Um estudo dos modelos polinomiais
com erros nas variáveis na função de
verossimilhança corrigida e escore
corrigido

Arturo Alejandro Zavala Zavala

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Doutor em Estatística

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Heleno Bolfarine

⁽ⁱ⁾Este trabalho contou parcialmente com apoio financeiro do CNPq.

São Paulo - Maio - 2004

Um estudo dos modelos polinomiais com erros nas variáveis na função de verossimilhança corrigida e escore corrigido

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado devidamente
corrigida e defendida por
Arturo Alejandro Zavala Zavala
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, Maio de 2004.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Heleno Bolfarine (Orientador) - IME-USP

Prof. Dr. Gilberto Alvarenga Paula - IME-USP

Prof. Dra. Pilar Iglesias - UNIV.C.CHILE

Prof. Dr. Filidor Vilca Labra - IME-UNICAMP

Prof. Dr. Mário de Castro Andrade Filho - ICMC-USP

👍 A meus grandes amigos Vicente Garibay Cancho e Fernando Carvalho Trindade para eles todo meu reconhecimento.

👍 A todos os peruanos presentes e em especial aos formados na Universidad Nacional Agraria La Molina.

👍 A meus colegas de trabalho e alunos da Universidade Estadual de Mato Grosso - Barra do Bugres - UNEMAT, muito grato pelo apoio e ajuda nesta nova etapa de minha vida profissional.

Minha Gratidão

A meus Pais

*Adalberto Favala e
Horaida Favala*

A minha querida esposa

Carla Abadie felres

A meus lindos filhos

*Gabriela del Carmen &
Daniel Alexandre*

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os modelos polinomiais com erros nas variáveis considerando as metodológicas da função de verossimilhança corrigida desenvolvida por Nakamura (1990) e a função escore corrigido desenvolvida por Bolfarine e Gimenez (1997).

Exibimos os casos quando o modelo com erros nas variáveis tem um erro aditivo, assim quando este erro é multiplicativo, além disso consideramos os dois possíveis supostos, isto é, quando o modelo é funcional e quando o modelo é estrutural, logo fazemos uma generalização para modelos multivariados, considerando neste caso os modelos de calibração comparativa.

Nos casos onde a função de verossimilhança corrigida exista num modelo aditivo, será considerada um estudo de Influência Local. Consideramos exemplos de Simulação de Monte Carlo e exemplos concretos para cada situação.

ABSTRACT

In this work, we study polynomials models with errors in variables, using methodologies based of the corrected likelihood function development by Nakamura (1990) and the corrected score function development by Bolfarine and Gimenez (1997).

We study the cases when the models present additive errors in variables, and also when they have multiplicative errors. For one hand, two situations are considered, seat is, functional models and estrutural models. The models are also generalized, considering multivariate models, using comparative calibrations models.

In this case since the likelihood function corrected the methodology of the local influence is used for studying influence of observations on the estimate parameters.

CONTEÚDO

Resumo	iv
Abstract	v
1 Apresentação do Problema.	1
1.1 Introdução.	1
1.2 Alguns trabalhos em modelos polinomiais com erros nas variáveis.	3
1.3 O método para a correção de viés em modelos com erros nas variáveis.	10
1.4 Influência Local	13
2 Modelo Aditivo	16
2.1 Introdução.	16
2.2 Caso 1 : σ_u^2 conhecida	17
2.2.1 Estimação dos parâmetros	17
2.2.2 Obtenção da matriz de covariâncias assintóticas	32
2.2.3 Teste de hipóteses para β	33
2.2.4 Aplicações numéricas.	35
2.3 Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida	42
2.3.1 Estimação dos parâmetros	42
2.3.2 Obtenção da matriz de covariâncias assintóticas	47
2.3.3 Teste de Hipótese.	47

2.3.4	Aplicações numéricas	48
2.4	Influência Local	53
2.4.1	Metodologia	53
2.4.2	Esquemas de perturbação	55
2.4.3	Aplicação	60
2.5	Caso 3: Variâncias heterogêneas	67
2.5.1	Metodologia	67
2.5.2	Exemplos	68
2.5.3	Obtenção da matriz de covariâncias Assintóticas	72
2.5.4	Teste de hipóteses para β	72
2.5.5	Aplicações numéricas	73
3	Modelo Multiplicativo	79
3.1	Introdução	79
3.2	Caso 1 : σ_u^2 conhecida	80
3.2.1	Estimação dos parâmetros	80
3.2.2	Exemplos	83
3.2.3	Obtenção da matriz de covariâncias assintóticas	85
3.2.4	Teste de hipóteses para β	86
3.2.5	Aplicação numérica	88
3.3	Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida	92
3.3.1	Estimação dos parâmetros	92
3.3.2	Exemplos	93
3.3.3	Aplicações numéricas	97
3.4	Caso 3: Variâncias heterogêneas	100
3.4.1	Estimação dos parâmetros	100
3.4.2	Exemplos	101
3.4.3	Aplicações numéricas	103
4	Calibração Comparativa	108
4.1	Introdução	108
4.2	Variâncias homogêneas	110

4.2.1	Caso 1: σ_u^2 conhecida	110
4.3	Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida	119
4.4	Variâncias heterogêneas	127
4.4.1	Caso 1: σ_u^2 conhecida	127
4.5	Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida	135
5	Considerações finais	143
6	Anexo	145
	Bibliografia	157

LISTA DE TABELAS

2.1	Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.	36
2.2	Comparação das estimativas segundo os métodos “naive”, “escore corrigido” e de Fuller	39
2.3	Teste de Hipótese para os parâmetros do modelo.	40
2.4	Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.	49
2.5	Estimativas segundo as metodologias “naive” e “escore corrigido”.	52
2.6	Avaliação das estimativas do método “escore corrigido”, usando o teste de wald.	53
2.7	Índice de variação percentual nos parâmetros em um modelo quadrático devido aos pontos 1, 2, 3 e 4	66
2.8	Estimativas segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra em um modelo de regressão quadrática quando são consideradas variâncias heterogêneas.	75
2.9	Estimativas e testes de hipóteses para os parâmetros de um modelo quadrático	78
3.1	Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.	89
3.2	Estimativas segundo o método de escore corrigido	91

3.3	Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.	98
3.4	Estimativas segundo o método de escore corrigido	100
3.5	Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.	105
3.6	Estimativas segundo o método de escore corrigido	107
4.1	Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	113
4.2	Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	113
4.3	Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	115
4.4	Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	115
4.5	Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	117
4.6	Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	117
4.7	Estimativas dos parâmetros segundo o método “Naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	121
4.8	Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	121
4.9	Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	123
4.10	Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	123
4.11	Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	125
4.12	Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	125

