Modelos fatoriais
para
retorno de ativos

Luís Gustavo do Amaral Vinha

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Estatística
Orientadora: Profa. Dra. Chang Chiann

São Paulo, setembro de 2006.

Modelos fatoriais para retorno de ativos

Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação devidamente corrigida e defendida
por Luís Gustavo do Amaral Vinha
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 27 de setembro de 2006.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Chang Chiann (orientadora) - IME/USP

Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin - IME/USP

Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira - Ibmecc São Paulo

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Luiz e Maria Odete, pela dedicação, incentivo e amor em todas as etapas da minha vida.

Ao meu irmão Luís Henrique pela amizade e, principalmente, pela presença decisiva nos momentos difíceis.

Ao meu irmão Luis Augusto pela paciência e companheirismo.

À minha orientadora professora Chang Chiann, pelo estímulo e ajuda para a realização deste estudo.

Aos professores Pedro Valls e Pedro Morettin que muito me honraram participando da banca examinadora valorizando e enriquecendo o trabalho.

À minha amiga Regina, pelo carinho, apoio e por sempre acreditar em mim.

À minha aluna e amiga Denise, pela atenção e ajuda com os alguns conceitos de contabilidade.

Aos amigos Igor, João, Fábio, Ricardo, Renatinha e todos os outros amigos do IME, pela amizade e pelos bons momentos que compartilhamos.

À todos os professores e colegas de trabalho que, de alguma forma, colaboraram para a minha formação e desenvolvimento profissional.

*O mais incompreensível do mundo
é que ele seja compreensível.*

Albert Einstein

Não existem fatos, apenas interpretações.

Friedrich Nietzsche

*Porque sou do tamanho daquilo que vejo,
E não do tamanho da minha altura...*

Fernando Pessoa

Resumo

A estrutura de covariância entre os retornos dos ativos representa uma informação fundamental para a formação de carteiras de investimentos. Os fatores responsáveis pelos riscos sistemáticos dos ativos podem ser identificados através dos modelos de fatores, o que possibilita uma estimação robusta das covariâncias entre os retornos.

Diversos estudos foram feitos nas últimas décadas com o objetivo de determinar quais são os fatores que podem explicar o comportamento dos ativos. De forma geral, os modelos propõem a utilização de fatores macroeconômicos, fundamentais ou estatísticos.

O objetivo do presente estudo é identificar os fatores que influenciam os retornos de ativos do mercado brasileiro. A influência de fatores macroeconômicos nos retornos foi estudada através de regressões em séries de tempo e modelos de equações simultâneas. Modelo de regressão “cross-section” foram utilizados no estudo da importância dos fatores fundamentais. A geração dos fatores estatísticos e o estudo da influência desses fatores nos retornos foram feitos através da análise fatorial tradicional e pela análise assintótica de componentes principais. Entre os modelos estudados, os modelos de fatores estatísticos apresentaram os melhores resultados.

Abstract

The covariance structure among the asset returns represents a fundamental information for the investments portfolio formation. The responsible factors for the assets systematic risks can be identified by factor models, what make possible a robust estimation of the covariances among returns.

Several studies were made in the last decades with the objective of determining the factors that can explain the behavior of the asset returns. In general way, the models propose the use of macroeconomic, fundamental or statistical factors.

The objective of the present study is to identify the factors that influence the asset returns of the Brazilian market. The influence of macroeconomic factors was studied by regressions in time series and simultaneous equations models. Cross-section regressions models were used in the study of the fundamental factors importance. The generation of the statistical factors and the study of the influence of these factors in the returns were made using traditional factorial analysis and asymptotic principal component analysis. Among the studied models, the statistical factors models presented the better results.

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Visão Geral	6
1.2	Formulação geral dos modelos	8
2	Modelo Macroeconômico	11
2.1	Introdução	11
2.2	Modelo de fator único	12
2.2.1	Método	12
2.2.2	Aplicação	15
2.3	Modelo multifator	18
2.3.1	Geração dos fatores	20
2.3.2	Ajuste do modelo para os retornos	35
2.4	Conclusão	48
3	Modelo Fundamental	50
3.1	Introdução	50
3.2	Variáveis fundamentais	50
3.2.1	Valor de mercado, Valor Contábil e Lucro/Preço	51
3.2.2	Alavancagem financeira	51
3.2.3	Variáveis de classificação	53

3.3	Geração dos fatores fundamentais - Modelos tipo “BARRA”	54
3.3.1	Modelo tipo “BARRA” de fator único	54
3.3.2	Modelo tipo “BARRA” de fatores dos tipos de indústrias	55
3.4	Aplicação	59
3.5	Conclusão	64
4	Modelo de Fatorial Estatístico	65
4.1	Introdução	65
4.2	Análise Fatorial	66
4.2.1	Modelo de Análise Fatorial Ortogonal	66
4.2.2	Cargas fatoriais ou betas dos fatores	67
4.2.3	Comunalidade e especificidade	67
4.2.4	Estimação	68
4.2.5	Rotação dos fatores	72
4.2.6	Determinação do número de fatores	72
4.3	Análise Assintótica de Componentes Principais	76
4.3.1	Refinamento da estimação dos fatores	79
4.3.2	Determinação do número de fatores	80
4.4	Aplicação	82
4.4.1	Análise Fatorial	82
4.4.2	Análise Assintótica de Componentes Principais	85
4.5	Conclusão	88
5	Conclusão	89
	Referências	91
	Apêndices	94

A	Definições e dados utilizados	94
A.1	Definições	94
A.2	Dados - Retornos	95
B	Variáveis macroeconômicas	103
C	Alavancagem financeira	104
D	Demonstração dos resultados do capítulo 4	114

Capítulo 1

Introdução

1.1 Visão Geral

Os conceitos de risco e retorno fazem parte da rotina dos investidores do mercado financeiro. O retorno corresponde ao lucro sobre o montante de capital investido. O risco é uma medida numérica da incerteza associada ao retorno que efetivamente será obtido com o investimento. Um investidor deve saber que não existe retorno sem risco, ou seja, quanto maior o risco de um investimento, maior o retorno esperado.

A medida de risco associada aos movimentos dos preços dos ativos é o desvio padrão dos seus retornos¹. O risco pode ser decomposto em duas partes: risco sistemático, parcela do risco explicada por fatores comuns a todos os ativos; risco específico, parcela do risco que está associada a cada ativo em particular e que não é explicada por fatores comuns.

O risco específico de um ativo também é chamado de risco diversificável pois pode ser reduzido através da diversificação do investimento. Por exemplo, uma carteira de investimentos é composta por dois ativos, quanto mais negativa for a covariância entre os retornos dos ativos menor será o risco total

¹As definições de ativo e retorno são apresentadas no Apêndice A.

da carteira².

A formação de uma carteira procura minimizar o risco para um determinado valor de retorno esperado ou maximizar o retorno para um determinado nível de risco que se deseja assumir. Portanto, a covariância entre os retornos dos ativos é uma informação fundamental para a otimização de uma carteira, dessa forma o desempenho da carteira depende da estimação adequada da covariância entre os retornos.

As covariâncias entre os retornos podem ser estimadas a partir dos retornos observados dos ativos em um determinado período. Mas, nesse caso, a estrutura de covariância corresponde somente ao período estudado e não proporciona estimativas robustas para períodos futuros. Os modelos fatoriais representam uma alternativa para essa estimação, esses modelos identificam os fatores responsáveis pelos riscos sistemáticos dos ativos o que possibilita uma estimação mais robusta das covariâncias entre os retornos.

Os modelos fatoriais são o objeto de estudo do presente trabalho. Através desses modelos é possível verificar a existência de fatores responsáveis pelo risco sistemático dos ativos, determinados esses fatores é possível gerar previsões de retornos, além de possibilitar uma estimação mais robusta das covariâncias entre os retornos.

Um dos modelos fatoriais mais importantes e mais discutidos na literatura é o modelo CAPM (“Capital Asset Pricing Model”). O CAPM preconiza que todo o risco sistemático dos ativos é capturado apenas pelo índice de mercado. As diversas hipóteses simplificadoras assumidas neste modelo geraram inúmeras críticas, mas essa discussão não faz parte do escopo do presente trabalho e poderá ser abordada em trabalhos futuros (para maiores detalhes ver Grinold e Kahn, 2000).

Ross (1976) apresenta uma alternativa ao CAPM, o modelo APT (“Arbitrage Pricing Model”), que afirma que o risco sistemático dos ativos é multidimensional, ou seja, existem outros fatores além do índice de mercado que influenciam os movimentos dos ativos. O modelo original não determina

²Lembrando que o risco de uma carteira formada por dois ativos é dado por

$$\sigma_c = \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12}},$$

onde σ_1 e σ_2 são os riscos dos ativos 1 e 2, σ_{12} é a covariância entre os retornos dos ativos, a e b são os pesos dos ativos na formação da carteira com $0 < a, b < 1$ e $a + b = 1$.

quantos ou quais são os fatores, mas impõe uma restrição ao modelo linear, essa restrição é discutida no Capítulo 2.

De forma geral os modelos fatoriais para retornos de ativos podem ser divididos em três tipos: macroeconômico, fundamental e estatístico. No modelo macroeconômico os fatores são relacionados com variáveis que representam o cenário econômico do país como, por exemplo, taxa de inflação e produção industrial. No modelo fundamental os fatores são relacionados com características observáveis das empresas como valor de mercado e alavancagem. No modelo estatístico os fatores não são diretamente observáveis e são obtidos a partir de retornos observáveis através de métodos estatísticos.

1.2 Formulação geral dos modelos

Os modelos fatoriais estudados têm em comum a mesma formulação geral

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{1i}f_{1t} + \beta_{2i}f_{2t} + \dots + \beta_{Ki}f_{Kt} + \varepsilon_{it}, \quad (1.1)$$

onde

- R_{it} é o retorno real ou o excesso de retorno do ativo i ($i = 1, \dots, N$) no período t ($t = 1, \dots, T$);
- α_i é o intercepto;
- f_{kt} é a realização do fator k ($k = 1, \dots, K$) no período t ;
- β_{ki} é a sensibilidade do ativo i em relação ao fator k ou o beta do ativo i em relação ao fator k ;
- ε_{it} é o erro ou risco específico do ativo i no período t .

Assume-se que os erros têm média zero e são não correlacionados com as realizações dos fatores, isto é,

$$E(\varepsilon_{it}) = 0 \quad \text{para todo } i \text{ e } t,$$

$$Cov(f_{kt}, \varepsilon_{it}) = 0 \quad \text{para todo } k, i \text{ e } t.$$

Além disso, supõe-se que os erros não apresentam correlação contemporânea e serial, ou seja,

$$Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{para } t=s \text{ e } i=j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nas aplicações apresentadas nos capítulos seguintes foram considerados os excessos de retornos dos ativos. O excesso de retorno corresponde à diferença entre o retorno real do ativo e o retorno de um investimento livre de risco. Nesse caso foi utilizada a taxa de juros nominal como o retorno livre de risco.

Foram utilizados dois conjuntos de dados para as aplicações dos modelos: o primeiro contém os retornos mensais de 20 ativos no período de 117 meses, de agosto de 1994 a maio de 2004, e foram utilizados para os modelos macroeconômico e estatístico; no segundo estão disponíveis os retornos mensais de 136 ativos no período de 41 meses, de janeiro de 2000 a maio de 2004, esses dados também foram utilizados para o modelo estatístico e para o modelo fundamental. Todas as cotações foram obtidas no Banco de Dados Econômica.

Os gráficos das séries de retornos do primeiro conjunto de dados são apresentados no Apêndice A, Figura A.1. Os ativos que compõem o primeiro conjunto de dados são: Acesita PN, Ambev PN, Aracruz PNB, Arcelor ON, Avipal ON, Brasil Telecom PN, Confab PN, Duratex PN, Gerdau Met PN, Klabin PN, Perdigão PN, Petrobras PN, Ripasa PN, Sadia PN, Sid Tubarão, PN Telemar PNB, Telesp ON, Usiminas PNA, Vale PNA e Votorantim PN.

As Figuras A.2 a A.7 do Apêndice A apresentam as séries de retornos do segundo conjunto de dados. Esse conjunto de dados é composto por todos os ativos que apresentam pelo menos uma cotação em todos os meses do período entre janeiro de 2000 a maio de 2004.

O objetivo do estudo é identificar os fatores que influenciam os retornos dos ativos, determinar as sensibilidades dos ativos em relação aos fatores e quantificar a variabilidade total dos retornos explicada pelos fatores. Em alguns casos será possível comparar os resultados de modelos distintos e, para todos os modelos, são apresentados os estimadores das matrizes de covariâncias dos retornos.

A dissertação está organizada como segue: no Capítulo 2 é apresentado o Modelo Macroeconômico, a geração dos fatores macroeconômicos e algumas metodologias para o estudo da influência desses fatores nos retornos; o Capítulo 3 apresenta o Modelo Fundamental onde os fatores são obtidos a partir de características específicas das empresas; no Capítulo 4 é apresentado o Modelo Estatístico, nesse capítulo são apresentadas técnicas para a estimação dos fatores estatísticos a partir dos retornos; por fim são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelo Macroeconômico

2.1 Introdução

Nesse capítulo é apresentado um estudo da influência do cenário econômico do país sob os retornos de ativos. Nesse caso, os termos f_{kt} da formulação geral apresentada em (1.1) são fatores relacionados com os movimentos de variáveis macroeconômicas, logo são fatores comuns a todos os ativos.

O objetivo é identificar os fatores macroeconômicos que podem explicar os retornos, quantificar a variação dos retornos explicada por esses fatores, estimar os betas dos fatores e os riscos específicos de cada ativo.

São abordados no estudo dois tipos de modelos:

- Modelo de fator único: onde somente um índice que representa o comportamento do mercado é utilizado como fator;
- Modelo multifatorial: são utilizados K fatores macroeconômicos, em geral, esses fatores estão relacionados com inflação, produção industrial, risco de crédito e taxa de juros entre outros.

A seguir são apresentados os aspectos teóricos relevantes para cada modelo e os resultados da aplicação em dados reais.

2.2 Modelo de fator único

2.2.1 Método

Nesse caso, como é utilizado apenas um índice de mercado como fator, o modelo geral apresentado em (1.1) pode ser reduzido em

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T,$$

onde R_{Mt} é o retorno do índice de mercado no período t .

O modelo em questão pode ser apresentado na forma de regressão em séries temporais para cada ativo i

$$\mathbf{R}_i = \alpha_i \mathbf{1}_T + \mathbf{R}_M \beta_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

onde

- $\mathbf{R}_i$ é o vetor $T \times 1$ dos retornos do ativo i ;
- α_i é o intercepto;
- $\mathbf{1}_T$ é um vetor $T \times 1$ de uns;
- β_i é o beta de mercado do ativo i ;
- $\mathbf{R}_M$ é o vetor $T \times 1$ dos retornos do índice de mercado;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ é um vetor $T \times 1$ dos erros.

A matriz de covariâncias dos retornos dos ativos desse modelo é dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \sigma_M^2 \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}' + \mathbf{D},$$

onde

- $\sigma_M^2 = \text{Var}(R_{Mt})$;
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)'$;
- $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal com $\sigma_i^2 = \text{Var}(\varepsilon_{it})$ na diagonal.

Para cada ativo, os parâmetros α_i , β_i e σ_i^2 podem ser estimados por

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_i \\ \hat{\beta}_i \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{R}_i, \quad (2.2)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-2} \hat{\varepsilon}_i' \hat{\varepsilon}_i,$$

onde $\mathbf{X} = (\mathbf{1} : \mathbf{R}_M)$.

Como $\mathbf{R}_M$ é observável a variância do índice de mercado pode ser estimada por

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{Mt} - \bar{R}_M)^2,$$

$$\bar{R}_M = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{Mt}.$$

Logo a estimativa da matriz de covariâncias dos retornos pode ser obtida por

$$\hat{\Omega} = \hat{\sigma}_M^2 \hat{\beta} \hat{\beta}' + \hat{\mathbf{D}},$$

onde a diagonal de $\hat{\mathbf{D}}$ é composta por $\hat{\sigma}_i^2$.

Os resultados desse modelo, para cada ativo, têm as seguintes interpretações:

- O Coeficiente de Determinação ($\mathcal{R}_i^2$) da regressão representa a proporção da variabilidade do retorno do ativo i explicada pelo índice de mercado, ou em outras palavras, a proporção do risco de mercado do ativo i ;
- $(1 - \mathcal{R}_i^2)$ é a proporção da variabilidade dos retornos do ativo i não explicada pelo índice de mercado, ou a proporção do risco específico do ativo i ;
- β_i é a sensibilidade do ativo i em relação aos movimentos do mercado, ou o beta de mercado do ativo i ;
- $\hat{\sigma}_i$ é uma medida do risco específico do ativo i .

O modelo apresentado em (2.1) não considera a correlação contemporânea entre os erros mas, na prática, essa correlação existe ($Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) \neq 0$, para algum t e $i \neq j$). Nesse caso os estimadores obtidos em (2.2), apesar de serem não viciados, não são eficientes.

Uma alternativa é a utilização de sistemas de equações de regressão que considera a correlação contemporânea entre os erros, um dos modelos mais conhecidos na literatura é o modelo SUR (“Seemingly Unrelated Regression”), esse modelo pode ser representado, a partir de (2.1), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{E}, \\ \mathbf{R} &= [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}] \boldsymbol{\beta} + \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix}_{NT \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X} \end{bmatrix}_{NT \times 2N} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_N \end{bmatrix}_{2N \times 1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N \end{bmatrix}_{NT \times 1},$$

onde $\boldsymbol{\beta}_i = (\alpha_i : \beta_i)'$.

Sob as suposições de correlação contemporânea, homoscedasticidade e ausência de correlação serial, a matriz de covariâncias dos erros é dada por

$$(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T) = \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_T & \sigma_{12} \mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{1N} \mathbf{I}_T \\ \sigma_{21} \mathbf{I}_T & \sigma_2^2 \mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{2N} \mathbf{I}_T \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{N1} \mathbf{I}_T & \sigma_{N2} \mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_N^2 \mathbf{I}_T \end{bmatrix},$$

onde

- $\mathbf{I}_T$ é a matriz identidade de ordem T ;
- σ_i^2 é a variância dos erros ε_{it} para todo t ;
- σ_{ij} é a covariância entre os erros ε_{it} e ε_{jt} para todo t .

