**Análise de sobrevivência de um
sistema em paralelo: uma perspectiva
Bayesiana não-paramétrica**

Adriano Polpo de Campos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira

– São Paulo, Agosto de 2005 –

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira, que sugeriu o tema, contribuiu para minha formação e auxiliou-me a superar várias adversidades.

À minha família, que sempre esteve presente, cobrando, perturbando e dando apoio.

Ao Pepe (José Santos Romeo Nunes), pelo auxílio prestado.

Esta tese foi financiada pela CAPES.

Resumo

Este trabalho apresenta estimativas das funções de distribuição dos tempos de vida de um sistema em paralelo e seus componentes. A perspectiva é a bayesiana não-paramétrica. O problema inferencial inicia-se quando se observa o tempo de falha do sistema e identifica-se o último componente falhado à época da observação. Considerando um processo de Dirichlet multivariado, como uma classe de distribuições a priori para o vetor formado pelas funções de subdistribuição, estimadores bayesianos não-paramétricos para a função de distribuição e para a confiabilidade do sistema são obtidos. Utilizando-se a relação entre as funções de distribuições e subdistribuições apresentadas aqui, são propostos estimadores não-paramétricos para as funções de distribuição dos componentes. Um exemplo numérico também é apresentado.

Abstract

Bayesian non-parametric estimators of all survive distribution functions involved in a parallel system are presented. The inference problem starts when one observes the failure time of the machine and identifies the last component failing at the time of observation. By considering a Dirichlet multivariate process, as a class of prior distributions for the vector of subdistribution functions, nonparametric Bayes estimators for the distribution function and the reliability of the system are derived. The relations among distribution and subdistribution functions are introduced. Finally numerical examples are used to illustrate the results.

Glossário

cadlag Um processo X é chamado de cadlag (*continu à droite, limité à gauche*) se seus caminhos amostrais $(X(t, \omega) : t \in \mathcal{T})$, para quase todo ω , são contínuos à direita e limitado à esquerda. O espaço de funções cadlag são geralmente denotados por $D(\mathcal{T})$, espaço de Skorohod da teoria de convergência fraca (Billingsley [7])

função de distribuição $F_i(t) = Pr(Z_i \leq t)$, função de distribuição de Z_i .

função de distribuição bruta $G_j(t) = Pr \left\{ (X_j \leq t) \cap_{l \neq j} (X_l < X_j) \right\}$, probabilidade de que o indivíduo considerado sobreviva no máximo até a idade t e que morra da causa R_j .

função de distribuição reduzida $F_j(t) = Pr(X_{ij} \leq t)$.

função de incremento múltiplo ou função de distribuição do sistema

$$F^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = Pr \left\{ \bigcap_{j=1}^k (X_j \leq t_j) \right\}.$$

função de subdistribuição $F_j^*(t) = Pr(Z_i \leq t, \delta_i = j)$.

indicador δ_i , indica o último componente morto.

risco de morte ou possível causa de morte, R_j .

sistema coerente quanto mais componentes estão funcionando maior a probabilidade de funcionamento do sistema e todo sistema coerente pode ser escrito como combinações de sistemas em série e paralelo.

tempo de sobrevivência do componente descreve a variável aleatória X_{ij} , sob a condição hipotética de que R_j é o único risco de morte.

tempo de vida do indivíduo $Z_i = \max(X_{i1}, \dots, X_{ik})$.

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	As funções de distribuição bruta e reduzida	p. 13
3	O problema de dados censurados	p. 17
3.1	As funções de subdistribuição	p. 18
4	Estimador bayesiano não-paramétrico	p. 22
4.1	Estimadores bayesianos baseados na média da posteriori	p. 24
4.1.1	Cálculo numérico do estimador $\hat{F}_1$	p. 29
4.1.2	Um exemplo	p. 29
4.2	Estimadores bayesianos baseados na moda da posteriori	p. 32
5	Estimação bayesiana não-paramétrica no problema dual ao de riscos competitivos	p. 34
5.1	Estimadores bayesianos baseados na média da posteriori	p. 37
5.2	Estimadores bayesianos baseados na moda da posteriori	p. 39
6	Considerações Finais	p. 41
	Apêndice A – Taxa de memória	p. 42
A.1	Relação da taxa de memória com uma função de distribuição contínua $F(.)$	p. 42
A.2	Integral-Produto e Processos de Markov	p. 42
	Apêndice B – Resultados úteis	p. 47

B.1	A distribuição de Dirichlet	p. 47
B.2	Os processos empíricos na estatística não-paramétrica	p. 51
B.2.1	$F_n(t)$ como um estimador pontual de $F(t)$	p. 51
B.2.2	A distância de Kolmogorov-Smirnov	p. 52
B.3	Métodos numéricos de integração	p. 53
B.3.1	Integração indefinida via equações diferenciais	p. 54
B.4	Teoremas utilizados	p. 54
Apêndice C – Exemplo		p. 57
C.1	Amostras e gráficos do exemplo da seção 4.1.2	p. 57
C.2	Código em R [23]	p. 71
Referências		p. 81

1 *Introdução*

A análise estatística de dados incompletos tem motivado um grande número de pesquisas. Em várias áreas de aplicação de métodos estatísticos, como engenharia e medicina, problemas de estimação, quando as observações podem estar aleatoriamente censuradas, aparecem com bastante frequência como em Cox [10], Breslow e Crowley [9] e Kaplan e Meier [24]. Exemplos práticos podem ser encontrados quando os dados representam os tempos de vida de componentes, ou pelos tempos de vida de pacientes submetidos a um tratamento médico. Há, na literatura, vários trabalhos relacionados ao problema de riscos competitivos (sistema de componentes em série), como em Aalen [1], Tsiatis [39], Peterson [27] e Salinas-Torres, Pereira e Tiwari [33].

Para o problema dual de riscos competitivos (sistema de componentes em paralelo), não há muitas referências na bibliografia, Barlow e Proschan [5] definem bem toda a estrutura e o sistema de componentes, mas não apresentam uma solução para o problema a menos quando são conhecidas as distribuições de todos os componentes e suas relações. Eles também apresentam a estrutura coerente e a representação de sistemas coerentes (todo sistema coerente pode ser escrito como combinações de sistemas em série e paralelo). Proschan e Boland [29] tratam da confiabilidade de sistemas onde no mínimo j componentes de k funcionam. O caso particular em que $j = 1$ é o sistema em paralelo, objeto deste trabalho.

Neste trabalho, será desenvolvido um modelo de estimação para k componentes em paralelo, de um sistema coerente. Porém, para simplicidade na exposição desta introdução, somente o caso $k = 2$ será considerado.

Sejam X_1 e X_2 os tempos de vida dos dois componentes do sistema em paralelo. Representando F_1 e F_2 como duas funções de distribuição, supõe-se que:

- 1) X_1 e X_2 são independentes;
- 2) $X_1 \sim F_1$ e $X_2 \sim F_2$;
- 3) observa-se o tempo de vida $Z = \max\{X_1, X_2\}$ e a variável aleatória

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } Z = X_1 \\ 2, & \text{se } Z = X_2 \end{cases}.$$

Considera-se uma amostra de n sistemas nas condições anteriores. Assim, estão disponíveis os dados $(Z_1, \delta_1), \dots, (Z_n, \delta_n)$. Com base nessa amostra, o objetivo é estimar as funções de distribuição $F_1(t) = \Pr(X_1 \leq t)$ e $F_2(t) = \Pr(X_2 \leq t)$, o funcional $\rho(X_1, X_2) = \Pr(X_2 < X_1)$, e a função de distribuição do sistema $F(t) = \Pr(Z \leq t)$.

Uma aplicação dessa teoria pode ser encontrada no caso de um indivíduo ou máquina que está exposto a uma potencial causa de morte, dividida em dois componentes X_1 e X_2 (por exemplo: funcionamento dos rins, avião de duas turbinas), e sua morte(falha) ocorre quando os dois componentes param de funcionar. Observa-se (Z, δ) , onde Z representa o tempo de vida do indivíduo e δ é o *indicador*, representando o último componente morto.

Esse problema pode ter uma representação sob abordagem bayesiana *paramétrica*. Por exemplo, supondo-se que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 são absolutamente contínuas e independentes, tais que $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$, com função de densidade $f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$, $t > 0$. A função de verossimilhança é, neste caso,

$$L(\lambda \mid \underline{z}, \underline{\delta}) = \prod_{i:\delta_i=1} f_1(z_i) F_2(z_i) \prod_{i:\delta_i=2} f_2(z_i) F_1(z_i)$$

onde as z_i 's são as realizações das variáveis aleatórias Z_i 's, $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Então, a função de verossimilhança é

$$L(\lambda \mid \underline{z}, \underline{\delta}) = \prod_{i:\delta_i=1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 z_i} (1 - e^{-\lambda_2 z_i}) \prod_{i:\delta_i=2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 z_i} (1 - e^{-\lambda_1 z_i})$$

Foi utilizada como distribuição a priori para os parâmetros λ_1 e λ_2 a distribuição *Gamma* (α, β) ($\pi(\lambda_i) = (\beta^\alpha / \Gamma(\alpha)) \lambda_i^{\alpha-1} e^{-\beta \lambda_i}$). Considerando que λ_1 e λ_2 são independentes, $\pi(\lambda_1, \lambda_2) = (\beta^\alpha / \Gamma(\alpha))^2 (\lambda_1 \lambda_2)^{\alpha-1} e^{-\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}$, logo a densidade a posteriori de λ dadas as observações, $\pi(\lambda \mid \underline{z}, \underline{\delta})$, satisfaz:

$$\pi(\lambda \mid \underline{z}, \underline{\delta}) \propto \lambda_1^{n_1+\alpha-1} \lambda_2^{n_2+\alpha-1} e^{-\lambda_1(\beta+\sum_{i:\delta_i=1} z_i)} e^{-\lambda_2(\beta+\sum_{i:\delta_i=2} z_i)} \times$$

$$\prod_{i:\delta_i=1} (1 - e^{-\lambda_2 z_i}) \prod_{i:\delta_i=2} (1 - e^{-\lambda_1 z_i})$$

onde $n_1 = \sum_{i:\delta_i=1} 1$ e $n_2 = \sum_{i:\delta_i=2} 1$.

Então

$$\pi(\lambda_1 \mid \underline{z}, \underline{\delta}) \propto \lambda_1^{n_1+\alpha-1} e^{-\lambda_1(\beta+\sum_{i:\delta_i=1} z_i)} \prod_{i:\delta_i=2} (1 - e^{-\lambda_1 z_i})$$

e

$$\pi(\lambda_2 \mid \underline{z}, \underline{\delta}) \propto \lambda_2^{n_2+\alpha-1} e^{-\lambda_2(\beta+\sum_{i:\delta_i=2} z_i)} \prod_{i:\delta_i=1} (1 - e^{-\lambda_2 z_i})$$

Não será dada a solução desse problema paramétrico, aqui, pois não é o foco de interesse deste trabalho, além disso, é um problema muito particular com as distribuições dos componentes conhecidas.

Tanto para o caso paramétrico como no não-paramétrico, há necessidade das relações entre as funções de distribuição não observadas e as funções de subdistribuição $F_1^*(t) := \Pr(Z \leq t, \delta = 1)$ e $F_2^*(t) := \Pr(Z \leq t, \delta = 2)$.

Serão desenvolvidas as relações entre as funções de distribuição e subdistribuição, no caso contínuo e discreto, bem como estimadores bayesiano não-paramétrico, e será encontrado um resultado auxiliar que mostra a relação entre uma função de distribuição qualquer e sua respectiva taxa de memória, introduzida pela primeira vez neste trabalho.

A taxa de memória é uma quantidade extremamente importante para a resolução do problema proposto neste trabalho, mas além disso ela pode ser extremamente útil para resolução de outros problemas. Pode-se escrever uma função de distribuição em função da taxa de memória, onde em alguns casos pode ser mais simples trabalhar-se com ela ao invés da função de distribuição. Pode-se dizer que o dual da taxa de falha, muito utilizada em análise de sobrevivência, é a taxa de memória. Neste trabalho é visível a utilização, mais claramente, no capítulo 2 e 3 na obtenção da relação entre as funções de distribuição e subdistribuições. O apêndice A é dedicado a construção da taxa de memória.

No capítulo 2 estão descritas as funções de distribuição bruta e reduzida. Também, é expressada as relações entre elas, sendo a mais importante dada por (2.0.18).

No capítulo 3, são dadas algumas propriedades das funções de distribuição. A propriedade 3.1.4 será muito importante para a escolha da classe de processos de Dirichlet como a classe de distribuições a priori para o problema. Do teorema 3.1.9 obtém-se o funcional $\varphi(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot), t)$ para explicitar as funções de distribuição em termos das funções de subdistribuição, usando a fórmula (2.0.18).

$$\varphi(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot), t) \equiv \exp \left[\oint_t^\infty \frac{-dF_1^*(y)}{F_1^*(y) + F_2^*(y)} + \sum_{y>t} s \ln \left(\frac{F_1^*(y-) + F_2^*(y-)}{F_1^*(y+) + F_2^*(y+)} \right) \right]$$

em que a integral $\oint$ significa a integração sobre os intervalos (abertos) dos pontos t para qual $F_1^*(\cdot)$ é contínua, e a $\sum_{y>t}$ representa a soma nos pontos de salto de $F_1^*(\cdot)$ para $y > t$.

No capítulo 4, trabalha-se com um sistema de dois componentes em paralelo, tratando o problema de estimação bayesiano não-paramétrico. É obtido o estimador bayesiano não-paramétrico para o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$, e através do funcional $\varphi(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot), t)$ é dado o estimador para as funções de distribuições de cada um dos componentes. No teorema 4.1.14 é obtido o estimador bayesiano baseado na média da posteriori:

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(t) = & \exp \left\{ \frac{-1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0, s]}{\hat{F}(s)} \right\} \\ & \times \prod_{i: Z_{(i)}^* > t} \frac{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i}{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i + d_i}, \quad t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Um exemplo numérico é apresentado. Os estimadores do funcional ρ e da distribuição do sistema também são obtidos. Os estimadores, também, são obtidos sob uma função de perda local.

No capítulo 5, estende-se os resultados obtidos no capítulo 4 para um sistema com k componentes.

No capítulo 6, descrevemos os resultados obtidos, as contribuições feitas, bem como possíveis pontos de pesquisa futuras.

No apêndice B, são dados os resultados mais importantes utilizados no desenvolvimento deste trabalho, facilitando também a leitura.

No apêndice C, são dadas as amostras geradas para o exemplo numérico dado no capítulo 4, e também é dado o código fonte do programa escrito em R utilizado nesta tese para a solução do exemplo.

2 *As funções de distribuição bruta e reduzida*

Neste capítulo, apresentam-se as distribuições bruta e reduzida, bem como alguns resultados importantes, que são necessários para expressar as funções de distribuição em termos das funções de subdistribuição.

Considere um indivíduo que nasce no tempo $t = 0$ e seu tempo de vida é exposto a diferentes “riscos” ou possíveis causas de morte $R_1, R_2, \dots, R_k$ ($k > 1$). Para $j = 1, 2, \dots, k$, X_j denota uma variável aleatória descrita pelo “tempo de sobrevivência do componente” do indivíduo sob as condições hipotéticas de que R_j é o único risco de morte. Seja $F_j(t) = \Pr(X_j \leq t)$ a função de distribuição associada a variável aleatória X_j ($F_j(t)$ é a j -ésima função de distribuição, chamada neste capítulo de função de distribuição reduzida, fazendo o desenvolvimento de forma similar ao que foi feito para o problema de riscos competitivos). O tempo de sobrevivência do componente X_j está em contraste com o verdadeiro tempo de sobrevivência, diga-se Z , em que o indivíduo em questão é exposto a todos os $k > 1$ riscos. Assim, para o problema de componentes em paralelo, $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_k)$. A função $G_j(t)$, descrita como a j -ésima função de distribuição bruta, é definida como a probabilidade de que o indivíduo considerado sobreviva no máximo até a idade t e que morra da causa R_j . Obviamente para $j = 1, 2, \dots, k$ e $t \geq 0$,

$$G_j(t) = \Pr \left\{ (X_j \leq t) \bigcap_{j \neq \ell} (X_\ell < X_j) \right\} \quad (2.0.1)$$

Um tratamento totalmente realista do problema depende da validade detalhada das hipóteses sob a distribuição conjunta dos X 's. Assim, a distribuição conjunta do tempo de sobrevivência do componente X_j é de grande importância.

A função de distribuição conjunta dos X 's é definida por

$$F^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \Pr \left\{ \bigcap_{j=1}^k (X_j \leq t_j) \right\} \quad (2.0.2)$$

Assume-se que essa função tem as derivadas parciais contínuas com respeito a todos os seus argumentos.

A probabilidade reduzida da sobrevivência de X_j ser menor ou igual a t é obtida de (2.0.2) tomando $F^{(k)}(t_1, \dots, t_k)$ e substituindo $t_j = t$ e $t_\ell = +\infty$ para todo $\ell \neq j$.

As argumentações seguintes são utilizadas para estabelecer-se a relação entre (2.0.2) e a j -ésima função de distribuição bruta $G_j(t)$.

Teorema 2.0.3 *Seja uma função de distribuição do tempo de sobrevivência de um componente obtida da função de incremento múltiplo (2.0.2), e a função de distribuição bruta definida por (2.0.1), ambas com derivadas parciais contínuas.*

A derivada $G'_j(t)$ da j -ésima função de distribuição bruta é igual a derivada parcial de (2.0.2) com respeito a t_j calculado em $t_1 = t_2 = \dots = t_k = t$.

Prova. Devido à quantidade de riscos k ser arbitrária, é suficiente provar o teorema, assumindo $j = 1$. Isso simplifica a notação. Sejam t , h e h^* números positivos arbitrários tais que $h < h^*$. A definição de $G_j(t)$ implica que a diferença

$$G_1(t+h) - G_1(t) = \Pr \left\{ (t < X_1 \leq t+h) \bigcap_{\ell > 1} (X_\ell < X_1) \right\} \quad (2.0.4)$$

tem um limite inferior

$$\begin{aligned} & \Pr \{ (t < X_1 \leq t+h) \cap_{\ell > 1} (X_\ell < t) \} \\ &= F^{(k)}(t+h, t, \dots, t) - F^{(k)}(t, t, \dots, t) \end{aligned} \quad (2.0.5)$$

Similarmente, a fórmula seguinte representa um limite superior de (2.0.4):

$$\begin{aligned} & \Pr \{ (t < X_1 \leq t+h) \cap_{\ell > 1} (X_\ell < t+h^*) \} \\ &= F^{(k)}(t+h, t+h^*, \dots, t+h^*) - F^{(k)}(t, t+h^*, \dots, t+h^*) \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

Dividindo (2.0.4), (2.0.5) e (2.0.6) por h e aplicando o limite com $h \rightarrow 0$, obtém-se,

para todo $h^* > 0$,

$$\left. \frac{\partial F^{(k)}}{\partial t_1} \right|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t} \leq G'_1(t) \leq \left. \frac{\partial F^{(k)}}{\partial t_1} \right|_{t_1=t, t_2=\dots=t_k=t+h^*} \quad (2.0.7)$$

Outra aplicação do limite com $h^* \rightarrow 0$ chega-se ao resultado desejado

$$G'_1(t) = \left. \frac{\partial F^{(k)}}{\partial t_1} \right|_{t_1=t_2=\dots=t_k=t} \quad (2.0.8)$$

■

Denota-se $G'_1(t)$ por $F_1^{(k)}(t)$.

