por razões óbvias gostaríamos de entender o comportamento assintótico de soluções de equações estocásticas perturbadas por processos não-Markovianos. A primeira questão natural é a existência e unicidade de uma solução estacionária para estas equações.

Uma alternativa no estudo de propriedades ergódicas de sistemas não-Markovianos é a chamada teoria de *sistemas dinâmicos estocásticos* desenvolvida recentemente por [22]. Nesse contexto, a evolução de uma difusão não-Markoviana é estudada através de um apropriado processo de Markov adjacente contruído a partir da difusão original. Nessa abordagem, [22] provou que uma EDE em dimensão finita perturbada pelo movimento Browniano fracionário (mBf) com ruído aditivo admite uma única solução estacionária. Este capítulo continua o estudo de [22] para EDE perturbadas pelo mBf. Lembremos

¹Este capítulo [23] foi escrito durante 1 ano de trabalho como visitante no departamento de Matemática da Universidade de Warwick. Agradeço o apoio da CAPES, bolsa BEX 1534041.

que um argumento de acoplamento permitiu mostrar em [22] que tais EDE com ruído aditivo admite uma única medida invariante (num sentido a ser definido). Infelizmente, seu argumento apresenta dois problemas críticos:

[1.] A construção do acoplamento é difícil de ser seguida e analisada devido à correlações não-triviais exibidas pelo mBf.

[2.] A construção do acoplamento utiliza a aditividade do ruído de forma essencial, fazendo do argumento de acoplamento não adequado ao estudo de EDE com ruído multiplicativo.

Neste capítulo vamos estudar propriedades ergódicas de EDE perturbadas por um mBf com ruído multiplicativo não-degenerado. Isto é, vamos estudar a seguinte EDE multidimensional

$$dx_t = f(x_t) dt + \sigma(x_t) dB_H(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

onde B_H é o mBf de parâmetro $H \in (0, 1)$, $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, $\sigma : \mathbf{R}^d \rightarrow M_{d \times d}$ com $M_{d \times d}$ denotando o espaço das matrizes reais $d \times d$. Desde que estamos trabalhando com ruído multiplicativo, regularidade adicional do ruído é requerida. Assumimos neste capítulo que o parâmetro H do mBf é estritamente maior que $1/2$. Acreditamos porém que pode-se relaxar tal restrição considerando os espaços de ruído do tipo ‘rough path’ (veja por exemplo [46],[20]).

Para garantir a existência global de soluções e também para ter algum tipo de controle sobre estas, nós faremos neste capítulo as seguintes hipóteses sobre os coeficientes da SDE

(H1) *Regularidade*: O coeficiente de difusão σ junto com sua inversa σ^{-1} e as derivadas de f e σ são globalmente limitadas:

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\sigma(x)| < \infty, \quad (3.2)$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\sigma^{-1}(x)| < \infty, \quad (3.3)$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |Df(x)| + |D\sigma(x)| < \infty. \quad (3.4)$$

(H2) *Não-degeneracidade*: $\sigma(x) \in M_{d \times d}$ é invertível para todo $x \in \mathbf{R}^d$.

(H3) *Dissipatividade*: Existe $C > 0$ tal que

$$\langle f(x), x \rangle \leq C(1 - \|x\|^2) \quad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 3.1: *Suponha que os coeficientes da EDE (3.1) satisfaçam as hipóteses (H1-H3). Então existe uma única solução estacionária o qual é adaptada a filtração natural gerada pelo movimento Browniano fracionário.*

Devido as correlações não-triviais exibidas pelo mBf com ruído multiplicativo em (3.1), precisamos desenvolver uma estratégia bem diferente para provar a *unicidade* da solução estacionária. Desta forma, uma formulação abstrata é construída baseada na teoria de SDE desenvolvida em [22]. Em particular, nós fornecemos um critério geral para a unicidade da medida invariante na abordagem de SDE. Deve ser notado que uma das principais dificuldades no estudo de propriedades ergódicas de sistemas não-Markovianos é a falta de resultados com respeito à relação entre suas propriedades estruturais e a unicidade do estado estacionário. Este capítulo, busca preencher tal lacuna apresentando propriedades fundamentais de SDE que são bastantes similares a sistemas Markovianos. Lembremos que uma das principais alternativas para se estabelecer a unicidade da medida invariante em sistemas Markovianos é explorar propriedades estruturais de semigrupos de Markov tais como irreducibilidade e propriedade forte Feller. Neste capítulo, nós introduzimos conceitos análogos para processos não-Markovianos. Em particular, a propriedade forte Feller quando combinada com a irreducibilidade garante que a dinâmica para uma certa classe de SDE é ergódica.

Outra contribuição do presente capítulo é a obtenção de uma fórmula Bismut-Elworthy [17] para EDE perturbadas pelo mBf com parâmetro $H > 1/2$. Lembremos que esta fórmula fornece explicitamente uma expressão em termos de uma integral de Itô, para a derivada do semigrupo de Markov (agindo em funções teste) induzido por uma EDE com coeficientes suaves perturbada pelo movimento Browniano. Em nosso contexto, o semigrupo de Markov é substituído pela lei da solução da EDE (3.1) sobre o espaço de trajetórias com condições iniciais em $\mathbf{R}^n$ e no espaço de ruído que capta o *passado* do mBf na EDE (3.1). Nós estabelecemos uma fórmula para a derivada com respeito às condições iniciais em $\mathbf{R}^n$. De fato, tal fórmula coincide com a fórmula de Bismut-Elworthy se $H = 1/2$. Além disso, é uma versão da fórmula no espaço de trajetórias. O uso desta fórmula é o principal ingrediente na demonstração da propriedade forte Feller para a EDE (3.1).

1.1 Idéia da prova e estrutura do artigo. A idéia da prova do Teorema 3.1 é combinar argumentos de controlabilidade junto com um tipo de linearização infinitesimal para a EDE (3.1). Mais precisamente, nós apresentamos na Seção 3 um resultado ergódico abstrato o qual é o fundamento deste capítulo, em particular, introduzimos as propriedades *forte Feller* e *irreducibilidade* na abordagem de SDE. A combinação destas duas propriedades garante que uma certa classe de sistemas não-Markovianos seja ergódica.

A existência de uma solução estacionária para a EDE (3.1) pode ser estudada através de usuais argumentos de compacidade como no caso Markoviano. Com respeito a sua unicidade, precisamos de argumentos mais refinados. Para isto, provamos que o SDE induzido pela EDE (3.1) pertence a uma certa classe de SDE, satisfaz a propriedade forte Feller e é irreduzível. O principal ingrediente para estabelecermos a propriedade forte Feller é uma fórmula de Bismut-Elworthy para a EDE. Isto será feito na Seção 4. Na Seção 5, provamos a unicidade da medida invariante para a EDE.

3.2 Preliminares

Nesta seção nós fixaremos a notação básica que utilizada usada neste capítulo e relembramos algumas definições e resultados de [22]. Dado um espaço produto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, denotamos por $\Pi_{\mathcal{X}}$ e $\Pi_{\mathcal{Y}}$ as projeções sobre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, respectivamente. Também, dados dois espaços mensuráveis $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, uma aplicação mensurável $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ e uma medida μ em $\mathcal{E}$, definimos a medida $f^*\mu$ em $\mathcal{F}$ de forma natural por $f^*\mu = \mu \circ f^{-1}$. Se $x \in \mathcal{X}$ então denotamos por δ_x a usual medida de Dirac localizada em x . Também denotamos por $\mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ e $\mathcal{M}_+(\mathcal{X})$ o conjunto das medidas de probabilidade e medidas positivas finitas em $\mathcal{X}$, respectivamente. Iremos munir ambos os conjuntos com a topologia da convergência fraca. Se $\mathcal{X}$ é um espaço Polonês então escrevemos $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{X})$ como o espaço das funções $f: [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ que são contínuas à direita e cujo limites à esquerda existem em todos os pontos (funções càdlàg). Vamos munir tal espaço com a usual topologia de Skorohod. Também denotamos por $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{X})$ o espaço das funções contínuas $f: [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ munida da usual topologia da convergência uniforme. Para abertos não-limitados J , vamos munir o espaço $\mathcal{D}(J, \mathcal{X})$ ($\mathcal{C}(J, \mathcal{X})$) com a usual topologia induzida pela topologia de Skorohod em conjuntos compactos em J (convergência uniforme sobre conjuntos compactos em J).

Primeiramente vamos definir a estrutura do sistema dinâmico que vamos trabalhar.

Definição 3.2: Uma quadrupla $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_{\omega}, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$ é chamada de *processo de ruído estacionário* se satisfaz os seguintes itens:

- i) $\mathcal{W}$ é um espaço Polonês,
- ii) $\mathcal{P}_t$ é um semigrupo de transição Feller sobre $\mathcal{W}$, o qual admite $\mathbf{P}_{\omega}$ como sua única medida de probabilidade invariante,
- iii) A família $\{\theta_t\}_{t > 0}$ é um semifluxo de aplicações mensuráveis em $\mathcal{W}$ satisfazendo a propriedade

$$\theta_t^* \mathcal{P}_t(x, \cdot) = \delta_x \text{ para todo } x \in \mathcal{W}.$$

Definição 3.3: Um *sistema dinâmico estocástico* (SDE) em um espaço Polonês $\mathcal{X}$ sobre um processo de ruído estacionário $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \leq 0}, \mathbf{P}_\omega, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$ é uma aplicação

$$\Lambda : \mathbf{R}_+ \times \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}, \quad (t, x, w) \mapsto \Lambda_t(x, w),$$

com as seguintes propriedades:

i) *Regularidade de caminhos:* Para todo $T > 0$, $x \in \mathcal{X}$, e $w \in \mathcal{W}$, a aplicação $\Phi_T(x, w) : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ definida por

$$\Phi_T(x, w)(t) = \Lambda_t(x, \theta_{T-t}w),$$

pertence à $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{X})$.

ii) *Dependência contínua:* A aplicação $(x, w) \mapsto \Phi_T(x, w)$ é contínua de $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ para $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{X})$ para todo $T > 0$.

iii) *Propriedade de cociclo:* A família de aplicações Λ_t satisfaz

$$\begin{aligned} \Lambda_0(x, w) &= x, \\ \Lambda_{s+t}(x, w) &= \Lambda_s(\Lambda_t(x, \theta_s w), w), \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $s, t > 0$, $x \in \mathcal{X}$ e $w \in \mathcal{W}$.

Dizemos que um SDE é *contínuo* se o espaço $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{X})$ pode ser trocado por $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{X})$ na Definição 3.3. Dado um SDE como na Definição 3.3 e uma condição inicial $x_0 \in \mathcal{X}$, vamos agora mostrar como podemos utilizar um SDE para construir de forma natural um processo estocástico tomando valores em $\mathcal{X}$ com condição inicial x_0 . Primeiramente, dado $t \geq 0$ e $(x, w) \in \mathcal{X} \times \mathcal{W}$, construímos uma medida de probabilidade $\mathcal{Q}_t(x, w; \cdot)$ em $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ da seguinte forma

$$\mathcal{Q}_t(x, w; A \times B) = \int_B \delta_{\Lambda_t(x, w')}(A) \mathcal{P}_t(w, dw'). \tag{3.6}$$

Pode-se mostrar [22, Lemma 2.12] que a família de medidas $\mathcal{Q}_t(x, w; \cdot)$ constitui um semigrupo de transição Feller em $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ e, se uma medida de probabilidade μ em $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ satisfaz $\Pi_{\mathcal{W}}^* \mu = \mathbf{P}_\omega$, então $\Pi_{\mathcal{W}}^* \mathcal{Q}_t \mu = \mathbf{P}_\omega$ para todo $t > 0$. Isto sugere a seguinte definição.

Definição 3.4: Seja Λ um SDE. Então uma medida de probabilidade μ em $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ é chamada de uma *condição inicial generalizada* para Λ se $\Pi_{\mathcal{W}}^* \mu = \mathbf{P}_\omega$. Vamos denotar por $\mathcal{M}_\Lambda$ como o espaço das condições iniciais generalizadas munido da topologia da convergência fraca. Elementos de $\mathcal{M}_\Lambda$ que são da forma $\mu = \delta_x \times \mathbf{P}_\omega$ para algum $x \in \mathcal{X}$ serão chamados simplesmente de *condições iniciais*.

Dada uma condição inicial generalizada μ , podemos naturalmente construir um processo estocástico Markoviano (x_t, w_t) tomando valores em $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ de acordo com a medida μ e o semigrupo de transição $\mathcal{Q}_t$. A marginal x_t deste processo em $\mathcal{X}$ será chamada de *processo gerado por Λ através de μ* . Vamos denotar por $\mathcal{L}\mu$ a lei deste processo (i.e. $\mathcal{L}\mu$ é uma medida em $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X})$). Mais precisamente, definimos para todo $T > 0$ a medida $\mathcal{L}_T\mu$ em $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{X})$ dada por

$$\mathcal{L}_T\mu = \Phi_T^* P_T\mu, \quad (3.7)$$

onde Φ_T é definida como na Definição 3.3(ii) e $\{P_t; t \geq 0\}$ é um semigrupo de transição de Feller em $\mathcal{W} \times \mathcal{X}$ definido de forma natural por

$$P_t f(x, \omega) := \int_{\mathcal{W}} f(x, w') \mathcal{P}_t(\omega, dw'); \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W} \times \mathcal{X}; \mathbf{R}). \quad (3.8)$$

onde $\mathcal{B}_b(\mathcal{W} \times \mathcal{X}, \mathbf{R})$ denota o espaço das funções limitadas de $\mathcal{W} \times \mathcal{X}$ para $\mathbf{R}$. Via a imersão natural $\iota: \mathcal{D}([0, T], \mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X})$ definida por $(\iota w)(t) = w(T)$ para $t \geq T$, a expressão (??) nos dá uma família de medidas em $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X})$. Da propriedade de cociclo segue que a restrição sobre $\mathcal{D}([0, T], \mathcal{X})$ de $\mathcal{L}_{T'}\mu$ com $T' > T$ é igual à $\mathcal{L}_T\mu$. A definição da topologia de Skorohod em $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X})$ portanto implica que a sequência $\mathcal{L}_T\mu$ converge fracamente para uma única medida de probabilidade em $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X})$ que será denotada por $\mathcal{L}\mu$. Isto motiva a seguinte relação de equivalência:

Definição 3.5: Duas condições iniciais generalizadas μ e ν de um SDE Λ são ditas *equivalentes* se os processos gerados por μ e ν são iguais em lei. Isto é, $\mu \sim \nu \Leftrightarrow \mathcal{L}\mu = \mathcal{L}\nu$.

Na bordagem de SDE, dizemos que uma condição inicial generalizada μ é *invariante* para o SDE Λ se esta é invariante para o semigrupo de transição Markoviano $\mathcal{Q}_t$ gerado por Λ . Dizemos que uma condição inicial generalizada μ é *estacionária* para Λ se temos que

$$\mathcal{Q}_t\mu \sim \mu, \quad \forall t > 0,$$

isto é, o processo em $\mathcal{X}$ gerado por μ for estacionário. Chamamos μ de *ergódico* se este for ergódico com respeito à $\mathcal{Q}_t$.

Gostaríamos de mencionar que a principal motivação no desenvolvimento da abordagem de SDE é o estudo de propriedades ergódicas de sistemas dinâmicos dirigidos por processos com memória. O espaço de ruído $\mathcal{W}$ pode ser interpretado como o *passado* do ruído que dirige a dinâmica sobre o espaço de trajetórias $\mathcal{D}(0, T; \mathcal{X})$ e introduz memória no sistema. Neste sentido, poder-se-ia argumentar que deveríamos estar interessados somente em medidas estacionárias, sem nos preocuparmos se elas são invariantes ou não. Veja [22, Proposições 2.17, 2.18] para maiores detalhes. De fato, o seguinte resultado elementar afirma que podemos relacionar os pontos extremos do conjunto das medidas invariantes para um SDE Λ aos pontos extremos do conjunto das medidas invariantes

com respeito ao sistema dinâmico canônico adjacente sobre o espaço de estados $\mathcal{X}$. Mais precisamente, seja $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{W} \times \mathcal{X})$ o espaço das funções definidas em $\mathbf{R}_+$ tomando valores em $\mathcal{W} \times \mathcal{X}$, e sejam Σ_t e $\mathcal{N}_t$ as aplicações *shift* sobre $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{W} \times \mathcal{X})$ e $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{X})$, respectivamente.

A seguinte observação é trivial porém terá papel importante no restante do capítulo.

Lema 3.6: *A aplicação $\mathcal{L}$ preserva ergodicidade no sentido que se $\mu \in \mathcal{M}_\Lambda$ é uma medida invariante ergódica para um SDS Λ então $\mathcal{L}\mu$ é uma medida invariante ergódica para o sistema dinâmico canônico $(\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d), \mathcal{N}_t)$.*

Demonstração: Considere $\mu \in \mathcal{M}_\Lambda$ uma medida invariante ergódica para um SDE Λ e seja Σ_t a aplicação *shift* em $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{W} \times \mathcal{X})$. Pela hipótese de ergodicidade segue que P_μ é ergódica para o sistema dinâmico $(\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{W} \times \mathcal{X}), \Sigma_t)$, onde P_μ denota a medida canônica gerada por μ através do semigrupo Markoviano $\mathcal{Q}_t$. Notando que a marginal de P_μ sobre $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{X})$ é igual à $\mathcal{L}\mu$ e $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{W} \times \mathcal{X}) = \mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{W}) \times \mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{X})$ segue que $\mathcal{N}_t$ preserva a medida $\mathcal{L}\mu$. Finalmente, pela ergodicidade de P_μ todo conjunto $\mathcal{N}_t$ -invariante tem $\mathcal{L}\mu$ -medida igual à zero ou um. Isto mostra que $\mathcal{L}\mu$ é uma medida de probabilidade ergódica para o sistema dinâmico $(\mathcal{E}(\mathbf{R}_+; \mathcal{X}), \mathcal{N}_t)$. $\square$

Observação 3.7: Como consequência do resultado acima temos que se $\mu, \nu \in \mathcal{M}_\Lambda$ são duas medidas invariantes ergódicas para o semigrupo $\mathcal{Q}_t$, então ou $\mathcal{L}\mu \sim \mathcal{L}\nu$ ou $\mathcal{L}\mu$ e $\mathcal{L}\nu$ são mutuamente singulares.

Relembremos o seguinte fato importante sobre a norma da variação total:

Lema 3.8: *Sejam μ e ν duas medidas positivas. Então, $\mu \perp \nu$ se e somente se, $\|\mu - \nu\|_{TV} = \|\mu\|_{TV} + \|\nu\|_{TV}$.*

3.3 Um Resultado Ergódico Abstrato

A principal motivação desta seção são os seguintes fatos bem-conhecidos da teoria de processos de Markov. Lembramos que um processo de Markov sobre um espaço Polonês $\mathcal{X}$ com probabilidades de transição $\bar{P}_t$ é chamado *topologicamente irreduzível* no tempo t se $\bar{P}_t(x, A) > 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo conjunto aberto $A \subset \mathcal{X}$. Chamamos simplesmente de topologicamente irreduzível de existe tal tempo.

Chamamos de *forte Feller* num tempo t se $\bar{P}_t\psi$ é uma função contínua para toda função mensurável limitada $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$. Faremos um abuso de notação e usaremos o símbolo $\bar{P}_t$ para denotar o correspondente semigrupo agindo sobre observáveis. Vamos usar o mesmo símbolo para denotar o semigrupo adjunto agindo sobre medidas de

Borel finitas em $\mathcal{X}$. Notemos que a propriedade forte Feller é equivalente à continuidade da função $x \mapsto \bar{\mathcal{P}}_t(x, \cdot)$ se o espaço das medidas de probabilidade em $\mathcal{X}$ é munido da topologia da convergência forte. Um resultado clássico frequentemente atribuído à Doob e Khasminski [12] afirma que:

Teorema 3.9: *Se um processo de Markov sobre um espaço Polonês $\mathcal{X}$ com probabilidades de transição $\bar{\mathcal{P}}_t$ é topologicamente irreduzível e forte Feller, então este admite no máximo uma medida de probabilidade invariante.*

Nesta seção introduziremos a propriedade *forte Feller* e *irreduzibilidade* na abordagem abstrata de SDE como revisto na seção anterior. Como já anteriormente notado em [24], a propriedade forte Feller não é adequada para generalizações, principalmente porque a topologia da convergência forte de medidas não é metrisável. Em vez de generalizar a noção de continuidade das probabilidades de transição na topologia da convergência forte, iremos portanto seguir a abordagem seguida em [24] e forneceremos uma generalização da noção de continuidade na topologia da variação total. Com respeito a irreduzibilidade, resulta que este conceito será muito próximo à irreduzibilidade do semigrupo Markoviano $\mathcal{Q}_t$ induzido por um SDE Λ .

