Distribuições quase-estacionárias
e
o processo Fleming-Viot

Nevena Marić

TESE APRESENTADA
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO
DO GRAU DE DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**

Orientador: **Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari**

São Paulo, 20 de março de 2006.

Este trabalho foi financiado por FAPESP (Processo N. 02/02006-1).

**Distribuições quase-estacionárias
e o processo Fleming-Viot**

Este exemplar corresponde à
tese defendida por Nevena Marić
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 20 de março de 2006.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (IME-USP)

Prof. Dr. Serguei Popov (IME-USP)

Prof. Dr. Rafael Andrés Mitrowsky Rosales (FFCLRP-USP)

Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Miguel Natalio Abadi (IMECC-UNICAMP)

Para minha irmã Kaća.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Pablo Ferrari pela sua paciência, compreensão e amizade. Pela orientação deste trabalho e numerosos ensinamentos.

Pelas valiosas ajudas durante elaboração desta tese agradeço aos colegas e amigos: Liliam Cardeno, Cristian Coletti, Élcio Lebensztayn, Mauricio Zuluaga Martinez, Valentin Sisko, Luiz Renato Fontes, Servet Martínez, Diana Maia e Sandra Maria Zapata.

Agradeço à FAPESP, pelo apoio recebido.

Resumo

Consideramos um processo Markoviano de salto $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ com espaço de estados $\mathbb{N}$ tendo 0 como um estado absorvente e irreduzível em outros estados. Para ver se o processo durante o tempo até a absorção exibe um tipo de comportamento regular, é apropriado estudar *distribuição quase-estacionária* (DQE) de Z_t . Uma DQE é uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$ que tem a propriedade de começando com ν , a distribuição condicional dado o evento que o processo não era absorvido até o tempo t , ainda é ν .

O processo *Fleming-Viot*, estudado em Burdzy et al. (2000), é um sistema de N partículas. Inicialmente as partículas são independentes, cada uma das quais governada por matriz de transição do process Z_t até absorção. No instante de absorção de uma partícula, uma das partículas restantes dividi-se em dois. As novas partículas continuam realizando passeios independentes com as mesmas regras.

Nós usamos uma construção gráfica do sistema de partículas e mostramos a independência assintótica, $N \rightarrow \infty$, entre as partículas, em cada instante de tempo e no estado estacionário. A “tightness” das densidades medias é também provada. Segue daí, que a distribuição do Z_t condicionado a não-absorção até o instante t , descreve corretamente a densidade normalizada do processo Fleming-Viot no instante de tempo fixo t em limite quando $N \rightarrow \infty$. Para esse resultado ser válido não precisamos de suposições adicionais sobre o processo Z_t em espaço de estados enumerável.

Supomos ainda que vale $\alpha := \sum_i \inf Q(\cdot, i) > \sup Q(\cdot, 0) =: C$. Provamos então a existência de uma única DQE para Z_t , e que no estado estacionário, quando $N \rightarrow \infty$, a densidade média do processo Fleming-Viot converge à DQE do Z_t .

Abstract

We consider a pure jump Markov process $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ on a countable state space $\mathbb{N}$ with an absorbing state 0 and irreducible in positive integers. To see whether during the period till absorption the process exhibits regular behaviour, it is appropriate to study the *quasi-stationary distribution* (QSD) for Z_t . A QSD is a probability measure ν on $\mathbb{N}$ that satisfies: starting with ν , the conditional distribution, given the event that at time t the process has not been absorbed, is still ν .

Fleming-Viot process, as studied by Burdzy et al. (2000), is a system of N particles. Each particle moves independently according to the transition matrix of the process Z_t until it reaches zero (the absorbing state). As soon as one particle reaches 0 it is killed and one of the other particles is chosen uniformly to split into two independent particles resuming a new cycle of independent motion until the next absorption.

We use a graphical construction of the particle system and show the asymptotic independence among the particles, as $N \rightarrow \infty$ at each time instance and at the stationary state. The tightness of the mean densities is also proved. It follows then, that distribution of Z_t conditioned on non-absorption until time t , correctly describes the normalized density of the Fleming-Viot process at a fixed time t in the limit as $N \rightarrow \infty$. For this result to be valid we do not need any additional condition on the process Z_t on a countable state space.

Further on suppose that $\alpha := \sum_i \inf Q(\cdot, i) > \sup Q(\cdot, 0) =: C$. We prove the existence of the unique QSD for Z_t , and that in the stationary state, as $N \rightarrow \infty$, the mean density of the Fleming-Viot process converges to the QSD of Z_t .

Conteúdo

1	Introdução	1
2	DQE de um processo Passageiro	6
2.1	Processo Passageiro	6
2.2	Distribuição quase-estacionária	7
2.3	Limite de Yaglom	8
3	Processo de Fleming-Viot	10
3.1	Introdução	10
3.2	Construção gráfica	13
3.2.1	Ergodicidade e construção do processo estacionário	17
4	Covariâncias entre as partículas Fleming-Viot	19
4.1	Aproximação de campo médio para F-V e a DQE	19
4.1.1	Dualidade	21
4.1.2	Argumento de acoplamento	24
5	Tightness	33
6	Teoremas principais	40
7	Exemplo e as Conjecturas	51
7.1	Conjecturas	54
A	Resultados auxiliares	56

A.1 λ -classificação	57
Bibliografia	58

Lista de Figuras

1	Processo F-V	4
2	Teorema 6.2	5
3	Relação entre η_t^N e ξ_t^N	13
4	Estruturas de ramificação	23
5	Castelo de cartas	51
6	Simulação de F-V dirigido por Castelo de cartas ($q=1;p=1;r=1/2$); N=250; t=200; Comparação com a DQE.	53
7	Simulação de F-V dirigido por Passeio aleatório ($q=2/3;p=1/3$); N=250; t=200; Comparação com a DQE minimal.	54

1 Introdução

Neste trabalho estudamos o comportamento dos processos Markovianos que possuem estados absorventes. É ilustrativo pensar em um processo que vive nos números naturais, até ser absorvido no ponto 0. Exemplos de tais processo são vários: *processo de ramificação*, *processo de contato*, *passeio aleatório com barreira absorvente*...

Seja o nosso processo Z_t em $\mathbb{N}$ com taxas de transições dadas pela matriz Q . Supomos que o processo é irredutível nos inteiros positivos. Definindo o *tempo de absorção*

$$T_0 = \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\} \quad (1.1)$$

vamos assumir que este tempo seja finito quase certamente para todo estado inicial. É claro que Z_t é ergódico e sua única medida invariante é δ_0 .

Vamos pensar agora no caso onde a absorção pode levar muito tempo durante o qual talvez exista um tipo de comportamento estacionário. Por exemplo, seja o objetivo de um estudo o espalhamento de uma doença (que eventualmente vai desaparecer). É importante então ver se a distribuição do número de pessoas infectadas possui um comportamento regular. Neste caso é apropriado estudar a *distribuição quase-estacionária* (DQE). Uma DQE ν é uma medida de probabilidade que tem a propriedade de começando com ν , a distribuição condicional dado o evento que o processo não seja absorvido até o tempo t , ainda é ν .

A fim de explicar melhor o conceito de DQE pensaremos por um instante em um processo Z_n a tempo discreto e com matriz de transição $P = e^Q$. Se excluirmos a primeira linha

e a primeira coluna de P (relacionadas às transições de estado absorvente 0), obteremos uma matriz sub-estocástica $\hat{P}$. A DQE seria um autovetor de $\hat{P}$. Precisamente, é o autovetor de Perron-Frobenius, correspondente ao maior autovalor de $\hat{P}$. Sabemos que uma distribuição estacionária é o autovetor de uma matriz estocástica correspondente ao autovalor 1 que é o autovalor máximo para uma matriz estocástica. Então é também um autovetor de Perron-Frobenius. No caso de DQE o auto-valor correspondente é menor que 1. Este auto valor é exatamente a probabilidade de que o processo não seja absorvido em um passo, começando com a DQE.

Continuando uma analogia com distribuição estacionária, pos se questão sobre a existência de uma interpretação de limite de uma DQE. A questão surge naturalmente sobre o processo condicionado à não absorção e a pergunta é se existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_t(y, x)}{1 - P_t(y, 0)} \quad (1.2)$$

e o que seria o limite se existir.

No caso de **espaço de estados finito**, foi provado por Darroch and Seneta (1967), uma DQE sempre existe e é única. Além do mais o limite (1.2), chamado de *Limite de Yaglom*, existe e é exatamente a DQE.

A situação é muito menos clara se o espaço de estados seja **infinito enumerável**. A existência da DQE não é mais garantida e pode existir mais que uma (até infinitamente muitas) DQE's. Neste ponto termina a analogia com distribuições estacionárias para as quais mesmo no caso enumerável sabemos que existe no máximo uma. Um exemplo ilustrativo é o passeio aleatório nos naturais com barreira absorvente em 0. No caso de deriva

negativa (direção à 0) o processo possui infinitas DQE's, enquanto nos outros casos não possui nenhuma DQE.

Quanto ao limite de Yaglom, em geral sabe-se que se ele existe e é uma medida de probabilidade então é uma DQE. Sua existência não é mais garantida se espaço não foi finito.

Como achar uma DQE?

Na seção 2 daremos uma definição alternativa da DQE (2.3) que traduz essa questão na solução de um sistema de equações não lineares. Resolver o sistema é uma tarefa razoável apenas em alguns casos de alcance curto. Mas é suficiente ter um grande espaço de estados para que não se tornar possível resolver o sistema mesmo usando a assistência do computador.

Uma outra pergunta relacionada é como estudar o limite de Yaglom. Será que as simulações do processo condicionado poderiam ajudar? Assim, deveríamos simular o processo “muitas” vezes e descartar realizações nas quais ocorreu a absorção. Mas este método não é satisfatório porque a probabilidade de absorção pode ser muito pequena.

Um recurso rico de bibliografia sobre DQE's esta na web sob cuidado do Phil Pollett:

<http://www.maths.uq.edu.au/~pkp/papers/qsds/qsds.html>.

Neste trabalho nós propomos uma maneira de construir DQE sem as dificuldades acima mencionados. Usamos um sistema de partículas interagentes cuja dinâmica depende da lei do processo Z_t . Na seção 3 definimos o sistema e estudamos suas propriedades ergódicas. Brevemente, apoiando-se na Figura 1 descrevemo-lo agora.

Consideremos $N > 0$ partículas situadas em naturais $\mathbb{N}$. Inicialmente as partículas são independentes, cada uma das quais governada por Q até absorção. No instante de

absorção de uma partícula, uma das partículas restantes, escolhida ao acaso, dividi-se em dois. As novas partículas continuam realizando passeios independentes com as mesmas regras. Este processo é uma versão discreta de processo tipo Fleming-Viot (F-V) estudado em Burdzy et al. (2000).

Figura 1: Processo F-V

Na seção 4 usamos uma representação gráfica deste sistema de partículas e mostramos a independência assintótica ($N \rightarrow \infty$) entre as partículas em cada instante de tempo e também sob medida invariante. Alternativamente dito, provamos que a aproximação de campo médio é válida para o sistema de partículas Fleming-Viot.

Em seguida, na seção 5, provamos que as densidades medias do processo F-V são “tight”. Usando a independência assintótica e a “tightness”, na seção 6 provamos os resultados

principais, os Teoremas 6.1 e 6.2. O Teorema 6.1 afirma que a distribuição de Z_t condicionado à não absorção até o tempo t , descreve corretamente o perfil da distribuição empírica do processo Fleming-Viot no instante t e em limite $N \rightarrow \infty$. Nas suposições deste teorema não precisamos condições adicionais sobre o processo Z_t em espaço de estados enumerável.

Para o próximo resultado assumimos que $\alpha := \sum_i \inf Q(\cdot, i) > \sup Q(\cdot, 0) =: C$ e provamos a existência de uma única DQE de Z_t . O Teorema (6.2) afirma ainda mais, que a densidade normalizada do processo Fleming-Viot no estado invariante, converge a DQE do Z_t em limite $N \rightarrow \infty$. A Figura 2 ajuda a entender seu significado.