Em particular, se os tempos de sobrevivência dos componentes são mutuamente independentes,

$$F^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \prod_{j=1}^k F_j(t_j) \quad (2.0.9)$$

A derivada de $G'_j(t)$ pode ser escrita como

$$G'_j(t) = u_j(t) \prod_{j=1}^k F_j(t) \quad (2.0.10)$$

em que

$$u_j(t) = \frac{d}{dt} \ln F_j(t) \quad (2.0.11)$$

A partir da equação (2.0.11), deduz-se a fórmula (2.0.12) (cf. apêndice A.1).

$$F_j(t) = \exp \left\{ - \int_t^\infty u_j(y) \, dy \right\} \quad (2.0.12)$$

Usando a mesma notação e colocando $u(y) = \sum_j u_j(y)$, a fórmula (2.0.10) pode ser reescrita como

$$G'_j(t) = u_j(t) \exp \left\{ - \int_t^\infty u(y) \, dy \right\} \quad (2.0.13)$$

O teorema 2.0.3 indica que, dada uma função de incremento múltiplo $F^{(k)}$, podem-se determinar, unicamente, as funções de distribuição brutas

$$G_j(t) = \int_0^t F_j^{(k)}(y) \, dy$$

Supondo-se, agora, que a função de distribuição conjunta não seja conhecida, ainda assim, as funções de distribuição brutas $G_j(t)$ podem ser estimadas, de fato, elas são

conhecidas precisamente. A questão crucial é quanto de informação sobre a distribuição conjunta dos tempos de sobrevivência dos componentes provém do espaço das funções de distribuição brutas.

Considere um sistema de funções de distribuição reduzidas, $F_j^\bullet(t)$ para $j = 1, 2, \dots, k$, combinado com a suposição de que os tempos de sobrevivência dos componentes são independentes.

Tomando k funções dadas $G_j(t)$ para fazer substituições apropriadas no lado esquerdo de (2.0.13) e na solução das equações resultantes

$$G_j'(t) = u_j^\bullet(t) \exp \left\{ - \int_t^\infty u^\bullet(y) \, dy \right\} \quad (2.0.14)$$

com respeito a $u_j^\bullet(t)$, onde $u^\bullet(y) = \sum_j u_j^\bullet(y)$. Somando (2.0.13) para $j = 1, 2, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k G_j'(t) &= u^\bullet(t) \exp \left\{ - \int_t^\infty u^\bullet(y) \, dy \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \exp \left\{ - \int_t^\infty u^\bullet(y) \, dy \right\} \end{aligned} \quad (2.0.15)$$

Isso implica

$$\sum_{j=1}^k G_j(t) = \exp \left\{ - \int_t^\infty u^\bullet(y) \, dy \right\} \quad (2.0.16)$$

que, combinada com (2.0.14), resulta em

$$u_j^\bullet(t) = \frac{G_j'(t)}{\sum_{\ell=1}^k G_\ell(t)} \quad (2.0.17)$$

Finalmente, a fórmula (2.0.12) implica em

$$F_j^\bullet(t) = \exp \left\{ - \int_t^\infty \left[\frac{G_j'(y)}{\sum_{\ell=1}^k G_\ell(y)} \right] dy \right\} \quad (2.0.18)$$

A substituição de $F_j^\bullet$ e $u_j^\bullet$ em (2.0.10) dará a derivada de $G_j^\bullet$, que coincide com a de G_j .

Apartir de (2.0.18), obtém-se a relação de interesse entre as funções de distribuição (reduzida) e as funções de subdistribuição (distribuição bruta), apresentadas no próximo capítulo.

3 *O problema de dados censurados*

Neste capítulo, serão estabelecidas as relações necessárias entre as funções de distribuição e subdistribuição para uma solução bayesiana não-paramétrica do problema de dados censurados.

Diga-se que (X_{1i}, X_{2i}) , $i = 1, \dots, n$, são n pares de variáveis aleatórias. $F_1(t) = \Pr(X_{1i} \leq t)$ e $F_2(t) = \Pr(X_{2i} \leq t)$ são as funções de distribuição marginais das variáveis aleatórias X_1 e X_2 . Assume-se que X_{1i} e X_{2i} são independentes para todo i e cada variável tem distribuição $X_{1i} \sim F_1$ e $X_{2i} \sim F_2$. Além disso, os pares (X_{1i}, X_{2i}) , $i = 1, \dots, n$, são independentes e identicamente distribuídos. Aqui está um problema de dados censurados, em que as variáveis aleatórias (X_{1i}, X_{2i}) , $i = 1, \dots, n$, não são necessariamente observadas. Todavia, as seguintes quantidades são observadas:

$$\begin{aligned} Z_i &\equiv \max(X_{1i}, X_{2i}) \\ \delta_i &\equiv \begin{cases} 1 & \text{se } Z_i = X_{1i} \\ 2 & \text{se } Z_i = X_{2i}, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

ou seja, tanto o máximo de X_{1i} e X_{2i} quanto o indicador do máximo ser atingido em X_{1i} ou X_{2i} são observados para cada par (X_{1i}, X_{2i}) , $i = 1, \dots, n$. A função de distribuição de $Z_i \equiv \max(X_{1i}, X_{2i})$ será denotada por $F(t) \equiv \Pr(Z_i \leq t)$.

Normalmente, exige-se que as funções de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$ sejam contínuas. Não será feita tal restrição, e não será introduzida nenhuma restrição sobre as funções de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$; exceto por elas não terem pontos de salto em comum. Isso é necessário para manter o problema bem definido; em particular, previne-se ambigüidade na definição (3.0.1) de δ_i .

3.1 As funções de subdistribuição

As funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$ são definidas por $F_1^*(t) \equiv \Pr(Z_i \leq t, \delta_i = 1)$, $F_2^*(t) \equiv \Pr(Z_i \leq t, \delta_i = 2)$. O objetivo é expressar a função de distribuição $F_1(\cdot)$ através das funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$.

A seguir estão algumas propriedades das funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$:

Propriedade 3.1.1 *A função de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ pode ser expressa em termos das funções de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$ como*

$$F_1^*(t) = \int_0^t [F_2(s)] \cdot [dF_1(s)] \quad (3.1.2)$$

Essa propriedade é válida, pois as variáveis aleatórias X_{1i} e X_{2i} são independentes. A integral de Riemann-Stieltjes é bem definida, uma vez que a suposição de que o integrador e integrando não têm pontos de salto em comum.

Propriedade 3.1.3

- a. $F_1^*(+\infty) = \Pr(\delta_i = 1) = \Pr(X_{1i} > X_{2i})$
- b. $F_2^*(+\infty) = \Pr(\delta_i = 2) = \Pr(X_{2i} > X_{1i})$
- c. $F_1^*(+\infty) + F_2^*(+\infty) = 1$

Propriedade 3.1.4

$$\begin{aligned} F_1^*(t) + F_2^*(t) &= \Pr(\max(X_{1i}, X_{2i}) \leq t) \\ &= F_1(t)F_2(t) = \Pr(Z_i \leq t) = F(t) \end{aligned}$$

Propriedade 3.1.5

1. *Os pontos de salto de $F_1^*(\cdot)$ são os pontos de salto de $F_1(\cdot)$, e os pontos de salto de $F_2^*(\cdot)$ são os pontos de salto de $F_2(\cdot)$.*
2. *Supondo que $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$ não têm pontos de salto em comum, então $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$ também não têm.*

A próxima proposição sobre as funções de subdistribuição é simples, mas importante. Assumindo que a distribuição (conjunta) das observações (Z_i, δ_i) no problema de dados censurados é $\Pr(Z_i \leq t, \delta_i = j) \equiv F_j^*(t)$, $j = 1, 2$, apresenta-se a seguinte proposição:

Proposição 3.1.6 *As duas funções de subdistribuição F_1^* e F_2^* determinam a distribuição das observações (Z_i, δ_i) no problema de dados censurados.*

No restante desta seção, procura-se a inversa de (3.1.2); isto é, uma expressão para a função de distribuição $F_1(\cdot)$ em termos das funções de subdistribuição F_1^* e F_2^* .

A partir da fórmula (2.0.18), a função de distribuição $F_1(\cdot)$ pode ser expressa em termos das funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$ como:

$$F_1(t) = \exp \left\{ - \int_t^\infty \frac{dF_1^*(y)}{F_1^*(y) + F_2^*(y)} \right\} \quad (3.1.7)$$

Infelizmente, essa expressão não suporta funções de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$ que tenham pontos de salto. Nesse caso, (3.1.7) é não definida (assumindo que o integrador e o integrando na integral de Riemann-Stieltjes têm pontos de salto em comum).

O teorema 3.1.9 é a generalização da expressão (3.1.7) sob a única restrição de $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$ não terem pontos de salto em comum. A generalização consiste em definir, propriamente, a contribuição dos pontos de salto na integral (3.1.7).

Define-se a função $\varphi(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot), t)$, das funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$ como um produto de fatores como segue:

$$\varphi(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot), t) \equiv \exp \left[\oint_t^\infty \frac{-dF_1^*(y)}{F_1^*(y) + F_2^*(y)} + \sum_{y>t} s_{y>t} \ln \left(\frac{F_1^*(y-) + F_2^*(y-)}{F_1^*(y+) + F_2^*(y+)} \right) \right] \quad (3.1.8)$$

em que a integral $\oint$ significa a integração sobre os intervalos (abertos) dos pontos t para qual $F_1^*(\cdot)$ é contínua, e a $\sum_{y>t} s_{y>t}$ representa a soma nos pontos de salto de $F_1^*(\cdot)$ para $y > t$.

Teorema 3.1.9 *As funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$ determinam (unicamente) a função de distribuição $F_1(t)$ de acordo com a seguinte expressão:*

$$F_1(t) = \varphi(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot), t) \quad (3.1.10)$$

Aparentemente, problemas teóricos com $F_i(0) \neq 0$ (ou $F_i^*(0) \neq 0$) ou com $\Pr(X_1 = X_2) \neq 0$ podem ocorrer. Entretanto a metodologia foi testada simulando alguns casos que continham estes possíveis problemas e os resultados obtidos foram satisfatórios e não apresentaram tais problemas.

Para provar o teorema 3.1.9, será utilizado o lema que segue abaixo. Denota-se a taxa

de memória, definida nos pontos de continuidade de $F(\cdot)$, por

$$\alpha_c^F(y) \equiv \frac{F'(y)}{F(y)}$$

Denota-se a taxa de memória, definida nos pontos de salto de $F(\cdot)$, por

$$\alpha_d^F(y) \equiv \frac{F(y) - F(y-)}{F(y)} \equiv \frac{\text{massa de } F \text{ em } y}{F(y)}$$

Define-se a taxa de memória cumulativa, como

$$A_F(t) \equiv \int_t^\infty \alpha_c^F(y) dy + \sum_{y>t}^s -\ln [1 - \alpha_d^F(y)] \quad (3.1.11)$$

Lema 3.1.12 *Qualquer função de distribuição $F(t)$ pode ser expressa como*

$$F(t) = \exp[-A_F(t)] \quad (3.1.13)$$

Prova: Ver apêndice A.2, teorema A.2.9.

Prova do teorema 3.1.9. É suficiente de (3.1.11) e (3.1.13) mostrar que

$$\int_t^\infty \frac{dF_1^*(y)}{F_1^*(y) + F_2^*(y)} = \int_t^\infty \alpha_c^{F_1}(y) dy \quad (3.1.14)$$

e

$$\sum_{y>t}^s \ln \left(\frac{F_1^*(y-) + F_2^*(y-)}{F_1^*(y+) + F_2^*(y+)} \right) = \sum_{y>t}^s \ln [1 - \alpha_d^{F_1}(y)] \quad (3.1.15)$$

A igualdade (3.1.14) acontece porque das propriedades 3.1.1 e 3.1.4,

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{dF_1^*(y)}{F_1^*(y) + F_2^*(y)} &= \int_t^\infty \frac{F_2(y) dF_1(y)}{F_1(y) F_2(y)} \\ &= \int_t^\infty \frac{dF_1(y)}{F_1(y)} \\ &= \int_t^\infty \alpha_c^{F_1}(y) dy \end{aligned}$$

A igualdade (3.1.15) acontece porque,

$$\begin{aligned} \sum_{y>t}^s \ln \left(\frac{F_1^*(y-) + F_2^*(y-)}{F_1^*(y+) + F_2^*(y+)} \right) &= \sum_{y>t}^s \ln \left(\frac{F_1(y-) F_2(y-)}{F_1(y+) F_2(y+)} \right) \\ &= \sum_{y>t}^s \ln \left(\frac{F_1(y-)}{F_1(y+)} \right) \\ &= \sum_{y>t}^s \ln [1 - \alpha_d^{F_1}(y)] \end{aligned}$$

Na última igualdade, foi utilizado o fato de $F_2(y-) = F_2(y+)$ por y ser um ponto de salto de $F_1(\cdot)$, desde que y é um ponto de salto de $F_1(\cdot)$ implica que y não é um ponto de salto de $F_2(\cdot)$.

■

Este capítulo apresentou o desenvolvimento da relação entre as funções de distribuição e subdistribuição, dada por (3.1.10). No próximo capítulo será utilizado esse resultado para desenvolver um estimador das funções distribuição marginais dos componentes de um sistema em paralelo.

4 *Estimador bayesiano não-paramétrico*

Neste capítulo, aborda-se o problema de estimação de uma curva de distribuição, quando as observações são aleatoriamente censuradas, sob uma ótica bayesiana não-paramétrica, utilizando a classe de processos de Dirichlet bivariado (cf. Salinas-Torres, Pereira e Tiwari [33]), como uma classe de distribuições a priori para o problema. A utilização do processo de Dirichlet bivariado está inspirada, fundamentalmente, na estrutura da função de verossimilhança, da qual, em uma primeira instância, o parâmetro de interesse é o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$. Portanto, aparece de maneira natural o fato de introduzir uma classe de distribuições a priori sobre o espaço de funções definido por esses vetores. Agora, dada a simplicidade analítica, particularmente na obtenção da distribuição a posteriori, e também tendo em mente as propriedades do processo de Dirichlet usual:

- I Seja suficientemente grande a ponto de diferentes tipos de opinião possuir representação aproximada.
- II Seja fechada em relação à operação bayesiana, isto é, a priori escolhida nessa classe produz uma posteriori na mesma classe. Classes de distribuições satisfazendo essa propriedade também são chamadas de conjugadas.

A classe de distribuição a priori utilizada neste trabalho é a dos processos de Dirichlet, que foi definida por Ferguson [16] para solução de problemas não-paramétricos.

Como foi formulado em (3.0.1), as observações são $(Z_1, \delta_1), \dots, (Z_n, \delta_n)$; onde $Z_i = \max(X_{1i}, X_{2i})$, $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } Z_i = X_{1i} \\ 2 & \text{se } Z_i = X_{2i} \end{cases}$, $i = 1, \dots, n$. Ou equivalentemente, para cada t , observam-se as variáveis aleatórias:

$$nF_{1n}^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i = 1); \quad nF_{2n}^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i = 2) \quad (4.0.1)$$

em que $\mathbb{I}(A)$ é a função indicadora do conjunto A .

As funções F_{1n}^* e F_{2n}^* são chamadas de funções de subdistribuição empírica. Se $F_n(\cdot)$ é a função de distribuição empírica correspondente às observações $Z_1, \dots, Z_n$, então para cada t ,

$$nF_n = nF_{1n}^* + nF_{2n}^* \quad (4.0.2)$$

Nesse contexto, para cada t , a função de verossimilhança do problema corresponde à verossimilhança de um modelo Multinomial($n; p_1(t), p_2(t), p_3(t)$), sendo $p_1(t) = F_1^*(t)$, $p_2(t) = F_2^*(t)$, $p_3(t) = 1 - F(t) = 1 - F_1^*(t) - F_2^*(t)$, isto é,

$$L = \Pr(nF_{1n}^* = j_1(t), nF_{2n}^* = j_2(t)) \propto F_1^*(t)^{j_1(t)} F_2^*(t)^{j_2(t)} (1 - F(t))^{n-j_1(t)-j_2(t)} \quad (4.0.3)$$

Logo, em primeira instância, o parâmetro de interesse é o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$.

Consideram-se $\mathcal{X} = (0, \infty)$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}(0, \infty)$, supondo-se que as variáveis aleatórias envolvidas no problema assumam valores em $(0, \infty)$.

Na primeira parte da análise bayesiana, será utilizada uma função de perda quadrática nos cálculos de soluções bayesianas de algumas quantidades de interesse, tais como o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$, a função de distribuição $F(\cdot)$ e o funcional $\Pr(X_2 < X_1)$. Então, usando a fórmula (3.1.10), propõe-se um estimador não paramétrico para a função de distribuição $F_1(\cdot)$. Na segunda parte, será feita uma análise similar, considerando uma função de perda local.

A distribuição a priori para o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$ é construída a partir da caracterização do processo de Dirichlet bivariado dada no teorema B.4.1.

No caso em questão, $\mathcal{X} = (0, \infty)$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}(0, \infty)$, e consideram-se α_1 e α_2 medidas finitas, não-nulas, não-negativas e finitamente aditivas sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Defina-se,

$$\rho = \Pr(X_2 < X_1) = \Pr(\delta = 1) \quad (4.0.4)$$

e, as funções de distribuição condicionais,

$$\begin{aligned} T_1^*(t) &= \Pr(Z \leq t \mid \delta = 1) \\ T_2^*(t) &= \Pr(Z \leq t \mid \delta = 2). \end{aligned} \quad (4.0.5)$$

Assim, é fácil ver que o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$, pode ser expresso como:

$$(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot)) = (\rho T_1^*(\cdot), (1 - \rho) T_2^*(\cdot)) \quad (4.0.6)$$

e obtém-se o seguinte:

Lema 4.0.7 *Se $\rho \sim \text{Beta}(\alpha_1(0, \infty), \alpha_2(0, \infty))$, $T_1^* \in \mathcal{D}(\alpha_1)$ e $T_2^* \in \mathcal{D}(\alpha_2)$; tais que $\rho \Pi T_1^* \Pi T_2^* \mid (\alpha_1, \alpha_2)$. Então $(F_1^*, F_2^*) \in \mathcal{DB}(\alpha_1, \alpha_2)$.*

Prova: É consequência direta do teorema B.4.1.

Observação 4.0.8 *Decorre-se do lema anterior que, para cada t , se $\rho \sim \text{Beta}(\alpha_1(0, \infty), \alpha_2(0, \infty))$, $T_1^* \sim \text{Beta}(\alpha_1(0, t], \alpha_2(t, \infty))$ e $T_2^* \sim \text{Beta}(\alpha_2(t, \infty), \alpha_1(0, t])$, e dado o vetor de medidas (α_1, α_2) , essas variáveis aleatórias são condicionalmente independentes, então*

$$(F_1^*(t), F_2^*(t)) \sim \mathcal{D}(\alpha_1(0, t], \alpha_2(0, t]; \alpha_1(t, \infty) + \alpha_2(t, \infty)) \quad (4.0.9)$$

ou na sua forma singular,

$$(F_1^*(t), F_2^*(t), 1 - F(t)) \sim \mathcal{D}(\alpha_1(0, t], \alpha_2(0, t], \alpha_1(t, \infty) + \alpha_2(t, \infty)) \quad (4.0.10)$$

Agora, de (4.0.3) e (4.0.9), e utilizando a proposição B.1.4, tem-se a distribuição a posteriori do vetor $(F_1^*(t), F_2^*(t))$ dadas as observações.

Para cada t ,

$$\begin{aligned} (F_1^*(t), F_2^*(t)) \mid \text{Dados} &\sim \mathcal{D}(\alpha_1(0, t] + j_1(t), \alpha_2(0, t] + j_2(t); \\ &\alpha_1(t, \infty) + \alpha_2(t, \infty) + n - j_1(t) - j_2(t)) \end{aligned} \quad (4.0.11)$$

ou na forma singular, para cada t ,

$$\begin{aligned} (F_1^*(t), F_2^*(t), 1 - F(t)) \mid \text{Dados} \\ \sim \mathcal{D}(\alpha_1(0, t] + j_1(t), \alpha_2(0, t] + j_2(t), \alpha_1(t, \infty) + \alpha_2(t, \infty) + n - j_1(t) - j_2(t)) \end{aligned} \quad (4.0.12)$$

4.1 Estimadores bayesianos baseados na média da posteriori

Proposição 4.1.1 *Considerando o processo de Dirichlet bivariado de parâmetro (α_1, α_2) como distribuição a priori para o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$, isto é,*

$(F_1^*, F_2^*) \sim \mathcal{DB}(\alpha_1, \alpha_2)$, tem-se que o estimador bayesiano baseado na média da posteriori para o vetor de subdistribuições (F_1^*, F_2^*) é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}^*(t) &= (\hat{F}_1^*(t), \hat{F}_2^*(t)) = p_n \left(\frac{\alpha_1(0, t]}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)}, \frac{\alpha_2(0, t]}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} \right) \\ &\quad + (1 - p_n)(F_{1n}^*(t), F_{2n}^*(t)), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

em que

$$p_n = \frac{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \quad (4.1.3)$$

e $F_{1n}^*(t)$ e $F_{2n}^*(t)$ são as funções de subdistribuição empírica definidas em (4.0.1).

