**Caminhos orientados
e
o processo de Hammersley**

Cristian Favio Coletti

**TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS**

Área de concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do C.N.P.q

São Paulo, 28 de julho de 2006

Caminhos orientados
e
o processo de Hammersley

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Cristian Favio Coletti
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 28 de julho de 2006.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (IME - USP)
- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (IME - USP)
- Prof. Dr. Claudio Landim (IMPA)
- Prof. Dra. Marina Vachkovskaia (IMECC - UNICAMP)
- Prof. Dr. Rafael Andres Rosales Mitrowsky (FFCLRP - USP)

Aos meus pais,
Carlos e Graciela.
Aos meus irmãos,
Matías, Laura e
Pablo.

Resumo

Estudamos o comportamento assintótico de caminhos orientados no processo de Hamersley com fontes e dissipadores, de intensidades λ e ρ , respectivamente, introduzido por Groeneboom (2002). Chamamos tais caminhos de caminhos β . No regime $\lambda\rho \leq 1$ obtemos uma lei forte dos grandes números para tais caminhos e mostramos que o expoente de flutuações transversais é no máximo $2/3$. Como consequência, obtemos uma lei forte dos grandes números para as partículas de segunda classe, tanto normal como dual, no leque de rarefacção assim como para uma interface de competição definida no processo de crescimento polinuclear (P.N.G.).

Abstract

We study the asymptotic behaviour of oriented paths in the Hammersley process with sources and sinks, of intensities λ and ρ respectively, introduced by Groeneboom (2002). We call such paths β -paths. We derive a strong law of large number for those paths in the regime $\lambda\rho \leq 1$ and we show that its transversal fluctuation exponent is at most $2/3$. As a consequence we get a strong law of large numbers for the normal and dual second class particle in the rarefaction fan as well as a law of large numbers for the competition interface between two PNG droplets since the space-time path of a second-class particle (normal and dual) in the Hammersley process with sources and sinks as well as the space-time path of the interface between two PNG droplets are examples of β -paths.

Agradecimentos

Sou grato em especial a meu orientador Pablo pela amizade, orientação e, acima de tudo, pela confiança em mim depositada. Quero agradecer também a Leandro Pimentel por todas as proveitosas discussões.

Sou grato também aos professores e funcionários do I.M.E., em especial aos professores Fábio Prates Machado e Luiz Renato Gonçalves Fontes.

Gostaria aqui de recordar os Professores da Graduação, Nicolás Andruskiewtsch e Raúl Martínez. O apoio deles foi fundamental para a conclusão da minha formação matemática. Aos colegas e amigos do instituto. Em particular a Sebastian, Florencia, Natalia S., Julieta, Pablo R., Natalia V., Domingo, Flia. Rincón Cardeno, Leonardo, Nevena, Elier, Anderson, Alexandre e Edijane.

Finalmente, quero compartilhar este momento com Sandra, a pessoa que admiro e que me fortalece dia após dia.

À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Descrição dos Modelos	3
1.1 Processo de Hammersley	3
1.2 Processo de Hammersley com fontes e dissipadores	4
1.2.1 Gerador do processo	4
1.2.2 Problema de Ulam	6
1.2.3 Construção Gráfica	7
1.2.4 Acoplamento	9
1.2.5 Partículas de Segunda Classe	9
1.3 Modelo de Crescimento Polinuclear	11
1.3.1 Construção gráfica	13
1.3.2 Relação entre o modelo P.N.G. e o processo de Hammersley	14
1.4 Distribuições limites	14

1.4.1	Funções de Distribuição de Tracy-Widom	15
1.4.2	Convergência em Probabilidade	17
1.5	Geodésicas	18
1.6	Caminhos β	22
1.6.1	Exemplos de caminhos β	24
2	Flutuações e o Problema de Riemann-Hilbert	27
2.1	Flutuações ao redor do valor assintótico	28
2.1.1	Prova do lema 4	31
2.1.2	Processo de Hammersley com fontes e dissipadores	35
2.1.3	Prova do Teorema 8	36
2.2	Problema de Riemann-Hilbert	38
2.2.1	Problema de Riemann-Hilbert unidimensional	38
3	Convergência dos Caminhos β	41
3.1	Lei da Partícula de Segunda Classe	54
3.2	Solução entrópica	58
4	Flutuações ao Redor da Inclinação Assintótica	59
4.1	Interseção das trajetórias das partículas de segunda classe	61
4.1.1	Modelo de competição auxiliar	61
4.2	Flutuações em equilíbrio	65
	Referências Bibliográficas	68

Lista de Figuras

1.1	Curvas espaço-temporales.	8
1.2	Trajetoórias de X_t e X'_t	12
1.3	Modelo de Crescimento Polinuclear.	13
1.4	Caminhos fracamente crescentes.	20
1.5	$R(x)$ � uma �rvore.	22
1.6	Exemplo de caminho β . ■ : Pontos β	23
1.7	Trajetoária da interface de competição.	25
3.1	Caminho β cercado por d�as geodésicas.	52
3.2	Lei da partícula de segunda classe.	55
4.1	Cruzamento das trajetórias de X_t e X'_t	65
4.2	Dualidade entre caminhos β e geodésicas.	67

Introdução

O processo de Hammersley a tempo discreto foi definido por Hammersley em [16] com o propósito de resolver o problema de *Ulam*, que consiste em achar a distribuição assintótica do comprimento de subsequências crescentes maximais. Nesta tese trabalharemos com uma variante deste processo, a qual foi introduzida por Groeneboom [14] e foi chamada de Processo de Hammersley com fontes e dissipadores. Neste contexto definimos um tipo de caminho orientado, que chamaremos caminhos β e provaremos uma lei forte dos grandes números para tais caminhos. As provas obtidas foram conseguidas como consequência do estudo de um modelo de percolação de último passo que considera caminhos maximais. Chamaremos a tais caminhos de geodésicas.

Nos últimos anos, tem-se desenvolvido novas técnicas na área de percolação de último passo. O fato de que em alguns modelos a distribuição da variável de interesse possuir uma fórmula em termos de um determinante possibilitou seu análise assintótico de forma mais precisa. Uma das ferramentas utilizadas na análise assintótica tem sido o método de Riemann-Hilbert. Nesta tese utilizamos este método para obter um limitante superior para o desvio moderado (com relação ao valor assintótico) do comprimento de uma geodésica.

Combinando este resultado assintótico com as idéias geométricas introduzidas por Newman [19] provamos que as geodésicas são δ -retas. Resumindo, a propriedade de δ -retidão para geodésicas diz que, se uma geodésica caminha até um sítio P distante o suficiente,

então a geodésica não pode mudar de direção abruptamente. Esta propriedade será a ferramenta mais importante para provar o resultado principal desta tese, que é a convergência quase certa dos caminhos β .

Agora, passamos a descrever a estrutura da tese. No primeiro capítulo apresentamos os modelos a serem estudados e enunciamos os resultados associados a estes modelos. O segundo capítulo é dedicado integralmente ao estudo do desvio moderado (com relação ao seu valor assintótico) do comprimento de uma geodésica. No capítulo seguinte provamos a convergência quase certa dos caminhos β e deduzimos a convergência quase certa das partículas de segunda classe, normal e dual, para o processo de Hammersley com fontes e dissipadores, assim como a convergência de uma interface de competição definida no modelo de crescimento polinuclear. Finalmente, no capítulo 4 estudamos as flutuações transversais de um caminho β ao redor de sua inclinação assintótica.

Descrição dos Modelos

1.1 Processo de Hammersley

Hammersley [16] introduziu um sistema de partículas a tempo discreto cuja configuração em cada instante n , é um subconjunto de uma amostra $X_1, \dots, X_n$ de uma variável uniforme em $[0, 1]$. O processo de partículas interagentes evolui da forma descrita a seguir. Inicialmente há zero partículas.

- A cada instante uma partícula aparece em uma posição U escolhida uniformemente em $[0, 1]$; simultaneamente a partícula mais próxima à direita de U (se existir) desaparece.

Aldous e Diaconis [1] introduziram um processo de partículas interagentes a tempo contínuo e o chamaram Processo de Hammersley, por este ser uma versão a tempo contínuo do processo definido por Hammersley em [16]. O processo evolue de acordo a seguinte regra:

- Nos instantes de ocorrência de um processo de Poisson com taxa x , um ponto U é escolhido uniformemente em $[0, x]$ independentemente do passado, e a partícula mais próxima a direita de U , se existir, salta para U . Caso contrário, uma nova partícula é criada em U .

1.2 Processo de Hammersley com fontes e dissipadores

Nesta tese vamos trabalhar com uma extensão deste processo, a qual foi descrita recentemente em [15]. Para isso, considere um processo de Poisson homogêneo Ψ de taxa 1, definido em $\mathbb{R}_+^2$. Considere também dois processos de Poisson Ψ_x, Ψ_y mutuamente independentes e independente de Ψ . Ψ_x (respectivamente, Ψ_y) será um processo de Poisson homogêneo de taxa λ (respectivamente, taxa ρ), definido em $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ (respectivamente, $\{0\} \times \mathbb{R}_+$). O processo de Poisson definido no eixo x (eixo horizontal) será chamado processo de *fontes* e o processo de Poisson definido no eixo t (eixo vertical) será chamado processo de *dissipadores*. A justificativa para estes nomes é que o processo começa de uma configuração inicial de *fontes*, e evolui como um processo de Hammersley. No entanto, se um dissipador aparecer à esquerda de uma partícula e não houver outra partícula entre o dissipador e a partícula em questão, as partículas escapam através dos dissipadores no eixo t .

O número de partículas que resultam desta regra no tempo t no intervalo $[0, x]$ é denotado por $L_\lambda^\rho(x, t)$ e o processo de partículas resultante $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$ é o processo de Hammersley com fontes de intensidade λ e dissipadores de intensidade ρ .

O processo com fontes e dissipadores foi introduzido por Groeneboom [15]. O autor provou que se as intensidades dos processos de Poisson definidos nos eixos x e t são λ e λ^{-1} , o processo de partículas interagentes é estacionário, i.e. as interseções das trajetórias das partículas com a semi-reta $\mathbb{R}_+ \times \{t\}$ seguem um processo de Poisson de taxa λ para todo $t > 0$.

1.2.1 Gerador do processo

Seja $\eta = \{\eta_i, i \geq 1\}$ uma configuração inicial de partículas, ou de fontes, e defina $S(t)$ como o operador $S(t)f(\eta) := \mathbb{E}[f(\eta_t) / \eta_0 = \eta]$. Logo, para funções contínuas de suporte

compacto não é difícil provar que

$$\frac{d}{dt}S(t)f(\eta)|_{t=0} = Af(\eta) \quad (1.1)$$

sendo que A é dado por

$$Af(\eta) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (f(\eta^{u,i}) - f(\eta)) du + \rho(f(\eta^{-1}) - f(\eta)), \quad (1.2)$$

com $\eta^{u,i}$ e η^{-1} definidas por

$$\eta_k^{u,i} = \begin{cases} \eta_k & \text{if } k \neq i \\ u & \text{if } k = i \end{cases}$$

e

$$(\eta_k^{-1})_{k \geq 1} = (\eta_{k+1})_{k \geq 1} \quad (1.3)$$

O gerador descreve o comportamento instantâneo intuitivo do processo e é apresentado apenas para fornecer uma visão mais completa, já que vamos estudar o processo via construção gráfica. Sendo que o cenário adequado para processos pontuais é um espaço polonês localmente compacto e que as funções contínuas de suporte compacto são densas no espaço $C_0(X)$, com X um espaço de Hausdorff localmente compacto com a norma $\|\cdot\|_\infty$, o operador A , o qual é chamado “gerador do processo”, está bem definido para funções em $C_0(X)$. A seguir apresentamos uma prova deste fato, motivados pela dificuldade em achá-la na literatura pertinente.

Lema 1. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Logo, $C_c(X)$ é denso em $C_0(X)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demonstração. Seja $f \in C_0$ e $\epsilon > 0$. Logo, existe $V = V(\epsilon)$ compacto em X tal que $|f(x)| \leq \epsilon \forall x \in V^c$. Uma vez que X é localmente compacto, segue que existe O aberto em X tal que $V \subset O$ com $\overline{O}$ compacto. Logo, podemos aplicar o lema de Urysohn para garantir a existência de uma função $h : X \rightarrow [0, 1]$, tal que $h = 0$ em O^c e $h = 1$ em V . Se definirmos $g = h.f$, segue que $f = g$ em V e que $d(f, g) = \|f - g\|_\infty < \epsilon$. Como $\text{supp } g \subset \overline{O}$ que é compacto, temos que $g \in C_c$ com $d(f, g) < \epsilon$. Portanto, $C_c(X)$ é denso em $C_0(X)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

1.2.2 Problema de Ulam

Seja $I_n = \{1, \dots, n\}$ e S_n o grupo de permutações de I_n . Para cada $\sigma \in S_n$ (i.e. para cada bijeção de I_n em I_n), dizemos que a seqüência $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ possui uma subseqüência crescente de comprimento k , se existir uma subseqüência $j_1 < \dots < j_k$ com $\sigma(j_1) < \dots < \sigma(j_k)$. Denotaremos por $L_n(\sigma)$ o comprimento da subseqüência crescente de comprimento maximal. A seguir introduzimos uma medida de probabilidade em S_n da seguinte forma:

$$\mathbb{P}[\sigma(j) = k] = \frac{1}{n} \quad \forall j, k \in I_n. \quad (1.4)$$

O problema de Ulam consiste em determinar o comportamento assintótico de L_n . Em 1935 Erdős e Szekeres (utilizando teoria de Ramsey) mostram que toda permutação de n elementos possui uma subseqüência crescente ou decrescente de comprimento maior ou igual a $\sqrt{n-1}$. Desta forma, $\mathbb{E}_n[L_n] \geq \frac{1}{2}\sqrt{n-1}$. Posteriormente, em 1961 Ulam, na base de simulações conjecturou que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_n[L_n]}{n^{1/2}} = c$$

existe. Em 1972 Hammersley mostrou que tal limite existe, mas não calculou o valor de c . Seu trabalho se baseou nos resultados ergódicos subaditivos de Kingman associados a um processo estocástico por ele definido. Finalmente, em 1977, Vershik e Kerov e Logan e Shepp resolveram parcialmente este problema ao provar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{L_n}{\sqrt{n}}\right] = 2. \quad (1.5)$$

Nos anos seguintes varias provas independentes de 1.5 foram estabelecidas. Destacamos as provas apresentadas por: *i)* Aldous e Diaconis [1] em 1996, *ii)* Seppäläinen em 1996 e por Johansson et al. [2] em 1997.

Quando as intensidades dos processos de Poisson correspondente aos processos de fontes e dissipadores é nula (i.e. $\lambda = \rho = 0$) existe uma relação entre o Processo de Hammersley e o “Problema de Ulam”. Considere uma realização dos pontos Poissonianos em $(0, t) \times (0, t)$ e denote por $\mathcal{N}$ o número de pontos de Poisson em $(0, t) \times (0, t)$. Então, $\mathcal{N}$ é uma variável aleatória de Poisson de parâmetro t^2 . Sejam $(x_k, y_{\sigma(k)})$, $k = 1, \dots, \mathcal{N}$ os pontos Poisson de

$(0, t) \times (0, t)$ sendo que $x_1 < x_2, \dots, x_N$. Desta forma, os índices da coordenada y geram uma permutação σ . De fato, podemos mapear um caminho crescente na subsequência crescente da permutação correspondente. Mais ainda, o comprimento da subsequência crescente maximal coincide com o comprimento do maior caminho crescente.

1.2.3 Construção Gráfica

Como já mencionamos anteriormente, estudamos o processo de Hammersley com fontes e dissipadores através da construção gráfica. Para obter uma realização do processo, procedemos da forma que descrevemos a seguir.

Considere:

- $\psi = \{\psi_i, i \in \mathbb{N}\}$ uma realização do processo de Poisson (α pontos) definido no primeiro quadrante.
- $\psi_x = \{\psi_{x,j}, j \in \mathbb{N}\}$ uma realização do processo de Poisson definido em $\mathbb{R} \times \{0\}$ (processo de fontes).
- $\psi_t = \{\psi_{t,j}, j \in \mathbb{N}\}$ uma realização do processo de Poisson definido em $\{0\} \times \mathbb{R}$ (processo de dissipadores).

A configuração inicial de partículas está dada por $\psi_x = \{\psi_{x,j}, j \in \mathbb{N}\}$. Logo, toda vez que um ponto α aparece, a partícula imediatamente à sua direita salta ao ponto α . Finalmente, cada dissipador (digamos ψ_{t,j_0}) faz com que a partícula mais à esquerda salte a posição zero. Uma vez que uma partícula chega à posição zero, ela permanece nessa mesma posição para qualquer instante de tempo posterior ao salto a zero.

Por exemplo, na seguinte configuração de pontos de Poisson (pontos α)

obtemos as seguintes trajetórias para as partículas:

Figura 1.1: Curvas espaço-temporais.

Observação 1. Seguindo a notação introduzida por Groeneboom [14], chamamos pontos α aos pontos do processo de Poisson em $\mathbb{R}_+^2$ e chamamos pontos β aos pontos correspondentes

às esquinas Nordeste das trajetórias das partículas do Processo de Hammersley (ver figura 1.1).

1.2.4 Acoplamento

Uma vantagem da construção gráfica é permitir a realização conjunta de várias realizações do processo correspondendo a configurações iniciais (fontes) e dissipadores diferentes. Suponha que queremos obter uma realização conjunta dos processos $L_{\lambda_1}^{\rho_1}$ e $L_{\lambda_2}^{\rho_2}$ e que $\lambda_1 < \lambda_2$ e $\rho_1 > \rho_2$.