Na seção 7 apresentamos um exemplo, uma versão de Castelo de Cartas, onde se aplica o

Figura 2: Teorema 6.2

Teorema 6.2. Terminamos o trabalho com duas conjecturas relativas ao caso com infinitas DQE's e ao caso com $\alpha > 0$.

2 DQE de um processo Passageiro

2.1 Processo Passageiro

O objeto principal do nosso interesse será $\{Z_t\}_{t \geq 0}$, um *processo Markoviano de salto, homogêneo e regular* tomando valores em um espaço enumerável. O espaço de estados denotaremos por Λ_0 e supomos que $0 \in \Lambda_0$.

O semigrupo de transição de $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ é $P(t) = \{P_t(x, y)\}_{x, y \in \Lambda_0}$, e o gerador infinitesimal correspondente do semigrupo é dado pelas *taxas de transição*: $Q = \{q(x, y)\}_{x, y \in \Lambda_0}$.

Vamos supor que 0 é o estado absorvente i.e. que

- $q(0, x) = 0$ para todo $x \in \Lambda_0$.

Além disso, vamos supor que os outros estados $\Lambda := \Lambda_0 \setminus \{0\}$ formam uma classe *irredutível*.

Um processo com todas as propriedades acima chamaremos de **um processo passageiro**.

Observação 2.1.

- $P(t)$ é contínuo, estável e conservativo

$$q_x = \sum_{y \neq x} q(x, y) < \infty, \quad \forall x \in \Lambda. \quad (2.1)$$

- $P(t)$ satisfaz equações de Kolmogorov para trás e para frente.

2.2 Distribuição quase-estacionária

Estamos interessados em propriedades “estacionárias” do processo Z_t condicionado à não absorção. Nesta direção, definimos o conceito de *distribuição quase-estacionária* (DQE).

Uma DQE ν é uma medida de probabilidade em Λ com a seguinte propriedade: começando com ν , a distribuição condicional dado o evento que o processo não seja absorvido até o tempo t , ainda é ν . Isto é

Definição 1. Uma medida de probabilidade ν , em Λ , é uma **distribuição quasi-estacionária** (DQE) em Λ para $\mathbf{P}$, se para todo $t > 0$,

$$\frac{\sum_{y \in \Lambda} \nu(y) P_t(y, x)}{\sum_{y \in \Lambda} \nu(y) (1 - P_t(y, 0))} = \nu(x), \quad x \in \Lambda. \quad (2.2)$$

Definição alternativa de DQE:

De acordo Nair e Pollett (1993), para um processo passageiro a equação (2.2) é equivalente a

$$\sum_{y \in \Lambda} \nu(y) (q(y, x) + q(y, 0) \nu(x)) = 0, \quad \forall x \in \Lambda. \quad (2.3)$$

O primeiro trabalho sobre o assunto foi feito por Yaglom (1947) provando a existência de DQE para o processo de ramificação. Duas décadas depois segue uma série de trabalhos de matemáticos australianos (Darroch e Seneta, 1967; Seneta e Vere-Jones, 1966; Vere-Jones, 1969) levando o assunto no meio mais geral. Precisamente, Darroch e Seneta

(1967) mostram que se o espaço de estados é finito então o processo Z_t possui uma única distribuição quase-estacionária.

Quando o espaço de estados é infinito enumerável o processo pode não ter ou até ter infinitas distribuições quase-estacionárias. Um exemplo de último caso existe entre processos de nascimento e morte, como foi observado pela primeira vez em Cavender (1978) e estudado em Ferrari, Martínez e Picco (1992). Entre estas medidas uma, chamada de *mínima*, tem o papel mais importante. Iniciando o processo com a DQE mínima, o tempo esperado até a absorção é o menor (estocasticamente). De fato esse tempo é exponencial (ou geométrico em tempo discreto) quando a distribuição inicial é uma DQE. A DQE mínima é a que tem o tempo exponencial com parâmetro máximo. Este parâmetro é

$$\lambda(\nu) = \sum_{x \in \Lambda} \nu(x) q(x, 0). \quad (2.4)$$

2.3 Limite de Yaglom

Além da interpretação estacionária as DQE's possuem uma interpretação de limite. Neste sentido o objeto mais relevante é o limite de Yaglom:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_t(y, x)}{1 - P_t(y, 0)}. \quad (2.5)$$

Vere-Jones(1969) prova que se o limite de Yaglom existe e é uma medida de probabilidade, então é uma DQE. No caso de espaço finito, o limite de Yaglom sempre existe e é a DQE.

O mesmo resultado vale e se a medida inicial é arbitrária.

Se o espaço de estados é infinito enumerável, não há uma resposta geral. Seneta e Vere-Jones (1966) provam que para o processo λ -positivo, se existe uma DQE então o limite de Yaglom é a DQE mínima. λ -recorrência (λ -transiência) é uma generalização do conceito de *recorrência* (*transiência*) no sentido usual. De fato, recorrência usual é 0-recorrência ($\lambda=0$). Definição e mais detalhes de λ -classificação são dadas no Apêndice A.1, enquanto para uma teoria completa sugerimos ver Seneta (1981).

Vale a pena observar que λ -positividade é sempre válida em espaço finito (e irredutível). Por esta razão foi estudada muito com relação a DQE's mas a λ -positividade não implica a existência de DQE nem é uma condição necessária. Já mencionado, o passeio aleatório nos naturais é um caso λ -transiente e mesmo assim, possui DQE's.

Uma abordagem diferente foi feita em Ferrari et al. (1995) onde os autores relacionam DQE's aos pontos fixos de uma transformação no espaço de medidas de probabilidade.

3 Processo de Fleming-Viot

3.1 Introdução

Seja Z_t o processo *passageiro* definido na seção 2.1. A matriz de transição Q restringida a transições em Λ denotaremos por $\hat{Q}$. Suponhamos ainda que

- $\bar{q} := \sup_x \sum_{y \in \Lambda_0 \setminus x} q(x, y) < \infty$

e que

- $q(x, 0) > 0$ para pelo menos um $x \in \Lambda$

o que garante a probabilidade positiva de absorção começando em x , e por irreducibilidade, garante a absorção eventual independentemente do ponto inicial do processo.

Um exemplo de Z_t em $\Lambda = \{1, \dots, L\}$ seria passeio aleatório com reflexão em L e absorção em 0.

Consideremos agora $N > 0$ partículas situadas em Λ . Inicialmente as partículas são independentes, cada uma das quais governada por Q até absorção. No instante de absorção de uma partícula, uma das partículas restantes dividi-se em duas. Alternativamente dito, a partícula absorvida escolhe uniformemente uma das outras partículas e pula na posição dela. As novas partículas continuam realizando passeios independentes com as mesmas regras. O espaço de estados deste processo η_t^N é então: $\mathcal{S} = \{\eta \in \mathbb{N}^\Lambda : \sum_{x \in \Lambda} \eta(x) = N\}$

Definimos, para todo $x, y, z \in \Lambda$

$$\eta^{xy}(z) = \begin{cases} \eta(x) - 1, & z = x \\ \eta(y) + 1, & z = y \\ \eta(z), & z \neq x, y \end{cases}$$

e as taxas de transição para o processo η_t são

$$\tilde{q}(\eta, \eta^{xy}) = \eta(x)(q(x, y) + q(x, 0)\frac{\eta(y)}{N}). \quad (3.1)$$

Este processo lembra de processo “zero-range”, mais similar ao processo “misanthropo” com a diferença que o número de partículas é finito e as taxas $\tilde{q}$ são também crescentes em $\eta(j)$. Em palavras, as partículas “preferem” lugares com mais partículas presentes e podemos chamar o nosso processo de “filântropo”.

Por outro lado, é um processo de migrações fechado (“closed migration process”), não-linear. Partículas representam a população cujo tamanho é fixo, igual a N e as taxas de migração são funções não-lineares de $\eta(\cdot)$.

Finalmente, η_t é um processo do tipo Fleming-Viot característicos por mecanismo de absorção e imediata criação de partículas. Processos Fleming-Viot (F-V) foram introduzidos e são mais estudados em contexto genético onde o mecanismo corresponde à mutação aleatória de um genoma.

Neste trabalho, estudamos a densidade do processo com população infinita. Com $FV(Q)$ referimos nos à um processo F-V governado por Q . Comparamos a densidade empírica de um $FV(Q)$ em cada instante de tempo com a distribuição do processo Q condicionado à

não absorção. Se o processo $FV(Q)$ é ainda ergódico, comparamos a densidade da medida limite com a DQE do processo Q . Essas comparações vão ser feitas no limite quando o número de partículas vai para infinito.

O assunto foi iniciado em Burdzy et al. (2000), considerando partículas em movimento Browniano dentro de uma região limitada. Para tal processo foram provados analogos aos teoremas (6.1) e (6.2) deste trabalho. Limite hidrodinâmico do mesmo processo foi estudado recentemente por Grigorescu e Kang (2004). Nossa abordagem o problema é completamente diferente das abordagens dos autores mencionados.

Analisaremos o processo F-V usando uma construção gráfica de um processo “equivalente”. Começaremos definindo $\xi_t^N = (\xi_t^N(1), \dots, \xi_t^N(N)) \in \Lambda^{\{1, \dots, N\}}$ tal que:

$$\eta_t^N(x) = \sum_{k=1}^N \mathbb{I}(\xi_t^N(k) = x). \quad (3.2)$$

E interpretamos $\xi_t^N(k) \in \Lambda$

$\xi_t^N(k)$ = a posição de partícula k na caixa Λ em instante t.

O processo η_t^N é uma função do processo ξ_t^N , o que é ilustrado na figura 3.1. Os dois processos chamaremos de *processo Fleming - Viot*.

Observação 3.1. Denotamos por $\xi_t^{N,\xi}$ o processo com N partículas e com a configuração inicial ξ e analogamente $\eta_t^{N,\eta}$ o processo com N partículas e com a configuração inicial η .

Observação 3.2. Como Λ é uma classe irredutível de Q , então $\eta_t^N(\xi_t^N)$ também é irredutível. Se a janela é finita ($|\Lambda| < \infty$) então $|\mathcal{S}| < \infty$ e o processo $\eta_t^N(\xi_t^N)$ é ergódico.

Figura 3: Relação entre η_t^N e ξ_t^N

3.2 Construção gráfica

Nesta seção apresentaremos uma construção gráfica do processo ξ_t^N . Usaremos a construção como argumento para deduzir a ergodicidade do ξ_t^N . A validade do argumento se baseia em uma suposição adicional que lembra à *Harris-recorrência* embora se referindo às transições restringidas à classe irredutível de estados Λ . Para este fim precisamos de duas definições.

Definição 2. O coeficiente de ergodicidade da matriz $\hat{Q}$:

$$\alpha(\hat{Q}) = \sum_{y \in \Lambda} \alpha_y$$

onde

$$\alpha_y = \inf_{x \neq y} q(x, y).$$

Definição 3. Se $\alpha_y > 0$ dizemos que $y \in \Lambda$ é um estado de Doeblin.

A condição que necessitamos é dada por:

$$[\text{HR}] \quad \alpha(\hat{Q}) > 0$$

Ingredientes para construção

Pela suposição todas as taxas $q(\cdot, \cdot)$ são limitadas e podemos definir uma taxa máxima de transições a 0.

Definição 4. A taxa máxima de absorção:

$$C = \max_{a \in \Lambda} q(a, 0).$$

Para todo $k = 1, \dots, N$, definimos processos de Poisson (PP's) independentes:

- PP de taxa C : $(V_n^k)_{n \geq 1}$,
- $\forall y \in \Lambda$ tq $\alpha_y > 0$ PPs de taxa α_y $({}_yM_n^k)_{n \geq 1}$,
- $\forall x, y \in \Lambda$ PPs de taxa $(q(x, y) - \alpha_y)$ $({}_{xy}S_n^k)_{n \geq 1}$.