Prova: Para cada t ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}^*(t) &= (\hat{F}_1^*(t), \hat{F}_2^*(t)) = \\ &= \left(\frac{\alpha_1(0, t] + j_1(t)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n}, \frac{\alpha_2(0, t] + j_2(t)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha_1(0, t] + \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i = 1)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n}, \frac{\alpha_2(0, t] + \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i = 2)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \right) \end{aligned}$$

e desta última expressão segue (4.1.2). ■

Observação 4.1.4

1. O estimador bayesiano do vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$ em (4.1.2), é uma combinação convexa entre o vetor média da priori (ver 4.0.9) e o vetor cujos componentes são as funções de subdistribuição empírica.
2. Do teorema de Glivenko-Cantelli (cf. apêndice B.2), e dado que $p_n \downarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\hat{\mathcal{F}}^* = (\hat{F}_1^*, \hat{F}_2^*)$ converge ao verdadeiro vetor de subdistribuições (F_1^*, F_2^*) , uniformemente com probabilidade 1. Isto é,

$$\|\hat{\mathcal{F}}^* - \hat{\mathcal{F}}\|_\infty := \max \left\{ \sup_{t \in (0, \infty)} |\hat{F}_1^*(t) - \hat{F}_1(t)|, \sup_{t \in (0, \infty)} |\hat{F}_2^*(t) - \hat{F}_2(t)| \right\}$$

converge a zero, com probabilidade 1. Trata-se, então, de um estimador fortemente consistente.

3. Os estimadores das funções de subdistribuição $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$, dados pela expressão

(4.1.2) são para cada t ,

$$\hat{F}_1^*(t) = p_n \frac{\alpha_1(0, t]}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} + (1 - p_n) F_{1n}^*(t) \quad (4.1.5)$$

$$\hat{F}_2^*(t) = p_n \frac{\alpha_2(0, t]}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} + (1 - p_n) F_{2n}^*(t) \quad (4.1.6)$$

Esses estimadores são os estimadores bayesianos de $F_1^*(\cdot)$ e $F_2^*(\cdot)$, baseados na média da posteriori, quando se consideram as distribuições a priori, para cada t ,

$$\begin{aligned} F_1^*(t) &\sim \text{Beta}(\alpha_1(0, t], \alpha_1(t, \infty) + \alpha_2(0, \infty)) \\ F_2^*(t) &\sim \text{Beta}(\alpha_2(0, t], \alpha_2(t, \infty) + \alpha_1(0, \infty)) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Esse fato é totalmente coerente com a escolha do processo de Dirichlet bivariado como distribuição a priori para o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$, ver também expressões (4.0.9) e (4.0.11).

As mesmas propriedades descritas em (1) e (2) para $\hat{\mathcal{F}}^*$, também valem para $\hat{F}_1^*$ e $\hat{F}_2^*$ por separado. Em particular, ambos estimadores são fortemente consistentes para F_1^* e F_2^* , respectivamente.

Sendo, $F(t) = \Pr(Z \leq t)$ e $\rho = \Pr(X_2 < X_1)$, essas duas quantidades podem ser estimadas a partir da estrutura já definida e dos resultados já obtidos.

Proposição 4.1.8 Considerando a distribuição a priori como em (4.0.10), o estimador bayesiano da função de distribuição da variável Z , $F(t) = \Pr(Z \leq t)$ baseado na média da posteriori é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= \hat{F}_1^* + \hat{F}_2^* = \frac{\alpha_1(0, t] + \alpha_2(0, t] + \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \\ &= p_n \frac{\alpha_1(0, t] + \alpha_2(0, t]}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} + (1 - p_n) F_n(t), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

onde p_n é como em (4.1.3) e F_n é a função de distribuição empírica correspondente às observações $Z_1, \dots, Z_n$, dada em (4.0.2).

Prova: Direta de (4.1.5) e (4.1.6). ■

Proposição 4.1.10 Sejam $\rho = \Pr(X_2 < X_1) = \Pr(\delta = 1)$, e a função de distribuição condicional $T_1^*(\cdot)$ como no lema 4.0.7, e suponha que $\alpha_1(0, \infty)$ e $\alpha_2(0, \infty)$ existam.

Então, o estimador bayesiano de ρ baseado na média da posteriori é dado por

$$\hat{\rho} = \lim_{t \uparrow \infty} \hat{F}_1^*(t) = p_n \frac{\alpha_1(0, \infty)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} + (1 - p_n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\delta_i = 1) \quad (4.1.11)$$

Prova:

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \infty} \hat{F}_1^*(t) &= p_n \frac{\alpha_1(0, \infty)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} + (1 - p_n) F_{1n}^*(\infty) \\ &= p_n \frac{\alpha_1(0, \infty)}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty)} + (1 - p_n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\delta_i = 1) \end{aligned}$$

notando que a distribuição a priori para ρ é $\rho \sim \text{Beta}(\alpha_1(0, \infty), \alpha_2(0, \infty))$ e a verossimilhança, nesse caso, é definida pelo modelo binomial $\sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\delta_i = 1) \sim \text{Bin}(n, \rho)$, obtém-se a conclusão (4.1.11). ■

Observação 4.1.12

1. O estimador bayesiano de ρ , $\hat{\rho}$, é uma combinação convexa entre a média da priori $\alpha_1(0, \infty)/(\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty))$ e o estimador clássico de ρ , $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\delta_i = 1) = \frac{1}{n} \{\text{número de pares } (X_{1i}, X_{2i}), \text{ tais que } X_{2i} < X_{1i}\}$.
2. Dado que $p_n \downarrow 0$, pela lei dos grandes números $\hat{\rho} \xrightarrow{P} \rho$, quando $n \rightarrow \infty$.
3. O teorema do limite central garante que $n^{1/2}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{D} N(0, \rho(1 - \rho))$, quando $n \rightarrow \infty$.
4. O estimador bayesiano do funcional $\Pr(X_1 < X_2)$ é dado por $\lim_{t \uparrow \infty} \hat{F}_2^*(t)$.

Para a estimação das funções de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$, foram utilizadas a proposição 4.1.8 e a fórmula (3.1.10), propondo $\hat{F}_1$ como um estimador não-paramétrico da função de distribuição F_1 de X_1 , em que

$$\hat{F}_1(t) = \varphi(\hat{F}_1^*(\cdot), \hat{F}_2^*(\cdot); t) \quad (4.1.13)$$

O resultado mais importante desta seção é dado no teorema seguinte.

Teorema 4.1.14 *Supondo-se que as funções $g_1(\cdot) = \alpha_1(0, \cdot)$ e $g_2(\cdot) = \alpha_2(0, \cdot)$ são contínuas em (t, ∞) e F_1 e F_2 não possuem pontos de descontinuidade em comum. Então,*

$$\hat{F}_1(t) = I(t)\Pi(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (4.1.15)$$

onde

$$I(t) = \exp \left\{ \frac{-1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0, s]}{\widehat{F}(s)} \right\}$$

$$\Pi(t) = \prod_{i: Z_{(i)}^* > t} \frac{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i}{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i + d_i}$$

onde $Z_{(1)}^* < Z_{(2)}^* < \dots < Z_{(m)}^*$ são os m valores ($m \leq n$) diferentes das estatísticas de ordem correspondentes às observações $Z_1, \dots, Z_n$, $n_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i < Z_{(j)}^*)$ e $d_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i = Z_{(j)}^*, \delta_i = 1)$, $j = 1, 2, \dots, m$, e $\widehat{F}(t)$ é definido por (4.1.9).

Prova: De (4.1.13) e o fato que $\widehat{F}(\cdot) = \widehat{F}_1^*(\cdot) + \widehat{F}_2^*(\cdot)$,

$$\widehat{F}_1(t) = \exp \left\{ \int_t^\infty \frac{-d\widehat{F}_1^*(s)}{\widehat{F}(s)} \right\} \prod_{s>t} \frac{\widehat{F}_1^*(s-) + \widehat{F}_2^*(s-)}{\widehat{F}_1^*(s+) + \widehat{F}_2^*(s+)} \quad (4.1.16)$$

s : pontos de salto de $\widehat{F}_1^*(\cdot)$

Note-se que $d\widehat{F}_1^*(s) = \frac{d\alpha_1(0, s]}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n}$, logo, o primeiro termo em (4.1.16) é

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int_t^\infty \frac{-d\widehat{F}_1^*(s)}{\widehat{F}(s)} \right\} &= \exp \left\{ \frac{-1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n} \int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0, s]}{\widehat{F}(s)} \right\} \\ &= I(t) \end{aligned}$$

Para cada t , $g_1(\cdot) = \alpha_1(0, \cdot)$ é monótona e contínua em (t, ∞) , e $\frac{1}{\widehat{F}(\cdot)}$ é monótona em (t, ∞) . Portanto, é possível decompor de maneira única $g_1(\cdot)$ numa diferença de funções monótonas e contínuas (cf. teorema B.4.5, Corolário B.4.6), e $\frac{1}{\widehat{F}(\cdot)}$ numa diferença de funções monótonas. Assim, o teorema B.4.7 garante que a integral $\int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0, s]}{\widehat{F}(s)}$ é bem definida.

Por outro lado, o segundo fator de (4.1.16) é

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{s>t \\ s: \text{ pontos de} \\ \text{salto de } \widehat{F}_1^*(\cdot)}} \frac{\widehat{F}_1^*(s-) + \widehat{F}_2^*(s-)}{\widehat{F}_1^*(s+) + \widehat{F}_2^*(s+)} &= \prod_{\substack{s>t \\ s: \text{ pontos de} \\ \text{salto de } \widehat{F}_1^*(\cdot)}} \frac{\alpha_1(0, s] + \alpha_2(0, s] + \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq s-)}{\alpha_1(0, s] + \alpha_2(0, s] + \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq s+)} \\ &= \prod_{i: Z_{(i)}^* > t} \frac{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i}{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i + d_i} \\ &= \Pi(t) \end{aligned}$$

■

4.1.1 Cálculo numérico do estimador $\widehat{F}_1$

Na expressão (4.1.15) do estimador de $\widehat{F}_1(t)$, a integral $\phi(t) := \int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0,s]}{\widehat{F}(s)}$ pode necessitar de uma aproximação numérica.

O interesse é calcular a integral

$$\int_t^\infty g(s)ds \quad (4.1.17)$$

Caso necessário, pode-se fazer uma transformação de variável (teorema B.4.8), sendo $y = \frac{1}{1+s}$. Assim, pode-se reescrever (4.1.17) como

$$\int_t^\infty g(s) ds = \int_0^{\frac{1}{1+t}} \frac{t+1}{y^2} g\left(\frac{t+1-y}{y}\right) dy \quad (4.1.18)$$

Agora, basta aplicar a regra de Runge-Kutta para obter uma solução aproximada para a integral (4.1.17). Para mais detalhes e outros métodos de integração numérica ver apêndice B.3.

4.1.2 Um exemplo

A título de ilustração no cálculo do estimador não-paramétrico de $\widehat{F}_1$, são geradas duas amostras independentes $X_{11}, \dots, X_{1n}; X_{21}, \dots, X_{2n}$, tais que $X_{1i} \sim \text{Exp}(1)$, $X_{2i} \sim \text{Weibull}(1, 2)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

A distribuição a priori é escolhida considerando $\alpha_j(0, t] = t/M$, $j = 1, 2$, onde M é tal que $\Pr(X_1 > M) < 0,001$, o valor de M considerado é 8.0, e $\alpha_j(0, \infty) = 1$, $j = 1, 2$. Assim, tem-se como distribuição a priori para o funcional $\rho = \Pr(X_1 > X_2) \sim \text{Beta}(1, 1) \equiv U(0, 1)$, isto é, está sendo considerada uma priori não-informativa.

Os resultados obtidos com $n = 30$ são apresentados nas figuras (1) e (2) (ver abaixo). No primeiro gráfico aparece o estimador não-paramétrico $\widehat{F}_1$ e a função de distribuição da $\text{Exp}(1)$. Também o problema simétrico é resolvido e o segundo gráfico apresenta o estimador $\widehat{F}_2$ e a função de distribuição da $\text{Weibull}(1, 2)$.

As amostras desse exemplo, o código utilizado em R [23], outras amostras com tamanhos diferentes podem ser vistas no apêndice C.

Figura 1: Estimador de F_1 .vs. função de distribuição da $\text{Exp}(1)$

Figura 2: Estimador de F_2 .vs. função de distribuição da Weibull(1,2)

4.2 Estimadores bayesianos baseados na moda da posteriori

Proposição 4.2.1 *A moda da posteriori como estimador da função de distribuição $F(t) = \Pr(Z \leq t)$ é dado pela expressão:*

$$\tilde{F}(t) = q'_n \frac{\alpha_1(0, t] + \alpha_2(0, t] - 1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) - 2} + (1 - q'_n)F_n(t) \quad (4.2.2)$$

onde $q'_n = \frac{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) - 2}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n - 2}$

Prova: Obtém-se de (4.0.11) a distribuição a posteriori de $F(t)$ é $F(t) \mid \text{dados} \sim \text{Beta}(\alpha_1(0, t] + \alpha_2(0, t] + j_1(t) + j_2(t), \alpha_1(t, \infty) + \alpha_2(t, \infty) + n - j_1(t) - j_2(t))$ e a moda desta distribuição (cf. apêndice B.1) é:

$$\tilde{F}(t) = \frac{\alpha_1(0, t] + \alpha_2(0, t] + j_1(t) + j_2(t) - 1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n - 2}$$

de onde segue (4.2.2) ■

Proposição 4.2.3 *A moda da posteriori como estimador do vetor de subdistribuições (F_1^*, F_2^*) é dado pela expressão:*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}^*(t) &= (\tilde{F}_1^*(t), \tilde{F}_2^*(t)) = \\ &= q_n \left(\frac{\alpha_1(0, t] - 1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) - 3}, \frac{\alpha_2(0, t] - 1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) - 3} \right) \\ &\quad + (1 - q_n)(F_{1n}^*(t), F_{2n}^*(t)), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

onde $q_n = \frac{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) - 3}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n - 3}$

Prova: Do apêndice B.1, a moda da distribuição de Dirichlet dada pela expressão (4.0.11) é:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}^*(t) &= (\tilde{F}_1^*(t), \tilde{F}_2^*(t)) \\ &= \left(\frac{\alpha_1(0, t] + j_1(t) - 1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n - 3}, \frac{\alpha_2(0, t] + j_2(t) - 1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n - 3} \right) \end{aligned}$$

de onde segue (4.2.4). ■

Observação 4.2.5

1. A moda da posteriori como estimador do vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), F_2^*(\cdot))$ [da função de distribuição $F(\cdot)$] é uma combinação convexa entre o vetor modal [moda] da priori e o vetor de subdistribuições empíricas [a função de distribuição empírica].
2. Do teorema de Glivenko-Cantelli (cf. apêndice B.2) e dado que q_n e q'_n convergem a zero quando $n \rightarrow \infty$, os estimadores $\tilde{\mathcal{F}}^*(t) = (\tilde{F}_1^*(t), \tilde{F}_2^*(t))$ e $\tilde{F}$ são fortemente consistentes para $\mathcal{F}^*(t) = (F_1^*(t), F_2^*(t))$ e F , respectivamente.

Com base na proposição 4.2.3 e na fórmula (4.2.6) definida em (3.1.10), propõe-se $\tilde{F}_1$ como um estimador da função de distribuição $F_1 = \Pr(X \leq t)$, onde

$$\tilde{F}_1(t) = \varphi(\tilde{F}_1^*(\cdot), \tilde{F}_2^*(\cdot), t) \quad (4.2.6)$$

Teorema 4.2.7 Se as funções $g_1(\cdot) = \alpha_1(0, \cdot)$ e $g_2(\cdot) = \alpha_2(0, \cdot)$ são contínuas em (t, ∞) e F_1 e F_2 não possuem pontos de descontinuidade em comum. Então,

$$\tilde{F}_1(t) = I(t)\Pi(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (4.2.8)$$

onde

$$\begin{aligned} I(t) &= \exp \left\{ \frac{-1}{\alpha_1(0, \infty) + \alpha_2(0, \infty) + n - 3} \int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0, s]}{\tilde{F}_1^*(s) + \tilde{F}_2^*(s)} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_t^\infty \frac{d\alpha_1(0, s]}{\alpha_1(0, s] + \alpha_2(0, s] + nF_n(s) - 2} \right\}, \\ \Pi(t) &= \prod_{i: Z_{(i)}^* > t} \frac{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i - 2}{\alpha_1(0, Z_{(i)}^*] + \alpha_2(0, Z_{(i)}^*] + n_i + d_i - 2}, \end{aligned}$$

onde $Z_{(1)}^* < Z_{(2)}^* < \dots < Z_{(m)}^*$, n_j e d_j foram definido no enunciado do teorema 4.1.14.

Prova: Análoga à prova do teorema 4.1.14. ■

Foi desenvolvido neste capítulo estimadores bayesianos não-paramétricos para um sistema em paralelo com dois componentes. A seguir, esses resultados serão estendidos para o caso mais geral com n componentes.

5 *Estimação bayesiana não-paramétrica no problema dual ao de riscos competitivos*

Os resultados obtidos no capítulo anterior serão, aqui, utilizados para a estimação bayesiana não-paramétrica do problema dual ao de riscos competitivos e que este pode ser formulado da seguinte maneira:

Seja a matriz $k \times n$ definida por $[X_{ji}]$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$, onde os vetores colunas são independentes e identicamente distribuídos, e os vetores linhas são independentes, tais que $X_{1i} \sim X_1$, $X_{2i} \sim X_2$, $\dots$, $X_{ki} \sim X_k$, $i = 1, \dots, n$. Denotam-se por $F_\ell(t) = \Pr(X_\ell \leq t)$, $\ell = 1, \dots, k$, as respectivas funções de distribuição das variáveis $X_1, \dots, X_k$. Assume-se que as variáveis aleatórias $X_{1i}, \dots, X_{ki}$ são mutuamente independentes, para todo $i = 1, \dots, n$, e tomando valores no intervalo $(0, \infty)$.

O estatístico só tem disponível os dados:

$$\begin{aligned} Z_i &= \max(X_1, \dots, X_k) \\ \delta_i &= \begin{cases} 1 & \text{se } Z_i = X_{1i} \\ 2 & \text{se } Z_i = X_{2i} \\ \vdots \\ k & \text{se } Z_i = X_{ki}, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

o que é escrito brevemente como $(Z_1, \delta_1), \dots, (Z_n, \delta_n)$. A função de distribuição da variável Z_i é denotada por $F(t) = \Pr(Z_i \leq t)$, $i = 1, \dots, n$, supondo-se que as funções de distribuição $F_\ell(\cdot)$, $\ell = 1, \dots, k$, não possuem pontos de descontinuidade em comum.

O modelo descrito corresponde a um sistema com k componentes em paralelo, e pode ser de interesse à estimação das funções de distribuição $F_\ell(\cdot)$, $\ell = 1, \dots, k$ (ou em algumas delas), funcionais do tipo $\rho_\ell = \Pr(\delta = \ell)$, $\ell = 1, \dots, k$, como também na função de distribuição $F(\cdot)$ do sistema.