Nesta seção, vamos considerar um SDE Λ arbitrário tomando valores em um espaço Polonês $\mathcal{X}$ com processo de ruído estacionário $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_\omega, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$. Lembremos que introduzimos a aplicação linear $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ para $\mathcal{M}_1(\mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X}))$, tomando o limite de (3.7) com $T \rightarrow \infty$. Vamos denotar por $R_t : \mathcal{D}(\mathbf{R}_+, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{D}([t, \infty), \mathcal{X})$ a natural aplicação restrição. Os seguintes conjuntos serão fundamentais:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t &= \{(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{W}^2 \mid R_t^* \mathcal{L} \delta_{(x, \omega)} \sim R_t^* \mathcal{L} \delta_{(x, \tilde{\omega})} \quad \forall x \in \mathcal{X}\}, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{X}}^t &= \{(x, y, \omega) \in \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W} \mid R_t^* \mathcal{L} \delta_{(x, \omega)} \not\sim R_t^* \mathcal{L} \delta_{(y, \omega)}\}, \\ \mathcal{N}^t &= \{(x, y, \omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}^2 \mid (\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t \text{ e } (x, y, \omega) \in \mathcal{N}_{\mathcal{X}}^t\}. \end{aligned}$$

Acima e a seguir, escrevemos $\mu \sim \nu$ para denotar duas medidas com sinal μ e ν equivalentes e $\mu \perp \nu$ para denotar que elas são mutuamente singulares. Se μ e ν são medidas com sinal, também usaremos a notação $\mu \leq \nu$ como abreviação para “ $\mu(A) \leq \nu(A)$ para todo conjunto mensurável A ”.

Note que além das simetrias óbvias das definições, o conjunto $\mathcal{N}^t$ tem a propriedade

$$(x, y, \omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{N}^t \rightarrow (x, y, \tilde{\omega}, \omega) \in \mathcal{N}^t.$$

Notemos também que no caso Markoviano, $\mathcal{L} \delta_{(x, \omega)}$ é independente de ω de forma que $\mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t = \mathcal{W}^2$ e $\mathcal{N}^t$ pode ser considerado como um subconjunto de $\mathcal{X}^2$ para todo $t > 0$.

Lembramos que uma *acoplamento* entre duas medidas μ e ν em um espaço X é uma medida π em X^2 tal que $\pi(A \times X) = \mu(A)$ e $\pi(X \times A) = \nu(A)$ para todo conjunto mensurável $A \subset X$. No mesmo espírito, diremos que π é uma *subacoplamento* para μ e ν se $\pi(A \times X) \leq \mu(A)$ e $\pi(X \times A) \leq \nu(A)$. A seguir, se Λ é um SDE sobre um processo de ruído estacionário $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_\omega, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$ então consideraremos a aplicação

$$\hat{\Lambda}_t : \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}^2 \rightarrow \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}^2$$

definida por $\hat{\Lambda}_t(x, y, \omega, \tilde{\omega}) = (\Lambda_t(x, \omega), \Lambda_t(y, \tilde{\omega}), \omega, \tilde{\omega})$ para $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ e $(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{W}^2$.

Com estas notações fixadas, o resultado abstrato que fundamenta o presente capítulo é o seguinte:

Teorema 3.10: *Seja $\hat{\Lambda}$ a aplicação definida acima e assumamos que exista uma aplicação conjuntamente mensurável*

$$(x, y, \omega) \mapsto \mathcal{P}_t^{x,y}(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathcal{W}^2)$$

com as seguintes propriedades:

1) A medida $\mathcal{P}_t^{x,y}(\omega, \cdot)$ é uma subacoplamento para $\mathcal{P}_t(\omega, \cdot)$ e $\mathcal{P}_t(\omega, \cdot)$ para todo $(x, y, \omega) \in \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}$.

2) Existe $s > 0$ tal que

$$(\hat{\Lambda}_t(x, y)^* \mathcal{P}_t^{x,y}(\omega, \cdot))(\mathcal{N}^s) > 0, \quad (3.9)$$

para todo $(x, y, \omega) \in \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}$. Então Λ admite no máximo uma medida invariante (na relação de equivalência da Definição 3.5).

Demonstração: Suponhamos por absurdo que μ e ν são duas medidas invariantes ergódicas distintas para um SDE Λ (distintas na relação de equivalência da Definição 3.5). Afirmamos que se Λ satisfaz as hipóteses do enunciado então existem medidas positivas finitas $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ e $\bar{\nu}$ em $\mathcal{W} \times \mathcal{X}$ tais que

$$R_s^* \mathcal{L} \mu \geq R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu} \not\sim R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu} \sim R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu} \leq R_s^* \mathcal{L} \mu.$$

Com tais medidas em mãos, temos que $R_s^* \mathcal{L} \mu$ e $R_s^* \mathcal{L} \nu$ não podem ser mutuamente singulares, resultando assim a uma contradição pelo Lema 3.6. Vamos agora a construção de tais medidas. Primeiramente, considere a seguinte medida finita $\hat{\Lambda}_t(x, y)^* \mathcal{P}_t^{x,y}(\omega, \cdot)$ definidas em $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ onde $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ e $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ denotam duas cópias de $\mathcal{W}$ e $\mathcal{X}$ respectivamente. Por hipótese, existem $s > 0$ e $t > 0$ tais que

$$(\hat{\Lambda}_t(x, y)^* \mathcal{P}_t^{x,y}(\omega, \cdot))(\mathcal{N}^s) > 0,$$

para todo $(x, y, \omega) \in \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}$. Restringindo a medida $\hat{\Lambda}_t(x, y)^* \mathcal{P}_t^{x, y}(\omega, \cdot)$ sobre $\mathcal{N}^s$ podemos definir a seguinte medida positiva localizada em $\mathcal{N}^s$

$$\theta^{(\mu, \nu)}(A \times B) := \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{X}^2} \hat{\Lambda}_t(x, y)^* \mathcal{P}_t^{x, y}(\omega, \cdot)(A \times B) \mu(\omega, dx) \nu(\omega, dy) \mathbf{P}_\omega(d\omega), \quad (3.10)$$

onde $A \times B \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^2 \times \mathcal{X}^2)$. Aqui $\mu(\omega, \cdot)$ e $\nu(\omega, \cdot)$ são as desintegrações de μ e ν com respeito à $\mathbf{P}_\omega$, respectivamente. Usando a hipótese de que $\mathcal{P}_t^{x, y}(\omega, \cdot)$ é uma suacoplamento $\mathcal{P}_t(\omega, \cdot)$ e $\mathcal{P}_t(\omega, \cdot)$ para todo $(x, y, \omega) \in \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W}$ segue imediatamente da invariância de μ e ν que $\tilde{\mu} := \Pi_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{X}_1}^* \theta^{(\mu, \nu)}$ e $\tilde{\nu} := \Pi_{\mathcal{W}_2 \times \mathcal{X}_2}^* \theta^{(\mu, \nu)}$ são menores que μ e ν , respectivamente. Agora vamos considerar a medida $\bar{\nu} := \Pi_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{X}_2}^* \theta^{(\mu, \nu)}$ em $\mathcal{W} \times \mathcal{X}$. Pelas simples definições temos que

$$R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu}(\cdot) = \int_{\mathcal{N}^s} R_s^* \mathcal{L} \delta_{\Pi_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{X}_2}(x, y, \omega, \tilde{\omega})}(\cdot) \theta^{(\mu, \nu)}(dx, dy, d\omega, d\tilde{\omega}),$$

$$R_s^* \mathcal{L} \tilde{\nu}(\cdot) = \int_{\mathcal{N}^s} R_s^* \mathcal{L} \delta_{\Pi_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{X}_1}(x, y, \omega, \tilde{\omega})}(\cdot) \theta^{(\mu, \nu)}(dx, dy, d\omega, d\tilde{\omega}).$$

Desde que $(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}}^s$ podemos concluir que $R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu}(\cdot) \sim R_s^* \mathcal{L} \tilde{\nu}(\cdot)$.

Resta mostrarmos que $R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu} \not\leq R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu}$. Para isto, notemos que $\Upsilon := \Pi_{\mathcal{X}}^* \tilde{\mu} = \Pi_{\mathcal{X}}^* \bar{\nu}$ e portanto pelo Lema 3.47 e o fato que as medidas $\tilde{\mu}$ e $\bar{\nu}$ foram construídas sobre $\mathcal{N}^s$, a seguinte desigualdade ocorre

$$\begin{aligned} \|R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu} - R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu}\|_{TV} &\leq \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{X}^2} \|R_s^* \mathcal{L} \delta_{(x, \omega)} - R_s^* \mathcal{L} \delta_{(y, \omega)}\|_{TV} \tilde{\mu}(\omega, dx) \bar{\nu}(\omega, dy) \Upsilon(d\omega) \\ &< 2\Upsilon(\mathcal{W}) = \|R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu}\|_{TV} + \|R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu}\|_{TV}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\mu}(\omega, \cdot)$ e $\bar{\nu}(\omega, \cdot)$ são desintegrações de $\tilde{\mu}$ e $\bar{\nu}$ com respeito à Υ , respectivamente. A desigualdade estrita da primeira para a segunda linha é uma consequência imediata do fato que a integral pode ser restrita à $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^s$ sem alterar seu valor. A afirmação $R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu} \not\leq R_s^* \mathcal{L} \bar{\nu}$ é então consequência do Lema 3.8.

Por último, notando que $\tilde{\nu} \leq \mu$ e $\tilde{\nu} \leq \nu$ obviamente temos que $R_s^* \mathcal{L} \tilde{\mu} \leq R_s^* \mathcal{L} \mu$ e $R_s^* \mathcal{L} \tilde{\nu} \leq R_s^* \mathcal{L} \nu$. Isto completa a demonstração do Teorema.

□

Observação 3.11: As condições no Teorema 3.10 não nos parece facilmente verificáveis. Desta forma, estaremos interessados em fornecer propriedades estruturais de um SDE Λ que forneçam condições suficientes para que as hipóteses no Teorema 3.10 sejam satisfeitas. Resulta que tais propriedades são análogas às propriedades forte Feller e irreducibilidade no contexto Markoviano.

Definição 3.12: Um SDE é chamado de *forte Feller* no tempo t se existe uma função conjuntamente contínua $\ell : \mathcal{X}^2 \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{R}_+$ tal que

$$\|R_t^* \mathcal{L}\delta_{(x,\omega)} - R_t^* \mathcal{L}\delta_{(y,\omega)}\|_{TV} \leq \ell(x, y, \omega),$$

onde $\ell(x, x, \omega) = 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo $\omega \in \mathcal{W}$.

Observação 3.13: A importância da Definição 3.12 é remanescente da teoria de processos de Markov. Em nosso caso, a importância da definição acima reside no Teorema 3.10 e em particular sobre o conjunto $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^t$. A propriedade forte Feller é definida de forma que a continuidade de $R_t^* \mathcal{L}\delta_{(x,\omega)}$ na topologia da variação total seja válida no espaço de trajetórias $\mathcal{D}([t, \infty); \mathcal{X})$ devido à aplicação R_t . Deve ser notado que somos forçados a trabalhar sobre todo o intervalo $[t, \infty)$ desde que não temos a nossa disposição a propriedade de semigrupo do caso Markoviano. Além do mais, se o processo em $\mathcal{X}$ gerado por um SDE Λ é Markoviano e admite a propriedade forte Feller acima em $t > 0$ então este é forte Feller no sentido Markoviano clássico no tempo $t > 0$. De fato, se tal processo é Markov em sua própria filtração então $\mathcal{L}\delta_{(x,\omega)}$ não depende de ω e pela continuidade de $R_t^* \mathcal{L}\delta_{(x,\omega)}$ na topologia da variação total sobre o espaço de trajetórias podemos concluir que este é forte Feller em $t > 0$ no sentido Markoviano clássico.

Definição 3.14: Um SDE Λ é chamado *topologicamente irreduzível* em t se para todo $x \in \mathcal{X}$, $\omega \in \mathcal{W}$ e para todo aberto não-vazio $U \subset \mathcal{X}$ temos que $\mathcal{Q}_t(x, \omega; \mathcal{W} \times U) > 0$. Além do mais, se um aberto $J \subset \mathcal{W}$ satisfaz $J \cap \Lambda_t^{-1}(x, \cdot)(U) \neq \emptyset$ então $\mathcal{Q}_t(x, \omega; U \times J) > 0$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$.

Observação 3.15: Esta propriedade reflete o fato de que, em geral, o espaço $\mathcal{W}$ na quadrupla $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_\omega, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$ contém informação não-trivial sobre a dinâmica do SDE Λ que deve ser levado em consideração se o ruído que dirige o sistema não for Markoviano. Porém, desde que a dinâmica pelo qual estamos interessados acontece somente no espaço de estados $\mathcal{X}$, em geral, não requeremos que o processo de Markov adjacente gerado pelo semigrupo $\mathcal{Q}_t$ seja irreduzível no sentido da teoria de processos de Markov. De fato, a definição acima é levemente mais fraca do que irreducibilidade para $\mathcal{Q}_t$ no sentido de processos de Markov. De fato, se o semigrupo Markoviano $\{\mathcal{Q}_s; s \geq 0\}$ é irreduzível em t no sentido de processos de Markov então será irreduzível no sentido da definição 3.14.

A seguir, vamos usar a seguinte notação: Se μ é uma medida finita sobre um espaço mensurável $(Y, \mathcal{B}(Y))$ e $O \in \mathcal{B}(Y)$ então escrevemos $\mu|_O(A) := \mu(A \cap O)$ para $A \in \mathcal{B}(Y)$. Agora introduziremos uma classe de SDE que terá um papel importante na teoria.

Definição 3.16: Dizemos que um SDE Λ sobre uma quadrupla $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_\omega, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$ é *quase-Markoviano* se para quaisquer abertos não vazios V, U em $\mathcal{W}$ e para todo $t, s > 0$ existe uma aplicação mensurável $\omega \mapsto \mathcal{P}_s^{V,U}(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathcal{W}^2)$ tal que

i) A medida $\mathcal{P}_s^{V,U}(\omega, \cdot)$ é uma subacoplamento com respeito à $\mathcal{P}_s(\omega, \cdot)|_V$ e $\mathcal{P}_s(\omega, \cdot)|_U$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$.

ii) Temos que $\mathcal{P}_s^{V,U}(\omega; \mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t) > 0$ para todo ω tal que $\min\{\mathcal{P}_s(\omega; V), \mathcal{P}_s(\omega; U)\} > 0$.

Observação 3.17: A Definição 3.16 depende levemente da escolha do SDE Λ . Esta dependência é muito 'fraca' no sentido que não leva em consideração os finos detalhes da dinâmica de Λ , mas somente como o ruído entra no sistema. Por exemplo, iremos mostrar na Seção 5 que a solução da EDE perturbada pelo mBf é sempre quase-Markoviano sem qualquer restrição sobre os coeficientes da equação (3.1), somente hipóteses para garantir a existência global de solução da equação (3.1).

Observação 3.18: O processo em $\mathcal{X}$ gerado por um SDE Λ é um processo Markoviano em sua própria filtração se $\mathcal{L}_{\delta(x,\omega)}$ é independente de ω . Neste caso, $\mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t = \mathcal{W}^2$ para todo $t > 0$ e podemos simplesmente escolher $\mathcal{P}_s^{V,U}(\omega; \cdot) = \mathcal{P}_s(\omega; \cdot)|_V \times \mathcal{P}_s(\omega; \cdot)|_U$ na definição acima, de forma que Λ é também quase-Markoviano.

O último resultado desta seção combina a propriedade forte Feller e irreduzibilidade no contexto da unicidade da medida invariante para um SDE Λ . É um resultado similar ao Teorema 3.9 para sistemas não-Markovianos.

Teorema 3.19: *Se existem tempos $s > 0$ e $t > 0$ tais que um SDE quase-Markoviano Λ é forte Feller em t e irreduzível em s , então satisfaz a hipótese no Teorema 3.10 e portanto o sistema admite no máximo uma medida invariante.*

Demonstração:

Desde que $\mathcal{W}$ é um espaço Polônes, existe um subconjunto denso enumerável $\{w_n\}_{n \geq 0}$ e uma métrica $d_{\mathcal{W}}$ gerando a topologia de $\mathcal{W}$. Dado isto, vamos denotar por $\{V_n\}_{n \geq 0}$ a coleção enumerável de bolas abertas de raio $1/2^k$ centrada em w_m para todo par de inteiros positivos k e m . Também escolhemos uma métrica $d_{\mathcal{X}}$ em $\mathcal{X}$. Iremos no decorrer da prova denotar por $\mathcal{B}_\varrho^{\mathcal{X}}(x) \subset \mathcal{X}$ a bola aberta de raio ϱ centrada em x e de forma similar $\mathcal{B}_\varrho^{\mathcal{W}}(w) \subset \mathcal{W}$, bolas abertas em $\mathcal{W}$.

Para verificarmos as hipóteses do Teorema 3.10, nosso objetivo é achar uma função mensurável

$$(x, y, w) \mapsto (n_x, n_y) , \quad (3.11)$$

e definir

$$\mathcal{P}_s^{x,y}(\omega, \cdot) = \mathcal{P}_s^{V_{n_x}, V_{n_y}}(\omega, \cdot) , \quad (3.12)$$

onde o lado direito usa a família de subacoplamentos da Definição 3.16.

Primeiramente, notemos que é possível construir uma função mensurável $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ com a propriedade que $f(\omega) \in \text{supp } \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Uma forma de se construir é definir

$$n_1(\omega) = \inf\{n \mid \mathcal{P}_s(\omega, \mathcal{B}_1^{\mathcal{W}}(w_n)) > 0\} ,$$

e então recursivamente

$$n_k(\omega) = \inf\{n \mid \mathcal{P}_s(\omega, \mathcal{B}_{2^{-k}}^{\mathcal{W}}(w_n)) > 0 \text{ and } w_n \in \mathcal{B}_{2^{1-k}}(w_{n_{k-1}(\omega)})\} .$$

Através da densidade de w_k podemos concluir que $n_k(\omega) < \infty$ para todo k e todo ω . Segue da construção que a sequência $w_{n_k(\omega)}$ é Cauchy para todo $\omega \in \mathcal{W}$, de forma que podemos definir $f(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k(\omega)}$. Desde que por construção $\mathcal{P}_s(\omega, \mathcal{B}_\rho^{\mathcal{W}}(f(\omega))) > 0$ para todo $\rho > 0$, a função f tem de fato as propriedades requeridas.

Considere agora a aplicação $\tilde{x}: \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ definida por

$$\tilde{x}(x, \omega) = \Lambda_s(x, f(\omega)) ,$$

como também a aplicação mensurável $r: \mathcal{X} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ definida por

$$r(x, \omega) = \inf\{\rho \mid \ell(x', \tilde{x}(x, \omega), \omega') \leq 1/4 \text{ para todo } (x', \omega') \in \mathcal{B}_\rho(x, \omega)\} \quad (3.13)$$

onde usamos $\mathcal{B}_\rho(x, \omega)$ como uma abreviação para $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{X}}(\tilde{x}(x, \omega)) \times \mathcal{B}_\rho^{\mathcal{W}}(f(\omega))$. Desde que a função ℓ na Definição 3.12 é conjuntamente contínua e é nula sobre a diagonal, temos que $r(x, \omega) > 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo $\omega \in \mathcal{W}$.