4.13	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	129
4.14	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	130
4.15	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	131
4.16	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	131
4.17	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	133
4.18	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	133
4.19	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	137
4.20	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.	137
4.21	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	139
4.22	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.	139
4.23	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	141
4.24	Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.	141
6.1	Dados simulados por Fuller (1987) para um polinômio de segundo grau. . .	145
6.2	Dados simulados por Fuller (1987) para um polinômio de segundo grau (Continuação...).	146
6.3	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	147
6.4	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	148
6.5	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	149

6.6	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	150
6.7	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	151
6.8	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	152
6.9	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	153
6.10	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	154
6.11	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	155
6.12	Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).	156

LISTA DE FIGURAS

2.1	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	37
2.2	Gráfico da dispersão das variáveis Y_1 e W	38
2.3	Comportamento das estimativas dos três modelos	39
2.4	Comportamento das estimativas do modelo linear e quadrático no escore corrigido	41
2.5	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	50
2.6	Gráfico da dispersão das variáveis Y_2 e W	51
2.7	Gráfico do comportamento das estimativas dos métodos “naive” e “escore corrigido”	52
2.8	Gráfico de índice segundo o esquema de perturbação da ponderação dos casos	63
2.9	Gráfico de índice segundo o esquema de perturbação da variável resposta	64
2.10	Gráfico de índice segundo o esquema perturbação das variâncias dos erros de medição da variável resposta	64
2.11	Gráfico de índice segundo o esquema de perturbação da covariável	65
2.12	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	76
2.13	Gráfico de dispersão dos dados	77
2.14	Gráfico de dois modelos propostos, Linear e Quadrático	78

3.1	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	90
3.2	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	99
3.3	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	106
3.4	Gráfico comparativo dos modelos aditivo e multiplicativo na metodologia escore corrigido	107
4.1	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra para o instrumento 1	114
4.2	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra e instrumento 2	116
4.3	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra	118
4.4	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 1	122
4.5	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 2	124
4.6	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 3	126
4.7	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 1	130
4.8	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 2	132
4.9	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 3	134
4.10	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 1	138
4.11	Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 2	140

4.12 Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 3	142
---	-----

Apresentação do Problema.

1.1 Introdução.

Muitas áreas do conhecimento apresentam problemas envolvendo relações entre duas ou mais variáveis. Estas relações podem ser estudadas no âmbito dos modelos de regressão, podendo-se apresentar segundo o seguinte modelo

$$Y_i = f_i(X_i; \beta) + e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Esta relação pode ser linear ou não, dependendo da expressão que se considera em $f_i(X_i; \beta)$. Podemos considerar Y_i como a variável dependente, enquanto X_i pode ser definida como a variável ou conjunto de variáveis independentes ou regressoras, sendo estas em muitos casos conhecidas, e_i pode ser definida como o erro do modelo (1.1). Muitas vezes a variável ou conjunto de variáveis X pode ser não observada ou desconhecida na pesquisa, conforme apresenta Fuller (1987) em uma situação onde se tinha interesse em avaliar o rendimento da produção de milho em função da verdadeira porcentagem de nitrogênio no solo. Aqui considerando a produção do milho como a variável dependente (ou Y_i), enquanto a verdadeira porcentagem de nitrogênio no solo como a variável independente (ou X_i), um possível modelo seria

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i, \quad (1.2)$$

mas a verdadeira porcentagem de nitrogênio no solo não pode ser conhecida, o que nos leva a observar seu valor segundo a relação seguinte:

$$W_i = X_i + u_i, \quad (1.3)$$

onde W_i é o valor que substitui a verdadeiro porcentagem de nitrogênio no solo e u_i é considerado como o erro dessa substituição.

As expressões (1.2) e (1.3) constituem as bases dos modelos de regressão com erros nas variáveis, se distinguem dois tipos de modelos em função da expressão (1.3). Se X_i é fixo ou constante de modo que o modelo é chamado *modelo funcional*, podendo ser uma das suposições

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes, } i = 1, \dots, n,$$

onde $N_p(\mu; \Sigma)$ denota a distribuição normal p-variada com vetor de médias μ e matriz de covariâncias Σ . Neste caso o número de parâmetros cresce com o número de observações, tendo-se nas expressões (1.2) e (1.3) um total de $n+4$ parâmetros e neste caso $X_1, X_2, \dots, X_n$ são denominados parâmetros incidentais. No caso em que na expressão (1.3) X_i é uma variável aleatória, então o modelo é chamado *modelo estrutural*, sendo comum supormos que,

$$\begin{pmatrix} X_i \\ e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes, } i = 1, \dots, n.$$

Neste caso o modelo não apresenta parâmetros incidentais, apenas parâmetros estruturais. Para estes tipos de modelo existe uma variedade de formas para a estimação dos parâmetros β e dos demais parâmetros. Neste trabalho apresentamos algumas formas de estimação dos parâmetros encontrados na literatura quando a função $f_i(X_i)$ é considerada como um polinômio em X_i , $i = 1, \dots, n$, considerando os *modelos funcional e estrutural*.

1.2 Alguns trabalhos em modelos polinomiais com erros nas variáveis.

Desde começos dos anos 80, tem havido um interesse crescente no estudo de modelos não lineares. A obtenção de estimadores consistentes dos parâmetros desconhecidos em modelos com erros nas variáveis não lineares resulta muito complicada, mesmo quando o erro de medição é assumido normalmente distribuído, com variância conhecida. A dificuldade é devida ao fato de que as verdadeiras covariáveis desconhecidas devem ser removidas da função de verossimilhança, seja por integração no caso de um modelo estrutural, seja incluindo-as no espaço paramétrico, no caso de um modelo funcional. Os cálculos podem ser bastante complicados. Existem uma variedade de técnicas que produzem estimadores “aproximadamente consistentes” em modelos não lineares, fazendo correções explícitas para o vício dos estimadores ou propondo estimadores alternativos sob certas suposições. A continuação apresentaremos brevemente algumas soluções propostas para os modelos polinomiais.