Eventos de todos esses processos chamamos de “marcas”. Definimos agora coleções independentes de variáveis aleatórias i.i.d. :

- $(W_n^k)_{n \geq 1}$, tal que $P(W_n^k = j) = 1/(N - 1)$, para $j \in \{1, \dots, N\}/k$;

- Para todo $x \in \Lambda, ({}_x F_n^k)_{n \geq 1}$

$${}_x F_n^k = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } q(x, 0)/C \\ 0, & 1 - q(x, 0)/C \end{cases} \quad (3.3)$$

Denotamos por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_{pp}$ o espaço de probabilidade induzido pelos PP's.

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_W$ e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_F$ espaços de probabilidade associados as famílias de v.a's W e F respectivamente. Chamamos de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o produto dos três espaços de probabilidade. Descartamos o evento nulo correspondente à ocorrência de duas marcas simultaneamente em qualquer instante de tempo.

Dada a configuração $\omega \in \Omega$ dos PP's construiremos $\xi_t^N (= \xi_{t,\omega}^N)$. Definimos os conjuntos de marcas em intervalo $[t_1, t_2]$ de tempo para uma partícula (k) e para todas N partículas, respectivamente:

$$\mathcal{M}^{[t_1, t_2]}(k) = \{(k, {}_{xy}S_n^k), (k, {}_yM_n^k), (k, V_n^k) \mid {}_yM_n^k, {}_{xy}S_n^k, V_n^k \in [t_1, t_2]\} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}^{[t_1, t_2]} = \bigcup_{k=1}^N \mathcal{M}^{[t_1, t_2]}(k) \quad (3.5)$$

Algoritmo 1. Construção de processo $\xi_t^{N,\xi}$

C0. $\xi_0^N = \xi$; $t_0 = 0$;

C1. Definimos

$$\mathcal{M}|\xi_s = \{(k, {}_{xy}S_n^k), (k, {}_yM_n^k), (k, V_n^k) \mid k \in 1, \dots, N, n \geq 1 \mid \xi_s(k) = x\} \quad (3.6)$$

Se $\mathcal{M}^{[t_0, t]}|_{\xi_{t_0}} = \emptyset$ então STOP. vá a [C5.] (3.7)

senão $\tau := \inf\{s : (k, s) \in \mathcal{M}^{[t_0, t]}|_{\xi_{t_0}} \text{ para algum } k\};$

$k_\tau :=$ a partícula cuja marca é τ

C2. Seja $x := \xi_{t_0}(k)$.

Se

– $\tau = {}_{xy}S_n^k$ ou $\tau = {}_yM_n^k$ para algum $y \in \Lambda$, então $\xi_\tau(k) = y$;

– $\tau = V_n^k$:

se ${}_xF_n^k = 0$ então $\xi_\tau(k) = x$

se ${}_xF_n^k = 1$ então $\xi_\tau(k) = \xi_{\tau-}(W_n^k)$.

C4. $t_0 = \tau$; vá a [C1.]

C5. $\xi_t^{N, \xi} = \xi_{t_0}$; **FIM.**

Temos visto que nos instantes $V_{(\cdot)}^{(\cdot)}$ as partículas adotam valores das outras partículas (indicadas pelos valores de v.a.'s $W_{(\cdot)}^{(\cdot)}$). Este mecanismo na dinâmica é o mesmo do **modelo de votante**. Precisamente a comparação exata seria com o **modelo de votante em campo médio**. Por esta razão chamaremos os eventos $V_{(\cdot)}^{(\cdot)}$ as *marcas de votante*.

Por outro lado nos instantes ${}_yM_{(\cdot)}^{(\cdot)}$ uma partícula adota o valor y independentemente do valor precedente. Considerando apenas uma partícula, ou seja um processo unidimensional, as marcas ${}_yM_{(\cdot)}^{(\cdot)}$ são **instantes de regeneração** pois a partir desses instantes é possível construir o processo sem considerar o passado. Por esta razão chamaremos os eventos ${}_{(\cdot)}M_{(\cdot)}^{(\cdot)}$ as *marcas de regeneração*.

Observação 3.3. Seja μ_0 uma medida de probabilidade em Λ . Sejam $G(k), k = 1, \dots, N$ v.a.'s independentes com distribuição μ_0 e aumentamos nosso espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que essas v.a.'s sejam definidas nele.

Por ξ_t^{N, μ_0} denotamos o processo com N partículas e um estado inicial ξ_0^N tal que $\xi_0^N(k) = G(k), k = 1, \dots, N$. Analogamente, usaremos a notação η_t^{N, μ_0} .

3.2.1 Ergodicidade e construção do processo estacionário

O fato que com probabilidade um podemos acoplar os processos com todas as possíveis configurações iniciais, graças às marcas de regeneração ${}_y M_n^k$ é o argumento chave para concluirmos que o processo é ergódico.

Proposição 3.1. *Se $\alpha(\hat{Q}) > 0$ o processo ξ_t^N (η_t^N) é ergódico.*

Prova: De fato, seja $\mathcal{R}(t, t+s)$ o evento que, para todas as partículas, em um intervalo de tamanho s (intervalo de tempo $(t, t+s)$) não há nenhuma marca de votante e há pelo menos uma marca de regeneração. A probabilidade deste evento é facilmente calculada

$$p := \mathbb{P}(\mathcal{R}(t, t+s)) = [e^{-Cs} (1 - e^{-\alpha s})]^N \quad (3.8)$$

Seja TR o primeiro instante da realização de evento $\mathcal{R}(t, t+s)$, olhando de $t = 0$ para trás no tempo. Observe que TR é um tempo de parada.

$$TR = \inf\{t : \mathbb{I}(\mathcal{R}(t, t+s)) = 1\}. \quad (3.9)$$

Seja agora

$$GR = \inf\{k : \mathbb{I}(\mathcal{R}(ks, (k+1)s)) = 1\}. \quad (3.10)$$

Como processos de Poisson em intervalos disjuntos são independentes então GR tem distribuição geométrica com parâmetro p dado em (3.8). Observando que $TR \leq GR$, temos que $\mathbb{P}(GR < \infty) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(TR < \infty) = 1$.

Suponhamos que o processo comece com duas configurações diferentes, ξ^1 e ξ^2 , em tempo $t = -\infty$ e continuamos usando mesmos processos de Poisson (ω). Como configurações são diferentes, em princípio os processos vão usar marcas diferentes de acordo o estado atual de cada um. Entretanto, usar as marcas da regeneração acontece independente de configuração (é assim que é a construção) e os dois processos, na posição da partícula que encontrou a marca, neste instante tomam o mesmo valor. Então, se acontecer o evento descrito acima, onde todas as partículas encontram marcas de regeneração, e durante este intervalo de tempo não houver a comunicação entre as partículas (marcas de votante) (quando poderia acontecer que uma, após a regeneração toma valor de outra que ainda não regenerou), a partir daí os dois processos tomam valores iguais em todas as posições e continuam junto para sempre (acoplam). A configuração em tempo $t = 0$ portanto não depende de estado inicial o que significa que o processo é ergódico e que a configuração em $t = 0$ tem distribuição invariante. ■

Observação 3.4. Da mesma maneira que construímos ξ_0^N podemos construir ξ_t^N , $\forall t$ como função de $\tau_t \omega$. Aqui, $\tau_t \omega$ é a translação por t de ω . O processo resultante é estacionário, e η_t^N como função de tão construído ξ_t^N tem a lei dada por (4.1).

4 Covariâncias entre as partículas Fleming-Viot

Nesta seção estudaremos o grau de dependência entre as partículas do processo F-V η_t^N (ξ_t^N). É claro que se não for por mecanismo na barreira absorvente, as partículas seriam independentes. Mas este mecanismo introduz uma dependência hierarquica muito delicada entre as partículas. No trabalho do Burdzy et al. (2000) os autores mencionam, mas não provam, que as partículas são assintoticamente independentes. Dizemos assintoticamente no sentido quando $N \rightarrow \infty$. Nós de fato provaremos esta afirmação estimando as covariâncias em instantes de tempo e sob medida invariante. Começamos a próxima seção mostrando como a independência entre as partículas $FV(Q)$ levaria a construção da DQE(Q).

4.1 Aproximação de campo médio para F-V e a DQE

De (3.1), para uma função cilíndrica f , o gerador infinitesimal do processo η_t^N , aplica-se assim:

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x,y \in \Lambda} \tilde{q}(\eta, \eta^{xy})(f(\eta^{xy}) - f(\eta)). \quad (4.1)$$

Em (4.1) toma $f(\eta) = \eta(x)$, ($x \in \Lambda$).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta(x) &= \sum_{y,z} \tilde{q}(\eta, \eta^{y,z})(\eta^{y,z}(x) - \eta(x)) \\ &= \sum_{y \neq x} \tilde{q}(\eta, \eta^{y,x})(\eta^{y,x}(x) - \eta(x)) + \sum_{z \neq x} \tilde{q}(\eta, \eta^{x,z})(\eta^{x,z}(x) - \eta(x)) \\ &= \sum_{y \neq x} \tilde{q}(\eta, \eta^{y,x}) \cdot 1 + \sum_{z \neq x} \tilde{q}(\eta, \eta^{x,z}) \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y \neq 0, x} \eta(y) \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) - \sum_{z \neq 0, x} \eta(x) \left(q(x, z) + q(x, 0) \frac{\eta(z)}{N} \right) \\
&= \sum_{y \neq 0, x} \eta(y) \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) - \eta(x) \left(\sum_{z \neq 0, x} q(x, z) + q(x, 0) \sum_{z \neq 0, x} \frac{\eta(z)}{N} \right) \\
&= \sum_{y \neq 0, x} \eta(y) \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) - \eta(x) \left((q_x - q(x, 0)) + q(x, 0) \left(1 - \frac{\eta(x)}{N} \right) \right) \\
&= \sum_{y \neq 0, x} \eta(y) \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) - \eta(x) \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right). \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Agora, seja μ_N a medida invariante do processo η_t^N

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}_{\mu_N} \mathcal{L}\eta(x) = \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\mathcal{L}\eta(x)}{N} \\
&= \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\sum_{y \neq 0, x} \frac{\eta(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) - \frac{\eta(x)}{N} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\sum_{y \neq 0, x} \frac{\eta(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) \right) - \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta(x)}{N} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) \right). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Como todos os elementos da soma são não-negativos troca se a soma com esperança

$$\mathbb{E}_{\mu_N} \left(\sum_{y \neq 0, x} \frac{\eta(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta(x)}{N} \right) \right) = \sum_{y \neq 0, x} \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta(y)}{N} q(y, x) + q(y, 0) \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta(y)}{N} \frac{\eta(x)}{N}.$$

Observação 4.1. Com um abuso de notação a medida invariante do processo ξ_t^N também denotamos por μ_N .

Definição 5. Se o processo η_t^N é ergódico com medida invariante μ_N , definimos a den-

sidade média sob medida invariante:

$$\rho^N(x) = \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(x)}{N}.$$

A equação (4.3) implica

$$0 = -q_x \rho^N(x) + q(x, 0) \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta(x)}{N} \right)^2 + \sum_{y \neq x, 0} q(y, x) \rho^N(y) + \sum_{y \neq x} q(y, 0) \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta(x) \eta(y)}{N^2} \right) \quad (4.4)$$

Podemos ver, que é suficiente mostrar que as covariâncias são suficientemente pequenas e daí a equação (4.4) começaria parecer a equação (2.3). Com esta idéia estamos prosseguindo nas páginas seguintes.

4.1.1 Dualidade

Estudaremos as covariâncias entre as partículas F-V usando a construção gráfica do $\xi_t^{N,\xi}$, o Algoritmo 1. Estendemos a mão para conceito de dualidade, um campo promissor quando existe uma dinâmica do *votante*.