Dados estes objetos, nós agora estamos em posição de definir n_x e n_y . Considere (x, y, ω) e tome $\rho = r(x, \omega)$, $\tilde{\omega} = f(\omega)$ e $\tilde{x} = \Lambda_s(x, \tilde{\omega})$. Definimos

$$\begin{aligned} n_x &= \inf\{n \mid V_n \subset \mathcal{B}_\rho^{\mathcal{W}}(\tilde{\omega}) , \tilde{\omega} \in V_n , \text{ e } \Lambda_s(x, V_n) \subset \mathcal{B}_\rho^{\mathcal{X}}(\tilde{x})\} , \\ n_y &= \inf\{n \mid \mathcal{P}_s(\omega, V_n) > 0 , \text{ e } \Lambda_s(y, V_n) \subset \mathcal{B}_\rho^{\mathcal{X}}(\tilde{x})\} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Desde que por definição $\Lambda_s(x, \tilde{\omega}) = \tilde{x}$, segue então da continuidade de Λ_s e da definição de V_n que n_x é finita para todo possível valor de x e ω . O fato que n_y é finita para todo possível valor de x , y e ω segue da controlabilidade topologica de Λ . Isto mostra que (3.14) define a aplicação (3.11) e que $\mathcal{P}_s^{x,y}(\omega, \cdot)$ como dado em (3.12) é uma aplicação satisfazendo a primeira hipótese do Teorema 3.10.

Resta mostrarmos que (3.9) também vale. Desde que $\tilde{\omega} \in V_{n_x}$, temos que $\mathcal{P}_s(\omega, V_{n_x}) > 0$. Além disso, por construção $\mathcal{P}_s(\omega, V_{n_y}) > 0$, de forma que $\mathcal{P}_s^{x,y}(\omega, \mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t) > 0$. Segue então da definição de ϱ que temos que

$$\|R_t^* \mathcal{L} \delta_{(\bar{x}, w)} - R_t^* \mathcal{L} \delta_{(\bar{y}, w)}\|_{TV} \leq \frac{1}{2},$$

para todo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{B}_{\varrho}^{\mathcal{X}}(\tilde{x})^2$ e todo $w \in V_{n_x}$. Segue imediatamente da definição de $\mathcal{N}_t^{\mathcal{W}}$ que

$$R_t^* \mathcal{L} \delta_{(\bar{x}, w_x)} \not\leq R_t^* \mathcal{L} \delta_{(\bar{y}, w_y)}, \quad (3.15)$$

para todo $(\bar{x}, \bar{y})$ como acima, todo $w_x \in V_{n_x}$, e todo w_y tal que $(w_x, w_y) \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t$. Desde que $\Lambda(x, \omega_x) \in \mathcal{B}_{\varrho}^{\mathcal{X}}(\tilde{x})$ e $\Lambda(y, \omega_y) \in \mathcal{B}_{\varrho}^{\mathcal{X}}(\tilde{x})$ para todo $(\omega_x, \omega_y) \in V_{n_x} \times V_{n_y}$, (3.9) é agora uma consequência de (3.15) e da condição ii) na Definição 3.16. Isto completa a demonstração do Teorema. □

O restante do capítulo é voltado a mostrar que é possível associar um SDE à equação (3.1) de forma que as hipóteses do Teorema 3.19 sejam satisfeitas.

3.4 Construção do Sistema Dinâmico Estocástico

Nesta seção, vamos construir um SDE contínuo induzido pela EDE (3.1). A estratégia consiste em definir o SDE de forma que para toda condição inicial generalizada μ a medida de probabilidade sobre o espaço de trajetórias é uma *solução* da EDE em lei. Feito isto, podemos investigar propriedades ergódicas da EDE (3.1) como descrito nas seções anteriores.

3.4.1 Representação do mBf

Neste capítulo, iremos usar a representação de Mandelbrot-Van Ness do mBf ([48]). A vantagem desta representação é que esta é invariante sob *time-shifts*, de forma que é natural para o estudo de propriedades ergódicas. Podemos representar o *two-sided* mBf de parâmetro $H \in (0, 1)$ em termos de um *two-sided* movimento Browniano B da seguinte forma

$$B_H(t) = \alpha_H \int_{-\infty}^0 (-r)^{H-1/2} (dB(r+t) - dB(r)), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (3.16)$$

onde α_H é uma constante normalizadora dada por

$$\alpha_H = \left(\int_0^{+\infty} ((t-s)^{H-1/2} - s^{H-1/2}) ds + \frac{1}{2H} \right). \quad (3.17)$$

Veja [57] para maiores detalhes.

É fácil ver que podemos também escrever a expressão acima da seguinte forma

$$B_H(t) = \alpha_H \int_{-\infty}^{+\infty} ((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}) dB(s),$$

onde $f_+ = \max\{f, 0\}$.

Frequentemente, vamos nos referir ao *time-reversed* mBf como o mBf no *passado* e o usual mBf na reta positiva como o mBf no *futuro*. Além do mais, podemos escrever o *two-sided* mBf $B_H(\omega, \tilde{\omega})$ dependendo de duas realizações do movimento Browniano no *passado* e *futuro*, ω e $\tilde{\omega}$, respectivamente. Fazendo uma mudança de variáveis temos de fato que $B_H(\omega, \tilde{\omega})(t) = (\mathcal{D}_H(\omega, \tilde{\omega})(t), \tilde{\mathcal{D}}_H(\omega, \tilde{\omega})(t))$ onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_H(\omega, \tilde{\omega})(t) &:= \alpha_H \int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) d\omega(s) \\ &\quad + \alpha_H \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\tilde{\omega}(s), \end{aligned} \quad (3.18)$$

para $t \geq 0$, e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_H(\omega, \tilde{\omega})(t) &:= \alpha_H \int_{-\infty}^t [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] d\omega(s) \\ &\quad - \alpha_H \int_t^0 (-s)^{H-1/2} d\omega(s), \quad t \leq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

para $t \leq 0$. Vamos denotar por $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$ o conjunto das funções $g : \mathbf{R}_- \rightarrow \mathbf{R}$ em $\mathcal{C}^\infty$ satisfazendo $g(0) = 0$ e com suporte compacto. Se $\bar{\omega} := (\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, também escrevemos

$$\mathbf{D}_H(\bar{\omega})(t) := \alpha_H \int_{-\infty}^0 (-r)^{H-1/2} (d\bar{\omega}(r+t) - d\bar{\omega}(r)), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.20)$$

3.4.2 Espaço de Ruído e o Processo de Ruído Estacionário

O objetivo desta seção é definir o processo de ruído estacionário que será utilizado para investigar propriedades ergódicas da EDE (3.1) como explicado na Seção 3.3. O principal passo é considerar um adequado espaço Polônês de forma que:

- (1) Exista um semigrupo Feller sobre o espaço de ruído que admita uma única medida invariante.
- (2) A aplicação solução da EDE (3.1) seja contínua com respeito ao ruído e condições iniciais em $\mathbf{R}^d$.

Deve ser notado que tais propriedades são intrinsicamente relacionadas com a topologia dada sobre o espaço de ruído. O restante desta seção é voltada à escolher tal topologia que realiza (1) e (2). Primeiramente, deve ser notado que pelas características do mBf será natural trabalharmos num espaço Polônes definido por uma norma que capte a continuidade do tipo Hölder em intervalos limitados e ao mesmo tempo forneça algum tipo de regularidade no infinito. Para isto, se $\gamma \in (0, 1)$ e $\delta \in (0, 1)$ então vamos considerar $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ como sendo o complemento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$ com respeito a norma

$$\|\omega\|_{\gamma, \delta} = \sup_{t, s \in \mathbf{R}_-} \frac{|\omega(t) - \omega(s)|}{|t - s|^\gamma (1 + |t| + |s|)^\delta}. \quad (3.21)$$

Vamos denotar $\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ para o mesmo espaço porém com os argumentos na reta positiva. Também escrevemos $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta), T}$ e $\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta), T}$ quando restringimos os argumentos sobre os intervalos $[-T, 0]$ e $[0, T]$, respectivamente. Deve ser notado que $\|\cdot\|_{\gamma, \delta, T}$ é equivalente à norma Hölderiana $\|\cdot\|_\gamma$ para todo $0 < T < \infty$. Além do mais, $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ é um espaço de Banach separável. O seguinte lemma afirma que existe uma medida de Wiener em $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ para o mBf.

Lema 3.20: *Seja $H \in (1/2, 1)$, $\gamma \in (1/2, H)$ e $\gamma + \delta \in (H, 1)$. Existe uma medida de probabilidade de Borel $\mathbf{P}_H$ em $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ tal que o processo canônico associado a $\mathbf{P}_H$ é um time-reversed movimento Browniano fracionário de parâmetro H .*

Demonstração: Através do critério de Kolmogorov e das propriedades dos caminhos do mBf podemos facilmente checar que $\mathbf{P}_H(\mathcal{W}_{\gamma, \delta}) = 1$ desde que $H < \gamma + \delta < 1$. Além do mais, a restrição da sigma algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}))$ para $\mathcal{W}_{\gamma, \delta}$ concorda com $\mathcal{B}(\mathcal{W}_{\gamma, \delta})$. Isto mostra a existência de tal medida. $\square$

Seja $\mathbf{P}_H$ a medida de Wiener do mBf em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$, $\mathbf{W}_H$ a medida de Wiener do mBf em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ e $\mathbf{W} = \mathbf{W}_- \times \mathbf{W}_+$ a usual medida de Wiener em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, onde $\mathbf{W}_-$ e $\mathbf{W}_+$ são as medidas de Wiener em $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$ e $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, respectivamente. Desde que $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \times \widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ é um espaço Polônês existe uma única (*q.c* $\mathbf{P}_H$) probabilidade condicional regular ν_H para $(\Pi_{\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}}, \mathbf{W}_H)$ e como consequência, a desintegração de $\mathbf{W}_H$ com respeito à $\mathbf{P}_H$ é dada por

$$\mathcal{H}(\omega, \cdot) := \Pi_{\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}}^* \nu_H(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_1(\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}).$$

Esta representação abstrata nos diz que $\mathcal{H}(\omega, \cdot)$ é uma medida Gaussiana para cada $\omega \in \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$, desde que $\mathbf{W}_H$ é uma medida Gaussiana. De fato, podemos dar uma fórmula explícita para esta desintegração. O seguinte resultado já era esperado considerando que o mBf é representado pelo *two-sided* movimento Browniano.

Lema 3.21: *A desintegração de $\mathbf{W}_H$ com respeito à $\mathbf{P}_H$ é uma medida Gaussiana (não-simétrica) para cada ω dada por*

$$\mathcal{H}(\omega, \cdot) = \tilde{\mathcal{D}}_H^*(\gamma_H \mathcal{D}_{1-H}\omega, \cdot) \mathbf{W}_+, \quad \omega \in \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}, \quad (3.22)$$

para uma constante normalizadora γ_H . Além do mais, o operador da média $\mathcal{A} : \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ de $\mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A}\omega(t) = \beta_H \int_0^\infty \frac{1}{r} g\left(\frac{t}{r}\right) \omega(-r) dr \quad ; \omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}) \quad (3.23)$$

onde

$$g(x) = x^{H-1/2} + (H - 3/2)x \int_0^1 \frac{(u+x)^{H-5/2}}{(1-u)^{H-1/2}} du \quad ; x \geq 0,$$

$$\text{e } \beta_H = \alpha_H \alpha_{1-H}(H - 1/2).$$

Demonstração: Considere a representação Mandelbrot-Van Ness do *two-sided* mBf dado por $B_H(\omega, \tilde{\omega}) = (\mathcal{D}(\omega), \tilde{\mathcal{D}}(\omega, \tilde{\omega}))$. Então $B_H^* \mathbf{W} = \mathbf{W}_H$ onde $\mathbf{W}$ é a *two-sided* medida de Wiener dada por $\mathbf{W} = \mathbf{W}_- \times \mathbf{W}_+$. Considerando um retângulo arbitrário $A \times B$ seque que

$$\mathbf{W}_H(A \times B) = \int_{\mathcal{D}_H^{-1}(A)} \mathbf{W}_+(\tilde{\mathcal{D}}_H^{-1}(\omega, \cdot)(B)) \mathbf{W}_-(d\omega).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_A \mathcal{D}_H^*(\gamma_H \mathcal{D}_{1-H}\omega, \cdot) \mathbf{W}_+(B) \mathbf{P}_H(d\omega) \\ = \int_{\mathcal{D}_H^{-1}(A)} \tilde{\mathcal{D}}_H^*(\gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \mathcal{D}_H \omega, \cdot) \mathbf{W}_+(B) \mathbf{W}_-(d\omega) \\ = \int_{\mathcal{D}_H^{-1}(A)} \tilde{\mathcal{D}}_H^*(\omega, \cdot) \mathbf{W}_+(B) \mathbf{W}_-(d\omega) \end{aligned}$$

desde que $\gamma_H \mathcal{D}_{1-H}$ é a inversa de $\mathcal{D}_H$ para uma cosntante adequada γ_H que depende de H (Veja [22]; Lemma 3.6). Agora notando que $\mathcal{D}_{1-H}$ é uma aplicação bi-mensurável, a

igualdade acima mostra que $\tilde{\mathcal{D}}^*(\gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \omega, \cdot) \mathbf{W}_+$ é a desintegração de $\mathbf{W}_H$ com respeito à $\mathbf{P}_H$. Além do mais, pela definição de $\tilde{\mathcal{D}}_H$ segue que $\mathcal{H}(\omega, \cdot)$ é somente uma translação de uma medida Gaussiana simétrica e portanto o espaço Cameron-Martin associado não depende de ω .

Resta mostrarmos a representação (3.23). Para isto, considere $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$ e $\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}^*$ o dual topológico de $\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$. Lembremos que $\mathcal{A}\omega$ é o único elemento de $\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}\omega, \psi \rangle_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}, \tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}^*} = \int_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}} \langle \tilde{\omega}, \psi \rangle_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}, \tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}^*} \mathcal{H}(\omega; d\tilde{\omega}) \quad ; \psi \in \tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}^*.$$

Desde que $\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)} \subset \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, então podemos tomar para ψ a medida de Dirac δ_t e portanto

$$\mathcal{A}\omega(t) = \int_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}} \tilde{\omega}(t) \mathcal{H}(\omega; d\tilde{\omega}).$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\omega &= \int_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}} \tilde{\omega} \mathcal{H}(\omega; d\tilde{\omega}) = \mathbf{E}_{\mathbf{W}_H} [\Pi_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}} | \Pi_{\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}} = \omega] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{W}_H} [\Pi_{\tilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}} | \sigma(\Pi_{\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}})] = \mathbf{E}_{\mathbf{W}} [\tilde{\mathcal{D}}_H | \sigma(\mathcal{D}_H)] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{W}} [\tilde{\mathcal{D}}_H | \mathcal{D}_H = \omega] = \mathbf{E}_{\mathbf{W}_+} [\tilde{\mathcal{D}}_H(\mathcal{D}_{1-H}(\omega), \cdot)], \end{aligned}$$

onde as igualdades valem para $\mathbf{P}_H$ -quase-certamente ω .

Na última igualdade usamos o fato que $\mathcal{D}_H \circ \mathcal{D}_{1-H}$ é um múltiplo da identidade em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$. De fato, desde que a integral de Itô tem valor esperado nulo podemos computar $\mathcal{A}\omega(t)$ da seguinte forma

$$\mathcal{A}\omega = \left(\Pi_{\tilde{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta}} \circ \mathbf{D}_H \circ \pi^0 \circ \mathbf{D}_{1-H} \circ \pi_0 \right)(\omega) \quad ; \omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$$

onde $\pi_0 : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ é definido por $\pi_0(\omega) = (\omega, 0)$ e $\pi^0 : \mathcal{C}(\mathbf{R}; \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ é definido por $\pi^0(\omega, \tilde{\omega}) = (\omega, 0)$. Fixe $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$. Integrando por partes a equação (3.20) temos que

$$\mathcal{A}\omega(t) = -\alpha_H(H - 1/2) \int_{-\infty}^0 (-r)^{H-3/2} (\xi_{r+t}^{1-H}(\omega) - \xi_r^{1-H}(\omega)) dr,$$

onde

$$\begin{aligned}\xi_s^{1-H}(\omega) &= \alpha_{1-H} \int_{-\infty}^s [(s-\ell)^{1/2-H} - (-\ell)^{1/2-H}] d\omega(\ell) \\ &\quad - \alpha_{1-H} \int_s^0 (-\ell)^{1/2-H} d\omega(\ell) \quad \text{se } s \leq 0; \\ &= 0 \quad \text{caso contrário.}\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\omega(t) &= -\beta_H \int_{-\infty}^{-t} (-r)^{H-3/2} \left(\int_{-\infty}^{r+t} (r+t-\ell) d\omega(\ell) \right) dr \\ &\quad + \beta_H \int_{-\infty}^0 \left(\int_{\ell}^0 (-r)^{H-3/2} (r-\ell)^{1/2-H} dr \right) d\omega(\ell) \\ &\quad - \frac{\beta_H}{H-1/2} t^{H-1/2} \int_{-\infty}^0 (-\ell)^{1/2-H} d\omega(\ell),\end{aligned}$$

onde $\beta_H := \alpha_H \alpha_{1-H} (H-1/2)$. Usando o fato que $\int_{\ell}^0 (-r)^{H-3/2} (r-\ell)^{1/2-H} dr = \Gamma(H-1/2)\Gamma(H-3/2)$ para todo $\ell \in \mathbf{R}_-$ e fazendo mudança de variável, nós de fato temos que

$$\mathcal{A}\omega(t) = -\beta_H \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^1 \frac{(u-t/\ell)^{H-3/2}}{(1-u)^{H-1/2}} du + \frac{t^{H-1/2}}{H-1/2} (-\ell)^{1/2-H} \right) d\omega(\ell).$$

Finalmente, integrando por partes segue que

$$\mathcal{A}\omega(t) = \beta_H \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^1 \frac{(H-3/2)(u-t/\ell)^{H-5/2} t}{(1-u)^{H-1/2} \ell^2} du + \frac{t^{H-1/2}}{(-\ell)^{H+1/2}} \right) \omega(\ell) d\ell,$$

e podemos concluir a demonstração. □

Agora estamos em posição de definir nosso processo de ruído estacionário. Para isto, vamos considerar o *one-sided* shift de Wiener $\theta_t : \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)} \rightarrow \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)}$ definido a seguir

$$\theta_t \omega(s) := \omega(s-t) - \omega(-t) \quad ; s \in \mathbf{R}_-, t \in \mathbf{R}_+. \quad (3.24)$$

Para a construção do semigrupo de transição em $\mathcal{W}_{(\gamma,\delta)}$ vamos introduzir a função $M_t : \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)} \times \widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma,\delta)} \rightarrow \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)}$ definida por

$$M_t(\omega, \tilde{\omega}) := \begin{cases} \tilde{\omega}(s+t) - \tilde{\omega}(t) & \text{se } -t < s < 0 \\ \omega(s+t) - \tilde{\omega}(t) & \text{se } s \leq -t \leq 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

e tomamos

$$\mathcal{P}_t(\omega, \cdot) := M_t^*(\omega, \cdot) \mathcal{H}(\omega, \cdot) \quad \text{for } \omega \in \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \text{ and } t \in \mathbf{R}_+. \quad (3.26)$$

Observação 3.22: É óbvio da definição que M_t é contínuo de $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \times \widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ para $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$. Além disso, deve ser notado que se em adição o operador da média de $\mathcal{H}$ for limitado de $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ para $\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ então $\mathcal{P}_t(\omega, \cdot)$ será um semigrupo Feller sobre $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$.

Proposição 3.23: Se $1/2 < \gamma < H$ e $H < \delta + \gamma < 1$ então o operador do valor esperado $\mathcal{A}$ da desintegração $\mathcal{H}$ é limitado de $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ para $\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$.