Wolter e Fuller (1982) estudaram o polinômio de segundo grau, para isto, consideram o modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i, \quad (1.4)$$

$$W_i = X_i + u_i, \quad (1.5)$$

$i = 1, \dots, n$. O modelo acima considera que X_i não é observado diretamente, sendo que W_i é observado no lugar de X_i . Eles consideram a matriz de covariâncias dos erros,

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{eu} \\ \sigma_{ue} & \sigma_u^2 \end{pmatrix},$$

conhecida, de modo que da equação (1.5) podemos escrever

$$\varpi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ W_i \\ W_i^2 - \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_i \\ X_i^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \\ 2X_i u_i + u_i^2 - \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_i + \mathbf{f}_i, \quad (1.6)$$

e, de (1.4) e (1.6), podemos escrever:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ \varpi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 \\ 1 \\ X_i \\ X_i^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \\ u_i \\ 2X_i u_i + u_i^2 - \sigma_u^2 \end{pmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Com isso pode-se construir a matriz de momentos

$$\mathbf{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_i^t = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} & \mathbf{M}_{\mathbf{Y}\varpi} \\ \mathbf{M}_{\varpi\mathbf{Y}} & \mathbf{M}_{\varpi\varpi} \end{pmatrix},$$

sendo

$$\mathbf{M}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{Y}\varpi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i W_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i (W_i^2 - \sigma_u^2) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{M}_{\varpi\varpi} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i^2 - \sigma_u^2) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i^2 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i^3 - \sigma_u^2 W_i) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i^2 - \sigma_u^2) & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i^3 - \sigma_u^2 W_i) & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i^4 - 2\sigma_u^2 W_i^2 + \sigma_u^4) \end{pmatrix},$$

a matriz de covariâncias Ω é definida pela expressão,

$$\Omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\varepsilon_i \varepsilon_i^t) = \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & \Omega_{\text{ef}} \\ \Omega_{\text{fe}} & \Omega_{\text{ff}} \end{pmatrix},$$

sendo que,

$$\Omega_{\text{ef}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{eu} & 2\sigma_{eu}^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \end{pmatrix} \text{ e } \Omega_{\text{ff}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & 2\sigma_u^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ 0 & 2\sigma_u^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i & 2\sigma_u^2 (2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sigma_u^2) \end{pmatrix}.$$

Um estimador não viciado de Ω , isto é, $\hat{\Omega}$ é construído ao substituir X_i por W_i e X_i^2 por $W_i^2 - \sigma_u^2$, de forma que o estimador dos β é definido pela expressão seguinte,

$$\hat{\beta} = \left(\mathbf{M}_{\omega\omega} - \hat{\alpha}\hat{\Omega}_{ff} \right)^{-1} \left(\mathbf{M}_{\omega Y} - \hat{\alpha}\hat{\Omega}_{fe} \right) \quad (1.7)$$

onde o valor de $\hat{\alpha}$ é obtido resolvendo a equação determinantal $|\mathbf{M} - \alpha\Omega| = 0$, os autores afirmam que existem duas motivações para o estimador proposto na expressão (1.7):

1. Pode-se mostrar que $\hat{\alpha}$ converge em probabilidade a 1, e por sua vez pode-se observar que $\mathbf{M}_{\omega\omega} - \hat{\alpha}\hat{\Omega}_{ff}$ é um estimador de $\mathbf{M}_{XX}$ e $\mathbf{M}_{\omega Y} - \hat{\alpha}\hat{\Omega}_{fe}$ é um estimador de $\mathbf{M}_{XY}$.
2. O estimador apresentado na expressão (1.7) é tal que minimiza a função $h(\theta) = (\theta^t \mathbf{M} \theta)(\theta^t \Omega \theta)^{-1}$, sendo $\theta = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}^t$.

Segundo os autores, em modelos lineares com erros nas variáveis normais $h(\theta)$ pode ser considerada como função de verossimilhança.

Hwang(1986) considera o modelo seguinte:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \dots + \beta_p X_i^p + e_i, \quad (1.8)$$

$$W_i = X_i u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Neste caso estamos frente a um modelo multiplicativo, as suposições sobre a matriz de covariâncias dos erros quando X_i é fixo (modelo funcional) é definido por

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes, } i = 1, \dots, n,$$

no caso que X_i seja uma variável aleatória (modelo estrutural), isto é, $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ independentes as suposições apresentadas acima.

Com a finalidade de converter o modelo multiplicativo (1.9) apresentado acima a um modelo aditivo, o autor considera a seguinte modificação

$$\log(W_i) = \log(X_i) + \log(u_i).$$

O autor afirma que esta transformação quebra a linearidade do modelo e pode complicá-lo levando a um modelo não linear. Para evitar este problema, ele trabalha o modelo segundo a equação abaixo,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 W_i^2 + \dots + \beta_p W_i^p + e_i, \quad (1.10)$$

obtendo a partir da expressão acima o estimador ingênuo “naive” da forma

$$\hat{\beta}_{MQ} = (\mathbf{W}^t \mathbf{W})^{-1} (\mathbf{W}^t \mathbf{Y}),$$

que não é consistente. O autor prova pela lei dos grandes que se pode obter a seguinte expressão

$$\frac{\mathbf{W}^t \mathbf{Y}}{n} \xrightarrow{P} \mathbf{A} \beta,$$

onde $\xrightarrow{P}$ denota convergência em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$. Sendo

$$\mathbf{A} = E(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^t),$$

e como $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular, então

$$\mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\mathbf{W}^t \mathbf{Y}}{n} \right) \xrightarrow{P} \beta. \quad (1.11)$$

Para a determinação de $\mathbf{A}$, notemos que, sob condições de regularidade,

$$\frac{\mathbf{W}^t \mathbf{W}}{n} \xrightarrow{P} E(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^t),$$

e levando em conta que $E(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^t) = \mathbf{M} \odot E(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^t)$, onde $\mathbf{M} = E(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^t)$, para esta expressão supomos que $u_i \sim N(1, \sigma_u^2)$, e σ_u^2 é conhecida, porém a matriz $\mathbf{M}$, também é conhecida, com isto temos que,

$$E(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^t) \oslash \mathbf{M} = E(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^t) = \mathbf{A}.$$

O autor conclui segundo a expressão (1.11), que

$$\hat{\beta} = [(\mathbf{W}^t \mathbf{W}) \oslash \mathbf{M}]^{-1} (\mathbf{W}^t \mathbf{Y}),$$

é um estimador consistente para β . As operações “ $\odot$ ” e “ $\oslash$ ” são os operadores matemáticos do produto e divisão de *Hadamard* (Styan, 1973), que são o produto e a divisão elemento a elemento de duas matrizes com a mesma dimensão.

Hwang (1986) apresenta, usando o teorema central do limite multivariada (Sen e Singer, 1992), a distribuição assintótica dos estimadores, ou seja,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_p(0; \Sigma), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde, Σ é estimada por

$$\hat{\Sigma} = \hat{A}^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{W}_i Y_i - (\mathbf{W}_i \mathbf{W}_i^t \odot \mathbf{M}) \hat{\beta}) (\mathbf{W}_i Y_i - (\mathbf{W}_i \mathbf{W}_i^t \odot \mathbf{M}) \hat{\beta})^t \hat{A}^{-1},$$

com $\mathbf{M}$ conhecida.