Observação 4.2. O processo dual definido na maneira usual não nos ajuda. O caminho para trás quando encontra uma marca de votante apontada nele pula para a posição da onde está apontando. Seria fácil se uma marca de votante sempre fosse usada. Mas uma marca de votante é usada dependendo de estado do processo ξ_t^N . Para saber o estado do processo ξ_t^N , de qual depende se ele usa ou não a marca encontrada, o passeio dual tem que olhar no **futuro dele**. Se encontrar uma marca de regeneração o caminho pára, pois é nesse instante exatamente que o valor de $\xi_t^N(k)$ é gerado e o caminho mais para

frente fica irrelevante. É importante observar que um **passeio dual não é um processo Markoviano**. Portanto, analogamente à Ferrari (1990), usaremos um processo dual generalizado.

Supomos que, para intervalo $[0, t]$, temos a realização de Processos de Poisson e v.a.'s usados no Algoritmo 1. Vamos construir uma estrutura $\Psi^i(0, t)$ que conteria a união de todos os eventos em intervalo $(0, t)$ que poderiam influenciar o valor de $\xi_t^{N, \xi}(i)$. Seja Ψ_t^i sua projeção espacial. Na construção em seguir o **tempo é invertido**.

Algoritmo 2. Construção de $\Psi^i(0, t)$

D1 $\Psi^i(0, 0) = \{(i, 0)\}$; $\Psi_0^i = i$; $s = 0$

D2 Se $s < t$ vá á [D3], caso contrário vá á [D5].

D3 Seja (j, τ) a primeira marca envolvendo uma das partículas $j \in \Psi_s^i$.

Para todo $s < r < \tau$ $\Psi^i(0, r) = \Psi^i(0, s)$ e $\Psi_r^i = \Psi_s^i$.

Se

– marca de votante $\tau = V_n^j$, então $\Psi^i(0, \tau) = \Psi^i(0, s) \cup \{((j, \tau), (W_n^j, \tau))\} \cup \{F_n^j\}$;

$$\Psi_\tau^i = \Psi_s^i \cup \{W_n^j\}$$

– marca de regeneração $\tau = (.)M_n^j$, então $\Psi^i(0, \tau) = \Psi^i(0, s) \cup \{(j, \tau)\}$ mas $\Psi_\tau^i =$

$$\Psi_s^i \setminus \{j\}$$

– marca de dinâmica interna $\tau = (.)S_n^j$, então $\Psi^i(0, \tau) = \Psi^i(0, s) \cup \{(j, \tau)\}$;

$$\Psi_\tau^i = \Psi_s^i$$

D4 $s = \tau$; vá á [D2].

D5 output $\Psi^i(0, t), \Psi_t^i$; FIM.

A equação de dualidade é

$$\xi_t^{N, \xi}(i) = H(\Psi^i(0, t), \xi). \quad (4.5)$$

Não conhecemos uma formula explicita para H mas é possível computa-lá para todas realizações de PP's, pois é fácil calcular $\xi_t^N(i)$ tendo uma vez $\Psi^i(0, t)$ e ξ_0^N .

Seja ψ_t um processo de nascimento e morte em $\mathbb{N}$, com taxa de nascimento proporcional à C e taxa de morte proporcional à α . Usando a construção de $\Psi^i[0, t]$ é fácil construir os dois processos de tal forma que $|\Psi_s^i| \leq \psi_s$, para todo $s \geq 0$.

Observação 4.3. $\mathbb{E}\psi_s = e^{(C-\alpha)s}, s \geq 0$

Figura 4: Estruturas de ramificação

4.1.2 Argumento de acoplamento

Para duas partículas k e j , construiremos $(\hat{\Psi}^k(0, t), \hat{\Psi}^j(0, t))$ tal que tenham as mesmas distribuições marginais que $(\Psi^k(0, t), \Psi^j(0, t))$ mas que suas marginais sejam independentes. Construímos um acoplamento de quatro processos $(\Psi^k(0, t), \Psi^j(0, t), \hat{\Psi}^k(0, t), \hat{\Psi}^j(0, t))$ tal que $\Psi^k(0, t) = \hat{\Psi}^k(0, t)$ e que $\hat{\Psi}^j(0, t) \cap \Psi^k(0, t) = \emptyset$ implica que $\Psi^j(0, t) = \hat{\Psi}^j(0, t)$. A construção é análoga à do Fernández, Ferrari e Garcia (2001).

Teremos duas independentes coleções de processos de Poisson e variáveis aleatórias usadas na construção gráfica (3.2) e cujas marcas vamos chamar de *vermelhas* e *verdes*. Aumentamos o espaço de probabilidade e continuamos usar $\mathbb{P}$ e $\mathbb{E}$ para a probabilidade e a esperança com respeito ao espaço gerado pelo produto de vermelhos e verdes processos de Poisson. Usando as marcas construímos simultaneamente os processos $(\Psi^k(0, t), \Psi^j(0, t), \hat{\Psi}^k(0, t), \hat{\Psi}^j(0, t))$:

Construção simultânea

- $\Psi^k(0, t)$ e $\Psi^j(0, t)$ são construídos de acordo Algoritmo 2 usando apenas as marcas *verdes*.
- $\hat{\Psi}^k(0, t)$ é construído também usando apenas marcas *verdes* e portanto coincide com $\Psi^k(0, t)$
- $\hat{\Psi}^j(0, t)$ é construído com a combinação de marcas verdes e vermelhas de tal forma que coincidisse com $\Psi^j(0, t)$ o mais tempo possível, seja independente de $\hat{\Psi}^k(0, t)$ e tem a mesma distribuição marginal que o $\Psi^j(0, t)$.

Introduzimos uma v.a' que $\text{Intersec}(t) \in \{0, 1\}$ que indica se duas estruturas, como

subconjuntos de $\{1, \dots, N\} \times [0, t]$, se intersectam:

$$\text{Intersec}(t) = \mathbb{I}\{\hat{\Psi}^j(0, t) \cap \hat{\Psi}^k(0, t) \neq \emptyset\}. \quad (4.6)$$

Inicialmente $\text{Intersec}(0) = 0$.

- Se a marca é *verde* e pode ser incluída em $\Psi^k(0, s-)$ mas não em $\Psi^j(0, s)$, então inclua-a em $\hat{\Psi}^k(0, s)$ e $\Psi^k(0, s)$. Analogamente, se pode ser incluída em $\Psi^j(0, s-)$ mas não em $\Psi^k(0, s)$, então inclua-a em $\hat{\Psi}^j(0, s)$ e $\Psi^j(0, s)$.
- Se a marca é *verde* e pode ser incluída nos dois, $\Psi^k(0, s-)$ e $\Psi^j(0, s-)$, então inclua-a em $\Psi^k(0, s)$ e $\hat{\Psi}^k(0, s)$.

$\text{Intersec}(s) = 1$.

- Se a marca é *vermelha* e pode ser incluída nos dois, $\Psi^k(0, s-)$ e $\Psi^j(0, s-)$, então inclua-a em apenas $\hat{\Psi}^j(0, s)$.

$\text{Intersec}(s) = 1$.

- Se a marca é *vermelha* e pode ser incluída em um dos dois, $\Psi^k(0, s-)$ e $\Psi^j(0, s-)$, mas não nos dois, então ignore a marca.
 - Se a marca é *verde* ou *vermelha* mas não pode ser incluída em nenhum dos dois, $\Psi^k(0, s-)$ e $\Psi^j(0, s-)$, então ignore a marca.
- Se no instante s aparece uma marca (*verde* ou *vermelha*) e $\text{Intersec}(s)=1$, então use marcas *verdes* para $\Psi^k(0, s)$ e $\Psi^j(0, s)$ e $\hat{\Psi}^k(0, s)$ e as marcas *vermelhas* para $\hat{\Psi}^j(0, s)$.

Agora usaremos processos acoplados na estimação das covariâncias do $\xi_t^{N,\xi}$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(j) = x, \xi_t^{N,\xi}(k) = y) - \mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(j) = x)\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(k) = y) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{I}\{H(\Psi^j(0, t), \xi) = x, H(\Psi^k(0, t), \xi) = y\} - \mathbb{I}\{H(\hat{\Psi}^j(0, t), \xi) = x\}H(\hat{\Psi}^k(0, t), \xi) = y\}\right) \\
&= \mathbb{E}(-||-, \text{Intersec}(t) = 0) + \mathbb{E}(-||-, \text{Intersec}(t) = 1). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Os $(\Psi^j(0, t), \hat{\Psi}^j(0, t), \Psi^k(0, t), \hat{\Psi}^k(0, t))$ são construídos de tal forma que no evento $[\text{Intersec}(t) = 0]$, valem igualdades: $\Psi^j(0, t) = \hat{\Psi}^j(0, t)$ e $\Psi^k(0, t) = \hat{\Psi}^k(0, t)$. Portanto $\mathbb{E}(-||-, \text{Intersec}(t) = 0) = 0$. O argumento de acoplamento mostra então que

$$|\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(j) = x, \xi_t^{N,\xi}(k) = y) - \mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(j) = x)\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(k) = y)| \leq \mathbb{P}(\text{Intersec}(t) = 1). \tag{4.8}$$

No próximo lema estimamos a probabilidade de duas estruturas de ramificação se intersectam até o instante t . A existência de um α positivo não é necessária, a estimação é válida para qualquer que seja $\alpha(Q) \geq 0$.

Lema 4.1. *Para $t \geq 0$ e $x, y \in \Lambda$ e duas partículas diferentes $k, j \in \{1, \dots, N\}$*

$$\mathbb{P}(\hat{\Psi}^j(0, t) \cap \hat{\Psi}^k(0, t) \neq \emptyset) \leq \frac{1}{N-1} \frac{C}{(\alpha - C)} (1 - e^{2(C-\alpha)t})$$

Prova: Seja

$$T^{kj} = \inf\{s \geq 0 : \hat{\Psi}^k(0, s) \cap \hat{\Psi}^j(0, s) \neq \emptyset\} \tag{4.9}$$

o instante de encontro de duas estruturas, com convenção que $\inf \emptyset = \infty$.

É claro que

$$\mathbb{P}(\hat{\Psi}^k(0, t) \cap \hat{\Psi}^j(0, t) \neq \emptyset) = \mathbb{P}(T^{kj} \leq t).$$

A próxima tarefa é estimar $\mathbb{P}(T^{kj} \leq t)$. O que vamos fazer é derivar para frente $\mathbb{P}(T^{kj} > t)$ como função de tempo t .

Primeiramente observe que

$$\mathbb{I}(T^{kj} > t) - \mathbb{I}(T^{kj} > t - h) = -\mathbb{I}(t - h < T^{kj} < t)$$

Seja

$\mathcal{N}_V^{\hat{\Psi}_t^k, \hat{\Psi}_t^j}(t, s) :=$ o número de marcas de votante associadas as todas as partículas de $\hat{\Psi}_t^k \cup \hat{\Psi}_t^j$ no intervalo (t, s) .

A v.a. $\mathcal{N}_V^{\hat{\Psi}_t^k, \hat{\Psi}_t^j}(t, s)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $C|\hat{\Psi}_t^k \cup \hat{\Psi}_t^j|(s - t)$. Se $\hat{\Psi}_t^k \cap \hat{\Psi}_t^j = \emptyset$ então $|\hat{\Psi}_t^k \cup \hat{\Psi}_t^j| = |\hat{\Psi}_t^k| + |\hat{\Psi}_t^j|$.