Para isso consideramos, como na seção anterior, uma realização do processo de pontos α , uma realização do processo de fontes com taxa λ_1 e uma realização do processo de dissipadores com taxa ρ_1 e obtemos uma realização do processo $L_{\lambda_1}^{\rho_1}$ conforme o explicado na seção 1.2.3.

Para obter uma realização do processo $L_{\lambda_2}^{\rho_2}$, acoplada ao processo $L_{\lambda_1}^{\rho_1}$, utilizamos os mesmos pontos α utilizados na construção de $L_{\lambda_1}^{\rho_1}$. No entanto, começamos o processo $L_{\lambda_2}^{\rho_2}$, com um engrossamento do processo de fontes com taxa λ_1 , que é obtido acrescentando de forma independente ao processo de Poisson de taxa λ_1 , um outro processo de Poisson de taxa $\lambda_2 - \lambda_1$. Então utilizamos como dissipadores um (ρ_2/ρ_1) -emagrecimento do processo de dissipadores utilizado na construção de $L_{\lambda_1}^{\rho_1}$.

1.2.5 Partículas de Segunda Classe

Uma partícula de *segunda classe normal* no Processo de Hammersley com fontes e dissipadores é uma partícula que inicialmente se encontra na origem e que se movimenta da forma que descrevemos a seguir. Inicialmente a partícula de segunda classe normal está na posição zero. Ela permanece nessa posição até o primeiro instante em que uma partícula do processo de Hammersley seja absorvida por um dissipador. Então, ela salta à posição prévia da primeira partícula absorvida por um dissipador no instante em que esta sai. Logo ela salta às posições prévias das partículas ubicadas imediatamente a sua direita no

instante em que estas saltam a sua esquerda. Note que uma partícula de *segunda classe normal* é gerada colocando uma fonte extra na origem. A posição da partícula de segunda classe normal no instante t será denotada por X_t , (ver figura 1.2). De forma semelhante, podemos considerar uma partícula de *segunda classe dual* colocando um dissipador extra na origem. Neste caso, denotaremos sua posição no instante t por X'_t , (ver figura 1.2). Ferrari [12] mostrou, no contexto do processo de exclusão totalmente assimétrico (TASEP), que a trajetória da partícula de segunda classe está assintoticamente dominada pela característica da equação hidrodinâmica associada ao sistema de partículas. Uma situação semelhante foi observada por Cator e Groeneboom [7], no processo de Hammersley estacionário: com probabilidade um, a trajetória da partícula de segunda classe se movimenta ao longo da característica da equação hidrodinâmica associada ao processo de Hammersley

$$\partial_t u + \partial_x \left(-\frac{1}{u} \right) = 0 \text{ em } (0, \infty)^2, \quad (1.6)$$

com condição inicial $u(x, 0) = \lambda$ e condição de fronteira $u(0, t) = \rho$.

Observação 2. Quando $\lambda\rho = 1$, a curva $\{(t/\lambda^2, t), t \geq 0\}$ é uma curva característica para a equação 1.6.

Resumindo, na versão estacionária do processo, isto é $\lambda\rho = 1$, Cator e Groeneboom [7] mostraram que quase certamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = \frac{1}{\lambda^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X'_t}{t}.$$

Em relação ao processo de Hammersley com fontes e dissipadores, provamos (no capítulo 3) a seguinte lei forte dos grandes números para as partículas de segunda classe normal e dual no regime $\lambda\rho < 1$:

Teorema 1. Sejam $(X_t, t \geq 0)$ e $(X'_t, t \geq 0)$ as trajetórias das partículas de segunda classe normal e dual respectivamente, para o processo de Hammersley com fontes e dissipadores com $\lambda\rho < 1$. Logo, quase certamente,

1. $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = Z$ sendo Z uma variável aleatória com distribuição:

$$\mathbb{P}(Z \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq \rho^2, \\ \frac{\rho^{-1} - \sqrt{r-1}}{\rho^{-1} - \lambda}, & \rho^2 < r \leq \lambda^{-2}, \\ 1, & \lambda^{-2} < r. \end{cases}$$

2. $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X'_t}{t} = Z'$ sendo Z' uma variável aleatória com distribuição:

$$\mathbb{P}(Z' \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq \rho^2, \\ \frac{\sqrt{r} - \rho}{\lambda^{-1} - \rho}, & \rho^2 < r \leq \lambda^{-2}, \\ 1, & \lambda^{-2} < r. \end{cases}$$

Observação 3. Quando estudamos as características da equação 1.6 encontramos que existe uma característica só saindo da origem quando $\lambda\rho = 1$ e que existem infinitas delas quando $\lambda\rho < 1$. Notamos então que analogamente ao que acontece no TASEP, a partícula de segunda classe segue a característica se $\lambda\rho = 1$ e escolhe aleatoriamente uma delas quando $\lambda\rho < 1$.

1.3 Modelo de Crescimento Polinuclear

Neste trabalho consideramos, também, o modelo de crescimento polinuclear (P.N.G.) a tempo contínuo em $1 + 1$ dimensões. O P.N.G. é um modelo de crescimento de uma superfície unidimensional que descreve um cristal crescendo camada por camada em um substrato unidimensional através do depósito de partículas que se nucleam em planaltos existentes do cristal formando novas ilhas. Estas ilhas se expandem com rapidez um e ilhas adjacentes no mesmo nível colidem depois de encontrarse. No instante t e na posição x a superfície é descrita por uma função altura definida a valores inteiros; $x \mapsto h(x, t) \in \mathbb{Z}$. Para cada t fixo o perfil de alturas $x \mapsto h(x, t)$ à medida que x cresce, possui saltos de altura 1 nos pontos de discontinuidade de h . Cada salto é chamado passo ascendente, se h cresce e passo descendente, se h decresce. Um evento de nucleação no tempo t e na posição

Figura 1.2: Trajetórias de X_t e X'_t .

x corresponde à existência de um par de passos ascendente e descendente em (x, t) . Os passos ascendentes (descendentes) movem-se à esquerda (direita) com rapidez um. Isto corresponde à parte determinística da dinâmica do P.N.G. Por outro lado, supomos que os eventos de nucleação formam um processo pontual localmente finito no espaço-tempo. Isto corresponde à parte estocástica da dinâmica do processo. Uma vez criado um par de passos ascendente-descendente, eles seguem a regra determinística.

Vamos supor que os eventos de nucleação, definidos no plano (s, z) , formam um processo pontual localmente finito. Em $z = s$ temos um processo de Poisson de intensidade $\lambda \geq 0$, em quanto em $z = -s$ temos um processo de Poisson de intensidade $\rho \geq 0$. Em $\{|z| < s\}$

ponemos um processo de Poisson de intensidade 1. Assumimos que em $\{|z| \geq s\}$ não temos eventos de nucleação e que os três processos de Poisson são mutuamente independente.

1.3.1 Construção gráfica

Seja $z_0 < \infty$ e $(s, z) \in \mathbb{R} \times [0, z_0]$ e $\omega \in \Omega$ uma realização dos processos de Poisson. Dado que estamos interessados em condições iniciais planas definimos $h(s, 0)(\omega) = 0$. Cada evento de nucleação gera dúas linhas com inclinações $+1$ e -1 correspondendo às trajetórias no espaço-tempo dos passos ascendentes-descendentes. Cada trajetória ascendente (correspondendo a algum passo ascendente) para quando colide com uma outra trajetória descendente. Desta forma a região espaço-tempo $\mathbb{R} \times [0, z_0]$ fica dividida em regiões limitadas por segmentos de retas de inclinação ± 1 . O valor $h(s, z)(\omega)$ é definido como o número de linhas cruzadas ao longo do caminho reto entre $(s, 0)$ e (s, z) .

Observação 4. *Sendo o processo pontual localmente finito, segue-se que para cada ω a função $s \mapsto h(s, z)(\omega)$, $z \in [0, z_0]$ é localmente limitada e o número de discontinuidades é localmente finito.*

Figura 1.3: Modelo de Crescimento Polinuclear.

1.3.2 Relação entre o modelo P.N.G. e o processo de Hammersley

Considere a transformação linear $(x, t) \mapsto A(x, t) = (z, s)$ que rota em $\pi/4$, em sentido anti-horário, o plano (x, t) . Assim, os pontos aleatórios em $\{z = -s\}$ correspondem aos dissipadores no eixo t , os pontos aleatórios em $\{z = s\}$ correspondem às fontes no eixo x e os pontos aleatórios em $\{|z| < s\}$ correspondem aos pontos α em $\mathbb{R}_+^2$.

Observação 5. *O P.N.G. sem pontos de nucleação externos corresponde ao processo de Hammersley sem fontes e dissipadores.*

1.4 Distribuições limites

Na ausência de fontes externas denotamos por $L(t)$ o número de partículas no intervalo $[0, t]$ no instante t . Neste contexto, Baik e Rains [2] mostraram que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\frac{L(t) - 2t}{t^{1/3}} \leq x\right] = F_{GUE}(x),$$

sendo F_{GUE} a função de distribuição Tracy-Widom.

Na presença de pontos nos eixos, Baik e Rains [3] mostraram que se a influência dos eixos é escassa, i.e. se os valores de λ e ρ são suficientemente pequenos ainda se obtém como distribuição limite a distribuição de Tracy-Widom. Mas, para valores suficientemente grandes de λ e ρ se obtém um comportamento diferente. Mais explicitamente,

Teorema 2. *Para α_+, α_- fixos, quando $t \rightarrow \infty$ o seguinte é verdade.*

(i) Quando $0 \leq \alpha_{\pm} \leq 1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\frac{L_{\alpha_+}^{\alpha_-}(t) - 2t}{t^{1/3}} \leq x\right] = \begin{cases} F_{GUE}(x), & 0 \leq \alpha_{\pm} < 1, \\ F_{GOE}(x)^2, & \alpha_+ = 1, 0 \leq \alpha_- < 1, \text{ ou } \alpha_- = 1, 0 \leq \alpha_+ < 1, \\ F_0(x), & \alpha_{\pm} = 1. \end{cases}$$

(ii) Quando pelo menos um dos $\alpha_{\pm}$ é maior do que 1, definindo $\alpha = \max\{\alpha_+, \alpha_-\}$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\frac{L_{\alpha_+}^{\alpha_-}(t) - (\alpha + \alpha^{-1})t}{\sqrt{\alpha - \alpha^{-1}}t^{1/2}} \leq x\right] = \begin{cases} \operatorname{erf}(x), & \alpha_+ \neq \alpha_-, \\ \operatorname{erf}(x)^2, & \alpha_+ = \alpha_-. \end{cases}$$

A função $\operatorname{erf}(x)$ representa a função erro. As funções $F_{GUE}(x)$, $F_{GOE}(x)^2$ e $F_0(x)$ serão definidas a seguir.

Seja $u(x)$ a única solução da equação de Painlavé $II(PII)$,

$$u_{xx} = 2u^3 + xu, \quad (1.7)$$

com condição de borda

$$u(x) \sim -Ai(x) \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty, \quad (1.8)$$

sendo que Ai é a função de Airy. A solução da equação de Painlave II , com esta condição de borda, possui o seguinte comportamento assintótico:

$$u(x) = -Ai(x) + O\left(\frac{e^{-(4/3)x^{3/2}}}{x^{1/4}}\right), \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty, \quad (1.9)$$

$$u(x) = -\sqrt{\frac{-x}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad \text{quando } x \rightarrow -\infty \quad (1.10)$$

A existência da solução de PII e seu comportamento assintótico é devido a Hastings e McLeod (1980).

Seja

$$v(x) := \int_{-\infty}^x (u(s))^2 ds. \quad (1.11)$$

As funções de distribuição de Tracy-Widom estão definidas em termos de u e v .

1.4.1 Funções de Distribuição de Tracy-Widom

Seja:

$$F(x) := \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^\infty v(s) ds\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_x^\infty (s-x)(u(s))^2 ds\right), \quad (1.12)$$

$$E(x) := \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^\infty u(s) ds\right). \quad (1.13)$$

Definimos as funções de Tracy-Widom da forma que descrevemos a seguir:

$$F_{GUE}(x) := F(x)^2 = \exp \left(\int_x^{-\infty} (s-x) (u(s))^2 ds \right), \quad (1.14)$$

$$F_{GOE}(x) := F(x)E(x) = F_2(x)^{1/2} e^{\frac{1}{2} \int_x^{\infty} u(s) ds} \quad (1.15)$$

$$F_{GSE}(x) := F(x) (E(x)^{-1} + E(x)) / 2 = F_2(x)^{1/2} \left(e^{-\frac{1}{2} \int_x^{\infty} u(s) ds} + e^{\frac{1}{2} \int_x^{\infty} u(s) ds} \right) / 2 \quad (1.16)$$

Note que :

$$\begin{aligned} F_{GUE}(x) &\sim e^{cx^3} \text{ para } x \rightarrow -\infty, \\ &\sim 1 - e^{-cx^{3/2}} \text{ para } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Desta forma $\frac{dF_{GUE}}{dx}(x) > 0$, $F_{GUE}(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$, $F_{GUE}(x) \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$. Portanto, $F_{GUE}(x)$ é efetivamente uma função de distribuição.

Lembramos da seção 1.2.2 que L_m denota o comprimento da subsequência crescente de comprimento maximal. Johansson et al. ([2]) provaram (escalando e centrado adequadamente) a convergência em distribuição de L_m . Mais especificamente provaram:

Teorema 3. *Seja S_m o grupo de permutações de $1, \dots, m$ com a distribuição uniforme, e seja $L_m(\sigma)$ o comprimento da maior subsequência crescente maximal para $\sigma \in S_m$. Seja $\chi^{(1)}$ uma variável aleatória com distribuição F_{GUE} . Logo, quando $m \rightarrow \infty$*

$$\chi^m := \frac{L_m - 2\sqrt{m}}{m^{1/6}} \rightarrow \chi$$

em distribuição. Isto é,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\chi^m \leq x] = F_{GUE}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Também provaram convergência de todos os momentos.

Teorema 4. *Para todo $N = 1, 2, 3, \dots$ temos*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_m[\chi_m^N] = \mathbb{E}[\chi^N],$$

sendo que $\mathbb{E}$ denota a esperança com respeito a $F_{GUE}(x)$. Em particular, para $m = 2$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[L_m]}{m^{1/3}} = \int x^2 dF_{GUE}(x) - \left(\int x dF_{GUE}(x) \right)^2$$

e para $m = 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_m[L_m] - 2\sqrt{m}}{m^{1/6}} = \int x dF_{GUE}(x).$$

1.4.2 Convergência em Probabilidade

Como consequência do Teorema 2, obtemos a convergência em probabilidade de $\frac{L_\lambda^\rho(xN, tN)}{N}$ à função $U_1(x, t)$ que definimos a seguir.

Seja λ, ρ com $\lambda\rho < 1$ e considere a função $U_1(x, t)$ definida por

$$U_1(x, t) = \begin{cases} \lambda x + \lambda^{-1}t, & \text{se } x/t \leq \rho^2, \\ 2\sqrt{xt}, & \text{se } \rho^2 < x/t \leq \lambda^{-2}, \\ \rho^{-1}x + \rho t, & \text{se } \lambda^{-2} < x/t. \end{cases}$$

Logo, temos a seguinte proposição:

Proposição 1. Para $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$ e $\lambda\rho < 1$ temos que:

$$\frac{L_\lambda^\rho(xN, tN)}{N} \xrightarrow{\mathbb{P}} U_1(x, t). \quad (1.17)$$

Observação 6. Durante a prova denotamos a $L_\lambda^\rho(x, t)$ por $L(x, t, \lambda, \rho)$.

Prova Seja $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2 : \rho^2 < x/t \leq \lambda^{-2}$ e note que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\left|\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t)\right| > \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t) > \epsilon\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t) < -\epsilon\right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dado $\epsilon > 0$, seja k_0 tal que $\forall k \geq k_0, 1 - F(k) < \epsilon/4$. Logo, para $\forall k \geq k_0$ defina $a_N^k(x, t) := \frac{k(xt)^{1/6}}{N^{2/3}}$ e note que $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N^k(x, t) = 0$. Sendo que $L(xN, tN, \lambda, \rho) =$

$L(N\sqrt{xt}, N\sqrt{xt}, \lambda\sqrt{x/t}, \rho\sqrt{t/x})$, em distribuição (ver lema 6), temos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left[\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t) > \epsilon\right] \leq \\ & \mathbb{P}\left[\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t) > a_N^k(x, t)\right] = \\ & 1 - \mathbb{P}\left[\frac{L(N\sqrt{xt}, N\sqrt{xt}, \lambda\sqrt{x/t}, \rho\sqrt{t/x}) - U_1(x, t)}{N^{1/3}(xt)^{1/6}} \leq k\right] \leq \\ & 1 - F(k) + \frac{\epsilon}{4} < \\ & \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Isto é,

$$\mathbb{P}\left[\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t) > \epsilon\right] < \epsilon/2 \tag{1.20}$$

Da mesma forma pode-se provar que

$$\mathbb{P}\left[\frac{L(xN, tN, \lambda, \rho)}{N} - U_1(x, t) < -\epsilon\right] < \epsilon/2 \tag{1.21}$$

Por tanto, o resultado segue para $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2 : \rho^2 < x/t \leq \lambda^{-2}$. A prova nos outros casos segue o mesmo raciocínio. ■

Observação 7. Para $\lambda\rho > 1$ definimos $U_2(x, t)$ por:

$$U_2(x, t) = \begin{cases} \lambda x + \lambda^{-1}t, & \text{se } x/t > \rho/\lambda, \\ \rho^{-1}x + \rho t, & \text{se } x/t < \rho/\lambda. \end{cases}$$

De forma análoga à proposição 1, prova-se que:

$$\frac{L_\lambda^\rho(xN, tN)}{N} \xrightarrow{\mathbb{P}} U_2(x, t).$$

1.5 Geodésicas

Para $x = (x^1, x^2)$ e $y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$, definimos uma ordem parcial $\prec$ em $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma; $x \prec y$ se e somente se $x^1 \leq y^1$ e $x^2 \leq y^2$.