Os estimadores de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ podem ser obtidos através do método de mínimos quadrados generalizados (MQG). O princípio desse método é propor uma

transformação tal que a matriz de covariâncias dos erros tenha a forma $\sigma^2 \mathbf{I}$, onde σ^2 é uma constante e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem NT . O modelo (2.3) é transformado utilizando uma matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{AR} = \mathbf{AF}\beta + \mathbf{AE}$, de forma que o novo vetor de erros $\mathbf{AE}$ tenha matriz de covariâncias $\mathbf{I}$. A matriz $\mathbf{A}$ tem que ser inversível e respeitar a condição $\Psi = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}$.

Utilizando a notação $\mathbf{R}_* = \mathbf{AR}$, $\mathbf{F}_* = \mathbf{AF}$ e $\mathbf{E}_* = \mathbf{AE}$, o novo modelo pode ser escrito $\mathbf{R}_* = \mathbf{F}_*\beta + \mathbf{E}_*$, onde $E[\mathbf{E}_*] = \mathbf{0}$ e $\text{Var}[\mathbf{E}_*] = \mathbf{I}$.

Portanto, o estimador de MQG para β é dado por

$$\hat{\beta}_{MQG} = (\mathbf{F}_*' \mathbf{F}_*)^{-1} \mathbf{F}_*' \mathbf{R}_* = (\mathbf{F}' \Psi^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' \Psi^{-1} \mathbf{R}. \quad (2.4)$$

Como a matriz Ψ é desconhecida não é possível encontrar a matriz $\mathbf{A}$ para realizar a transformação proposta acima. Uma alternativa é utilizar uma estimativa de Ψ para obter o estimador de β , esse método é chamado de mínimos quadrados generalizados factíveis (MQGF). O método MQGF é composto de dois passos, no primeiro é obtida a estimativa de Ψ a partir dos resíduos do modelo assumindo que a matriz de covariâncias dos erros tem a forma $\sigma^2 \mathbf{I}$, no segundo o estimador para β é obtido utilizando a matriz estimada no primeiro passo na equação (2.4)

$$\hat{\beta}_{MQGF} = (\mathbf{F}' \hat{\Psi}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' \hat{\Psi}^{-1} \mathbf{R}.$$

$$\hat{\beta}_{MQGF} = (\mathbf{F}' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) \mathbf{R}.$$

O primeiro passo desse método não é eficiente pois não considera a estrutura de covariâncias entre os erros, logo pode ser melhorado. Uma versão iterativa utiliza os resíduos do modelo ajustado no segundo passo para o cálculo da matriz de covariâncias obtida no primeiro passo, até a convergência das estimativas.

2.2.2 Aplicação

A seguir são apresentados os resultados do modelo de fator único para os dados referentes aos retornos das ações de 20 empresas no período de agosto de 1994 a maio de 2004, conforme mencionado no Capítulo 1. Foi utilizado o Ibovespa (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) para representar os movimentos do mercado.

Para verificar a existência de correlação contemporânea entre os erros foram ajustados os modelos para cada retorno individualmente, como na equação (2.1), as correlações entre os resíduos dos modelos são apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Correlação entre os resíduos dos modelos (2.1)

	Acesita PN	Ambev PN	Aracruz PNB	Arcelor ON	Avipal ON	Brasil Telecom PN	Confab PN	Duratex PN	Gerdau Met PN	Klabin PN
AcesitaPN	1,00									
AmbevPN	-0,10	1,00								
AracruzPNB	-0,15	0,29	1,00							
ArcelorON	0,38	-0,14	-0,07	1,00						
AvipalON	0,23	0,11	0,03	0,12	1,00					
BrasilTelePN	0,21	0,09	-0,21	0,14	0,14	1,00				
ConfabPN	0,16	-0,10	-0,05	0,12	0,15	0,17	1,00			
DuratexPN	0,43	0,10	-0,07	0,23	0,24	0,29	0,17	1,00		
GerdauMetPN	0,31	-0,11	0,09	0,42	0,19	0,18	0,25	0,30	1,00	
KlabinPN	0,37	0,16	0,36	0,30	0,21	0,15	0,02	0,15	0,31	1,00
PerdigaoPN	0,00	0,08	-0,03	0,18	0,18	0,11	0,14	0,11	0,12	0,04
PetrobrasPN	-0,05	-0,08	-0,24	-0,14	0,15	-0,14	-0,01	-0,08	-0,15	-0,22
RipasaPN	-0,02	0,17	0,63	0,08	0,12	-0,01	-0,11	-0,05	0,24	0,43
SadiaPN	0,18	-0,01	0,09	0,19	0,31	0,12	0,15	0,34	0,24	0,21
SidTubaraoPN	0,29	0,06	0,36	0,10	0,17	0,00	0,12	0,16	0,24	0,33
TelemarPNB	0,14	0,00	-0,21	0,10	-0,04	0,12	-0,02	-0,01	-0,16	-0,01
TelespON	0,05	-0,06	0,15	0,04	0,02	-0,04	0,05	-0,03	0,02	0,19
UsiminasPNA	0,34	0,04	-0,06	0,42	0,15	-0,04	0,09	0,21	0,32	0,39
ValePNA	-0,01	0,19	0,71	0,09	-0,01	-0,09	-0,09	-0,13	0,08	0,32
Votorantim PN	0,17	0,11	0,55	0,19	0,07	-0,05	0,16	0,15	0,27	0,47
	Perdigao PN	Petrobras PN	Ripasa PN	Sadia PN	Sid Tubarão PN	Telemar PNB	Telesp ON	Usiminas PNA	Vale PNA	Voto PN
AcesitaPN										
AmbevPN										
AracruzPNB										
ArcelorON										
AvipalON										
BrasilTelePN										
ConfabPN										
DuratexPN										
GerdauMetPN										
KlabinPN										
PerdigaoPN	1,00									
PetrobrasPN	0,07	1,00								
RipasaPN	-0,01	-0,20	1,00							
SadiaPN	0,36	0,00	0,11	1,00						
SidTubaraoPN	0,07	0,06	0,40	0,22	1,00					
TelemarPNB	-0,01	0,05	-0,01	-0,03	0,03	1,00				
TelespON	-0,05	-0,06	0,21	-0,10	0,15	0,03	1,00			
UsiminasPNA	0,17	-0,05	0,05	0,22	0,38	0,02	0,10	1,00		
ValePNA	0,05	-0,17	0,59	0,12	0,42	-0,10	0,16	0,00	1,00	
Votorantim PN	0,02	-0,13	0,48	0,26	0,41	-0,13	0,02	0,19	0,52	1,00

Observa-se que os resíduos dos modelos de diversos ativos apresentam-se correlacionados, por exemplo, os resíduos do modelo da Vale PNA apresenta correlações elevadas com os resíduos dos modelos da Aracruz PNB e Ripasa PN e os resíduos do modelo da Acesita PN apresenta correlações moderadas com os resíduos dos modelos da Arcelor ON, Duratex PN, Gerdau Met PN, Klabin PN e Usiminas PNA. Esse resultado dá evidência de que existe cor-

Figura 2.1: Coeficientes de Determinação dos modelos (2.3)

relação contemporânea entre os erros dos modelos, logo esse fato deve ser considerado na estimação.

A Figura 2.1 apresenta os Coeficientes de Determinação do modelo SUR (2.3). Verifica-se que o índice de mercado explica grande parte da variação dos retornos da Petrobras PN ($R^2 = 0,68$), por outro lado, para a maioria dos ativos a variação dos retornos é pouco explicada pelo mercado, principalmente para Arcelor ON e Aracruz PNB ($R^2 = 0,03$ e $0,11$, respectivamente).

Se o modelo para um determinado ativo apresenta coeficiente de determinação baixo significa que o risco específico desse ativo é grande em relação ao seu risco de mercado. Evidentemente, existem outros fatores, além do índice de mercado, que influenciam o comportamento dos retornos desses ativos.

Na Tabela 2.2 são apresentados os betas estimados e os respectivos testes de significância. Adotando um nível de significância de 5%, os betas de mercado para todos os ativos são significantes.

Os ativos Petrobras PN, Brasil Telecom PN e Telemar PNB apresentam os maiores valores para o beta de mercado (1,066, 1,005 e 0,944), o que indica que os movimentos desses ativos são mais sensíveis aos movimentos

Tabela 2.2: Betas estimados e testes de significância dos modelos (2.3)

	Coefficiente	Estatística t	p-valor
Acesita PN	0,790	5,587	0,000
Ambev PN	0,631	8,974	0,000
Aracruz PNB	0,726	3,861	0,000
Arcelor ON	0,229	2,011	0,047
Avipal ON	0,557	5,717	0,000
Brasil Telecom PN	1,005	11,558	0,000
Confab PN	0,671	5,324	0,000
Duratex PN	0,529	5,374	0,000
Gerdau Met PN	0,617	6,151	0,000
Klabin PN	0,633	4,788	0,000
Perdigão PN	0,773	5,031	0,000
Petrobras PN	1,066	15,661	0,000
Ripasa PN	0,801	5,022	0,000
Sadia PN	0,597	7,797	0,000
Sid Tubarão PN	0,831	7,09	0,000
Telemar PNB	0,944	10,271	0,000
Telesp ON	0,741	8,984	0,000
Usiminas PNA	0,866	8,171	0,000
Vale PNA	0,634	6,002	0,000
Votorantim PN	0,630	5,473	0,000

do mercado. O beta de mercado de Arcelor PN é menor (0,229), logo esse ativo apresenta a menor sensibilidade com relação ao mercado.

A Figura 2.2 apresenta os resíduos dos modelos, verifica-se que variabilidade dos resíduos é razoavelmente homogênea ao longo do tempo.

2.3 Modelo multifator

Na seção anterior verificou-se que o risco de mercado da maioria dos ativos é baixo indicando a necessidade de introdução de outros fatores no modelo além do índice de mercado. Nessa seção é proposto o estudo da influência de

Figura 2.2: Resíduos dos modelos (2.3)

alguns fatores macroeconômicos sobre o comportamento dos retornos.

Os fatores macroeconômicos utilizados nesse estudo são relacionados com produção industrial, inflação, taxa de juros e risco de crédito, os mesmos utilizados por Chen, Roll e Ross (1986).

Esses fatores devem representar as inovações ou os movimentos não antecipados das variáveis macroeconômicas, mas em alguns casos não são diretamente observáveis. Na seção seguinte são apresentadas as técnicas utilizadas para a geração dos fatores.

2.3.1 Geração dos fatores

A geração das inovações de algumas variáveis foi feita através de Modelos Estruturais e Filtro de Kalman, o mesmo procedimento adotado por Schor, Bonomo e Valls (2002). Modelos autoregressivos univariados e modelos autoregressivos multivariados foram utilizados por outros autores como formas alternativas para a geração das inovações (Neves, 2003).

2.3.1.1 Modelos Estruturais

Nos modelos estruturais a série temporal y_t é decomposta em componentes não observáveis da seguinte forma:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2), \quad t=1,2,\dots,T, \quad (2.5)$$

onde μ_t representa a tendência, ψ_t o ciclo, γ_t a sazonalidade e ϵ_t o componente irregular ou aleatório.

- **Tendência**

O componente de tendência representa a direção geral ou movimento de longo prazo da série. Esse componente pode permanecer constante ao longo de toda a série (tendência determinística) ou apresentar mudanças de nível ou de inclinação (tendência estocástica).

De forma geral podemos escrever esse componente como

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2),$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2),$$

onde

- μ_t representa o nível local;
- β_t é a inclinação local;
- os termos η_t e ζ_t são perturbações não correlacionadas entre si e não correlacionadas com o componente irregular ϵ_t .

A perturbação η_t permite que o nível μ_t varie ao longo do tempo e, da mesma forma, ζ_t permite que a inclinação β_t varie. Quanto maiores as variâncias σ_η^2 e σ_ζ^2 das perturbações, maiores os movimentos estocásticos da série, e se essas variâncias são nulas a tendência é determinística.

A partir de uma análise gráfica da série é possível especificar o tipo de tendência a ser utilizada. Em caso de dúvida, pode-se estimar o modelo geral com nível e tendência e testar a significância de cada componente.

• Ciclo

Esse componente representa os movimentos transitórios da série. O ciclo é um componente com períodos longos, entende-se como período o tempo que a série leva para completar um ciclo completo.

O ciclo pode ser representado como uma combinação linear de senos e cossenos

$$\psi_t = \alpha_t \cos \lambda_c t + \beta_t \sin \lambda_c t,$$

onde

- $0 \leq \lambda_c \leq \pi$ é a frequência do ciclo, medida em radianos, correspondente ao período do ciclo ($2\pi/\lambda_c$);
- $\sqrt{\alpha_t^2 + \beta_t^2}$ é a amplitude da onda;
- $\arctg(\beta_t/\alpha_t)$ é a fase da onda.

O ciclo é determinístico quando α_t e β_t são constantes para todo t . O ciclo é estocástico se os coeficientes variam ao longo do tempo, nesse caso a representação é feita na forma

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix},$$

onde

- ψ_t é o valor corrente do ciclo e o termo ψ_t^* aparece apenas para a construção de ψ_t ;
- $0 \leq \rho \leq 1$ denominado fator de desconto;
- κ_t e κ_t^* são ruídos brancos não correlacionados com variâncias iguais e não correlacionados com o componente irregular ϵ_t .

• Sazonalidade

O componente γ_t representa a sazonalidade da série temporal. Por exemplo, em grande parte das séries econômicas mensais a sazonalidade representa o padrão que se repete anualmente. A sazonalidade da série pode ser determinística ou estocástica e, além disso, pode-se representar a sazonalidade através de variáveis indicadoras (“dummy”) ou através de funções trigonométricas.

Considerando a representação através de variáveis “dummy”, a componente sazonal pode ser especificada como

$$\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \dots - \gamma_{t-s+1} + \omega_t,$$

onde ω_t é um ruído branco com média 0 e variância σ_ω^2 e s o período da sazonalidade. Se a variância σ_ω^2 for nula a sazonalidade da série é determinística.

Considerando a representação através de funções trigonométricas temos

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \gamma_{jt},$$

com γ_{jt} gerado por

$$\begin{bmatrix} \gamma_{jt} \\ \gamma_{jt}^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_j & \sin \lambda_j \\ -\sin \lambda_j & \cos \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{jt-1} \\ \gamma_{jt-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{jt} \\ \omega_{jt}^* \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, \left[\frac{s}{2}\right],$$

onde

- $j = 1, \dots, \left[\frac{s}{2}\right]$;

- $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$;
- ω_{jt} e ω_{jt}^* são ruídos brancos não correlacionados entre si e não correlacionados com o componente irregular ϵ_t , têm média zero e variâncias iguais (variâncias nulas quando a sazonalidade é determinística).

Quando s é par o componente γ_{jt} para $j = \left[\frac{s}{2}\right]$ é dado por

$$\gamma_{jt} = \gamma_{jt-1} \cos \lambda_j + \omega_{jt}.$$

• Irregular

O componente irregular é o componente aleatório da série. Esse componente pode ser um ruído branco ou, se apresentar correlação serial, pode ser modelado por um processo ARMA (autoregressivo e média móvel).

Variáveis explicativas e intervenções podem ser incluídas no modelo apresentado em (2.5). Logo o modelo pode ser estendido para

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \sum_{i=1}^k \Delta_i x_{it} + \sum_{j=1}^h \lambda_j w_{jt} + \epsilon_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, T,$$

onde

- x_{it} é a i -ésima variável explicativa no período t ;
- w_{jt} a j -ésima intervenção no período t .

Existem quatro tipos de intervenções que podem ser incorporadas nos modelos estruturais. Uma intervenção introduzida em um determinado período τ pode ser, para qualquer j :

$$\text{Pulso ou outlier: } w_{jt} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq \tau, \\ 1 & \text{se } t = \tau; \end{cases}$$

$$\text{Mudança de nível: } w_{jt} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \tau, \\ 1 & \text{se } t \geq \tau; \end{cases}$$

$$\text{Mudança de inclinação: } w_{jt} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \tau, \\ t - \tau & \text{se } t \geq \tau; \end{cases}$$

$$\text{Decaimento exponencial: } w_{jt} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \tau, \\ \phi^{t-\tau} & \text{se } t \geq \tau. \end{cases}$$

2.3.1.2 Representação em Espaço de Estados

Os modelos estruturais, assim como todos os modelos lineares para séries temporais, podem ser representados na forma de espaço de estados. Com a série representada dessa forma é possível utilizar o filtro de Kalman para estimar os parâmetros, fazer previsão, suavização ou geração de erros um passo a frente.

Seja $\mathbf{y}_t$ um vetor $N \times 1$ de observações no instante t , essas observações estão relacionadas com um vetor $\boldsymbol{\alpha}_t$ ($m \times 1$), conhecido como vetor de estados, através da equação de observação

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.6)$$

onde

- $\mathbf{Z}_t$ é uma matriz $N \times m$ do sistema;
- $\mathbf{d}_t$ é um vetor $N \times 1$ com variáveis “dummy” e variáveis explicativas;
- $\boldsymbol{\epsilon}_t$ é um vetor $N \times 1$ de perturbações serialmente não correlacionadas com média zero e matriz de covariâncias $\mathbf{H}_t$.

Em geral os elementos de $\boldsymbol{\alpha}_t$ não são observados, entretanto, assume-se que seja gerado por um processo markoviano de primeira ordem. Esse processo é representado pela equação de transição

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad \text{para } t = 1, \dots, T, \quad (2.7)$$

onde

- $\mathbf{T}_t$ é a matriz $m \times m$ de transição;
- $\mathbf{c}_t$ é um vetor $m \times 1$ de variáveis observadas que podem afetar o vetor de estados;
- $\mathbf{R}_t$ é uma matriz $m \times g$ conhecida;
- $\boldsymbol{\eta}_t$ é um vetor $g \times 1$ de perturbações serialmente não-correlacionadas com média zero e matriz de covariâncias igual a $\mathbf{Q}_t$.

Para completar a especificação do modelo supõe-se que

- o vetor de estado inicial $\boldsymbol{\alpha}_0$ tem média $\mathbf{a}_0$ e matriz de covariâncias $\mathbf{P}_0$;
- as perturbações $\boldsymbol{\epsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ são não correlacionadas entre si e também com o estado inicial, ou seja,

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\eta}_s') = \mathbf{0}, \text{ para todo } s, t = 1, \dots, T,$$

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\alpha}_0') = \mathbf{0} \text{ e } E(\boldsymbol{\eta}_s \boldsymbol{\alpha}_0') = \mathbf{0} \text{ para } t = 1, \dots, T.$$

A seguir são apresentados alguns exemplos de modelos univariados e sua representação em espaços de estados.