Para que o encontro de $\hat{\Psi}_t^k$ e $\hat{\Psi}_t^j$ aconteça no intervalo $(t, t + h)$ é necessário que existe pelo menos uma marca de votante neste intervalo. Supomos que tem uma (a probabilidade de ter mais de uma é de ordem $o(h)$) e que é associada a uma partícula de $\hat{\Psi}_t^k$. A variavel aleatória W associada à marca de votante tem que apontar à uma partícula da $\hat{\Psi}_t^j$ para que o encontro aconteça. De fato

$$\mathbb{P}(T^{kj} > t, T^{kj} < t + h, |\hat{\Psi}_t^k| = m, |\hat{\Psi}_t^j| = n)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(T^{kj} > t, T^{kj} < t + h, |\hat{\Psi}_t^k| = m, |\hat{\Psi}_t^j| = n, \mathcal{N}_V^{\hat{\Psi}_t^k, \hat{\Psi}_t^j}(t, t + h) = 1) + o(h) \\
&= \left(C(m+n)h e^{-Ch(m+n)} \left(\frac{m}{m+n} \frac{n}{N-1} + \frac{n}{m+n} \frac{m}{N-1} \right) \right) P(T^{kj} > t, |\hat{\Psi}_t^k| = m, |\hat{\Psi}_t^j| = n) + o(h) \\
&= \frac{C}{N-1} 2mn h e^{-Ch(m+n)} \mathbb{P}(T^{kj} > t, |\hat{\Psi}_t^k| = m, |\hat{\Psi}_t^j| = n) + o(h) \\
&\leq \frac{C}{N-1} 2mn h e^{-Ch(m+n)} \mathbb{P}(|\hat{\Psi}_t^k| = m, |\hat{\Psi}_t^j| = n) + o(h)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $o(h)$, $h \rightarrow 0$ corresponde a probabilidade de ter mais de uma marca de votante no intervalo de tamanho $(t, t + h)$.

$$\begin{aligned}
&\sum_m \sum_n \mathbb{P}(T^{kj} > t, T^{kj} < t + h, |\hat{\Psi}_t^k| = m, |\hat{\Psi}_t^j| = n) \\
&\leq \sum_m \sum_n \frac{2C}{N-1} h e^{-Ch(m+n)} m \mathbb{P}(|\hat{\Psi}_t^k| = m) n \mathbb{P}(|\hat{\Psi}_t^j| = n) \\
&= \frac{2C}{N-1} \sum_m \sum_n h e^{-Ch(m+n)} m \mathbb{P}(|\hat{\Psi}_t^k| = m) n \mathbb{P}(|\hat{\Psi}_t^j| = n).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < T^{kj} < t + h)}{h} \leq \frac{2C}{N-1} \mathbb{E}(|\hat{\Psi}_t^k|) \mathbb{E}(|\hat{\Psi}_t^j|).$$

Como $\hat{\Psi}_t^k$ e $\hat{\Psi}_t^j$ são igualmente distribuidos e $\hat{\Psi}_t^k$ dominado por um processo ψ_t , então, de acordo a observação 4.3

$$\mathbb{E}(|\hat{\Psi}_t^k|) \leq e^{C-\alpha} t$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(T^{kj} > t) = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < T^{kj} < t+h)}{h} \geq -\frac{2C}{N-1}e^{2(C-\alpha)t}.$$

Denotando $g(t) = \mathbb{P}(T^{kj} > t)$ podemos aplicar o lema A.1, provado no Apêndice, para concluirmos que

$$\mathbb{P}(T^{kj} > t) \geq 1 + \frac{1}{N-1} \frac{C}{(C-\alpha)} (1 - e^{2(C-\alpha)t})$$

e finalmente

$$\mathbb{P}(T^{kj} \leq t) \leq \frac{1}{N-1} \frac{C}{(\alpha-C)} (1 - e^{2(C-\alpha)t}). \quad (4.11)$$

■

Proposição 4.1. *Para $t \geq 0$ e $x, y \in \Lambda$ e duas partículas diferentes $k, j \in \{1, \dots, N\}$ vale*

$$|\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(k) = x, \xi_t^{N,\xi}(j) = y) - \mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(k) = x)\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(j) = y)| \leq \frac{1}{N-1} \frac{C}{(\alpha-C)} (1 - e^{2(C-\alpha)t}).$$

Prova: Da (4.8) temos que

$$|\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(k) = x, \xi_t^{N,\xi}(j) = y) - \mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(k) = x)\mathbb{P}(\xi_t^{N,\xi}(j) = y)| \leq \mathbb{P}(\hat{\Psi}^k(0, t) \cap \hat{\Psi}^j(0, t) \neq \emptyset)$$

e usando o lema 4.1, a proposição esta provada. ■

Proposição 4.2. Se $\alpha(\hat{Q}) > C$ então para $k, j \in 1, \dots, N$ e $x, y \in \Lambda$

$$|\mu_N(\xi^N(k) = x, \xi^N(j) = y) - \mu_N(\xi^N(k) = x)\mu_N(\xi^N(j) = y)| \leq \frac{1}{N-1} \frac{C}{(\alpha - C)}$$

Prova: Se $\alpha(\hat{Q}) > 0$ então o processo ξ_t^N é ergódico e tem a medida invariante μ_N . Neste caso $\xi_t^{N,\xi} \Rightarrow \xi_{\mu_N}^N$, $t \rightarrow \infty$, qualquer que seja ξ . Se $C - \alpha < 0$ então $\exp\{2(C - \alpha)t\} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \frac{C}{(\alpha - C)} (1 - e^{2(C-\alpha)t}) = \frac{1}{N-1} \frac{C}{(\alpha - C)}.$$

■

As proposições sobre as covariâncias de ξ_t^N imediatamente se estendem para as covariâncias de η_t^N e temos o próximo corolário.

Corolário 4.1. Para $x, y \in \Lambda$

a) Para todo $t > 0$

$$\left| \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(x) \eta_t^N(y)}{N^2} \right) - \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(y)}{N} \right| \leq \frac{1}{N} e^{2Ct}.$$

b) Se $\alpha(\hat{Q}) > C$, então

$$\left| \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x) \eta^N(y)}{N^2} \right) - \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(x)}{N} \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(y)}{N} \right| \leq \frac{1}{N} \frac{\alpha}{\alpha - C}$$

Prova: Provaremos o parte b), a prova do parte a) é análoga.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x)}{N} \right)^2 &= \frac{1}{N^2} \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\sum_{k=1}^N \mathbb{I}(\xi^N(k) = x) + \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \mathbb{I}(\xi^N(k) = x) \mathbb{I}(\xi^N(j) = x) \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{k=1}^N \mu_N(\xi^N(k) = x) + \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \mu_N(\xi^N(k) = x, \xi^N(j) = x) \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x) \eta^N(y)}{N^2} \right) &= \frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^N \mathbb{I}(\xi^N(k) = x) \sum_{j=1}^N \mathbb{I}(\xi^N(j) = y) \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} \mu_N(\xi^N(k) = x, \xi^N(j) = y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x)}{N} \right)^2 - \left(\mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(x)}{N} \right)^2 &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{k=1}^N (\mu_N(\xi^N(k) = x) - (\mu_N(\xi^N(k) = x))^2) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} (\mu_N(\xi^N(k) = x, \xi^N(j) = x) - \mu_N(\xi^N(k) = x) \mu_N(\xi^N(j) = x)) \right). \quad (4.12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x) \eta^N(y)}{N^2} \right) - \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(x)}{N} \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(y)}{N} &= \frac{1}{N^2} \left(- \sum_{j=1}^N \mu_N(\xi^N(j) = x) \mu_N(\xi^N(j) = y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k} (\mu_N(\xi^N(k) = x, \xi^N(j) = y) - \mu_N(\xi^N(k) = x) \mu_N(\xi^N(j) = y)) \right). \quad (4.13)\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 4.2 à (4.12) e (4.13) temos que, para todo $x, y \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x) \eta^N(y)}{N^2} \right) - \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(x)}{N} \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(y)}{N} \right| &\leq \frac{1}{N^2} (N + N(N-1) \frac{C}{(N-1)(\alpha-C)}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{\alpha}{\alpha-C} \end{aligned}$$

e b) está provado.

Observação 4.4. O parte a) é um corolário da Proposição 4.1 tomando $\alpha = 0$.

■

5 Tightness

Nesta seção provaremos o tightness de densidades medias, como medidas de probabilidade em Λ , indexadas por N . Seja

$\mathcal{N}_{ab}^i(s, t) :=$ o número de absorções da partícula i durante intervalo de tempo (s, t)

Lema 5.1. *Para todo $t > 0$, $x \in \Lambda$, $i = 1, \dots, N$ e uma medida de probabilidade μ_0 vale*

$$\mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x) \leq e^{Ct} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x). \quad (5.1)$$

Prova: Dizemos que a partícula i esta de tipo 0 no instante t se não foi absorvida nenhuma vez em intervalo $[0, t]$. Depois de cada absorção, e somente nessas instantes, uma partícula muda de tipo. Se a partícula em cuja posição ela pulou, esta de tipo k a partícula i toma o tipo $k + 1$. De fato, em instante t uma partícula tem o tipo k se o último pulo dela foi em cima da partícula do tipo $k - 1$. Definimos $\text{tip}(i, t) \in \mathbb{N}$:

$\text{tip}(i, t) :=$ o tipo da partícula i no instante t .

Se $\text{tip}(i, t) = 0$ então a lei marginal de $\xi_t^{N, \mu_0}(i)$ é a lei do processo $Z_t^{\mu_0}$:

$$\mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, t) = 0) = \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x). \quad (5.2)$$

Provaremos que , para $k \geq 1$

$$\mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, s) = k) \leq \frac{(Cs)^k}{k!} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_s(z, x) \quad (5.3)$$

pelo indução. Já foi visto em (5.2) que a afirmação é válida para $k = 0$. A suposição é que (5.3) vale para algum $k \geq 0$ para todo $s \geq 0$, e provaremos a afirmação para $k + 1$.

A fim de facilitar a leitura denotaremos por $[i \rightarrow j]$ o evento que a partícula i pula no lugar da partícula j no instante de absorção. Isto é, o valor da v.a. associada a absorção é j , $W^i = j$. Também escreveremos em palavras “absorção em s ” abreviado para “absorção da partícula i no instante s ”, quando é claro que falamos da absorção da partícula i . Para ser mais fácil acompanhar a conta escreveremos $\mathbb{P}(\text{“absorção em } s\text{”})$ ao invés de $\sum_z \mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0}(i) = z)Q(z, 0)$.

Agora calculamos a lei marginal de $\xi_t^{N, \mu_0}(i)$ de uma partícula do tipo $k + 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, t) = k + 1) &= \int_0^t \mathbb{P}(\xi_s^{\mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, s) = k + 1, \text{“última absorção em } s\text{”})ds \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, s) = k + 1, \text{“absorção em } s\text{”, } \mathcal{N}_{ab}^i(s, t) = 0)ds \\
&= \int_0^t \sum_{j \neq i} \sum_{y \in \Lambda} \mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0}(i) = x, \text{“absorção em } s\text{”, } \mathcal{N}_{ab}^i(s, t) = 0, [i \rightarrow j], \xi_s^{N, \mu_0}(j) = y, \text{tip}(j, s) = k)ds \\
&= \int_0^t \sum_{j \neq i} \sum_{y \in \Lambda} \mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0}(i) = x, \mathcal{N}_{ab}^i(s, t) = 0 | \text{“absorção em } s\text{”, } [i \rightarrow j], \xi_s^{N, \mu_0}(j) = y, \text{tip}(j, s) = k) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(\text{“absorção em } s\text{”, } [i \rightarrow j], \xi_s^{N, \mu_0}(j) = y, \text{tip}(j, s) = k)ds \\
&= \int_0^t \sum_{j \neq i} \sum_{y \in \Lambda} P_{t-s}(y, x) \cdot \mathbb{P}(\text{“absor. de } i \text{ em } s\text{”, } [i \rightarrow j], \xi_s^{N, \mu_0}(j) = y, \text{tip}(j, s) = k)ds \\
&= \int_0^t \sum_{j \neq i} \sum_{y \in \Lambda} P_{t-s}(y, x) \mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0}(j) = y, \text{tip}(j, s) = k) \frac{1}{N-1} \mathbb{P}(\text{“absor. de } i \text{ em } s\text{”})ds. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Usamos a hipótese (5.3) e em seguida as equações Chapman-Kolmogorov