Demonstração: Considere θ como definido no Lema 3.43, $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$, g como no Lema 3.22 e C uma constante genérica que pode diferir de linha para linha. Fixe $1/2 < \gamma < H$ e $H - \gamma < \delta < 1 - \gamma$. Por simplicidade, vamos escrever $\alpha = 1 - \theta$ e $\kappa = H - 1/2$. Sem perda de generalidade vamos considerar $s < t$. Fazendo a mudança de variáveis $r = \ell/t$ e dividindo os intervalos de integração, queremos agora estimar a seguinte diferença

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\omega(t) - \mathcal{A}\omega(s) &= \beta_H \int_0^{s/t} \frac{1}{r} \left(g(1/r) - g(s/rt) \right) \omega(-rt) dr \\ &\quad + \beta_H \int_{s/t}^1 \frac{1}{r} \left(g(1/r) - g(s/rt) \right) \omega(-rt) dr \\ &\quad + \beta_H \int_1^\infty \frac{1}{r} \left(g(1/r) - g(s/rt) \right) \omega(-rt) dr = T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Usando o fato que $\gamma > \kappa$, a continuidade γ -Hölder de ω e o comportamento de $g(x)$ para $x \geq 1$ no Lema 3.43, podemos estimar o primeiro termo da seguinte forma

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq C \int_0^{s/t} \frac{|1 - s/t| t^\gamma r^\gamma}{r^{\kappa+1}} dr \\ &\leq C \frac{|t - s|}{t^{1-\gamma}} \int_0^{s/t} r^{\gamma-\kappa-1} dr \leq C |t - s|^\gamma (1 + t + s)^\delta. \end{aligned}$$

Usando o comportamento de $g(x)$ para $x \geq 1$ e $x \leq 1$ no Lema 3.43 e tomando $\theta = 3/2 - H$, podemos estimar o segundo termo da seguinte forma

$$\begin{aligned}
|T_2| &\leq C \int_{s/t}^1 \frac{1}{r} |(s/rt)^\kappa - 1/r^\kappa| \omega(-rt) dr \\
&\leq C \int_{s/t}^1 \frac{1}{r} |(s/rt)^\kappa - 1/r^\kappa| r^\gamma t^\gamma dr \\
&\leq C |t-s|^\gamma (1+t+s)^\delta.
\end{aligned}$$

Agora tomamos α de forma que $0 < \delta < \alpha - \gamma < 1/2$ e suponhamos que $\|\omega\|_{\gamma,\delta} \leq 1$. Através do comportamento de $g(x)$ para $x \leq 1$, o último termo pode ser estimado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
|T_3| &\leq |1-s/t|^\alpha t^\gamma \int_1^\infty r^{\gamma-\alpha-1} (1+rt)^\delta dr \\
&\leq |t-s|^\gamma \left(\frac{(1+t)^\delta}{\alpha-\gamma} + \frac{\delta t}{\alpha-\gamma} \int_1^\infty r^{\gamma-\alpha} (1+rt)^{\delta-1} dr \right),
\end{aligned}$$

e portanto $|T_3|/|s-t|^\gamma(1+t+s)^\delta$ é limitado para $t < 1$ e $s \geq 0$. Logo é suficiente checarmos que o último termo da desigualdade acima é limitado para $t \gg 1$. Fazendo mudança de variáveis de fato temos que

$$\frac{\delta t}{\alpha-\gamma} \int_1^\infty r^{\gamma-\alpha} (1+rt)^{\delta-1} dr = \frac{\delta t^{\alpha-\gamma}}{\alpha-\gamma} \int_{1+t}^\infty (r-1)^{z-1} r^{\delta-1} dr,$$

onde $z = \gamma - \alpha + 1$. Mas agora é fácil ver que podemos achar uma constante C tal que $\int_{1+t}^\infty (r-1)^{z-1} r^{\delta-1} dr \leq C(1+t)^{\delta-1} t^z$ para $t \gg 1$. Combinando as estimativas acima chegamos a seguinte desigualdade

$$|T_3| \leq C |t-s|^\gamma (1+t+s)^\delta \quad \text{for } s, t \geq 0.$$

Portanto $\|\mathcal{A}\omega\|_{\gamma,\delta} \leq C\|\omega\|_{\gamma,\delta}$ para todo $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R})$. A demonstração está completa. $\square$

Vamos agora definir o processo de ruído estacionário. Para isto, vamos considerar o *one-sided shift* de Wiener $\theta_t : \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)} \rightarrow \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)}$ definido da seguinte forma

$$\theta_t \omega(s) := \omega(s-t) - \omega(-t) \quad ; s \in \mathbf{R}_-, t \in \mathbf{R}_+. \quad (3.27)$$

Para a construção do semigrupo de transição em $\mathcal{W}_{(\gamma,\delta)}$ vamos introduzir a função $M_t : \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)} \times \widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma,\delta)} \rightarrow \mathcal{W}_{(\gamma,\delta)}$ dada por

$$M_t(\omega, \tilde{\omega}) := \begin{cases} \tilde{\omega}(s+t) - \tilde{\omega}(t) & \text{se } -t < s < 0 \\ \omega(s+t) - \tilde{\omega}(t) & \text{se } s \leq -t \leq 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

e definimos

$$\mathcal{P}_t(\omega, \cdot) := M_t^*(\omega, \cdot) \mathcal{H}(\omega, \cdot) \quad \text{para } \omega \in \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \text{ e } t \in \mathbf{R}_+. \quad (3.29)$$

Então temos o seguinte resultado.

Lema 3.24: *A quadrupla $(\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}, \{\mathcal{P}_t\}, \mathbf{P}_H, \{\theta_t\})$ é um processo de ruído estacionário.*

Demonstração: A verificação que $\mathcal{P}_t$ satisfaz a equação de Chapman-Kolmogorov é imediata. Além do mais, desde que M_t é a restrição do *two-sided shift* de Wiener em $\mathbf{R}_-$, então M_t é um *time-reversed* mBf de parâmetro H em $(C(\mathbf{R}; \mathbf{R}), \mathbf{W}_H)$. Isto mostra que $\mathbf{P}_H$ é uma medida invariante com respeito à $\{\mathcal{P}_t; t \geq 0\}$. Pela representação (3.16) e a *time-reversal* invariância do mBf, toda medida invariante para $\{\mathcal{P}_t; t \geq 0\}$ deve coincidir com $\mathbf{P}_H$ sobre os conjuntos cilíndricos de $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$. Desde que $\mathcal{B}(\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)})$ é gerado pelos conjuntos cilíndricos, isto mostra que $\mathbf{P}_H$ é a única medida invariante com respeito à $\{\mathcal{P}_t; t \geq 0\}$. Além do mais, pela definição de M_t e θ_t temos que $\theta_t^* \mathcal{P}_t(\omega, \cdot) = \delta_\omega$ para cada $\omega \in \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ e $t \geq 0$. Finalmente, da Proposição 3.23 sabemos que o operador do valor esperado da desintegração $\mathcal{H}$ é limitado de $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$ para $\widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta)}$ e portanto podemos concluir que $\{\mathcal{P}_t; t \geq 0\}$ é um semigrupo de transição de Feller. $\square$

3.4.3 Definição do Sistema Dinâmico Estocástico

Relembremos que estamos voltados à estudar o seguinte sistema de equações integrais

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_H(t), \quad 1/2 < H < 1. \quad (3.30)$$

onde a integral com respeito à B_H é uma *pathwise* integral de Riemann-Stieltjes. Este tipo de equação tem sido estudado por vários autores ([51],[55] e [7]) utilizando-se de diferentes abordagens. Supomos que os coeficientes satisfazem as hipóteses (H1-H3) como descrito na Introdução. Neste ponto, será conveniente fazer a seguinte observação.

Observação 3.25: Obviamente, a hipótese (H1) implica que f e σ são globalmente Lipschitz. Hipótese (H1) é suficiente para garantir a existência global da solução para a equação (3.30) nos espaços das funções Hölder contínuas (Veja Appendix, Lema 3.44). Com o objetivo de provar a propriedade forte Feller definida na Seção 3.3, precisamos suavizar as aplicações

$$\mathcal{Q}g(x, \omega) := \int_{\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)} g(z) R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x, \omega)}(dz), \quad (x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}, \quad (3.31)$$

para funções limitadas $g : \mathcal{C}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$. Aqui, R_1 é a aplicação restrição de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ para $\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)$. Uma vez suavizada tais aplicações podemos obter a propriedade forte Feller. Para isto, faremos uso da hipótese (H1). Notemos que (H1) implica que σ^{-1} é globalmente Lipschitz. O ítem (H3) é somente uma conveniente hipótese de dissipatividade para garantirmos a existência da medida invariante para a EDE (3.30).

Agora estamos em posição de definir o SDE induzido pela equação (3.30). Vamos considerar d cópias do processo de ruído estacionário definido no Lema 3.24. Com abuso de notação vamos denota-lo por $(\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}, \{\mathcal{P}_t\}, \mathbf{P}_H, \{\theta_t\})$. Considere o seguinte operador (contínuo) *shift* $\mathcal{R}_T : \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_{(\gamma, \delta), T}$ definido por $(\mathcal{R}_T h)(t) := h(t - T) - h(-T)$ e seja

$$\Lambda : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}_{(\gamma, \delta)} \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad (3.32)$$

definido por $\Lambda_t(x, \omega) := \hat{\Phi}_t(x, \mathcal{R}_t \omega)(t)$, onde $\hat{\Phi}_t$ é a aplicação solução da equação (3.1) o qual depende das condições iniciais e do ruído. Também definimos para $0 < T < \infty$ a seguinte aplicação $\Phi_T(x, \omega)(t) := \Lambda_t(x, \theta_{T-t}(\omega))$.

Proposição 3.26: *Seja Λ a função definida em (3.32). Então Λ é um sistema dinâmico estocástico sobre o processo de ruído estacionário $(\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}, \{\mathcal{P}_t\}, \mathbf{P}_H, \{\theta_t\})$. Além do mais, para toda condição inicial generalizada μ , o processo gerado por Λ através de μ é uma solução da EDE (3.30) em lei.*

Demonstração: As propriedades de regularidade seguem dos Lemas 3.44, 3.46 e do fato de $\|\cdot\|_{\gamma, \delta, T}$ ser equivalente a norma Hölderiana $\|\cdot\|_\gamma$ para todo $0 < T < \infty$. A propriedade de cociclo é uma consequência direta da propriedade de composição de equações diferenciais ordinárias desde que estamos lhe dando com uma *pathwise* EDE do tipo Riemann-Stieltjes. Além do mais, da definição de Λ é imediato que todo processo gerado por uma condição inicial generalizada através de Λ é uma solução da equação (3.30) em lei. $\square$

No decorrer deste capítulo será conveniente o uso de integrais e derivadas fracionárias. Vamos usar a mesma notação do já bem conhecido livro de Samko et al. [56]. Seja $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Lembremos que a integral fracionária de ordem $\alpha > 0$ (do tipo Riemann-Liouville) de uma função $f \in L^1(a, b)$ é definida por

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a usual função Gamma. Os espaços de Sobolev fracionários serão denotados por $I_{a+}^\alpha(L^p(a, b))$, i.e., a imagem da integral fracionária I_{a+}^α sobre os espaços $L^p(a, b)$. Se $f \in I_{a+}^\alpha(L^p(a, b))$ e $\alpha \in (0, 1)$ então a derivada fracionária de Marchaud de ordem $\alpha \in (0, 1)$

$$D_{a+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right) 1_{(a,b)}(x)$$

é definida para quase todo $x \in (a, b)$ onde a convergência das integrais na singularidade $y = x$ se dá pontualmente para quase todo $x \in (a, b)$ se $p = 1$ e em L^p se $1 < p < \infty$. Se $\beta \in (0, 1/2)$ também escrevemos $\mathcal{C}^{\beta,\infty}(a, b; \mathbf{R}^d)$ para denotar o espaço das funções mensuráveis $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^d$ tais que

$$\|f\|_{\beta,\infty} := \sup_{t \in [a,b]} \left(|f(t)| + \int_a^t \frac{|f(t) - f(s)|}{(t-s)^{\beta+1}} ds \right) < \infty. \quad (3.33)$$

Para concluir esta seção, nós estudaremos o problema da existência da medida invariante para a equação (3.30). A principal dificuldade em provar tal existência vem da integral estocástica. Estimativas adequadas para a integral estocástica juntamente com uma hipótese de dissipatividade são suficientes para garantir a existência. Mais precisamente, para provarmos a existência da medida invariante faremos uso de uma função de Lyapunov (Veja [22] para maiores detalhes).

Definição 3.27: Dizemos que $F : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}_+$ é uma função de *Lyapunov* para Λ se $F^{-1}([0, K])$ é compacto para todo $0 \leq K < \infty$ e existem constantes C e $\kappa > 0$ tais que

$$\int_{\mathbf{R}^d} F(x) \Pi_{\mathbf{R}^d}^* \mathcal{Q}_t \mu(dx) \leq C + e^{-\kappa t} \int_{\mathbf{R}^d} F(x) \Pi_{\mathbf{R}^d}^* \mu(dx)$$

para todo $t > 0$ e toda condição inicial generalizada μ tal que o lado direito seja finito.

Proposição 3.28: *Assuma que as hipóteses (H1), (H2), e (H3) sejam válidas. Então a aplicação $\mathbf{R}^d \ni x \mapsto |x|^2$ é uma função de Lyapunov para o SDE Λ definido acima. Portanto, existe no mínimo uma medida invariante para a equação (3.30).*

Demonstração: Pela propriedade de semigrupo de $\mathcal{Q}_t \mu$ e o fato que $\sum_{n=1}^\infty e^{-nt} < \infty$ para todo $t > 0$ precisamos somente provar a desigualdade em conjuntos compactos da reta positiva. A estimativa total é obtida facilmente iterando o mesmo argumento em $[0, T]$. Fixemos $0 < T < \infty$ qualquer e seja $C_{\alpha,T}$ uma constante que depende dos parâmetros α e T e que pode diferir de linha para linha. Seja μ uma condição inicial generalizada para Λ tal que

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\ell|^2 (\Pi_{\mathbf{R}^d}^* \mu)(d\ell) < \infty.$$

Considere os seguintes processos

$$z_t = \int_0^t \sigma(x_s) dB_H(s),$$

$$y_t = x_0 + \int_0^t f(x_s) ds = x_t - z_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde x_t é a solução de (3.30). Por conveniência, iremos escrever z_t como

$$z_t^{i,j} = \int_0^t \sigma^{i,j}(x_s) dB_H^j(s), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Note que o processo y_t satisfaz a seguinte equação diferencial aleatória

$$\frac{dy_t}{dt} = f(y_t + z_t), \quad y_0 = x_0.$$

Desde que $x \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^d)$ para $\alpha \in (1 - H, 1/2)$ e o mBf é γ -Hölder contínuo no tempo para $\gamma < H$, o processo z_t concorda com a integral (*generalizada*) Lebesgue-Stieltjes (veja [66]). Neste caso, sabemos que $x \in \mathcal{C}^{\alpha, \infty}(0, T; \mathbf{R}^d)$ e $z \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0, T; \mathbf{R}^d)$ para todo $\alpha \in (1 - H, 1/2)$ [Veja Observação 3.45]. Graças a estimativa dada em [51, Proposição 4.1] também sabemos que existe uma variável aleatória $G_{(i,j), \alpha, H}$ (com caudas Gaussianas) com momentos finitos de qualquer ordem $1 \leq p < \infty$ tal que

$$\|z^{i,j}\|_\infty \leq G_{(i,j), \alpha, H} C_{\alpha, T} \|\sigma^{i,j}(x)\|_{\alpha, \infty}, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (3.34)$$

$$\|\sigma^{i,j}(x)\|_{\alpha, \infty} \leq C_{\alpha, T} \exp(C_{\alpha, T} G_{(i,j), \alpha, H}^\kappa), \quad (3.35)$$

onde $\kappa < 2$. A estimativa em (3.35) é obtida através do mesmo argumento como descrito em [51, Proposição 5.1] juntamente com a hipótese de $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\sigma(x)| < \infty$. Portanto, podemos achar uma constante $C_{\alpha, T}$ tal que

$$\mathbf{E}|z_t|^p \leq C_{\alpha, T}^p < \infty \quad \forall t \in [0, T], p \geq 1.$$

Usando a desigualdade Cauchy-Schwartz, uma desigualdade de interpolação, o crescimento linear de f e a hipótese (H4), podemos achar constantes $C_1, C_2 > 0$ e $N > 1$ tais que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y_t|^2 &= \langle y'_t, y_t \rangle \\
&= \langle f(y_t + z_t), y_t \rangle \\
&\leq C(1 - |y_t|^2) + C_1 |z_t|^N + C_2 |z_t|^2 \\
&\leq C(1 - |y_t|^2) + \bar{C}_{\alpha, T} \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned}$$

onde $\bar{C}_{\alpha, T}$ é uma constante aleatória obtida através das desigualdades (3.34) e (3.35). Aplicando a desigualdade de Gronwall podemos achar uma constante aleatória $C > 0$ que depende de T, α, G e com momentos finitos de ordem $p \geq 1$ tal que

$$|y_t|^2 \leq |x_0|^2 e^{-C_2 t} + C, \quad \forall t \in [0, T].$$

Combinando as estimativas acima chegamos a seguinte desigualdade

$$\mathbf{E}|x_t|^2 \leq C_{\alpha, T} + e^{-C_2 t} \int_{\mathbf{R}^d} |\ell|^2 (\Pi_{\mathbf{R}^d}^* \mu)(d\ell), \quad \forall t \in [0, T].$$

Pelo Lema 2.10 em [22] podemos concluir que existe uma medida invariante para a EDE (3.1). Isto completa a demonstração. $\square$

Para simplificar a notação vamos omitir os índices γ e δ no espaço de ruído $\mathcal{W}_{(\gamma, \delta)}$. Desta forma, iremos fixar em definitivo $\gamma \in (1/2, H)$, $\delta > 0$ tal que $H < \gamma + \delta < 1$ e escrevemos $\mathcal{W}$ como sendo o espaço de ruído com estes índices.

3.5 Unicidade da Medida Invariante

3.5.1 Propriedade Forte Feller

O principal objetivo desta seção é provarmos que o SDE induzido pela equação (3.30) é forte Feller. Esta propriedade junto com um argumento de irreducibilidade irá automaticamente fornecer a unicidade da medida invariante. Lembremos que em sistemas Markovianos um dos métodos eficazes para mostrar a propriedade forte Feller é a conhecida fórmula de Bismut-Elworthy [17]. A principal característica desta fórmula é que esta fornece estimativas sobre a derivada de um semigrupo Markoviano independentes das estimativas sobre as derivadas das funções teste. No contexto não-Markoviano esperaríamos mostrar a propriedade forte Feller da Definição 3.12 usando uma idéia similar. Nesta seção nós estabelecemos uma fórmula de Bismut-Elworthy para a EDE (3.30). O

uso desta fórmula é o principal ingrediente na demonstração da propriedade forte Feller definida na Seção 3.3.

Para estabelecermos uma fórmula de Bismut-Elworthy em nosso contexto, precisamos de alguns resultados preliminares elementares com relação à suavidade das soluções com respeito aos dados iniciais e também ao ruído. Começaremos com dois lemas elementares. Para sermos mais completos, daremos os detalhes aqui. A seguir, escrevemos $X_t(x, \hat{\omega})$ para denotar a aplicação solução da equação (3.30) dependendo dos dados iniciais $x \in \mathbf{R}^d$ e também do ruído $\hat{\omega}$ dado pelo mBf no futuro.

Lema 3.29: *Assuma que os coeficientes da EDE, $\sigma(x) = (\sigma^{i,j}(x)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ e $f(x) = (f^i(x)) \in \mathbf{R}^d$ satisfazem hipóteses H1 e H2. Então a aplicação $x \in \mathbf{R}^d \mapsto X_t(x, \hat{\omega}) \in \mathbf{R}^d$ é diferenciável em $\mathbf{R}^d$ para cada $t \in [0, T]$, q.c. Para $t \in [0, T]$, seja*

$$J_{0,t} \equiv J_t \equiv J(x, t, \hat{\omega}) = (\partial_j X^i(x, t, \hat{\omega}))_{1 \leq i,j \leq d}$$

o Jacobiano de $X(x, \cdot)$ com respeito ao dado inicial x no tempo t . Então, J_t e sua inversa J_t^{-1} , respectivamente, satisfazem as seguintes pathwise EDEs

$$J_t = I + \int_0^t Df(X_s) J_s ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t D\sigma_k(X_s) J_s \cdot dB_H^k(s) \quad (3.36)$$

$$J_t^{-1} = I - \int_0^t J_s^{-1} Df(X_s) ds - \sum_{k=1}^d \int_0^t J_s^{-1} D\sigma_k(X_s) \cdot dB_H^k(s), \quad (3.37)$$

onde I é a matriz identidade $d \times d$ e

$$Df(x) \equiv (\partial_j f^i(x))_{1 \leq i,j \leq d}, \quad D\sigma_k(x) \equiv (\partial_j \sigma_k^i(x))_{1 \leq i,j \leq d},$$

para $k = 1, 2, \dots, d$.