1. Modelo de tendência local: esse modelo é descrito pelas equações

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t,$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t,$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t.$$

Na representação em espaço de estados, equações (2.6) e (2.7), tem-se

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t + \epsilon_t,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix}.$$

2. Modelo de tendência + ciclo:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \epsilon_t,$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t,$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t,$$

onde ψ_t é dado por

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\lambda_c & \sin\lambda_c \\ -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}.$$

A representação em espaço de estados é dada por

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_t + \epsilon_t,$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\cos\lambda_c & \rho\sin\lambda_c \\ 0 & 0 & -\rho\sin\lambda_c & \rho\cos\lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}.$$

3. Modelo de tendência + componente sazonal com variáveis “dummy”:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \epsilon_t,$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t,$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t,$$

onde

$$\sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{t-i} = \omega_t.$$

A representação em espaço de estados, supondo que o período da sazonalidade seja 4 ($s = 4$), é dada por

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_t + \epsilon_t,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \\ \gamma_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ \omega_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Modelo de tendência + variáveis explicativas e intervenções: considere, por exemplo, um modelo com tendência local, duas variáveis explicativas x_1 e x_2 e as intervenções ω_1 em nível, ω_2 em inclinação e ω_3 do tipo pulso. Esse modelo é dado por

$$y_t = \mu_t + \Delta_1 x_{1t} + \Delta_2 x_{2t} + \lambda_1 \omega_{1t} + \lambda_2 \omega_{2t} + \lambda_3 \omega_{3t} + \epsilon_t.$$

A representação em espaço de estados é dada por

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t + \begin{bmatrix} x_{1t} & x_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} + \epsilon_t,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{1t} & 0 & \omega_{3t} \\ 0 & \omega_{2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix}.$$

2.3.1.3 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um algoritmo de estimação recursiva que pode ser utilizado para estimação, suavização, previsão e geração de erros de previsão de uma série. No presente estudo o filtro de Kalman será utilizado para geração de erros de previsão um passo a frente, esses erros representam as inovações das variáveis macroeconômicas.

Considerando o modelo de espaço de estados apresentado, seja $\mathbf{a}_t$ o estimador ótimo do vetor de estados $\boldsymbol{\alpha}_t$ considerando todas as observações incluindo $\mathbf{y}_t$. A matriz $\mathbf{P}_t$, de dimensão $m \times m$, representa a matriz de covariâncias dos erros de estimação de forma que

$$\mathbf{P}_t = E \left[(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t) (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t)' \right].$$

Admitindo-se que no momento $t - 1$, $\mathbf{a}_{t-1}$ e $\mathbf{P}_{t-1}$ sejam conhecidos, o previsor de $\boldsymbol{\alpha}_t$ baseado nas informações até o instante $t - 1$, denominado $\mathbf{a}_{t|t-1}$, é dado por

$$\mathbf{a}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{c}_t,$$

e a medida de dispersão associada a essa previsão é obtida pela matriz

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'.$$

A partir das equações (2.6) e (2.7) é possível obter o previsor de $\mathbf{y}_t$, usando todas as informações até o instante $t - 1$. Esse previsor, denominado $\tilde{\mathbf{y}}_{t|t-1}$, é dado por

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t|t-1} = \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t,$$

logo o erro de previsão um passo a frente é obtido da seguinte forma

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \tilde{\mathbf{y}}_{t|t-1}.$$

A variância associada a esse erro de previsão é dada por

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}_t.$$

A cada nova observação é possível obter a atualização do vetor de estados $\mathbf{a}_t$ e da matriz de covariâncias $\mathbf{P}_t$

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' (\mathbf{F}_t)^{-1} \boldsymbol{\eta}_t,$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' (\mathbf{F}_t)^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t|t-1}.$$

Portanto, dadas as condições iniciais, o filtro de Kalman gera o estimador ótimo do vetor de estados a cada nova observação disponível e também o previsor para $\mathbf{y}_t$ a partir das informações disponíveis até $t - 1$. Além disso, observado todo o período, o filtro de Kalman gera os previsores ótimos para o vetor de estados e observações futuras.

A estimação pode ser feita pelo método da máxima verossimilhança sob a suposição de normalidade do vetor de estado inicial e que as perturbações são conjuntamente normais e não correlacionadas. Considerando que os erros de previsão são independentes, a função de log-verossimilhança desses erros é dada por

$$\ln L = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t.$$

Os estimadores dos parâmetros $(\alpha_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{T}, \mathbf{H}$ e $\mathbf{Q})^1$ são obtidos maximizando a função de verossimilhança através de métodos numéricos. Nesse trabalho, o ajuste dos modelos foi feito com o pacote STAMP (“Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor”), esse pacote utiliza o método de Newton-Raphson na maximização.

Para mais detalhes sobre representação em espaço de estados e filtro de Kalman, ver Harvey (1989). Mais informações sobre o pacote STAMP podem ser obtidas em Koopman et al (2000).

2.3.1.4 Aplicação

Os métodos apresentados acima são utilizados para a geração dos fatores relacionados com a produção industrial e inflação.

Fator relacionado com a Produção Industrial

O fator relacionado com a produção industrial obtido nessa seção corresponde às inovações do índice de produção industrial. Foi utilizado o índice geral de produção industrial sem ajuste sazonal obtido pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), esse índice é apresentado na Figura B.1 do Apêndice B.

Como o objetivo é a geração dos fatores macroeconômicos, o modelo apresentado a seguir é ajustado para a geração dos erros de previsão. Os erros de previsão nesse caso representam as mudanças inesperadas do índice geral de produção industrial.

Foi proposto um modelo estrutural univariado para o índice geral de produção industrial com tendência, ciclo, sazonalidade, irregular e o número de dias úteis no mês como variável explicativa.

Utilizando a representação de espaços de estados apresentada pelas equações (2.6) e (2.7) e considerando componente sazonal com variáveis “dummy”,

¹assumindo que as matrizes $\mathbf{T}_t$, $\mathbf{H}_t$ e $\mathbf{Q}_t$ são invariantes no tempo.

tem-se

$$y_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \epsilon_t, \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t,$$

onde

$$\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}_{1 \times 15}, \quad \boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-10} \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix}_{15 \times 1}, \quad \mathbf{d}_t = \Delta_1 x_{1t},$$

$$\mathbf{T}_t = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho \cos \lambda_c & \rho \sin \lambda_c \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho \sin \lambda_c & \rho \cos \lambda_c \end{array} \right]_{15 \times 15},$$

$$\mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \\ \omega_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}_{15 \times 1},$$

x_{1t} é a variável número de dias úteis no mês t .

Em um ajuste inicial foi considerada a inclinação, mas esse componente não apresentou significância ao nível de 5% e foi retirado do modelo. Os resultados do modelo final são apresentados a seguir.

Tabela 2.3: Variâncias estimadas dos componentes da série - modelo (2.8)

Componente	Variância estimada	Razão-Q
Irregular (ϵ_t)	0,0014	1,0000
Nível (μ_t)	0,0000	0,0000
Ciclo (ψ_t)	6,0353e-06	0,0042
Sazonalidade (γ_t)	5,4035e-06	0,0037

Tabela 2.4: Coeficientes estimados para o componente ciclo - modelo (2.8)

Coeficiente	
Rho (ρ)	0,975
Período ($2\pi/\lambda_c$)	10,625
Variância (σ_κ^2)	0,591

Na Tabela 2.3 são apresentadas as variâncias estimadas dos componentes e por esses resultados pode-se concluir que o nível da série é determinístico. A estatística Razão-Q corresponde à razão entre a variância do componente e a maior variância entre os componentes. Nota-se que a variância dos componentes Ciclo e Sazonalidade representam apenas 0,42% e 0,37% da variância do componente irregular.

Pelo resultado apresentado na Tabela 2.4 verifica-se que o período do ciclo é de aproximadamente 11 meses, diferentemente do que se espera que são ciclos com períodos maiores que um ano.

A Tabela 2.5 apresenta os coeficientes do nível, sazonalidade e variáveis explicativas. Pode-se verificar que o nível e as variáveis explicativas são significantes pois apresentam p-valor praticamente igual a zero. Uma parte das componentes sazonais apresenta-se significantes, logo existe um padrão sazonal nos dados.

Para verificar se o modelo ajustado é adequado temos que verificar se os resíduos do modelo apresentam-se serialmente não correlacionados. A Figura

Tabela 2.5: Coeficientes estimados do vetor final e teste de significância - modelo (2.8)

	Coeficiente	Estatística t	p-valor
Nível	-0,556	-9,608	0,0000
Sazonalidade 1	0,057	5,113	0,000
Sazonalidade 2	-0,010	-0,888	0,376
Sazonalidade 3	0,100	8,872	0,000
Sazonalidade 4	0,023	1,811	0,072
Sazonalidade 5	-0,023	-2,088	0,038
Sazonalidade 6	-0,132	-11,714	0,000
Sazonalidade 7	-0,030	-2,620	0,009
Sazonalidade 8	0,017	1,551	0,122
Sazonalidade 9	-0,020	-1,771	0,078
Sazonalidade 10	-0,010	-0,891	0,374
Sazonalidade 11	0,015	1,282	0,201
Número de dias úteis	0,027	9,640	0,000

2.3 apresenta os resíduos do modelo e o correlograma correspondente, pode-se verificar que os resíduos não apresentam correlação serial.

A série dos resíduos representa a parte inesperada da variável e será utilizada como um dos fatores do modelo multifatorial para os retornos.

Fator Relacionado com Inflação

A série utilizada para a construção do fator relacionado com a inflação é a série do Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna (IGP-DI) obtido pela Fundação Getúlio Vargas. O gráfico desse índice é apresentado no Apêndice B, Figura B.2.

Nesse caso o modelo estrutural é ajustado com o objetivo de gerar os erros de previsão um passo a frente e a inflação esperada. Os erros de previsão representam as mudanças inesperadas do índice de inflação e a inflação esperada é utilizada para o cálculo do fator relacionado com taxa de juros.

Para a geração das inovações foi ajustado um modelo estrutural univariado para o índice geral da inflação com tendência e irregular. Nesse modelo foram introduzidas algumas intervenções na tendência e no nível. As inter-

Figura 2.3: Resíduos do modelo (2.8) e Correlograma correspondente

venções foram utilizadas nos meses de introdução dos planos de estabilização da economia, nesses períodos eram esperadas quedas drásticas na taxa de inflação.

Utilizando a representação de (2.6) e (2.7) para esse modelo tem-se

$$y_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \epsilon_t, \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t,$$

onde

$$\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_t = 0, \quad \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_t = \begin{bmatrix} w_{1t} & w_{2t} & 0 & w_{4t} \\ 0 & 0 & w_{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{15 \times 4} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix},$$

e w_{1t} , w_{2t} , w_{3t} e w_{4t} são as intervenções no mês t .

Tabela 2.6: Variâncias estimadas das componentes da série - modelo (2.9)

Componente	Variância Estimada	Razão-Q - modelo (2.9)
Irregular	0,000	0,0000
Nível	6,370e-04	1,0000
Inclinação	0,000	0,0000

Tabela 2.7: Estimativas dos coeficientes das variáveis “dummy” (w_{1t} , w_{2t} , w_{3t} e w_{4t}) e testes de significância - modelo (2.9)

	Coeficiente	Estatística t	p-valor
Nível 1989m2	-0,26131	-10,2640	0,0000
Nível 1990m4	-0,71361	-28,0300	0,0000
Inclinação 1991m3	-0,01275	-3,2697	0,0001
Nível 1994m7	-0,4218	0,0253	0,0000

Pode-se verificar pela Tabela 2.6 que o nível apresenta variabilidade muito maior que os demais componentes, as variâncias e Razão-Q correspondentes à inclinação e irregular são praticamente iguais a zero. Esse resultado era esperado pois, observando o gráfico da série, é nítida a grande variação do nível. Além disso, pela Tabela 2.7, verifica-se as variáveis “dummy” introduzidas no modelo são significantes.

Pela Figura 2.4 observa-se que os resíduos não apresentam correlação serial mas não apresentam variabilidade constante. Os resíduos do modelo serão

Figura 2.4: Resíduos do modelo (2.9) e Correlograma correspondente

utilizados no modelo multifatorial para os retornos como o fator relacionado com a inflação.

2.3.2 Ajuste do modelo para os retornos

O estudo da relação entre os fatores macroeconômicos e os retornos dos ativos é apresentado a seguir. Além do índice de mercado e dos fatores relacionados com a produção industrial e inflação gerados na seção anterior, são utilizados também fatores relacionados com o risco de crédito e taxa de juros. Detalhes sobre os dois últimos fatores são apresentados a seguir.

Fator relacionado com Risco de Crédito

A medida de risco de crédito originalmente proposto por Chen, Roll e Ross(1986) é a diferença entre os retornos de um título de empresa privada e de um título público de igual prazo.

No Brasil, devido a pouca emissão de empresas privadas e conseqüentemente a ausência de uma base de dados histórica, não é possível utilizar a

mesma medida de risco do mercado americano. Schor, Bonomo e Pereira (2002) aproximaram a taxa de financiamento das empresas pela taxa de juros de capital de giro e a taxa de financiamento público foi aproximada pela taxa de juros do mercado interbancário, o CDI diário.

Utilizou-se a série da taxa de juros de capital de giro fornecida pelo Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas e a série da taxa de juros de Certificados de Depósitos Interbancários (CDI) fornecida pelo Banco Central. Os gráficos desses índices são apresentados no Apêndice B, Figuras B.3 e B.4.

Fator relacionado com Taxa de Juros

A medida de taxa de juros utilizada por Chen, Roll e Ross (1986) é a diferença entre a taxa de retorno dos títulos de longo prazo do governo americano e a taxa de retorno dos títulos de curto prazo. Também para esse fator, por ausência de base histórica, foi utilizada uma medida alternativa proposta por Schor, Bonomo e Pereira (2002).

A medida utilizada é a diferença entre a taxa de juros do mercado interbancário (CDI) e a taxa de inflação esperada. A taxa de inflação esperada utilizada é a mesma calculada para a geração das inovações da inflação.

Modelos

São apresentadas três metodologias para o estudo da importância dos fatores macroeconômicos sobre os retornos dos ativos:

1. Modelo Multifatorial Geral: da forma que é apresentado em Zivot e Wang(2003);
2. Metodologia proposta por Chen, Roll e Ross (1986): verifica a importância dos fatores através dos prêmios de risco;
3. Metodologia proposta por McElroy e Burmeister(1988): utiliza o modelo SUR não-linear para a estimação simultânea dos betas e prêmios de risco dos fatores.

2.3.2.1. Modelo Multifatorial Geral

A partir da formulação geral dos modelos fatoriais apresentada em (1.1), o modelo multifatorial geral, escrito na forma de regressões em séries temporais, é dado por

$$\mathbf{R}_i = \alpha_i \mathbf{1}_T + \mathbf{F} \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

onde

- $\mathbf{R}_i$ é o vetor $T \times 1$ dos retornos do ativo i ;
- $\mathbf{1}_T$ é um vetor $T \times 1$ de uns;
- $\mathbf{F}$ é a matriz $T \times K$ das realizações dos fatores;
- $\boldsymbol{\beta}_i$ é o vetor $K \times 1$ dos betas do ativo i ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ é um vetor $T \times 1$ dos erros.

A matriz de covariâncias dos retornos é dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}_f \mathbf{B}' + \mathbf{D},$$

onde

- $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_N)$;
- $\boldsymbol{\Omega}_f = E \left[(\mathbf{f}_t - \boldsymbol{\mu}_t) (\mathbf{f}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \right]$ é a matriz de covariâncias dos fatores;
- $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal com $\sigma_i^2 = Var(\varepsilon_{it})$ na diagonal.

Como as realizações dos fatores são observáveis, os parâmetros α_i , $\boldsymbol{\beta}_i$ e σ_i^2 podem ser estimados por

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_i \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_i \end{pmatrix} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{R}_i \quad (2.11)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i,$$

onde $\mathbf{X} = (\mathbf{1} : \mathbf{F})$.

A matriz de covariâncias das realizações dos fatores pode ser estimada usando a matriz de covariâncias amostral

$$\hat{\Omega}_f = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{f}_t - \bar{\mathbf{f}})^2,$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t,$$

logo a matriz de covariâncias dos retornos pode ser estimada por

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\Omega}_f\hat{\mathbf{B}}' + \hat{\mathbf{D}}.$$

2.3.2.2. Metodologia proposta por Chen, Roll e Ross (1986)

Chen, Roll e Ross (1986) apresenta um estudo da influência de variáveis macroeconômicas nos retornos dos ativos com o objetivo de testar a restrição que o APT impõe sobre o modelo linear. Essa restrição está relacionada com relação risco e retorno.

Considerando que os termos f_{kt} do modelo apresentado em (1.1) têm esperanças nulas, α_i representa o retorno esperado para o ativo i , logo $\alpha_i = E(R_i)$. Dessa forma, a restrição imposta pelo APT pode ser representada pela igualdade

$$E(R_i) = \beta_{1i}\lambda_1 + \beta_{2i}\lambda_2 + \dots + \beta_{ki}\lambda_k,$$

onde λ_k representa o prêmio de risco do k -ésimo fator.

A estimação dos prêmios de risco é feita utilizando a metodologia proposta por Fama e Macbeth (1973). A evidência da validade empírica do APT se dá quando os prêmios de risco são estatisticamente diferentes de zero.

A metodologia em questão é composta pelos seguintes passos:

- **Passo 1:** Dadas as séries dos retornos de N ativos, para um período inicial, do mês 1 ao mês T_1 (com $T_1 > 12$), são ajustados N modelos de regressão dos retornos de cada ativo em função dos fatores macroeconômicos:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{1i}f_{1t} + \beta_{2i}f_{2t} + \dots + \beta_{Ki}f_{Kt} + \epsilon_{it}, \quad t = 1, \dots, T_1, \quad i = 1, \dots, N;$$

- **Passo 2:** Os betas β_{ji} , ou as sensibilidades dos retornos em relação aos fatores calculadas no Passo 1, são utilizados como variáveis independentes no ajuste de modelos de regressão “cross-section” onde a variável dependente são os retornos dos ativos:

$$R_i = \lambda_0 + \lambda_1\beta_{1i} + \lambda_2\beta_{2i} + \dots + \lambda_K\beta_{Ki} + \eta_i, \text{ para } i = 1, \dots, N.$$

Os coeficientes λ_k são os prêmios de risco estimados dos fatores e esses são armazenados. São ajustados 12 modelos dessa forma para os 12 meses seguintes.