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, t) = k + 1) \\
& \leq \int_0^t \sum_{y \in \Lambda} P_{t-s}(y, x) \frac{(Cs)^k}{k!} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_s(z, y) \mathbb{P}(\text{absorção de } i \text{ em } s) ds \\
& = \int_0^t \mathbb{P}(\text{absorção de } i \text{ em } s) \frac{(Cs)^k}{k!} \sum_{z \in \Lambda} \sum_{y \in \Lambda} \mu_0(z) P_s(z, y) P_{t-s}(y, x) ds \\
& = \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) \int_0^t \mathbb{P}(\text{absorção de } i \text{ em } s) \frac{(Cs)^k}{k!} ds \\
& = \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) \int_0^t \frac{(Cs)^k}{k!} \sum_{w \in \Lambda} \mathbb{P}(\xi_s^{N, \mu_0} = w) Q(w, 0) ds \\
& \leq \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) \int_0^t \frac{(Cs)^k}{k!} C ds = \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) \frac{(C)^{k+1}}{k!} \int_0^t s^k ds \\
& = \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) \frac{(Ct)^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Portanto, a (5.3) está provada. Finalmente, estimamos a lei marginal do $\xi_t^{N, \mu_0}(i)$ usando (5.3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x, \text{tip}(i, t) = k) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) \frac{(Ct)^{k+1}}{(k+1)!} = e^{Ct} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x).
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.1. *Para todo $t > 0$, as $\mathbb{E} \frac{\eta_t^{N, \mu_0}}{N}$ são “tight”.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ e seja $L_{t,\epsilon}$ tal que

$$\sum_{x > L_{t,\epsilon}} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) < \frac{\epsilon}{e^{Ct}}. \quad (5.5)$$

Usamos o Lema 5.1 para estimar a probabilidade de uma partícula no instante t tem chegado a posição atrás de $L_{t,\epsilon}$

$$\sum_{x > L_{t,\epsilon}} \mathbb{E} \frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N} = \sum_{x > L_{t,\epsilon}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \mathbb{P}(\xi_t^{N, \mu_0}(i) = x) \leq \sum_{x > L_{t,\epsilon}} e^{Ct} \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x) < \epsilon. \quad (5.6)$$

Chamando de $D_\epsilon = \{x \in \Lambda : x > L_{t,\epsilon}\}$ temos a tightness:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists D_\epsilon \subseteq \Lambda \quad \text{tal que} \quad \sum_{x \in D_\epsilon} \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} < \epsilon \quad (5.7)$$

■

Supomos daqui para frente que $\alpha := \alpha(\hat{Q}) > 0$ e estudamos a “tightness” das densidades médias sob medida invariante.

Definição 6. Para $\alpha > 0$ definimos a medida de probabilidade em Λ , μ_α

$$\mu_\alpha(x) = \frac{\alpha_x}{\alpha}, \quad x \in \Lambda.$$

Definimos para $z, x \in \Lambda$

$$R(z, x) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} P_t(z, x) dt. \quad (5.8)$$

A matriz R é uma matriz sub-estocástica que pode ser interpretada assim: primeiramente geramos um tempo aleatório T_α com distribuição exponencial de parâmetro α , independente do processo Z_t^z ; então $R(z, x)$ é a probabilidade de processo Z_t^z estar em x no instante $t = T_\alpha$. Como $x \neq 0$, R é sub-estocástica.

Lema 5.2. *Se $\alpha > 0$ então para todo $i = 1, \dots, N$ e todo $x \in \Lambda$*

$$\mu_N(\xi^N(i) = x) \leq \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{C}{\alpha}\right)^k \mu_\alpha R^{k+1}(x) \quad (5.9)$$

Prova: Pela Observação 3.4 podemos construir o processo estacionário ξ_s^N tal que $\mu_N(\xi^N(i) = x) = \mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x), \forall s$.

Como na prova do Lema 5.1 analisaremos a distribuição marginal de partículas de acordo os tipos. Os tipos são definidos igualmente e supomos que encontrando uma marca de regeneração, o tipo da partícula volta a ser 0. Nesse instante o próximo valor é escolhido de acordo a distribuição μ_α . As marcas de regeneração seguem um processo de Poisson de taxa α e a partir de tempo s o instante da primeira marca, T_α^i , tem distribuição exponencial com parâmetro α . Supomos que o processo começou longe no passado, em tempo $= -\infty$, e estamos observando a distribuição marginal no instante $s > -\infty$.

$$\mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{tip}(i, s) = 0) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} \sum_{z \in \Lambda} \mu_\alpha(z) P_t(z, x) dt \quad (5.10)$$

ou seja

$$\mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{tip}(i, s) = 0) = \sum_z \mu_\alpha(z) R(z, x) = \mu_\alpha R(x). \quad (5.11)$$

Definimos

$$f_0(x) = \mu_\alpha R(x) \quad (5.12)$$

$$f_k(x) = \frac{C}{\alpha} f_{k-1} R(x) = \left(\frac{C}{\alpha}\right)^k \mu_\alpha R^{k+1}(x) \quad (5.13)$$

e queremos provar que, para todo $s > -\infty$

$$\mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{tip}(i, s) = k) \leq f_k(x). \quad (5.14)$$

Usaremos a indução. A equação (5.11) prova a afirmação para $k = 0$. Agora supomos que (5.14) vale para algum $k - 1$ onde $k \geq 1$, e provamos a afirmação para k . A prova é análoga a do Lema 5.1.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{tip}(i, s) = k) &= \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{tip}(i, s) = k, \text{última absorção de } i \text{ antes de } s \text{ é em } s - t, T_\alpha^i > t) dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{j \neq i} \sum_{y \in \Lambda} \mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{absor. em } s - t, \mathcal{N}_{ab}^i(t, s) = 0, i \rightarrow j, \\ &\quad \xi_{s-t}^N(j) = y, \text{tip}(j, s - t) = k - 1, T_\alpha^i > t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbb{P}(\text{absor. em } s - t) \sum_{y \in \Lambda} \mathbb{P}(\xi_{s-t}^N(j) = y, \text{tip}(j, s - t) = k - 1) P_t(y, x) dt \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{\alpha} \sum_y f_{k-1}(y) R(y, x) = f_k(x).$$

Portanto

$$\mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_s^N(i) = x, \text{tip}(i, 0) = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C}{\alpha}\right)^k \mu_{\alpha} R^{k+1}(x).$$

■

Proposição 5.2. *Se $\alpha > C$, então ρ^N são “tight”.*

Prova: Como R é sub-estocástica então, para todo $k \geq 1$

$$\sum_{x \in \Lambda} \mu_{\alpha} R^k(x) \leq 1. \quad (5.15)$$

Seja $\epsilon > 0$ e L_{ϵ} tal que $\sum_{x > L_{\epsilon}} \mu_{\alpha} R^k(x) < \epsilon(1 - C/\alpha)$. Pela hipótese $C/\alpha < 1$ e usando o Lema 5.2 temos que

$$\mu_N(\xi^N(i) > L_{\epsilon}) < \epsilon(1 - \frac{C}{\alpha}) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C}{\alpha}\right)^k = \epsilon. \quad (5.16)$$

Diretamente segue que $\rho^N (= \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N}{N})$ são tight.

■

6 Teoremas principais

Nesta seção provamos os resultados mais importantes deste trabalho, Teoremas 6.1, 6.2. No Teorema 6.1 estabelecemos relação entre perfil médio do processo $FV(Q)$ e a distribuição do processo condicionado a não absorção. Começamos com uma definição.

Definição 7. Para uma medida de probabilidade μ_0 em Λ , definimos para todo $x \in \Lambda$

$$\varphi_t^{\mu_0}(x) = \frac{\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x)}{\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) (1 - P_t(z, 0))}.$$

No próximo lema derivamos para frente a distribuição condicional acima.

Lema 6.1. *As equações de Kolmogorov para frente do $\varphi_t^{\mu_0}$ são*

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^{\mu_0}(x) = \sum_{y \neq 0, x} \varphi_t^{\mu_0}(y) (q(y, x) + q(y, 0) \varphi_t^{\mu_0}(x)) - \varphi_t^{\mu_0}(x) (q_x - q(x, 0) \varphi_t^{\mu_0}(x)). \quad (6.1)$$

$\varphi_t^{\mu_0}$ é a única solução deste sistema.

Prova: Como $q(0, x) = 0$ para todo $x \neq 0$, então $q_0 = -\sum_{x \neq 0} q(0, x) = 0$ e as equações de Kolmogorov para frente do processo Z_t são:

$$\frac{d}{dt} P_t(z, x) = -P_t(z, x) q_x + \sum_{y \neq 0, x} P_t(z, y) q(y, x) \quad (6.2)$$

e

$$\frac{d}{dt} P_t(z, 0) = \sum_{y \neq 0, x} P_t(z, y) q(y, x) + P_t(z, x) q(x, 0). \quad (6.3)$$

Derivamos $\varphi_t^{\mu_0}(x)$ usando sua definição.

Para facilitar a leitura chamaremos de $\gamma_t = \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, 0)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \varphi_t^{\mu_0}(x) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x)}{1 - \gamma_t} \right) \\
&= \frac{(\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) \frac{d}{dt} P_t(z, x))(1 - \gamma_t) + (\frac{d}{dt} \gamma_t) \sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x)}{(1 - \gamma_t)^2} \\
&= \frac{(\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) \frac{d}{dt} P_t(z, x))}{1 - \gamma_t} + \frac{(\frac{d}{dt} \gamma_t)}{1 - \gamma_t} \cdot \frac{\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x)}{1 - \gamma_t}
\end{aligned}$$

Agora, pelo (6.2) e (6.3)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \varphi_t^{\mu_0}(x) &= \frac{\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) [-P_t(z, x) q_x + \sum_{y \neq 0, x} P_t(z, y) q(y, x)]}{1 - \gamma_t} \\
&+ \frac{\sum \mu_0(z) [\sum_{y \neq 0, x} P_t(z, y) q(y, x) + P_t(z, x) q(x, 0)]}{1 - \gamma_t} \cdot \frac{\sum_{z \in \Lambda} \mu_0(z) P_t(z, x)}{1 - \gamma_t} \\
&= -\varphi_t^{\mu_0}(x) q_x + \sum_{y \neq 0, x} \varphi_t^{\mu_0}(y) q(y, x) + \varphi_t^{\mu_0}(x) \left(\sum_{y \neq 0, x} \varphi_t^{\mu_0}(y) q(y, x) + \varphi_t^{\mu_0}(x) q(x, 0) \right) \\
&= \sum_{y \neq 0, x} \varphi_t^{\mu_0}(y) (q(y, x) + q(y, 0) \varphi_t^{\mu_0}(x)) - \varphi_t^{\mu_0}(x) (q_x - q(x, 0) \varphi_t^{\mu_0}(x)).
\end{aligned}$$

Em seguida provaremos a unicidade.

Sejam φ_t e ς_t duas soluções de (6.1) e seja $\epsilon_t(x) = |\varphi_t(x) - \varsigma_t(x)|$. Então ϵ_t satisfaz a desigualdade

$$\frac{d}{dt} \epsilon_t(y) \leq \sum_{z \in \Lambda} \epsilon_t(z) q(z, y) + \sum_{z \in \Lambda} |\varphi_t(z) \varphi_t(y) - \varsigma_t(z) \varsigma_t(y)| q(z, 0). \quad (6.4)$$

Observe que

$$|\varphi_t(z) \varphi_t(y) - \varsigma_t(z) \varsigma_t(y)| \leq \varphi_t(z) \epsilon_t(y) + \epsilon_t(z) \varsigma_t(y). \quad (6.5)$$

Denotaremos $E_t = \sum_{y \in \Lambda} \epsilon_t(y)$ e somamos (6.4) em y . Usando que $q(z, y) \leq \bar{q}$, $q(z, 0) \leq C$ e (6.5) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt} E_t \leq (2\bar{q} + 2C) E_t. \quad (6.6)$$

Isto implica que $E_t \leq E_0 e^{(2\bar{q}+2C)t}$. Como E_t é não negativo e $E_0 = 0$ então $E_t = 0$ para todo $t \geq 0$. Portanto $\varsigma_t \equiv \varphi_t$. ■

Usaremos o Lema na prova do próximo teorema.