Demonstração: Desde que X é a solução de uma equação integral *pathwise* podemos provar nossa afirmação através de argumentos rotineiros. Para provarmos que $X = X_t(x, \hat{\omega})$ é diferenciável em x , nós rederivamos a existência de X através de iterações de Picard dadas por

$$\begin{aligned} X_t^{n+1}(x, \hat{\omega}) &= x + \int_0^t f(X_s^n(x, \hat{\omega})) ds + \int_0^t \sigma(X_s^n(x, \hat{\omega})) d\hat{\omega}_s \\ J_{0,t}^{n+1}(x, \hat{\omega}) \xi &= \xi + \int_0^t Df(X_s^n(x, \hat{\omega})) J_{0,s}^n(x, \hat{\omega}) \xi ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^d \int_0^t D\sigma_k(X_s^n(x, \hat{\omega})) J_{0,s}^n(x, \hat{\omega}) \xi d\hat{\omega}_s^k, \end{aligned}$$

onde $X_t^0(x, \hat{\omega}) = x$ e $J_{0,t}^0(x, \hat{\omega})\xi = \xi$. Através de um argumento de ponto de fixo (veja Lema (3.44)) mostra-se que se $\beta \in (\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2})$ e $0 < \alpha < 2H - 1$, então este par de sequências tem um limite $(X_t(x, \hat{\omega}), \psi_t(x, \hat{\omega}))$ em $\mathcal{C}^\beta(0, T; \mathbf{R}^d)$ para cada $\hat{\omega} \in \mathcal{C}^\gamma(0, T; \mathbf{R}^d)$ e $x, \xi \in \mathbf{R}^d$ com $1/2 < \gamma < H$. Além disso, é imediato que se $X_t^n(x, \hat{\omega})$ é diferenciável com $J_{0,t}^n(x, \hat{\omega})\xi = DX_t^n(x, \hat{\omega})\xi$, então X^{n+1} é diferenciável e teremos que $J_{0,t}^{n+1}(x, \hat{\omega})\xi = DX_t^{n+1}(x, \hat{\omega})\xi$. Finalmente, mostra-se que as equações limite

$$\begin{aligned} X_t(x, \hat{\omega}) &= x + \int_0^t f(X_s(x, \hat{\omega}))ds + \int_0^t \sigma(X_s(x, \hat{\omega}))d\hat{\omega}_s \\ \psi(x, t, \hat{\omega})\xi &= \xi + \int_0^t Df(X_s(x, \hat{\omega}))\psi(x, s, \hat{\omega})\xi ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^t D\sigma_k(X_s(x, \hat{\omega}))\psi(x, s, \hat{\omega})\xi d\hat{\omega}_s^k \end{aligned}$$

são válidas e que a identidade $J_{0,t}^{n+1}(x, \hat{\omega})\xi = DX_t^{n+1}(x, \hat{\omega})\xi$ vale no limite. Portanto $X_t(x, \hat{\omega})$ é diferenciável. O fato que $X_t(x, \hat{\omega})$ é diferenciável em x e que a equação (3.36) é válida segue de um cálculo direto baseado na regra de cadeia. Resta provarmos a equação (3.37). Par isto, seja U o conjunto aberto formado pelas matrizes invertíveis em $\mathbf{R}^{d^2}$. A aplicação $\mathcal{Z} : U \rightarrow \mathbf{R}^{d^2}$ dada por $\mathcal{Z}(Y) = Y^{-1}$ é diferenciável e

$$\mathcal{Z}'(A).V = -A^{-1}.V.A^{-1}.$$

Notemos que desde que estamos lhe dando com *pathwise* integrais estocásticas do tipo Stratonovich, a demonstração segue diretamente da regra

$$\mathcal{Z}'(J_{0,t}(x, \hat{\omega})).V = -J_{0,t}^{-1}(x, \hat{\omega}).V.J_{0,t}^{-1}(x, \hat{\omega}).$$

junto com mudança de variáveis para a integral Lebesgue-Stieltjes. □

Agora vamos mostrar que a solução da EDE é suave no sentido do cálculo de Malliavin. De fato, o que vamos mostrar é diferenciabilidade do tipo Fréchet e não com respeito ao mBf, mas com relação à uma "parte" dele. Mais precisamente, a razão de trabalharmos com esta "parte" segue da seguinte observação. Lembremos da Seção 3.2 que se μ é uma medida positiva finita em $\mathbf{R}^d \times \mathcal{W}$ e $0 < T < \infty$ então

$$\mathcal{L}_T\mu := \Phi_T^* P_T\mu,$$

onde $\{P_t; t \geq 0\}$ é um semigrupo Feller Markoviano em $\mathbf{R}^d \times \mathcal{W}$ definido por

$$P_t f(x, \omega) := \int_{\mathcal{W}} f(x, \omega') P_t(\omega, d\omega'); \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbf{R}^d \times \mathcal{W}).$$

Então pela definição acima segue que

$$\mathcal{L}_T \delta_{(x,\omega)} = X(x, \cdot)^* \mathcal{H}(\omega, \cdot), \quad (3.38)$$

para cada $x \in \mathbf{R}^d$ e $\omega \in \mathcal{W}$, onde $X(x, \cdot)$ é a solução da equação (3.30) começando de $x \in \mathbf{R}^d$ e $\mathcal{H}(\omega, \cdot)$ é a medida desintegração restrita à $\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)$. Também denotamos por $\mathcal{L} \delta_{(x,\omega)}$ como a medida de probabilidade em $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ o qual é o limite fraco de $\mathcal{L}_T \delta_{(x,\omega)}$ quando $T \rightarrow \infty$. Pelo Lema 3.21 também sabemos que a desintegração de $\mathbf{W}_H$ com relação à $\mathbf{P}_H$ é dada por $\mathcal{H}(\omega, \cdot) = \tilde{\mathcal{D}}_H^*(\gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \omega, \cdot) \mathbf{W}_+$. Estas observações nos levam ao seguinte processo. Fixemos $0 < T < \infty$, $x \in \mathbf{R}^d$ e uma realização ω do mBf no passado. Considere o seguinte processo Gaussiano

$$\begin{aligned} B_H(\omega_H, \tilde{\omega})(t) &= \alpha_H \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\tilde{\omega}(s) \\ &\quad + \alpha_H \int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) d\omega_H(s), \end{aligned}$$

onde $\omega_H := \gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \omega$ e $\tilde{\omega}$ é o movimento Browniano canônico em $\mathbf{R}_+$. Observemos que ω_H é um *time-reversed* movimento Browniano sob a medida de probabilidade $\mathbf{P}_H$. De fato, $B_H(\omega_H, \tilde{\omega})$ é um mBf no futuro sob a medida produto $\mathbf{P}_H \times \mathbf{W}_+$. Agora queremos diferenciar $X(x, B_H(\omega_H, \tilde{\omega}))$ com respeito à $\tilde{\omega}$. Para isto, vamos trabalhar com o seguinte operador inicialmente definido somente em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$

$$\mathcal{K}_H v(t) := \alpha_H \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dv(s) = \alpha_H \int_0^t (t-s)^{H-1/2} \dot{v}(s) ds, \quad (3.39)$$

onde $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ e α_H é a constante já previamente definida na representação do mBf em (3.16).

Observação 3.30: De fato, o operador $\mathcal{K}_H$ definido em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ é (fora uma constante multiplicativa) uma integral fracionária de ordem $H - 1/2$. Portanto, sua inversa é dada por $\mathcal{K}_H^{-1} = \kappa_H D_{0+}^{H-1/2}$ para uma constante κ_H tal que $\kappa_{1/2} = 1$. É fato bem conhecido que $I_{0+}^{H-1/2}$ é um operador limitado invertível (com inversa limitada) de $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d)$ para $\mathcal{C}^{H-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d)$ para todo $\varepsilon \in (0, 1/2)$ (Veja Teorema 3.1 e Lema 13.1 em [56]). Considerando o completamento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ com respeito à $\|\cdot\|_{1/2-\varepsilon, 1/2, T}$ e $\|\cdot\|_{H-\varepsilon, 1/2, T}$ resulta que $\mathcal{K}_H : \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T) \rightarrow \mathcal{C}^{H-\varepsilon}(0, T)$ é um operador limitado invertível com inversa limitada.

Devido as fórmulas (3.22) e (3.18), em várias situações iremos fixar uma realização do mBf no passado $\omega \in \mathcal{W}$ e olhar a solução $X_t(x, \omega_H, \tilde{\omega})$ dependendo de duas realizações do movimento Browniano através de $B_H(\omega_H, \tilde{\omega})$. Para simplificar notação vamos escrever $X_t(x, \omega_H, \tilde{\omega}) := X_t(x, B_H(\omega_H, \tilde{\omega}))$. Isto é, quando escrevemos $X_t(x, \omega_H, \tilde{\omega})$, os elementos aleatórios $\tilde{\omega}$ e ω_H são os movimentos Brownianos no futuro e no passado, respectivamente, onde ω_H é o *time-reversed* movimento Browniano determinado pelo mBf através da aplicação $\gamma_H \mathcal{D}_{1-H}$, i.e., $\omega_H = \gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \omega$ para $\omega \in \mathcal{W}$. Analogamente, vamos denotar por $J_{0,t}(x, \omega_H, \tilde{\omega})$ seu respectivo jacobiano.

Neste ponto precisamos introduzir o seguinte espaço. Considere $W_T^{1-\alpha, \infty}$ o espaço das funções mensuráveis $g : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ tais que

$$\|g\|_{1-\alpha, \infty} := \sup_{0 < s < t < T} \left(\frac{|g(t) - g(s)|}{|t - s|^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|g(y) - g(s)|}{(y - s)^{2-\alpha}} dy \right) < \infty, \quad (3.40)$$

onde $1 - H < \alpha < 1/2$.

Lema 3.31: *Suponha que os coeficientes da EDE satisfaçam hipótese (H1) e considere $\alpha \in (1 - H, 1/2)$. Então existe $\varepsilon \in (0, 1/2)$ tal que $X(x, \omega_H, \cdot)$ é Fréchet diferenciável de $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d)$ para $\mathcal{C}^{\alpha, \infty}(0, T; \mathbf{R}^d)$, para cada $x \in \mathbf{R}^d$ e $\omega \in \mathcal{W}$. Além disso, sua respectiva derivada satisfaz a seguinte pathwise equação diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} D_v X(x, \omega_H, \tilde{\omega})(t) &= \int_0^t Df(X_s(x, \omega_H, \tilde{\omega})) D_v X(x, \omega_H, \tilde{\omega})(s) ds \\ &+ \int_0^t D\sigma(X_s(x, \omega_H, \tilde{\omega})) D_v X(x, \omega_H, \tilde{\omega})(s) dB_H(\omega_H, \tilde{\omega})(s) \\ &+ \int_0^t \sigma(X_s(x, \omega_H, \tilde{\omega})) d\mathcal{K}_H v(s); \quad v \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Demonstração: Desde que $1 - H < \alpha < 1/2$ então podemos tomar $\varepsilon \in (0, 1/2)$ de forma que $H - \varepsilon > 1 - \alpha$. Neste caso temos que $\mathcal{C}^{H-\varepsilon}(0, T) \hookrightarrow W_T^{1-\alpha, \infty}$ e pela Observação (3.30) resulta que $\mathcal{K}_H$ é também um operador linear limitado de $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T)$ para $W_T^{1-\alpha, \infty}$. Sabemos que a aplicação solução $\hat{\Phi}_T(x, \cdot) : W_T^{1-\alpha, \infty} \rightarrow \mathcal{C}^{\alpha, \infty}(0, T)$ é continuamente Fréchet diferenciável para cada $x \in \mathbf{R}^d$ (Veja [52, Proposição 8]). Pela continuidade do operador $\mathcal{K}_H$ de $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T)$ para $W_T^{1-\alpha, \infty}$ e a linearidade de $B_H(\omega_H, \tilde{\omega})$ na variável $\tilde{\omega}$ podemos concluir que para cada $x \in \mathbf{R}^d$ e $\omega \in \mathcal{W}$ a aplicação

$$\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T) \ni \tilde{\omega} \mapsto \hat{\Phi}_T(x, B_H(\omega_H, \tilde{\omega})) \in \mathcal{C}^{\alpha, \infty}(0, T)$$

é Fréchet diferenciável e satisfaz a equação (3.41) para cada $v \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d)$. Isto completa a demonstração. $\square$

Neste ponto necessitamos introduzir novas notações. Se $1/2 < \beta < H$ e $f \in \mathcal{C}^\beta(0, T; \mathbf{R}^d)$ então denotamos

$$\|f\|_{\beta,t} := \sup_{0 \leq r \leq t} |f(r)| + \sup_{0 \leq r < s \leq t} \frac{|f(r) - f(s)|}{|r - s|^\beta}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

A seguir, vamos fixar $(x, y) \in \mathbf{R}^{2d}$. Para tal elemento em $\mathbf{R}^{2d}$ considere $\bar{B}_{x,y} := \{z \in \mathbf{R}^d; \|z\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)\}$.

Vamos agora introduzir o seguinte *tempo de parada* com respeito à filtração gerada pelo mBf.

$$T_N := \inf\{t \in [0, 1]; \sup_{z \in \bar{B}_{x,y}, |\xi| \leq 1} (\|J_{0,\cdot}(z, \cdot)\xi\|_{\beta,t} + \|X_\cdot(z, \cdot)\|_{\beta,t}) > N\}, \quad (3.42)$$

para $N > 0$. Seguindo nossa filosofia em fixar o passado do ruído através do operador $\gamma_H \mathcal{D}_{1-H}$ vamos introduzir o seguinte processo *parado*

$$X_t^N(v, \omega_H, \tilde{\omega}) := X_{T_N(\omega_H, \tilde{\omega}) \wedge t}(v, \omega_H, \tilde{\omega}) \quad (3.43)$$

onde $v \in \mathbf{R}^d$, $\tilde{\omega}$ e ω_H são movimentos Brownianos no futuro e no passado, respectivamente, onde $\omega_H = \gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \omega$ para uma realização do mBf no passado $\omega \in \mathcal{W}$. De forma similar, introduzimos

$$J_{0,t}^N(v, \omega_H, \tilde{\omega})\xi := J_{0,t \wedge T_N(\omega_H, \tilde{\omega})}(v, \omega_H, \tilde{\omega})\xi. \quad (3.44)$$

Observação 3.32: Deve ser notado que desde que a solução X_t da EDE (3.30) é *pathwise* então o processo *parado* $J_{0,t}^N(v, \cdot)$ é obviamente o Jacobiano de $X_t^N(v, \cdot)$ para todo $v \in \bar{B}_{x,y}$. Novamente através de um argumento *pathwise* pode-se facilmente verificar que os Lemas 3.29 e 3.31 também são válidos para o processo *parado* X^N . Além do mais, notamos que desde os processos

$$\sup_{z \in \bar{B}_{x,y}, |\xi| \leq 1} \|J_{0,\cdot}(z, \cdot)\xi\|_{\beta,t}, \quad \sup_{z \in \bar{B}_{x,y}} \|X_\cdot(z, \cdot)\|_{\beta,t}$$

têm trajetórias contínuas então $X_t^N(v, \omega_H, \cdot)$ e $J_{0,t}^N(v, \omega_H, \cdot)$ são adaptados à filtração gerada pelo movimento Browniano $\omega \in \mathcal{W}$ e para cada $v \in \bar{B}_{x,y}$.

As seguintes definições são naturais considerando as notações anteriores. Se $\varphi : \mathcal{C}(0, T : \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função limitada então

$$\mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) := \int_{\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)} \varphi(\ell) \mathcal{L}_T^N \delta_{(z, \omega)}(d\ell), \quad (3.45)$$

onde

$$\mathcal{L}_T^N \delta_{(z, \omega)} := X^N(z, \cdot)^* \mathcal{H}(\omega, \cdot), \quad (z, \omega) \in \bar{B}_{(x, y)} \times \mathcal{W}. \quad (3.46)$$

Aqui $\mathcal{H}(\omega; \cdot)$ é a medida desintegração restrita ao espaço $\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)$ e $X_t^N(z, \cdot) := X_{T_N \wedge t}(z, \cdot)$. Vamos também denotar $\mathcal{L}^N \delta_{(z, \omega)}$ como o limite fraco de $\mathcal{L}_T^N \delta_{(z, \omega)}$ quando $T \rightarrow \infty$.

Considerando que a EDE (3.30) é perturbada pelo mBf esperaríamos que uma correspondente fórmula de Bismut-Elworthy contivesse o operador divergente do espaço Gaussiano do mBf. Contudo, o seguinte resultado elementar mostra que o espaço Gaussiano conveniente é dado pelo usual espaço de Wiener. A seguir, usaremos os símbolos ∇ e ∇_x para denotar a derivada de Fréchet sobre o espaço $\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)$ e a usual derivada em $\mathbf{R}^d$, respectivamente.

Lema 3.33: *Se $\varphi : \mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função limitada Fréchet diferenciável com derivada limitada e os coeficientes da EDE têm primeiras derivadas limitadas então a função $\mathcal{Q}^N \varphi$ é diferenciável em $B_{(x, y)}$ para cada $\omega \in \mathcal{W}$. Além disso, a seguinte fórmula é válida*

$$\nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) \xi = \mathbf{E} \left[\nabla \varphi(X^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0, \cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi \right]$$

onde a esperança no lado direito é dada pela medida de Wiener.

Demonstração: Pelo Lema 3.21 e a definição de $\mathcal{Q}^N \varphi$ em (3.45) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \varphi(z, \omega) &= \int_{\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)} \varphi(\ell) \mathcal{L}_T \delta_{(z, \omega)}(d\ell) \\ &= \int_{\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)} \varphi(X(z, \cdot)) d\mathcal{H}(\omega, \cdot) \\ &= \int_{\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)} \varphi(X(z, B_H(\omega_H, \tilde{\omega}))) \mathbf{W}_+(d\tilde{\omega}) \\ &= \int_{\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d)} \varphi(X(z, \tilde{\omega}, \omega_H)) \mathbf{W}_+(d\tilde{\omega}); \quad z \in B_{(x, y)}, \omega \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Agora usando o Lema (3.29), a definição do tempo de parada T_N , a hipótese que φ é Fréchet diferenciável com derivada limitada, e os coeficientes da EDE também têm derivadas limitadas podemos seguramente diferenciar sobre o sinal da integral. $\square$

A seguir denotaremos por $\int g dB$ a usual integral de Itô com respeito ao movimento Browniano e $\bar{B}_1$ a bola fechada de raio 1 centrada na origem.

Teorema 3.34: *Fixe $1 < T < \infty$, $N > 0$, e considere $\varphi : \mathcal{C}(1, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ uma função limitada Fréchet diferenciável com derivada limitada. Assuma que as hipóteses (H1) e (H2) sejam válidas. Então para todo $z \in B_{(x,y)}$, $\xi \in \bar{B}_1$ e $\omega \in \mathcal{W}$ temos que*

$$\begin{aligned} \nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) \xi &= \mathbf{E} \left(\varphi(X^N(z, \cdot, \omega_H)) \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^T \langle \kappa_H D_{0+}^{H-1/2} [h\sigma^{-1}(X^N(z, \cdot, \omega_H)) J_{0,\cdot}^N(z, \cdot, \omega_H) \xi](s), dB(s) \rangle_{\mathbf{R}^d} \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde h é uma função suave arbitrária tal que $\int_0^1 h(s) ds = 1$, κ_H é uma constante tal que $\kappa_{1/2} = 1$ e o valor esperado do lado direito é dado em termos da medida de Wiener.