- **Passo 3:** Para o período seguinte (do mês 13 ao mês $T_1 + 12$) o modelo ajustado no Passo 1 é reajustado e o Passo 2 é repetido. Esses passos são repetidos para todo o período.

Como resultado são obtidas as séries das estimativas dos prêmios de risco dos fatores. Por esse método a importância dos fatores é verificada através de testes de significância dos prêmios de risco.

2.3.2.3. Metodologia proposta por McElroy e Burmeister(1988)

A metodologia proposta por McElroy e Burmeister(1988) utiliza o método “Interactive Seemingly Unrelated Regression Estimators” para estimação simultânea dos betas e prêmios de risco dos fatores. Para isso é proposto o seguinte modelo

$$R_{it} = \sum_{j=1}^K \beta_{ji}\lambda_j + \sum_{j=1}^K \beta_{ji}f_{jt} + \varepsilon_{it}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \text{ e } t = 1, 2, \dots, T.$$

Note que a formulação acima difere da apresentada na equação (1.1) no intercepto α_i . Considerando o ajuste do modelo para os N ativos tem-se

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}] \mathbf{B} + \mathbf{E}, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix}_{NT \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X} \end{bmatrix}_{NT \times KN} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}_{KN \times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{NT \times 1}$$

onde

- $\mathbf{R}_i$ é o vetor $T \times 1$ dos retornos do ativo i ;
- β_i é o vetor $K \times 1$ dos betas do ativo i ;
- ε_i é o vetor $T \times 1$ dos erros;
- a matriz $\mathbf{X}$ é dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{K1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{K2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{1T} & f_{2T} & \cdots & f_{KT} \end{bmatrix}.$$

Sob a suposição de ausência de correlação serial, mas supondo que existe correlação contemporânea e homoscedasticidade a matriz de covariâncias dos erros tem a forma

$$Var(\mathbf{E}) = [\Sigma \otimes \mathbf{I}_T] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_T & \sigma_{12} \mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{1N} \mathbf{I}_T \\ \sigma_{21} \mathbf{I}_T & \sigma_2^2 \mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{2N} \mathbf{I}_T \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{N1} \mathbf{I}_T & \sigma_{N2} \mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_N^2 \mathbf{I}_T \end{bmatrix}.$$

A estimação dos parâmetros é feita minimizando a forma quadrática

$$\{\mathbf{R} - [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}] \mathbf{B}\}' (\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{I}_T) \{\mathbf{R} - [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}] \mathbf{B}\}. \quad (2.13)$$

Um método iterativo pode ser utilizado através dos seguintes passos:

- **Passo 1:** São estimados os parâmetros β_{ji} para cada retorno separadamente, sem considerar as correlações contemporâneas. São armazenados os resíduos;
- **Passo 2:** A partir dos resíduos do Passo 1 é obtida a estimativa da matriz de covariâncias $\hat{\Sigma}$;
- **Passo 3:** A matriz de covariâncias estimada no Passo 2 é utilizada para a minimização da forma quadrática apresentada na equação (2.13)

$$\{\mathbf{R} - [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}] \mathbf{B}\}' \left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_T \right) \{\mathbf{R} - [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{X}] \mathbf{B}\}$$

- **Passo 4:** Uma nova matriz de covariâncias é calculada com os resíduos do Passo 3 e os parâmetros são estimados novamente. Esse passo é repetido até a convergência dos parâmetros.

A partir do modelo (2.12) é possível testar restrições nos parâmetros, por exemplo, pode-se verificar a significância conjunta dos prêmios de risco através do teste da razão de verossimilhanças. Por exemplo, pode-se verificar se os prêmios de risco são significantes, isto é, $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K = 0$.

A estatística desse teste é

$$\theta = -(T - N - K) \left[\ln|\hat{\Sigma}_I| - \ln|\hat{\Sigma}_R| \right],$$

onde $\hat{\Sigma}_I$ e $\hat{\Sigma}_R$ são as matrizes de covariâncias dos erros estimadas para o modelo irrestrito e restrito, respectivamente. A distribuição assintótica da estatística θ , sob a hipótese nula, é qui-quadrado com $N - K - 1$ graus de liberdade.

2.3.2.4. Aplicação

- **Modelo Multifatorial Geral**

O modelo apresentado na equação (2.10) foi ajustado para os dados referentes aos retornos das ações de 20 empresas no período de agosto de 1994 a maio de 2004, os coeficientes de determinação dos modelos ajustados são apresentados na Figura 2.5.

Figura 2.5: Coeficientes de Determinação - 1ª Metodologia

Pode-se verificar que os fatores macroeconômicos explicam grande parte da variação dos retornos de Aracruz PN, Petrobrás PN ($R^2 = 0,77$ e $0,71$). Aproximadamente 55% da variabilidade dos retornos de Ripasa PN, Vale PNA e Brasil Telecom PN são explicados pelos fatores propostos e para os demais ativos os fatores explicam menos de 50% da variabilidade.

A Figura 2.6 apresenta as estimativas dos betas dos fatores macroeconômicos para os retornos das 20 ativos. Pode-se verificar pela Figura 2.6 (e) que os betas de mercado dos ativos são todos positivos. Para os outros fatores os coeficientes apresentam-se com valores positivos e negativos.

Figura 2.6: Betas estimados para os fatores macroeconômicos - 1ª Metodologia: (a) Inflação, (b) Risco de crédito, (c) Taxa de juros, (d) Produção industrial e (e) Ibovespa

- Metodologia proposta por Chen, Roll e Ross (1986)

A metodologia proposta por Chen, Roll e Ross foi aplicada aos dados, no primeiro passo foram utilizados os dados dos 3 primeiros anos (de agosto de 1994 a julho 1997) para a estimação dos betas dos fatores. A Tabela 2.8 apresenta os resultados do teste de significância dos prêmios de risco. Verifica-se que os prêmios de risco não são significantes logo, para os dados em questão, a restrição imposta pelo APT não está satisfeita.

Tabela 2.8: Prêmios de riscos dos fatores macroeconômicos - 2ª Metodologia

	Coeficiente	Desvio Padrão	Estatística t	p-valor
Inflação	-0,26	12,52	-0,18	0,854
Risco de Crédito	0,25	6,93	0,32	0,750
Taxa de Juros	0,08	0,69	1,10	0,273
Produção Industrial	1,50	21,91	0,61	0,542
Índice Bovespa	-0,37	2,92	-1,12	0,265

- Metodologia proposta por McElroy e Burmeister(1988)

Na Tabela 2.9 são apresentadas as correlações entre os resíduos dos modelos multifatorial geral. Pode-se observar, por exemplo, que os resíduos do modelo da Vale PNA apresenta correlações acima de 0,30 com os resíduos dos modelos de Aracruz PNB e Votorantim PN e os resíduos do modelo de Acesita PN apresenta correlações em torno de 0,30 com os resíduos dos modelos de Arcelor ON, Gerdau Met PN, Sid Tubarão PN e Usiminas PNA. Logo existem indícios de que exista correlação contemporânea entre os erros.

Tabela 2.9: Correlações entre os resíduos dos modelos - 1ª Metodologia

	Acesita PN	Ambev PN	Aracruz PNB	Arcelor ON	Avipal ON	Brasil Telecom PN	Confab PN
Acesita PN	1,00						
Ambev PN	-0,08	1,00					
Aracruz PNB	-0,09	0,09	1,00				
Arcelor ON	0,34	-0,13	0,04	1,00			
Avipal ON	0,20	0,09	-0,02	0,08	1,00		
Brasil Tele PN	0,20	0,14	-0,08	0,13	0,16	1,00	
Confab PN	0,10	-0,09	0,09	0,06	0,12	0,17	1,00
Duratex PN	0,41	0,16	0,11	0,20	0,23	0,28	0,14
Gerdau Met PN	0,29	-0,12	0,15	0,40	0,16	0,21	0,22
Klabin PN	0,43	0,04	0,12	0,35	0,19	0,23	0,04
Perdigao PN	-0,02	0,15	0,19	0,16	0,20	0,10	0,13
Petrobras PN	-0,10	0,02	0,05	-0,21	0,16	-0,20	-0,06
Ripasa PN	0,06	-0,03	0,13	0,18	0,10	0,19	-0,09
Sadia PN	0,17	0,02	0,26	0,18	0,31	0,12	0,13
Sid Tubarao PN	0,33	-0,02	0,22	0,11	0,14	0,09	0,12
Telemar PNB	0,12	0,05	-0,13	0,07	-0,04	0,09	-0,05
Telesp ON	0,06	-0,11	0,06	0,04	0,01	-0,02	0,06
Usiminas PNA	0,32	0,05	-0,04	0,41	0,13	-0,05	0,06
Vale PNA	0,10	0,04	0,41	0,20	-0,05	0,07	-0,04
Votorantim PN	0,24	-0,06	0,31	0,26	0,01	0,06	0,21
	Duratex PN	Gerdau Met PN	Klabin PN	Perdigao PN	Petrobras PN	Ripasa PN	Sadia PN
Acesita PN							
Ambev PN							
Aracruz PNB							
Arcelor ON							
Avipal ON							
Brasil Tele PN							
Confab PN							
Duratex PN	1,00						
Gerdau Met PN	0,29	1,00					
Klabin PN	0,21	0,32	1,00				
Perdigao PN	0,09	0,11	0,11	1,00			
Petrobras PN	-0,15	-0,17	-0,13	0,01	1,00		
Ripasa PN	0,04	0,29	0,28	0,10	-0,02	1,00	
Sadia PN	0,33	0,23	0,25	0,34	-0,03	0,19	1,00
Sid Tubarao PN	0,20	0,22	0,25	0,11	0,14	0,25	0,24
Telemar PNB	-0,04	-0,17	0,05	-0,04	0,00	0,14	-0,04
Telesp ON	-0,01	0,01	0,14	-0,03	-0,02	0,16	-0,10
Usiminas PNA	0,19	0,31	0,43	0,16	-0,08	0,09	0,21
Vale PNA	-0,05	0,07	0,15	0,17	0,02	0,28	0,19
Votorantim PN	0,24	0,28	0,35	0,11	0,00	0,22	0,33
	Sid Tubarão PN	Telemar PNB	Telesp ON	Usiminas PNA	Vale PNA	Votorantim PN	
Acesita PN							
Ambev PN							
Aracruz PNB							
Arcelor ON							
Avipal ON							
Brasil Tele PN							
Confab PN							
Duratex PN							
Gerdau Met PN							
Klabin PN							
Perdigao PN							
Petrobras PN							
Ripasa PN							
Sadia PN							
Sid Tubarao PN	1,00						
Telemar PNB	0,09	1,00					
Telesp ON	0,11	0,05	1,00				
Usiminas PNA	0,41	0,01	0,11	1,00			
Vale PNA	0,31	0,01	0,10	0,04	1,00		
Votorantim PN	0,30	-0,06	-0,05	0,23	0,34	1,00	

Para a aplicação da metodologia proposta por McElroy e Burmeister (1988) foi ajustado o modelo apresentado na equação (2.12), com a suposição de que os erros apresentam correlação contemporânea, homoscedasticidade e não são serialmente correlacionados. Os resultados são apresentados nas Tabelas 2.10 e 2.11.

Pela Tabela 2.10 observa-se que somente o prêmio de risco do Índice Bovespa apresenta-se significativa (adotando um nível de significância de 5%). Para os demais índices foi testada a significância conjunta através do teste da razão de verossimilhanças, foi encontrado um p-valor igual a 0,748, logo não é rejeitada a hipótese de que os prêmios de risco são iguais a zero.

Tabela 2.10: Prêmios de riscos dos fatores macroeconômicos - 3ª Metodologia

	Coeficiente	Desvio Padrão	Estatística t	p-valor
Inflação	-0,028	0,218	-0,127	0,899
Risco de Crédito	-0,010	0,008	-1,255	0,210
Taxa de Juros	-1,293	1,195	-1,083	0,279
Produção Industrial	0,199	0,241	0,823	0,410
Índice Bovespa	0,018	0,009	1,988	0,047

Considerando os resultados apresentados na Tabela 2.11 verifica-se que o fator relacionado com o Risco de Crédito é importante para explicar os retornos de grande parte dos ativos analisados (Ambev PN, Aracruz PNB, Brasil Telecom PN, Klabin PN, Petrobras PN, Ripasa PN, Sid Tubarão PN, Vale PNA e Votorantim PN). O fator relacionado com Taxa de Juros é importante para Arcelor ON, Confab PN e Gerdau Met PN, o fator de Produção Industrial é importante para Acesita PN e Avipal ON e o fator de Inflação é importante somente para Ambev PN.

Tabela 2.11: Betas estimados e testes de significância - 3ª Metodologia

Ativo	Risco de Crédito	Taxa de Juros	Produção	Inflação	Ibovespa
Acesita PN	-0,011	-2,647	0,030	0,048	0,777
	0,156	0,051	0,043	0,314	0,000
Ambev PN	0,012	-0,071	0,001	0,051	0,609
	0,002	0,915	0,859	0,026	0,000
Aracruz PNB	0,099	0,978	-0,007	0,046	0,454
	0,000	0,306	0,547	0,166	0,000
Arcelor ON	-0,007	-2,657	0,012	0,042	0,209
	0,244	0,015	0,324	0,267	0,065
Avipal ON	0,002	-1,757	0,020	0,045	0,525
	0,684	0,060	0,049	0,172	0,000
Brasil Telecom PN	-0,011	0,322	0,001	0,026	1,053
	0,018	0,702	0,923	0,381	0,000
Confab PN	-0,008	-3,318	0,016	0,051	0,643
	0,258	0,006	0,224	0,227	0,000
Duratex PN	-0,009	-1,211	0,014	0,000	0,529
	0,111	0,200	0,170	0,989	0,000
Gerdau Met PN	0,002	-2,241	0,003	0,008	0,571
	0,724	0,021	0,783	0,803	0,000
Klabin PN	0,027	-0,975	0,010	0,075	0,549
	0,000	0,414	0,414	0,073	0,000
Perdigao PN	-0,011	-1,308	-0,008	-0,056	0,768
	0,180	0,375	0,616	0,279	0,000
Petrobras PN	-0,012	-0,823	0,002	-0,019	1,082
	0,001	0,201	0,826	0,396	0,000
Ripasa PN	0,066	-1,317	0,011	0,030	0,580
	0,000	0,252	0,378	0,462	0,000
Sadia PN	-0,002	-0,608	0,000	-0,015	0,587
	0,649	0,410	0,964	0,570	0,000
Sid Tubarao PN	0,023	-1,966	0,010	0,004	0,725
	0,000	0,066	0,362	0,911	0,000
Telemar PNB	-0,009	-0,255	0,003	0,004	0,966
	0,071	0,774	0,709	0,889	0,000
Telesp ON	0,007	-0,241	0,002	0,017	0,719
	0,152	0,760	0,846	0,543	0,000
Usiminas PNA	-0,003	-1,362	0,008	0,017	0,853
	0,610	0,180	0,405	0,643	0,000
Vale PNA	0,042	0,012	-0,007	-0,011	0,502
	0,000	0,988	0,413	0,679	0,000
Votorantim PN	0,033	-1,534	0,016	0,062	0,514
	0,000	0,113	0,129	0,067	0,000

A Figura 2.7 apresenta os resíduos do modelo, nota-se que os resíduos apresentam variabilidade razoavelmente constante.

Figura 2.7: Resíduos do modelo da 3ª Metodologia

2.4 Conclusão

Comparando os resultados dos modelos de fator único e multifatorial verifica-se que em alguns casos a entrada de outros fatores, além do índice de mercado, aumenta a porcentagem da variabilidade explicada. Na Figura

2.8, as barras claras correspondem aos $\mathcal{R}^2$ -ajustados do modelo multifatorial (sem considerar os prêmios de risco) e as barras pretas correspondem aos $\mathcal{R}^2$ do modelo de fator único, nota-se que houve um grande aumento da variabilidade explicada pelo modelo com a entrada dos fatores para os ativos Votorantim PN, Vale PNA, Ripasa PN e Aracruz PNB, e um aumento moderado para Klabin PN e Sid Tubarão PN. Para os demais ativos não se observa diferença expressiva do grau de explicação dos modelos.

Figura 2.8: Coeficientes de Determinação - Comparação dos modelos de fator único e multifatorial

Nos modelos apresentados foi feita a suposição de que as variâncias dos erros é constante para todo o período, e a partir dos resíduos obtidos pode-se observar que essa suposição está satisfeita. Além da suposição de homoscedasticidade, para os modelos de equações simultâneas é feita também a suposição de que as correlações entre os erros são invariantes no tempo.

Os mesmos modelos foram ajustados para retornos em um período maior, de 1988 a 2004, mas as suposições citadas acima não estavam satisfeitas pois durante esse período o cenário econômico do país mudou. Em meados de 1994 entrou em vigor o Plano Real, com isso houve uma mudança sensível no comportamento do mercado, logo o ajuste dos modelos para esse caso deveria considerar possíveis mudanças de comportamento.

Capítulo 3

Modelo Fundamental

3.1 Introdução

No presente capítulo é estudada a influência de fatores relacionados com as características das empresas nos retornos dos ativos. Os fatores fundamentais são obtidos a partir de características específicas e observáveis das empresas.

O objetivo desse capítulo é gerar os fatores fundamentais a partir dos atributos das empresas, identificar quais fatores influenciam os retornos e quantificar a variação dos retornos explicada pelos fatores.

A metodologia utilizada foi desenvolvida primeiramente por Bar Rosenberg e explorada por Grinold e Kahn (2000). Os modelos utilizados são chamados de modelos do tipo “BARRA” onde as características observáveis dos ativos são tratadas como os betas dos fatores. As realizações dos fatores são não observáveis e são estimadas através de regressões “cross-section”. A seguir são apresentadas as variáveis fundamentais utilizadas no presente estudo.

3.2 Variáveis fundamentais

Diversas características das empresas podem ser consideradas para a construção do modelo de fatores fundamentais, nesse estudo são utilizadas algumas variáveis contábeis (valor de mercado, valor contábil, razão entre lucro

e preço e alavancagem financeira) e variáveis de classificação.

3.2.1 Valor de mercado, Valor Contábil e Lucro/Preço

As variáveis valor de mercado, valor contábil e razão lucro/preço foram extraídas diretamente do Banco de Dados Econômica. Uma breve explicação dessas variáveis é apresentada a seguir, para maiores detalhes ver Gitman (2000).

- **Valor de mercado**

O valor de mercado de uma empresa é representado pela cotação das suas ações multiplicado pelo número total de ações que compõe seu capital. Em outras palavras, valor de mercado seria o valor que o mercado estaria disposto a pagar para adquirir a empresa.