Teorema 6.1. *Seja μ_0 uma medida de probabilidade em Λ e seja a medida inicial o produto de μ_0 . Então para todo $t > 0$ e todo $x \in \Lambda$*

$$\frac{\mathbb{E} \eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N} \rightarrow \varphi_t^{\mu_0}(x), \quad N \rightarrow \infty \quad (6.7)$$

$$\frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N} \xrightarrow{\mathbb{P}} \varphi_t^{\mu_0}(x), \quad N \rightarrow \infty \quad (6.8)$$

Prova: Pela desigualdade de Chebyshev e Corolário 4.1, respectivamente, temos que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N}\right)\right| > \epsilon\right) \leq \frac{Var \frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N}}{\epsilon^2} \leq c \frac{1}{N\epsilon^2} \quad (6.9)$$

da onde segue a convergência em probabilidade

$$\Rightarrow \frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{\eta_t^{N, \mu_0}(x)}{N}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Agora aplicamos o gerador (4.1) a $\mathbb{E}(\frac{\eta_t^{N,\mu_0}(x)}{N})$ e, analogamente a (4.2), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbb{E}(\frac{\eta_t^{N,\mu_0}(x)}{N}) &= \mathbb{E} \mathcal{L}(\frac{\eta_t^{N,\mu_0}(x)}{N}) = \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{y \neq 0, x} \frac{\eta_t^{N,\mu_0}(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta_t^{N,\mu_0}(x)}{N} \right) - \frac{\eta_t^{N,\mu_0}(x)}{N} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta_t^{N,\mu_0}(x)}{N} \right) \right] \\
&= \sum_{y \neq 0, x} \left(\mathbb{E} \frac{\eta_t^N(y)}{N} q(y, x) + q(y, 0) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \right) - q_x \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} + q(x, 0) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(x)}{N} \right)^2 \\
&= \sum_{y \neq 0, x} \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) - \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \left(q_x - q(x, 0) \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \\
&\quad + \sum_{y \neq 0} q(y, 0) \left(\mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \right) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \right). \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Queremos tomar o limite em N em (6.11) dos dois lados.

A seguinte observação mostra que podemos usar o Teorema de convergência dominada (TCD).

Observação 6.1. Usando que $\frac{\eta_t^N(x)}{N} \leq 1$ e o Lema 5.1 temos então

$$\left| q(y, 0) \left(\mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \right) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \right) \right| \leq C \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(y)}{N} \leq 2C e^{Ct} \mu_0 P_t(y)$$

e também

$$\mathbb{E} \frac{\eta_t^N(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \leq (\bar{q} + C) \mathbb{E} \frac{\eta_t^N(y)}{N} \leq (\bar{q} + C) e^{Ct} \mu_0 P_t(y).$$

Observe que $\sum_y \mu_0 P_t(y) = 1 - \mu_0 P_t(0) \leq 1$.

Observação 6.2. Pelo TCD

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{y \neq 0} q(y, 0) \left(\mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \right) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \right) = \\ \sum_{y \neq 0} q(y, 0) \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \right) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^N(x)}{N} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

pois, pelo corolário 4.1, $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(\frac{\eta_t^N(y)}{N} \frac{\eta_t^N(x)}{N}) - \mathbb{E}(\frac{\eta_t^N(y)}{N}) \mathbb{E}(\frac{\eta_t^N(x)}{N})) = 0$.

Seja $\{N_0\}$ uma subsequência de $\{N\}$. Pela Proposição 5.1 as $\mathbb{E}^{\frac{\eta_t^{N_0, \mu_0}}{N}}$ são tight e é possível escolher uma subsequência convergente à uma medida de probabilidade. Seja $\{N'\}$ tal que $\mathbb{E}^{\frac{\eta_t^{N', \mu_0}}{N'}}$ converge fracamente para uma medida ρ_t .

Então, de (6.11) e Observações 6.1 e 6.2, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{N'} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(x)}{N'} \right) &= \sum_{y \neq 0, x} \lim_{N'} \left(\mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(y)}{N'} \right) (q(y, x) + q(y, 0) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(x)}{N'} \right)) \right) \\ &\quad - \lim_{N'} \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(x)}{N'} \right) \left(q_x - q(x, 0) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(x)}{N'} \right) \right) + \\ &\quad + \sum_{y \neq 0} q(y, 0) \lim_{N'} \left(\mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(y)}{N'} \frac{\eta_t^{N', \mu_0}(x)}{N'} \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(y)}{N'} \right) \mathbb{E} \left(\frac{\eta_t^{N', \mu_0}(x)}{N'} \right) \right) \\ &= \sum_{y \neq 0, x} \rho_t(y) (q(y, x) + q(y, 0) \rho_t(x)) - \rho_t(x) (q_x - q(x, 0) \rho_t(x)). \end{aligned} \quad (6.13)$$

O próximo passo é verificar se é possível trocar a ordem do limite e da derivada no lado esquerdo da equação (6.12). Neste fim, convocamos um resultado do Kipnis e Landim (1999): Se F é uma função limitada, duas vezes continuamente diferenciável e

com derivadas uniformemente limitadas, então

$$M_t^F = F(\eta_t) - F(\eta_0) - \int_0^t \mathcal{L}F(\eta_s) ds \quad (6.14)$$

é um *martingal*.

Para nossos fins é suficiente escolher $F(\eta_t^N) = \frac{\eta_t^N(x)}{N}$, $x \in \Lambda$. Para facilitar a leitura, não escreveremos superíndices na conta a seguir. Agora

$$\mathbb{E}M_t^F = 0 \iff \mathbb{E}F(\eta_t) = \mathbb{E}F(\eta_0) + \mathbb{E} \int_0^t \mathcal{L} \frac{\eta_s(x)}{N} ds. \quad (6.15)$$

De acordo com (4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \frac{\eta_s(x)}{N} &= \sum_{y \neq 0, x} \frac{\eta_s(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta_s(x)}{N} \right) - \frac{\eta_s(x)}{N} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta_s(x)}{N} \right) \\ \left| \mathcal{L} \frac{\eta_s(x)}{N} \right| &\leq \sum_{y \neq 0, x} \frac{\eta_s(y)}{N} \left(\bar{q} + \bar{q} \frac{\eta_s(x)}{N} \right) + \frac{\eta_s(x)}{N} \left(q_x + \bar{q} \frac{\eta_s(x)}{N} \right) \leq 3\bar{q} + q_x \end{aligned} \quad (6.16)$$

e aplicando o Teorema de Fubini podemos inverter integral e a esperança em (6.15):

$$\mathbb{E}F(\eta_t) = \mathbb{E}F(\eta_0) + \int_0^t \sum_{y \neq 0, x} \mathbb{E} \left[\frac{\eta_s(y)}{N} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta_s(x)}{N} \right) - \frac{\eta_s(x)}{N} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta_s(x)}{N} \right) \right] ds.$$

Agora tomamos limite $N' \rightarrow \infty$ nos dois lados da equação acima. Primeiramente, pelo

escolha de F

$$\lim_{N' \rightarrow \infty} \mathbb{E}F(\eta_t) = \lim_{N' \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\eta_t(x)}{N'} = \rho_t(x). \quad (6.17)$$

e também $\lim_{N' \rightarrow \infty} \mathbb{E}F(\eta_0) = \mathbb{E} \frac{\eta_0(x)}{N} = \mu_0(x)$.

Á resto aplicamos o TCD

$$\begin{aligned} & \lim_{N' \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{y \neq 0, x} \mathbb{E} \left[\frac{\eta_s(y)}{N'} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta_s(x)}{N'} \right) - \frac{\eta_s(x)}{N'} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta_s(x)}{N'} \right) \right] ds \\ &= \int_0^t \lim_{N' \rightarrow \infty} \sum_{y \neq 0, x} \mathbb{E} \left[\frac{\eta_s(y)}{N'} \left(q(y, x) + q(y, 0) \frac{\eta_s(x)}{N'} \right) - \frac{\eta_s(x)}{N'} \left(q_x - q(x, 0) \frac{\eta_s(x)}{N'} \right) \right] ds. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Agora da equação (6.11) temos que

$$\rho_t(x) = \mu_0(x) + \int_0^t \sum_{y \neq 0, x} \rho_s(y) (q(y, x) + q(y, 0) \rho_s(x)) - \rho_s(x) (q_x - q(x, 0) \rho_s(x)) ds$$

da onde segue que

$$\frac{d}{dt} \rho_t(x) = \sum_{y \neq 0, x} \rho_t(y) (q(y, x) + q(y, 0) \rho_t(x)) - \rho_t(x) (q_x - q(x, 0) \rho_t(x)). \quad (6.19)$$

Pela equação (6.13), o lado direito é igual a $\lim_{N'} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \frac{\eta_t(x)}{N'}$ e portanto

$$\frac{d}{dt} \rho_t(x) = \frac{d}{dt} \lim_{N'} \mathbb{E} \frac{\eta_t(x)}{N'} = \lim_{N'} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \frac{\eta_t(x)}{N'}.$$

Então $\lim_{N'} \mathbb{E} \frac{\eta_t(x)}{N'}$ satisfaz a equação para frente de processo condicionado (6.1) e como a solução da equação (6.1) é única, igual a $\varphi_t(x)$ portanto $\lim_{N'} \mathbb{E} \frac{\eta_t(x)}{N'} = \varphi_t(x)$. Por

“tightness” e o fato de toda subsequência convergente tem como o limite φ_t temos que o limite em N existe e vale:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\eta_t^{N, \mu_0}}{N}(x) = \varphi_t^{\mu_0}(x). \quad (6.20)$$

Daí e da convergência em probabilidade em (6.10) segue que

$$\frac{\eta_t^{N, \mu_0}}{N}(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} \varphi_t^{\mu_0}(x), \quad N \rightarrow \infty \quad (6.21)$$

o que vale para tudo $x \in \Lambda$. ■

Observação 6.3. O teorema pode ser estendido para o caso onde η_0^N tem medida μ_0^N tal que $\mu_0^N \Rightarrow \mu_0$, $N \rightarrow \infty$.

O próximo teorema relaciona o perfil médio do processo $FV(Q)$ *sob medida invariante* com a DQE de Q . Nós usamos e extendemos um resultado de Jacka e Roberts (1995) dado na próxima proposição.

Proposição 6.1. (*Jacka e Roberts, 1995*) *Se existe um $x \in \Lambda$ tal que $\alpha_x > C$ e existe uma DQE, então ela é única DQE e é o limite de Yaglom para processo passageiro Z_t .*

Observação 6.4. Na prova desta proposição foi usado um resultado que o processo com um $\alpha_x > 0$ converge exponencialmente rápido a sua medida invariante e a velocidade de convergência depende de α_x . Usando as ferramentas do acoplamento o mesmo resultado pode ser obtido com α no lugar de α_x . Então o resultado de Jacka e Roberts facilmente pode ser estendido ao caso onde $\alpha(\hat{Q}) > C$.

No seu trabalho, Jacka e Roberts supoem a existência de uma DQE enquanto nós estabelecemos as condições para tal existência.

Teorema 6.2. *Se $\alpha(\hat{Q}) > C$ então existe uma única DQE ν para Q , e $\forall x \in \Lambda$*

$$\rho^N(x) \rightarrow \nu(x), \quad N \rightarrow \infty \quad (6.22)$$

$$\frac{\eta^N(x)}{N} \xrightarrow{\mathbb{P}} \nu(x), \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.23)$$

Prova:

Como $\alpha(\hat{Q}) > 0$, então o processo Fleming-Viot governado por Q , $FV(Q)$, é ergódico (Seção 3.2) e denotamos por μ_N sua única medida invariante.

Seja $\{N'\}$ uma subsequência de $\{N\}$. Pela Proposição 5.2, como $\alpha > C$ então as ρ^N são “tight” e é possível escolher uma subsequência convergente. Seja $\{N''\}$ uma subsequência de $\{N'\}$, tal que $\rho^{N''}$ converge fracamente para uma medida de probabilidade h .