As chamadas funções de subdistribuição são:

$$F_\ell^*(t) = \Pr(Z \leq t, \delta = \ell), \quad \ell = 1, \dots, k \quad (5.0.2)$$

Também, se Λ é subconjunto de índices não-vazio de $\{1, \dots, k\}$, escreve-se:

$$F_\Lambda^*(t) = \Pr(Z \leq t, \delta \in \Lambda), \quad (5.0.3)$$

que é chamada de função de subdistribuição do conjunto de riscos Λ .

Existem propriedades análogas às já expostas na seção 3.1, algumas delas são:

1. $F_\ell^*(+\infty) = \Pr(Z \leq +\infty, \delta = \ell) = \Pr(\delta = \ell)$, $\ell = 1, \dots, k$,
 $F_1^*(\infty) + \dots + F_k^*(\infty) = 1$ e $\rho_\Lambda := F_\Lambda^*(0) = \Pr(\delta \in \Lambda)$, que é a confiabilidade do grupo de componentes Λ .
2. $F_1^*(t) + \dots + F_k^*(t) = \Pr(Z \leq t) = F(t)$.
3. Os pontos de descontinuidade de $F_\ell^*(\cdot)$ são os pontos de descontinuidade de $F_\ell(\cdot)$, $\ell = 1, \dots, k$. E, portanto, as funções $F_\ell^*(\cdot)$, $\ell = 1, \dots, k$, não possuem pontos de descontinuidade em comum.
4. A fórmula (3.1.10) pode ser generalizada.

Seja Λ um subconjunto de índices não-vazio de $\{1, \dots, k\}$, exprime-se por

$$F_\Lambda(t) = \Pr\left(\max_{\ell \in \Lambda}(X_\ell) \leq t\right) \quad (5.0.4)$$

tem-se

$$F_\Lambda(t) = \varphi(F_\Lambda^*(\cdot), F_{\Lambda^c}^*(\cdot); t) \quad (5.0.5)$$

onde φ foi definido no teorema 3.1.9, e F_Λ^* em (5.0.3).

Como foi formulado em (5.0.1), as observações são $(Z_1, \delta_1), \dots, (Z_n, \delta_n)$, onde $Z_i = \max(X_{\ell i} : \ell = 1, \dots, k)$, e $\delta_i = \ell$, se $Z_i = X_{\ell i}$, $\ell = 1, \dots, k$. Equivalentemente, para cada t , observam-se as variáveis aleatórias

$$nF_{\ell n}^*(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i = \ell), \quad \ell = 1, \dots, k \quad (5.0.6)$$

onde as funções $F_{\ell n}^*(\cdot)$, $\ell = 1, \dots, k$, são chamadas funções de distribuição empírica, nota-se que

$$nF_n(t) = n \sum_{\ell=1}^k F_{\ell n}^*(t) \quad (5.0.7)$$

Logo, a função de verossimilhança pode ser expressa em termos de um modelo Multinomial($n; p_1(t), \dots, p_k(t), p_{k+1}(t)$), sendo $p_\ell(t) = F_\ell^*(t)$, $\ell = 1, \dots, k$ e $p_{k+1}(t) = 1 - F(t)$, isto é:

$$\begin{aligned} L &= \Pr(nF_{1n}^*(t) = j_1(t), \dots, nF_{kn}^*(t) = j_k(t)) \\ &\propto F_1^*(t)^{j_1(t)} F_2^*(t)^{j_2(t)} \dots F_k^*(t)^{j_k(t)} (1 - F(t))^{\sum_{\ell=1}^k j_\ell(t)} \end{aligned} \quad (5.0.8)$$

A distribuição a priori para o vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), \dots, F_k^*(\cdot))$ é construída a partir da caracterização do processo de Dirichlet k -variado dada no teorema B.4.3.

Considera-se $\mathcal{X} = (0, \infty)$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}(0, \infty)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ vetor de k medidas finitas, não-nulas, não-negativas e finitamente aditivas sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Como antes, define-se

$$\rho_\ell = \Pr(\delta = \ell), \quad \ell = 1, \dots, k \quad (5.0.9)$$

$$T_\ell^* = \Pr(Z \leq t \mid \delta = \ell), \quad \ell = 1, \dots, k \quad (5.0.10)$$

e tem-se

$$(F_1^*(\cdot), \dots, F_k^*(\cdot)) = (\rho_1 T_1^*(\cdot), \dots, \rho_k T_k^*(\cdot)) \quad (5.0.11)$$

O seguinte lema é consequência do teorema B.4.3, lembrando antes que $\vec{\alpha}(A) := (\alpha_1(A), \dots, \alpha_k(A))$.

Lema 5.0.12 *Se $(\rho_1, \dots, \rho_k) \sim \mathcal{D}_S(\vec{\alpha}(0, \infty))$, $T_\ell^* \in \mathcal{D}(\alpha_\ell)$, $\ell = 1, \dots, k$, tais que $(\rho_1, \dots, \rho_k) \amalg T_1^* \amalg \dots \amalg T_k^* \mid \vec{\alpha}$. Então $(F_1^*, \dots, F_k^*) \in \mathcal{DM}_k(\vec{\alpha})$.*

■

Portanto, para cada t , tem-se como distribuição a priori

$$(F_1^*(t), \dots, F_k^*(t)) \sim \mathcal{D}\left(\vec{\alpha}(0, t]; \sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(t, \infty)\right) \quad (5.0.13)$$

ou na sua forma singular,

$$(F_1^*(t), \dots, F_k^*(t), 1 - F(t)) \sim \mathcal{D}\left(\vec{\alpha}(0, t], \sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(t, \infty)\right) \quad (5.0.14)$$

Agora, utilizando a proposição B.1.4, obtém-se a distribuição a posteriori, para cada t ,

$$(F_1^*(t), \dots, F_k^*(t)) \mid \text{dados} \sim \mathcal{D} \left(\vec{\beta}(0, t]; \sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(t, \infty) + n - \sum_{\ell=1}^k j_\ell(t) \right) \quad (5.0.15)$$

ou também

$$(F_1^*(t), \dots, F_k^*(t), 1 - F(t)) \mid \text{dados} \sim \mathcal{D} \left(\vec{\beta}(0, t], \sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(t, \infty) + n - \sum_{\ell=1}^k j_\ell(t) \right) \quad (5.0.16)$$

onde $\vec{\beta}(0, t] = (\alpha_1(0, t] + j_1(t), \dots, \alpha_k(0, t] + j_k(t))$.

5.1 Estimadores bayesianos baseados na média da posteriori

Os resultados obtidos aqui são análogos aos obtidos na seção 4.1 deste trabalho e são resumidos na seguinte proposição.

Denota-se por Λ um subconjunto de índices não-vazio de $\{1, \dots, k\}$.

Proposição 5.1.1

1. Considerando estimadores bayesianos baseados na média da posteriori e o processo de Dirichlet k -variado $\mathcal{DM}_k(\vec{\alpha})$ como distribuição a priori:

(a) O estimador bayesiano do vetor de subdistribuições $(F_\ell^*(\cdot))_{\ell \in \Lambda}$ é dado por $(\hat{F}_\ell^*(\cdot))_{\ell \in \Lambda}$, onde

$$\hat{F}_\ell^*(t) = p'_n \frac{\alpha_\ell(0, t]}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty)} + (1 - p'_n) F_{\ell n}^*(t) \quad (5.1.2)$$

onde

$$p'_n = \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty)}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) + n} \quad (5.1.3)$$

e $F_{\ell n}^*(t)$, $\ell \in \Lambda$, são as funções de subdistribuição empírica definidas em (5.0.6).

(b) O estimador bayesiano da função de subdistribuição do conjunto de riscos Λ , $F_\Lambda^*(t) = \Pr(Z \leq t, \delta \in \Lambda)$ é dado por

$$\hat{F}_\Lambda^*(t) = \sum_{\ell \in \Lambda} \hat{F}_\ell^*(t) = p'_n \frac{\sum_{\ell \in \Lambda} \alpha_\ell(0, t]}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty)} + (1 - p'_n) F_{\Lambda n}^*(t) \quad (5.1.4)$$

onde $F_{\Lambda n}^*$ é a função de subdistribuição empírica do conjunto de riscos Λ , isto

é

$$F_{\Lambda_n}^*(t) = \sum_{\ell \in \Lambda} F_{\ell_n}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\ell \in \Lambda} \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i = \ell) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq t, \delta_i \in \Lambda) \quad (5.1.5)$$

Em particular, se $\Lambda = \{1, \dots, k\}$, obtém-se o estimador bayesiano da função de distribuição do sistema $F(t) = \Pr(Z \leq t)$,

$$\hat{F}(t) = p'_n \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}(0, t]}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}(0, \infty)} + (1 - p'_n) F_n^*(t) \quad (5.1.6)$$

onde $F_n(t)$ é a função de distribuição empírica correspondente a $Z_1, \dots, Z_n$.

(c) Se as $\alpha_{\ell}(0, \infty)$, $\ell \in \Lambda$, existem, o estimador bayesiano de $\rho_{\Lambda} = \Pr(\delta \in \Lambda)$ é dado por

$$\hat{\rho}_{\Lambda} = \lim_{t \uparrow \infty} \hat{F}_{\Lambda}^*(t) = p'_n \frac{\sum_{\ell \in \Lambda} \alpha_{\ell}(0, \infty)}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}(0, \infty)} + (1 - p'_n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\delta_i \in \Lambda) \quad (5.1.7)$$

2. Se as funções $g_{\ell}(\cdot) = \alpha_{\ell}(0, \cdot]$, $\ell = 1, \dots, k$ são contínuas em (t, ∞) , e se as funções de subdistribuição F_{Λ}^* e $F_{\Lambda^c}^*$ não possuem pontos de descontinuidade em comum, então o estimador não-paramétrico, definido pela fórmula (5.0.5), da função de distribuição do conjunto de riscos Λ , $F_{\Lambda}(\cdot)$:

$$\hat{F}_{\Lambda}(t) = \varphi(\hat{F}_{\Lambda}^*(\cdot), \hat{F}_{\Lambda^c}^*(\cdot); t), \quad t \in (0, \infty)$$

é dado por

$$\hat{F}_{\Lambda}(t) = I_{\Lambda}(t) \Pi_{\Lambda}(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (5.1.8)$$

onde

$$I_{\Lambda}(t) = \exp \left\{ \frac{-1}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}(0, \infty) + n} \sum_{\ell \in \Lambda} \int_t^{\infty} \frac{d\alpha_{\ell}(0, s]}{\hat{F}(s)} \right\}$$

$$\Pi_{\Lambda}(t) = \prod_{i: Z_{(i)}^* > t} \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}(0, Z_{(i)}^*] + n_i}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}(0, Z_{(i)}^*] + n_i + d_{\Lambda i}}$$

onde $Z_{(1)}^* < \dots < Z_{(m)}^*$ e n_j foram definidas no enunciado do teorema 4.1.14, e $d_{\Lambda j} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i = Z_{(j)}^*, \delta \in \Lambda)$.

Prova: É uma direta generalização das proposições 4.1.1 - 4.1.10 e do teorema 4.1.14

■

Observação 5.1.9

1. É claro que os estimadores $(\hat{F}_\ell^*)_{\ell \in \Lambda}$, $\hat{F}_\Lambda^*$ e $\hat{\rho}_\Lambda$ são combinações convexas entre as médias das respectivas distribuições a priori, e os respectivos elementos empíricos. Esses estimadores são também fortemente consistentes para $(F_\ell^*)_{\ell \in \Lambda}$, F_Λ^* e ρ_Λ , respectivamente.
2. Os mesmos argumentos dados na prova do teorema 4.1.14 garantem a existência das integrais $\int_t^\infty \frac{d\alpha_\ell(0,s)}{\hat{F}(s)}$, $\ell \in \Lambda$ na expressão (5.1.8).
3. $\hat{F}_\Lambda(t) = I_\Lambda(t)\Pi_\Lambda(t)$, $t \in (0, \infty)$ em (5.1.8) define a família dos $2^k - 1$ estimadores não-paramétricos baseados em 3.1.10, associados às $2^k - 1$ possíveis funções de distribuição no modelo dual ao de riscos competitivos.
Em particular, se Λ é unitário, $\Lambda = \{\ell\}$, a expressão (5.1.8) define o estimador não-paramétrico da função de distribuição $F_\ell(t) = \Pr(X_\ell \leq t)$.
4. Se o conjunto de riscos é $\{1, 2\}$ e $\Lambda = \{1\}$, então (5.1.8) é simplesmente o estimador da função de distribuição $F_1(t) = \Pr(X_1 \leq t)$, dado pela expressão (4.1.15) no teorema 4.1.14.

5.2 Estimadores bayesianos baseados na moda da posteriori

Nessa seção, o interesse está centrado particularmente, na estimação da função de distribuição do grupo Λ , $F_\Lambda(\cdot)$, definida em (5.0.4). Os cálculos são baseados, fundamentalmente, nas distribuições a priori, e logo a posteriori, do vetor de subdistribuições $(F_1^*(\cdot), \dots, F_k^*(\cdot))$, dadas pelas expressões (5.0.13) e (5.0.15).

Proposição 5.2.1

1. A moda da posteriori como estimador da função de distribuição do sistema $F(t) = \Pr(Z \leq t)$ é dado por:

$$\tilde{F}(t) = q'_n \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, t] - 1}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) - 2} + (1 - q'_n) F_n(t) \quad (5.2.2)$$

$$\text{onde } q'_n = \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) - 2}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) + n - 2}.$$

2. A moda da posteriori como estimador do vetor de subdistribuições $\mathcal{F}^*(\cdot) =$

$(F_\Lambda^*(\cdot), F_{\Lambda^c}^*(\cdot))$, onde $F_\Lambda^*(t) = \Pr(Z \leq t, \delta \in \Lambda)$, é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}^*(t) = (F_\Lambda^*(t), F_{\Lambda^c}^*(t)) = & q_n \left(\frac{\sum_{\ell \in \Lambda} \alpha_\ell(0, t] - 1}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) - 3}, \frac{\sum_{\ell \in \Lambda^c} \alpha_\ell(0, t] - 1}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) - 3} \right) \\ & + (1 - q_n)(F_{\Lambda_n}^*(t), F_{\Lambda_n^c}^*(t)) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

onde $q_n = \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) - 3}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, \infty) + n - 3}$ e $F_{\Lambda_n}^*(\cdot)$ é a função de subdistribuição empírica do conjunto de risco Λ definida em (5.1.5).

3. Se as funções $g_\ell(\cdot) = \alpha_\ell(0, \cdot]$, $\ell = 1, \dots, k$ são contínuas em $(0, \infty)$ e se as funções de subdistribuição F_Λ^* e $F_{\Lambda^c}^*$ não possuem pontos de descontinuidade em comum, então o estimador não-paramétrico, definido pela fórmula (5.0.5), da função de distribuição $F_\Lambda(t) = \Pr(\max_{\ell \in \Lambda}(X_\ell) \leq t)$:

$$\tilde{F}_\Lambda(t) = \varphi(\tilde{F}_\Lambda^*(\cdot), \tilde{F}_{\Lambda^c}^*(\cdot); t), \quad t \in (0, \infty)$$

é dado por

$$\tilde{F}_\Lambda(t) = I_\Lambda(t) \Pi_\Lambda(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (5.2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} I_\Lambda(t) &= \exp \left\{ - \sum_{\ell \in \Lambda} \int_t^\infty \frac{d\alpha_\ell(0, s]}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, s] + n F_n(s) - 2} \right\} \\ \Pi_\Lambda(t) &= \prod_{i: Z_{(i)}^* > t} \frac{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, Z_{(i)}^*] + n_i - 2}{\sum_{\ell=1}^k \alpha_\ell(0, Z_{(i)}^*] + n_i + d_{\Lambda i} - 2} \end{aligned}$$

onde $Z_{(1)}^* < \dots < Z_{(m)}^*$, n_j e $d_{\Lambda j}$ foram definidas no enunciado da proposição 5.1.1, item 2.

Prova: São diretas generalizações das proposições 4.2.1 e 4.2.3 e do teorema 4.2.7, respectivamente. ■

Observação 5.2.5

1. Os estimadores $(\tilde{F}_\ell)$ e $(\tilde{F}_\Lambda^*, \tilde{F}_{\Lambda^c}^*)$ são combinações convexas entre as modas das respectivas distribuições a priori, e os respectivos elementos empíricos. Esses estimadores são também fortemente consistentes para (F_ℓ) e $(F_\Lambda^*, F_{\Lambda^c}^*)$, respectivamente.
2. Valem aqui também as observações 5.1.9 (2) – (4).

6 *Considerações Finais*

Neste trabalho, estabelecemos as relações necessárias entre as funções de distribuição do tempo de vida de um sistema em paralelo com as funções de subdistribuição de seus componentes. Apresentamos os estimadores bayesianos não-paramétricos que obtivemos para essas funções de distribuição e sub distribuição. As contribuições mais significantes desse trabalho foram as seguintes:

1. Descrição completa das relações entre distribuições e subdistribuições de um sistema em paralelo, incluindo os casos em que essas funções não são necessariamente contínuas.
2. Desenvolvimento de estimadores bayesiano não-paramétrico para as funções de (sub)distribuição e para o funcional ρ .

Com os resultados que obtivemos, abrimos caminho para futuras pesquisas que incluem:

- a Desenvolvimento de estimadores da função de sobrevivência de sistemas coerentes, que podem ser colocados como combinações de sistemas em série e em paralelo.
- b Retirar a restrição de independência entre os tempos de vida dos componentes do sistema.
- c Combinar os problemas descritos em (a) e (b), isto é, descrever estimadores para as distribuições de sistemas coerentes em geral e sem restrição de independência entre os tempos de sobrevivência de seus componentes.

APÊNDICE A – Taxa de memória

A.1 Relação da taxa de memória com uma função de distribuição contínua $F(\cdot)$

Uma função de distribuição contínua $F(t)$ pode ser expressa em função da taxa de memória definida por

$$u(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$$

onde $f(t)$ é a função de densidade correspondente a $F(t)$.

$$\begin{aligned} F(t) &= \exp \{ - (-\ln F(t)) \} \\ &= \exp \{ - (\ln F(\infty) - \ln F(t)) \} \\ &= \exp \left\{ - \int_t^\infty \frac{f(y)}{F(y)} dy \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_t^\infty u(y) dy \right\} \end{aligned}$$

■

$u(t)$ pode ser escrita como $u(t) = \frac{d}{dt} \ln F(t)$.

A.2 Integral-Produto e Processos de Markov

Definição A.2.1 *Seja $X(t)$, $t \in \mathcal{T}$, uma matriz $p \times p$ de funções cadlag com variação localmente limitada. Define-se*

$$\mathbf{Y} = \prod (\mathbf{I} + d\mathbf{X})$$

a integral-produto de $\mathbf{X}$ sobre intervalos da forma $[0, t]$, $t \in \mathcal{T}$, como a seguinte função matriz $p \times p$:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathcal{P}_{s \in [0, t]} (\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathrm{d}s)) = \lim_{\max |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \prod (\mathbf{I} + \mathbf{X}(t_i) - \mathbf{X}(t_{i-1})) \quad (\text{A.2.2})$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ é uma partição de $[0, t]$ e a matriz produto é tomada em sua ordem natural da esquerda para direita. No termo mais à esquerda do produto, $\mathbf{X}(0)$ deve ser substituído por $\mathbf{X}(0-) = 0$ porque o ponto extremo 0 está incluso no intervalo $[0, t]$.

A notação $\mathcal{P}$, utilizada aqui, indica a versão contínua do produto ordinário $\prod$, assim como a integral $\int$ generaliza a soma $\sum$ (cf. Andersen et al. [4]).

Similarmente, a integral-produto sobre um sub-intervalo arbitrário de $\mathcal{T}$ é definida, tomando cuidado com os extremos do intervalo. O primeiro resultado da integração produto é que o limite sempre existe.