Carroll, Rupert e Stefanski (1995), obtiveram estimadores consistentes a partir da expressão (1.10) que é o modelo ingênuo (“naive”), considerando o algoritmo *SIMEX* (Extrapolação da Simulação) desenvolvido por Cook e Stefanski (1995). O procedimento envolve duas etapas, sendo a primeira etapa chamada de etapa de *simulação*, onde se consideram modificações nas variáveis observáveis do seguinte modo:

$$W_{i,s}(\lambda) = W_i + \sqrt{\lambda} u_i, \quad (1.12)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, e $s = 1, 2, \dots, B$, onde $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$. Para cada valor de λ fixado (valor compreendido entre 0 e 2), deve-se simular n possíveis valores para $W_{i,s}(\lambda)$; a seguir deve-se usar a técnica de mínimos quadrados para a obtenção dos β 's para cada λ fixo; este processo deve-se repetir B vezes, de modo que para cada valor fixo de λ se obtém um valor médio de $\hat{\beta}$, da maneira seguinte,

$$\hat{\beta}(\lambda_j) = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^B \hat{\beta}_s(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Na segunda etapa, chamada de *extrapolação*, deve-se estimar uma regressão entre cada valor de $\hat{\beta}(\lambda_j)$ e os valores de λ_j fixos, sendo que algumas relações sugeridas na literatura são:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\lambda_j) &= \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_j, & (\text{Extrapolação Linear}) \\ \hat{\beta}(\lambda_j) &= \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_j + \gamma_2 \lambda_j^2, & (\text{Extrapolação Quadrática}) \\ \hat{\beta}(\lambda_j) &= \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \lambda_j}. & (\text{Extrapolação Não Linear}) \end{aligned}$$

Uma vez estimados os parâmetros γ_m , para $m = 0, 1, 2$ deve-se fazer $\lambda = -1$, obtendo-se uma estimativa de cada parâmetro β ,

$$\hat{\beta}_{SIMEX} = \hat{\beta}_{(\lambda=-1)}.$$

O método *SIMEX* foi feito para se trabalhar com o método estrutural, mas também pode se trabalhar com o modelo funcional.

Para um modelo multiplicativo como na expressão (1.9) quando é usado o *SIMEX* pode-se substituir na etapa de simulação, a equação (1.12), pela expressão seguinte:

$$W_{i,s}(\lambda) = e^{\log(W_i) + \sqrt{\lambda}u_i},$$

mantendo-se os outros procedimentos para estimar os parâmetros de β sem nenhuma modificação.

Cheng e Schneeweis (1998), trabalharam o modelo como as equações (1.8) e (1.5), considerando a técnica de mínimos quadrados ordinários, obtêm as seguintes equações lineares:

$$(\mathbf{X}^t \mathbf{X}) \hat{\beta}_{MQ} = \mathbf{X}^t \mathbf{Y},$$

substituindo a matriz $(\mathbf{X}^t \mathbf{X})$ que não é observável, de acordo com o modelo (1.5) por uma outra matriz $\mathbf{H}$, constituída por variáveis auxiliares $t_{i,(r)}$ que representam os momentos da variável não observada, X_i^r , isto é, $E(t_{i,(r)}) = X_i^r$, esta variável auxiliar está em função de W_i^r e σ_u^2 , relacionadas através da equação (com σ_u^2 conhecido)

$$t_{i,(r+1)} = W_i t_{i,(r)} - r \sigma_u^2 t_{i,(r-1)} \quad r > 2, \quad (1.13)$$

da mesma forma, o vetor $(\mathbf{X}^t \mathbf{Y})$ é substituído pelo vetor $\mathbf{h}$, constituído pelas variáveis $t_{i,(r)}$, de tal forma que um estimador consistente de β pode ser obtido a partir da equação,

$$\mathbf{H} \hat{\beta} = \mathbf{h},$$

onde um estimador de σ_e^2 é dado por

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{h}^t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{h}).$$

Os autores denominam esta forma de se obter as estimativas como estimador de mínimos quadrados ajustados. Usando propriedades assintóticas de equações de estimação (Huber, 1981), eles apresentam o comportamento assintótico de $\hat{\beta}$, como sendo

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_p(0; \Sigma),$$

onde

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} (\bar{\mathbf{H}}^{-1} \hat{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{H}_i \hat{\beta} - \mathbf{h}_i) (\mathbf{H}_i \hat{\beta} - \mathbf{h}_i)^t.$$

Esta técnica é apropriada para modelos funcionais, assim como para modelos estruturais. Por outro lado o método exige o conhecimento dos momentos da variável $u_i, i = 1, \dots, n$.

Conforme visto na Introdução, podemos advertir que nos modelo com erros nas variáveis existem duas formas de focar à variável X_i que é não observável; uma primeira forma trata X_i como uma variável aleatória (*modelo estrutural*), uma segunda forma trata X_i como uma constante fixa (*modelo funcional*), mas na realidade existe uma terceira situação que é similar ao *modelo funcional*, a forma como é apresentada faz a diferença. Suponhamos que desejemos conduzir um experimento para estudar a qualidade de determinada marca de cimento e para isto, é criada uma operação de mistura constante. Assuma que a qualidade do cimento depende da quantidade de água usada na mistura. A leitura da água pode ser feita através do medidor da válvula de controle da quantidade de água que ingressa na mistura. A quantidade de água que se requer na mistura é constante e conhecida (W_i), mas devido à pressão da água, pode-se enviar mais quantidade de água do que se está observando no medidor, podendo-se entender que esse excesso corresponde ao erro pela medição da água (u_i), $i = 1, \dots, n$.

Se o medidor está apropriadamente calibrado, a média de u_i é zero. Temos então a relação

$$X_i = W_i - u_i,$$

onde u_i é uma variável aleatória de média zero e variância σ_u^2 . Como se deseja uma qualidade ótima do cimento, a quantidade de água através do medidor da válvula de controle de água W_i deve ser pré-fixado pelo pesquisador e as possíveis variações são devidas ao erro aleatório u_i . Este modelo é chamada *modelo de Berkson* (Fuller, 1987). Observemos que a variável W_i pode ser chamada variável controlada, pois seus valores são fixados com antecedência,

enquanto a variável desconhecida X_i é flutuante em seus valores.

Cheng e Van Ness (1998), estudaram o modelo polinomial de *Berkson* considerando as equações

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \dots + \beta_p X_i^p + e_i = P(\mathbf{X}_i; \beta) + e_i, \quad (1.14)$$

$$W_i = X_i + u_i, \quad (1.15)$$

logo a expressão (1.15) pode ser escrita por $X_i = W_i - u_i$ e substituída na expressão (1.14), obtendo-se

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 W_i^2 + \dots + \beta_p W_i^p + e_i^* = P(\mathbf{W}_i; \beta) + e_i^*, \quad (1.16)$$

com $e_i^* = P(\mathbf{X}_i; \beta) - P(\mathbf{W}_i; \beta) + e_i$, de modo que o valor esperado de e_i^* não é zero, somando e subtraindo $E(e_i^*)$ em (1.16), obtém-se

$$Y_i = \beta_0 + E(e_i^*) + \beta_1 W_i + \beta_2 W_i^2 + \dots + \beta_p W_i^p + e_i^* - E(e_i^*),$$

com $e_i^{**} = e_i^* - E(e_i^*)$ e $E(e_i^{**}) = 0$, lembrando que os $E(e_i^*)$ estão em função dos β 's e W_i , obtemos o seguinte resultado

$$Y_i = \beta_0^* + \beta_1 W_i + \beta_2 W_i^2 + \dots + \beta_p W_i^p + e_i^{**}, \quad (1.17)$$

sendo que em (1.17) os parâmetros β podem ser estimados com a técnica de mínimos quadrados ordinários e neste caso os estimadores são consistentes e eficientes. Variâncias dos estimadores também são estimados usando procedimentos usuais.