Agora, convocamos a equação (4.3)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{y \neq 0, x} \rho^N(y)(q(y, x) + q(y, 0)\rho^N(x)) - \rho^N(x)(q_x - q(x, 0)\rho^N(x)) \\ &+ \sum_{y \neq 0} q(y, 0) \left(\mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(y)}{N} \frac{\eta^N(x)}{N} \right) - \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(y)}{N} \right) \mathbb{E}_{\mu_N} \left(\frac{\eta^N(x)}{N} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

que vale para todo N (e para todo $x \in \Lambda$). Tomamos $N = N''$ e aplicamos limite $N'' \rightarrow \infty$ para os dois lados. O limite pode atravessar a soma pelo TCD que pode ser

aplicado pelos mesmos argumentos usados na prova do Teorema 6.1, as Observações 6.1 e 6.2.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{y \neq 0, x} h(y)(q(y, x) + q(y, 0)h(x)) - h(x)(q_x - q(x, 0)h(x)) \\
&+ \sum_{y \neq 0} q(y, 0) \lim_{N'' \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E}_{\mu_{N''}} \left(\frac{\eta^{N''}(x)}{N''} \frac{\eta^{N''}(y)}{N''} \right) - \mathbb{E}_{\mu_{N''}} \left(\frac{\eta^{N''}(x)}{N''} \right) \mathbb{E}_{\mu_{N''}} \left(\frac{\eta^{N''}(y)}{N''} \right) \right) \\
&= \sum_{y \neq 0, x} h(y)(q(y, x) + q(y, 0)h(x)) - h(x)(q_x - q(x, 0)h(x)) \tag{6.25}
\end{aligned}$$

pois, pelo Corolário 4.1 b), $\lim_{N'' \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E}_{\mu_{N''}} \left(\frac{\eta(x)}{N''} \frac{\eta(y)}{N''} \right) - \mathbb{E}_{\mu_{N''}} \left(\frac{\eta(x)}{N''} \right) \mathbb{E}_{\mu_{N''}} \left(\frac{\eta(y)}{N''} \right) \right) = 0$.

A equação (6.25) diz que h satisfaz a definição alternativa de DQE, equação (2.3). Portanto, existe uma DQE de Q , a medida h . Precisamente, todo limite por subsequência de ρ^N é uma DQE.

Agora, o resultado de Jacka e Roberts, Proposição 6.1 e a Observação 6.4, garantem que ela é a única DQE de Q , medida ν . Portanto, nesse caso $h = \nu$. Como h foi o limite de uma subsequência convergente arbitrária, vale que ν é o limite fraco de qualquer subsequência convergente de ρ^N . Por tightness, para todo $x \in \Lambda$, $\rho^N(x)$ converge, e exatamente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_N} \frac{\eta^N(x)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N(x) = \nu(x).$$

Aplicados por cima disto, a desigualdade de Chebyshev e Corolário 4.1 b), implicam a convergência em Probabilidade, analogamente à prova do Teorema 6.1 (equações 6.9 e

6.10). Logo, segue (6.23) e o Teorema está provado. ■

7 Exemplo e as Conjecturas

Uma versão de Castelo de cartas

Este processo é um exemplo com espaço de estados $\mathbb{N}$ e com seguintes taxas $q, p, r > 0$:

$q(0, x) = 0$ para todo x ,

$q(1, 0) = q$ e $q(x, 0) = 0$ para $x \neq 1$; $q(1, 2) = p$;

para $x \geq 2$: $q(x, 1) = r$; $q(x, x+1) = p$ e

$q(x, y) = 0$ para $y \neq 1, x+1$.

Em palavras, de um estado x é possível avançar apenas para $x+1$ com taxa p ou voltar no “início”, estado 1 com taxa r da onde é possível ser absorvido, com taxa q . O estado 1 é um estado de Doeblin, $\alpha_1 = r$ e é único, então $\alpha = \alpha_1 = r$.

Figura 5: Castelo de cartas

Quando este processo possui uma única DQE, é fácil ver resolvendo o sistema (2.3):

$$0 = \sum_{y \neq x} \nu(y)(q(y, x) + q(y, 0)\nu(x)) - \nu(x)(q_x - q(x, 0)\nu(x)).$$

Para $x = 1$ temos que

$$\begin{aligned} r \cdot (\nu(2) + \nu(3) + \dots) - \nu(1)(p + q - q\nu(1)) &= 0 \\ \Leftrightarrow q(\nu(1))^2 - \nu(1)(p + q + r) + r &= 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

e a única raiz da equação (7.1) que pertence a $[0, 1]$ (a outra raiz é maior que 1) é

$$\nu(1) = \frac{p + q + r - \sqrt{(p + q + r)^2 - 4qr}}{2q}. \quad (7.2)$$

Para $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \nu(1)q\nu(x) + \nu(x-1)p &= \nu(x)(r + p) \\ \Leftrightarrow \nu(x) &= \frac{\nu(x-1)p}{r + p - q\nu(1)}. \end{aligned}$$

Como ν é uma medida de probabilidade

$$\sum_{x \geq 1} \nu(x) = 1 \Leftrightarrow \nu(1) = 1 - \frac{p}{r + p - q\nu(1)}, \quad (7.3)$$

$$\frac{p}{r + p - q\nu(1)} < 1. \quad (7.4)$$

Substituindo (7.2) em (7.3) vemos que é possível satisfazê-la para todos $p, q, r > 0$ e a expressão geral da DQE é dada por

$$\nu(x) = \nu(1) \left(\frac{p}{r + p - q\nu(1)} \right)^{x-1}. \quad (7.5)$$

Este processo é um exemplo em que se aplica o Teorema (6.2). Fizemos as simulações do processo Fleming-Viot governado por Castelo de Cartas. Na Figura 6 é dada comparação visual da densidade deste processo com a DQE dada por (7.5).

Figura 6: Simulação de F-V dirigido por Castelo de cartas ($q=1;p=1;r=1/2$); $N=250$; $t=200$; Comparação com a DQE.

7.1 Conjecturas

O Teorema 6.2 não se aplica para o caso quando Z_t possui infinitas DQE's e o processo F-V associado é ergódico. Acreditamos que, neste caso, o perfil da densidade limite seria a DQE **mínima**, $\nu^{\min}$. As simulações feitas para o caso de passeio aleatório com deriva negativa (o caso com infinitas DQE's) são a favor desta afirmação o que podemos ver na Figura 7.

Figura 7: Simulação de F-V dirigido por Passeio aleatório ($q=2/3; p=1/3$); $N=250$; $t=200$; Comparação com a DQE minimal.

Conjectura 1. *Se o processo F-V η_t é ergódico e existe uma DQE de Z_t então*

$$\rho^N(x) \rightarrow \nu^{\min}(x), \quad N \rightarrow \infty \quad (7.1)$$

No caso de um processo irreduzível a existência de um $\alpha(Q)$ positivo implica a ergodicidade (exponencial) do processo. A existência dos estados de Doeblin garante que “a massa não escape a ∞ ” e que o limite temporal da distribuição não seja zero mas uma medida de probabilidade. Por mesmas razões acreditamos que um resultado análogo vale para o processo passageiro e distribuições quase-estacionárias.

Conjectura 2. *Se $\alpha(\hat{Q}) > 0$ então existe uma DQE de Z_t .*

A Resultados auxiliares

Lema A.1. *Seja $\frac{d}{dt}g(t) \geq -\frac{2C}{N-1}e^{2(C-\alpha)t}$, e $g(0) = 1$ então*

$$g(t) \geq 1 + \frac{C}{(N-1)(C-\alpha)}(1 - e^{2(C-\alpha)t}).$$

Prova: Seja

$$g_1(t) = \int \frac{-2C}{N-1} e^{2(C-\alpha)t} dt = \frac{-C}{(N-1)(C-\alpha)} e^{2(C-\alpha)t} + d \quad (\text{A.2})$$

Escolhemos d tal que $g_1(0) = 1$, logo $d = 1 + \frac{C}{(N-1)(C-\alpha)}$

$$\begin{aligned} d/dtg(t) &\geq d/dtg_1(t), \quad g(0) = g_1(0) = 1; \\ \implies g(t) &\geq g_1(t). \end{aligned}$$

Finalmente

$$g(t) \geq 1 + \frac{C}{(N-1)(C-\alpha)}(1 - e^{2(C-\alpha)t}). \quad (\text{A.3})$$

■

A.1 λ -classificação

Define-se o *raio de convergência* de $P(t)$ como

$$\lambda = \inf\{l \geq 0 : \int_0^\infty P_t(i, j)e^{lt} dt = \infty\} \quad (\text{A.4})$$

para todos $i, j \in \Lambda$.

O processo Z_t é classificado como

$$\begin{cases} \lambda - \text{recorrente,} & \text{se } \int_0^\infty P_t(i, i)e^{\lambda t} dt = \infty \\ \lambda - \text{transiente,} & \text{se } \int_0^\infty P_t(i, i)e^{\lambda t} dt < \infty \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

O caso λ -recorrente classifica se como **λ -recorrente nulo** se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(i, i)e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{A.6})$$

e como **λ -recorrente positivo** caso contrário.

Referências

- [1] Burdzy, K., Holyst, R., March, P. (2000) A Fleming-Viot particle representation of the Dirichlet Laplacian, *Comm. Math. Phys.* **214**, 679-703.
- [2] Cavender, J. A. (1978) Quasi-stationary distributions of birth and death processes. em *Adv. Appl. Prob.* **10**, 570-586.
- [3] Coddington, E.A. (1961) *An introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.
- [4] Darroch, J.N., Seneta, E. (1967) On quasi-stationary distributions in absorbing continuous-time finite Markov chains, *J. Appl. Prob.* **4**, 192-196.
- [5] Ferrari, P.A. (1990) Ergodicity for spin systems with stirrings, *Ann. Probab.* **18**, 4:1523-1538.
- [6] Fernández, R., Ferrari, P.A., Garcia, N. L. (2001) Loss network representation of Peierls contours. *Ann. Probab.* **29**, no. 2, 902-937.
- [7] Ferrari, P.A, Kesten, H., Martínez, S., Picco, P. (1995) Existence of quasi stationary distributions. A renewal dynamical approach, *Ann. Probab.* **23**, 2:511-521.
- [8] Ferrari, P.A., Martínez, S., Picco, P. (1992) Existence of non-trivial quasi-stationary distributions in the birth-death chain, *Adv. Appl. Prob* **24**, 795-813.
- [9] Fleming, W.H., Viot, M. (1979) Some measure-valued Markov processes in population genetics theory, *Indiana Univ. Math. J.* **28**, 817-843.

- [10] Grigorescu, I., Kang, M. (2004) Hydrodynamic limit for a Fleming-Viot type system, *Stoch. Proc. Appl.* **110**, no.1: 111-143.
- [11] Jacka, S.D., Roberts, G.O. (1995) Weak convergence of conditioned processes on a countable state space, *J. Appl. Prob.* **32**, 902-916.
- [12] Kipnis, C., Landim, C. (1999) *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [13] Nair, M.G., Pollett, P. K. (1993) On the relationship between μ -invariant measures and quasi-stationary distributions for continuous-time Markov chains, *Adv. Appl. Prob.* **25**, 82-102.
- [14] Seneta, E. (1981) *Non-Negative Matrices and Markov Chains*. Springer-Verlag, Berlin.
- [15] Seneta, E. , Vere-Jones, D: (1966) On quasi-stationary distributions in discrete-time Markov chains with a denumerable infinity of states, *J. Appl. Prob.* **3**, 403-434.
- [16] Vere-Jones, D. (1969) Some limit theorems for evanescent processes, *Austral. J. Statist* **11**, 67-78.
- [17] Yaglom, A. M. (1947) Certain limit theorems of the theory of branching stochastic processes (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (n.s.) **56**, 795-798.