Quando os componentes da função $\mathbf{X}$ são funções de distribuição com medidas discretas, a integral-produto torna-se simplesmente um produto finito sobre os tempos de mudança de $\mathbf{X}$ da matriz identidade mais os saltos de $\mathbf{X}$. Assim,

$$\mathbf{Y} = \prod (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{X})$$

No caso escalar, $p = 1$, a ordem das multiplicações não importa, e os pontos de salto de X podem ser separados de sua parte contínua, obtendo

$$\mathcal{P} (1 + \mathrm{d}X) = \exp(X^c) \prod (1 + \Delta X) \quad (\text{A.2.3})$$

onde $X^c = X - \sum \Delta X$ e $\Delta X = X - X_-$. Então, se X não é somente escalar mas também contínuo (e com variação limitada), a integral-produto é simplesmente a exponencial $\mathcal{P} (1 + \mathrm{d}X) = \exp(X)$.

A propriedade mais importante da integral-produto é a capacidade de multiplicação das integrais-produtos sobre intervalos disjuntos, que segue facilmente da definição. Para $0 \leq s \leq t \leq u$, há

$$\mathcal{P}_{(s, u]} (\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathrm{d}s)) = \mathcal{P}_{(s, t]} (\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathrm{d}s)) \mathcal{P}_{(t, u]} (\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathrm{d}s))$$

A integral-produto existe e é solução única de uma equação integral.

Teorema A.2.4 $\mathcal{T}(\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathrm{d}s))$ existe e é uma função cadlag de variação localmente limitada. Ela é a única solução para a equação integral

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{I} + \int_{s \in [0, t]} \mathbf{Y}(s-) \mathbf{X}(\mathrm{d}s) \quad (\text{A.2.5})$$

Esse resultado, como a maioria dos resultados relacionados à integração-produto, é não intuitivo. O lado direito de (A.2.2) é a solução do esquema de diferenças discretas associado para resolução numérica de (A.2.5) [formalmente, esse é o resultado da aplicação do esquema de primeira ordem de Euler para solução numérica de (A.2.5)].

A seguir, esses resultados são estendidos para um espaço de estados quase finito arbitrário (processo de Markov de tempo contínuo). Uma função matriz $p \times p$ $\mathbf{A}$ corresponde a uma medida de intensidade localmente finita de um processo de Markov sobre um intervalo de tempo $\mathcal{T}$ se A_{hj} , $h \neq j$, são funções cadlag não-decrescentes, zero no tempo zero, $A_{hh} = -\sum_{j \neq h} A_{hj}$, e $\Delta A_{hh}(t) \geq -1$ para todo t . A função A_{hj} é chamada função de intensidade integrada para transições do estado h para o estado j , enquanto A_{hh} é a função de intensidade integrada negativa para transições saindo do estado h .

Teorema A.2.6 *Seja $\mathbf{A}$ a função matriz correspondente a uma medida de intensidade. Defina:*

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathcal{T}(\mathbf{I} + \mathrm{d}\mathbf{A}), \quad s \leq t; s, t \in \mathcal{T} \quad (\text{A.2.7})$$

Então $\mathbf{P}$ é a matriz de transição de um processo de Markov com espaço de estados $\{1, \dots, p\}$ e medida de intensidade $\mathbf{A}$. O processo pode ser construído como segue (começando de qualquer instante de tempo em qualquer estado): dado que o processo está no estado h no tempo t_0 , permanece nesse estado por um tempo com função integrada

$$-(A_{hh}(t) - A_{hh}(t_0)), \quad t_0 \leq t \leq \inf\{u \geq t_0 : \Delta A_{hh}(u) = -1\}$$

Dado que ele sai do estado h no tempo t , a probabilidade de ir para o estado $j \neq h$ é $(\mathrm{d}A_{hj}/(-\mathrm{d}A_{hh}))(t)$.

O teorema não está provado aqui; para provar, é necessário mostrar que a construção descrita no teorema realmente define um processo (fazendo apenas uma quantidade finita de mudanças em intervalos finitos de tempo), este é um processo de Markov, e suas matrizes de transição são dadas por (A.2.7).

Um caso especial importante é quando A_{hj} são absolutamente contínuas, $A_{hj} = \int \alpha_{hj}$ para certas funções intensidade ou taxas de transição ou intensidades de transição α_{hj} .

Os tempos de parada em um dado estado h são, então, distribuídos continuamente com taxa $-\alpha_{hh}$ (começando do tempo de entrada no estado h). As probabilidades condicionais de mudança (dada a saída do estado h no tempo t) são iguais a $\alpha_{hj}(t)/(-\alpha_{hh}(t))$. Seja α a matriz dessas intensidades de transição. A equação integral (A.2.5) para a integral-produto de $\mathbf{A}$ pode ser reescrita como uma integral das equações diferenciais de Kolmogorov para a matriz de transição $\mathbf{P}$ com intensidades α_{hj} (de variação de tempo): $\mathbf{P}(s, t)$ é a única solução para as equações

$$\mathbf{P}(s, s) = \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(s, t) = \mathbf{P}(s, t) \alpha(t)$$

porque (começando no tempo s ao invés de 0) a equação (A.2.5) torna-se

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{I} + \int_{u \in (s, t]} \mathbf{P}(s, u) \alpha(u) du \quad (\text{A.2.8})$$

Teorema A.2.9 *Seja F uma função de distribuição de uma variável aleatória positiva T , isto é, $F(t) = \Pr(T \leq t)$ para todo $t \geq 0$ e $F(0) = 0$. Defina a função cumulativa*

$$A(t) = - \int_t^\infty \frac{F(ds)}{F(s)} \quad (\text{A.2.10})$$

Então

$$F(t) = \Pi_{(t, \infty)}(1 - dA) \quad (\text{A.2.11})$$

para todo t tal que $A(t) < \infty$.

Prova. Para todo t tal que $F(t-) > 0$ e, assim, $A(t) < \infty$,

$$F(t) = 1 - \int_t^\infty F(s) A(ds)$$

Aplicando (A.2.8) com $\alpha = -A$ e $\mathcal{T} = \{t : F(t) > 0, t \geq 0\}$. Se $\mathcal{T} = (\tau, \infty)$ para algum $\tau < \infty$, tem-se, $F(\tau) > 0$ mas $F(\tau-) = 0$. Conseqüentemente, $A(t) = A(\tau) < \infty$ para todo $t \leq \tau$ e a relação (A.2.11) é válida também para todo $t > \tau$.

■

Quando F é absolutamente contínua e tem densidade f , define-se a taxa de memória $\alpha = f/F$. Então, $A(t) = \int_t^\infty \alpha(s) ds$ e a relação (A.2.11) torna-se (usando (A.2.3))

$$F(t) = \Pi_t^\infty(1 - \alpha(s) ds) = \exp \left(- \int_t^\infty \alpha(s) ds \right) \quad (\text{A.2.12})$$

Entretanto, se F é discreta, pode-se definir a taxa de memória discreta $\alpha(t) = \Pr(T = t | T \leq t)$. Nesse caso, $A(t) = \sum_{s>t} \alpha(s)$ e (A.2.11) torna-se

$$F(t) = \prod_{s>t} (1 - \alpha(s))$$

APÊNDICE B – Resultados úteis

B.1 A distribuição de Dirichlet

Esta secção é dedicada ao estudo da distribuição de Dirichlet, suas caracterizações e propriedades.

Definição B.1.1 *Seja $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k+1$, com $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i > 0$. O vetor $(Y_1, \dots, Y_k)$ tem distribuição de Dirichlet com parâmetro $(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$, se a função de densidade conjunta de $(Y_1, \dots, Y_k)$ é*

$$f(y_1, \dots, y_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{k+1} \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^k y_i^{\alpha_i-1} \left(1 - \sum_{i=1}^k y_i\right)^{\alpha_{k+1}-1}$$

definida sobre o simplex k -dimensional

$$\mathcal{S}_k = \left\{ (y_1, \dots, y_k) : y_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k y_i < 1 \right\}$$

Notação B.1.2 $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$

- Se $\alpha_i = 0$ para algum i , então a correspondente $Y_i = 0$ q.c.
- Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1}$, então $(Y_1, \dots, Y_k) \sim U(\mathcal{S}_k)$.
- Se $k = 1$, $Y_1 \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Se $\alpha_1 = 0$ então $Y_1 = 0$ q.c.

Se $\alpha_2 = 0$ então $Y_1 = 1$ q.c.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ então $Y_1 \sim U(0, 1)$ q.c.

Momentos e moda da distribuição de Dirichlet

Seja $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$.

1. $m_{r_1, \dots, r_k} = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k Y_i^{r_i} \right] = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{k+1} \Gamma(\alpha_i)} \frac{\prod_{i=1}^{k+1} \Gamma(\alpha_i + r_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i + r_i)}$, onde $r_{k+1} = 0$.
2. De (1): $\mathbb{E}Y_i = m_{0, \dots, 1, \dots, 0} = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j}$, $i = 1, \dots, k$ e $\mathbb{E}Y_i^2 = \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{\alpha^2 + \alpha}$, $i = 1, \dots, k$, onde $\alpha = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j$.

Esses são os momentos de primeira e segunda ordem da distribuição Beta, isto é, considerando o fato que $Y_i \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$ então $\mathbb{E}Y_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ e $\mathbb{E}Y_1^2 = \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$.

3. A moda da distribuição de Dirichlet, isto é, o vetor $\mathbf{y}^*$ tal que

$$f(y_1^*, \dots, y_k^* \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1}) = \sup_{\mathbf{y} \in S_k} f(y_1, \dots, y_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$$

é dado por $y_j^* = \frac{\alpha_j - 1}{\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j - (k+1)}$; $j = 1, \dots, k$.

No caso da distribuição Beta(α_1, α_2), tem-se que $y^* = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2}$.

Observação B.1.3 Definindo-se $Y_{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k Y_i$, então a distribuição do vetor $(Y_1, \dots, Y_{k+1})$ é singular em relação à medida de Lebesgue λ_{k+1} sobre $\mathbb{R}^{k+1}$. O suporte dessa distribuição singular é o conjunto k -dimensional

$$E_{k+1} = \left\{ (y_1, \dots, y_{k+1}) : y_i \geq 0, i = 1, \dots, k+1, \sum_{i=1}^{k+1} y_i = 1 \right\}$$

A função densidade conjunta, nesse caso, pode ser representada como $C \prod_{i=1}^{k+1} y_i^{\alpha_i - 1}$ em relação à medida de Lebesgue k -dimensional sobre E_{k+1} .

A proposição seguinte mostra a família de distribuições de Dirichlet como a natural família conjugada para os parâmetros de uma distribuição multinomial.

Proposição B.1.4 Considerando o modelo estatístico de uma variável aleatória X que assume $(k+1)$ -valores com vetor de probabilidades $(p_1, \dots, p_{k+1})$: seja $\mathcal{D}_S(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$ o modelo de probabilidade a priori para os parâmetros $(p_1, \dots, p_{k+1})$. Então, com as observações independentes de X , dando origem às frequências amostrais $n_1, \dots, n_{k+1}$ para os $(k+1)$ -valores de X , tem-se que a distribuição a posteriori de $(p_1, \dots, p_{k+1})$ é $\mathcal{D}_S(\alpha_1 + n_1, \dots, \alpha_{k+1} + n_{k+1})$.

Proposição B.1.5 *Seja $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$. Se $i_1, \dots, i_{k+1}$ é uma permutação de $1, 2, \dots, k+1$ então $(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k}) \sim \mathcal{D}(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}; \alpha_{i_{k+1}})$.*

A caracterização da distribuição de Dirichlet em termos de variáveis aleatórias Beta, mutuamente independentes, é dada pelas proposições seguintes.

Proposição B.1.6 *Seja $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$. Definindo-se $U_1 = Y_1$, $U_i = \frac{Y_i}{1 - Y_1 - \dots - Y_{i-1}}$ para $i = 2, \dots, k$. Então $U_i \sim \text{Beta}(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{k+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$, e as variáveis aleatórias $U_1, \dots, U_k$ são mutuamente independentes.*

Vale, também, a recíproca da última proposição.

Proposição B.1.7 *Sejam $U_i \sim \text{Beta}(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{k+1})$, $i = 1, \dots, k$ independentes e definindo*

$$Y_1 = U_1, \quad Y_2 = (1 - U_1)U_2, \quad \dots, \quad Y_k = (1 - U_1)(1 - U_2) \cdots (1 - U_{k-1})U_k$$

então $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$.

Combinando as proposições B.1.6 e B.1.7:

Proposição B.1.8 *Sejam $U \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1})$ e $\mathbf{Z} = (Z_2, \dots, Z_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_2, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$ mutuamente independentes, e definindo:*

$$Y_1 = U, \quad Y_2 = (1 - U)Z_2, \quad \dots, \quad Y_k = (1 - U)Z_k$$

então $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$.

Corolário B.1.9 *Seja $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$*

1. *Da proposição B.1.6, $Y_1 \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha - \alpha_1)$, onde $\alpha = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i$.*
2. *Este último junto com a proposição B.1.5, resulta em $(Y_1, \dots, Y_r) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \alpha - \sum_{i=1}^r \alpha_i)$, onde $r < k$.*
3. *Uma extensão mais geral é dada pela proposição B.1.5 e a proposição B.1.7. Para qualquer subconjunto $\{i_1, \dots, i_r\}$ de $\{1, 2, \dots, k+1\}$ tem-se $(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k}) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha - \sum_{i=1}^r \alpha_{i_r})$.*

O resultado seguinte é consequência das proposições B.1.6 e B.1.7.

Proposição B.1.10 *Seja $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$. Então, para qualquer inteiro r , tal que $2 \leq r \leq k$ tem-se que o vetor*

$$\mathbf{Z} = \left(\frac{Y_r}{1 - Y_1 - \dots - Y_{r-1}}, \dots, \frac{Y_k}{1 - Y_1 - \dots - Y_{r-1}} \right)$$

independente do vetor $(Y_1, \dots, Y_{r-1})$.

Também $\mathbf{Z} \sim \mathcal{D}_S(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$.

Proposição B.1.11 *Sejam $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$, e $r_1, \dots, r_{l+1}$ inteiros tais que $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{l+1} = k + 1$. Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{r_1} Y_i, \sum_{i=r_1+1}^{r_2} Y_i, \dots, \sum_{i=r_{l-1}+1}^{r_l} Y_i \right) \sim \mathcal{D} \left(\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i, \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \alpha_i, \dots, \sum_{i=r_{l-1}+1}^{r_l} \alpha_i; \sum_{i=r_l+1}^k \alpha_i \right)$$

A distribuição de Dirichlet pode, também, ser definida em termos de variáveis aleatórias Gamma mutuamente independentes.

Proposição B.1.12 *Sejam $Z_1, \dots, Z_{k+1}$ variáveis aleatórias mutuamente independentes com distribuição $\text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2, \dots, k + 1$, onde $\alpha_i, \beta > 0$, $i = 1, 2, \dots, k + 1$.*

Sejam $Z = \sum_{i=1}^{k+1} Z_i$ e $Y_i = Z_i/Z$, $i = 1, 2, \dots, k + 1$.

Então $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$ e $(Y_1, \dots, Y_k)$ é independente de Z .

Vale, também, a recíproca da última proposição.

Proposição B.1.13 *Se $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, $\alpha = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i > 0$ e Z é independente de $(Y_1, \dots, Y_k) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha_{k+1})$, então as variáveis aleatórias $Z_i = ZY_i$, $i = 1, \dots, k$ e $Z_{k+1} = Z \left(1 - \sum_{i=1}^k Y_i \right)$ são mutuamente independentes e $Z_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, \dots, k + 1$.*

Da proposição B.1.12, obtém-se o seguinte.

Corolário B.1.14 *Sejam $Z_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \beta)$ e $Z_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta)$ independentes. Então $Z_1/(Z_1 + Z_2)$ e $Z_1 + Z_2$ são independentes. Também $Z_1/(Z_1 + Z_2) \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$ e $Z_1 + Z_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.*

Para maiores detalhes sobre a distribuição de Dirichlet, em particular demonstrações desses resultados, ver Wilks [40], Basu e Tiwari [6] e Pereira e Basu [26].

B.2 Os processos empíricos na estatística não-paramétrica

Considerando (ξ_i) seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de distribuição F , para cada amostra de tamanho n , $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, a correspondente função de distribuição empírica F_n é construída colocando em cada observação ξ_i uma massa $1/n$. Assim F_n pode ser representada como

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\xi_i \leq t), \quad t \in \mathbb{R}$$

onde $\mathbb{I}(A)$ é a função indicadora do conjunto A .

Para cada amostra fixada $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $F_n(\cdot)$ é uma função de distribuição considerada como uma função de t . Por outro lado, para cada valor de t fixado, $F_n(t)$ é uma variável aleatória, considerada como uma função da amostra. Considerando ambas características em conjunto, $F_n(\cdot)$ é uma função de distribuição aleatória e pode ser tratada, então, como um particular processo estocástico, isto é, um elemento aleatório de um apropriado espaço de funções.

B.2.1 $F_n(t)$ como um estimador pontual de $F(t)$

O aspecto mais simples de F_n é que, para cada t fixado, $F_n(t)$ serve como um estimador de $F(t)$. Por exemplo, $F_n(t)$ é não-viesado, isto é, $\mathbb{E}F_n(t) = F(t)$. Também $\text{Var}F_n(t) = \frac{F(t)(1-F(t))}{n}$ converge a zero, quando $n \rightarrow \infty$.

Logo, $F_n(t)$ é consistente em média quadrática para estimação de $F(t)$. Além disso, aplicando a lei forte dos grandes números, $F_n(t)$ é fortemente consistente, isto é, $F_n(t) \rightarrow F(t)$ com probabilidade 1. Esta última convergência é uniformemente em t (ver seção B.2.2).

A distribuição exata de $nF_n(t)$ é simplesmente Binomial($n, F(t)$) e, imediatamente do teorema do limite central, a distribuição assintótica é dada por:

Para cada t fixado, $-\infty < t < \infty$,

$$n^{1/2}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, F(t)(1 - F(t)))$$

Essa convergência pode ser colocada, também, em termos da teoria de processos empíricos.

B.2.2 A distância de Kolmogorov-Smirnov

Além de considerar, para cada t , $F_n(t)$ um estimador pontual de $F(t)$, é, também, de interesse caracterizar globalmente a estimação de F por F_n . Para isso, uma medida de cercania de F_n a F muito útil é a chamada distância de Kolmogorov-Smirnov

$$\|F_n - F\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$$

Essa medida é utilizada na construção de bandas de confiança para $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, como também na construção dos testes de aderência baseados na função de distribuição empírica.

Foram estabelecidas desigualdades de probabilidade, convergência quase certa e lei do logaritmo iterado, para a distância de Kolmogorov-Smirnov.

No caso unidimensional, uma desigualdade de probabilidade do tipo exponencial é a seguinte:

Teorema B.2.1 (Dvoretzky, Kiefer e Wolfowitz) *Seja F uma função de distribuição definida sobre $\mathbb{R}$. Existe uma constante C (finita que não depende de F) tal que*

$$\Pr(\|F_n - F\|_\infty > d) \leq Ce^{-2nd^2}, \text{ onde } d > 0$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

A desigualdade anterior pode ser colocada na forma

$$\Pr(n^{1/2}\|F_n - F\|_\infty > d) \leq Ce^{-2d^2}, \text{ onde } d > 0$$

para todo $n = 1, 2, \dots$. Assim, a sequência $(n^{1/2}\|F_n - F\|_\infty > d)_n$ é limitada em probabilidade, escrita

$$n^{1/2}\|F_n - F\|_\infty = O_P(1)$$

A convergência quase-certa de $\|F_n - F\|_\infty$ é estabelecida no seguinte teorema:

Teorema B.2.2 (Glivenko-Cantelli)

$$\|F_n - F\|_\infty = \sup_t |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0 \text{ com probabilidade } 1$$

As flutuações extremas na convergência de $\|F_n - F\|_\infty$ a 0 são caracterizadas pela seguinte lei do logaritmo iterado.

Teorema B.2.3 Com probabilidade 1,

$$\lim_{n \uparrow \infty} \frac{n^{1/2} \|F_n - F\|_\infty}{(2 \log \log n)^{1/2}} = c(F)$$

onde $c(F) = \sup_t \{F(T)(1 - F(t))\}^{1/2}$.