1.3 O método para a correção de viés em modelos com erros nas variáveis.

O método da função verossimilhança corrigida foi desenvolvido por Nakamura (1990) e o método da função escore corrigida foi desenvolvido por Bolfarine e Gimenez (1997), que apresentam a descrição do método, as propriedades assintóticas dos estimadores, testes de hipóteses e também aplicações ao modelo de calibração comparativa.

As técnicas da função de verossimilhança e do escore corrigido podem ser usadas tanto

para estruturas aditivas dos erros quanto para multiplicativas, assim como para modelos funcionais e para modelos estruturais.

A propriedade fundamental que define uma função de verossimilhança corrigida é o fato de que sua esperança com respeito à distribuição dos erros de medição e as esperanças das derivadas parciais com respeito a cada parâmetro (função escore corrigido a partir da verossimilhança) coincidem com a função de escore usual baseada nas verdadeiras covariáveis que são desconhecidas.

Esta propriedade é importante para provar a consistência e a normalidade assintótica do estimador obtido como solução da equação de estimação obtida com o escore corrigido.

Em resumo, se temos o logaritmo da função de verossimilhança não observada,

$$\ell(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\theta, X_i, Y_i),$$

e uma função de escore não observada,

$$\mathbf{U}(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

temos que

$$E[\mathbf{U}(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y})] = 0, \quad (1.18)$$

sendo esta propriedade fundamental para consistência e normalidade do estimador que hbox-maximiza $\ell(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Se substituimos a variável não observável X_i pela variável observável W_i temos que,

$$E[\mathbf{U}(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})] \neq 0. \quad (1.19)$$

Deve-se procurar modificações de (1.19) tal que se obtenha a propriedade (1.18), daí a necessidade de se obter $\mathbf{U}^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})$ satisfazendo

$$E[\mathbf{U}^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})] = 0, \quad (1.20)$$

e a partir desta expressão podemos obter estimadores consistentes.

Segundo Bolfarine e Gimenez (1997), um estimador consistente de θ poderia ser obtido como solução de uma equação de estimação não viciada. Nakamura (1990) propõe obter tal função da seguinte maneira. Seja $\ell^*(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ uma função das variáveis observadas e do parâmetro desconhecido tal que

$$E[\ell^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \ell(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

$\ell^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})$ é chamada de logaritmo da função verossimilhança corrigida.

Se $\ell^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})$ for duas vezes diferenciável em F , onde F é um sub-conjunto aberto e conexo do espaço paramétrico Θ , definem-se

$$\mathbf{U}^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

e

$$\mathbf{I}^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{U}^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

a função escore corrigido e a matriz de informação observada corrigida, respectivamente.

Uma condição importante no método de Nakamura, é que as operações $E(\bullet \mid \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}(\bullet)$ devem ser permutáveis, o que permite provar a seguinte condição:

$$E[\mathbf{U}^*(\theta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{U}(\theta; \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \forall \theta \in F,$$

de modo que (1.20) estaria satisfeita.

O valor de θ obtida a partir de $\mathbf{U}^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$ é dito estimador do escore corrigido de θ .

Bolfarine e Gimenez, (1997) apresentam as condições de regularidade que devem satisfazer a função escore corrigido, bem como um estudo da consistência e da normalidade assintótica dos estimadores, sendo a matriz de covariâncias assintótica dos estimadores dada por

$$\frac{1}{n} (\mathbf{I}_n^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} \mathbf{S}_n^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (\mathbf{I}_n^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1}, \quad (1.21)$$

onde,

$$\mathbf{I}_n^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} U_i^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

e

$$\mathbf{S}_n^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mathbf{U}_i^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t.$$

Segundo os autores, o método do escore corrigido é aplicável à distribuições de poisson, normal, normal inversa, valor extremo e gama. Em geral o escore corrigido pode ser determinado quando o escore usual (não observado) depende das covariáveis somente através de potências e produtos dos mesmos. Os autores fazem um estudo dos modelos de calibração comparativa usando o método de escore corrigido, onde se define como modelo de calibração comparativa o modelo que permite comparar instrumentos ou métodos de medição (capítulo 4). Estes modelos são casos particulares dos modelos com erros nas variáveis multivariados, segundo *Fuller, (1987)*.

1.4 Influência Local

Modelos estatísticos são ferramentas úteis para extrair e compreender as características essenciais de um conjunto de dados. Modelos são quase sempre, descrições aproximadas de processos reais bem complexos e portanto são quase sempre inexatos. Devido a estas inexatidões, o estudo do efeito de pequenas modificações na formulação do modelo torna-se importante. Se uma modificação pequena de uma descrição aproximada afeta fortemente os resultados de uma análise, este deve ser o centro de nosso interesse.

Por outro lado, se as alterações encontradas são desprezíveis, o modelo é robusto com relação às perturbações induzidas e nossa ignorância do modelo poderia não causar dano.

Uma técnica geral para avaliar a influência de pequenas perturbações no modelo ou nos dados é proposta por *Cook (1986)*, que se baseia na comparação dos modelos postulado e perturbado fazendo v variar em Ω , procurando elementos em v responsáveis pelo afastamento entre os modelos. Este método é conhecido como método de *influência local*. Permite avaliar a influência que pequenas perturbações podem exercer sobre componentes do modelo, tais como estimativa dos parâmetros e outros resultados da análise.

Um estudo sobre *influência local* no método de escore corrigido foi trabalhada por Lee e Zhao (1996), onde a influência de pequenas perturbações (denotada por v) podem ser obtidas pelo distanciamento do logaritmo da função verossimilhança corrigida $\ell^*(\beta)$,

$$F(v) = 2[\ell^*(\hat{\beta}) - \ell^*(\hat{\beta}(v))], \quad (1.22)$$

notemos que $\ell^*(\beta(v))$ corresponde a função verossimilhança corrigida e perturbada.