Demonstração: Fixe $1 < T < \infty$, $N > 0$, $z \in B_{(x,y)}$, $\omega \in \mathcal{W}$ e $\xi \in \bar{B}_1$. Iremos escrever $\mathcal{D}$ para a derivada de Gross-Sobolev sobre o espaço de Wiener usual $(\mathcal{C}(0, T; \mathbf{R}^d), H^1, \mathbf{W}_+)$ onde H^1 é o espaço Cameron-Martin da medida de Wiener $\mathbf{W}_+$. Vamos denotar por $\dot{g}$ a usual isometria entre H^1 e $L^2(0, T; \mathbf{R}^d)$. Fixemos $\varepsilon > 0$ como no Lema 3.31. Deve-se notar que podemos facilmente construir uma medida de Wiener em $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d)$. Fazendo isto, podemos tirar vantagem do fato que a solução $X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})$ é Fréchet diferenciável em $\tilde{\omega} \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(0, T; \mathbf{R}^d)$ para cada $z \in B_{(x,y)}$, $\omega \in \mathcal{W}$ e $N > 0$. Pelo Lema 3.33 também sabemos que a seguinte fórmula é válida

$$\nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) \xi = \mathbf{E} \left[\nabla \varphi(X^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi \right].$$

Analogamente ao caso Markoviano, a estratégia é achar uma direção em H^1 que realize o Jacobiano $J_{0,t}^N(z, \omega_H, \tilde{\omega}) \xi$. Então através de integração por partes nós facilmente obtemos o resultado. Vamos começar com a seguinte *pathwise* equação diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \varrho_t(z, \omega_H, \cdot) &= \int_0^t Df(X_s^N(z, \omega_H, \cdot)) \varrho_s(z, \omega_H, \cdot) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^t D\sigma_k(X_s^N(z, \omega, \cdot)) \varrho_s(z, \omega_H, \cdot) dB_H^k(\omega_H, \cdot)(s) \\ &\quad + \int_0^t \sigma(X_s^N(z, \omega_H, \cdot)) d\mathcal{K}_H v(s); \quad \varrho_0(z, \omega_H, \cdot) = -\xi, \text{ e } v \in H^1, \end{aligned}$$

onde pela imersão de Sobolev temos que $H^1 \subset C^{1/2-\varepsilon}$. Pela fórmula de variação de constantes e Lema 3.29 a solução da equação acima é dada por

$$\varrho_t(z, \omega_H, \cdot) = \int_0^t J_{s,t}^N(z, \omega_H, \cdot) \sigma(X_s^N(z, \omega_H, \cdot)) d\mathcal{K}_H v(s) - J_{0,t}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi$$

Agora escolheremos uma função $h \in C^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$ tal que $\int_0^1 h(s) ds = 1$, $\text{supp } h \subset (0, 1)$ e $h(0) = h(1) = 0$. Com esta função em mãos vamos definir $v(z, \omega_H, \cdot) \in H^1$ de forma que

$$\mathcal{K}_H v(z, \omega_H, \cdot)(s) = \int_0^s h(\ell) \sigma^{-1}(X_\ell^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0,\ell}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi d\ell; \quad s \in [0, T],$$

e como consequência teremos que $\varrho_t = 0$ para todo $t \geq 1$. Por outro lado, pelo Lema 3.31 sabemos que $X^N(z, \omega_H, \cdot)$ é Fréchet diferenciável de $C^{1/2-\varepsilon}$ para $C^{\alpha,\infty}$ com $\alpha \in (1 - H, 1/2)$. Portanto, se $\dot{g} \in L^2(0, T; \mathbf{R}^d)$ então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\varphi(X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})), \dot{g} \rangle_{L^2} &= D_g \varphi(X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})) \\ &= D\varphi(X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})) DX^N(z, \omega_H, \tilde{\omega}) \mathcal{K}_H g \\ &= D\varphi(X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})) \int_0^\cdot J_{s,\cdot}^N(z, \omega_H, \tilde{\omega}) \sigma(X_s^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})) d\mathcal{K}_H g(s). \end{aligned}$$

para $g \in H^1$ e para todo $\tilde{\omega} \in C^{1/2-\varepsilon}$. A igualdade na última linha segue do Lema 3.31 e da fórmula da variação de constantes. Pela Observação 3.30 sabemos que $\mathcal{K}_H^{-1}$ é dado pela derivada fracionária $\kappa_H D_{0+}^{H-1/2}$ em H^1 . Além do mais, é imediato que $\mathcal{K}_H v$ pertence ao espaço $I_{0+}^{H-1/2}(L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d))$ desde que $\mathcal{K}_H v$ é absolutamente contínuo no intervalo $\mathbf{R}_+$. Tomando a inversa de $\mathcal{K}_H v$ resulta que $v_t = \kappa_H D_{0+}^{H-1/2} \mathcal{K}_H v(t)$ é dado por

$$v_t(z, \omega_H, \cdot) = \frac{\kappa_H}{\Gamma(3/2 - H)} \int_0^t \frac{h(s) \sigma^{-1}(X_s^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0,s}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi}{(t - s)^{H-1/2}},$$

isto é, v_t é somente uma integral fracionária de ordem $3/2 - H$ em $\mathbf{R}_+$ (fora uma constante multiplicativa). Pelas hipóteses (H1), (H2) e Lema 3.44 temos que

$$h \sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})) J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \tilde{\omega}) \xi$$

é uma função κ -Hölder contínua para algum $\kappa > 1/2$ em $[0, 1]$ para todo $\tilde{\omega} \in C^{1/2-\varepsilon}$.

Desta forma, podemos concluir que

$$h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot))J_0^N(z, \omega_H, \cdot)\xi \in I_{0+}^{H-1/2}(L^2(0, 1; \mathbf{R}^d))$$

Mas desde que $h(t) = 0 \forall t \geq 1$, então de fato

$$h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot))J_0^N(z, \omega_H, \cdot)\xi \in I_{0+}^{H-1/2}(L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)).$$

Obviamente que a função $v_t(z, \omega_H, \cdot)$ é diferenciável em $\mathbf{R}_+$ e pela propriedade de semigrupo para integrais fracionárias temos que

$$\dot{v}_t(z, \omega_H, \cdot) = \kappa_H D_{0+}^{H-1/2} \left[h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot))J_0^N(z, \omega_H, \cdot)\xi \right](t).$$

Vamos analisar os casos $0 \leq t < 1$ e $t \geq 1$ separadamente. No primeiro caso temos que

$$\begin{aligned} \kappa_H^{-1}\dot{v}_t &= \frac{h(t)\sigma^{-1}(X_t^N)J_{0,t}^N\xi}{\Gamma(3/2-H)t^{H-1/2}} \\ &\quad + \beta_H \int_0^t \frac{h(t)\sigma^{-1}(X_t^N)J_{0,t}^N\xi - h(s)\sigma^{-1}(X_s^N)J_{0,s}^N\xi}{(t-s)^{H+1/2}} ds \\ &= S_1(t) + S_2(t). \end{aligned}$$

No caso $t \geq 1$ temos que

$$\kappa_H^{-1}\dot{v}_t = -\beta_H \int_0^1 \frac{h(s)\sigma^{-1}(X_s^N)J_{0,s}^N\xi}{(t-s)^{H+1/2}} ds,$$

onde $\beta_H = \frac{H-1/2}{\Gamma(3/2-H)}$. Notemos que $S_2(t)$ é o limite quase-certo em L^2 à medida que $\delta \rightarrow 0$ de

$$S_{2,\delta}(t) = \begin{cases} S_2(t) & \text{para } \delta \leq t < 1. \\ \frac{h(t)\sigma^{-1}(X_t^N)J_{0,t}^N\xi}{H-\frac{1}{2}}(\delta^{1/2-H} - t^{1/2-H}) & \text{para } t \leq \delta. \end{cases}$$

O processo $\dot{v}(z, \omega_H, \cdot)$ é claramente adaptado à filtração gerada pelo movimento Browniano em $[0, T]$ para cada $z \in B_{x,y}$ e $\omega \in \mathcal{W}$. Resta provarmos que

$$\mathbb{E} \int_0^T \|\dot{v}_s(z, \omega_H, \cdot)\|_{\mathbf{R}^d}^2 ds < \infty.$$

O que nós vamos realmente provar é que $\dot{v}(z, \omega_H, \cdot)$ é quadrado integrável em $[0, \infty)$. Considere $S = S_1 + S_2$ e $S_\delta = S_1 + S_{2,\delta}$ para $\delta > 0$. Para estimarmos S precisamos de cotas superiores para $S_{2,\delta}$. Desde que $\kappa_H^{-1}\dot{v}$ é somente uma derivada fracionária (de ordem $H - 1/2$) de uma função Hölder contínua, podemos tirar vantagem de estimativas usuais dadas no cálculo fracionário. Como consequência do Teorema 13.6 em [56] podemos achar uma constante determinística $C_1 > 0$, que depende somente de H e $N > 0$ tal que a seguinte estimativa é válida para todo $\tilde{\omega}$ e $\delta > 0$

$$\|S_\delta(z, \omega_H, \tilde{\omega})(t)\|_{\mathbf{R}^n} \leq C_1 \|\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \tilde{\omega}))J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \tilde{\omega})\xi\|_{\kappa} \frac{1}{t^{H-1/2}}; \quad t \in [0, 1]. \quad (3.48)$$

Devido as hipóteses (H1), (H2) e o fato que $X^N(z, \omega_H, \cdot)$ tem trajetórias κ -Hölder contínuas para $\kappa \in (1/2, H)$, podemos achar uma constante C que depende de H , σ^{-1} e da função h tal que

$$\begin{aligned} \|h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot))J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot)\xi\|_{\kappa} &\leq C(1 + \|X^N(z, \omega_H, \cdot)\|_{\kappa})\|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot)\xi\|_{\infty} \\ &\quad + C\|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot)\xi\|_{\kappa}. \end{aligned}$$

Pela definição de T_N em (3.42) resulta que $\mathbf{E}\|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot)\xi\|_{\kappa}^p < \infty$ para todo $1 \leq p < \infty$. Pelo Lema 3.48 e o teorema da convergência dominada podemos concluir

$$\mathbf{E} \int_0^1 \|\dot{v}_t(z, \omega_H, \cdot)\|_{\mathbf{R}^d}^2 dt < \infty.$$

Resta estimarmos $\dot{v}_t(z, \omega_H, \cdot)$ para $t \geq 1$. Pode-se verificar que esta função em $t \geq 1$ é de fato dada por

$$\kappa_H^{-1}\dot{v}_t(z, \omega_H, \cdot) = -\frac{\sin \pi(H-1/2)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-\ell}{\ell-1}\right)^{H-1/2} \frac{S_\ell(z, \omega_H, \cdot)}{t-\ell} d\ell. \quad (3.49)$$

Além do mais, a seguinte estimativa é válida (quase certamente) devido ao teorema de Hardy-Littlewood sobre *núcleos* homogêneos

$$\|\dot{v}(z, \omega_H, \cdot)\|_{L^2(1,\infty)} \leq C_2 \|S(z, \omega_H, \cdot)\|_{L^2(0,1)}, \quad (3.50)$$

onde C_2 é uma constante determinística que depende somente de H e N . Nós referimos o leitor a [56, Teoremas 3.10 e 1.5] para a justificativa de (3.49) e (3.50). Portanto, pelas estimativas anteriores podemos concluir que

$$\mathbf{E} \int_0^\infty \|\dot{v}_s(z, \omega_H, \cdot)\|_{\mathbf{R}^d}^2 ds < \infty,$$

para cada $z \in B_{(x,y)}$ e para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Finalmente, fazendo integração por partes no kernel $\dot{v}_s(z, \omega_H, \cdot)$ chegamos a fórmula (3.47) para todo $z \in B_{(x,y)}$ e para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Isto completa a demonstração do Teorema. $\square$

Uma consequência imediata do resultado acima é a seguinte estimativa.

Corolário 3.35: *Existe uma constante $C(N) > 0$ que depende somente de $N > 0$ tal que para toda função limitada Fréchet diferenciável $\varphi : \mathcal{C}(1, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ com derivada limitada, a seguinte estimativa é válida*

$$|\nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega)| \leq C(N) \|\varphi\|_\infty \quad (3.51)$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$ e $z \in B_{(x,y)}$.

Demonstração: Iremos usar a mesma notação do Teorema 3.34. A seguir vamos denotar por C_1 uma constante determinística que pode diferir de linha para linha, dependendo de H, σ^{-1} e a função h do Teorema 3.34. Fixemos $z \in B_{(x,y)}$, $\omega \in \mathcal{W}$ e $\xi \in \mathbf{R}^d$ tal que $|\xi| \leq 1$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, isometria de Itô em (3.47), desigualdades (3.48) e (3.50) temos que

$$\begin{aligned} |\nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) \xi| &\leq \mathbf{E}^{1/2} |\varphi(X^N(z, \omega_H, \cdot))|^2 \mathbf{E}^{1/2} \int_0^T \|\dot{v}_s(z, \omega_H, \cdot)\|_{\mathbf{R}^d}^2 ds \\ &\leq C_1 \|\varphi\|_\infty \mathbf{E}^{1/2} \int_0^\infty \|\dot{v}_s(z, \omega_H, \cdot)\|_{\mathbf{R}^d}^2 ds \\ &\leq C_1 \|\varphi\|_\infty \mathbf{E}^{1/2} \|h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\kappa^2, \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_\kappa$ denota a norma Hölderiana no intervalo $[0, 1]$. Devido as hipóteses (H1), (H2) e o fato que $X^N(z, \omega_H, \cdot)$ e $J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot)$ têm trajetórias κ -Hölder contínuas para algum $\kappa \in (1/2, H)$, segue que

$$\begin{aligned} \|h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\kappa &\leq C_1 (1 + \|X^N(z, \omega_H, \cdot)\|_\kappa) \|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\infty \\ &\quad + C_1 \|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\kappa, \end{aligned}$$

e portanto obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla_z \mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) \xi| &\leq C_1 \|\varphi\|_\infty \mathbf{E}^{1/2} \|h\sigma^{-1}(X^N(z, \omega_H, \cdot)) J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\kappa^2 \\ &\leq C_1 \|\varphi\|_\infty \mathbf{E}^{1/2} \left((1 + \|X^N(z, \omega_H, \cdot)\|_\kappa) \|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\infty \right)^2 \\ &\quad + C_1 \|\varphi\|_\infty \mathbf{E}^{1/2} (\|J_{0,\cdot}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi\|_\kappa)^2. \end{aligned}$$

Pela definição do tempo de parada T_N e a linearidade do jacobiano $J_{0,t}^N(z, \omega_H, \cdot) \xi$ em ξ podemos concluir que existe a constante $C(N) := C_1(N^2 + 2N)$ tal que a desigualdade (3.51) é válida. $\square$

A seguir vamos considerar as medidas de probabilidade $R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x,\omega)}$ e $R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(x,\omega)}$ definidas no espaço $\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)$. Uma consequência direta dos resultados anteriores é a seguinte estimativa.

Corolário 3.36: *Existe uma constante $C(N) > 0$ que depende somente de N tal que*

$$\|R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(z,\omega)} - R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(u,\omega)}\|_{TV} \leq C(N) \|z - u\|_{\mathbf{R}^d} \quad (3.52)$$

para todo $(z, u) \in B_{(x,y)} \times B_{(x,y)}$ e $\omega \in \mathcal{W}$. Aqui a norma da variação total é dada sobre o espaço $\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)$.

Demonstração: Por definição

$$\mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) = \int_{\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)} \varphi(\ell) R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(z,\omega)}(d\ell),$$

para $\varphi : \mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua limitada e portanto

$$\|R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(z,\omega)} - R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(u,\omega)}\|_{TV} = \sup_{\varphi \in \mathcal{V}} |\mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) - \mathcal{Q}^N \varphi(u, \omega)|,$$

onde $\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{C}_b; \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$. Notemos que desde que a constante $C(N)$ no Corolário 3.35 não depende do tempo T podemos utilizar o teorema do valor médio para concluir que

$$|\mathcal{Q}^N \varphi(z, \omega) - \mathcal{Q}^N \varphi(u, \omega)| \leq C(N) \|z - u\|_{\mathbf{R}^d},$$

para todo $(z, u) \in B_{(x,y)} \times B_{(x,y)}$, $\omega \in \mathcal{W}$ e φ uma função limitada Fréchet diferenciável com derivada limitada definida em $\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Desde que cada função contínua limitada definida em $\mathcal{C}(1, \infty; \mathbf{R}^d)$ pode ser aproximada pontualmente por funções de classe C^2 com derivadas limitadas até segunda ordem podemos concluir que a estimativa (3.36) é válida. $\square$

Observação 3.37: Considere o espaço de Banach $\mathcal{H}_H$ definido como o completamento do conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}^d)$ com respeito a norma

$$\|\omega\|_H = \sup_{t,s \in \mathbf{R}_-} \frac{|\omega(t) - \omega(s)|}{|t - s|^{\frac{1-H}{2}} (1 + |t| + |s|)^{1/2}}.$$

Também escrevemos $\tilde{\mathcal{H}}_H$ como sendo o completamento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ com respeito à norma acima. Segue de [22, Lema 3.6] que $\gamma_H \mathcal{D}_{1-H} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{H}_H$ é um operador linear limitado desde que $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}_{1-H}$. Além do mais, pode-se mostrar através dos mesmos argumentos utilizados em [22, Lema 3.6] que o operador $\mathcal{I}_H : \mathcal{H}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{1-H}$ definido por

$$(\mathcal{I}_H g)(t) := \alpha_H \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dg(s); \quad g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}^d), t \geq 0, \quad (3.53)$$

é também limitado.

Terminamos esta seção com a principal consequência da fórmula de Bismut-Elworthy (3.47) para a EDE (3.30). De fato, é um corolário quase imediato dos resultados anteriores.

Teorema 3.38: *Existe uma função contínua $\ell : \mathbf{R}^{2d} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que*

$$\|R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L} \delta_{(y,\omega)}\|_{TV} \leq \ell(x, y, \omega) \quad (3.54)$$

para todo $(x, y, \omega) \in \mathbf{R}^{2d} \times \mathcal{W}$. Além do mais, a aplicação ℓ satisfaz $\ell(x, x, \omega) = 0$ para todo $(x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}$. Em particular, o SDE Λ satisfaz a propriedade forte Feller.