Dado $\omega = \sum_i \delta_{x_i} \in \Omega$, uma realização dos processos de Poisson e $x, y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \{(0, 0)\}$ com $x \prec y$ definimos um caminho fracamente crescente $\gamma(x, y, \omega)$ como sendo a união dos segmentos retos entre os pontos $(x_j)_1^N$ em $\text{supp } \omega$, tais que

$$x \prec x_1 \prec \dots \prec x_N \prec y. \quad (1.22)$$

Assim, γ consiste dos sítios $x_1, \dots, x_N$ e dos elos $\overline{x_1 x_2}, \dots, \overline{x_{N-1} x_N}$. O comprimento $|\gamma|$ é definido como o número de pontos Poissonianos de γ . Note que, chamando $\Pi(x, y)$ ao conjunto de todos os caminhos fracamente crescentes começando em x e finalizando em y , temos que

$$L_m(x, y) = \sup\{|\gamma(x, y)| : \gamma \in \Pi(x, y)\} \quad (1.23)$$

representa o comprimento maximal de um caminho γ conectando os pontos x e y .

Se $x = 0$, escreveremos $L_m(y)$ e não $L_m(x, y)$.

O modelo assim obtido é conhecido como modelo de percolação de último passo.

O conjunto de caminhos fracamente crescentes começando em x e finalizando em y de comprimento maximal será denotado por $\Pi_{\max}(x, y)$. Isto é,

$$\Pi_{\max}(x, y) = \{\gamma \in \Pi(x, y) : L_m(x, y) = |\gamma|\}$$

Definição 1. *Todo caminho $\gamma \in \Pi_{\max}(x, y)$ será chamado geodésica.*

Observação 8. *Note que se $P = (x, t) \in \mathbb{R}_+^2$, logo $L_\lambda^P(x, t) = L_m(P)$. De fato, um caminho fracamente crescente maximal tem que passar por um ponto de cada curva espaço-tempo que cruza o retângulo $[0, x] \times [0, t]$. Sendo que o número de partículas é igual ao número de curvas espaço-tempo que cruzam o retângulo a igualdade $L_\lambda^P(x, t) = L_m(P)$ é evidente.*

Definição 2. *Dado $\omega \in \Omega$ definimos:*

- *Um caminho fracamente crescente γ em ω é chamado um caminho semi-infinito começando em $x \in \mathbb{R}_+^2$, se γ contém infinitos pontos $x_1, \dots, x_n, \dots$ de ω satisfazendo*

$$x \prec x_1 \prec \dots \prec x_n \prec \dots \quad (1.24)$$

Figura 1.4: Caminhos fracamente crescentes.

- Um caminho semi-infinito γ começando em x é chamado unigeodésica se para todo par $x_i \prec x_j$ (com $x_i, x_j \in \gamma$) o segmento entre x_i e x_j é uma geodésica.
- Para $x \prec y$ dados, dizemos que $\gamma \in \Pi_{\max}(x, y, \omega)$ é uma geodésica superior, se para toda $\bar{\gamma} \in \Pi_{\max}(x, y, \omega)$ e para todo $z \in \gamma, \bar{z} \in \bar{\gamma}$ com $z^{(1)} = \bar{z}^{(1)}$ temos que $z^{(2)} \geq \bar{z}^{(2)}$. Se existe uma única geodésica superior em $\Pi_{\max}(x, y, \omega)$, está será denotada por $\gamma^+(x, y, \omega)$ e diremos que toda $\bar{\gamma} \in \Pi_{\max}(x, y, \omega)$ está situada por baixo de γ . Análogamente, denotamos por $\gamma^-(x, y, \omega)$, se existir, à única geodésica inferior em $\Pi_{\max}(x, y, \omega)$.
- Seja γ uma unigeodésica e $\theta \in [0, \pi/2]$. Diremos que γ possui direção θ se e somente se a sequência $x_i/\|x_i\|$ converge a $e^{i\theta}$.

Seguindo as idéias de Wuthrich [23], prova-se que

Lema 2. Existe um conjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega_1$ e para todo $x \prec y$ existem uma única geodésica superior $\gamma^+(x, y, \omega)$ em $\Pi_{\max}(x, y, \omega)$ e uma única geodésica inferior $\gamma^-(x, y, \omega)$ em $\Pi_{\max}(x, y, \omega)$. Se $|\Pi_{\max}(x, y, \omega)| = 1$, então $\gamma^+(x, y, \omega) = \gamma^-(x, y, \omega)$.

Agora, para $\omega \in \Omega_1$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ com $x \prec y$ definimos $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ como sendo igual a $\gamma^+(x, y, \omega)$ se $q_+(y) = y$. Caso contrário, definimos $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ como sendo $\gamma^+(x, y, \omega)$ menos o último segmento. Logo, definimos

$$R(x) = \cup_{x \prec y} \overline{\gamma}^+(x, y, \omega) \quad (1.25)$$

Então,

Lema 3. *Para todo $\omega \in \Omega_1$ temos que para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$, $R(x)$ é uma árvore.*

Prova do Lema 3 Seja $\omega \in \Omega_1$ e $y, z \in \mathbb{R}_+^2$, tais que $x \prec y, z$ com $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ e $\overline{\gamma}^+(x, z, \omega)$ formando um loop. Chame P_1 ao ponto Poissoniano onde $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ e $\overline{\gamma}^+(x, z, \omega)$ se separam e P_2 ao primeiro ponto onde elas se cruzam. Note que temos duas opções para P_2 , ele pode ser um ponto Poissoniano ou não. Antes de continuar com a prova observamos que o número de pontos Poissonianos entre P_1 e P_2 deve ser o mesmo; caso contrário uma das curvas em questão não seria uma geodésica. Dando continuidade à prova do teorema, analisamos o caso em que P_2 é um ponto Poissoniano. Neste caso, uma das geodésicas superiores não seria geodésica superior.

Suponha agora que P_2 não é um ponto Poissoniano e que entre P_1 e P_2 , $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ fica por cima de $\overline{\gamma}^+(x, z, \omega)$. Seja Q_1 o último ponto Poissoniano de $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ antes de P_2 e seja Q_2 o primeiro ponto Poissoniano de $\overline{\gamma}^+(x, z, \omega)$ depois de P_2 . Então, defina uma geodésica γ da seguinte forma: γ coincide com $\overline{\gamma}^+(x, y, \omega)$ até Q_1 , logo acrescentamos o segmento $\overline{Q_1 Q_2}$ e finalmente acrescentamos a parte de $\overline{\gamma}^+(x, z, \omega)$ compreendida entre Q_2 e z . Segue da construção que γ é geodésica superior conectando os pontos x e z contradizendo o fato de que $\overline{\gamma}^+(x, z, \omega)$ é a geodésica superior. ■

A seguir descrevemos a noção de δ -retidão de geodésicas, introduzida por Newman [19]. Para cada ponto de Poisson P , definimos $R^{out}(P)$ como sendo o conjunto de pontos de Poisson Q tais que

$$i \ P \prec Q \text{ e}$$

Figura 1.5: $R(x)$ é uma árvore.

ii $\exists \gamma \in \Pi_{\max}(0, Q)$ com $P \in \gamma$.

Diremos que $R^{\text{out}}(P)$ é δ -reto se existir $C > 0$, tal que

$$R^{\text{out}}(P) \subset Co(P, C|P|^{-\delta}).$$

sendo $Co(P, \theta)$ o cone com eixo através de P e 0 e com ângulo θ . No capítulo 3 provaremos que se $0 \leq \lambda\rho < 1, \epsilon > 0$ e $\delta \in (0, 1/3)$ temos que, quase certamente, para todo ponto $P = (P(1), P(2))$ de Poisson com $P(2)/P(1) \in [\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} - \epsilon]$, exceto uma quantidade finita deles, $R^{\text{out}}(P)$ é δ -reto.

1.6 Caminhos β

Denote por $\Delta_0(t), \Delta_1(t), \Delta_2(t), \dots$ as curvas espaço-temporais correspondentes às trajetórias das partículas do Processo de Hammersley. Aqui é conveniente definir $\Delta_0 = \{(0, 0)\} = \Delta_0(t)$ e convenimos que $\Delta_k(t)$ está situada por baixo de $\Delta_{k+1}(t)$. Diremos que uma sequência de pontos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ de $\mathbb{R}_+^2$ é um caminho β (ver figura 1.6) se satisfaz as seguintes condições:

- $P_n \prec P_{n+1}$,
- $P_n \in \Delta_n(t)$,
- P_n é um ponto β

Figura 1.6: Exemplo de caminho β . ■ : Pontos β

Em relação aos caminhos β provamos (no capítulo 3) o seguinte teorema:

Teorema 5. *Seja $0 \leq \lambda \rho \leq 1$. Quase certamente, se $(P_n)_{n \geq 1}$ é um caminho β temos que:*

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{|P_n|} = P = (\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

com $\tan(\theta) \in [\lambda^2, \rho^{-2}]$.

No regime $0 \leq \lambda \rho < 1$ e para todo $\epsilon > 0$ provamos o seguinte resultado em relação às flutuações ao redor do ângulo assintótico.

Teorema 6. *Seja $0 \leq \lambda\rho < 1$. Logo, para todo $\delta \in (0, 1/3)$ existe uma constante $c > 0$ tal que, quase certamente,*

$$\text{ang}(P_m, P) \leq c|P_m|^{-\delta} \text{ para todo } m \text{ suficientemente grande.}$$

1.6.1 Exemplos de caminhos β

A seguir damos uma série de exemplos que se adequam à definição de caminhos β , deixando em evidência a importância do conceito que acabamos de introduzir.

Partículas de Segunda Classe

Lembrando que X_t denota a posição da partícula de segunda classe no tempo t e chamando τ_n ($\tau_0 := 0$) ao instante de seu n -ésimo salto, temos que $(Q_n)_{n \geq 0}$, com $Q_n := (X_{\tau_n}, \tau_n)$, é um caminho β .

De forma semelhante, se τ'_n ($\tau'_0 := 0$) denota o instante do n -ésimo salto da partícula de segunda classe dual, temos que $(Q'_n)_{n \geq 0}$, com $Q'_n := (X'_{\tau'_n}, \tau'_n)$, também é um caminho β .

Interface de competição no modelo P.N.G.

Agora damos outro exemplo de um caminho β . Para isso definimos um modelo de competição no contexto do modelo de crescimento polinuclear.

Suponhamos que a camada inicial está dividida em dois tipos de cristais diferentes; digamos do tipo 1 se $z < 0$ e do tipo 2 se $z > 0$. Agora, consideremos a seguinte regra: se um evento de nucleação ocorre sobre o cristal j , $j = 1, 2$ esse evento pertence a esse tipo de material j e quando um passo descendente do cristal do tipo 1 colide com um passo ascendente do cristal do tipo 2, eles param. Obtemos assim, uma interface entre os dois cristais em crescimento. Vamos denotar por φ_n a posição da interface na n -ésima capa e por σ_n o instante em que o passo descendente do material 1 colide com um passo

ascendente do material 2 na capa n . Temos, então, que o caminho $R_n = \{(\varphi_n, \sigma_n)_{n \geq 0}\}$ é um β -caminho orientado exceto por uma rotação de 45° .

Figura 1.7: Trajetória da interface de competição.

O interesse por modelos de crescimento de duas espécies começou com Derrida e Dickman [10] e seu estudo sobre a interface de competição entre duas espécies crescentes de Eden (Crescimento em percolação de primeiro passo) em $\mathbb{Z}^2$ começando de um canto determinístico de ângulo α . Os autores encontraram que a interface apresentava um comportamento diferente quando o ângulo mudava de $\alpha < \pi$ a $\alpha > \pi$, indicando que a inclinação assintótica da interface passava de determinística à aleatória. Posteriormente, Ferrari, Martin e Pimentel [11] introduziram um modelo de competição (no contexto de percolação de último passo) e provaram que a interface de competição resultante pode ser mapeada à trajetória da partícula de segunda classe no (TASEP). Esta correspondência permitiu dar uma descrição explícita do comportamento assintótico da interface como função do ângulo α e também possibilitou o entendimento da transição de $\alpha < \pi$ a $\alpha > \pi$. No modelo P.N.G. mostramos que algo semelhante acontece. Se definimos o processo $(\varphi(s), s \geq 0)$ por $\varphi(s) = \varphi_n$ para $s \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, no capítulo 3 provamos:

Teorema 7. *Seja $(\varphi(s), s \geq 0)$ a trajetória da interface de competição no modelo P.N.G. de duas espécies com $\lambda\rho \leq 1$. Logo, quase certamente,*

$$\exists \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi_s}{s} = \begin{cases} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, & \text{se } \lambda\rho = 1, \\ W, & \text{se } \lambda\rho < 1. \end{cases}$$

sendo $W = W(\mathcal{P}, \mathcal{X}, T)$ uma variável aleatória não trivial..

Observação 9. *Diferentemente do que ocorre no cenário TASEP $\times$ percolação de último passo estudado por Ferrari, Martin e Pimentel [11], no cenário Hammersely $\times$ modelo P.N.G. não é possível estabelecer uma relação direta entre a interface de competição e a trajetória da partícula de segunda classe.*

Flutuações e o Problema de Riemann-Hilbert

O objetivo deste capítulo é obter um limitante superior para o desvio moderado de $L_\lambda^\rho(x, t)$ ao redor de seu valor assintótico. Este limitante superior será fundamental no capítulo seguinte, onde estudaremos o comportamento assintótico das geodésicas.

Considere $\omega = \sum_i \delta_{x_i} \in \Omega$, uma realização dos processos de Poisson e seja $\text{supp } \omega = \{x_i\}_i$ seu suporte. Para $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ com $x \prec y$ havíamos definido um caminho fracamente crescente $\gamma(x, y, \omega)$, entre x e y , como sendo a união dos segmentos entre a subsequencia $(x_i)_{i=1}^k$ de pontos de ω , tais que

$$x \prec x_1 \prec \dots \prec x_k \prec y. \quad (2.1)$$

O comprimento $|\gamma|$ foi definido como o número de pontos de Poisson em γ . Neste caso $|\gamma(x, y, \omega)| = k$. Fazendo uma analogia com Teoria de Percolação, podemos interpretar a $|\gamma(x, y, \omega)|$ como o tempo de passagem ao longo do caminho γ na configuração ω . Se $x, y \in \mathbb{R}_+^2$, com $x \prec y$ e $\Pi(x, y, \omega)$ representa o conjunto de todos os caminhos fracamente crescentes possíveis de x a y havíamos definido o tempo da última passagem de x a y por

$$L_m(x, y, \omega, \alpha_+, \alpha_-) = L_m(x, y, \omega) = \sup\{|\gamma| : \gamma \in \Pi(x, y, \omega)\} \quad (2.2)$$

e havíamos notado que $L_m(x) = L_\lambda^\rho(x_1, x_2)$.

2.1 Flutuações ao redor do valor assintótico

O conhecimento do comportamento assintótico das geodésicas ajudará a provar resultados associados a convergência de caminhos β . Em [6], Cator et al. mostram que no regime $\lambda\rho < 1$, as inclinações das partículas de segunda classe (normal e dual) possuem distribuições contínuas com suporte $[\rho^2, \lambda^{-2}]$. Daí surge o interesse em estudar as flutuações do tempo da última passagem ao redor do valor assintótico na região $\Xi = \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^2; \rho^2 < x/t < 1/\lambda^2\}$.

Teorema 8. *Existem constantes $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tais que para todo $(x, t) \in \Xi$ com $\|(x, t)\| > C_1$ e para $k > C_2$*

$$\mathbb{P}[|L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt}| > k (\sqrt{xt})^{1/3}] \leq C_3 \exp\{-C_4 k^{3/2}\} \quad (2.3)$$

□

Para provar este teorema nos baseamos em resultados assintóticos obtidos como consequência do estudo de um Problema de Riemann-Hilbert. Isto é possível porque a distribuição da variável L_λ^ρ pode ser escrita em termos de um certo determinante de Toeplitz, que por sua vez está relacionada à teoria de polinômios ortogonais. Recentemente tem-se desenvolvido um método para obter o comportamento assintótico de polinômios ortogonais. Resumindo, o método consiste em expressar os polinômios ortogonais em termos da solução de um problema de Riemann-Hilbert inicialmente introduzido por Fokas, Its e Kitaev (1992) e analisar este problema assintoticamente através de um método de descenso não comutativo introduzido por X. Zhou e Deift em 1993.