Cook (1986) aplica conceitos de geometria diferencial para quantificar $F(v)$. Para obter a curvatura normal na direção unitária d , $F(v)$ deve ser uma função não negativa com um mínimo global em v_0 , de tal forma que a curvatura normal em $F(v_0)$ na direção unitária d pode ser expressa como

$$C(d) = 2|d^t \Delta^t f^{-1} \Delta d|,$$

onde

$$\Delta = \frac{\partial^2 \ell^*(\beta | v)}{\partial \beta \partial v^t},$$

$$f = -\frac{\partial^2 \ell^*(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^t},$$

ambas avaliadas em v_0 e $\hat{\beta}$.

O diagnóstico da influência é derivado do análise dos autovalores de $\Delta^t f \Delta$, isto é, se consideramos $C_{max} = \max_{d: \|d\|=1} C(d)$ que corresponde ao maior autovalor de $-2\Delta^t f \Delta$ (veja, Seber, 1984; pag.526) e d_{max} é o autovetor associado ao maior autovalor C_{max} . Neste caso podemos considerar d_{max} como a direção que produz maior mudança local nas estimativas dos parâmetros, sendo que os elementos mais influentes podem ser identificados através da magnitude relativo dos elementos em d_{max} , enquanto que a sensibilidade em relação a perturbação causada pode ser indicada pelo valor de C_{max} .

Os objetivos do presente trabalho é estudar o método da *maxima verossimilhança corrigida* proposto por Nakamura (1990) e o método da *função escore corrigida* desenvolvido por Bolfarine e Gimenez (1997), assim como a *influência local* que se gera ao elaborar modelos polinomiais gerais com erros nas variáveis, fazendo estudos nos casos de

erros aditivos e multiplicativos para modelos funcionais e estruturais. Um caso particular de um análise multivariado será fazer um estudo em calibração comparativa.

Para atingir estes objetivos o trabalho foi organizado em quatro capítulos. No Capítulo 2, apresentamos um estudo dos métodos da *maxima verossimilhança corrigida* e da *função escore corrigido* quando se trabalha em um modelo polinomial com erros nas variáveis no caso aditivo, considerando modelos funcionais e estruturais. Neste capítulo se faz um estudo da estimação dos parâmetros nos casos quando σ_u^2 e λ são conhecidas, sendo $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$, a obtenção das variâncias assintóticas dos estimadores nos casos em que σ_u^2 e λ são conhecidas, assim como testes de hipóteses de interesse, um estudo da influência local e um estudo da estimação dos parâmetros quando as variâncias dos erros são heterogêneas, isto é, temos $\sigma_{e_i}^2$ e $\sigma_{u_i}^2$, $i = 1, \dots, n$. Enfatizamos que o caso em que $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$ é conhecido não é tratado na literatura por nenhum método. O mesmo se passa com o caso das variâncias heterogêneas.

No Capítulo 3 é abordado o estudo dos mesmos métodos *verossimilhança corrigida* e a *função escore corrigido* no modelo polinomial com erros nas variáveis considerando o erros multiplicativos. Tópicos similares aos desenvolvidos no Capítulo 2 também são considerados.

No Capítulo 4, se faz um estudo do método do *escore corrigido* considerando o caso da *calibração comparativa*, tanto com variâncias dos erros homogêneas quanto heterogêneas.

Modelo Aditivo

2.1 Introdução.

Nesta seção estudaremos os modelos polinomiais com erros de medição aditivos nas variáveis, que em termos gerais pode ser definido por

$$Y_i = \sum_{j=0}^p \beta_j X_i^j + e_i, \quad (2.1)$$

$$W_i = X_i + u_i, \quad (2.2)$$

$i = 1, \dots, n$. As equações (2.1) e (2.2) constituem um modelo polinomial com erros nas variáveis de tipo aditivo, onde as variáveis Y_i e W_i são variáveis observáveis, enquanto X_i é uma variável não observável, a qual é observada a traves de W_i . β_j , $j = 0, 1, \dots, p$ são os parâmetros que se deseja estimar, e_i é o erro do modelo proposto e u_i é o erro por observar W_i e não X_i , sendo $i = 1, \dots, n$. Se consideramos o modelo funcional o suposto a considerar no presente trabalho é definido pela expressão (1.4), no caso de trabalhar com o modelo estrutural será considerada a expressão (1.5). Devemos destacar que no desenvolvimento do presente trabalho podemos usar qualquer um dos modelos (funcional ou estrutural).

Como foi mencionado no capítulo 1, este modelo foi amplamente estudado sob variadas óticas. Nosso interesse neste capítulo é avaliar os modelos polinomiais acima considerando as metodologias propostas por Nakamura (1990) e Bolfarine e Gimenez (1997).

A análise se baseia no estudo da função log-verossimilhança corrigida e a partir dela gerar a função escore corrigida. Com a finalidade de verificar a condição de $E(\bullet \mid \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}(\bullet)$ serem permutáveis, será avaliada a função escore corrigido sem considerar a função log-verossimilhança corrigida, tendo que coincidir as duas formas de obtenção da função escore corrigido.

Na seção 2.2 estudamos a estimação dos parâmetros, as variâncias assintóticas dos estimadores e os testes de hipóteses para o caso em que σ_u^2 é conhecida. Na seção 2.3 apresentamos a estimação dos parâmetros, as variâncias assintóticas e os testes de hipóteses para o caso em que $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ é conhecida. Na seção 2.4 apresentamos um estudo de influência local, considerando alguns esquemas de perturbação e uma aplicação prática do caso 1 será considerada. Na seção 2.5 analisamos o caso em que as variâncias dos erros (σ_e^2 e σ_u^2) são heterogêneas.

2.2 Caso 1 : σ_u^2 conhecida

2.2.1 Estimação dos parâmetros

Nesta seção estudaremos a função verossimilhança corrigida derivada segundo a proposta de Nakamura (1990), desenvolvimento válido tanto para o modelo funcional quanto para o modelo estrutural.

a) Avaliação da função escore a partir do logaritmo da função verossimilhança “naive”

Para estimar os parâmetros β e σ_e^2 consideramos o logaritmo da função verossimilhança “naive”, como proposto em Nakamura (1990), dada por

$$\ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j)^2, \quad (2.3)$$

com a finalidade de se obter,

$$\begin{aligned} E(\ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y})) &= E[E(\ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mid \beta, \sigma_e^2; \mathbf{X}, \mathbf{Y})] \\ &= E(\ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{X}, \mathbf{Y})), \end{aligned}$$

da expressão da acima temos que

$$E(\ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mid \beta, \sigma_e^2; \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{X}, \mathbf{Y}). \quad (2.4)$$