Se F é contínua então $c(F) = 1/2$ e

$$n^{1/2} \|F_n - F\|_\infty = O((\log \log n)^{1/2})$$

$$\text{ou } \|F_n - F\|_\infty = O\left(\left(\frac{\log \log n}{n}\right)^{1/2}\right)$$

Para maiores detalhes dos tópicos tratados neste apêndice, algumas referências são Billingsley [7], Serfling [34], Pollard [28] e Tsai e Crowley [38].

B.3 Métodos numéricos de integração

O problema aqui é o cálculo de

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt, \quad a \leq x \leq b \quad (\text{B.3.1})$$

Pode-se, também, considerar momentaneamente uma integral indefinida mais complicada, em que o integrando também depende de x :

$$F(x) = \int_a^x f(x, t) \, dt, \quad a \leq x \leq b \quad (\text{B.3.2})$$

A integral (B.3.1) pode ser considerada por vários pontos de vista. Estes incluem (1) tomar (B.3.1) como uma integral definida sobre uma escala variável e (2) tomar $F(x)$ como a solução da equação diferencial

$$\frac{dF}{dx} = f(x), \quad F(a) = 0 \quad (\text{B.3.3})$$

Uma abordagem simples (e muito satisfatória) consiste em dividir o intervalo de integração $a \leq x \leq b$ em sub-intervalos e aplicar uma regra de integração aproximada para cada sub-intervalo. A regra de Simpson é muito usada para essa finalidade apesar do fato de avançar a integração em duas etapas de cada vez. Inicialmente, usa-se a seguinte regra:

$$\int_a^{a+h} f(x) \, dx \approx \frac{h}{12} [5f(a) + 8f(a+h) - f(a+2h)] \quad (\text{B.3.4})$$

B.3.1 Integração indefinida via equações diferenciais

Algumas técnicas padrões são reduzidas a técnicas familiares. Considere o método clássico de Runge-Kutta para solução de

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{B.3.5})$$

as fórmulas relevantes são

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= g(x_m, y_m), \quad k_3 = g\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_2}{2}\right) \\ k_2 &= g\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_1}{2}\right), \quad k_4 = g(x_m + h, y_m + hk_3) \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

Aqui y_m é o valor calculado para solução em x_m e $x_{m+1} - x_m = h$, onde $g(x, y) = f(x)$, estas fórmulas são reduzidas para

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \left[f(x_m) + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}\right) + f(x_m + h) \right] \quad (\text{B.3.7})$$

Isto é equivalente a

$$\inf_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) \, dx \approx \frac{h}{6} \left[f(x_m) + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}\right) + f(x_m + h) \right] \quad (\text{B.3.8})$$

que é simplesmente a regra de Simpson aplicada ao $[x_m, x_{m+1}]$.

Outra regra de Runge-Kutta pode reduzir para uma integração de ordem maior quando g é independente de y . Por exemplo, King desenvolveu a regra de Runge-Kutta reduzida para quinta ordem da integração de Radau e sexta ordem para integração de Lobatto.

Para mais detalhes e outros métodos numéricos de integração veja Davis e Rabinowitz [12].

B.4 Teoremas utilizados

Teorema B.4.1 (Teorema 3.3.1 de Salinas-Torres [32]) *Sejam $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ espaço mensurável, α_1 e α_2 medidas finitas, não-nulas, não-negativas e finitamente aditivas sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.*

Sejam ρ , P_1 e P_2 elementos aleatórios definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \sigma(\Omega), \eta_{\alpha_1, \alpha_2})$, tais que $\rho \amalg P_1 \amalg P_2 \mid (\alpha_1, \alpha_2)$, sendo ρ uma variável aleatória com

distribuição Beta de parâmetros $\alpha_1(\mathcal{X})$ e $\alpha_2(\mathcal{X})$, $\rho \sim \text{Beta}(\alpha_1(\mathcal{X}), \alpha_2(\mathcal{X}))$, e $P_i \in \mathcal{D}(\alpha_i)$, $i = 1, 2$.

Seja $\mathbf{P}$ a função mensurável de $(\Omega, \sigma(\Omega), \eta_{\alpha_1, \alpha_2})$ em $(\mathcal{P}^*, \sigma(\mathcal{P}^*))$, ou equivalentemente o processo estocástico bidimensional $\{\mathbf{P}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ definido por

$$\mathbf{P}(\omega, A) = (\rho(\omega)P_1(\omega, A), (1 - \rho)(\omega)P_2(\omega, A)) \quad (\text{B.4.2})$$

onde $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{A}$.

Então $\mathbf{P} \in \mathcal{DB}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Teorema B.4.3 (Teorema 3.4.1 de Salinas-Torres [32]) *Sejam $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ espaço mensurável, a função $\vec{\alpha} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)^r$, dada por $\vec{\alpha}(A) = (\alpha_1(A), \alpha_2(A), \dots, \alpha_r(A))$, e $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$; P_i , $i = 1, \dots, r$ elementos aleatórios definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \sigma(\Omega), \eta_{\vec{\alpha}})$, tais que $\rho \amalg P_1 \amalg P_2 \amalg \dots \amalg P_r \mid \vec{\alpha}$, com $\rho \sim \mathcal{D}_S(\alpha_1(\mathcal{X}, \dots, \mathcal{X}))$ e $P_i \in \mathcal{D}(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, r$.*

Seja $\mathbf{P}$ a função mensurável de $(\Omega, \sigma(\Omega), \eta_{\vec{\alpha}})$ em $(\mathcal{P}^*, \sigma(\mathcal{P}^*))$ ou equivalentemente o processo estocástico r -dimensional $\{\mathbf{P}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ definido por

$$\mathbf{P}(\omega, A) = (\rho_1(\omega)P_1(\omega, A), \dots, \rho_r(\omega)P_r(\omega, A)) \quad (\text{B.4.4})$$

onde $\omega \in \Omega$, e $A \in \mathcal{A}$.

Então $\mathbf{P} \in \mathcal{DM}_r(\vec{\alpha})$.

Teorema B.4.5 (Teorema 6.27 de Rudin [31]) *Se f é uma função real com variação limitada em $[a, b]$, então existem funções monótonas crescentes p e q em $[a, b]$, com $p(a) = q(a) = 0$, tal que*

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= p(x) - q(x) \\ v_f(x) &= p(x) + q(x) \quad (a \leq x \leq b) \end{aligned}$$

Corolário B.4.6 *Se f é também contínua em $[a, b]$, então p e q também são.*

Teorema B.4.7 (Teorema 6.9 de Rudin [31]) *Se f é monótona em $[a, b]$, e se α é contínua em $[a, b]$, então $f \in R(\alpha)$. ($f \in R(\alpha)$ indica que f é Riemann-integrável e R denota o espaço de funções Riemann-integráveis)*

Teorema B.4.8 (Teorema 6.33 de Rudin [31]) *Supondo-se que f e ϕ são contínuas em $[a, b]$, ϕ é estritamente crescente em $[a, b]$, e Φ é a função inversa de ϕ . Então*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\Phi(y)) \, d\Phi(y)$$

APÊNDICE C – Exemplo

C.1 Amostras e gráficos do exemplo da seção 4.1.2

Amostras de Z_i e δ_i , $i = 1, \dots, 10$ e a estimativa de $\hat{\rho}$ para esta amostra.

```
> z
      Z delta
[1,] 1.1273903    2
[2,] 0.9442242    2
[3,] 1.0299382    1
[4,] 1.5913832    1
[5,] 2.0383351    1
[6,] 0.6304353    2
[7,] 0.7217931    1
[8,] 1.1903208    1
[9,] 0.9919431    2
[10,] 0.8111522    2

> rho.i(z,1)
[1] 0.5416667
```

Amostras de Z_i e δ_i , $i = 1, \dots, 30$ e a estimativa de $\hat{\rho}$ para esta amostra.

```
> z
      Z delta      Z delta
[1,] 0.8280039    2 [16,] 2.3433584    1
[2,] 0.9775916    2 [17,] 1.5439594    1
[3,] 2.1782416    1 [18,] 1.8173165    2
[4,] 1.5237099    2 [19,] 0.3829893    1
[5,] 0.8866697    2 [20,] 1.0975677    2
[6,] 0.7467799    2 [21,] 1.4679864    2
[7,] 2.1573381    1 [22,] 0.7350122    1
[8,] 0.9815519    2 [23,] 1.9158927    1
```

```

[9,] 2.9736441 1 [24,] 4.0169205 1
[10,] 1.1544777 1 [25,] 1.2338496 2
[11,] 0.8707948 1 [26,] 1.2876767 1
[12,] 2.6427095 1 [27,] 1.0231098 2
[13,] 0.7597167 2 [28,] 0.9177738 2
[14,] 0.5645149 2 [29,] 2.2523574 2
[15,] 1.7880444 1 [30,] 0.7968421 2

```

```

> rho.i(z,1)
[1] 0.4833333

```

Amostras de Z_i e δ_i , $i = 1, \dots, 1000$ e a estimativa de $\hat{\rho}$ para esta amostra.

```

> z
      Z      d      Z      d      Z      d
[1,] 0.9035898 2 [335,] 2.9128503 1 [668,] 0.7506815 1
[2,] 1.4272053 2 [336,] 0.8163355 2 [669,] 2.1930065 2
[3,] 1.9295399 1 [337,] 1.2804781 1 [670,] 0.1868816 1
[4,] 0.9536760 2 [338,] 0.9729918 2 [671,] 0.5784544 2
[5,] 0.3491210 2 [339,] 1.8051984 2 [672,] 0.9326961 2
[6,] 2.0524130 1 [340,] 0.7426274 1 [673,] 1.2124293 2
[7,] 0.2986192 2 [341,] 0.7701579 1 [674,] 1.0986794 2
[8,] 1.4144729 2 [342,] 0.6008533 1 [675,] 0.5870925 1
[9,] 1.7218237 2 [343,] 1.2923835 1 [676,] 1.2152713 2
[10,] 0.5586194 2 [344,] 2.8668795 1 [677,] 1.3713345 2
[11,] 1.5315764 1 [345,] 1.5146949 2 [678,] 0.5814936 1
[12,] 0.8159888 1 [346,] 1.1009080 2 [679,] 0.4895974 1
[13,] 2.0088197 1 [347,] 1.5153073 1 [680,] 1.2242878 2
[14,] 2.5262623 1 [348,] 0.4806516 1 [681,] 0.5532706 1
[15,] 5.3994650 1 [349,] 1.0234225 1 [682,] 1.7947624 2
[16,] 0.8192384 1 [350,] 0.3107359 2 [683,] 1.6389506 2
[17,] 1.3508385 2 [351,] 0.2961689 2 [684,] 0.3752842 2
[18,] 1.2359925 1 [352,] 1.2834466 1 [685,] 1.8523714 2
[19,] 1.1373282 2 [353,] 1.5620411 1 [686,] 1.4665339 1
[20,] 1.0891447 1 [354,] 4.5185350 1 [687,] 1.5955397 1
[21,] 0.6946521 2 [355,] 3.4104029 1 [688,] 1.2697283 2
[22,] 1.2846176 1 [356,] 2.0355537 1 [689,] 0.8912024 1
[23,] 1.3354632 2 [357,] 0.3632922 1 [690,] 1.5033413 1
[24,] 5.6254021 1 [358,] 0.3176428 1 [691,] 0.4789221 1
[25,] 2.1758999 1 [359,] 2.4316836 1 [692,] 1.1956698 2
[26,] 0.7813660 1 [360,] 1.3358394 2 [693,] 1.2230083 2
[27,] 0.3186252 2 [361,] 0.1777690 1 [694,] 0.9118666 1
[28,] 0.4096501 1 [362,] 5.3415521 1 [695,] 0.8717903 1

```

[29,] 0.7014584 2 [363,] 1.3160723 2 [696,] 0.8952682 2
 [30,] 1.5585991 2 [364,] 1.2568850 2 [697,] 1.1668642 1
 [31,] 1.1625754 2 [365,] 2.6580842 1 [698,] 0.8243004 1
 [32,] 1.2940730 1 [366,] 2.1990040 1 [699,] 1.3520214 2
 [33,] 1.0337310 2 [367,] 2.2698540 2 [700,] 0.9860976 1
 [34,] 0.9741668 2 [368,] 1.0059622 2 [701,] 1.2284881 2
 [35,] 1.2855077 1 [369,] 0.5481647 1 [702,] 2.7361318 1
 [36,] 1.5078800 2 [370,] 0.6163382 2 [703,] 0.7173593 2
 [37,] 0.3857656 2 [371,] 0.5053808 1 [704,] 1.0860436 1
 [38,] 1.2655985 1 [372,] 1.1163748 2 [705,] 1.5536127 2
 [39,] 2.2176968 1 [373,] 1.4431265 2 [706,] 1.3189345 2
 [40,] 0.5350143 2 [374,] 0.2262692 2 [707,] 0.7927627 1
 [41,] 2.7738616 2 [375,] 0.2819702 2 [708,] 0.8389112 2
 [42,] 0.9690275 1 [376,] 1.7484176 1 [709,] 2.0505167 1
 [43,] 0.7417068 1 [377,] 1.1031108 2 [710,] 1.7322620 2
 [44,] 1.2860698 2 [378,] 0.5129624 2 [711,] 0.4476924 2
 [45,] 2.1037960 1 [379,] 0.9727276 2 [712,] 0.2058658 1
 [46,] 1.5700622 1 [380,] 0.7842318 2 [713,] 2.4101415 1
 [47,] 0.7193958 2 [381,] 0.7121279 1 [714,] 2.4322792 1
 [48,] 3.6953371 1 [382,] 1.1524276 2 [715,] 1.2324532 2
 [49,] 1.4431404 1 [383,] 0.4548725 2 [716,] 1.3991863 1
 [50,] 1.3736349 2 [384,] 1.2722588 2 [717,] 0.4090587 1
 [51,] 1.5204607 1 [385,] 0.5394533 1 [718,] 1.0148758 1
 [52,] 2.5456297 1 [386,] 1.1077563 2 [719,] 1.1015588 2
 [53,] 2.7207117 1 [387,] 0.9896824 2 [720,] 1.2820189 1
 [54,] 1.1326470 1 [388,] 1.0979739 1 [721,] 0.7598713 2
 [55,] 1.2387080 2 [389,] 0.7056407 1 [722,] 0.9031390 1
 [56,] 1.5274235 1 [390,] 3.8505594 1 [723,] 0.7233212 1
 [57,] 3.7260802 1 [391,] 1.4296881 2 [724,] 0.2233966 2
 [58,] 1.1546230 1 [392,] 1.5112406 2 [725,] 2.2944023 1
 [59,] 1.3693036 1 [393,] 1.7200293 1 [726,] 0.4978487 1
 [60,] 1.1316192 2 [394,] 1.1065628 2 [727,] 1.3592797 2
 [61,] 1.6641743 1 [395,] 0.3424920 2 [728,] 2.0181363 2
 [62,] 1.6473986 1 [396,] 0.4810234 1 [729,] 0.4809787 1
 [63,] 1.0641696 1 [397,] 0.9322654 2 [730,] 1.0360133 2
 [64,] 0.5560276 2 [398,] 1.1083495 2 [731,] 1.7943178 1
 [65,] 1.3719356 1 [399,] 0.9016183 2 [732,] 0.6970825 2
 [66,] 1.1125722 2 [400,] 1.8308627 1 [733,] 1.7393613 1
 [67,] 1.6683156 2 [401,] 1.4229250 2 [734,] 1.9069842 1
 [68,] 0.3962672 1 [402,] 1.6865772 1 [735,] 0.2838016 2
 [69,] 2.9521083 1 [403,] 0.8682218 2 [736,] 2.1818716 1
 [70,] 0.8819846 2 [404,] 0.3008814 1 [737,] 2.2856345 1
 [71,] 0.9674008 2 [405,] 1.5488936 1 [738,] 4.7594942 1

[72,] 0.6841801 2 [406,] 1.2324010 2 [739,] 0.9885866 2
 [73,] 0.5543021 2 [407,] 1.1452873 2 [740,] 0.8325515 2
 [74,] 4.0905112 1 [408,] 1.8061113 1 [741,] 1.1510487 1
 [75,] 3.6715879 1 [409,] 1.5418320 2 [742,] 1.2531845 2
 [76,] 2.5608754 1 [410,] 0.8585011 2 [743,] 1.1515215 2
 [77,] 0.5274262 2 [411,] 1.6513166 1 [744,] 1.3018691 2
 [78,] 1.0564218 1 [412,] 0.4874590 2 [745,] 0.8159118 2
 [79,] 0.9018163 2 [413,] 1.5627472 2 [746,] 1.4029721 1
 [80,] 1.0217924 2 [414,] 0.4950663 2 [747,] 0.3662810 2
 [81,] 2.8836662 1 [415,] 0.9673306 2 [748,] 1.6998615 1
 [82,] 1.7733992 2 [416,] 0.4785259 2 [749,] 0.2602450 2
 [83,] 0.7942171 1 [417,] 1.1876874 1 [750,] 1.4428570 2
 [84,] 3.6475688 1 [418,] 3.8408895 1 [751,] 4.7559715 1
 [85,] 1.3622831 2 [419,] 0.8403856 2 [752,] 0.6522419 2
 [86,] 1.0560233 1 [420,] 1.9423521 2 [753,] 2.0473396 1
 [87,] 1.7514844 1 [421,] 1.8899281 2 [754,] 1.4579771 1
 [88,] 1.2205626 2 [422,] 1.5223233 2 [755,] 0.3227970 2
 [89,] 1.0065884 2 [423,] 1.5004734 1 [756,] 1.7275779 1
 [90,] 1.3101006 1 [424,] 1.5181529 1 [757,] 1.7300175 2
 [91,] 2.0119067 2 [425,] 0.8590055 2 [758,] 1.9915917 2
 [92,] 0.8388567 1 [426,] 0.9827953 2 [759,] 0.6978241 2
 [93,] 1.5733259 1 [427,] 1.1920725 2 [760,] 1.6243064 2
 [94,] 3.5431980 1 [428,] 0.6632649 2 [761,] 1.9895847 1
 [95,] 0.3443123 2 [429,] 0.5051142 2 [762,] 0.5623234 1
 [96,] 0.5081240 1 [430,] 4.0924383 1 [763,] 1.1614161 1
 [97,] 0.4659370 1 [431,] 0.6767547 2 [764,] 2.0910802 1
 [98,] 0.8143894 1 [432,] 1.0913771 2 [765,] 0.5784403 2
 [99,] 0.2580310 2 [433,] 0.2865858 1 [766,] 1.2596141 2
 [100,] 0.9241639 2 [434,] 0.5451089 1 [767,] 3.5521465 1
 [101,] 1.1822978 2 [435,] 0.5507777 2 [768,] 1.4025998 1
 [102,] 0.6300386 1 [436,] 1.8526404 1 [769,] 0.4222824 1
 [103,] 1.7259375 2 [437,] 0.3687350 2 [770,] 0.9527960 2
 [104,] 0.8400183 2 [438,] 2.0210042 1 [771,] 4.0060681 1
 [105,] 0.7073380 2 [439,] 1.0083537 2 [772,] 2.2929437 1
 [106,] 2.2306449 1 [440,] 1.8170068 2 [773,] 0.5520099 2
 [107,] 0.2171842 2 [441,] 2.7189158 1 [774,] 0.4750676 2
 [108,] 1.2495601 2 [442,] 0.8506337 1 [775,] 0.7758519 1
 [109,] 1.5052348 2 [443,] 1.6099216 1 [776,] 5.4695083 1
 [110,] 2.3355975 1 [444,] 1.2314069 2 [777,] 1.0295417 2
 [111,] 2.0897191 2 [445,] 3.2362605 1 [778,] 1.8014985 2
 [112,] 1.2013721 2 [446,] 0.9710558 2 [779,] 0.5892102 1
 [113,] 1.9603727 2 [447,] 3.9947518 1 [780,] 4.4018942 1
 [114,] 0.5500469 1 [448,] 0.8387305 2 [781,] 2.7627288 1