Observação 10. *Para facilitar a escrita das provas, daqui até o final da seção 2.1.1, denotaremos a variável $L_{\alpha_+}^\rho(x, t)$ por $L(x, t, \alpha_+, \alpha_-)$. Quando x for igual a t , escreveremos $L(t, \alpha_+, \alpha_-)$.*

Mais especificamente, Baik e Rains [4] mostraram que:

$$\mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) \leq l] = \frac{1}{Z} (D'_l - \alpha_+ \alpha_- D'_{l-1}) \quad (2.4)$$

sendo que

$$D'_l := \mathbb{E}_{U \in U(l)} \det \left((1 + \alpha_+ U) (1 + \alpha_- U^{-1}) \varphi(U) \right), \quad (2.5)$$

com

$$\varphi(z) = e^{t(z+z^{-1})} \quad (2.6)$$

$$\text{e } Z = e^{\alpha_+ t + \alpha_- t + t^2}.$$

Utilizando a fórmula de integração de Weyl para o grupo unitário $U(l)$, pode-se expressar a quantidade $D_l := \mathbb{E}_{U \in U(l)} \det(\varphi(U))$ como um determinante Toeplitz. Isto é,

$$\mathbb{E}_{U \in U(l)} \det(\varphi(U)) = \det(\varphi_{j-k})_{0 \leq j, k < l} \quad (2.7)$$

sendo φ_j o j -ésimo coeficiente de Fourier de φ . O próximo passo é relacionar o determinante de Toeplitz com a teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário. Para isso, considere os polinômios $\pi_k(z)$ que são obtidos a partir da aplicação do procedimento de Gram-Schmidt aos polinômios $z^k, k \geq 1$ com respeito à medida, concentrada no círculo unitário, $(\varphi(z)/(2\pi iz)) dz$. Segue que

$$\int_{||z||=1} \pi_k(z) \overline{z^j} \frac{\varphi(z)}{2\pi iz} dz = N_k \delta_{jk} \quad 0 \leq j \leq k. \quad (2.8)$$

Se definirmos $\pi_k^*(z) = z^k \pi_k(z^{-1})$ e $(Cf)(z)$, a transformada de Cauchy de f , por

$$(Cf)(z) = \frac{1}{2\pi iz} \int_{||z||=1} \frac{f(s)}{s-z} ds \quad (2.9)$$

segue que a função

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_k(z) & (C\pi_k)(z) \\ -N_{k-1}^{-1} \pi_{k-1}^*(z) & -N_{k-1}^{-1} (C\pi_{k-1}^*)(z) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

é solução do seguinte problema, chamado “Problema de Riemann-Hilbert”;

Seja $\Sigma = S^1$ o círculo unitário orientado no sentido anti-horário, e sejam $\Sigma_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $\Sigma_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Note que Σ_+ (resp. Σ_-) está localizado do lado direito (esquerdo) de Σ , se seguimos a curva no sentido da sua orientação. Defina φ por $\varphi(z, t) = \exp^{t(z+z^{-1})}$. Seja v uma aplicação diferenciável de $\Sigma \rightarrow Gl(2, \mathbb{C})$. Considere o

problema de Riemann-Hilbert (Σ, v) em que procuramos estabelecer a existência e unicidade de uma função Y cuja imagem é uma matriz 2×2 tal que

- $Y(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \Sigma$,
- $Y_+(z) = Y_-(z) v(z)$, $z \in \Sigma$,
- $Y(z) = (I + O(z^{-1})) z^{k\sigma_3}$, quando $z \rightarrow \infty$

sendo que $v(z) = \begin{pmatrix} 1 & z^{-k}\varphi(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Em nosso caso, $Y_{\pm}(z) = \lim_{z' \rightarrow z} Y(z')$, sendo que $z' \in$ ao lado $(\pm)$ de Σ .

A prova do teorema 8 se baseia no controle da quantidade $L_{\lambda}^{\rho}(P)$ para pontos P dentro da diagonal $\Delta = \{P \in \mathbb{R}^2 : P_1 = P_2\}$. O lema a seguir fornece esse controle.

Lema 4. *Seja $\alpha_+, \alpha_- \in (0, 1)$ e considere $L(t, \alpha_+, \alpha_-)$. Logo, existem constantes C_4, C_5, C_6, C_7, c e $M > 0$ tais que para $t \geq C_4$,*

$$\mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) - 2t \leq xt^{1/3}] \leq C_5 e^{-cx^3} \text{ se } x \leq -M \quad (2.11)$$

e

$$\mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) - 2t \geq xt^{1/3}] \leq C_6 e^{-C_7 x^{3/2}} \text{ se } x \geq M. \quad (2.12)$$

A prova do lema 4 depende de resultados assintóticos sobre as entradas da matriz Y . Tais resultados foram obtidos por Baik e Rains e são enunciados na seguinte proposição (Proposição 5.6 em [4].):

Proposição 2. *Suponha que k, x e t estão relacionados da seguinte forma:*

$$\frac{2t}{k} = 1 - \frac{x}{2^{1/3} k^{2/3}}. \quad (2.13)$$

Logo existe M_0 tal que o seguinte é verdade para qualquer M fixo com $M > M_0$. Sejam

$0 < b < 1$ e $0 < L < 2^{-3/2}\sqrt{M}$ fixos. Logo, quando $k, t \rightarrow \infty$, temos que para $x \geq M$,

$$\begin{aligned} |e^{tz}\pi_k(z, t)| &\leq Ce^{-c|x|^{3/2}}, & |z| &\leq b \\ |e^{tz^{-1}}z^{-k}\pi_k(z, t) - 1| &\leq Ce^{-c|x|^{3/2}}, & |z| &\geq |b^{-1}|, \\ |e^{-t\alpha}\pi_k(-\alpha; t)| &\leq Ce^{c|x|}, & \alpha &= 1 - 2^{4/3}k^{-1/3}w, \quad -L \leq w \leq L, \\ |e^{-t\alpha^{-1}}(-\alpha)^{-k}\pi_k(-\alpha; t) - 1| &\leq |Ce^{-c|x|^{3/2}}|, & \alpha &= 1 - 2^{4/3}k^{-1/3}w, \quad -L \leq w \leq L. \end{aligned}$$

e para $x \leq -M$,

$$\begin{aligned} |e^{-t\alpha}\pi_k(-\alpha, t)| &\leq C, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ |e^{-t\alpha^{-1}}(-\alpha)^{-k}\pi_k(-\alpha, t)| &\leq C \quad \alpha \geq 1. \end{aligned}$$

□

2.1.1 Prova do lema 4

Uma vez introduzidos os conceitos e a notação necessária, procedemos a prova do lema 4.

Prova Lembremos que

$$\mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) \leq l] = \frac{1}{Z} (D'_l - \alpha_+\alpha_-D'_{l-1})$$

Por outro lado, Baik e Rains [4] mostraram que:

$$D'_l = \frac{\pi_l^*(-\alpha_+)\pi_l^*(-\alpha_-) - \alpha_+\alpha_-\pi_l(-\alpha_+)\pi_l(-\alpha_-)}{1 - \alpha_+\alpha_-} D_l. \quad (2.14)$$

Por tanto, para poder provar o lema devemos conhecer o comportamento assintótico de π_l, π_l^* e D_l . É aqui que utilizamos a proposição 2.

Com base neste resultado limitaremos o termo $\frac{1}{Z}D'_l$.

Note que

$$\begin{aligned} |\frac{1}{Z}D'_l| &= |e^{-(\alpha_++\alpha_-)t-t^2}D'_l| \\ &\leq \frac{1}{|1 - \alpha_+\alpha_-|} \left(|e^{-\alpha_+t}\pi_l^*(-\alpha_+)| |e^{-\alpha_-t}\pi_l^*(-\alpha_-)| \right. \\ &\quad \left. + |e^{-\alpha_+t}\pi_l(-\alpha_+)| |e^{-\alpha_-t}\pi_l(-\alpha_-)| \alpha_+\alpha_- \right) e^{-t^2}D_l \\ &= \frac{1}{|1 - \alpha_+\alpha_-|} (I.II + III.IV \alpha_+\alpha_-) e^{-t^2}D_l \end{aligned}$$

e que se $0 < \alpha \leq 1$, então $\theta = \alpha^{-1} \geq 1$ e por tanto

$$\begin{aligned} |e^{-\alpha t} \pi_l^*(-\alpha)| &= |e^{-t\theta^{-1}} (-\theta)^{-k} \pi_k(-\theta, t)| \\ &\leq C, \end{aligned}$$

como consequência da proposição 2. Portanto as quantidades I e II são limitadas por C .

Que as quantidades III e IV são limitadas por C também segue da proposição 2.

Por outra lado, Baik, Deift e Johansson [2] mostraram que quando l, x e t são relacionados como na proposição 1, existem constantes $M, C, c > 0$ tais que $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} e^{-t^2} D_l &= e^{-t^2} D_{2t+xt^{1/3}} \\ &\leq C e^{-cx^3}, \quad x \leq -M, \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sendo que uma análise análoga é válida para D'_{l-1} , segue-se, então, que se k, x e t estão relacionados como na proposição 1

$$\mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) - 2t \leq xt^{1/3}] \leq C e^{-cx^3}, \quad x \leq -M \quad (2.16)$$

para $\alpha_+, \alpha_- \in (0, 1)$ e para t suficientemente grande.

Agora mostramos a desigualdade 2.12. Baik e Rains [3] provaram que se $\alpha_+ \alpha_- < 1$ e χ é uma variável aleatória geométrica de parâmetro $\alpha_+ \alpha_-$, a seguinte igualdade (em distribuição) é válida

$$L^+(t) = L(t, \alpha_+, \alpha_-) + \chi, \quad (2.17)$$

sendo L^+ uma variável com distribuição dada por

$$\mathbb{P}[L^+(t) \leq l] = (1 - \alpha_+ \alpha_-) e^{-(\alpha_+ + \alpha_-)t - t^2} D'_l \quad (2.18)$$

com $D'_l = \frac{\Delta(l)}{1 - \alpha_+ \alpha_-} D_l$, e $\Delta(l)$ dado por

$$\Delta(l) = \pi_l^*(-\alpha_+) \pi_l^*(-\alpha_-) - \alpha_+ \alpha_- \pi_l(-\alpha_+) \pi_l(-\alpha_-), \quad (2.19)$$

Sendo $L(t, \alpha_+, \alpha_-), \chi \geq 0$, segue-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) \geq l] &\leq \mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) + \chi \geq l] \\ &= \mathbb{P}[L^+(t) \geq l] = 1 - e^{-(\alpha_+ + \alpha_-)t - t^2} \Delta(l) D_l \end{aligned} \quad (2.20)$$

Note que:

$$1 - e^{-(\alpha_+ + \alpha_-)t - t^2} \Delta(l) D_l = 1 - e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+) e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-) e^{-t^2} D_l \\ + \alpha_+ \alpha_- e^{-\alpha_+ t} \pi_l(-\alpha_+) e^{-\alpha_- t} \pi_l(-\alpha_-) e^{-t^2} D_l \quad (2.21)$$

A continuação aplicamos a desigualdade

$$|1 - abc| \leq |a - 1| + |a||b - 1| + |a||b||1 - c|, \quad (2.22)$$

que é válida para todo $a, b, c \in \mathbb{C}$ (ver lema 5), no lado direito da igualdade em 2.35 para obter

$$|1 - e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+) e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-) e^{-t^2} D_l| \leq |e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+) - 1| \\ + |e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+)||e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-) - 1| \\ + |e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+)||e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-)| \\ |1 - e^{-t^2} D_l|. \quad (2.23)$$

Da proposição 2 segue que tanto $|e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+) - 1|$ como $|e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-) - 1|$ são quantidades limitadas por $Ce^{-cx^{3/2}}$ quando $l, t \rightarrow \infty$. Pela mesma razão, $|e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+)|$ e $|e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-)|$ são limitados por uma constante quando $l, t \rightarrow \infty$.

Note que tomando $l = 2t + xt^{1/3}$, temos que $l \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e que para esta escolha de l e t Baik, Deift e Johansson [2] mostraram que:

$$1 - e^{-t^2} D_{2t+xt^{1/3}} \leq Ce^{-cx^{3/2}}, \quad x \geq M \quad (2.24)$$

Por tanto, para t suficientemente grande e para $x \geq M$, temos que

$$|1 - e^{-\alpha_+ t} \pi_l^*(-\alpha_+) e^{-\alpha_- t} \pi_l^*(-\alpha_-) e^{-t^2} D_l| \leq Ce^{-cx^{3/2}}, \quad x \geq M \quad (2.25)$$

A continuação note que da proposição 2 obtemos que $|e^{-\alpha_+ t} \pi_l(-\alpha_+)|$ e $|e^{-\alpha_- t} \pi_l(-\alpha_-)|$ são limitadas por $Ce^{-cx^{3/2}}$ quando $l, t \rightarrow \infty$ para $x \geq M$. Dado que para $l = 2t + xt^{1/3}$, $e^{-t^2} D_l \leq 1$, segue-se que para t suficientemente grande e para $x \geq M$ e possivelmente para constantes C, c diferentes

$$|1 - e^{-(\alpha_+ + \alpha_-)t - t^2} \Delta(l) D_l| \leq Ce^{-cx^{3/2}}, \quad (2.26)$$

ou equivalentemente, para $x \geq M$ e para t suficientemente grande temos que

$$\mathbb{P}[L(t, \alpha_+, \alpha_-) - 2t \geq xt^{1/3}] \leq Ce^{-cx^{3/2}} \quad (2.27)$$

como queríamos mostrar. ■

No seguinte lema mostramos a desigualdade 2.22 usada na prova anterior.

Lema 5. *Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e $z_0 = 1$. Logo, se $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, então*

$$\left| 1 - \prod_{j=1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=0}^{j-1} |z_k| \right) |1 - z_j| \quad (2.28)$$

Prova A prova é feita por indução. Se $n = 2$ então

$$\begin{aligned} |1 - z_1 z_2| &= |1 - z_1 + z_1(1 - z_2)| \\ &\leq |1 - z_1| + |z_1| |1 - z_2| \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por tanto a desigualdade é válida para $n = 2$. Agora suponha que a desigualdade é válida para $n = N$ e vejamos que continua válida para $N + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| 1 - \prod_{j=1}^{N+1} z_j \right| &= \left| 1 - \left(\prod_{j=1}^N z_j \right) z_{N+1} \right| \\ &= \left| 1 - \left(\prod_{j=1}^N z_j \right) + \left(\prod_{j=1}^N z_j \right) (1 - z_{N+1}) \right| \\ &\leq \left| 1 - \left(\prod_{j=1}^N z_j \right) \right| + \left| \left(\prod_{j=1}^N z_j \right) (1 - z_{N+1}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left(\prod_{k=0}^{j-1} |z_k| \right) |1 - z_j| + \left(\prod_{j=1}^N |z_j| \right) |1 - z_{N+1}| \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(\prod_{k=0}^{j-1} |z_k| \right) |1 - z_j| \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sendo que a desigualdade continua válida para $n = N + 1$ concluímos que a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. ■

É momento de lembrar que nosso interesse é estudar as flutuações de $L_\lambda^\rho(x, t)$ ao redor de seu valor assintótico para um ponto $(x, t) \in \Xi$ qualquer, desde que a sua norma seja suficientemente grande. Mas o lema anterior só nos fornece informação para pontos de norma suficientemente grande da diagonal $D = \{(t, t); t > 0\}$. Os lemas da seguinte seção farão a conexão entre um ponto fora da diagonal e outro dentro dela.

2.1.2 Processo de Hammersley com fontes e dissipadores

Lema 6. (*Propriedade de escala*) Seja L_λ^ρ o processo de Hammersley com fontes de intensidade λ e dissipadores de intensidade ρ e seja $(w, z) \in \mathbb{R}_+^2$. Então,

$$L_\lambda^\rho(w, z) = L_{\lambda\sqrt{w/z}}^{\rho\sqrt{z/w}}(\sqrt{wz}, \sqrt{wz}) \quad (2.31)$$

sendo que a igualdade deve ser entendida como igualdade em distribuição.

Demonstração. Para obter o valor de $L_\lambda^\rho(w, z)$, precisamos apenas considerar as fontes situadas em $[0, w] \times \{0\}$ que seguem uma distribuição Poisson de parâmetro λw , os dissipadores situados em $\{0\} \times [0, z]$ que seguem uma distribuição Poisson de parâmetro ρz e para os pontos situados em $[0, w] \times [0, z]$ que seguem uma distribuição Poisson de parâmetro wz . Por outro lado, para obter o valor de $L_{\lambda\sqrt{w/z}}^{\rho\sqrt{z/w}}(\sqrt{wz}, \sqrt{wz})$ devemos considerar para as fontes situadas em $[0, \sqrt{zw}] \times \{0\}$ que seguem uma distribuição Poisson de parâmetro λw , os dissipadores situados em $\{0\} \times [0, \sqrt{zw}]$, que seguem uma distribuição Poisson de parâmetro ρz e para os pontos situados em $[0, \sqrt{zw}] \times [0, \sqrt{zw}]$, que seguem uma distribuição Poisson de parâmetro wz . Logo a igualdade em distribuição é clara. $\square$

Lema 7. Sejam L_λ^ρ e L_λ^θ dois processos de Hammersley com $\rho < \theta$ e seja $P \in \mathbb{R}_+^2$. Logo, $L_\lambda^\rho(P) \leq L_\lambda^\theta(P)$ quase certamente.

Prova A prova é feita por acoplamento. Intuitivamente o resultado é claro já que $\rho < \theta$ equivale, na versão acoplada, a ter pelo menos a mesma quantidade de pontos Poissonianos no eixo t a nossa disposição para construir as geodésicas. A seguir damos um argumento

formal deste fato.

Acoplamos o processo L_λ^ρ ao processo L_λ^θ . Para isso, consideramos as mesmas fontes para ambos processos. Isto é, consideramos o mesmo processo de Poisson de taxa λ , o mesmo processo de Poisson de taxa 1 no primeiro quadrante e utilizamos como dissipadores para o processo L_λ^ρ um emagrecimento do processo de dissipadores para o processo L_λ^θ . Para isso realizamos um (ρ/θ) -emagrecimento do processo de Poisson de taxa θ obtendo assim um processo de dissipadores de taxa ρ .