- **Valor Contábil**

Valor contábil é o montante pelo qual o ativo está registrado no balanço patrimonial, líquido da respectiva depreciação acumulada e das provisões de futuras perdas.

A partir das duas variáveis anteriores obtém-se a variável valor de mercado/valor contábil, essa variável identifica se houve subestimação ou superestimação do valor das ações. A ação está subestimada se a razão valor de mercado/valor contábil é inferior a 1, caso contrário a ação está superestimada.

- **Lucro/Preço**

Razão entre o lucro obtido e o preço da ação no período.

3.2.2 Alavancagem financeira

A alavancagem financeira representa a relação entre o capital de uma empresa e a quantia que ela toma emprestado no mercado. Quanto mais alavancada mais endividada está a empresa e, portanto, maior é o risco de

ter problemas financeiros.

O Banco de Dados Econômica tem disponível apenas valores trimestrais da alavancagem financeira, logo foi necessária uma interpolação para estimar os dados mensais. A estimação dos valores mensais foi feita através do método LOWESS (“Locally Weighted Scatter Plot Smoothing”).

• Método LOWESS

Esse método, proposto originalmente por Cleveland (1979), é baseado no ajuste de regressões polinomiais locais ponderadas. Cada modelo local é estimado pelo método de mínimos quadrados ponderados, a ponderação das observações é proporcional à proximidade do ponto a ser ajustado.

O ajuste dos modelos locais depende de dois parâmetros, o parâmetro de suavização h e o grau do polinômio local d . O parâmetro h determina o número de observações utilizadas em cada ajuste do polinômio local, quanto maior o valor de h mais suavizada será a curva resultante.

Em geral, os polinômios ajustados em cada subconjunto são de primeira ou de segunda ordem. Utilizando um polinômio de grau zero o ajuste através do LOWESS torna-se uma média móvel ponderada.

A função de ponderação do LOWESS mais utilizada é a função tricúbica

$$T(u) = (1 - |u|^3)^3 I(|u| < 1),$$

no entanto, outras funções que satisfazem as propriedades descritas por Cleveland (1979) também podem ser utilizadas.

O peso w_k para um ponto específico (x_k, y_k) no subconjunto dos dados é obtido por

$$w_k = T\left(\frac{x_i - x_k}{d_i}\right),$$

onde

- x_i é o valor da variável explicativa do ponto a ser estimado;
- x_k é o valor da variável explicativa do ponto para o qual está sendo determinado o peso;
- d_i é a distância entre o ponto x_i e o ponto mais distante do subconjunto em relação à variável explicativa.

Nota-se que esses pesos são nulos para os pontos fora do subconjunto em questão e o ponto a ser suavizado apresenta o maior peso na estimação.

As séries mensais da alavancagem financeira das empresas selecionadas foram geradas através do método LOWESS a partir dos dados trimestrais. O parâmetro h utilizado foi 0,15 e os polinômios locais são de primeira ordem. Como exemplo, a Figura 3.1 apresenta o gráfico da alavancagem para a empresa Klabin.

Figura 3.1: Alavancagem Financeira Klabin: (a) Dados trimestrais observados e (b) Dados mensais estimados

As séries mensais da alavancagem para todas as empresas estudadas são apresentadas no Apêndice C.

3.2.3 Variáveis de classificação

As variáveis de classificação são utilizadas para classificar os ativos de acordo com alguma característica. Por exemplo, pode-se criar uma variável para identificar se os ativos pertencem a determinada categoria de empresas:

$$\text{Valor da variável para o ativo } i = \begin{cases} 1, & \text{se o ativo } i \text{ pertence à categoria,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.3 Geração dos fatores fundamentais - Modelos tipo “BARRA”

Nos modelos tipo “BARRA” as características das empresas são tratadas como os betas dos fatores, como mencionado anteriormente são consideradas no presente estudo características de natureza contábil e de classificação.

3.3.1 Modelo tipo “BARRA” de fator único

No modelo de fator único é gerado somente um fator relacionado a uma característica específica dos ativos. Considerando o modelo (1.1) com apenas um fator, na forma de regressões “cross-section”, tem-se

$$\mathbf{R}_t = \alpha_t \mathbf{1}_N + \beta f_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

onde

- $\mathbf{R}_t$ é o vetor $N \times 1$ de retornos dos ativos no período t ;
- $\mathbf{1}_N$ é um vetor $N \times 1$ de uns;
- β é o vetor $N \times 1$ dos valores observados de um atributo específico das empresas;
- f_t é a realização não observável do fator;
- ε_t é um vetor $N \times 1$ dos erros, com média zero e matriz de covariâncias $\mathbf{D}$ para qualquer t . A matriz $\mathbf{D}$ é diagonal com os termos σ_i^2 ao longo da diagonal, logo os erros podem ser heteroscedásticos e não apresentam correlação entre os ativos.

Assumindo que

- $Var(f_t) = \sigma_f^2$;
- $Cov(f_t; \varepsilon_{it}) = 0$, para todo i, t ;
- $Var(\varepsilon_{it}) = \sigma_i^2$, para qualquer t , com $i=1, \dots, N$.

O parâmetro a ser estimado é a realização do fator em cada período t . Os termos f_t podem ser estimados pelo método de mínimos quadrados ordinários

$$\hat{f}_{t,MQO} = (\beta' \beta)^{-1} \beta' R_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

O estimador acima é não viciado mas não é eficiente devido ao fato de que os erros são heteroscedásticos. Pode-se utilizar então o método de mínimos quadrados ponderados para obter o estimador eficiente de f_t . Assumindo que as variâncias σ_i^2 são conhecidas, o estimador é dado por

$$\hat{f}_{t,MQP} = (\beta' D^{-1} \beta)^{-1} \beta' D^{-1} R_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Como as variâncias σ_i^2 não são conhecidas, o estimador apresentado acima não pode ser utilizado. Uma alternativa é o método de mínimos quadrados ponderados factíveis que utiliza uma estimativa da matriz de covariâncias. O novo estimador é dado por

$$\hat{f}_{t,MQPF} = (\beta' \widehat{D}^{-1} \beta)^{-1} \beta' \widehat{D}^{-1} R_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.1)$$

onde os elementos da diagonal de $\widehat{D}^{-1}$ são estimados a partir dos resíduos do modelo ajustado por mínimos quadrados ordinários da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_{it,MQO} - \bar{\varepsilon}_{i,MQO})^2, \quad i = 1, \dots, N, \\ \bar{\varepsilon}_{i,MQO} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{it,MQO}. \end{aligned}$$

Se a variável utilizada for uma variável de classificação, cada realização do fator corresponde ao retorno médio das empresas daquela categoria. Como o ajuste é realizado para todos os períodos, é gerada a série dos retornos médios das empresas da categoria em questão.

3.3.2 Modelo tipo “BARRA” de fatores dos tipos de indústrias

O modelo tipo “BARRA” de fatores dos tipos de indústrias pode ser considerado um caso especial dos modelos fundamentais com K fatores. Para

esse modelo são geradas diversas variáveis de classificação para identificar os tipos de indústrias ao qual as empresas estudadas pertencem.

Os termos de sensibilidade β_{ki} em (1.1) nesse caso são invariantes no tempo e dados por

$$\beta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{se o ativo } i \text{ pertence à categoria } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo, apresentado na forma de regressões “cross-section” para cada período t , é dado por

$$\mathbf{R}_t = \beta_1 f_{1t} + \dots + \beta_K f_{Kt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.2)$$

onde

- $\mathbf{R}_t$ é um vetor $N \times 1$ dos retornos no período t ;
- β_k é o vetor $N \times 1$ dos betas do fator k ;
- f_{kt} é a realização do fator k no período t ;
- ε_t é um vetor $N \times 1$ dos erros, com média zero e matriz de covariâncias $\mathbf{D}$. A matriz $\mathbf{D}$ é diagonal com os termos σ_i^2 ao longo da diagonal, logo os erros podem ser heteroscedásticos e não apresentam correlação entre os ativos.

(3.2) pode ser representado na forma matricial

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

onde

- $\mathbf{B}$ é a matriz $N \times K$ dos betas dos fatores;
- $\mathbf{f}_t$ é o vetor das realizações dos fatores com matriz de covariâncias Ω_f .

Como as indústrias são mutuamente exclusivas, tem-se

$$\beta'_i \beta_k = \begin{cases} N_k, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde N_k é o número de empresas do tipo k .

Os termos $\mathbf{f}_t$ de (3.3) podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados ordinários

$$\hat{\mathbf{f}}_{t,MQO} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}'\mathbf{R}_t,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_{1t,MQO} \\ \hat{f}_{2t,MQO} \\ \vdots \\ \hat{f}_{Kt,MQO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} R_{it}^1 \\ \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} R_{it}^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{N_K} \sum_{i=1}^{N_K} R_{it}^K \end{bmatrix},$$

onde R_{it}^k é o retorno do ativo i que pertence a indústria k . O termo $\hat{f}_{kt}$ corresponde ao retorno médio das empresas do tipo k no período t .

Como no modelo de fator único, o estimador obtido por mínimos quadrados ordinários não é eficiente. Pode-se utilizar o método de mínimos quadrados ponderados factíveis para obter o estimador eficiente

$$\hat{\mathbf{f}}_{t,MQP} = (\mathbf{B}_t' \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{B}_t)^{-1} \mathbf{B}_t' \widehat{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{R}_t, \quad (3.4)$$

onde os elementos da diagonal de $\widehat{\mathbf{D}}$ são estimados a partir dos resíduos do modelo ajustado por mínimos quadrados ordinários da seguinte forma

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_{it,MQO} - \bar{\varepsilon}_{i,MQO})^2, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\bar{\varepsilon}_{i,MQO} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{it,MQO}.$$

Pode-se estimar a matriz de covariâncias dos fatores a partir das séries das estimativas das realizações dos fatores

$$\hat{\Omega}_{f,MQP} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\hat{\mathbf{f}}_{t,MQP} - \bar{\mathbf{f}}_{MQP}) (\hat{\mathbf{f}}_{t,MQP} - \bar{\mathbf{f}}_{MQP})'$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{MQP} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{f}}_{t,MQP}.$$

Logo a matriz de covariâncias dos retornos dos ativos pode ser estimada por

$$\widehat{\Omega}_{MQP} = \mathbf{B} \widehat{\Omega}_{f,MQP} \mathbf{B}' + \widehat{\mathbf{D}}_{MQP}.$$

Uma alternativa é utilizar um modelo de equações simultâneas (SUR), nesse caso o modelo (3.3) é representado por

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{E},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_T \end{bmatrix}_{(NT \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}_{(NT \times NK)} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}_{(NK \times 1)} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}_{(NT \times 1)}.$$

A matriz de covariância dos erros é dada por

$$\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

O estimador de $\mathbf{F}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{B})' (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{B}) \right]^{-1} (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{B})' (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{D})^{-1} \mathbf{R} \\ &= \left[\mathbf{I}_T \otimes (\mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \right] \mathbf{R} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}_{1,MQP} \\ \widehat{\mathbf{f}}_{2,MQP} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{f}}_{T,MQP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_1 \\ (\mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_T \end{bmatrix}.$$

São geradas então as séries dos K fatores para os T períodos. O mesmo modelo pode ser utilizado não somente com variáveis de classificação mas também para quaisquer outros atributos das empresas.

3.4 Aplicação

Para ilustrar os métodos apresentados acima, os modelos tipo “BARRA” foram utilizados para o estudo da influência dos fatores fundamentais nos retornos de 136 ativos observados no período de 41 meses (conjunto de dados 2). Optou-se pela utilização desses dados, e não o primeiro conjunto de dados, pois são ajustados modelos de regressão “cross-section” nesses modelos, o que necessita de um número maior de ativos em cada período. No Apêndice A, Figura A.2 a A.7, são apresentadas as séries de retornos desses 136 ativos.

3.4.1.1 Modelo tipo “BARRA” - Fator Único

Para a aplicação do modelo de fator único foi gerada uma variável de classificação que identifica as empresas que pertencem ao setor de Siderurgia e Metalurgia. As realizações do fator são estimadas utilizando o método de mínimos quadrados factíveis (3.1).

Os coeficientes de determinação são extremamente baixos, em média esse fator explica 1,6% da variabilidade dos retornos. As realizações do fator são apresentadas na Figura 3.2, além dos valores das realizações foram calculados os limites para o teste de significância.

Adotando um nível de significância de 5%, os limites foram calculados da seguinte forma

$$\text{Limite inferior} = 0 + t_{N-2}^{0,025} \times (\text{desvio padrão de } \hat{f}_t),$$

$$\text{Limite superior} = 0 + t_{N-2}^{0,975} \times (\text{desvio padrão de } \hat{f}_t),$$

onde $t_{N-2}^{0,025}$ e $t_{N-2}^{0,975}$ correspondem aos percentis de ordem 0,025 e 0,975 da distribuição t de student com $N - 2$ graus de liberdade (nesse caso, $N = 136$).

Nota-se que em poucos meses as estimativas das realizações do fator estão fora do intervalo calculado, logo em grande parte dos meses não existe diferença significativa entre os retornos médios das empresas de Siderurgia e Metalurgia e os retornos médios das outras empresas.

Figura 3.2: Fator relacionado com o setor de Siderurgia e Metalurgia

3.4.1.2 Modelo “BARRA”- Fatores dos tipos de indústrias

Nesse estudo, os tipos de indústrias correspondem à classificação das empresas disponibilizada pela Bovespa. As empresas da amostra selecionada estão divididas em 10 tipos de indústrias: Bebidas e Alimentos, Energia Elétrica, Mineração, Papel e Celulose, Petróleo e Gás, Química, Siderurgia e Metalurgia, Telecomunicações, Têxtil e Veículos e Peças. Foram geradas então 11 variáveis de classificação, uma para cada tipo de indústria acima e a última para as indústrias do tipo “outros”.

A Figura 3.3 apresenta os Coeficientes de Determinação para os 41 modelos, em média as variáveis de classificação explicam 14,13% da variabilidade dos retornos.

Na Figura 3.4 são apresentados os gráficos das realizações dos fatores obtidos a partir de (3.4) e os limites para os testes de significância. Observa-se que as realizações dos fatores relacionados com as empresas de Telecomunicações (8), Energia Elétrica (2) e Siderurgia e Metalurgia (7) são significantes em um maior número de meses.

Uma outra observação está relacionada com o fato de que as realizações dos fatores apresentam valores significantes positivos e negativos. Logo, con-

Figura 3.3: Coeficientes de Determinação - Fatores dos tipos de indústrias

siderando todo o período, não se pode afirmar que um determinado setor apresenta retornos médios maiores que os demais.

3.4.1.3 Modelo “BARRA”- Fatores contábeis

O mesmo modelo utilizado para a geração dos fatores dos tipos de indústrias foi utilizado para gerar os fatores relacionados com as variáveis: valor de mercado, valor de mercado/valor contábil, lucro/preço e alavancagem financeira. Nesse caso os termos β_k de (3.2), os vetores de classificação formados por zeros e uns, são substituídos pelos termos β_{kt} variantes no tempo, esses termos contêm os valores da variável k para todos os ativos no instante t . Logo, para o modelo de fatores contábeis a equação (3.2) pode ser reescrita

$$\mathbf{R}_t = \beta_{1t}f_{1t} + \dots + \beta_{Kt}f_{Kt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Na Figura 3.5 são apresentados os Coeficientes de Determinação para cada mês. Verifica-se que os Coeficientes de Determinação são baixos, na maior parte dos meses estão abaixo de 10%. Em média 6, 50% da variabilidade dos retornos é explicada pelas variáveis contábeis selecionadas.

Figura 3.4: Fatores relacionados com os tipos de indústrias: (1) Bebidas e Alimentos, (2) Energia Elétrica, (3) Mineração, (4) Papel e Celulose, (5) Petróleo e Gás, (6) Química, (7) Siderurgia e Metalurgia, (8) Telecomunicações, (9) Têxtil e (10) Veículos e Peças.

Pela Figura 3.6 observa-se que as realizações dos fatores não são significantes na maior parte dos meses. Por esse resultado conclui-se que as variáveis contábeis não são importantes para explicar os retornos das ações das empresas selecionadas.

Figura 3.5: Coeficientes de Determinação - Fatores contábeis

Foram apresentados os resultados do modelo de fatores contábeis a partir de um ajuste onde foram considerados os valores presentes das variáveis, ou seja, no ajuste do modelo de regressão “cross-section” para um determinado mês t foram utilizados os valores das variáveis contábeis correspondentes ao mês t . Em um outro ajuste foram utilizados, para um determinado mês t , os valores das variáveis contábeis conhecidos no início do mês. Por exemplo, as empresas divulgam a alavancagem financeira de um trimestre, em média, após 90 dias do final do trimestre em questão, logo o valor mais atualizado da alavancagem financeira de uma empresa no mês 8 é o valor correspondente ao primeiro trimestre do ano.

Esse ajuste tinha como objetivo verificar se o conhecimento do último valor disponível das variáveis contábeis influenciam o comportamento do investidor e, conseqüentemente, os retornos dos ativos. Os resultados obtidos foram muito parecidos com os resultados apresentados considerando os valores presentes.

Figura 3.6: Fatores relacionados com as variáveis contábeis: (1) Lucro/Preço, (2) Valor de mercado, (3) Valor de mercado/Valor Contábil e (4) Alavancagem Financeira.

3.5 Conclusão

Pelos resultados observa-se que a variabilidade dos retornos explicada pelos modelos apresentados é muito baixa, além disso, de forma geral, em grande parte dos períodos os fatores não são significantes. Conclui-se então que as características das empresas não são importantes para explicar o comportamento dos retornos dos ativos selecionados.

O modelo de fatores dos tipos de indústria, apesar de explicar em média apenas 14,13% da variabilidade dos retornos, apresenta resultados melhores que o modelo de fatores contábeis.

Capítulo 4

Modelo de Fatorial Estatístico

4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foi analisada a influência de fatores macroeconômicos e fundamentais sob os retornos dos ativos, no presente capítulo é estudada a influência dos fatores estatísticos. No modelo fatorial estatístico os fatores não são diretamente observáveis e são extraídos dos retornos observáveis utilizando métodos estatísticos como, por exemplo, análise fatorial.

Como nos capítulos anteriores, o objetivo é identificar os fatores que podem explicar os retornos dos ativos selecionados, quantificar a variação dos retornos explicada por esses fatores, estimar os betas dos fatores e os riscos específicos de cada ativo.