Para chegar à expressão (2.4), iniciamos o valor esperado condicional de (2.3). Com a finalidade de simplificar nossa notação, fazemos $K = (\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Logo,

$$\begin{aligned} E(\ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \mid K) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n E \left[(Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j)^2 \mid K \right] \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 E(W_i^{2j} \mid K) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j E(W_i^j \mid K) + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_j \beta_s E(W_i^{j+s} \mid K) \right] \right\}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Considerando na expressão (2.5) o artifício seguinte,

$$E(W_i^m \mid K) = X_i^m + (E(W_i^m \mid K) - X_i^m), \quad (2.6)$$

temos:

$$\begin{aligned} E(\ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \mid K) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 X_i^{2j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j X_i^j + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_j \beta_s X_i^{j+s} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 (E(W_i^{2j} \mid K) - X_i^{2j}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j (E(W_i^j \mid K) - X_i^j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_j \beta_s (E(W_i^{j+s} \mid K) - X_i^{j+s}) \right] \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Na expressão (2.7) podemos identificar duas componentes. Uma primeira que corresponde ao logaritmo da função verossimilhança não observada ($\ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{X})$) e uma segunda que corresponde ao vício esperado condicional do logaritmo da função verossimilhança não corrigida, sendo este vício o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{vício} = \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 (E(W_i^{2j} | K) - X_i^{2j}) - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j (E(W_i^j | K) - X_i^j) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s (E(W_i^{j+s} | K) - X_i^{j+s}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Considerando a substituição de variáveis como em Cheng e Schneeweis (1998), isto é, $E(W_i^m | K)$ por W_i^m e X_i^m por $t_{i,(m)}$ na expressão (2.8), sendo $t_{i,(m)}$ a variável auxiliar observada através de W_i^m , e calculada como na expressão (1.13), temos que

$$\begin{aligned} \text{vício}^* = \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 (W_i^{2j} - t_{i,(2j)}) - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j (W_i^j - t_{i,(j)}) \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s (W_i^{j+s} - t_{i,(j+s)}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Agora o logaritmo da função de verossimilhança corrigida pode ser considerada segundo a seguinte expressão:

$$\ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = \ell(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) - \text{vício}^*.$$

Fazendo alguns cálculos algébricos temos que o logaritmo da função verossimilhança corrigida é dado por

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A partir do logaritmo da função verossimilhança corrigida podemos obter a função escore corrigida para cada parâmetro β e σ_e^2 derivando a expressão (2.9) com relação aos parâmetros de interesse, obtendo

$$U^*(\beta_s) = \frac{\partial \ell^*}{\partial \beta_s}(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n (Y_i t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+s)}), \quad (2.10)$$

sendo $s = 0, 1, \dots, p$,

$$\begin{aligned} U^*(\sigma_e^2) = \frac{\partial \ell^*}{\partial \sigma_e^2}(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = & -\frac{n}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} - \right. \\ & \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

b) Avaliação da função escore a partir da função escore “naive”.

Neste caso consideremos o logaritmo da função verossimilhança “naive” como em (2.3), derivamos esta função em relação aos parâmetros β e σ_e^2 , obtendo as funções escores não corrigidos (ou “naive”), como proposto em Bolfarine e Gimenez (1997). As derivadas são

$$U(\beta_s) = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_s}(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n (Y_i W_i^s - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^{j+s}), \quad s = 0, 1, \dots, p, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
U(\sigma_e^2) = \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_e^2}(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = & -\frac{n}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 W_i^{2j} \right. \\
& \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s W_i^{j+s} \right]. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Logo, a cada função escore “naive” obtida, aplicamos o valor esperado condicional com a finalidade de obter uma função $U^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y})$ tal que

$$\begin{aligned}
E[U^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W})] &= E\left\{E[U^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \mid \beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{X}]\right\} \\
&= E[U(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{X})] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

condição importante para obter a função escore corrigido. Então, devemos calcular

$$E(U(\beta_s) \mid K) = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i E(W_i^s \mid K) - \sum_{j=0}^p \beta_j E(W_i^{j+s} \mid K) \right], \quad s = 0, 1, \dots, p, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
E(U(\sigma_e^2) \mid K) = & -\frac{n}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 E(W_i^{2j} \mid K) - \right. \\
& \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j E(W_i^j \mid K) + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s E(W_i^{j+s} \mid K) \right]. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Aplicando o artifício apresentado em (2.6) nas expressões (2.14) e (2.15), temos que

$$\begin{aligned}
E(U(\beta_s) \mid K) &= \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i X_i^s - \sum_{j=0}^p \beta_j X_i^s \right] \\
&+ \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i (E(W_i^s \mid K) - X_i^s) - \sum_{j=0}^p \beta_j (E(W_i^{j+s} \mid K) - X_i^s) \right], \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{U}(\sigma_e^2) \mid K) = & -\frac{n}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 X_i^{2j} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j X_i^j \right. \right. \\
& + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s X_i^{j+s} \left. \right] \Big\} \\
& + \frac{1}{2\sigma_e^4} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 (E(W_i^{2j} \mid K) - X_i^{2j}) \right. \right. \\
& - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j (E(W_i^j \mid K) - X_i^j) \\
& + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s (E(W_i^{j+s} \mid K) - X_i^{j+s}) \left. \right] \Big\}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

As expressões (2.16) e (2.17) estão compostas por duas componentes. A primeira corresponde à função escore não observado e a segunda corresponde ao vício esperado condicional da função escore não corrigido, sendo os vícios dados por:

$$\begin{aligned}
\text{vício}(E(\mathbf{U}(\beta_s) \mid K)) = & \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i (E(W_i^s \mid K) - X_i^s) \right. \\
& \left. - \sum_{j=0}^p \beta_j (E(W_i^{j+s} \mid K) - X_i^{j+s}) \right], \\
\text{vício}(E(\mathbf{U}(\sigma_e^2) \mid K)) = & \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 (E(W_i^{2j} \mid K) - X_i^{2j}) \right. \\
& - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j (E(W_i^j \mid K) - X_i^j) \\
& + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s (E(W_i^{j+s} \mid K) - X_i^{j+s}) \left. \right].
\end{aligned}$$

Considerando a substituição de variáveis como em Cheng e Scheneeweis (1998), isto é, $E(W_i^m | K)$ por W_i^m e X_i^m por $t_{i,(m)}$, onde $t_{i,(m)}$ esta definida em (1.13), temos que

$$\begin{aligned} \text{vício}^*(U(\beta_s)) &= \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i(W_i^s - t_{i,s}) - \sum_{j=0}^p \beta_j(W_i^{j+s} - t_{i,(j+s)}) \right], \\ \text{vício}^*(U(\sigma_e^2)) &= \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2(W_i^{2j} - t_{i,(2j)}) - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j(W_i^j - t_{i,(j)}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s(W_i^{j+s} - t_{i,(j+s)}) \right], \end{aligned}$$

a função escore corrigido pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$U^*(\bullet) = U(\bullet) - \text{vício}^*(\bullet).$$