Demonstração: Fixemos uma constante $N > 0$ a ser definida posteriormente e considere $x \neq y$. Pelo Corolário 3.36 sabemos que existe uma constante $C(N)$ tal que

$$\|R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(y,\omega)}\|_{TV} \leq C(N) \|x - y\|_{\mathbf{R}^d}.$$

Além do mais, pela definição de T_N , $\mathcal{L}^N \delta_{(x,\omega)}$ e $\mathcal{L} \delta_{(x,\omega)}$ existe uma constante positiva $K > 0$ tal que

$$\|R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(x,\omega)}\|_{TV} \leq K \mathbf{W}_+ \{T_N(\omega_H, \cdot) < \infty\}.$$

Portanto, chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \|R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L} \delta_{(y,\omega)}\|_{TV} &\leq \|R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(x,\omega)}\|_{TV} \\ &\quad + \|R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(y,\omega)}\|_{TV} + \|R_1^* \mathcal{L}^N \delta_{(y,\omega)} - R_1^* \mathcal{L} \delta_{(y,\omega)}\|_{TV} \\ &\leq 2K \mathbf{W}_+ \{T_N(\omega_H, \cdot) < \infty\} + C(N) \|x - y\|_{\mathbf{R}^d}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pelo Lema 3.48 e Observação 3.49 a seguinte estimativa é válida

$$\mathbf{W}_+ \{T_N(\omega_H, \cdot) < \infty\} \leq \mathbf{W}_+ \{\max[\Psi_1(x, y, \omega_H, \cdot), \Psi_2(\omega_H, \cdot)] > N\} \quad (3.56)$$

onde

$$\Psi_1(x, y, \omega_H, \cdot) := 2(|x| + |y|) \left(1 + C_1 \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot) \exp(C_1 \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)^{\kappa_1}) + C_1 \exp(C_1 \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)^{\kappa_1}) \right) + C_1(1 + \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot))$$

e

$$\Psi_2(\omega_H, \cdot) := C_2 \left(1 + C_2 \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot) \exp(C_2 \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)^{\kappa_2}) + C_2 \exp(C_2 \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)^{\kappa_2}) \right) + C_2(1 + \Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)).$$

Aqui $\Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)$ é a variável aleatória definida na Observação 3.49, (κ_1, C_1) e (κ_2, C_2) são constantes obtidas através do Lema 3.48 e Observação 3.49 aplicados à

$$\sup_{z \in B_{x,y}} \|X.(z, \cdot)\|_{\beta,1}, \quad \sup_{z \in B_{x,y}, |\xi| \leq 1} \|J_{0,\cdot}(z, \cdot)\xi\|_{\beta,1}$$

respectivamente. Agora considerando $N = \frac{1}{\|x-y\|^{1/4}}$ segue de (3.55) e (3.56) que

$$\begin{aligned} \|R_1^* \mathcal{L} \delta_{(x,\omega)} - R_1^* \mathcal{L} \delta_{(y,\omega)}\|_{TV} &\leq C[\|x-y\|^{3/4} + \|x-y\|^{1/2}] \\ &+ 2K \mathbf{W}_+ \{ \max[\Psi_1(x, y, \omega_H, \cdot), \Psi_2(\omega_H, \cdot)] > \|x-y\|^{-1/4} \}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Usando o fato que $\mathcal{K}_H(\cdot)$ é um processo Gaussiano pode-se facilmente checar (usando o critério de Malliavin) que a variável aleatória $\Delta_\lambda(\omega_H, \cdot)$ é absolutamente contínua. Desta forma, segue que

$$\max[\Psi_1(x, y, \omega_H, \cdot), \Psi_2(\omega_H, \cdot)]$$

é uma variável aleatória contínua. Além do mais, sabemos que o operador $\mathcal{I}_H : \mathcal{W} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{1-H}$ definido em (3.53) é contínuo. Isto mostra que

$$\begin{aligned} \ell(x, y, \omega) &:= C[\|x-y\|^{3/4} + \|x-y\|^{1/2}] \\ &+ \mathbf{W}_+ \{ \max[\Psi_1(x, y, \omega_H, \cdot), \Psi_2(\omega_H, \cdot)] > \|x-y\|^{-1/4} \} \end{aligned}$$

é conjuntamente contínuo em $\mathbf{R}^{2d} - \{\Delta\} \times \mathcal{W}$. Definindo $\ell(x, x, \omega) = 0$ se $x = y$ e $\omega \in \mathcal{W}$, obtemos uma função contínua em $\mathbf{R}^{2d} \times \mathcal{W}$. Isto completa a demonstração do Teorema. $\square$

Observação 3.39: Notemos que existe uma relação direta entre a integrabilidade de $\|\sigma^{-1}(X(x, \omega_H, \cdot))J_{0,\cdot}(x, \omega_H, \cdot)\xi\|_\kappa$ com respeito a medida de Wiener $\mathbf{W}_+$ e a continuidade de $\mathcal{L}_{\delta(x,\omega)}$ na topologia da variação total. De fato, se $\|J_{0,\cdot}(x, \omega_H, \cdot)\xi\|_\kappa \in L^p(\mathbf{W}_+)$ para $1 \leq p < \infty$, para quase todo $\omega \in \mathcal{W}$ e $x \in \mathbf{R}^d, \xi \in B_1$, então $\mathcal{L}_{\delta(x,\omega)}$ no Teorema 3.38 é não somente contínuo mas também Lipschitz em $\mathbf{R}^d$. A razão em escolher o tempo de parada T_N foi simplesmente porque não é completamente claro que o jacobiano é integrável num espaço de Hölder com expoente maior que $1/2$ para todo $H > 1/2$. A dificuldade reside no fato que o coeficiente de difusão para a EDE satisfeita pelo jacobiano não é globalmente limitado. Pode-se checar em [51] que em geral o jacobiano tem momentos finitos num espaço κ -Hölder para expoentes $\kappa \in (1/2, H)$ se $H > 3/4$. Analogamente ao caso Markoviano, a continuidade Lipschitz para as aplicações $\mathcal{L}_{\delta(x,\omega)}$ na topologia da variação total não é necessária para cobrir a propriedade forte Feller definida na seção 3.3. Porém, conjecturamos que através de um argumento de iteração de Picard deve ser possível mostrar a integrabilidade para o jacobiano na norma do sup realizando a integral *pathwise* de Riemann-Stieltjes como uma integral simétrica no sentido de Russo e Vallois ([54]). Neste caso, existe uma representação da integral de Riemann-Stieltjes em termos da integral de Skorohod mais um termo adicional dado pela derivada de Gross-Sobolev (Veja [1] para maiores detalhes). Este procedimento combinado com as estimativas dadas em [51] deve fornecer a integrabilidade para o jacobiano para qualquer $H > 1/2$ num espaço κ -Hölder para algum $1/2 < \kappa < H$.

3.5.2 Demonstração do Principal Resultado

Analogamente ao caso Markoviano, a propriedade forte Feller definida na Seção 3.3 não é suficiente para concluirmos a unicidade da medida invariante para SDE. Em adição á propriedade forte Feller precisamos de um argumento adicional que forneça o resultado desejado da unicidade. Como discutido na Seção 3.3 isto será através de um argumento de irreducibilidade conjuntamente com a propriedade *quasi-Markoviana* para Λ . Em geral, irreducibilidade requer algum tipo de não-degeneracidade do termo de difusão. Com respeito a propriedade de quase-Markov, esta será uma consequência direta das propriedades básicas do mBf. Agora estamos em posição de provarmos o principal resultado do capítulo. A demonstração é dividida em duas partes; O primeiro resultado esta relacionado à irreducibilidade.

Proposição 3.40: *Assuma que a EDE (3.30) satisfaça as hipóteses (H1) e (H2). Então o SDE Λ correspondente à EDE é irreduzível no tempo $t = 1$.*

Demonstração: Fixemos $(x, y, \omega) \in \mathbf{R}^{2d} \times \mathcal{W}$ e B_r uma bola aberta não-vazia de raio r centrada na origem em $\mathbf{R}^d$. A seguir, escrevemos $\tau_h := \cdot + h$ para denotar a translação natural em $\mathcal{W}$. Primeiramente, considere o seguinte sistema de controle

$$\begin{aligned}\dot{u}_t &= f(u_t) + \sigma(u_t)\dot{g}_t; \quad t \in [0, 1] \\ u_0 &= x \in \mathbf{R}^d,\end{aligned}$$

onde f e σ são os coeficientes da EDE (3.30). Para cada $x \in \mathbf{R}^d$ podemos facilmente achar um controle $h_x \in C^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}^d)$ com $\text{supp } h_x \subset (-1, 0)$ tal que $\hat{\Phi}_1(x, \mathcal{R}_1 h_x)(1) = 0$, onde $\mathcal{R}_1$ é a aplicação definida em (3.32). Fazemos isto considerando

$$\dot{g}_x(t) = \sigma^{-1}(u_t)(\dot{u}_t - f(u_t)),$$

de forma que $\hat{\Phi}_1(x, g_x)(1) = 0$ com $\text{supp } g_x \subset (0, 1)$ e tomamos $h_x := \mathcal{R}_1^{-1} g_x$. Desde que estamos trabalhando sobre o compacto $[-1, 0]$ podemos resolver a equação *backwards* com o mesmo controle e iterar este procedimento com o objetivo de suavizar h_x . Além do mais, desde que $\text{supp } h_x \subset (-1, 0)$ podemos olhar h_x como sendo um elemento de $C_0^\infty(\mathbf{R}_-; \mathbf{R}^d)$. Deve ser notado que pela continuidade da aplicação solução $\hat{\Phi}_1(x, \cdot)$ com relação ao ruído (Veja Lema 3.46) e o fato que as aplicações $\mathcal{R}_1$ e τ_{h_x} são contínuas em $\mathcal{W}$, podemos achar para cada $x \in \mathbf{R}^d$ uma bola aberta não-vazia $\mathcal{O}_x := \hat{\Phi}_1^{-1}(x, \mathcal{R}(\tau_{h_x}(\cdot)))(B_r) = (\Lambda_1(x, \cdot) \circ \tau_{h_x})^{-1}(B_r) \subset \mathcal{W}$.

Agora notemos que

$$\mathcal{P}_t(\omega, \cdot) = \tau_{\gamma(\omega)}^* M_1^*(0, \cdot) \mathcal{H}(\omega, \cdot),$$

onde $\gamma(\omega)(s) = \omega(s+1)$ se $s \leq -1$ e $\gamma(\omega)(s) = 0$ se $-1 \leq s \leq 0$. Isto é, $\mathcal{P}_1(\omega, \cdot)$ é a composição da medida Gaussiana $M_1(0, \cdot)^* \mathcal{H}(\omega, \cdot)$ transladada pela constante $\gamma(\omega)$. Em outras palavras, a medida $\mathcal{P}_1(\omega, \cdot)$ é uma composição de uma medida Gaussiana com uma transformação afim. Portanto, $\mathcal{P}_1(\omega, \cdot)$ é uma medida Gaussiana em $\mathcal{W}$ para cada $\omega \in \mathcal{W}$.

Como consequência resulta que $\mathcal{P}_1(\omega, \mathcal{O}_x) > 0$ para todo $(x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}$. Por outro lado,

$$\tau_{h_x}^* \mathcal{P}_1(\omega, \cdot) \sim \mathcal{P}_1(\omega, \cdot)$$

para todo $(x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}$ e portanto podemos concluir que $\mathcal{Q}_1(x, \omega; \mathcal{W} \times B_r) > 0$ para todo $(x, \omega) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{W}$. Por último, pela propriedade Gaussiana de $\mathcal{P}_1(\omega, \cdot)$ se U é um conjunto aberto não-vazio em $\mathcal{W}$ tal que $U \cap \Lambda_1^{-1}(x, \cdot)(B_r) \neq \emptyset$ então $\mathcal{P}_1(\omega, U \cap \Lambda_1^{-1}(x, \cdot)(B_r)) > 0$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Isto completa a demonstração da Proposição. $\square$

A seguir usaremos a seguinte notação. Se μ_1 e μ_2 são duas medidas positivas com derivadas de Radon-Nikodym D_1 e D_2 com respeito à alguma medida comum μ , definimos a medida $\mu_1 \wedge \mu_2$ por

$$\mu_1 \wedge \mu_2(dx) := \min[D_1(x), D_2(x)]\mu(dx).$$

Note que podemos sempre conseguir tal medida comum μ (tome $\mu = \mu_1 + \mu_2$ por exemplo) e que a definição de $\mu_1 \wedge \mu_2$ não depende da escolha de μ .

A seguir provaremos que o SDE Λ definido em 3.32 sobre $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_H, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$ é quase-Markoviano.

Proposição 3.41: *O SDE em (3.32) correspondente à EDE (3.30) é quase-Markoviano sobre o processo de ruído estacionário $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}_H, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$.*

Demonstração:

Considere a família de controles $\{h_z; z \in \mathbf{R}^d\}$ definida na Proposição 3.40 e fixemos U, V conjuntos abertos não vazios em $\mathcal{W}$, $s, t > 0$ e $(x, y) \in \mathbf{R}^{2d}$. Agora considere as aplicações $\mathcal{I}_{x,y}^1, \mathcal{I}_{x,y}^2, \mathcal{I}_{x,y}^3 : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ definidas por

$$\mathcal{I}_{x,y}^1(\omega) := (\omega + h_x, \omega + h_y), \quad (3.58)$$

$$\mathcal{I}_{x,y}^2(\omega) := (\omega + h_y - h_x, \omega), \quad (3.59)$$

$$\mathcal{I}_{x,y}^3(\omega) := (\omega, \omega + h_y - h_x). \quad (3.60)$$

Considerando as medidas de probabilidade

$$(\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega; \cdot), (\mathcal{I}_{x,y}^2)^* \mathcal{P}_s(\omega; \cdot) \text{ e } (\mathcal{I}_{x,y}^3)^* \mathcal{P}_s(\omega; \cdot), \quad \omega \in \mathcal{W},$$

podemos definir a seguinte (não nula) medida positiva finita em $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$

$$\mathcal{P}_s^{U,V}(\omega, \cdot) := (\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega; \cdot)|_{U \times V} \wedge (\mathcal{I}_{x,y}^2)^* \mathcal{P}_s(\omega; \cdot) \wedge (\mathcal{I}_{x,y}^3)^* \mathcal{P}_s(\omega; \cdot), \quad \omega \in \mathcal{W}. \quad (3.61)$$

Pela suavidade dos controles $\{h_z; z \in \mathbf{R}^d\}$ e o fato que $\mathcal{P}_s(\omega, \cdot)$ é somente uma translação da medida Gaussiana $M_s^*(0, \cdot) \mathcal{H}(\omega, \cdot)$ com uma transformação afim, podemos deduzir

$$(\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot) \sim (\mathcal{I}_{x,y}^2)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot) \sim (\mathcal{I}_{x,y}^3)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot),$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$ e portanto

$$(\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)|_{V \times U} << (\mathcal{I}_{x,y}^2)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot) \sim (\mathcal{I}_{x,y}^3)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot), \quad (3.62)$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Além do mais, obviamente temos a seguinte desigualdade

$$\Pi_{\mathcal{W}_1}^* \mathcal{P}_s^{U,V}(\omega, \cdot) \leq \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)|_U, \quad \Pi_{\mathcal{W}_2}^* \mathcal{P}_s^{U,V}(\omega, \cdot) \leq \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)|_V$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$, onde $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ são duas cópias de $\mathcal{W}$. Agora considere os seguintes conjuntos

$$\mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t = \{(\hat{\omega}, \hat{\omega}') \in \mathcal{W}^2 | R_t^* \mathcal{L} \delta_{(\hat{\omega}, z)} \sim R_t^* \mathcal{L} \delta_{(\hat{\omega}', z)} \forall z \in \mathbf{R}^d\},$$

$$\mathcal{CM} := \{(\hat{\omega}, \hat{\omega}') \in \mathcal{W}^2 | \mathcal{H}(\hat{\omega}, \cdot) \sim \mathcal{H}(\hat{\omega}', \cdot)\}.$$

Mais uma vez pela suavidade dos controles h_z resulta que $(\tau_{h_x}(\hat{\omega}), \tau_{h_y}(\hat{\omega})) \in \mathcal{CM}$ para todo $\hat{\omega} \in \mathcal{W}$ e portanto

$$(\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)|_{U \times V}(\mathcal{N}_{\mathcal{W}}^t) = (\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)(U \times V),$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Agora se $\omega \in \mathcal{W}$ é tal que $\min\{\mathcal{P}_s(\omega, U), \mathcal{P}_s(\omega, V)\} > 0$ então $U \times V$ é um aberto não-vazio em $\mathcal{W}^2$. Pela propriedade Gaussiana da medida de probabilidade $(\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)$ resulta que

$$(\mathcal{I}_{x,y}^1)^* \mathcal{P}_s(\omega, \cdot)(U \times V) > 0,$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$ tal que $\min\{\mathcal{P}_s(\omega, U), \mathcal{P}_s(\omega, V)\} > 0$. Por (3.62) e pela definição de $\mathcal{P}_s^{U,V}(\omega, \cdot)$ em (3.61) podemos concluir que o SDE Λ é quase-Markoviano. Isto completa a prova da Proposição. $\square$

Como consequência do Teorema 3.19 temos o seguinte resultado com respeito à unicidade da medida invariante (na relação de equivalência da Definição 3.5).

Teorema 3.42: *Existe exatamente uma medida de probabilidade invariante para a EDE.*

3.6 Apêndice

Lema 3.43: *Seja $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ a função definida no Lema 3.22. Então para todo $\theta \in (0, 1)$ existe uma constante C tal que*

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq C|x|^{1-\theta} & x \leq 1 & & |g(x)| &\leq C|x|^{H-1/2} & x \geq 1 \\ |g'(x)| &\leq C|x|^{-\theta} & x \leq 1 & & |g'(x)| &\leq C|x|^{H-3/2} & x \geq 1. \end{aligned}$$

Demonstração: Precisamos somente checar a afirmação para $x \gg 1$ e $x \ll 1$. O comportamento de $g(x)$ para $x \geq 1$ é óbvio desde que

$$x^{H-1/2} + (H - 3/2)x^{H-3/2} \leq g(x) \leq x^{H-1/2} \quad \forall x \geq 0.$$

Assim $g(x) \approx x^{H-1/2}$ para $x \gg 1$, no sentido que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/x^{H-1/2} = 1.$$

Analogamente, temos que $g'(x) \approx (H - \frac{1}{2})x^{H-3/2}$. Agora considere $0 < \theta < 1$, $x < x^\theta < 1$ e vamos escrever

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{H-1/2} + (H - 3/2)x \int_0^{x^\theta} \frac{(u+x)^{H-5/2}}{(1-u)^{H-1/2}} du \\ &\quad + (H - 3/2)x \int_{x^\theta}^1 \frac{(u+x)^{H-5/2}}{(1-u)^{H-1/2}} du. \end{aligned}$$

Queremos provar que existe uma constante $C > 0$ tal que $|g(x)| \leq Cx^{1-\theta}$, $|g'(x)| \leq Cx^{-\theta}$ para $0 < \theta < 1$ e $x \ll 1$. O limite superior pode ser obtido através de

$$\begin{aligned} g(x) &\leq x^{H-1/2} + (H - 3/2)x \int_0^{x^\theta} (u+x)^{H-5/2} du \\ &\quad + (H - 3/2)x(1-x^\theta)^{1/2-H} \int_{x^\theta}^1 (u+x)^{H-5/2} du \\ &= x(x+x^\theta)^{H-3/2} + \frac{x(1+x)^{H-3/2}}{(1-x^\theta)^{H-1/2}} - \frac{x(x+x^\theta)^{H-3/2}}{(1-x^\theta)^{H-1/2}} \\ &\leq Cx^{1-\theta} \quad \text{para } x \ll 1, \quad \text{desde que } \lim_{x \rightarrow 0} x^\theta(x+x^\theta)^{H-3/2} = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
g(x) &\geq x^{H-1/2} + (H-3/2)x(1-x^\theta)^{1/2-H} \int_0^{x^\theta} (u+x)^{H-5/2} du \\
&\quad + (H-3/2)x(x+x^\theta)^{H-5/2} \int_{x^\theta}^1 (1-u)^{1/2-H} du \\
&\geq -Cx^{1-\theta} \quad \text{para } x \ll 1.
\end{aligned}$$

Dividindo os limites de integração da mesma forma temos que

$$\begin{aligned}
g'(x) &\leq (H-1/2)x^{H-3/2} + (H-3/2) \int_0^{x^\theta} (u+x)^{H-5/2} du \\
&\quad + (H-3/2)(1-x^\theta)^{1/2-H} \int_{x^\theta}^1 (u+x)^{H-5/2} du \\
&\quad + (H-3/2)(H-5/2)x(1-x^\theta)^{1/2-H} \int_0^{x^\theta} (u+x)^{H-7/2} du \\
&\quad + (H-3/2)(H-5/2)x(x+x^\theta)^{H-7/2} \int_{x^\theta}^1 (1-u)^{1/2-H} du \\
&\leq 2(x+x^\theta)^{H-3/2} + (5/2-H)x(x+x^\theta)^{7/2-H} \quad \text{para } x \ll 1.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
g'(x) &\geq (H-1/2)x^{H-3/2} + (H-3/2)(1-x^\theta)^{1/2-H} \int_0^{x^\theta} (u+x)^{H-5/2} du \\
&\quad + (H-3/2) \int_{x^\theta}^1 (u+x)^{H-5/2}(1-u)^{1/2-H} du \\
&\quad + (H-3/2)(H-5/2)x \int_0^{x^\theta} (u+x)^{H-7/2} du \\
&\quad + (H-3/2)(H-5/2)x(1-x^\theta)^{1/2-H} \int_{x^\theta}^1 (u+x)^{H-7/2} du \\
&\geq (x+x^\theta)^{H-3/2} - x^{\theta(H-5/2)} \quad \text{para } x \ll 1.
\end{aligned}$$

Combinando as desigualdades acima podemos concluir que existe uma constante $C > 0$ tal que $|g'(x)| \leq Cx^{-\theta}$ para $x \ll 1$. Isto completa a demonstração. $\square$

Considere a seguinte equação em $\mathbf{R}^d$

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^n \int_0^t b^{i,j}(s, X_s) dB_H^j(s) + \int_0^t g^i(s, X_s) ds, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.63)$$

onde $B_H = (B_H^1, \dots, B_H^n)$ é um n -dimensional movimento Browniano fracionário de parâmetro $H > 1/2$ definido em algum espaço (completo) de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, X_0 é uma variável aleatória e os coeficientes $b^{i,j}, g^i : [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ são funções mensuráveis. Considere agora as seguintes hipóteses sobre os coeficientes da EDE (3.63).

[A1] A função $b(t, x)$ é diferenciável em x e existe constantes positivas M_0, M_1 tais que

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| \leq M_0 \|x - y\|, \quad \|\partial_{x_i} b(t, x) - \partial_{x_i} b(t, y)\| \leq M_1 \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbf{R}^d$ e $t \in [0, T]$ e cada $i = 1, 2, \dots, d$.