Análise fatorial tradicional é utilizada quando o tamanho da série temporal observada T é maior que o número de ativos N . Quando $T < N$, a análise assintótica de componentes principais (Connor e Korajczyk, 1986) é a técnica mais apropriada.

4.2 Análise Fatorial

A análise fatorial¹ tem como objetivo descrever a estrutura de dependência existente em um conjunto de variáveis em termos de quantidades não observáveis, os fatores comuns. A motivação da construção do modelo é agrupar variáveis com correlações elevadas entre si e que apresentam baixas correlações com as variáveis dos outros grupos. Os fatores são construídos de forma a representar esses grupos de variáveis.

Essa técnica é utilizada quando se deseja mensurar uma característica que não pode ser medida diretamente, como por exemplo, a inteligência. Por se tratar de um conceito abstrato, a inteligência não pode ser medida através de uma variável mas, a partir de um conjunto de variáveis relacionadas, pode-se obter um fator que a represente. De forma geral, os fatores determinados na análise fatorial podem representar características não observáveis dos indivíduos.

4.2.1 Modelo de Análise Fatorial Ortogonal

O modelo de análise fatorial será aplicado ao estudo do comportamento dos retornos. Seja $\mathbf{R}_t$ um vetor dos retornos de N ativos com média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Omega}$, o modelo de análise fatorial na forma matricial é dado por

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.1)$$

onde

- $\mathbf{R}_t$ é o vetor ($N \times 1$) dos retornos dos ativos no período t ;
- $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor ($N \times 1$) dos retornos médios;
- $\mathbf{B}$ é a matriz ($N \times K$) das cargas fatoriais ou os betas dos fatores;
- $\mathbf{f}_t$ é o vetor ($K \times 1$) das realizações dos fatores comuns ou fatores estatísticos;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é o vetor ($N \times 1$) dos erros ou fatores específicos.

¹para maiores detalhes sobre análise fatorial, componentes principais e outras técnicas multivariadas ver Johnson e Wishern (1998).

Suposições:

$$(S1) \ E[f_t] = 0 \text{ e } Var[f_t] = \mathbf{I}_K;$$

$$(S2) \ E[\varepsilon_t] = 0 \text{ e } Var[\varepsilon_t] = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix};$$

$$(S3) \ Cov[f_t; \varepsilon_t] = 0, \text{ para qualquer } t.$$

4.2.2 Cargas fatoriais ou betas dos fatores

As cargas fatoriais podem ser interpretadas a partir da covariância entre os fatores e os retornos dos ativos. Considere a covariância existente entre o retorno R_{it} e o fator f_{jt} para um determinado período t ,

$$Cov[R_{it}; f_{jt}] = Cov[\mu_i + \beta_{1i}f_{1t} + \beta_{2i}f_{2t} + \dots + \beta_{ji}f_{jt} + \dots + \varepsilon_{it}; f_{jt}].$$

Pelas suposições (S1) e (S3) apresentadas acima tem-se

$$Cov[R_{it}; f_{jt}] = Cov[\beta_{ji}f_{jt}; f_{jt}] = \beta_{ji},$$

ou seja, as cargas fatoriais ou os betas dos fatores são as covariâncias entre os retornos e os fatores.

4.2.3 Comunalidade e especificidade

A matriz de covariâncias dos retornos Ω pode ser decomposta em

$$\Omega = \mathbf{B}\mathbf{B}' + \mathbf{D}, \quad (4.2)$$

de forma que os K fatores estão presentes na composição das variâncias dos retornos e das covariâncias entre eles. A variância do retorno do ativo i pode ser expressa por

$$\sigma_{Ri}^2 = Var[R_{it}] = \sum_{j=1}^K \beta_{ij}^2 + \sigma_i^2.$$

Por esta relação pode-se verificar que $h_i = \sum_{j=1}^K \beta_{ij}^2$ representa a parcela da variância de R_{it} explicada pelos fatores comuns e σ_i^2 é a parcela não explicada pelos fatores. Denomina-se *comunalidade* a parcela da variância explicada pelos fatores e *especificidade* a parcela não explicada.

4.2.4 Estimação

Os métodos mais importantes para obtenção dos fatores na análise fatorial são: método da máxima verossimilhança e o método das componentes principais. O método da máxima verossimilhança pode ser utilizado sob a suposição de normalidade conjunta, enquanto que o método das componentes principais não requer qualquer suposição acerca da distribuição dos dados.

4.2.4.1 Método da Máxima Verossimilhança

Por esse método são estimadas primeiramente a matriz das cargas fatoriais $\mathbf{B}$ e a matriz de covariância dos erros $\mathbf{D}$, em seguida são obtidas as estimativas das realizações dos fatores.

Os estimadores de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ são obtidos através da maximização da função de verossimilhança sob a suposição de normalidade conjunta e independência temporal dos retornos. A suposição de independência temporal não estaria satisfeita para retornos diários mas, para dados mensais, por estes apresentarem correlação serial pequena ou nula, considera-se que essa suposição está satisfeita.

Sob as suposições mencionadas acima, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{TN/2}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}|^{T/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{R}_t - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

observa-se que essa função depende de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$, dado que $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}\mathbf{B}' + \mathbf{D}$. Os estimadores $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$ são obtidos através de métodos numéricos pois não existe uma solução explícita.

Dadas as matrizes $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$, para cada período t , as realizações dos fatores $\mathbf{f}_t$ são obtidas pela equação

$$\mathbf{R}_t = \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{f}_t + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \quad t = 1, \dots, T,$$

onde $\hat{\mu}$ é o vetor das médias amostrais dos retornos. De acordo com a suposição (S2) os erros são heteroscedásticos, logo $\mathbf{f}_t$ deve ser estimado pelo método de mínimos quadrados ponderados, neste caso o estimador é dado por

$$\hat{\mathbf{f}}_{t,MQG} = \left(\hat{\mathbf{B}}' \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{B}}' \hat{\mathbf{D}}^{-1} (\mathbf{R}_t - \hat{\mu}). \quad (4.3)$$

Com a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ pode-se estimar a comunalidade dos retornos do ativo i

$$\hat{h}_i = \hat{\beta}_{i1}^2 + \hat{\beta}_{i2}^2 + \dots + \hat{\beta}_{iK}^2 = \sum_{j=1}^K \hat{\beta}_{ij}^2, \quad i = 1, \dots, N,$$

e a proporção da variabilidade total explicada pelo j -ésimo fator

$$\frac{\sum_{i=1}^N \hat{\beta}_{ij}^2}{\sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{Ri}^2}, \quad j = 1, \dots, K,$$

onde $\hat{\sigma}_{Ri}$ é o desvio padrão amostral dos retornos do ativo i .

A matriz de covariâncias dos retornos pode ser estimada por

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}' + \hat{\mathbf{D}}.$$

4.2.4.2 Método das Componentes Principais

O método das componentes principais, quando utilizado de forma isolada, tem como objetivo a redução da dimensionalidade dos dados e a criação de combinações interpretáveis das variáveis. A idéia principal é transformar linearmente um conjunto de variáveis em um conjunto de menor dimensão, com variáveis não correlacionadas e que contenha uma parcela substancial das informações do conjunto original.

Seja $\mathbf{R}_t$ o vetor dos N retornos no período t com matriz de covariâncias Ω , considere as seguintes combinações lineares

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{1t} &= l_1' \mathbf{R}_t = l_{11} R_{1t} + l_{21} R_{2t} + \dots + l_{N1} R_{Nt}, \\ \mathbf{Y}_{2t} &= l_2' \mathbf{R}_t = l_{21} R_{1t} + l_{22} R_{2t} + \dots + l_{N2} R_{Nt}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}_{Nt} = l'_N \mathbf{R}_t = l_{N1}R_{1t} + l_{N2}R_{2t} + \dots + l_{NN}R_{Nt}.$$

Logo,

$$Var[\mathbf{Y}_{it}] = l'_i \mathbf{\Omega} l_i \text{ e } Cov[\mathbf{Y}_{it}; \mathbf{Y}_{jt}] = l'_i \mathbf{\Omega} l_j.$$

Cada combinação linear apresentada acima representa uma componente principal, tal que, a primeira componente apresenta a maior variância; a segunda componente apresenta a segunda maior variância e é não correlacionada com a primeira; a terceira componente apresenta a terceira maior variância e é não correlacionada com as duas primeiras e assim por diante. Para eliminar a indeterminação gerada pela maximização das variâncias, os vetores l_i 's devem ter módulo unitário. Desta forma, tem-se:

- A primeira componente principal Y_{1t} é a combinação linear $l'_1 \mathbf{R}_t$ que maximiza $Var(l'_1 \mathbf{R}_t)$, com a restrição $l'_1 l_1 = 1$;
- A segunda componente principal Y_{2t} é a combinação linear $l'_2 \mathbf{R}_t$ que maximiza $Var(l'_2 \mathbf{R}_t)$, com as restrições $l'_2 l_2 = 1$ e $Cov[l'_1 \mathbf{R}_t, l'_2 \mathbf{R}_t] = 0$;

Da mesma forma para o k -ésimo componente:

- A k -ésima componente principal Y_{kt} é a combinação linear $l'_k \mathbf{R}_t$ que maximiza $Var(l'_k \mathbf{R}_t)$, com as restrições $l'_k l_k = 1$ e $Cov[l'_i \mathbf{R}_t, l'_k \mathbf{R}_t] = 0$, para todo $i < k$.

Pode-se demonstrar que os vetores l_i 's que satisfazem as condições acima são os autovetores ortogonais padronizados da matriz $\mathbf{\Omega}$ e os autovalores correspondentes λ_i 's são as variâncias das componentes. Os autovalores são ordenados para que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$.

A variabilidade total dos dados não é alterada com a transformação proposta para a construção das componentes principais, isto é

$$\sum_{j=1}^N \sigma_{Rj}^2 = \sigma_{R1}^2 + \sigma_{R2}^2 + \dots + \sigma_{RN}^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = \sum_{j=1}^N \lambda_j.$$

Com isso pode-se determinar facilmente a proporção da variância explicada pelo k -ésimo fator

$$\frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^N \lambda_j},$$

ou a proporção da variabilidade explicada pelos k primeiros fatores

$$\frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{\sum_{j=1}^N \lambda_j}.$$

As componentes principais obtidas podem ser utilizadas como os fatores da análise fatorial. A realização estimada do fator k para um determinado período t é uma combinação linear dos retornos

$$\hat{f}_{kt} = l'_k \mathbf{R}_t, \quad \text{para } k = 1, \dots, K \text{ e } t = 1, \dots, T.$$

A partir das estimativas dos fatores, os termos β_i e σ_i^2 podem ser estimados através de regressões em séries temporais, para cada ativo i , pela equação

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i \hat{f}_t + \varepsilon_{it}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Com as estimativas das cargas fatoriais pode-se estimar a comunalidade dos retornos do ativo i

$$\hat{h}_i = \hat{\beta}_{i1}^2 + \hat{\beta}_{i2}^2 + \dots + \hat{\beta}_{iK}^2 = \sum_{j=1}^K \hat{\beta}_{ij}^2, \quad i = 1, \dots, N.$$

A matriz de covariâncias dos retornos pode ser estimada por

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{B}} \hat{\Omega}_F \hat{\mathbf{B}}' + \hat{\mathbf{D}},$$

onde

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}'_1 \\ \hat{\beta}'_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}'_N \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \hat{\sigma}_N^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{\Omega}_F = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\hat{\mathbf{f}}_t - \bar{\mathbf{f}})(\hat{\mathbf{f}}_t - \bar{\mathbf{f}})',$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{\mathbf{f}}_t).$$

Como as componentes principais são ortonormais $\hat{\Omega}_F = \mathbf{I}_K$, logo o estimador de Ω pode ser reduzido para

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}' + \hat{\mathbf{D}}.$$

4.2.5 Rotação dos fatores

A formulação do modelo de análise fatorial apresenta um resultado interessante com relação à matriz $\mathbf{B}$. Seja $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}\mathbf{H}$, onde $\mathbf{H}$ é uma matriz ortogonal², tem-se que

$$\mathbf{B}^*\mathbf{B}^{*'} + \mathbf{D} = (\mathbf{B}\mathbf{H})(\mathbf{B}\mathbf{H})' + \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{H}'\mathbf{B}' + \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{B}' + \mathbf{D}.$$

Portanto, se $\mathbf{B}$ satisfaz a relação apresentada em (4.2), existem então infinitas matrizes que também satisfazem a relação.

Esse resultado, em termos práticos, permite a criação de novos fatores, os fatores rotacionados. Em muitos casos os fatores encontrados em uma solução inicial não são facilmente interpretáveis, mas, pelo resultado apresentado, é possível propor rotações que geram soluções mais fáceis de serem interpretadas.

Um dos tipos mais utilizados de rotação é a rotação Varimax, nesse método é proposta uma transformação que maximiza a correlação de cada variável com apenas 1 fator. Um outro tipo de rotação também muito utilizado é a rotação Quartimax, esse método minimiza o número de fatores necessários para explicar cada variável. Existem inúmeros outros métodos para rotação de fatores disponíveis nos pacotes estatísticos, para detalhes ver Rummel (1970).

4.2.6 Determinação do número de fatores

O número de fatores a serem utilizados no modelo é uma parte muito importante da análise. A escolha equivocada do número de fatores pode ocasionar a perda de informação importante, ou a inclusão de algum ruído.

Existem vários critérios para determinação do número de fatores na literatura, para maiores detalhes ver Jolliffe (2002). A seguir são apresentados alguns critérios.

²ou seja, $\mathbf{H}\mathbf{H}' = \mathbf{H}'\mathbf{H} = \mathbf{I}$

4.2.6.1 Porcentagem da variabilidade explicada

O número de fatores é determinado de modo que o modelo explique uma porcentagem pré-estabelecida da variabilidade total dos dados. Por exemplo, deseja-se explicar 70% da variabilidade, logo o número de fatores será o mínimo necessário para que isso aconteça.

4.2.6.2 Scree plot

Esse critério utiliza uma representação gráfica dos autovalores para identificar os fatores que contribuem para a explicação da variabilidade do modelo. O gráfico utilizado recebe o nome de scree-plot (Figura 4.1), no gráfico cada ponto representa, no eixo das ordenadas, o autovalor do componente correspondente. Se a partir de um determinado componente j a linha se torna horizontal ao eixo das abscissas significa que o componente j e os demais não acrescentam explicação e não devem ser incluídos no modelo.

Figura 4.1: Exemplo de Scree-plot

No exemplo, a partir do quinto componente os autovalores apresentam-se muito próximos portanto deveriam ser utilizados 4 fatores no modelo.

4.2.6.3 Teste da Razão de Verossimilhanças

Um teste pode ser utilizado para verificar o número de fatores quando a estimação é feita pelo método da máxima verossimilhança. Trata-se do teste da razão das verossimilhanças que considera a hipótese nula $H_0 : \Omega = \mathbf{B}\mathbf{B}' + \mathbf{D}$ contra a hipótese alternativa de desigualdade. A rejeição da hipótese nula indica que os K fatores presentes no modelo não são suficientes para descrever a estrutura de covariâncias dos retornos, logo o esse número de fatores é insuficiente.

A estatística do teste, modificada para melhorar a performance em amostras pequenas, é dada por

$$RV(K) = - \left(T - 1 - \frac{1}{6}(2N + 5) - \frac{2}{3}K \right) \ln \left(\frac{|\hat{\Omega}|}{|\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}' + \hat{\mathbf{D}}|} \right), \quad (4.4)$$

onde

$$\hat{\Omega} = \sum_{t=1}^T \frac{(\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})(\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})'}{T}$$

e $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$ são as estimativas de máxima verossimilhança de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$.

Sob a hipótese nula, a estatística do teste tem distribuição qui-quadrado com $\frac{1}{2}((N - K)^2 - N - K)$ graus de liberdade. Denomina-se K^* o número de fatores indicado para o modelo onde $K^* = \inf\{K \text{ tal que } H_0 \text{ não é rejeitada}\}$.

4.2.6.4 Critério de Kaizer

Esse critério propõe considerar apenas os fatores com autovalores superiores à média das variâncias dos retornos estudados. Os fatores com autovalores menores que esta média devem ser descartados pois apresentam baixo grau de explicação.

Lambert et al (1990) propuseram um novo critério para determinar o número de fatores baseado no critério de Kaizer. No novo critério é utilizado o método de reamostragem Bootstrap para a geração de intervalos de confiança para os autovalores, se o intervalo de confiança de um autovalor encontra-se abaixo da média das variâncias o fator correspondente deve ser descartado.

Um breve resumo sobre o método Bootstrap e a construção de intervalos

de confiança Bootstrap é apresentado a seguir, maiores detalhes podem ser encontrados em Efron e Tibshirani (1993).

Bootstrap

O método Bootstrap tem como idéia básica a reamostragem de um conjunto de dados para estimar o viés e a variabilidade de estimadores. Com isso é possível construir intervalos de confiança e testar a significância de parâmetros desconhecidos. Em particular, no critério proposto por Lambert et al (1990), esse método é utilizado para construção de intervalos de confiança dos autovalores da matriz Ω .

A partir da amostra original de tamanho T são geradas B pseudo-amostras também de tamanho T através de uma amostragem aleatória simples com reposição. As pseudo-amostras, também chamadas de amostras bootstrap, são utilizadas para a estimação do parâmetro de interesse. Na prática utiliza-se de 50 a 200 amostras bootstrap. Como resultado são geradas B estimativas do parâmetro de interesse, essas estimativas também são chamadas de réplicas bootstrap.

Em geral, o uso do método de reamostragem bootstrap em séries temporais deve considerar a correlação serial entre observações. Nesse caso é ajustado um modelo para a série e os resíduos deste modelo são reamostrados. Para o presente estudo, devido ao fato de que os retornos mensais dos ativos apresentam correlação serial fraca, a reamostragem foi realizada diretamente nos retornos.