[115,] 0.3374646 1 [449,] 0.6043903 2 [782,] 1.9680920 2
 [116,] 1.4504841 1 [450,] 1.9745495 1 [783,] 1.0195579 2
 [117,] 0.9733430 1 [451,] 1.5828660 2 [784,] 0.3814848 1
 [118,] 1.3141655 1 [452,] 0.9882153 2 [785,] 1.7760067 1
 [119,] 1.3898985 2 [453,] 0.5671090 2 [786,] 0.6695587 2
 [120,] 1.1045081 1 [454,] 0.7771933 2 [787,] 0.7435144 2
 [121,] 0.8308305 2 [455,] 0.8838170 2 [788,] 1.4146029 2
 [122,] 0.7083517 2 [456,] 1.2670658 2 [789,] 0.6887215 2
 [123,] 1.1383621 1 [457,] 0.5796035 2 [790,] 1.2620303 2
 [124,] 1.5364954 1 [458,] 0.7448418 2 [791,] 1.7341694 1
 [125,] 5.9916699 1 [459,] 0.7311614 1 [792,] 0.9098773 2
 [126,] 2.5168194 1 [460,] 1.3654788 2 [793,] 0.7561740 1
 [127,] 2.5934833 1 [461,] 1.3579539 2 [794,] 0.2932079 2
 [128,] 0.7255639 2 [462,] 0.7391776 2 [795,] 1.1623009 2
 [129,] 1.1167902 1 [463,] 1.6068019 1 [796,] 0.9844036 1
 [130,] 0.2975171 2 [464,] 1.1460230 2 [797,] 1.6121236 2
 [131,] 1.8026353 2 [465,] 1.3675446 1 [798,] 1.0092917 2
 [132,] 1.9116801 1 [466,] 1.2380706 2 [799,] 3.4622844 1
 [133,] 1.6237979 1 [467,] 0.5525417 2 [800,] 2.2395835 1
 [134,] 1.1626359 2 [468,] 0.9973562 2 [801,] 0.9601742 1
 [135,] 1.1677366 1 [469,] 0.8456935 2 [802,] 5.5393877 1
 [136,] 1.7424658 1 [470,] 0.7332857 2 [803,] 1.2132847 1
 [137,] 0.4196428 2 [471,] 1.1165576 1 [804,] 2.9688037 1
 [138,] 1.2869091 2 [472,] 2.1117379 1 [805,] 0.2458175 2
 [139,] 1.0626198 2 [473,] 0.4841011 2 [806,] 0.1814536 1
 [140,] 2.2485291 1 [474,] 0.3760807 2 [807,] 1.1359371 2
 [141,] 0.4618837 2 [475,] 1.1726946 2 [808,] 0.9148354 2
 [142,] 3.4003618 1 [476,] 1.0151586 2 [809,] 0.5350658 2
 [143,] 1.1148942 2 [477,] 2.7196892 1 [810,] 3.8820620 1
 [144,] 1.9778296 2 [478,] 1.7964268 2 [811,] 0.6890170 1
 [145,] 0.7028104 2 [479,] 0.9629165 2 [812,] 1.5109123 1
 [146,] 2.1381343 1 [480,] 1.8305583 2 [813,] 0.5370113 2
 [147,] 0.7895367 2 [481,] 1.9176950 1 [814,] 0.7650393 2
 [148,] 1.1451826 1 [482,] 4.4375620 1 [815,] 0.5197113 2
 [149,] 0.9446236 1 [483,] 0.6971740 2 [816,] 0.4129860 1
 [150,] 1.3293889 2 [484,] 1.1321839 2 [817,] 1.2672136 1
 [151,] 1.2385189 2 [485,] 0.3039814 2 [818,] 0.8157629 2
 [152,] 1.1052237 1 [486,] 1.1102669 1 [819,] 1.0400045 2
 [153,] 1.4919754 2 [487,] 0.3654373 2 [820,] 1.0506708 1
 [154,] 0.5262652 2 [488,] 2.2218114 1 [821,] 1.4876228 2
 [155,] 0.6301098 2 [489,] 1.3112807 2 [822,] 1.2743251 1
 [156,] 0.3623713 1 [490,] 1.5545572 2 [823,] 1.1922019 1
 [157,] 1.4791184 2 [491,] 1.3770591 1 [824,] 1.3832626 2

[158,] 1.0432233 2 [492,] 0.9291034 2 [825,] 1.2123132 2
 [159,] 0.6529326 2 [493,] 1.2541570 1 [826,] 2.1730375 1
 [160,] 0.8975402 1 [494,] 1.2869766 2 [827,] 1.0598934 1
 [161,] 1.0334499 1 [495,] 1.4453831 2 [828,] 2.3143653 1
 [162,] 0.7988601 2 [496,] 1.2866929 2 [829,] 0.1801423 2
 [163,] 0.6458595 2 [497,] 1.7594133 2 [830,] 3.3531889 1
 [164,] 0.6577294 2 [498,] 1.6610143 2 [831,] 0.9386465 1
 [165,] 1.1621031 2 [499,] 1.5388573 2 [832,] 1.3967462 2
 [166,] 1.9968050 1 [500,] 1.4984333 2 [833,] 0.7923860 2
 [167,] 0.9058078 2 [501,] 1.7511810 2 [834,] 1.0506751 2
 [168,] 1.3929273 1 [502,] 2.5032296 1 [835,] 0.8461283 2
 [169,] 0.6326391 2 [503,] 0.3848877 2 [836,] 0.7622597 2
 [170,] 0.8818973 2 [504,] 0.9075498 1 [837,] 1.1890886 1
 [171,] 1.0769124 2 [505,] 1.0572760 1 [838,] 1.8322822 2
 [172,] 0.7162967 2 [506,] 2.3526591 1 [839,] 0.3859770 1
 [173,] 0.9626376 1 [507,] 0.9798428 1 [840,] 0.8648129 2
 [174,] 1.3503006 1 [508,] 1.2223572 2 [841,] 0.6475979 2
 [175,] 1.6399496 2 [509,] 0.7875131 2 [842,] 0.7233643 1
 [176,] 0.5718177 2 [510,] 2.6042795 1 [843,] 1.4295563 2
 [177,] 1.7677453 1 [511,] 4.2414901 1 [844,] 2.0072513 1
 [178,] 1.2773903 2 [512,] 1.1987508 1 [845,] 1.7273722 2
 [179,] 1.3393293 1 [513,] 0.7807426 2 [846,] 1.4450685 2
 [180,] 0.8794253 1 [514,] 1.6364665 2 [847,] 0.8299917 2
 [181,] 0.5164398 1 [515,] 0.4148101 2 [848,] 1.1808098 2
 [182,] 2.2769171 1 [516,] 0.9820605 1 [849,] 1.9644696 1
 [183,] 0.8409501 2 [517,] 3.8675778 1 [850,] 0.6596977 1
 [184,] 0.6374228 1 [518,] 1.4968643 1 [851,] 1.9523871 2
 [185,] 1.4042317 1 [519,] 1.7189964 2 [852,] 1.9226851 1
 [186,] 0.9194214 2 [520,] 1.0622646 1 [853,] 1.7009279 1
 [187,] 2.9447605 1 [521,] 0.6723147 2 [854,] 0.6318618 2
 [188,] 1.7742767 1 [522,] 2.2041894 2 [855,] 1.2344035 2
 [189,] 1.8276830 2 [523,] 2.2720414 1 [856,] 0.9089178 2
 [190,] 1.0159813 1 [524,] 1.8389528 2 [857,] 0.9672822 2
 [191,] 1.9869117 1 [525,] 4.4526013 1 [858,] 0.7322049 2
 [192,] 3.4789013 1 [526,] 1.4184425 2 [859,] 0.8784808 1
 [193,] 1.3132593 2 [527,] 1.2867026 2 [860,] 4.6577656 1
 [194,] 0.7826599 2 [528,] 0.6555475 2 [861,] 1.0965161 2
 [195,] 1.0076336 2 [529,] 1.7509020 1 [862,] 0.6039001 1
 [196,] 1.4496431 2 [530,] 1.7451488 2 [863,] 1.1129377 1
 [197,] 0.7133944 2 [531,] 1.0429368 1 [864,] 1.0895095 2
 [198,] 1.1419814 1 [532,] 1.1826974 2 [865,] 2.4153290 1
 [199,] 0.9456377 2 [533,] 0.5146810 1 [866,] 1.7536882 1
 [200,] 0.8463619 2 [534,] 1.4821670 1 [867,] 1.5095813 2

[201,] 1.5044525 1 [535,] 3.3744280 1 [868,] 0.9217876 2
 [202,] 1.6814828 2 [536,] 1.8211006 2 [869,] 0.9245896 1
 [203,] 1.0882843 2 [537,] 0.7932565 2 [870,] 1.7032504 1
 [204,] 0.5592361 2 [538,] 0.7099992 2 [871,] 1.2278274 2
 [205,] 3.4115279 1 [539,] 1.2239565 2 [872,] 1.7638328 1
 [206,] 1.3004045 2 [540,] 1.6238471 1 [873,] 0.7843965 1
 [207,] 1.2982935 2 [541,] 2.0696145 1 [874,] 0.5368523 1
 [208,] 1.2532606 2 [542,] 1.3452124 1 [875,] 2.4970094 1
 [209,] 0.8820138 2 [543,] 1.4705216 2 [876,] 3.2552525 1
 [210,] 0.3046049 2 [544,] 0.9885642 1 [877,] 2.2770169 2
 [211,] 0.7913396 2 [545,] 1.5247639 1 [878,] 0.5918014 2
 [212,] 2.9498415 1 [546,] 1.0190280 2 [879,] 1.1302740 2
 [213,] 2.5607374 1 [547,] 1.4374783 2 [880,] 1.4003133 1
 [214,] 0.6587800 2 [548,] 1.6284262 1 [881,] 4.1118945 1
 [215,] 1.0618573 2 [549,] 1.9380208 1 [882,] 0.5174396 2
 [216,] 0.7353857 2 [550,] 2.2805878 1 [883,] 1.7110432 1
 [217,] 0.9541178 2 [551,] 1.2773907 2 [884,] 2.5787459 2
 [218,] 4.9170278 1 [552,] 0.8798584 2 [885,] 1.3006112 1
 [219,] 1.1538492 2 [553,] 1.1081581 2 [886,] 1.2786305 2
 [220,] 1.6649242 1 [554,] 1.0814934 2 [887,] 1.6456805 1
 [221,] 0.9284318 1 [555,] 0.6675477 2 [888,] 1.3030554 1
 [222,] 1.7040864 1 [556,] 1.3325785 1 [889,] 1.7833091 1
 [223,] 1.5868846 2 [557,] 0.3056758 1 [890,] 3.9430795 1
 [224,] 0.6385601 2 [558,] 1.6360333 2 [891,] 0.7000062 2
 [225,] 1.0727902 2 [559,] 0.5877449 1 [892,] 0.5308411 1
 [226,] 1.2735875 2 [560,] 5.0712106 1 [893,] 1.1157233 2
 [227,] 0.9852378 2 [561,] 0.3017379 1 [894,] 0.8114281 2
 [228,] 0.9559697 2 [562,] 0.8030489 1 [895,] 0.7280331 2
 [229,] 0.9148162 2 [563,] 1.7307909 2 [896,] 1.2895115 2
 [230,] 1.4499969 1 [564,] 2.4122935 1 [897,] 1.0953715 2
 [231,] 1.4834742 1 [565,] 1.7657002 2 [898,] 1.1706673 1
 [232,] 1.7998599 1 [566,] 1.2401356 2 [899,] 2.0076074 2
 [233,] 1.0835535 1 [567,] 3.2417602 1 [900,] 1.9796109 1
 [234,] 1.6296416 1 [568,] 1.1486977 1 [901,] 2.0195442 1
 [235,] 0.9356753 2 [569,] 1.3066775 1 [902,] 0.1678373 2
 [236,] 0.5718374 2 [570,] 0.9802944 2 [903,] 2.3228109 1
 [237,] 3.4205570 1 [571,] 0.8108773 2 [904,] 0.5959671 1
 [238,] 1.5730585 2 [572,] 1.3748722 1 [905,] 1.5246426 2
 [239,] 0.8673795 2 [573,] 1.6360115 2 [906,] 1.3192879 2
 [240,] 1.2234774 1 [574,] 1.4149591 1 [907,] 0.6212692 2
 [241,] 0.8423444 1 [575,] 1.0277879 2 [908,] 1.2644910 2
 [242,] 1.8182211 2 [576,] 1.2197879 2 [909,] 1.1988131 2
 [243,] 2.5096403 1 [577,] 2.2482171 1 [910,] 0.7171396 2

[244,]	0.6133317	2	[578,]	0.4485310	2	[911,]	2.2637716	1
[245,]	0.7088008	1	[579,]	4.0035117	1	[912,]	2.7398790	1
[246,]	0.8776962	2	[580,]	1.5606466	2	[913,]	1.6033315	2
[247,]	1.0196956	1	[581,]	1.5354443	1	[914,]	0.4462660	1
[248,]	0.9973540	2	[582,]	1.4217975	2	[915,]	0.2337285	2
[249,]	1.7855970	1	[583,]	1.3950307	2	[916,]	1.0039113	1
[250,]	1.8367985	2	[584,]	1.3050831	2	[917,]	0.8092620	2
[251,]	1.3293710	2	[585,]	1.4006342	1	[918,]	2.2135506	1
[252,]	2.3206185	1	[586,]	2.9233510	1	[919,]	1.6670929	1
[253,]	1.4792791	2	[587,]	0.6554963	2	[920,]	1.4408865	1
[254,]	0.7666959	2	[588,]	1.7759417	1	[921,]	1.3298329	2
[255,]	1.6668570	2	[589,]	1.2224289	2	[922,]	1.8568634	1
[256,]	1.7118257	2	[590,]	2.2906188	1	[923,]	0.9789577	1
[257,]	0.7647502	2	[591,]	0.5161475	1	[924,]	1.2378796	2
[258,]	3.3472225	1	[592,]	1.2509641	1	[925,]	1.7832427	2
[259,]	0.8821858	2	[593,]	0.9311468	2	[926,]	1.3507027	2
[260,]	0.8539277	1	[594,]	1.0171111	2	[927,]	0.5120572	1
[261,]	0.4707994	2	[595,]	0.2987810	1	[928,]	0.6284566	2
[262,]	3.4511207	1	[596,]	1.4728408	1	[929,]	0.4347824	2
[263,]	0.8229345	2	[597,]	1.4283302	2	[930,]	1.2064655	2
[264,]	2.3158704	1	[598,]	1.7278497	2	[931,]	1.4035447	1
[265,]	0.2912929	2	[599,]	1.2987946	2	[932,]	0.7645937	1
[266,]	3.5500918	1	[600,]	0.4291101	2	[933,]	3.2543638	1
[267,]	2.2319242	1	[601,]	0.8464743	2	[934,]	0.8841397	2
[268,]	1.1443565	2	[602,]	1.8485783	2	[935,]	1.2160123	2
[269,]	1.1203904	2	[603,]	0.7926908	1	[936,]	0.7923331	1
[270,]	1.3038055	2	[604,]	0.6734003	1	[937,]	2.0667050	1
[271,]	1.7567330	1	[605,]	1.6618567	2	[938,]	0.9864332	2
[272,]	0.9971471	1	[606,]	0.5707869	2	[939,]	0.9054524	2
[273,]	0.8235086	2	[607,]	2.2328008	1	[940,]	1.2999868	2
[274,]	0.9502230	2	[608,]	2.0579379	1	[941,]	1.2879210	2
[275,]	0.9401972	2	[609,]	0.8020505	2	[942,]	0.3747833	2
[276,]	1.2816070	2	[610,]	0.9692982	2	[943,]	0.8155822	1
[277,]	2.1762429	1	[611,]	2.3180950	1	[944,]	0.7380738	2
[278,]	0.7043008	2	[612,]	1.3056920	2	[945,]	1.4826889	2
[279,]	1.5497694	1	[613,]	0.4952070	2	[946,]	0.7311580	2
[280,]	1.4547491	2	[614,]	0.4516660	2	[947,]	1.0355640	2
[281,]	0.4524973	2	[615,]	0.9741137	2	[948,]	0.8900756	2
[282,]	0.7410920	2	[616,]	0.6009480	2	[949,]	0.6908126	2
[283,]	0.7642647	1	[617,]	1.9445322	2	[950,]	1.4584920	2
[284,]	1.2570120	2	[618,]	0.5625769	2	[951,]	0.4867504	2
[285,]	2.0147363	1	[619,]	2.8328445	1	[952,]	1.7686385	1
[286,]	0.4449360	1	[620,]	0.6466011	1	[953,]	2.6934283	1

[287,] 0.2226120 1 [621,] 2.2350072 1 [954,] 0.4194343 2
 [288,] 1.1927472 1 [622,] 0.6351260 2 [955,] 1.8637836 2
 [289,] 1.0508314 2 [623,] 1.0109262 2 [956,] 3.1772720 1
 [290,] 1.6527097 1 [624,] 1.6620367 1 [957,] 0.6733010 2
 [291,] 1.5466310 1 [625,] 2.6434889 1 [958,] 1.2642574 2
 [292,] 4.4427373 1 [626,] 0.8406447 1 [959,] 0.7186019 1
 [293,] 1.3703627 2 [627,] 1.3134029 1 [960,] 2.8496159 1
 [294,] 0.9974635 2 [628,] 1.8095537 1 [961,] 0.3838144 2
 [295,] 0.5516842 2 [629,] 1.7350018 2 [962,] 3.8578152 1
 [296,] 0.1973111 1 [630,] 2.3078962 1 [963,] 1.6987076 1
 [297,] 2.2214926 2 [631,] 1.5378563 1 [964,] 0.6108413 2
 [298,] 0.5115708 1 [632,] 0.9853285 1 [965,] 1.4180794 2
 [299,] 1.0713465 2 [633,] 3.1725721 1 [966,] 1.7601369 2
 [300,] 1.1123438 1 [634,] 0.7349487 2 [967,] 1.0789049 2
 [301,] 1.6072559 1 [635,] 1.3445066 2 [968,] 0.6687427 1
 [302,] 0.9046297 1 [636,] 0.5888256 1 [969,] 0.4609979 2
 [303,] 1.0126615 2 [637,] 0.6795303 2 [970,] 1.1025523 2
 [304,] 0.6555719 2 [638,] 0.8107196 1 [971,] 1.8296079 1
 [305,] 1.6405206 1 [639,] 0.5923723 2 [972,] 1.1462801 2
 [306,] 0.8704832 2 [640,] 6.2625866 1 [973,] 0.3911912 2
 [307,] 0.8753114 1 [641,] 3.1499472 1 [974,] 4.7641542 1
 [308,] 1.1974135 1 [642,] 1.6129174 1 [975,] 1.1954832 1
 [309,] 0.7614563 2 [643,] 1.9957246 2 [976,] 0.6616254 2
 [310,] 0.4847489 1 [644,] 1.6923881 1 [977,] 1.8812676 2
 [311,] 0.1628824 1 [645,] 1.1903091 1 [978,] 1.1036166 2
 [312,] 1.6318482 2 [646,] 1.3504713 2 [979,] 0.4232795 1
 [313,] 0.6597896 2 [647,] 5.1151720 1 [980,] 0.6610789 2
 [314,] 1.0986826 2 [648,] 1.4614370 2 [981,] 0.3637693 1
 [315,] 1.1220336 2 [649,] 1.0172485 2 [982,] 3.3231512 1
 [316,] 1.3788280 1 [650,] 1.6084608 2 [983,] 2.2044724 1
 [317,] 0.4447184 2 [651,] 1.0016380 2 [984,] 1.5286666 2
 [318,] 1.4057422 2 [652,] 1.3067481 2 [985,] 0.7266388 2
 [319,] 1.0392901 2 [653,] 0.9954972 1 [986,] 0.5938085 1
 [320,] 1.0640266 1 [654,] 2.8812492 1 [987,] 1.5433002 2
 [321,] 5.6400930 1 [655,] 1.2603203 2 [988,] 0.5497810 2
 [322,] 2.3803916 1 [656,] 1.2379671 2 [989,] 0.6809966 2
 [323,] 2.3986865 1 [657,] 1.2675745 2 [990,] 0.9661733 1
 [324,] 0.5472505 1 [658,] 0.6878798 2 [991,] 3.8998825 1
 [325,] 0.8879831 2 [659,] 1.2161373 2 [992,] 1.7086989 2
 [326,] 1.4702703 2 [660,] 3.2381099 1 [993,] 1.4929708 2
 [327,] 0.9588420 2 [661,] 1.2361504 1 [994,] 0.7914438 2
 [328,] 0.4656267 1 [662,] 3.2497027 1 [995,] 0.9944383 2
 [329,] 1.5350080 2 [663,] 0.8941975 1 [996,] 1.8452434 1

```
[330,] 0.8151991 2 [664,] 0.5503656 2 [997,] 1.5707806 1
[331,] 0.6525252 2 [665,] 1.4966169 1 [998,] 3.1292248 1
[332,] 1.3524196 2 [666,] 4.5012854 1 [999,] 0.5084572 2
[333,] 1.2051891 1 [667,] 0.5110758 2 [1000,] 0.9277695 1
[334,] 0.7589138 2
```

```
> rho.i(z,1)
[1] 0.4625369
```