[A2] Existem constantes positivas L_0 e L_1 tais que

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq L_0 \|x - y\|, \quad \|g(t, x)\| \leq L_1 \|x\|,$$

para todo $x, y \in \mathbf{R}^d$ e $t \in [0, T]$.

[A3] Existe $\eta \in [0, 1]$ e $K > 0$ tais que

$$\|b(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|^\eta),$$

para todo $x \in \mathbf{R}^d$.

Neste capítulo utilizaremos o seguinte resultado sobre a existência e unicidade de solução para EDEs perturbadas pelo mBf de parâmetro $H > 1/2$.

Lema 3.44: *Considere $H > 1/2$, $\alpha \in (0, 2H - 1)$ e $\frac{1-\alpha}{2} < \beta < \frac{1+\alpha}{2}$. Suponha que os coeficientes b e g satisfaçam as hipóteses A1 e A2 acima. Então para todo $T > 0$ a EDE*

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dB_H(s),$$

admite uma única solução em $C^\beta(0, T; \mathbf{R}^d)$ q.c.

Demonstração: É fato bem conhecido que a integral indefinida de Riemann-Stieltjes é um operador bilinear limitado nos espaços Hölder $C^\alpha \times C^\eta$ para $\alpha + \eta > 1$ (Veja por exemplo [55] e [13]). Isto é, existe uma constante C dependendo somente de T, α e η tal que

$$\left\| \int_0^\cdot f dh \right\|_\alpha \leq C \|f\|_\alpha \|h\|_\eta, \quad (3.64)$$

para todo $f \in C^\alpha(0, T; \mathbf{R}^d)$, $h \in C^\eta(0, T; \mathbf{R}^d)$. Utilizando-se da constante C em pequenos intervalos pode-se mostrar um ponto fixo no espaço Hölder $C^\beta(0, T; \mathbf{R}^d)$ para T suficientemente pequeno como feito em [55] através do usual teorema de ponto fixo de Banach. Tirando proveito da continuidade Lipschitz dos componentes da EDE podemos facilmente estender à uma solução global. Contrário à [55], não assumimos que $b(t, x)$ seja diferenciável com respeito à t . Pode-se facilmente mostrar tal resultado checando a demonstração de [55]. $\square$

Observação 3.45: Lembremos que a integral indefinida de Riemann-Stieltjes definida no sentido de Young ([64, 65]) coincide com a integral (generalizada) de Stieltjes definida em [66]. Isto é, se $f \in C^\lambda(a, b)$ e $g \in C^\mu(a, b)$ com $\lambda + \mu > 1$ então a integral de Young $\int_a^b f dg$ coincide com a integral de Stieltjes em [66]. Desta forma, a solução construída nos espaços Hölder no Lema 3.44 coincide com a solução dada por [51] em espaços do tipo Besov $W_T^{1-\alpha, \infty}$ e $C^{\alpha, \infty}(0, T; \mathbf{R}^d)$ definidos em (3.40) e (3.33), respectivamente.

Lema 3.46: Considere $\alpha \in (0, 2H-1)$, $\beta \in (\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2})$ e $0 < T < \infty$. Se $1/2 < \gamma < H$ então a aplicação solução $\hat{\Phi}_T : \mathbf{R}^d \times C^\gamma(0, T; \mathbf{R}^d) \rightarrow C^\beta(0, T; \mathbf{R}^d)$ da equação (3.1) é contínua.

Demonstração: Vamos escrever $\hat{\omega} \in C^\gamma(0, T; \mathbf{R}^d)$ para denotar o mBf. Para simplificar notação vamos considerar $d = 1$. Considere agora a seguinte aplicação $\mathcal{L} : \mathbf{R}^d \times C^\beta \times C^\gamma \rightarrow C^\beta$ definida por $\mathcal{L}(x, u, \hat{\omega}) := x + \int_0^t f(u_s) ds + \int_0^t \sigma(u_s) d\hat{\omega}(s)$. Nós já sabemos que existe uma constante positiva $C_{T, \gamma, \beta}$ dependendo de T, β, γ tal que

$$\left\| \int_0^\cdot \sigma(u_s) d\hat{\omega}(s) \right\|_\beta \leq C_{T, \gamma, \beta} \|\hat{\omega}\|_\gamma \|\sigma(u)\|_\beta,$$

para todo $\hat{\omega} \in C^\gamma(0, T; \mathbf{R}^d)$ e $u \in C^\beta(0, T; \mathbf{R}^d)$. Portanto $\mathcal{L}(\cdot, u, \cdot) : \mathbf{R}^d \times C^\gamma \rightarrow C^\beta$ é contínua para cada $u \in C^\beta$. Além do mais, $\mathcal{L}(x, \cdot, \hat{\omega}) : C_x^\beta \rightarrow C_x^\beta$ é uma contração para todo $(x, \hat{\omega}) \in \mathbf{R}^d \times C^\gamma$, onde $C_x^\beta = \{h \in C^\beta; h(0) = x\}$.

Suponhamos por absurdo que $\hat{\Phi}_T$ não seja contínuo. Então existe $\delta > 0$ e $(x', \hat{\omega}') \in \mathbf{R}^d \times C^\gamma(0, T; \mathbf{R}^d)$ tais que para todo $\varepsilon > 0$, $\|\hat{\omega} - \hat{\omega}'\|_\gamma < \varepsilon$ e $|x - x'| < \varepsilon$ temos que $\|\hat{\Phi}_T(x, \hat{\omega}) - \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}')\|_\beta > \delta$. Sejam $N_{x, \hat{\omega}}$ e $N_{x', \hat{\omega}'}$ $\in (0, 1)$ as constantes de contração de $\mathcal{L}(x, \cdot, \hat{\omega})$ e $\mathcal{L}(x', \cdot, \hat{\omega}')$, respectivamente. Considere $\eta < \delta(1 - N)$ onde $N = \max\{N_{x, \hat{\omega}}, N_{x', \hat{\omega}'}\}$. Pela continuidade de $\mathcal{L}$ em $\mathbf{R}^d \times C^\gamma$ temos que $\|\mathcal{L}(x, \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}'), \hat{\omega}) - \mathcal{L}(x', \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}'), \hat{\omega}')\|_\beta < \eta$. Desta forma segue que

$$\begin{aligned}
\|\hat{\Phi}_T(x, \hat{\omega}) - \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}')\|_\beta &= \|\hat{\Phi}_T(x, \hat{\omega}) - \mathcal{L}(x, \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}'), \hat{\omega})\|_\beta + \\
&\quad \|\mathcal{L}(x, \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}'), \hat{\omega}) - \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}')\|_\beta \\
&\leq N\|\hat{\Phi}_T(x, \hat{\omega}) - \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}')\|_\beta + \eta.
\end{aligned}$$

Por outro lado $\|\hat{\Phi}_T(x, \hat{\omega}) - \hat{\Phi}_T(x', \hat{\omega}')\|_\beta > \delta$ e portanto $\delta < \frac{\eta}{1-N}$. Isto completa a demonstração. $\square$

A seguinte desigualdade é uma consequência direta da definição do operador $\mathcal{L}$.

Lema 3.47: *Seja Λ um arbitrário SDE com espaço de estados $\mathcal{X}$ sobre um processo de ruído estacionário $(\mathcal{W}, \{\mathcal{P}_t\}_{t \leq 0}, \mathbf{P}_\omega, \{\theta_t\}_{t \geq 0})$. Se μ e ν são duas medidas positivas finitas em $\mathcal{W} \times \mathcal{X}$ tais que $\theta := \Pi_{\mathcal{W}}^* \mu = \Pi_{\mathcal{W}}^* \nu$ então*

$$\|\mathcal{L}\mu - \mathcal{L}\nu\|_{TV} \leq \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \|\mathcal{L}\delta_{(x, \omega)} - \mathcal{L}\delta_{(y, \omega)}\|_{TV} \mu(\omega, dx) \nu(\omega, dy) \theta(d\omega),$$

onde $\mu(\omega, \cdot)$ e $\nu(\omega, \cdot)$ são desintegrações de μ e ν com respeito à θ , respectivamente.

O resultado seguinte é uma consequência imediata das Proposições 4.2, 4.4 e 5.1 em [51]. Não fazemos aqui nenhuma afirmação sobre a otimalidade da estimativa abaixo para a solução da EDE (3.1) nos espaços Hölder. Nós somente gostaríamos de mencionar que esta é suficiente para os nossos propósitos. A seguir, vamos denotar por D_{t-}^α a derivada fracionária de Marchaud de ordem $\alpha \in (0, 1)$ e $f(t-)x := (f(x) - f(t-))1_{(a, b)}(x)$, onde $f(t-) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(t - \varepsilon)$.

Lema 3.48: *Suponha que os coeficientes da equação (3.30) satisfaçam hipóteses H1 e H3. Então para todo $\alpha \in (1 - H, 1/2)$ a seguinte estimativa é válida*

$$\|X\|_{1-\alpha} \leq |x| \left(1 + C\Theta_\alpha(B_H) \exp(C\Theta_\alpha(B_H)^\kappa) + C \exp(C\Theta_\alpha(B_H)^\kappa) \right) + C(1 + \Theta_\alpha(B_H)),$$

onde $\kappa = \frac{1}{1-\alpha}$ e

$$\Theta_\alpha(B_H) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sup_{0 < s < t < T} |(D_{t-}^{1-\alpha} B_H(t-))(s)|.$$

A constante C depende de T , α e das constantes que aparecem nas hipóteses (H1) e (H3). Além do mais, $\Theta_\alpha(B_H)$ admite momentos finitos de todas as ordens $1 \leq p < \infty$ para todo $0 < T < \infty$. Em particular, $\mathbf{E}\|X\|_{1-\alpha}^p < \infty$ para $1 \leq p < \infty$. De forma geral, se X é a solução da equação (3.63) então a estimativa acima ainda é válida. Porém, neste caso κ depende não somente de α mas também de η na condição A3.

Observação 3.49: Pode-se facilmente verificar (veja Lemas 7.4 e 7.5 em [51]) que se $\lambda \in (0, \alpha - (1 - H))$ com $\alpha \in (1 - H, 1/2)$ então existe uma constante C_1 , dependendo de (α, H) , e uma variável aleatória $\Delta_\lambda(\cdot)$ com momentos de todas as ordens com respeito à medida de Wiener do mBf tal que

$$\Theta_\alpha(\tilde{\mathcal{D}}_H(\omega_H, \tilde{\omega})) \leq C_1 \Delta_\lambda(\omega_H, \tilde{\omega})$$

para todo $\omega \in \mathcal{W}$ e toda realização do movimento Browniano $\tilde{\omega}$ em $\mathbf{R}_+$, onde

$$\Delta_\lambda(\omega_H, \tilde{\omega}) = \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|\mathcal{K}_H \tilde{\omega}(r) - \mathcal{K}_H \tilde{\omega}(s) + \mathcal{I}_H(\omega_H)(r) - \mathcal{I}_H(\omega_H)(s)|^{\frac{2}{\lambda}}}{|r - s|^{\frac{2H}{\lambda}}} dr ds \right)^{\frac{\lambda}{2}}. \quad (3.65)$$

Aqui $\mathcal{K}_H$ e $\mathcal{I}_H$ são os operadores definidos em (3.39) e (3.53), respectivamente, e $\omega_H = \gamma_H \mathcal{D}_{1-H} \omega$ para $\omega \in \mathcal{W}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Alòs, E. e Nualart, D. (2003). Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. *Stoch. Stoch. Rep.* **75** (3) 129-152.
- [2] Alós, E., Mazet, O. e Nualart, D. (2001). Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *Ann. Probab.* **29** 766-801.
- [3] Arnold, L. (1998). *Random Dynamical Systems*. Springer: New York.
- [4] Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** 21-86. [Em *Random Character of Stock Market Prices* (Paul H. Cootner, ed.) The MIT Press, Cambridge, Mass, 1964.
- [5] Blinder, C. (2003). An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter. *Stochastic Process. App.* **104** 81-106.
- [6] Carmona, P., Coutin, L. e Montseny, G. (2003). Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion. *Ann. I.H. Poincaré.* **39**(1) 27-68.
- [7] Coutin, L. e Qian, Z. (2000). Stochastic differential equations for fractional Brownian motions. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** 75-80.
- [8] Coutin, L. e Qian, Z. (2002). Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probab. Theory Related Fields* **122**(1) 108-140.
- [9] da Prato, G. e Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications.
- [10] Deck, T. (2002). Continuous dependence on initial data for solutions of nonlinear stochastic evolution equations. *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* **5-3** 333-350.
- [11] Decreusefond, L. e Üstünel, A.S. (1999). Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal.* **10** 177-214.
- [12] Doob, J.L. (1948). Asymptotic properties of Markoff transition probabilities. *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** 393-421.

- [13] Dudley, R. M. e Norvaiša, R. (1998). *An Introduction to p -Variation and Young Integrals*. Maphysto Lecture notes, Aarhus University.
- [14] Duncan, T.E., Maslowski, B. e Pasik-Duncan, B. (2002). Fractional Brownian Motion and Stochastic Equations in Hilbert Spaces. *Stochastics and Dynamics*. **2** 225-250.
- [15] Einstein, A. (1905). On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. Physic.* **17**.
- [16] Elliot, R. e Vann der Hock, J. (2003). A general fractional white noise theory and applications to finance. *Math. Finance*. **13**(2) 495-535.
- [17] Elworthy, K.D. e Li, X-M. (1994). Formulae for the derivatives of heat semigroups. *J. Funct. Anal.* **125** (1) 252-286.
- [18] Feyel, D. e de la Pradelle, A. (1996). Fractional integrals and Brownian processes. *Potential Anal.* **10** 273-288.
- [19] Filinkov, A. e Sorensen, J. (2002). Differential Equations in Spaces of Abstract Stochastic Distributions. *Stoch. Stoch. Rep.* **72** 129-173.
- [20] Gubinelli, M. (2004). Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.* **216** (1) 86-140.
- [21] Grecksch, W. e Tudor, C. (1995) *Stochastic Evolution Equations: A Hilbert Space Approach*. Mathematical Research. **85**, Akademie Verlag.
- [22] Hairer, M. (2005). Ergodicity of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion. *Ann. Probab.* **33**(2) 703-758.
- [23] Hairer, M. e Ohashi, A (2006). Ergodicity of SDEs driven by fractional Brownian motion with multiplicative noise. Preprint. Mathematics Research Centre. University of Warwick.
- [24] Hairer, M. e Mattingly, J. (2005). Ergodicity of the 2D Navier-Stokes Equations with Degenerate Stochastic Forcing. *Aparecer em Ann. Maths.*
- [25] Hida, T. (1975). Analysis of Brownian Functionals. Carleton Math. Lect. Notes. Carleton Univ, Ottawa, **13**.
- [26] Hida, T., Kuo, H.H. e Obata, N. (1993). Transformations for white noise functionals. *J. Funct. Anal.* **111** 259-277.
- [27] Hida, T., Kuo, H.H., Potthoff e J. Streit, L. (1993). *White Noise: An Infinite Dimensional Calculus*. Kluwer Academic Publishers.
- [28] Holden, H., Oksendal, B.; Ubøe, J. e Zhang, T. (1994). *Stochastic Partial Differential Equations*. Birkhäuser.

- [29] Holden, H., Lindstrom, T., Oksendal, B., Ubøe, J. e Zhang, T. (1993). Stochastic boundary value problems: A white noise functional approach. *Probab. Theory Related Fields*. **95** 391-419.
- [30] Hörmander, L. (1967). Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.* **119** 147-171.
- [31] Hu, Y., Oksendal, B. e Zhang, T. (2004). General fractional multiparameter white noise theory and stochastic partial differential equations. *Commun. Partial Differential Equations*. **29** 1-23.
- [32] Hu, Y. (2001). Heat equation with fractional white noise potentials. *Appl. Math. and Optimization*. **43** 221-243.
- [33] Huang, Z-y. e Yan J-y. (2000). *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Beijing/New York.
- [34] Itô, K. (1951). Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan*. **3** 157-169.
- [35] Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo*. **20** 519-524.
- [36] Itô, K. (1946). On a stochastic integral equation. *Proc. Imperial Acad. Tokyo*. **22** 32-35.
- [37] Itô, K. (1943) Differential equations determining Markov processes (em japônes). *Zenkoku Shijô Sugaku Danwakay*. **1077** 1352 - 1400.
- [38] Kuo, H-H. (1996). *White Noise Distribution Theory*. Probability and Stochastic Series. CRC Press.
- [39] Kusuoka, S. (1991). Analysis on Wiener spaces (I). Nonlinear maps. *J. Funct. Anal.* **98** 122-168.
- [40] Kusuoka, S. (1992). Analysis on Wiener spaces (II). Differential forms. *J. Funct. Anal.* **103** 229-274.
- [41] Kusuoka, S. e Stroock, D. (1984). Application of the Malliavin calculus I., In: *Stochastic Analysis, Proc. Taniguchi Inter. Symp. on Stoch. Anal., Katata and Tokyo 1982*, ed.: K. Itô, Kinokunina. North-Holland, 271-306.
- [42] Kusuoka, S. e Stroock, D. (1985). Application of the Malliavin calculus II., In: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA*. **32** 1-76.
- [43] Kusuoka, S. e Stroock, D. (1987). Application of the Malliavin calculus III., In: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA*. **32** 391-442.
- [44] Lin, S.J. (1995). Stochastic analysis of fractional Brownian motions. *Stoch. Stoch. Rep.* **55** 121-140.

- [45] Lindstrom, T. (1993). Fractional Brownian fields and integrals of white noise. *Bull. London. Math. Soc.* **25** 83-88.
- [46] Lyons, T. (1998). Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoamericana.* **14** 215-310.
- [47] Malliavin, P. (1978) Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. *Proc. Inter. Symp. on SDE, Kyoto 1976*. Willey 1978, 195-263.
- [48] Mandelbrot, B. B. e Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev* **10** 422-437.
- [49] Maslowsky, B. e Nualart, D. (2003). Evolution equations driven by a fractional Brownian motion. *J. Funct. Anal.* **124(4)** 558-574.
- [50] Maslowsky, B. e Schmalz, B. (2004). Random Dynamical Systems and Stationary Solutions of Differential Equations Driven by the Fractional Brownian Motion. *Stochastic Analysis and Applications.* **22(6)** 1577-1607.
- [51] Nualart, D. e Ruacscanu, A. (2002). Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect. Math.* **53(1)** 55-81.
- [52] Nualart, D. e Saussereau, B. (2005). Malliavin calculus for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion. Preprint.
- [53] Ohashi, A. (2006). Stochastic evolution equations driven by a fractional white noise. *A aparecer em Stochastic Analysis and Applications.*
- [54] Russo, F. e Vallois, P. (1993). Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Related Fields* **97(3)** 403-421.
- [55] Ruzmaikina, A. A. (2000). Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion. *J. Statist. Phys.* **100 (5)** 1049-1069.
- [56] Samko, S. G., Kilbas, A. A. e Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science, Yverdon.
- [57] Samorodnitsky, G. e Taqqu, M. S. (1994) *Stable Non-Gaussian Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, London.
- [58] Thangavelu, S. (1993). *Lectures on Hermite and Laguerre Expansions*. Princeton University Press.
- [59] Tindel, S., Tudor, C.A., e Viens, F. (2003). Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion. *Probab. Theory and Related Fields.* **127** 186-204.
- [60] Walsh, J.B. (1986). An introduction to stochastic partial differential equations. *Lectures Notes in Math.* **1180** 265-437.

- [61] Watanabe, S. (1984). *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin calculus*. Tata Inst. Fund. Research, Springer-Verlag.
- [62] Shigekawa, I. (1987). Existence of invariant measures of diffusions on an abstract Wiener space. *Osaka J. Math.* **24** 37-59.
- [63] Shigekawa, I. (1980). Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures. *J.Math. Kyoto Univ.* **20** 263-289.
- [64] Young, L. C. (1936) An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integral. *Acta Math.* **67** 251-282.
- [65] Young, L. C. (1929). On Riemman integration with respect to a continuous increment. *Math. Z.* **29** 217-233.
- [66] Zähle, M. (1998). Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. *Probab. Theory Related Fields* **111**(3) 333-374.