Considerando que o parâmetro de interesse é o k -ésimo autovalor, pode-se estimar o erro padrão do estimador $\hat{\lambda}_k$ a partir de uma amostra original $\mathbf{R}$ de tamanho T . A estimação é realizada através dos seguintes passos:

- Passo 1: Selecionar B amostras bootstrap $\mathbf{R}^{*1}, \mathbf{R}^{*2}, \dots, \mathbf{R}^{*B}$ de tamanho T a partir de uma amostra $\mathbf{R}$;
- Passo 2: Calcular a réplica bootstrap $\hat{\lambda}_k^*(b)$ para cada amostra bootstrap;
- Passo 3: Estimar o erro padrão do estimador $\hat{\lambda}_k$ através do desvio padrão amostral das B réplicas:

$$\widehat{ep} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\lambda}_k^*(b) - \hat{\lambda}_k^*(\cdot))^2},$$

onde

$$\hat{\lambda}_k^*(\cdot) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\lambda}_k^*(b).$$

Adotando um nível de confiança $\gamma\%$, o intervalo de confiança para λ_k pode ser obtido por

$$IC(\lambda_k; \gamma\%) = \left[\hat{\lambda}_k + t_{B-1}^\alpha \cdot \widehat{ep}; \hat{\lambda}_k - t_{B-1}^\alpha \cdot \widehat{ep} \right],$$

onde $\hat{\lambda}_k$ é a estimativa do parâmetro calculada com a amostra original e t_{B-1}^α corresponde ao percentil de ordem $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ da distribuição t de student com $B - 1$ graus de liberdade.

4.3 Análise Assintótica de Componentes Principais

A análise assintótica de componentes principais, proposta e desenvolvida por Connor e Korajczyk (1986), é utilizada quando o número de ativos é maior que o tamanho da série temporal observada ($N > T$).

A análise de componentes principais tradicional é baseada na matriz de covariâncias amostral

$$\hat{\Omega}^T = \frac{1}{T} \mathbf{R} \mathbf{R}',$$

onde $\mathbf{R}$ é a matriz $N \times T$ dos retornos dos ativos. Por outro lado a análise assintótica de componentes principais é baseada na matriz de covariâncias

$$\hat{\Omega}^N = \frac{1}{N} \mathbf{R}' \mathbf{R}.$$

Uma das vantagens desse método é que quando o número de ativos N é muito maior que o número de períodos T são calculados apenas os T autovetores da matriz $\hat{\Omega}^T$ enquanto que na análise de componentes principais tradicional são calculados os N autovetores da matriz $\hat{\Omega}^N$.

Connor e Korajczyk (1986) demonstram que as K primeiras componentes principais da matriz $\hat{\Omega}^N$ são aproximadamente equivalentes aos K fatores da

análise fatorial quando o número de ativos N é grande. Para demonstrar este resultado o modelo fatorial é apresentado da seguinte forma

$$\mathbf{R}^N = \mathbf{B}^N \mathbf{F} + \mathbf{E}^N$$

onde

- $\mathbf{R}^N$ é a matriz $N \times T$ dos retornos observados dos N ativos para os T períodos;
- $\mathbf{B}^N$ é a matriz $N \times K$ dos betas dos fatores;
- $\mathbf{F}$ é a matriz $K \times T$ das realizações (não observadas) dos K fatores para os T períodos;
- $\mathbf{E}^N$ é a matriz $N \times T$ dos resíduos.

A partir da formulação acima são definidas as matrizes

$$\mathbf{\Omega}^T = (1/N) \mathbf{R}^{N'} \mathbf{R}^N, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{A}^N = (1/N) \mathbf{F}' \mathbf{B}^{N'} \mathbf{B}^N \mathbf{F},$$

$$\mathbf{Y}^N = (1/N) (\mathbf{F}' \mathbf{B}^{N'} \mathbf{E}^N + \mathbf{E}^{N'} \mathbf{B}^N \mathbf{F}),$$

$$\mathbf{Z}^N = (1/N) \mathbf{E}^{N'} \mathbf{E}^N.$$

A matriz $\mathbf{\Omega}^T$ é observável enquanto que as demais são não observáveis. Todas as matrizes são quadradas de dimensão T tal que $\mathbf{\Omega}^T = \mathbf{A}^N + \mathbf{Y}^N + \mathbf{Z}^N$.

Considere o seguinte modelo de regressão

$$\mathbf{R}_i = \hat{\alpha}_i \mathbf{1} + \mathbf{F}' \hat{\beta}_i + \hat{\varepsilon}_i, \quad (4.6)$$

onde

- $\mathbf{R}_i$ é um vetor $T \times 1$ dos retornos observados do ativo i ;
- $\hat{\alpha}_i$ é o intercepto da equação;
- $\mathbf{1}$ é um vetor $T \times 1$ de uns;
- $\mathbf{F}$ é a matriz $K \times T$ das realizações (não observadas) dos fatores;

- $\hat{\beta}_i$ é o vetor $K \times 1$ dos betas dos fatores para o ativo i ;
- $\hat{\varepsilon}_i$ é o vetor $T \times 1$ dos resíduos.

Como as realizações dos fatores não são observáveis, o modelo (4.6) não pode ser ajustado. A proposta é mostrar que os autovetores da matriz Ω^N se aproximam desses fatores quando o número de ativos é grande. A seguir são apresentados alguns resultados importantes para a demonstração.

Em geral, denomina-se *matriz de componentes principais* a matriz $k \times T$ ortonormal dos k autovetores correspondentes aos k maiores autovalores de uma matriz $\mathbf{W}$ qualquer, simétrica e positiva semi-definida.

Define-se para a demonstração $\mathbf{G}^N$ e $\mathbf{H}^N$ as matrizes de componentes principais de Ω^N e $\mathbf{A}^N$, respectivamente. As matrizes Λ_G e Λ_H são matrizes diagonais com os autovalores correspondentes. Pode-se demonstrar que $\mathbf{H}^N$ é uma transformação não-singular de $\mathbf{F}$, ou seja, existe uma matriz não-singular $\bar{\mathbf{L}}^N$ tal que $\bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} = \mathbf{H}^N$.

Lema 1. *Para qualquer N , existe uma matriz $k \times k$ não singular $\bar{\mathbf{L}}^N$ tal que $\bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} = \mathbf{H}^N$. A demonstração é apresentada no Apêndice D.*

Supondo que a matriz $\mathbf{H}^N$ fosse observável e utilizando-a no lugar de $\mathbf{F}$ na equação (4.6), seriam obtidas estimativas do intercepto e dos erros $\hat{\alpha}_{i,H}$ e $\hat{\varepsilon}_{i,H}$. As estimativas dessa regressão hipotética são as mesmas estimativas que seriam encontradas utilizando a matriz $\mathbf{F}$. Portanto, a substituição de $\mathbf{H}^N$ no lugar de $\mathbf{F}$ não tem efeito nessas estimativas, isso se deve ao fato que a matriz $\bar{\mathbf{L}}^N$ desaparece com a utilização do método de mínimos quadrados.

Lema 2. *Se $\mathbf{H}^N$ é uma transformação não-singular de $\mathbf{F}$, a utilização de $\mathbf{H}^N$ no lugar de $\mathbf{F}$ não tem efeito nas estimativas de α_i e ε_i para o modelo (4.6). A demonstração desse resultado é apresentada no Apêndice D.*

O próximo passo da demonstração é provar que a matriz $\mathbf{G}^N$ é aproximadamente igual a uma transformação não-singular de $\mathbf{F}$, ou seja, $\mathbf{G}^N$ converge para $\mathbf{H}^N$ quando N tende ao infinito.

Pode-se observar que a matriz $\mathbf{Y}^N$ de (4.5) converge para uma matriz de zeros quando N cresce. A matriz $\mathbf{Z}^N$ representa a matriz de covariâncias dos resíduos, os termos da diagonal principal e os termos fora da diagonal de $\mathbf{Z}^N$

são dados por

$$(1/N) \sum_{i=1}^N \varepsilon_{it}^2 \quad \text{e} \quad (1/N) \sum_{i=1}^N \varepsilon_{it} \varepsilon_{is} \quad \text{para } s, t = 1, \dots, T \text{ e } s \neq t.$$

Sob a suposição que os termos ε_{it}^2 converge para σ^2 (existe uma média das variâncias dos erros) e que os termos $\varepsilon_{it} \varepsilon_{is}$ convergem para zero (não existe correlação intertemporal entre os erros), a matriz $\mathbf{Z}^N$ tende a $\sigma^2 \mathbf{I}_T$.

Como resultado tem-se que, quando N cresce, a matriz $\mathbf{\Omega}^N$ se aproxima de $\mathbf{A}^N + \sigma^2 \mathbf{I}_T$. Além disso, os autovetores de uma matriz não se alteram com a adição de uma matriz escalar, logo a matriz $\mathbf{G}^N$ converge para $\mathbf{H}^N$.

Uma vez que $\mathbf{H}^N$ é uma transformação singular de $\mathbf{F}$, a matriz $\mathbf{G}^N$ é aproximadamente uma transformação singular de $\mathbf{F}$. Portanto, quando N é grande, os autovetores da matriz dos retornos são aproximadamente equivalentes aos fatores da análise fatorial.

4.3.1 Refinamento da estimação dos fatores

O procedimento de estimação dos fatores apresentado acima não considerava a heteroscedasticidade dos erros, por essa razão os mesmos autores propuseram um refinamento com o objetivo de aumentar a eficiência do método (Connor e Korajczyk, 1988).

A modificação sugerida propõe o cálculo dos autovetores dos retornos re-escalados, um procedimento análogo ao uso do método de mínimos quadrados ponderados em modelos de regressão. O novo procedimento é composto pelos seguintes passos:

1. Estimar os fatores $\mathbf{f}_t$ através do cálculo dos autovetores de $\hat{\mathbf{\Omega}}^N$;
2. Para cada ativo estimar β_i e σ_i^2 através das regressões em séries temporais dadas por

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i' \hat{\mathbf{f}}_t + \varepsilon_{it}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Usar as estimativas das variâncias para gerar a matriz de covariâncias

dos resíduos

$$\widehat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \hat{\sigma}_N^2 \end{bmatrix};$$

3. Determinar a matriz $N \times T$ dos retornos re-escalados

$$\mathbf{R}^* = \widehat{\mathbf{D}}^{-1/2} \mathbf{R}$$

e recalcular a matriz de covariâncias

$$\widehat{\Omega}_N^* = \frac{1}{N} \mathbf{R}^{*'} \mathbf{R}^*;$$

4. Re-estimar os fatores através do cálculo dos autovetores de $\widehat{\Omega}_N^*$.

4.3.2 Determinação do número de fatores

A determinação do número de fatores para a análise assintótica de componentes principais é apresentada por Connor e Korajczyk(1993). O procedimento é baseado na comparação dos resíduos do modelo com K fatores com os resíduos do modelo com $K + 1$ fatores.

O número de fatores é determinado através dos seguintes passos:

1. Dadas as séries dos retornos e dos $K + 1$ fatores estimados, são geradas as séries dos resíduos dos modelos

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i' \hat{\mathbf{f}}_t + \varepsilon_{it},$$

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i' \hat{\mathbf{f}}_t + \beta_{K+1,i} \hat{f}_{K+1,t} + \varepsilon_{it}^*.$$

2. Com os resíduos calculados acima, $\hat{\varepsilon}_{it}$ e $\hat{\varepsilon}_{it}^*$, calcular os resíduos quadrados com correção do número de graus de liberdade

$$\hat{\sigma}_{it} = \frac{\hat{\varepsilon}_{it}^2}{1 - (K + 1)/T - K/N},$$

$$\hat{\sigma}_{it}^* = \frac{\hat{\varepsilon}_{it}^{*2}}{1 - (K + 3)/T - (K + 1)/N}.$$

3. Calcular a diferença dos resíduos quadrados de períodos pares e ímpares

$$\hat{\Delta}_s = \hat{\mu}_{2s-1} - \hat{\mu}_{2s}^*, \quad s = 1, \dots, T/2,$$

onde

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{it},$$

$$\hat{\mu}_t^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{it}^*.$$

Como resultado tem-se o vetor $(T/2) \times 1$ das diferenças

$$\widehat{\Delta} = (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots, \hat{\Delta}_{T/2})'.$$

4. Calcular a média e a variância do vetor $\widehat{\Delta}$

$$\bar{\Delta} = \frac{2}{T} \sum_{s=1}^{T/2} \hat{\Delta}_s,$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta}^2 = \frac{2}{T-2} \sum_{s=1}^{T/2} (\hat{\Delta}_s - \bar{\Delta})^2.$$

5. Calcular a estatística t para verificar se a média $\bar{\Delta}$ é estatisticamente maior que zero,

$$t = \frac{\bar{\Delta}}{\hat{\sigma}_{\Delta}}.$$

Se, para um determinado K , a média das diferenças ($\bar{\Delta}$) é estatisticamente maior que zero significa que os erros do modelo com K fatores são, em média, maiores que os erros do modelo com $K+1$ fatores. Logo o novo fator é importante e deve ser incorporado ao modelo. Denomina-se K^* o número de fatores indicado para o modelo onde $K^* = \inf\{K \text{ tal que a hipótese de que a diferença média é igual a zero não é rejeitada}\}$.

4.4 Aplicação

A aplicação dos métodos apresentados acima está dividida em 2 partes: na primeira é utilizada análise fatorial para o primeiro conjunto de dados (retornos de 20 ativos no período de 117 meses); na segunda parte é utilizada a análise assintótica de componentes principais para o segundo conjunto de dados (retornos de 136 ativos no período de 41 meses).

4.4.1 Análise Fatorial

O primeiro passo da análise é a determinação do número de fatores a serem utilizados no modelo. Analisando o scree-plot (Figura 4.2) nota-se que a partir do sexto componente as diferenças entre os autovalores da matriz de covariâncias dos retornos são muito pequenas. Por esse critério existe uma indicação de que 5 componentes devem ser utilizadas.

Figura 4.2: Scree-plot - Análise fatorial tradicional

A Tabela 4.1 apresenta os 5 primeiros autovalores e a média das variâncias dos retornos. Verifica-se que os 4 primeiros autovalores são maiores que a média das variâncias, logo, pelo critério de Kaizer, devem ser utilizados 4 fatores no modelo.

Tabela 4.1: Autovalores da matriz de covariância dos retornos

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Média
0,194	0,077	0,036	0,027	0,023	0,025

Foram construídos os intervalos de confiança para os autovalores utilizando a reamostragem Bootstrap. Os intervalos de confiança dos 6 primeiros autovalores são apresentados na Tabela 4.2, observa-se que o intervalo de confiança do sexto componente está abaixo da média. Por este resultado, as cinco primeiras componentes deveriam ser consideradas no ajuste do modelo.

Tabela 4.2: Intervalos de confiança dos autovalores da matriz de covariância dos retornos

Autovalor	Intervalo de Confiança ($\gamma = 95\%$)
λ_1	[0,115; 0,306]
λ_2	[0,021; 0,132]
λ_3	[0,020; 0,056]
λ_4	[0,019; 0,035]
λ_5	[0,017; 0,027]
λ_6	[0,015; 0,022] *

* o intervalo está abaixo de 0,025 (média das variâncias dos retornos)

Utilizando o teste da razão das verossimilhanças os resultados indicam que quatro fatores deveriam ser utilizados. Para o modelo com 3 fatores a estatística do teste (4.4) é igual a 170,31 o que corresponde ao p-valor 0,016 e para o modelo com 4 fatores a estatística do teste é igual a 138,14 o que corresponde ao p-valor 0,079.

Os critérios apresentados indicam que o modelo deve ter 4 ou 5 componentes. Pelas Tabelas 4.3 e 4.4 verifica-se que o modelo com 4 fatores explica 54,86% e o modelo com 5 fatores explica 57,53% da variabilidade total dos retornos, logo a diferença da porcentagem da variabilidade explicada pelos modelos é pequena. Decidiu-se utilizar quatro fatores no modelo.

Pela Tabela 4.5 verifica-se que os retornos dos ativos Aracruz PNB, Vale

Tabela 4.3: Importância dos fatores - Modelo com 4 fatores

	Fator 1	Fator 2	Fator 3	Fator 4
Proporção individual (%)	17,69	12,57	12,31	12,29
Proporção acumulada (%)	17,69	30,26	42,56	54,86

Tabela 4.4: Importância dos fatores - Modelo com 5 fatores

	Fator 1	Fator 2	Fator 3	Fator 4	Fator 5
Proporção individual (%)	18,09	14,12	10,17	9,38	5,77
Proporção acumulada (%)	18,09	32,21	42,38	51,76	57,53

PNA, Petrobras PN e Sadia PN apresentam comunalidades elevadas por outro lado Confab PN, Perdigão PN e Avipal ON apresentam baixas comunalidades.

Tabela 4.5: Comunalidade dos retornos dos ativos - Análise fatorial tradicional

Ativo	Comunalidade (%)	Ativo	Comunalidade (%)
Acesita PN	59,68	Ambev PN	48,40
Aracruz PNB	85,91	Arcelor ON	40,50
Avipal ON	38,42	Brasil Telecom PN	58,43
Confab PN	29,48	Duratex PN	45,60
Gerdau Met PN	53,77	Klabin PN	56,77
Perdigão PN	34,24	Petrobras PN	66,65
Ripasa PN	64,76	Sadia PN	62,49
Sid Tubarão PN	56,67	Telemar PNB	58,32
Telesp ON	45,29	Usiminas PNA	58,00
Vale PNA	72,15	Votorantim PN	61,64

Na Figura 4.3, são apresentadas as cargas fatoriais dos retornos dos ativos, quanto maior a carga fatorial maior a importância do ativo na composição do fator. Observa-se que o primeiro fator encontrado representa a Vale do Rio Doce e as indústrias do setor de Papel e Celulose; o segundo fator representa

Figura 4.3: Betas dos fatores - Análise fatorial tradicional

basicamente as empresas do setor de Alimentos; o terceiro representa as empresas de telecomunicações e a Petrobrás; o quarto fator representa o setor de Siderurgia e Metalurgia.

A Figura 4.4 apresenta as séries dos resíduos do modelo, nota-se que a variabilidade permanece razoavelmente constante ao longo do período.

4.4.2 Análise Assintótica de Componentes Principais

Foi ajustado o modelo utilizando o procedimento refinado de estimação dos fatores apresentado na seção 4.3.1. A Figura 4.5 apresenta os autovalores

Figura 4.4: Resíduos da análise fatorial tradicional

das 15 primeiras componentes e a proporção acumulada da variabilidade total dos dados explicada pelas componentes.

Foi utilizado o teste proposto por Connor e Korajczyk (1993), apresentado na seção 4.3.2, para verificar o número de fatores adequado para o modelo, este teste indica que deve ser utilizado apenas 1 fator.

A Figura 4.6 apresenta as cargas dos ativos para o modelo com um único fator. Verifica-se que quase todas as cargas apresentam valores negativos, logo este fator pode ser interpretado como um índice de mercado. A cor-

Figura 4.5: Scree-plot - Análise assintótica de componentes principais

Figura 4.6: Cargas fatoriais - Análise assintótica de componentes principais

relação entre as realizações do fator e o Índice Bovespa no período é de -0,90, o que reforça a interpretação de que se trata de um índice de mercado.