Figura 3: Estimador de F_1 .vs. função de distribuição da Exp(1)

Figura 4: Estimador de F_2 .vs. função de distribuição da Weibull(1,2)

Figura 5: Estimador de F_1 .vs. função de distribuição da Exp(1)

Figura 6: Estimador de F_2 .vs. função de distribuição da Weibull(1,2)

C.2 Código em R [23]

```
#####
# Fest: Estimador da função distribuição do sistema.
#
# a,b: calcula a integral no interval [a,b];
# h: tamanho dos subintervalos de [a,b];
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's.
# f1: priori de X1;
# f2: priori de X2.
Fest.max <- function(x,f1,f2,b,h=0.1)
{
  h <- h/2
  x.n <- length(x[,1])
  x.sort <- sort(x[,1])
  out <- NULL

  if (0 > b-h)
    b <- 0+h

  seq.aux <- seq(0,b, by=h)
  seq.naux <- length(seq.aux)
  aux <- 0

  fn.aux <- Fn(x)

  j <- 1
  for (i in 1:seq.naux)
  {
    if (seq.aux[i] <= fn.aux[1,1])
      aux <- 0
    else
    {
      for (j in 2:length(fn.aux[,1]))
      {
        if (seq.aux[i] <= fn.aux[j,1])
        {
          aux <- fn.aux[j-1,2]
          break
        }
      }
    }
    if (seq.aux[i] > fn.aux[length(fn.aux[,1]),1])
      aux <- 1
  }
}
```

```

    }

    out <- rbind(out, c(seq.aux[i], (1/(2+x.n))*((f1(seq.aux[i])+f2(seq.aux[i]))
                                     +(x.n)*aux )))

  }

  dimnames(out) <- list(NULL, c("t", "Fest max"))
  return(out)
}

#####
# Fn: Estimador empírico da distribuição do sistema.
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's.
Fn <- function(x)
{
  x.sort <- sort(x[,1])
  x.n <- length(x[,1])
  out <- NULL

  i <- 0
  while (i < x.n)
  {
    i <- i+1
    while ((x.sort[i] == x.sort[i+1]) && (i < x.n))
      i <- i+1

    out <- rbind(out, c(x.sort[i], i/x.n))
  }

  dimnames(out) <- list(NULL, c("x", "P(X <= x)"))
  return(out)
}

#####
# est.ord: gerar as m diferentes estatísticas de ordem.
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's.
est.ord <- function(x)
{
  x.n <- length(x[,1]) #tamanho da amostra
  x.sort <- sort(x[,1]) #amostra ordenada
  out <- x.sort[1]

```

```

j <- 2

for (i in 1:x.n)
  if (out[j-1] != x.sort[i])
  {
    out[j] <- x.sort[i]
    j <- j + 1
  }

#dimnames(out) <- list(NULL,"est. ord.")
return(out)
}

#####
# nj.max: utilizado na para calcular "IIprod.max".
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's.
nj.max <- function(x)
{
  x.n <- length(x[,1])      #tamanho da amostra
  x.sort <- sort(x[,1])     #amostra ordenada
  x.ordm <- est.ord(x)      #m est. ord. diferentes

  out <- NULL

  i <- 1
  for (j in 1:length(x.ordm))
  {
    while ((x.sort[i] < x.ordm[j]) && (i <= x.n))
      i <- i+1

    out <- rbind(out,c(x.ordm[j],i-1))
  }
#  out <- rbind(out,c(x.ordm[length(x.ordm)]+0.0000001,length(x.ordm)))

  dimnames(out) <- list(NULL,c("est. ord.,"nj.max"))
  return(out)
}

#####
# dj: utilizado na para calcular "IIprod".
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's.

```

```

dj.max <- function(x)
{
  x.n <- length(x[,1]) #tamanho da amostra
  x.ordm <- est.ord(x) #m est. ord. diferentes
  x.sort <- cbind(x[order(x[,1]),1],x[order(x[,1]),2]) #amostra ordenada

  out <- NULL

  i.1 <- 1
  i.2 <- 1
  for (j in 1:length(x.ordm))
  {
    k.1 <- 0
    k.2 <- 0
    while ( (i.1+i.2-1 <= x.n) && (x.sort[i.1+i.2-1,1] == x.ordm[j]) )
    {
      if (x.sort[(i.1+i.2-1),2] == 1)
      {
        i.1 <- i.1+1
        k.1 <- k.1+1
      }
      else
      {
        i.2 <- i.2+1
        k.2 <- k.2+1
      }
      if (i.1+i.2-1 > x.n) break
    }

    out <- rbind(out,c(x.ordm[j],k.1,k.2))
  }

  dimnames(out) <- list(NULL,c("est. ord.", "delta=1", "delta=2"))
  return(out)
}

#####
# IIprod: Calcula o produto (3o. termo) do esitmador
#         da distribuição do componente 1.
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's;
# f1: priori de X1;
# f2: priori de X2.

```

```

Iprod.max <- function(x,f1,f2)
{
  x.ordm <- est.ord(x)
  x.nj <- nj.max(x)
  x.dj <- dj.max(x)

  out <- NULL
  faux <- function(y,f1,f2,nj,dj)
    return((f1(y)+f2(y)+nj)/(f1(y)+f2(y)+nj+dj))

  aux.1 <- faux(x.ordm,f1,f2,x.nj[,2],x.dj[,2])
  aux.2 <- faux(x.ordm,f1,f2,x.nj[,2],x.dj[,3])

  prod.1 <- 1
  prod.2 <- 1
  for (i in length(x.ordm):1)
  {
    prod.1 <- prod.1*aux.1[i]
    prod.2 <- prod.2*aux.2[i]
    out <- rbind(out,c(x.ordm[i],prod.1,prod.2))
  }

  out <- cbind(out[order(out[,1]),1],out[order(out[,1]),2],out[order(out[,1]),3])
  dimnames(out) <- list(NULL,c("est. ord.", "prod. 1", "prod. 2"))
  return(out)
}

#####
# Iintegral: calcula a integral (1o. termo) de F1est.
#
# a,b: calcula a integral no interval [a,b];
# h: tamanho dos subintervalos de [a,b];
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's;
# deriv.alpha: derivada da medida a priori utilizada na integral
# f1: priori de X1;
# f2: priori de X2.
Iintegral.max <- function(x,f1,f2,b,h=0.1,deriv.alpha)
{
  f.est <- Fest.max(x,f1,f2,b,h)
  fest.aux1 <- integralrk.max(deriv.alpha,f.est)
  aux.1 <- exp( (-1/(2+length(x[,1]))) * fest.aux1[,2] )
  fest.aux2 <- integralrk.max(deriv.alpha,f.est)
  aux.2 <- exp( (-1/(2+length(x[,1]))) * fest.aux2[,2] )

```

```

out <- NULL
out <- cbind(out,fest.aux1[,1],aux.1,aux.2)
dimnames(out) <- list(NULL,c("> t","f1","f2"))

return(out)
}

#####
# integral.rk: Integração numérica pelo método de
#           Rugen-Kutta.
#
# deriv.alpha: derivada da medida a priori utilizada na integral
# f.est: estimativas da distribuicao do sistema
integralrk.max <- function(deriv.alpha,f.est)
{
  out <- NULL
  n <- length(f.est[,1])
  h <- f.est[n,1]-f.est[n-1,1]

  if (n %% 2 == 0)
    n <- n-1

  soma <- 0

  i <- n-1
  repeat
  {
    if (i < 2)
      break

    soma <- soma + ( ((f.est[i+1,1]-f.est[i-1,1])/6)
                     *((deriv.alpha(f.est[i-1,1])/(f.est[i-1,2])) +
                       (deriv.alpha(f.est[i,1])/(f.est[i,2])))
                     + (deriv.alpha(f.est[i+1,1])/(f.est[i+1,2]))) )

    if (f.est[i-1,2] <= 0)
      soma <- 9999999

    out <- rbind(out,c(f.est[i-1,1],soma))

    i <- i-2
    next
  }

```

```

}

out <- cbind(out[order(out[,1]),1],out[order(out[,1]),2])
dimnames(out) <- list(NULL,c("> t","integral"))
return(out)
}

#####
# F1est: Estimador de F1.
#
# a,b: calcula a integral no interval [a,b];
# h: tamanho dos subintervalos de [a,b];
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's;
# f1: priori de X1;
# f2: priori de X2.
# deriv.alpha: derivada da medida a priori utilizada na integral
Festi.max <- function(x,f1,f2,b,h=0.1,deriv.alpha)
{
  out <- NULL

  prod <- IIprod.max(x,f1,f2)
  inte <- Iintegral.max(x,f1,f2,b,h,deriv.alpha)

  aux.1 <- 0
  aux.2 <- 0

  j <- 1
  for (i in 1:length(inte[,1]))
  {
    if (inte[i,1] <= prod[1,1])
    {
      aux.1 <- prod[1,2]
      aux.2 <- prod[1,3]
    }
    else
    {
      for (j in 2:length(prod[,1]))
      {
        if (inte[i,1] <= prod[j,1])
        {
          aux.1 <- prod[j,2]
          aux.2 <- prod[j,3]
          break
        }
      }
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  if (inte[i,1] > prod[length(prod[,1]),1])
  {
    aux.1 <- 1
    aux.2 <- 1
  }
}

out <- rbind(out,c(inte[i,1],aux.1*inte[i,2],aux.2*inte[i,3]))
}

return(out)
}

#####
# grafico: gera graficos das estimativas de F1 e F2, contra a
#           verdadeira distribuição de F1 e F2.
#
# a,b: calcula a integral no interval [a,b];
# h: tamanho dos subintervalos de [a,b];
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's;
# f1: priori de X1;
# f2: priori de X2.
# deriv.alpha: derivada da medida a priori utilizada na integral
# fgraf1: função acumulada de x1;
# fgraf2: função acumulada de x2.
grafico <- function(x,f1,f2,b,h=0.1,fgraf1,fgraf2,deriv.alpha)
{
  y <- Festi.max(x,f1,f2,b+h,h,deriv.alpha)

  x.legend1 <- paste("exp(1), n=",length(x[,1]))
  nome <- paste("~/grafico1-",length(x[,1]),".ps")
  postscript(nome,horizontal=F)
  par(oma=c(1,1,1,1))
  plot(y[,1],y[,2],type="l",cex=0.8,lty=1,lwd=2,ylab="F1(t)",xlab=x.legend1)
  par(new=T)
  plot(fgraf1, 0, 8, type="l", lty=2,lwd=2, xlab="", ylab="")
  legend(5,0.2,legend=c("exp(1)","F1 estimada"),lty=c(2,1),lwd=2)
  dev.off()

  x.legend2 <- paste("weibull(1,2), n=",length(x[,1]))
  nome <- paste("~/grafico2-",length(x[,1]),".ps")

```

```

postscript(nome,horizontal=F)
par(oma=c(1,1,1,1))
plot(y[,1],y[,3],type="l",cex=0.8,lty=1,lwd=2,ylab="F2(t)",xlab=x.legenda)
par(new=T)
plot(fgraf2,0,8,type="l",lty=2,lwd=2,xlab="",ylab="")
legend(5,0.2,legend=c("weibull(1,2)","F2 estimada"),lty=c(2,1),lwd=2)
dev.off()
}

```

```

#####
# fgraf.1: distribuição acumulada da exp(1);
# fgraf.2: distribuição acumulada da weibull(1,2).
fgraf.1 <- function(x) pexp(x,1)
fgraf.2 <- function(x) pweibull(x,2,1)

```

```

#####
# medida da priori
alpha <- function(t)
  return(t/8)
#####
# derivada da medida a priori
deriv.alpha <- function(t)
  return(1/8)

```

```

#####
# conta.delta: calcula a proporção de delta = flag
#               na amostra.
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's;
# flag: 1 se quer estimar  $P(X_1 > X_2)$ ,
#       2 se quer estimar  $P(X_2 > X_1)$ .
conta.delta <- function(x,flag=1)
{
  n <- length(x[,2])
  out <- 0
  for (i in 1:n)
    if (x[i,2] == flag)
      out <- out + 1

  return(out/n)
}

```

```
#####
# rho.i: calcula a probabilidade de delta = flag.
#
# x: amostras do sistema, matriz (n x 2) de z's e delta's;
# flag: 1 se quer estimar  $P(X1 > X2)$ ,
#       2 se quer estimar  $P(X2 > X1)$ .
rho.i <- function(x,flag=1)
{
  n <- length(x[,2])
  return((1/(2+n))+((1+n)/(2+n))*conta.delta(x,flag))
}

#####
# namost: quatidade de amostras a serem geradas.
namost <- 10

#####
# Gerando as amostras de z e delta.
#
# x1 ~ exp(1)
# x2 ~ weibull(1,2)
# z_i = max(x1_i,x2_i)
# delta_i = 1 se max(x1_i,x2_i)=x1_i, 2 c.c.
x1 <- 0
x2 <- 0
aux <- 0
delta <- 0

for (j in 1:namost)
{
  x1[j] <- rexp(1,1)
  x2[j] <- rweibull(1,2,1)
  aux[j] <- max(x1[j],x2[j])
  if (x1[j] < x2[j])
    delta[j] <- 2
  else
    delta[j] <- 1
}
z <- NULL
z <- cbind(z,aux,delta)
dimnames(z) <- list(NULL,c("Z","delta"))
```

Referências

- [1] Aalen, Odd: *Nonparametric Inference in connection with Multiple Decrement Models*. Scandinavian Journal of Statistics, 3:15–27, 1976.
- [2] Aalen, Odd: *Nonparametric Estimation of Partial Transition Probabilities in Multiple Decrement Models*. The Annals of Statistics, 6(3):534–545, March 1978.
- [3] Aalen, Odd: *Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes*. The Annals of Statistics, 6(4):701–726, Julho 1978.
- [4] Andersen, P.K., B. Ørnulf, R.D. Gill, e N. Keiding: *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [5] Barlow, Richard E. e Frank Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. To Begin With, Silver Spring, 1981.
- [6] Basu, D. e R.C. Tiwari: *A note on Dirichlet process*. Statistics and Probability: Essays in Honor of C.R. Rao, páginas 83–103, 1982.
- [7] Billingsley, Patrick: *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, 1968.
- [8] Billingsley, Patrick: *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, New York, Segunda edição, 1986.
- [9] Breslow, Norman E. e John Crowley: *A Large Sample study of the Life Table and Product Limit Estimates Under Random Censorship*. Annals of Statistics, 2:437–453, 1974.
- [10] Cox, David R.: *Regression Models and Life-Table*. Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 34:187–202, 1972.
- [11] Dalal, S.R.: *Nonparametric bayes decision theory*. Bayesian Statistics, páginas 521–534, 1980.
- [12] Davis, P.J. e P. Rabinowitz: *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, Segunda edição, 1984.
- [13] DeGroot, Morris H.: *Optimal Statistical Decisions*. McGraw-Hill, 1970.
- [14] Doksum, K.: *Tailfree and neutral random probabilities and their posterior distributions*. Ann. Prob., 2:183–201, 1974.
- [15] Escobar, M.D. e M West: *Bayesian Density Estimation and Inference Using Mixtures*. Journal of the American Statistical Association, 90:577–588, 1995.

-
- [16] Ferguson, T.S.: *A Bayesian analysis of some nonparametric problems*. Ann. Statist., 1:209–230, 1973.
 - [17] Ferguson, T.S.: *Prior distributions on spaces of probability measures*. Ann. Statist., 2:615–629, 1974.
 - [18] Ferguson, T.S., E.G. Phadia, e R.C. Tiwari: *Bayesian nonparametric inference*. Current Issues in Statistical Inference: Essays in Honor of D. Basu, 1992. IMS Lec. Notes Monograph Ser. 17.
 - [19] Gaudard, M. e D. Hadwin: *Sigma-algebras on spaces of probability measures*. Scand. L. Statist., 16:169–175, 1989.
 - [20] Gelfand, A.E. e A. Kottas: *A Computational Approach for Full Nonparametric Bayesian Inference Under Dirichlet Process Mixture Models*. Journal of Computational & Graphical Statistics, 11(2):289–305, June 2002. Publisher: American Statistical Association.
 - [21] Ghosal, S., J. K. Ghosh, e R. V. Ramamoorthi: *Posterior consistency of Dirichlet mixtures in density estimation*. Annals of Statistics, 27(1):143–158, 1999.
 - [22] Gill, R.D. e S. Johansen: *A survey of product-integration with a view towards application in survival analysis*. The Annals of Statistics, 18:1501–1555, 1990.
 - [23] <http://www.r-project.org/>: *The R Project for Statistical Computing*.
 - [24] Kaplan, E.L. e Paul Meier: *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations*. Journal of the American Statistical Association, 53:457–481, 1958.
 - [25] Parthasarathy, K.R.: *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, New York, 1967.
 - [26] Pereira, C.A.B. e D. Basu: *On the bayesian analysis of categorical data: The problem of non response*. J. Statist. Plann. Inference, 6:345–362, 1982.
 - [27] Peterson, Arthur V., Jr.: *Expressing the Kaplan-Meier Estimator as a Function of Empirical Subsurvival Functions*. Journal of the American Statistical Association, 72(360):854–858, 1977.
 - [28] Pollard, D.: *Convergence of Stochastic Processes*. Springer-Verlag, New York, 1984.
 - [29] Proschan, F. e P.J. Boland: *The Reliability of K Out of N Systems*. The Annals of Probability, 11(3):760–764, 1983.
 - [30] Robertson, James B. e V.R.R. Uppuluri: *A Generalized Kaplan-Meier Estimator*. The Annals of Statistics, 12(1):366–371, March 1984.
 - [31] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. MacGraw-Hill, Tokyo, Segunda edição, 1964.
 - [32] Salinas-Torres, Victor: *Análise Bayesiana Não-paramétrica na Teoria de Riscos Competitivos*. Tese de Doutorado, University of Sao Paulo, 1992.

-
- [33] Salinas-Torres, Victor, C.A.B. Pereira, e Ram Tiwari: *Bayesian nonparametric estimation in a competing risks model or a series system*. Journal of Nonparametric Statistics, 14:449–458, 2002.
 - [34] Serfling, R.J.: *Approximations Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley, New York, 1980.
 - [35] Sethuraman, J. e R.C. Tiwari: *Statistical decision theory and related topics III*. 2:305–312, 1982.
 - [36] Shiryaev, A.N.: *Probability*. Springe-Verlag, New York, 1995.
 - [37] Tiwari, R.C.: *A mathematical study of dirichlet process*. Tese de Doutorado, Dept. of Statistics, Florida State University, 1981.
 - [38] Tsai, W.Y. e J. Crowley: *A large sample study of generalized maximum likelihood estimators from incomplete data via self consistency*. Ann. Statist., 13:1317–1334, 1985.
 - [39] Tsiatis, Anastasios: *A Nonidentifiability Aspect of the Problem of Competing Risks*. PNAS, 72(1):20–22, 1975.
 - [40] Wilks, S.S.: *Mathematical Statistics*. Wiley, New York, 1962.