Agora seja ω uma realização dos processos de Poisson tais que o processo de Hammersley esteja bem definido e suponha $L_\lambda^\rho(P) = k > j = L_\lambda^\theta(P)$. Logo defina o caminho $z_1, \dots, z_k$ utilizando os pontos $x_1, \dots, x_k$ e $y_1, \dots, y_j$ utilizados para atingir o ponto P desde a origem para os processos L_λ^ρ e L_λ^θ , respectivamente. Os novos pontos z_m são definidos pela relação $z_m = \min\{x_m, y_m\}$, para $m = 1, \dots, j$ e para $m > j$, defina z_m como sendo x_m . Como $z_j \prec x_j \prec x_{j+1}$ e $\theta > \rho$, obtemos um caminho fracamente crescente unindo a origem e o ponto P de comprimento $k > j$ para o processo L_λ^θ . Assim estamos contradizendo o fato de que L representa (quase certamente) o comprimento do caminho mais longo desde a origem até um ponto dado. Logo, $L_\lambda^\rho(P) \leq L_\lambda^\theta(P)$ quase certamente, como queríamos mostrar. ■

Lema 8. *Sejam L_λ^ρ e L_β^ρ dois processos de Hammersley com $\lambda < \beta$. Logo, $L_\lambda^\rho \leq L_\beta^\rho$ a.s.*

Prova O lema 9 é o enunciado recíproco do lema 8.

2.1.3 Prova do Teorema 8

Finalmente, estamos em condições de provar o Teorema sobre as flutuações de $L_\lambda^\rho(P)$ ao redor de seu valor assintótico.

Prova do Teorema 8 Considere a região $\Xi = \{(w, z) : \rho^2 < w/z < 1/\lambda^2\}$ e seja $(x, t) \in \Xi$. Logo $\exists a_1, a_2$ com $0 < a_1 < a_2 : \rho^2 < a_1 < x/t < a_2 < 1/\lambda^2$. Note que:

- $\rho\lambda < \lambda\sqrt{x/t} < \lambda\sqrt{a_2} < 1$

$$\bullet \rho\lambda < \rho\sqrt{t/x} < \rho 1/\sqrt{a_1} < 1$$

Logo, pelos lemas 6, 7 e 8 temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt} > k(\sqrt{xt})^{1/3}] &= \mathbb{P}[L_{\lambda\sqrt{x/t}}^{\rho\sqrt{t/x}}(\sqrt{xt}) - 2\sqrt{xt} > k(\sqrt{xt})^{1/3}] \\ &\leq \mathbb{P}[L_{\lambda\sqrt{a_2}}^{\rho 1/\sqrt{a_1}}(r) - 2r > kr^{1/3}], \end{aligned} \quad (2.32)$$

sendo $r = \sqrt{xt}$. Agora, aplicamos 2.12 para obter

$$\mathbb{P}[L_{\lambda\sqrt{a_2}}^{\rho 1/\sqrt{a_1}}(r) - 2r > kr^{1/3}] \leq Ce^{-ck^{3/2}} \quad (2.33)$$

Logo,

$$\mathbb{P}[L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt} > k(xt)^{1/6}] \leq Ce^{-ck^{3/2}}, \quad (2.34)$$

para r grande e para $k \geq M$.

Por outro lado, e também pelos lemas 6, 7 e 8 temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt} \leq k(\sqrt{xt})^{1/3}] &= \mathbb{P}[L_{\lambda\sqrt{x/t}}^{\rho\sqrt{t/x}}(\sqrt{xt}) - 2\sqrt{xt} \leq k(\sqrt{xt})^{1/3}] \\ &\leq \mathbb{P}[L_{\rho\lambda}^{\rho\lambda}(r) - 2r \leq kr^{1/3}], \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo $r = \sqrt{xt}$. Agora, aplicamos 2.11 para obter

$$\mathbb{P}[L_{\rho\lambda}^{\rho\lambda}(r) - 2r \leq kr^{1/3}] \leq Ce^{-c|k|^3} \quad (2.36)$$

Logo,

$$\mathbb{P}[L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt} \leq k(xt)^{1/6}] \leq Ce^{-c|k|^3} \quad (2.37)$$

para r grande e para $k \leq -M$.

Sendo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt}| > k(xt)^{1/6}] &= \mathbb{P}[L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt} > k(xt)^{1/6}] \\ &\quad + \mathbb{P}[L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt} < (-k)(xt)^{1/6}] \end{aligned} \quad (2.38)$$

segue que

$$\mathbb{P}[|L_\lambda^\rho(x, t) - 2\sqrt{xt}| > k(xt)^{1/6}] \leq Ce^{-ck^{3/2}}, \quad (2.39)$$

como queríamos mostrar.

Observação 11. *O limitante obtido no estudo do desvio de $L_\lambda^p(P)$ para um ponto P da diagonal baseou-se em argumentos analíticos que em nada dependem do mecanismo aleatório responsável pelo desvio de $L_\lambda^p(P)$. Resta então (a futuro) obter uma prova puramente probabilística do desvio em questão.*

2.2 Problema de Riemann-Hilbert

Os problemas de Riemann-Hilbert associados à polinômios ortogonais são enunciados em forma matricial para funções analíticas a valores matriciais. A teoria associada ao problema de Riemann-Hilbert é complicada. A seguir damos uma idéia breve desta teoria no caso unidimensional.

2.2.1 Problema de Riemann-Hilbert unidimensional

A seguir mostramos como exemplo o problema de Riemann-Hilbert unidimensional para valores de fronteira de funções analíticas. Para isso, consideremos uma curva orientada γ . A orientação de γ induz um lado positivo (+) e um lado negativo (−) em γ . Por conveniência definimos que o lado (+) está à esquerda enquanto percorremos a curva segundo sua orientação e o lado (−) está à direita de γ usando o mesmo critério. As curvas aqui consideradas podem ter pontos de interseção ou pontos finais. Em tais pontos, os lados + e − não estão definidos. Denotamos por γ^0 a curva γ sem os pontos de interseção e os pontos finais.

Agora consideremos uma função analítica f em $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Definimos os valores de f na fronteira da seguinte forma. Para $s \in \gamma^0$

$$f_+(s) = \lim_{z \rightarrow s: z \in +\text{lado}} f(z) \quad (2.40)$$

e

$$f_-(s) = \lim_{z \rightarrow s: z \in -\text{lado}} f(z) \quad (2.41)$$

desde que esse limite exista. Diremos que f tem valores contínuos na fronteira em γ^0 se esses limites existirem para todo $s \in \gamma^0$ e f_+ e f_- forem contínuas em γ^0 . Quando os valores de fronteira f_+ , f_- existirem, definimos o salto de f em γ^0 por $v(s) = f_+(s) - f_-(s)$. Segue-se que f satisfaz o seguinte **problema de Riemann-Hilbert** (ou problema de valores de fronteira para funções analíticas):

1. f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$.
2. $f_+(s) = f_-(s) + v(s)$ para $s \in \gamma^0$.

Reciprocamente, suponha que conhecemos o valor de $v(s)$ para $s \in \gamma^0$ e queremos achar uma f que resolva o problema de Riemann-Hilbert acima enunciado e nos perguntamos se caso tal f exista, se ela é única. Facilmente vemos que se o problema tem solução ela não é única, pois é suficiente somar qualquer função inteira para obtermos uma nova solução do problema de Riemann-Hilbert. Logo, devemos impor uma outra condição para garantir a unicidade da solução. Geralmente, se impõe uma condição assintótica extra tal como:

$$f(z) \rightarrow 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

Este tipo de condição chama-se normalização no infinito. Sabe-se que existe uma única solução se v é Hölder contínua em γ e se γ é um contorno simples e fechado, ou uma união disjunta e finita de contornos simples e fechados.

Se γ é um contorno simples, fechado e orientado positivamente, e v é Hölder contínua em γ , então a transformada de Cauchy de v é a solução do Problema de Riemann-Hilbert.

Agora vamos passar a um problema de Riemann-Hilbert multiplicativo. Para isso devemos modificar a condição de salto. Agora, esta é:

$$f_+(s) = f_-(s)v(s) \text{ para } s \in \gamma. \quad (2.43)$$

Quando γ é um contorno simples e fechado, e v é contínua e não nula em γ , definimos o índice de v por

$$\text{ind } v = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma v(s) \quad (2.44)$$

sendo que $\Delta_\gamma v(s)$ é a variação no argumento de $v(s)$ ao percorrer γ uma vez no sentido da sua orientação. É sabido que o índice é um número inteiro. Se o índice é 0, podemos tomar uma rama contínua do logaritmo de v em γ , obtendo assim a seguinte condição de salto:

$$(\log f)_+(s) = (\log f)_-(s) + \log v(s), \quad s \in \gamma \quad (2.45)$$

Neste caso, se v é Hölder contínua a solução do problema de Riemann-Hilbert multiplicativo é dada por

$$f(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\log v(s)}{s - z} ds \right).$$

Convergência dos Caminhos β

O objetivo deste capítulo é provar o teorema central desta tese, o qual estabelece a convergência quase certa dos caminhos β (Teorema 5). Em resumo, a prova deste resultado se baseia nas duas idéias que descrevemos a seguir:

- Primeiro, provamos a retidão de uma geodésica qualquer.
- Logo, construímos duas geodésicas tais que para um caminho β qualquer, este fique confinado à região delimitada pelas geodésicas.

No capítulo 1 definimos $R^{out}(P)$ como sendo o conjunto de pontos Poissonianos Q com $P \prec Q$, tal que existe um caminho maximal conectando 0 e Q passando por P . Se $P = (P(1), P(2)) \in \mathbb{R}_+^2$, seja $\alpha(P) = 2\sqrt{P(1)P(2)}$. Denotamos por $O_P(\delta)$ o conjunto de pontos Q satisfazendo:

- i $P \prec Q$,
- ii $\text{ang}(P, Q) \in [\alpha(P)^{-\delta}, \alpha(P)^{-2\delta}]$,
- iii $\alpha(Q) \leq 2\alpha(P)$.

Definição 3. *Seja $P \in \mathbb{R}^2$ e $\delta > 0$. Diremos que P é um ponto δ -comportado se para todo $Q \in R^{out}(P)$ com $\alpha(Q) \leq 2\alpha(P)$ temos que: $\text{ang}(P, Q) < \alpha(P)^{-\delta}$ ou $\text{ang}(P, Q) > 2\alpha(P)^{-\delta}$.*

Lema 9. *Seja $0 \leq \lambda\rho < 1, \delta \in (0, 1/3)$ e $\epsilon > 0$. Logo, com probabilidade 1 todo ponto de Poisson P , exceto uma quantidade finita de eles, com $P = (P(1), P(2))$ e $P(2)/P(1) \in [\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} - \epsilon]$ é δ -comportado.*

Seja l_x a reta que passa pela origem e o ponto x e defina o cilindro (truncado) C_x^r por

$$C_x^r = \{y \in \mathbb{R}_+^2; x \prec y, d(y, l_x) \leq r, |y| \leq 2|x|\}.$$

Denotemos a fronteira de C_x^r por ∂C_x^r . Dando continuidade definimos $\partial_O C_x^r = \{y \in \partial C_x^r, |y| \geq 2|x|\}$, $\partial_I C_x^r = \{y \in \partial C_x^r, x_1 = y_1 \text{ ou } x_2 = y_2\}$ e $\partial_S C_x^r = \partial C_x^r \setminus (\partial_O C_x^r \cup \partial_I C_x^r)$. Para $x \in \mathbb{R}_+^2$ e $\delta \in (0, 1)$ definimos o evento $\mathcal{G}_x(\delta)$ por:

$$\mathcal{G}_x(\delta) = \{\exists z \in O_x(\delta), \gamma \in \Pi_{\max}(0, z), \gamma \cap C(x) \neq \emptyset \text{ e } \gamma \cap \partial_S C_x^{|x|^{1-\delta}} \neq \emptyset\}.$$

sendo que $C(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : x_j \leq y_j \leq x_j + 1, j = 1, 2\}$. Para $0 \leq \lambda\rho < 1$ e $\epsilon > 0$ definimos $A(\lambda, \rho, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}_+^2, x_2/x_1 \in (\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} - \epsilon)\}$. A prova do lema 9 se baseia no seguinte lema.

Lema 10. *Seja $0 \leq \lambda\rho < 1, \delta \in (0, 1/3)$ e $\epsilon > 0$. Existem constantes $A_1, A_2, M > 0$ tais que se $x \in A(\lambda, \rho, \epsilon)$ e $|x| \geq M$ então:*

$$\mathbb{P}[\mathcal{G}_x(\delta)] \leq A_1 e^{-A_2|x|^{\frac{1-3\delta}{6}}}.$$

Na prova do seguinte lema seguimos as idéias introduzidas por Wüthrich [23].

Demonstração Seja $\delta \in (0, 1/3)$ e $x \in \mathbb{R}_+^2$ com $x_2/x_1 \in [\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} - \epsilon]$ e $|x|$ suficientemente grande de forma tal que para todo $Q \in O_x(\delta), Q_2/Q_1 \in [\lambda^2 + \epsilon/2, \rho^{-2} - \epsilon/2]$. Vamos supor que $C_x^{|x|^{1-\delta}} \subset A(\lambda, \rho, \epsilon/2)$. Caso contrário, substituímos (no decorrer da prova) $C_x^{|x|^{1-\delta}}$ por $C_x^{|x|^{1-\delta}} \cap A(\lambda, \rho, \epsilon/2)$. Dando continuidade definimos duas seqüências $(S_k^u)_k$ e $(S_k^d)_k$ na fronteira, superior e inferior respectivamente, de $C_x^{|x|^{1-\delta}}$. Uma vez definida as seqüências de pontos na fronteira definimos duas famílias de paralelogramos $(\mathcal{H}_k^u)_k$ e $(\mathcal{H}_k^d)_k$. Para definir estes conjuntos definimos duas seqüências auxiliares

$(\overline{S}_k^u)_k$ da seguinte forma: $\overline{S}_k^u = \partial C_x^r \cap \{y \in \mathbb{R}_+^2, y_1 = S_{k,1}^u, y_2 < S_{k,2}^u\}$. De forma semelhante definimos a outra seqüência auxiliar $(\overline{S}_k^d)_k$. A seqüência de pontos é escolhida de forma tal que o volume de qualquer paralelogramo é limitado superiormente por $2|x|^\delta$. Mais especificamente, definimos $N = \lfloor |x|^{2-2\delta} \rfloor + 1$ e para $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ definimos $S_k^u = (1 + \frac{k}{N})|x|\hat{x} + |x|^{1-\delta}\hat{x}'$, sendo que $x = |x|\hat{x} = |x|(\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $\hat{x}' = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ para algúm $\theta \in (0, \pi/2)$. $\mathcal{H}_k^u$ será a interseção de $C_x^{|x|^{1-\delta}}$ com o paralelogramo (truncado) determinado por $S_{k-1}^u, S_k^u, \overline{S}_{k-1}^u, \overline{S}_k^u$. Desta forma, o volume de $\mathcal{H}_k^u$ é limitado superiormente por $2|x|^{2-\delta}/N \leq 2|x|^\delta$. Na definição de S_0^u devemos ser cuidadosos. Definimos S_0^u como sendo o ponto de $\partial_S C_x^{|x|^{1-\delta}}$ com primeira coordenada igual a x_1 . Um procedimento análogo nos fornece a seqüência $(S_k^d)_k, k \in \{0, 1, \dots, N\}$ e a família de paralelogramos $(\mathcal{H}_k^d)_k, k \in \{0, 1, \dots, N\}$ de forma tal que o volume de $\mathcal{H}_k^d$ é limitado superiormente por $2|x|^{2-\delta}/N \leq 2|x|^\delta$.

Agora sejam $z \in O_x(\delta)$ e $\gamma \in \Pi_{\max}(0, z)$ tais que $\gamma \cap C(x) \neq \emptyset$ e $\gamma \cap \partial_S C_x^{|x|^{1-\delta}} \neq \emptyset$. Supomos, sem perda de generalidade, que γ cruza $\partial_S C_x^{|x|^{1-\delta}}$ a través da fronteira superior. Definimos z_2 como sendo o primeiro ponto de γ depois de deixar $C(x)$; z_1 como sendo o último ponto de γ antes de z_2 ; z_3 como sendo o último ponto de γ antes de entrar em $\mathcal{H}_k^u$. e z_4 como sendo o primeiro ponto de γ após cruzar $\partial_C C_x^{|x|^{1-\delta}}$. Definimos $n(\mathcal{H}) = \sup_{j=1, \dots, N, k=u, d} n(\mathcal{H}_j^k)$, sendo que $n(\mathcal{H}_j^k)$ é o número de pontos de Poisson em $\mathcal{H}_j^k$. Consideremos, também, $\lambda\rho > 0$ fixos com $\lambda\rho < 1$. Para simplificar a notação denotamos, no decorrer da prova, a L_λ^ρ por L_e , sendo que e é para indicar a presença de fontes e dissipadores. Temos, então, as seguinte possibilidades:

1. $z_2 \neq z_4$ e $z_3 \neq z_1, z_2$. Neste caso temos que: $L_e(0, S_{k-1}^u) \leq L_e(0, z_4) = L_e(0, z_1) + L_e(z_2, z_4) \leq L_e(0, x') + L_e(x, z_3) + n(\mathcal{H}) + 1 \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u) + n(\mathcal{H}) + 1$.
2. $z_2 \neq z_4$ e $z_2 = z_3$. Temos, então, que: $L_e(0, S_{k-1}^u) \leq L_e(0, z_4) = L_e(0, z_1) + L_e(z_3, z_4) \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u) + n(\mathcal{H}) + 1$.
3. $z_2 \neq z_4$ e $z_1 = z_3$. Neste caso temos que: $L_e(0, S_{k-1}^u) \leq L_e(0, z_4) \leq L_e(0, z_1) + L_e(z_3, z_4) \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u) + n(\mathcal{H}) + 1$.