Como o número de ativos é elevado os Coeficientes de Determinação são apresentados através de algumas medidas resumo (Tabela 4.6). Verifica-se que, em média, o fator explica aproximadamente 32% da variabilidade dos retornos.

Tabela 4.6: Coeficientes de Determinação - Análise assintótica de componentes principais

Mínimo	1° Quartil	Mediana	3° Quartil	Máximo	Média
0,0374	0,1662	0,3212	0,4629	0,6812	0,3198

4.5 Conclusão

A partir dos resultados apresentados para o primeiro conjunto de dados verifica-se que as comunalidades são elevadas com algumas exceções. Em média a parcela da variabilidade dos retornos explicada pelos fatores é de aproximadamente 55%.

A determinação do número de fatores estatísticos quando $N > T$ foi feita utilizando o método desenvolvido por Connor e Korajczyk (1993). Esse procedimento pode ser utilizado para verificar a introdução de qualquer tipo de fator, não necessariamente fatores estatísticos, em um modelo. Por exemplo, pode-se verificar a entrada de l fatores macroeconômicos em um modelo com k fatores estatísticos (com $l = 1, 2, \dots$).

Capítulo 5

Conclusão

O presente estudo tem como objetivo verificar a influência de fatores macroeconômicos, fundamentais e estatísticos no comportamento dos retornos de ativos. Como mencionado anteriormente, este tipo de estudo é importante para a formação de carteiras de investimentos.

Com os resultados apresentados no Capítulo 2 observou-se que a introdução dos fatores macroeconômicos gera um aumento significativo na porcentagem da variabilidade explicada pelo modelo para os ativos Aracruz PNB, Ripasa PN, Votorantim PN e Vale PNA. Entretanto, para outros ativos, a porcentagem da variabilidade explicada é praticamente a mesma para o modelos de fator único e multifatorial. Entre os fatores estudados, o fator relacionado com risco de crédito foi o que apresentou maior influência nos retornos, o coeficiente deste fator apresentou-se significativo para 9 dos 20 ativos estudados. Esses resultados dão indícios de que existem outros fatores, além do índice de mercado, responsáveis pelo risco sistemático dos ativos.

No Capítulo 3 foram estudados os fatores fundamentais, os fatores relacionados com os setores de empresas apresentaram resultados melhores que os fatores contábeis, mas nos dois casos a porcentagem da variabilidade explicada é muito baixa.

Os modelos de fatores estatísticos estudados no Capítulo 4 foram os que apresentaram os melhores resultados. Comparando os resultados para o primeiro conjunto de dados (20 ativos em um período de 117 meses) observou-se que as comunalidades dos ativos no modelo fatorial estatístico são maiores

que os coeficientes de determinação obtidos no modelo macroeconômico, com apenas uma exceção para Petrobrás PN. Com relação ao segundo conjunto de dados (136 ativos em um período de 41 meses), o modelo de fatores estatísticos proposto apresenta melhores resultados que o modelo fundamental, aproximadamente 32% da variabilidade dos ativos era explicada pelo fator estatístico enquanto o modelo fundamental explica apenas 14% da variabilidade.

Vale ressaltar que esses modelos foram ajustados sob a suposição de que a estrutura de covariâncias é a mesma para todo período estudado, o que pode representar uma suposição muito forte. Em trabalhos futuros serão estudados modelos que consideram mudanças na estrutura de covariâncias, isto é, $Cov(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}) = \sigma_{ijt}$ no lugar de σ_{ij} constante para todo t . Além disso, em grande parte dos resultados apresentados foi feita a suposição de normalidade dos dados, em trabalhos futuros pretende-se estudar o impacto da falta de normalidade nos resultados.

Referências

- Chen, N.F., Roll, R. e Ross, S.A. (1986). Economic Forces and the Stock Market. *The Journal of Business*, 59(3), 383-404.
- Cleveland, W.S. (1979). Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 829-836.
- Connor, G. e Korajczyk, R.A. (1986). Performance Measurement with the Arbitrage Pricing Theory: A New Framework for Analysis. *Journal of Financial Economics*, 15, 373-394.
- Connor, G. e Korajczyk, R.A. (1988). Risk and Return in an Equilibrium APT: Application of a New Test Methodology. *Journal of Financial Economics*, 21, 255-289.
- Connor, G. e Korajczyk, R.A. (1993). A Test for the Number of Factors in an Approximate Factor Model. *Journal of Finance*, 48(4), 1263-1292.
- Connor, G. (1995). The Three Types of Factor Models: A Comparison of Their Explanatory Power. *Financial Analysts Journal*, 51, 42-46.
- Efron, B. e Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- Fama, E. F. e MacBeth, J.D. (1973). Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests. *Journal of Political Economy*, 81(3), 607-636.
- Fama, E.F. e French, K.R. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Finance*, 47, 427-465.
- Gitman, L.J. (2000). *Princípios da Administração Financeira*. 7ª edição, Harbra, São Paulo.
- Greene, W.G. (2000). *Econometric Analysis*. 4ª edição, Prentice Hall, New Jersey.
- Grinold, R.C. e Kahn, R.N. (2000). *Active Portfolio Theory and Management: A Quantitative Approach for Producing Superior Returns and Controlling Risk, Second Edition*. McGraw-Hill, New York.

- Harvey, A.C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Johnson, R.A. e Wichern, D.W. (1998). *Multivariate Statistical Analysis*. Prentice-Hall, Nova York.
- Jolliffe, I.T. (2002) *Principal Component Analysis*. Springer, Nova York.
- Koopman S.J., Harvey, A.C., Doornik, J.A. e Shephard, N. (2000). *Stamp: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. Timberlake Consultants Press, Londres.
- Lambert, Z.V., Wildt, A.R. e Durand, R.M. (1990). Assessing Sampling variation relative to number-of-factors criteria. *Educational and Psychological Measurement*, 50, 30-49.
- McElroy, M. B. e Burmeister, E. (1988). Arbitrage Pricing Theory as a Restricted Nonlinear Multivariate Regression Model, *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 6, n 1.
- Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (2004). *Análise de Séries Temporais*. Edgard Blücher, São Paulo.
- Neves, M. B.E. (2003). Três ensaios em modelos de apreçamento de ativos. *Tese de Doutorado*, Rio de Janeiro, COPPEAD.
- Ross S. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, 13, 341-360.
- Rummel, R. J., (1970). *Applied Factor Analysis*. Northwestern University Press, Evanston.
- Schor, A., Bonomo, M. e Valls Pereira, P.L. (2002). Arbitrage Pricing Theory (APT) e Variáveis Macroeconômicas: um estudo empírico para o mercado acionário brasileiro. *Finanças Aplicada ao Brasil*, capítulo 4, 46-62, Fundação o Getúlio Vargas Editora, Rio de Janeiro.
- Srivastava, V.K. e Giles, D.E.A. (1987). *Seemingly Unrelated Regression Equations Model: Estimation and Inference*. Marcel Dekker, Nova York.
- Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics*. Wiley, Nova York.

Zivot, E. e Wang, J. (2003) *Modeling Financial Time Series with S-Plus*.
Springer, Nova York.

Apêndice A

Definições e dados utilizados

A.1 Definições

- **Ativos:**

São bens concretos, direitos e valores que formam o patrimônio de uma empresa. Os ativos podem ser:

- Ativos correntes: dinheiro, depósitos bancários, ações e tudo que possa ser trocado por dinheiro rapidamente;
- Ativos fixos: propriedades, construções, fábricas, máquinas, veículos, mobílias;
- Ativos intangíveis: patentes, criações, capital intelectual.

- **Ação:**

Título de renda variável, emitidos por sociedades anônimas, que representam a menor fração do capital da empresa emitente. O investidor em ações é um co-proprietário da sociedade anônima da qual é acionista, participando dos seus resultados. As ações são conversíveis em dinheiro, a qualquer tempo, pela negociação em bolsas de valores.

Tipos de Ações:

- Ordinárias (ON): proporcionam participação nos resultados da empresa e conferem ao acionista o direito de voto em assembleias gerais;
- Preferenciais (PN): garantem ao acionista a prioridade no recebimento de dividendos (geralmente em percentual mais elevado do que o atribuído às ações ordinárias) e no reembolso de capital, no caso de dissolução da sociedade.

• **Retorno:**

Retorno de um ativo representa a variação dos preços deste ativo entre dois instantes $t - 1$ e t . Denomina-se P_t o preço do ativo no instante t , logo o retorno pode ser obtido por

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

R_t pode ser chamado de retorno simples ou taxa de retorno.

A.2 Dados - Retornos

As cotações dos ativos utilizadas para o cálculo dos retornos foram obtidas no Banco de Dados Econômica. Foram utilizados dois conjuntos de dados nesse estudo:

• **Conjunto de dados 1**

O primeiro conjunto de dados contém os retornos mensais de 20 ativos no período de agosto de 1994 a maio de 2004 (Figura A.1). Os ativos que compõem esse conjunto de dados são: Acesita PN, Ambev PN, Aracruz PNB, Arcelor ON, Avipal ON, Brasil Telecom PN, Confab PN, Duratex PN, Gerdau Met PN, Klabin PN, Perdigão PN, Petrobras PN, Ripasa PN, Sadia PN, Sid Tubarão, PN Telemar PNB, Telesp ON, Usiminas PNA, Vale PNA e Votorantim PN.

Figura A.1: Retornos dos ativos

- Conjunto de dados 2

O segundo conjunto de dados é composto pelos retornos mensais de todos os ativos que apresentam pelo menos uma cotação nos meses entre janeiro de 2000 a maio de 2004 (Figuras A.2 a A.7).

Figura A.2: Retornos dos ativos

Figura A.3: Retornos dos ativos

Figura A.4: Retornos dos ativos

Figura A.5: Retornos dos ativos

Figura A.6: Retornos dos ativos

Figura A.7: Retornos dos ativos

Apêndice B

Variáveis macroeconômicas

Figura B.1: Índice Geral de Produção Industrial

Figura B.2: Índice Geral de Preços - (IGP-DI)

Figura B.3: Taxa de juros de capital de giro

Figura B.4: Taxa de juros do mercado interbancário

Apêndice C

Alavancagem financeira

No Capítulo 3 foram estimados os dados mensais de alavancagem financeira a partir de dados trimestrais. As Figuras C.1 a C10 apresentam os resultados para as empresas selecionadas.

Figura C.1: Alavancagem Financeira

Figura C.2: Alavancagem Financeira

Figura C.3: Alavancagem Financeira

Figura C.4: Alavancagem Financeira

Figura C.5: Alavancagem Financeira

Figura C.6: Alavancagem Financeira

Figura C.7: Alavancagem Financeira

Figura C.8: Alavancagem Financeira

Figura C.9: Alavancagem Financeira

Figura C.10: Alavancagem Financeira

Apêndice D

Demonstração dos resultados do capítulo 4

Lema 1. *Para qualquer N , existe uma matriz $k \times k$ não singular $\bar{\mathbf{L}}^N$ tal que $\bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} = \mathbf{H}^N$.*

Prova: Por definição, a matriz $\mathbf{A}^N$ é dada por

$$\mathbf{A}^N = (1/N) \mathbf{F}' \mathbf{B}^{N'} \mathbf{B}^N \mathbf{F}. \quad (\text{D.1})$$

Se $\mathbf{H}^N$ é a matriz de componentes principais de $\mathbf{A}^N$ e $\mathbf{\Lambda}_H$ a matriz de autovalores correspondente, por definição, tem-se

$$\mathbf{H}^N \mathbf{A}^N = \mathbf{\Lambda}_H \mathbf{H}^N,$$

que implica em

$$\mathbf{A}^N \mathbf{H}^{N'} = \mathbf{H}^{N'} \mathbf{\Lambda}_H. \quad (\text{D.2})$$

Substituindo (D.1) em (D.2) tem-se

$$(1/N) \mathbf{F}' \mathbf{B}^{N'} \mathbf{B}^N \mathbf{F} \mathbf{H}^{N'} = \mathbf{H}^{N'} \mathbf{\Lambda}_H. \quad (\text{D.3})$$

Posmultiplicando os dois lados de (D.3) por $\mathbf{\Lambda}_H^{-1}$ resulta em

$$(1/N) \mathbf{F}' \mathbf{B}^{N'} \mathbf{B}^N \mathbf{F} \mathbf{H}^{N'} \mathbf{\Lambda}_H^{-1} = \mathbf{H}^{N'},$$

aplicando a transposta nos dois lados tem-se

$$\underbrace{(1/N)\Lambda_H^{-1}\mathbf{H}^N\mathbf{F}'\mathbf{B}^{N'}\mathbf{B}^N\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{L}}^N} = \mathbf{H}^N.$$

Para que a prova fique completa é necessário verificar se a matriz $\bar{\mathbf{L}}^N$ é não singular. As matrizes $\mathbf{F}$, $\Lambda_H^{-1}\mathbf{H}^N$ e $\mathbf{B}^{N'}\mathbf{B}^N$ têm posto igual a k , dessa forma o posto da matriz $\bar{\mathbf{L}}^N$ também é igual a k , logo $\bar{\mathbf{L}}^N$ é uma matriz não singular.

Lema 2. *Se $\mathbf{H}^N$ é uma transformação não-singular de $\mathbf{F}$, a substituição de $\mathbf{H}^N$ no lugar de $\mathbf{F}$ não tem efeito nas estimativas de α_i e ε_i do modelo (4.6).*

Prova: Primeiramente é demonstrado que o estimador de α_i não se altera com a substituição das matrizes. Seja $\mathbf{X}$ a matriz com os regressores em um modelo de regressão onde $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{F}' \end{bmatrix}$, o estimador de mínimos quadrados ordinários do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}'_i = [\alpha_i \quad \beta_i]$ é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i,F} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i,F} \\ \hat{\beta}_{i,F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{R}_i + \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{F}'(\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}')^{-1}\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{R}_i \\ (\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}')^{-1}\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{R}_i \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{I} - (1/T)\mathbf{1}\mathbf{1}'$.

O estimador para α_i^H é obtido substituindo $\mathbf{H}^N$ no lugar de $\mathbf{F}$ no primeiro termo de (D.4)

$$\hat{\alpha}_{i,H} = \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{R}_i + \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{H}^{N'}(\mathbf{H}^N\mathbf{A}\mathbf{H}^{N'})^{-1}\mathbf{H}^N\mathbf{A}\mathbf{R}_i,$$

como $\bar{\mathbf{L}}^N\mathbf{F} = \mathbf{H}^N$ tem-se

$$\hat{\alpha}_{i,H} = \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{R}_i + \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{F}'\bar{\mathbf{L}}^{N'}(\bar{\mathbf{L}}^N\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}'\bar{\mathbf{L}}^{N'})^{-1}\bar{\mathbf{L}}^N\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{R}_i.$$

Como as matrizes $\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}'$ e $\bar{\mathbf{L}}^N$ são inversíveis, a matriz $\bar{\mathbf{L}}^N\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}'$ também é inversível, logo a passagem abaixo é válida

$$\hat{\alpha}_{i,H} = \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{R}_i + \frac{1}{T}\mathbf{1}'\mathbf{F}'\bar{\mathbf{L}}^{N'} \left[(\bar{\mathbf{L}}^N\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}') (\bar{\mathbf{L}}^{N'}) \right]^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{R}_i$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{R}_i + \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{F} \bar{\mathbf{L}}^{N'} (\bar{\mathbf{L}}^{N'})^{-1} (\bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i \\
&= \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{R}_i + \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{F}' (\bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}'$ e $\bar{\mathbf{L}}^N$ são inversíveis tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{i,H} &= \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{R}_i + \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{F}' \left[(\bar{\mathbf{L}}^N) (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}') \right]^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i \\
&= \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{R}_i + \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{F}' (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} (\bar{\mathbf{L}}^N)^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i
\end{aligned}$$

tal que

$$\hat{\alpha}_{i,H} = \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{R}_i + \frac{1}{T} \mathbf{1}' \mathbf{F}' (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i.$$

Portanto o estimador de α_i não se altera. A seguir é apresentada a demonstração referente ao estimador de ε_i . Considere os modelos de regressão utilizando as matrizes $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}^N$, deseja-se demonstrar que os resíduos gerados nos dois ajustes são iguais. Define-se $\hat{\theta}_{i,F}$ e $\hat{\theta}_{i,H}$ os estimadores dos coeficientes nas duas condições.

Seja $\hat{\varepsilon}_{i,F}$ os resíduos do modelo que utiliza a matriz $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{i,F} &= \mathbf{R}_i - \mathbf{X} \hat{\theta}_{i,F} = \mathbf{R}_i - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{F}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i,F} \\ \hat{\beta}_{i,F} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_i - \left[\mathbf{1} \hat{\alpha}_{i,F} + \mathbf{F}' \hat{\beta}_{i,F} \right] \\
&= \mathbf{R}_i - \left[\mathbf{1} \hat{\alpha}_{i,F} + \mathbf{F}' (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i \right]
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\hat{\varepsilon}_{i,H}$ representa os resíduos do modelo que utiliza a matriz $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{i,H} &= \mathbf{R}_i - \mathbf{X} \hat{\theta}_{i,H} = \mathbf{R}_i - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{H}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i,H} \\ \hat{\beta}_{i,H} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{R}_i - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{F}' \bar{\mathbf{L}}^{N'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i,H} \\ \hat{\beta}_{i,H} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_i - \left[\mathbf{1} \hat{\alpha}_{i,H} + \mathbf{F}' \bar{\mathbf{L}}^{N'} \hat{\beta}_{i,H} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{R}_i - \left[\mathbf{1}\hat{\alpha}_{i,H} + \mathbf{F}'\bar{\mathbf{L}}^{N'} (\bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}' \bar{\mathbf{L}}^{N'})^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i \right] \\
&= \mathbf{R}_i - \left[\mathbf{1}\hat{\alpha}_{i,H} + \mathbf{F}'\bar{\mathbf{L}}^{N'} (\bar{\mathbf{L}}^{N'})^{-1} (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} (\bar{\mathbf{L}}^N)^{-1} \bar{\mathbf{L}}^N \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i \right] \\
&= \mathbf{R}_i - \left[\mathbf{1}\hat{\alpha}_{i,H} + \mathbf{F}' (\mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}')^{-1} \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{R}_i \right]
\end{aligned}$$

Como demonstrado anteriormente $\hat{\alpha}_{i,F} = \hat{\alpha}_{i,H}$, logo os resíduos gerados nos dois casos são iguais.