4. $z_2 = z_4$. Temos, então, que: $L_e(0, S_{k-1}^u) \leq L_e(0, z_4) = L_e(0, z_1) + 1 \leq L_e(0, x') + 1 \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u) + n(\mathcal{H}) + 1$.

Em qualquer dos quatro cenários possíveis obtemos

$$L_e(0, S_{k-1}^u) \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u) + n(\mathcal{H}) + 1.$$

Definindo $\mathcal{I} = \{(k, l) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{u, d\}, \mathcal{H}_k^l \neq \emptyset\}$, temos que:

$$\mathbb{P}[\mathcal{G}_x(\delta)] \leq \sum_{(k,l) \in \mathcal{I}} \mathbb{P}[L_e(0, S_{k-1}^u) \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u) + n(\mathcal{H}) + 1]$$

Utilizando o lema 11 [23] (ver final da prova) temos para $|x|$ suficientemente grande que:

$$\begin{aligned} \alpha(S_{k-1}^u) - (\alpha(x') + \alpha(S_{k-1}^u - x)) &= \alpha(S_{k-1}^u) - (\alpha(x) + \alpha(S_{k-1}^u - x)) \\ &\quad + (\alpha(x) - \alpha(x')) \\ &\geq C_5|x|^{1-2\delta} + (\alpha(x) - \alpha(x')) \\ &= C_5|x|^{1-2\delta} + 2 \left(\frac{x_1x_2 - (x_1+1)(x_2+1)}{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{(x_1+1)(x_2+1)}} \right) \\ &\geq C_5|x|^{1-2\delta} - \frac{x_1+x_2+1}{2\sqrt{x_1x_2}} \\ &\geq \frac{C_5}{2}|x|^{1-2\delta} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathcal{G}_x(\delta)] &\leq \sum_{(k,l) \in \mathcal{I}} \mathbb{P}[L_e(0, S_{k-1}^u) + \frac{C_5}{4}|x|^{1-2\delta} \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u)] \\ &\quad + \mathbb{P}[n(\mathcal{H}) + 1 > \frac{C_5}{4}|x|^{1-2\delta}]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Primeiro limitaremos o último termo. Para isso aplicamos a desigualdade de Chebychev:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[n(\mathcal{H}) + 1 > \frac{C_5}{4}|x|^{1-2\delta}] &\leq \sum_{(k,l) \in \mathcal{I}} \mathbb{P}[n(\mathcal{H}_k^l) + 1 > \frac{C_5}{4}|x|^{1-2\delta}] \\ &\leq 2Ne^{-\frac{C_5}{4}|x|^{1-2\delta} + 1 + 2(e-1)|x|^\delta} \\ &\leq e^{-\frac{C_5}{5}|x|^{1-2\delta}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

para $|x|$ suficientemente grande.

Definindo $\bar{\mathcal{G}}_{k-1}^u(x) = [L_e(0, S_{k-1}^u) + \frac{C_5}{4}|x|^{1-2\delta} \leq L_e(0, x') + L_e(x, S_{k-1}^u)]$ temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\bar{\mathcal{G}}_{k-1}^u(x)] &\leq \mathbb{P}[L_e(0, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u) \leq -\frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \\ &\quad + \mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \\ &\quad + \mathbb{P}[L_e(x, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u - x) \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \end{aligned}$$

Começamos limitando $\mathbb{P}[L_e(x, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u - x) \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}]$. Para $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ com $x \prec y$ definimos o retângulo $[x, y] = \{z, x \prec z \prec y\}$ e definimos $a[x, y]$ como sendo a área do retângulo $[x, y]$. Precisamos distinguir entre dois casos. Se $a[x, z] \leq \frac{C_5}{13(e-1)}|x|^{1-2\delta}$, $\bar{L}_e(x, S_{k-1}^u) = L_e(x, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u - x)$ e $n(A)$ é o número de pontos de Poisson em A temos, pela desigualdade de Chebyshev, que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\bar{L}_e(x, S_{k-1}^u) \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] &\leq \mathbb{P}[n([x, z]) \geq \alpha(S_{k-1}^u - x) + \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \\ &\leq \mathbb{P}[n([x, z]) \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \\ &\leq e^{-\frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}} \mathbb{E}[e^{n([x, z])}] \\ &\leq e^{-C_6|x|^{1-2\delta}}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

para $|x|$ suficientemente grande e para alguma constante C_6 . Por outro lado, se $|x|$ é suficientemente grande, $a[x, z] \geq \frac{C_5}{13(e-1)}|x|^{1-2\delta} > |x|^{1/3}$. Sendo que $a[x, z] \leq |z|^2 \leq 4|x|^2$ temos que $\frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta} \geq \frac{C_5}{24}a[x, z]^{\frac{1-2\delta}{2}}$, para $|x|$ suficientemente grande. Segue-se então que:

$$\mathbb{P}[\bar{L}_e(x, S_{k-1}^u) \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \leq \mathbb{P}[L_e(x, S_{k-1}^u) \geq 2a[x, z]^{1/2} + \frac{C_5}{24}a[x, z]^{\frac{1-2\delta}{2}}]$$

Pelo lema 12 (ver final da prova) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $\mathbb{P}[L_e(x, S_{k-1}^u) \geq 2a[x, z]^{1/2} + \frac{C_5}{24}a[x, z]^{\frac{1-2\delta}{2}}] \leq c_1 e^{-c_2 \frac{1-3\delta}{6}}$. Portanto,

$$\mathbb{P}[\bar{L}_e(x, S_{k-1}^u) \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] \leq c_1 e^{-c_2 \frac{1-3\delta}{6}}. \tag{3.4}$$

Agora limitamos $\mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}]$. Sendo $|x| \leq |x'| \leq 2|x|$ e definindo $\kappa = \frac{2}{3} - 2\delta$ temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12}|x|^{1-2\delta}] &= \mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12} \frac{1}{2^{1/3+\kappa}} |x|^{1/3+\kappa}] \\ &\leq \mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12} \frac{1}{2^{1/3+\kappa}} |x'|^\kappa (\sqrt{x'_1 x'_2})^{1/3}] \end{aligned}$$

Pelo Teorema 8, existem constantes $c_3, c_4 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12} \frac{1}{2^{1/3+\kappa}} |x'|^\kappa (\sqrt{x'_1 x'_2})^{1/3}] &\leq c_3 e^{-c_4 |x|^{3\kappa/2}} \\ &= c_3 e^{-c_4 |x|^{1-3\delta}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{P}[L_e(0, x') - \alpha(x') \geq \frac{C_5}{12} |x|^{1-2\delta}] \leq c_3 e^{-c_4 |x|^{1-3\delta}}. \quad (3.5)$$

Finalmente limitamos $\mathbb{P}[L_e(0, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u) \leq -\frac{C_5}{12} |x|^{1-2\delta}]$. Note que se $L(P)$ denota o comprimento de uma geodésica na ausência de fontes e dissipadores temos que:

$$\mathbb{P}[L_e(0, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u) \leq -\frac{C_5}{12} |x|^{1-2\delta}] \leq \mathbb{P}[L(0, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u) \leq -\frac{C_5}{12} |x|^{1-2\delta}]$$

Pelo lema 7.1 de [2], existem constantes $c_6, c_7 > 0$ tais que $\mathbb{P}[L(0, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u) \leq -\frac{C_5}{12} |x|^{1-2\delta}] \leq c_6 e^{-c_7 |x|^{2-6\delta}}$. Portanto,

$$\mathbb{P}[L_e(0, S_{k-1}^u) - \alpha(S_{k-1}^u) \leq -\frac{C_5}{12} |x|^{1-2\delta}] \leq c_6 e^{-c_7 |x|^{2-6\delta}}. \quad (3.6)$$

Coletando (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) obtemos:

$$\mathbb{P}[\mathcal{G}_x(\delta)] \leq 2NA_1 e^{-A_2 |x|^{\frac{1-3\delta}{6}}},$$

para algumas constantes $A_1, A_2 > 0$. Sendo N da ordem de $|x|^{2-2\delta}$, o resultado segue. ■

A seguir enunciamos os lemas utilizados na prova anterior.

Lema 11. ([23]) *Seja $\delta \in (0, 1)$. Existem constantes $C_5 > 0$ e $M > 0$ tais que para $x \in \mathbb{R}_+^2$ com $|x| > M$ e $z \in \partial C_x^{|x|^{1-\delta}}$,*

$$\alpha(z) - (\alpha(x) + \alpha(z-x)) \geq C_5 |x|^{1-2\delta}.$$

Seja S_m o grupo de permutações $\{\sigma\}$ dos números $1, 2, \dots, m$. Lembremos que $L_m(\sigma)$ denota o comprimento da subsequência crescente maximal da permutação aleatória σ . Dotamos a S_m com a distribuição uniforme de forma tal que se definirmos $q_{n,m} = \mathbb{P}[L_m(\sigma) \leq$

$n]$, temos que

$$q_{n,m} = \frac{f_{n,m}}{m!},$$

sendo $f_{n,m} = \#$ de σ com $L_m(\sigma) \leq n$.

Logo, definimos φ_n por:

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} q_{n,m}.$$

Johansson et al [2] provaram:

Lema 12. *Seja $t = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/3} (n+1 - \sqrt{\lambda})$. Existem constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 \in (0, \infty)$ tais que se $c_1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}^{2/3}$ e n suficientemente grande, então*

$$|\log \varphi_n(\lambda)| \leq c_3 \exp\{-c_4 t^{3/2}\},$$

e se $-c_2 (n+1)^{2/3} \leq t \leq -c_1$ e n suficientemente grande, então

$$\varphi_n(\lambda) \leq c_3 \exp\{c_4 t^3\}.$$

Observação 12. *Note que*

$$\mathbb{P}[L(P, Q) \leq k] = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}[L(P, Q) \leq k | n([P, Q]) = s] \mathbb{P}[n([P, Q]) = s] = \varphi_k(a[P, Q])$$

Prova do lema 9 Pelo lema 10, o resultado é consequência do lema de Borel-Cantelli. ■

A seguir provamos o teorema que se refere à δ -retidão de geodésicas.

Teorema 9. *Seja $0 \leq \lambda \rho < 1$. Para qualquer $\epsilon > 0$ e $\delta \in (0, 1/3)$, quase certamente, para todos os pontos Poissonianos $P = (P(1), P(2))$ com $P(2)/P(1) \in [\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} + \epsilon]$, exceto uma quantidade finita, temos que $R^{\text{out}}(P)$ é δ -reto.*

Observação 13. *Para $\lambda = \rho = 0$ este teorema é exatamente o lema 2.4 em Wüthrich [23].*

Prova do Teorema 9 Pelo lema anterior temos que, quase certamente, para todo ponto Poissoniano P com $P(2)/P(1) \in [\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} + \epsilon]$, exceto uma quantidade finita deles, se

$Q \in R^{out}(P)$ e $\alpha(Q) \leq 2\alpha(P)$, então

$$ang(P, Q) < \alpha(P)^{-\delta}$$

ou

$$ang(P, Q) > 2\alpha(P)^{-\delta}$$

Por outro lado, se $|P|$ é suficientemente grande, então para ir de $\partial Co(P, \alpha(P)^{-\delta})$ a algum ponto $Q \in Co(P, 2\alpha(P)^{-\delta})^c$ o caminho ótimo utiliza um ponto Poissoniano Q' com

$$ang(P, Q') \in [\alpha(P)^{-\delta}, 2\alpha(P)^{-\delta}]$$

e portanto, podemos descartar a segunda opção acima para $ang(P, Q)$.

Portanto, temos que:

$$R^{out}(P) \subset Co(P, |P|^{-\delta}) \cup \bigcup_{\alpha(Q) \geq 2\alpha(P)} R^{out}(Q).$$

Agora note que se $Q \in Co(P, \epsilon_1)$ então o cone $Co(Q, \epsilon_2) \subset Co(P, \epsilon_1 + \epsilon_2)$. Portanto procedendo de forma indutiva em $m, m = 1, 2, \dots$, temos que:

$$R^{out}(P) \subset Co(P, \epsilon_m(P)) \cup \bigcup_{\alpha(Q) \geq 2^m \alpha(P)} R^{out}(Q)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ sendo que:

$$\epsilon_m(P) = \sum_{j=0}^{m-1} (2^j \alpha(P))^{-\alpha} \tag{3.7}$$

$$\leq C(\delta) (1 - 2^{-\delta})^{-1} |P|^{-\delta}, \tag{3.8}$$

para uma constante $C(\delta) > 0$ dependendo apenas de δ .

Por outro lado note que a interseção de $R^{out}(Q)$ com qualquer região limitada de $\mathbb{R}_2^+$ é eventualmente vazia quando $|Q| \rightarrow \infty$. Portanto, mandando m para infinito temos que

$$R^{out}(P) \subset Co(P, C|P|^{-\delta}),$$

para uma constante $C > 0$ como queríamos mostrar. ■

Observação 14. Resumindo, a propriedade de δ -retidão nos permite afirmar que se uma geodésica passa por um ponto remoto P , então ela tem que permanecer dentro do cone $Co(P, C|P|^{-\delta})$.

Como consequência da retidão das geodésicas obtemos o lema que segue, o qual será fundamental para provar a convergência dos caminhos β .

Lema 13. Sejam $a, a' \in (\rho^2, \lambda^{-2})$ com $a < a'$. Quase certamente, se $(Q_i)_{i \geq 1}$ e $(Q'_j)_{j \geq 1}$ são duas seqüências de pontos de Poisson, tais que $Q_i \prec Q_{i+1}$, $Q'_j \prec Q'_{j+1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} |Q_i| = \lim_{j \rightarrow \infty} |Q'_j| = \infty$ e

$$\limsup \frac{Q'_j(2)}{Q'_j(1)} < 1/a' < 1/a < \liminf \frac{Q_j(2)}{Q_j(1)},$$

então existe uma quantidade finita de índices i , tais que para algum j , $Q'_j \in R^{out}(Q_i)$. Analogamente, existe uma quantidade finita de índices j , tais que para algum i , $Q_i \in R^{out}(Q'_j)$.

Prova Considere a seguinte partição do quadrante positivo do plano:

$$C_0 := \{0 \leq t \leq \lambda^2 x\},$$

$$C_1 := \{0 \leq \lambda^2 x \leq t \leq x/a\},$$

$$C_2 := \{0 \leq x/a \leq t \leq x/a'\},$$

$$C_3 := \{0 \leq x/a' \leq t \leq \rho^2\},$$

$$C_4 := \{0 \leq x/\rho^2 \leq t\}.$$

Seja $\delta \in (0, 1/3)$ e note que quase certamente, para $|Q|$ suficientemente grande, temos que uma das seguintes opções é verdadeira:

1. $R^{out}(Q)$ é δ -reto;
2. Se $Q \in C_0$ e $Q \prec q' \in C_3$, então todo caminho ótimo de Q a Q' tem um ponto de Poisson em C_1 , e se $Q \in C_4$ e $Q \prec Q'^{prec} \in C_1$, então todo caminho ótimo de Q a Q' tem um ponto de Poisson em C_3 ;

3. Se $Q \in C_1$ então $Co(Q, c|Q|^{-\delta}) \cap (C_3 \cup C_4) = \emptyset$ e se $Q \in C_3$ então $Co(Q, c|Q|^{-\delta}) \cap (C_0 \cup C_1) = \emptyset$

Agora, suponha que $Q'_j \in R^{out}(Q_i)$, $|Q'_j|, |Q_i| \geq M$ e $Q'_j(2)/Q'_j(1) < 1/a'$. Se $Q_i \in C_3$ então por 1) e 3), $Q'_j \notin (C_1 \cup C_0)$, o qual é uma contradição. Se $Q_i \in C_4$, logo por (2) existe $\overline{Q_i} \in C_3$, tal que $Q'_j \in R^{out}(\overline{Q_i})$ e então por 1) e 3) também temos uma contradição. Como estamos assumindo que $Q_i \in C_3 \cup C_4$ para todos exceto uma quantidade finita de índices i , segue que existe uma quantidade finita de índices i tais que para algum j , o caminho ótimo de 0 a Q'_j passa por Q_i . A prova no outro caso é completamente análoga. ■

Dando continuidade, enunciaremos dois resultados que embora sejam simples serão de muita importância quando provemos resultados de convergência para caminhos β .

Segue da definição de caminhos β que se $(Q_n)_{n \geq 0}$ e $(Q_n^*)_{n \geq 0}$ são os caminhos β correspondente às partículas de segunda classe, normal e dual, então eles são os caminhos β mais à esquerda e mais à direita, respectivamente. Mais precisamente:

Lema 14. *Sejam $(Q_n)_{n \geq 0}$ e $(Q_n^*)_{n \geq 0}$ os caminhos β que correspondem as partículas de segunda classe, normal e dual, respectivamente, e seja $(P_n)_{n \geq 0}$ um caminho β . Logo*

$$\frac{Q_n(1)}{Q_n(2)} \leq \frac{P_n(1)}{P_n(2)} \leq \frac{Q_n^*(1)}{Q_n^*(2)}.$$

Antes de enunciar e provar o lema que garantirá a existência de tais geodésicas, introduziremos um pouco de notação com o intuito de simplificar a prova do resultado.

Para $Q \in \mathbb{R}^2$ definimos as regiões A_Q e B_Q por

$$A_Q = \{P \in \mathbb{R}_+^2 : P \prec Q\}$$

e se $\omega = \sum_j \delta_{x_j}$ é uma realização dos processos de Poisson e $\text{supp } \omega = \{x_j\}_j$ é seu suporte, então

$$B_Q(\omega) = \{P \in A_Q \cap \text{supp } \omega\}$$

Lema 15. *Seja $\{P_n\}_n$ um caminho β . Logo, quase certamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem duas geodésicas γ_n^+ e γ_n^- em $\Pi_{\max}(0, P_n)$ tais que o caminho orientado $\gamma_n = \{P_0, \dots, P_n\}$ está confinado à região delimitada pelas geodésicas γ_n^+ e γ_n^- .*

Observação 15. *A prova do Lema 15 é difícil de se escrever, mas é muito simples quando a construção das geodésicas γ_n^+ e γ_n^- é observada em um gráfico (ver figura 3.1).*

Prova do Lema 15. Seja $\Delta_1 < \Delta_2 < \dots$ uma realização do processo de Poisson de fontes e seja $\Delta_k(t)$ a trajetória da k -ésima partícula (ordinária), para a qual $\Delta_k(0) = \Delta_k$. Logo, a trajetória da k -ésima partícula corresponde à fronteira ∂G_k , sendo que $G_k = \{P : L_\lambda^p(P) \leq k - 1\}$. Dando continuidade, definiremos uma geodésica $\gamma_n^+ = \{G_0^+, \dots, G_n^+\}$, cujo gráfico ficará por cima do gráfico de γ_n utilizando uma construção do tipo *Backward*. Fixemos uma realização dos processos de Poisson e seja $G_n^+ = (G_n^+(1), P_n(2))$ o ponto poissoniano, vindo de um dos três processo de Poisson, que primeiro aparece à esquerda de P_n no nível ∂G_n . Isto é, $G_n^+ \in \partial G_n$ e $\pi_2(G_n^+) \geq \pi_2(P) \forall P \in \partial G_n \cap B_{P_n}(\omega)$, sendo $\pi_k, k = 1, 2$ a projeção na k -ésima coordenada. Agora suponha que $G_n^+, \dots, G_{n-k}^+$ foi definida para algum $k < n$. Logo, definimos $G_{n-(k+1)}^+$ como sendo o ponto Poissoniano de $\partial G_{n-(k+1)} \cap B_{P_{n-k}}(\omega)$ que primeiro aparece a esquerda de P_{n-k} . Note que se um dos pontos G_k^+ pertence ao eixo t (eixo vertical), então $G_0, \dots, G_{k-1}$ também pertencem ao eixo t . Agora considere a curva γ_n^+ resultado da interpolação linear dos pontos $G_0^+, \dots, G_n^+, P_n$. Por construção, γ_n^+ é uma geodésica, já que utiliza um ponto Poissoniano de cada trajetória $\Delta_k(t)$ que cruza a região A_{P_n} e seu gráfico fica por cima do gráfico de γ_n .

De forma semelhante, podemos definir uma geodésica $\gamma_n^- = \{G_0^-, \dots, G_n^-\}$ cujo gráfico fica por baixo de γ_n . Neste caso definimos $G_n^- = (P_n(1), G_n^-(2))$ como sendo o primeiro ponto poissoniano que aparece a direita de P_n no nível ∂G_n . Suponha que $G_n^-, \dots, G_{n-k}^-$ foi definida para algum $k < n$. Logo, definimos $G_{n-(k+1)}^-$ como sendo o ponto Poissoniano de $\partial G_{n-(k+1)} \cap B_{P_{n-k}}(\omega)$ que primeiro aparece à direita de $P_{n-(k+1)}$. Note que se um dos pontos G_k^- pertence ao eixo x (eixo horizontal), então $G_0, \dots, G_{k-1}$ também pertencem ao eixo x . Agora considere a curva γ_n^- que resulta resultado da interpolação linear dos pontos de $G_0^-, \dots, G_n^-, P_n$. Por construção, γ_n^- é uma geodésica, já que utiliza um ponto

Poissoniano de cada trajetória $\Delta_k(t)$ que cruza a região A_{P_n} e seu gráfico fica por baixo do gráfico de γ_n .

□

Figura 3.1: Caminho β cercado por dúas geodésicas.

Finalmente, estamos em condições de provar a convergência dos caminhos β .

Prova do Teorema 5 Consideremos primeiro o caso $\lambda\rho < 1$.

Começamos notando que se $(P_n)_{n \geq 0}$ é um caminho β , então

$$\lambda^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(2)}{P_n(1)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(2)}{P_n(1)} \leq \frac{1}{\rho^2} \quad (3.9)$$

Pelo lema 14, para provar 3.9 é suficiente provar que

$$\lambda^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n^*(2)}{Q_n^*(1)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(2)}{Q_n(1)} \leq \frac{1}{\rho^2} \quad (3.10)$$

sendo que $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ e $\{Q_n^*\}_{n \geq 0}$ são os caminhos β correspondentes às partículas de segunda classe normal e dual, respectivamente.

Para obter a segunda desigualdade acoplamos o processo de Hammersley com parâmetros λ e ρ ao processo estacionário com parâmetros ρ^{-1} e ρ . Como $\rho^{-1} > \lambda$, a partícula de segunda classe normal (X_t) para o processo original, está sempre à direita da partícula de segunda classe normal para o processo estacionário. Isto junto ao fato de que X_t/t (no processo estacionário) converge q.c. a ρ^2 implicam na segunda desigualdade. Para mostrar a primeira desigualdade acoplamos o processo de Hammersley com parâmetros λ e ρ , ao processo estacionário com parâmetros λ e λ^{-1} e repetimos o mesmo argumento, agora para a partícula de segunda classe dual.

Se $(P_n)_{n \geq 0}$ não convergir, segue que existem $b < a < a' < b'$ tais que

$$\lambda^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(2)}{P_n(1)} < \frac{1}{b'} < \frac{1}{a'} < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(2)}{P_n(1)} \leq \frac{1}{\rho^2}. \quad (3.11)$$

Agora considere $m < n$ e suponha que

$$\frac{P_m(2)}{P_m(1)} < \frac{1}{b'} < \frac{1}{b} < \frac{P_n(2)}{P_n(1)}.$$

Considere o caminho γ^- dado pelo lema 15 conectando a origem com P_n . Sendo que γ^- fica por baixo de $(P_0, \dots, P_m, \dots, P_n)$, se $|P_m|$ é suficientemente grande, podemos achar $Q', Q \in \gamma^-$ com $Q \in R^{out}(Q')$, tais que

$$\frac{Q'(2)}{Q'(1)} < \frac{1}{a'} < \frac{1}{a} < \frac{Q(2)}{Q(1)}.$$

Portanto, se 3.11 acontecer, podemos construir duas seqüências de pontos poissonianos, digamos $(Q'_j)_{j \geq 1}$ e $(Q_j)_{j \geq 1}$, com $Q_i \in R^{out}(Q'_j)$ e tais que

$$\frac{Q'_j(2)}{Q'_j(1)} < \frac{1}{a'} < \frac{1}{a} < \frac{Q_i(2)}{Q_i(1)}.$$

para todo $i, j \geq 1$. Mas, pelo Lema 13, isto acontece com probabilidade 0 e portanto $(P_n)_{n \geq 0}$ deve convergir quase certamente.

Convergência no regime $\lambda\rho = 1$. A convergência quase certa das partículas de segunda classe, normal e dual, à reta $\{(t/\lambda^2, t), t \geq 0\}$ junto ao lema 14 garantem a convergência quase certa dos caminhos β neste regime.

Finalizamos esta seção provando a existência (quase certa) da inclinação das trajetórias das partículas de segunda classe, normal e dual, e da interface no modelo de competição no P.N.G. ■

Prova dos teoremas 1 e 7 A convergência quase certa de X_t/t , X'_t/t e φ_s/s segue do Teorema 5 já que, como notaramos oportunamente, as trajetórias das partículas de segunda classe, tanto normal como dual, e a interface de competição constituem caminhos β particulares. ■

Na seguinte seção calculamos a lei de $Z = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t}$ e de $Z' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X'_t}{t}$.

3.1 Lei da Partícula de Segunda Classe

A seguir calculamos a lei limite da partícula de segunda classe (normal). Destacamos que esta lei também foi calculada por Cator e Dobrynin [6].

Seja $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$ o processo de Hammersley com fontes e dissipadores com $\lambda\rho < 1$. Além disso, seja $(L_\lambda^{h,\rho}(\cdot, t), t \geq 0)$ o processo de Hammersley acoplado ao processo $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$, empregando os mesmos dissipadores e os mesmos pontos α utilizados na construção de $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$. O processo $(L_\lambda^{h,\rho}(\cdot, t), t \geq 0)$ tem no instante inicial as mesmas fontes que o processo $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$ no intervalo (h, ∞) e no intervalo $[0, h]$ acrescentamos às fontes do processo $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$ um processo de Poisson homogêneo de taxa $\rho^{-1} - \lambda$.

Denotemos por $\eta_t[x, y]$ o número de partículas no intervalo $[x, y]$ no instante t do processo $(L_\lambda^\rho(\cdot, t), t \geq 0)$. Análogamente, $\eta_t^h[x, y]$ denota o número de partículas no intervalo $[x, y]$ no instante t do processo $(L_\lambda^{h,\rho}(\cdot, t), t \geq 0)$.

Definimos as variáveis aleatórias $F_h^\eta(r, t)$ e X_t^ξ por

$$F_h^\eta(r, t) = \eta_t[0, r] - \eta_t^h[0, r] \quad (3.12)$$

e

$$X_t^\epsilon = \epsilon X_{t\epsilon^{-1}}; \quad (3.13)$$

Consideremos $F_{h,\epsilon}^\eta(r, t) = F_h^\eta(r\epsilon^{-1} + h, t\epsilon^{-1})$.

Note que na ausência de fontes extras em $[0, h]$ temos que $F_{h,\epsilon}^\eta(r, t) = 0$. Se há uma única fonte em $[0, h]$ vindo do processo de Poisson de intensidade $\rho^{-1} - \lambda$ (evento que ocorre com probabilidade $(\rho^{-1} - \lambda) h e^{-\rho^{-1}h}$), esta partícula *extra* gera uma discrepância que se comporta como uma partícula de segunda classe. Denotando sua posição por X_t^h segue-se que $F_{h,\epsilon}^\eta(r, t) = -1$ se e somente se $X_{t\epsilon^{-1}}^h \leq r\epsilon^{-1}$.

Logo, temos que :

$$\mathbb{E}[F_{h,\epsilon}^\eta(r, t)] = -(\rho^{-1} - \lambda) h e^{-\rho^{-1}h} \mathbb{P}[X_{t\epsilon^{-1}}^h \leq r\epsilon^{-1}] + o(h) \quad (3.14)$$

Dividindo por h e fazendo $h, \epsilon \rightarrow 0$ temos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{F_{h,\epsilon}^\eta(r, t)}{h}\right] = -(\rho^{-1} - \lambda) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}[X_t^\epsilon \leq r] \quad (3.15)$$

Figura 3.2: Lei da partícula de segunda classe.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_{h,\epsilon}^\eta(r, t)] &= \\
&\mathbb{E}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] - \eta_0^h[0, h]] = \\
&\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 1, \eta_0^h[0, h] = 0] - \\
&\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 0, \eta_0^h[0, h] = 1] + o(h),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo que a primeira igualdade se segue do fato que o número de partículas num instante de tempo t qualquer no intervalo $[0, r]$ é igual ao número de curvas espaço-temporais no retângulo $[h, r] \times [0, t]$ mais o número de fontes no intervalo $[0, h]$ (ver figura 3.2), e da estacionaridade do processo η^h na região $[0, h] \times [0, t]$.

Sendo que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 1, \eta_0^h[0, h] = 0] - \\
&\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 0, \eta_0^h[0, h] = 1] = \\
&\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 1] - \mathbb{P}[\eta_0^h[0, h] = 1] + o(h)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

e que $\mathbb{P}[\eta_0^h[0, h] = 1] = (\rho^{-1}h)e^{-\rho^{-1}h}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[F_{h,\epsilon}^\eta(r, t)] = \\
&\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 1] - (\rho^{-1}h)e^{-\rho^{-1}h} + o(h)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos, por convergência local ao equilíbrio (Seppäläinen [22]), que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[\eta_{t\epsilon^{-1}}[r\epsilon^{-1}, r\epsilon^{-1} + h] = 1]}{h} = u(r, t), \tag{3.19}$$

sendo $u(r, t)$ a única solução entrópica de

$$\partial_t u + \partial_x \left(-\frac{1}{u} \right) = 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty)^2 \quad (3.20)$$

com

$$\begin{aligned} u &= \lambda \quad \text{em} \quad (0, \infty) \times \{t = 0\}, \\ u &= \rho \quad \text{em} \quad \{x = 0\} \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{F_{h,\epsilon}^\eta(r, t)}{h} \right] = u(r, t) - \rho^{-1}. \quad (3.21)$$

Não é difícil comprovar que a única solução entrópica da equação 3.20 (ver seção 3.2) está dada pela função u que definimos a seguir:

$$u(x, t) = \begin{cases} \rho^{-1}, & x/t \leq \rho^2, \\ \sqrt{tx^{-1}}, & \rho^2 < x/t \leq \lambda^{-2}, \\ \lambda, & \lambda^{-2} < x/t. \end{cases} \quad (3.22)$$

Portanto, coletando (3.15) e (3.21) temos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}[X_t^\epsilon \leq r] = \frac{\rho^{-1} - u(r, t)}{\rho^{-1} - \lambda} \quad (3.23)$$

Note que para chegar a (3.23) intercambiamos a ordem dos limites em (3.21). Isto é possível devido ao fato que $\mathbb{E}[F_{h,\epsilon}^\eta(r, t)]$ é diferenciável, cóncava e possui limite.

Substituindo u pela expressão dada em 3.22 e junto com a convergência quase certa de X_t/t temos que a lei de $Z = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t}$ é dada por:

$$\mathbb{P}(Z \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq \rho^2, \\ \frac{\rho^{-1} - \sqrt{r^{-1}}}{\rho^{-1} - \lambda}, & \rho^2 < r \leq \lambda^{-2}, \\ 1, & \lambda^{-2} < r. \end{cases}$$

Observação 16. A lei de $Z' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X'_t}{t}$ é obtida da lei de Z e da simetria do processo.

3.2 Solução entrópica

O comportamento macroscópico do Processo de Hammersley com fontes e dissipadores é descrito pela equação diferencial parcial (E.D.P.) hiperbólica não linear que enunciamos a seguir:

$$\partial_t u + \partial_x \left(-\frac{1}{u} \right) = 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty)^2, \quad (3.24)$$

sendo que $F(p) = -p^{-1}$ é frequentemente chamado de fluxo para a lei de conservação (3.24) com

$$u = \lambda \quad \text{em} \quad (0, \infty) \times \{t = 0\}, \quad (3.25)$$

$$u = \rho \quad \text{em} \quad \{x = 0\} \times (0, \infty). \quad (3.26)$$

Para estudar a solução desta E.D.P., primeiro fazemos algumas definições.

Consideremos o problema

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.27)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \geq 0 \quad (3.28)$$

$$u(0, t) = u_1(t) \quad t \geq 0 \quad (3.29)$$

Definição 4. Diremos que a função $u \in L^\infty((0, \infty)^2)$ é uma solução fraca da equação (3.27) com condição inicial (3.28) e condição de fronteira (3.29) se se cumpre

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (u \phi_t + F(u) \phi_x) \, dx \, dt + \int_0^\infty u_0 \phi \, dx|_{t=0} + \int_0^\infty u_1 \phi \, dt|_{x=0} = 0 \quad (3.30)$$

para todas as funções testes $\phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times [0, \infty))$.

Se a solução u satisfaz a seguinte condição de entropia

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq E/t \quad (3.31)$$

para alguma constante $E \geq 0$ e para quase todo $x, a \in \mathbb{R}_+, t > 0$; diremos que u é uma solução entrópica da equação 3.24.

Flutuações ao Redor da Inclinação

Assintótica

O principal propósito deste capítulo é provar o Teorema 6. Lembramos que este teorema nos diz que no regime $\lambda\rho < 1$, para todo $\epsilon > 0$, as flutuações de um caminho β qualquer ao redor de sua inclinação assintótica é no máximo da ordem de $|P_n|^{2/3+\epsilon}$, sendo $(P_n)_{n \geq 0}$ o caminho β em questão. Acreditamos que o Teorema 6 é, em certa forma, ótimo; i.e. que o expoente correto deveria ser $2/3$. De fato, numa versão estacionária do processo de Hammersley com fontes e dissipadores com $\lambda = \rho = 1$, Cator e Groeneboom [8] provaram que o expoente correto para as flutuações de uma partícula de segunda classe neste processo é $2/3$.

Prova do Teorema 6 Do teorema 1 segue:

- i a convergência quase certa das partículas de segunda classe normal e dual e,
- ii os limites têm uma distribuição contínua.

Logo, de (i) e (ii) junto com o *lema 14* concluímos que, quase certamente, existe $\epsilon > 0$ (aleatório) suficientemente pequeno tal que se $(P_n)_{n \geq 0}$ é um caminho β e n é suficiente-

mente grande então:

$$\lambda^2 + 2\epsilon < \frac{P_n(2)}{P_n(1)} < \rho^{-2} - 2\epsilon.$$

Consideremos M suficientemente grande tal que se $|P| \geq M$ e

$$\lambda^2 + 2\epsilon < \frac{P(2)}{P(1)} < \rho^{-2} - 2\epsilon$$

então, para qualquer $Q \in Co(P, c|P^{-\delta})$,

$$\frac{Q(2)}{Q(1)} \in [\lambda^2 + \epsilon, \rho^{-2} + \epsilon].$$

Denotemos por θ_m o ângulo em $(0, \pi/2)$ definido pela relação $\tan(\theta_m) = \frac{P_m(2)}{P_m(1)}$ e consideremos P_m, P_n tais que $|P_m| \geq M$ e

$$\frac{P_n(2)}{P_n(1)} > \tan(\theta_m + 3c|P_m|^{-\delta}),$$

para algum $n \geq m$. Seja agora γ_n^- o caminho maximal dado pelo Lema 15. Como γ_n^- fica por baixo de $(P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n)$, temos que para M suficientemente grande, existem $Q, Q' \in \gamma_n^-$ com $Q' \in R^{out}(Q)$ e tais que:

$$\frac{Q(2)}{Q(1)} < \tan(\theta_m + c|P_m|^{-\delta}) \text{ e } \frac{Q(2)'}{Q(1)'} > \tan(\theta_m + 2c|P_m|^{-\delta}). \quad (4.1)$$

Sendo $|Q| \sim |P_m|$ (i.e. são da mesma ordem), 4.1 implicaria que $R^{out}(Q)$ não é δ reto; o qual, pelo Teorema 9 ocorre com probabilidade 0. Por outro lado, se

$$\frac{P_n(2)}{P_n(1)} < \tan(\theta_m - 3c|P_m|^{-\delta}) \quad (4.2)$$

podemos repetir o argumento anterior, agora aplicado ao caminho maximal γ_n^+ (que fica por cima de $(P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n)$) para provar que 4.2 ocorre com probabilidade 0. Portanto, se θ_n é o ângulo tal que $\tan(\theta_n) = \frac{P_n(2)}{P_n(1)}$, concluimos que para m suficientemente grande e para $n \geq m$, $\theta_n \in [\theta_m - 3c|P_m|^{-\delta}, \theta_m + 3c|P_m|^{-\delta}]$ ou equivalentemente para m suficientemente grande e para $n \geq m$,

$$\text{ang}(P_m, P_n) \leq 3c|P_m|^{-\delta}.$$

Finalmente, fazendo $n \rightarrow \infty$ o resultado segue. ■

4.1 Interseção das trajetórias das partículas de segunda classe

Consideremos as trajetórias das partículas de segunda classe normal e dual, X_t , e X'_t , respectivamente. Do trabalho de Cator & Dobrynin [6] se segue que, na versão estacionária do processo, estas trajetórias se intersectam com probabilidade 1. No caso $\lambda\rho < 1$ provamos que a probabilidade de estas duas trajetórias se encontrarem é estritamente menor do que 1.

Proposição 3. *Sejam X_t e X'_t as trajetórias da partícula de segunda classe normal e dual respectivamente para o processo de Hammersley com fontes de intensidade λ e dissipadores de intensidade ρ com $\lambda\rho < 1$. Logo, a probabilidade de estas duas trajetórias se encontrarem é estritamente menor do que 1.*

Antes de provar este resultado definimos um modelo de competição auxiliar que embora pareça artificial, será muito útil para provar a proposição 3.

4.1.1 Modelo de competição auxiliar

Sejam $\lambda, \rho > 0$ com $\lambda\rho < 1$ fixos e para cada $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ defina:

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : L_\lambda^\rho(x, y) = n\}, \quad (4.3)$$

e G_n como sendo

$$G_n = \cup_{k=0}^n B_k. \quad (4.4)$$

Note que G_n é outra forma de escrever ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : L_\lambda^\rho(x, y) \leq n\}$.

Agora vamos definir o modelo de competição. Como para cada ponto pode existir mais de uma geodésica e às vezes ela utiliza pontos dos eixos, às vezes não; fazemos as seguintes definições.

Definição 5. Dado o conjunto G_n definimos os subconjuntos G_n^t , G_n^x e G_n^i por:

$$G_n^t = \{P = (P(1), P(2)) \in G_n : \forall \gamma \in \Pi_{\max}(P), T(\gamma) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^+ \neq \emptyset\} \quad (4.5)$$

$$G_n^x = \{P \in G_n : \forall \gamma \in \Pi_{\max}(P), T(\gamma) \cap \mathbb{R}^+ \times \{0\} \neq \emptyset\} \quad (4.6)$$

$$G_n^i = G_n \setminus (G_n^t \cup G_n^x), \quad (4.7)$$

sendo $T(\gamma)$ o traço da curva γ .

Damos a seguinte interpretação a estes conjuntos: G_n representa o conjunto dos pontos infectados no tempo n e G_n^t (respectivamente, G_n^x) representa o conjunto dos pontos infectados através do eixo vertical (respectivamente, eixo horizontal).

Lema 16. Seja $P = (P(1), P(2)) \in G_n$. Então:

1. $P = (P(1), P(2)) \in G_n^x$ se e somente se a trajetória da partícula de segunda classe dual que inicialmente estava na origem está situada por cima de $\gamma_n^+(0, P)$.
2. $P = (P(1), P(2)) \in G_n^t$ se e somente se a trajetória da partícula de segunda classe normal que inicialmente estava na origem está situada por baixo de $\gamma_n^-(0, P)$.

Lema 17. Sejam $\theta_1 < \theta_2$ com $\theta_k \in (0, \pi/2)$, $k = 1, 2$. Considere duas seqüências $(x_m)_{m \geq 1}$ e $(y_j)_{j \geq 1}$ tais que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\| = \infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\|$ com $x_m/\|x_m\| \rightarrow e^{i\theta_1}$ e $y_j/\|y_j\| \rightarrow e^{i\theta_2}$. Definamos $G^t = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^t$ e $G^x = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^x$. Seja A^∞ o evento

$$A^\infty = \{\exists \text{ infinitos indices } i \text{ e } j : x_i \in G^t \text{ e } y_j \in G^x\}. \quad (4.8)$$

Logo, $\mathbb{P}[A^\infty] = 0$.

Demonstração Dado que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\| = \infty$ e que $\theta_1 < \theta_2$ segue a existência de um par ordenado (m_0, j_0) , tal que $x_{m_0} \in G^t, y_{j_0} \in G^x$ com $\|x_{m_0}\| > \|y_{j_0}\|$ e $y_{j_0}(2) > x_{m_0}(2)$ e $y_{j_0}(1) < x_{m_0}(1)$. Logo, $\gamma^+(0, x_{m_0}) \cap \gamma^-(0, y_{j_0}) \neq \emptyset$; lembrando que $\gamma^+(P, Q)$ denota a geodésica superior conectando os pontos P e Q . Análogamente,

$\gamma^-(P, Q)$ denota a geodésica inferior conectando os pontos P e Q . Em particular,

$$\gamma^+(0, x_{m_0}) \cap \gamma^+(0, y_{j_0}) \neq \emptyset \quad (4.9)$$

$$\gamma^-(0, x_{m_0}) \cap \gamma^-(0, y_{j_0}) \neq \emptyset \quad (4.10)$$

Temos, então duas situações possíveis:

- i) o ponto de interseção entre as duas geodésicas é um ponto de Poisson,
- ii) o ponto de interseção entre as duas geodésicas não é um ponto de Poisson.

Qualquer situação implica a não unicidade das geodésicas superiores e inferiores. Mas, pelo lema 2 do Capítulo 1, isto ocorre com probabilidade 0. Logo, $\mathbb{P}[A^\infty] = 0$.

Dando continuidade, definimos as quantidades

$$\theta_t = \inf\{\theta \in [0, \pi/2] : \text{se } y_i/||y_i|| \rightarrow e^{i\theta} \text{ então } y_i \in G^t \text{ para infinitos índices } i\}$$

e

$$\theta_x = \sup\{\theta \in [0, \pi/2] : \text{se } x_i/||x_i|| \rightarrow e^{i\theta} \text{ então } x_i \in G^x \text{ para infinitos índices } i\}.$$

Observação 17. Os caminhos $\{y_i = (0, i)\}_{i \geq 0}$ e $\{x_j = (j, 0)\}_{j \geq 0}$ mostram que os conjuntos $\{\theta \in [0, \pi/2] : \text{se } y_i/||y_i|| \rightarrow e^{i\theta} \text{ então } y_i \in G^t \text{ para infinitos índices } i\}$ e $\{\theta \in [0, \pi/2] : \text{se } x_i/||x_i|| \rightarrow e^{i\theta} \text{ então } x_i \in G^x \text{ para infinitos índices } i\}$ são não vazios.

A prova da *proposição 3* se baseia no lema que enunciamos a seguir. Para isto, primeiro definimos os eventos Ω_1 e Ω_2 por:

- $\Omega_1 = \{\omega : X_s = X'_s \text{ para algúm } s > 0\}$ e
- $\Omega_2 = \{\omega : \theta_x = \theta_t\}.$

Lema 18. Sejam X_s e X'_s as trajetórias da partícula de segunda classe normal e dual respectivamente para o processo de Hammersley com fontes de intensidade λ e dissipadores de intensidade ρ com $\lambda\rho < 1$. Temos, então, que $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Prova da Proposição 3 Suponhamos que a probabilidade das trajetórias de X_s e X'_s se encontrarem é igual a 1. Pelo lema anterior temos que $\theta_x = \theta_t$, quase certamente. Em vista do lema 16 isto é equivalente a $Z = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{X_s}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{X'_s}{s} = Z'$, quase certamente, o qual pelo *Teorema 1* é uma contradição. Portanto, concluímos que a probabilidade das duas trajetórias se encontrarem é estritamente menor do que 1. ■

Finalizamos esta seção provando o lema 18

Prova do lema 18 Do lema 17 temos que, quase certamente, $\theta_x \leq \theta_t$. Seja ω uma realização dos processos de Poisson para a qual o Processo de Hammersley está bem definido e tal que as trajetórias de X_s e X'_s se encontram para esse ω . Suponhamos que para esse ω , $\theta_x < \theta_t$ e consideremos $\theta : \theta_x < \theta < \theta_t$. Seja $\{z_k\}_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}_+^2$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\| = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k / \|z_k\| = e^{i\theta}$. Mais ainda, vamos supor que existe uma subsequência $\{z_{k_j}\}_{j \geq 0}$ tal que $z_{k_{j_1}} \neq z_{k_{j_2}}$ para $k_{j_1} \neq k_{j_2}$. Pela escolha de θ se segue que os conjuntos de índices I^t e I^x definidos por

$$I^t = \{k : z_k \in G^t\}$$

$$I^x = \{k : z_k \in G^x\},$$

com $G^t = \cup_{n \in \mathbb{N}} G_n^t$ e $G^x = \cup_{n \in \mathbb{N}} G_n^x$, têm cardinal finito e por tanto $|I^i| = \infty$ sendo que:

$$I^i = \{k : z_k \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{G^t \cup G^x\}\}.$$

Mas, como as trajetórias de X_t e X'_t se encontram, se segue que existe $N(\omega) > 0$ e finito tal que $\forall k \geq N$, $z_k \in G^t$ ou G^x (ver figura 4.1), contradizendo o fato que $|I^i| = \infty$. Logo, $\theta_x = \theta_t$. Portanto, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, como queríamos mostrar. ■

Figura 4.1: Cruzamento das trajetórias de X_t e X'_t .

4.2 Flutuações em equilíbrio

Finalizamos este trabalho com uma observação sobre as flutuações de um caminho β no regime $\lambda\rho = 1$.

Seguindo a notação introduzida por Johansson [17] definimos o expoente transversal de flutuações ξ da seguinte forma. Denotemos por $C_r(t)$ o cilindro de largura t^r ao redor do segmento $\overline{0P_t}$, com $P_t = (t, t)$. Então,

$$C_r(t) = \{P = (P(1), P(2)) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq P(1) + P(2) \leq 2t, |P(2) - P(1)| \leq \sqrt{2}t^r\}.$$

Consideremos o conjunto de configurações para as quais todas as geodésicas conectando a origem ao ponto (t, t) estão contidas em $C_r(t)$,

$$A_r^1(t) = \{\gamma \subset C_r(t) \text{ para toda } \gamma \in \Pi_{\max}(P_t)\}.$$

Finalmente, definimos ξ por

$$\xi = \inf\{r > 0 : \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_r^1(t)] = 1\}.$$

Denotemos um caminho β qualquer por $\phi = (\phi_n)_{n \geq 0}$ e

$$A_r^2(t) = \{\phi \subset C_r(t) \text{ para todo } \phi \in \Phi(P_t)\},$$

sendo $\Phi(P_t)$ o conjunto dos caminhos β conectando a origem ao ponto $P_t = (t, t)$.

Definimos o expoente transversal de flutuações para caminhos β de forma semelhante,

$$\chi = \inf\{r > 0 : \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_r^2(t)] = 1\}.$$

Consideremos o processo de Hammersley estacionário em $[0, X] \times [0, T]$ gerado por: *i*) um processo de Poisson homogêneo de fontes de taxa λ no semi-eixo positivo horizontal, *ii*) um processo de Poisson de dissipadores de taxa λ^{-1} no semi-eixo positivo vertical e *iii*) um processo de Poisson (pontos α) de taxa 1 em $\mathbb{R}_+^2$. Cator e Groeneboom [7] provaram que:

- *i*) o processo pontual de β pontos em $[0, X] \times [0, T]$ é um processo de Poisson de taxa 1 em $[0, X] \times [0, T]$,
- *ii*) as interseções das curvas espaço-tempo com o segmento vertical $\{0\} \times [0, T]$ é um processo de Poisson de taxa λ^{-1} ,
- *iii*) as interseções das curvas espaço-tempo com o segmento horizontal $[0, X] \times \{T\}$ é um processo de Poisson de taxa λ e
- *iv*) os três processos são mutuamente independentes.

Note que todo caminho de α pontos fracamente crescente conectando a origem ao ponto (X, T) , pode ser pensado como um caminho de β pontos fracamente crescente conectando (X, T) à origem para o processo reverso (ver figura 4.2). Temos então uma relação unívoca entre caminhos β para o processo estacionário e geodésicas para o processo reverso, que

Figura 4.2: Dualidade entre caminhos β e geodésicas.

pelo mencionado anteriormente também é um processo estacionário. Por tanto, $\mathbb{P}[A_r^1(t)] = \mathbb{P}[A_r^2(t)] \forall r, t > 0$. Desta dualidade segue que, em equilíbrio, caminhos β e geodésicas têm as mesmas flutuações transversais; i.e. $\xi = \chi$.

Referências Bibliográficas

- [1] D. ALDOUS AND P. DIACONIS, *Hammersley's interacting particle process and longest increasing subsequences*, Probab. Theory Related Fields, 103 (1995), pp. 199–213.
- [2] J. BAIK, P. DEIFT, AND K. JOHANSSON, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, J. Amer. Math. Soc., 12 (1999), pp. 1119–1178.
- [3] J. BAIK AND E. M. RAINS, *Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources*, J. Statist. Phys., 100 (2000), pp. 523–541.
- [4] —, *Algebraic aspects of increasing subsequences*, Duke Math. J., 109 (2001), pp. 1–65.
- [5] —, *The asymptotics of monotone subsequences of involutions*, Duke Math. J., 109 (2001), pp. 205–281.
- [6] E. CATOR AND S. DOBRYNIN, *Behavior of a second-class particle in hammersley process*. Pre-print, 2005.
- [7] E. CATOR AND P. GROENEBOOM, *Hammersley's process with sources and sinks*, Ann. Probab., 33 (2005), pp. 879–903.
- [8] E. CATOR AND P. GROENEMBOOM, *Second class particles and cube root asymptotics for hammersley process*. To appear in Ann. Probab., 2006.

-
- [9] C. COLETTI AND L. PIMENTEL, *Beta-paths in theammersley process*. Submitted. arXiv:math.PR/0603382, 2006.
- [10] B. DERRIDA AND R. DICKMAN, *On the interface between two growing eden clusters*, J. Phys. A, 24 (1991), pp. 191–193.
- [11] M. J. P. L. FERRARI, P.A., *Roughening and inclination of competition interfaces*. To appear in Phys. Rev. E, 2006.
- [12] P. A. FERRARI, *Shock fluctuations in asymmetric simple exclusion*, Probab. Theory Related Fields, 91 (1992), pp. 81–101.
- [13] P. A. FERRARI AND L. P. R. PIMENTEL, *Competition interfaces and second class particles*, Ann. Probab., 33 (2005), pp. 1235–1254.
- [14] P. GROENEBOOM, *Ulam’s problem and Hammersley’s process*, Ann. Probab., 29 (2001), pp. 683–690.
- [15] —, *Hydrodynamical methods for analyzing longest increasing subsequences*, J. Comput. Appl. Math., 142 (2002), pp. 83–105. Probabilistic methods in combinatorics and combinatorial optimization.
- [16] J. M. HAMMERSLEY, *A few seedlings of research*, in Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I: Theory of statistics, Berkeley, Calif., 1972, Univ. California Press, pp. 345–394.
- [17] K. JOHANSSON, *Transversal fluctuations for inreasing subsequences on the plane*, Probability Theory and Related Fields, (2000), pp. 445–456.
- [18] P. MEAKIN, *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*, vol. 5 of Cambridge Nonlinear Science Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
-

-
- [19] C. M. NEWMAN, *A surface view of first-passage percolation*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Basel, 1995, Birkhäuser, pp. 1017–1023.
- [20] L. PIMENTEL, *A multi-type shape theorem for fpp models*. arXiv:math.PR/0411583.
- [21] M. PRÄHOFFER AND SPOHN, *Universal distributions for growth processes in 1+1 dimensions and random matrices.*, Phys. Rev. Lett, (2005), pp. 4882–4885.
- [22] T. SEPPÄLÄINEN, *Diffusive fluctuations for one-dimensional totally asymmetric interacting random dynamics*, Comm. Math. Phys., 229 (2002), pp. 141–182.
- [23] M. V. WÜTHRICH, *Asymptotic behaviour of semi-infinite geodesics for maximal increasing subsequences in the plane*, in In and out of equilibrium (Mambucaba, 2000), vol. 51 of Progr. Probab., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002, pp. 205–226.
-