Após alguns cálculos algébricos temos as seguintes funções escores corrigidos,

$$U^*(\beta_s) = \frac{\partial \ell^*}{\partial \beta_s}(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n (Y_i t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+s)}), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} U^*(\sigma_e^2) &= \frac{\partial \ell^*}{\partial \sigma_e^2}(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = -\frac{n}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \\ &\quad \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

que coincidem com as expressões (2.10) e (2.11).

c) Elementos para a obtenção da expressão $t_{i,(m+1)} = W_i t_{i,(m)} - j \sigma_u^2 t_{i,(m-1)}$

Como a função escore corrigido e o logaritmo da função verossimilhança consideram em sua expressão uma variável auxiliar $t_{i,(m)}$ que é função de W_i^m , precisamos estabelecer

com $t_{i,(m)}$ uma relação com a variável observável W_i . Isto é feito a seguir. Para isto, primeiro precisamos relacionar $E(W_i^m)$ com X_i^m já que depois utilizaremos a substituição de variáveis como em Cheng e Schneeweis (1998). Para este relacionamento recorreremos ao seguinte teorema, de tal forma que $E(t_{i,(m)}) = X_i^m$, no caso do modelo funcional e $E(t_{i,(m)}) = E(X_i^m)$, no caso do modelo estrutural.

Teorema 1

Se $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, temos de (2.2) que

$$E(W_i^{j+1}) = X_i E(W_i^j) + j\sigma_u^2 E(W_i^{j-1}), \quad \forall j \geq 2, i = 1, \dots, n.$$

Prova

Como $W_i = X_i + u_i$, então o primeiro e segundo momentos de W_i são definidos por $E(W_i) = X_i$ e $E(W_i^2) = X_i^2 + \sigma_u^2$, devido ao fato que $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, e para $j = 2$ temos, seguindo a expressão do teorema, que

$$\begin{aligned} E(W_i^3) &= X_i E(W_i^2) + 2\sigma_u^2 E(W_i) \\ &= X_i(X_i^2 + \sigma_u^2) + 2\sigma_u^2 X_i \\ &= X_i^3 + 3X_i\sigma_u^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Se usamos a expressão (2.2) para obter o terceiro momento de W_i , temos que

$$\begin{aligned} E(W_i^3) &= E(X_i + u_i)^3 \\ &= \sum_{q=0}^3 \binom{3}{q} X_i^q E(u_i^{3-q}) \\ &= X_i^3 + 3X_i^2 E(u_i) + 3X_i E(u_i^2) + E(u_i^3), \end{aligned}$$

e como $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, então os momentos ímpares da variável u_i são todos iguais a zero, de modo que

$$E(W_i^3) = X_i^3 + 3X_i\sigma_u^2. \tag{2.21}$$

Notamos que as equações (2.20) e (2.21) são iguais. Isto permite-nos concluir que a expressão do **teorema 1** produz o terceiro momento da variável W_i corretamente.

Para o caso geral, temos que demonstrar que a expressão definida no **teorema 1** leva a expressão seguinte

$$E(W_i^{j+1}) = E(X_i + u_i)^{j+1} = \sum_{q=0}^{j+1} \binom{j+1}{q} X_i^q E(u_i^{j+1-q}). \quad (2.22)$$

Substituindo a expressão (2.22) nas somas no lado direito da equação do *teorema 1* temos que

$$E(W_i^{j+1}) = X_i \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} X_i^q E(u_i^{j-q}) + j\sigma_u^2 \sum_{q=0}^{j-1} \binom{j-1}{q} X_i^q E(u_i^{j-1-q}), \forall j \geq 2. \quad (2.23)$$

Com a finalidade de simplificar a expressão (2.24), especificamente o segundo somando da expressão, fazemos uso da seguinte proposição:

Proposição 1

Se $H_i \sim N(0, \sigma_h^2)$, a função geradora de momentos da variável H_i é $M_{H_i}(t) = \exp \frac{1}{2}\sigma_h^2 t^2$ valendo a seguinte relação:

$$\frac{\partial^{(j+1)}}{\partial t^{(j+1)}} M_{H_i}(t) = t\sigma_h^2 \frac{\partial^{(j)}}{\partial t^{(j)}} M_{H_i}(t) + j\sigma_h^2 \frac{\partial^{(j-1)}}{\partial t^{(j-1)}} M_{H_i}(t)$$

para $j \geq 2$, onde $\partial t^{(q)}$ denota a q -ésima derivada parcial em relação a t .

Usando a relação da *proposição 1* para obter o q -ésimo momento da variável H_i quando $t = 0$, temos

$$E(H_i^q) = \frac{\partial^{(q)}}{\partial t^{(q)}} M_{H_i}(0) = (q-1)\sigma_h^2 E(H_i^{q-2}).$$

Daqui podemos concluir que

$$\sigma_h^2 E(H_i^{s-2}) = \frac{E(H_i^s)}{s-1}, \quad s \geq 4. \quad (2.24)$$

Aplicando (2.24) no segundo somando da expressão (2.23) temos

$$\begin{aligned} E(W_i^{j+1}) &= X_i \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} X_i^q E(u_i^{j-q}) + j \sum_{q=0}^{j-1} \binom{j-1}{q} X_i^q \frac{E(u_i^{j+1-q})}{j-q} \\ &= \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} X_i^{q+1} E(u_i^{j-q}) + \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} X_i^q E(u_i^{j+1-q}). \end{aligned}$$

Desenvolvendo os somatórios temos

$$\begin{aligned}
E(W^{j+1}) &= \binom{j}{0} X_i^0 E(U_i^{j+1}) + \left[\binom{j}{0} + \binom{j}{1} \right] X_i E(U_i^j) \\
&\quad + \dots + \left[\binom{j}{j-1} + \binom{j}{j} \right] X_i^j E(u_i) + \binom{j}{j} X_i^{j+1} E(u_i^0).
\end{aligned}$$

Como

$$\binom{k}{q-1} + \binom{k}{q} = \binom{k+1}{q}, \quad \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} \quad \text{e} \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1},$$

chegamos à expressão (2.22). Deste modo fica provado o *teorema 1*.

Substituindo X_i por $t_{i,(1)}$ e $E(W_i^j)$ por W_i^j , podemos escrever a expressão do teorema 1 como

$$W_i^{j+1} = t_{i,(1)} W_i^j + j \sigma_u^2 W_i^{j-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

A relação acima estabelece W_i^m em função de $t_{i,(m)}$, mas precisamos a relação inversa, isto é, $t_{i,(m)}$ em função de W_i^m com a finalidade de ter os valores apropriados para a função escore corrigido que está em função de $t_{i,(m)}$. Para isto enunciamos o teorema 2.

Teorema 2

Se $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ e se (2.2) for válida, temos que

$$X_i^{j+1} = E(W_i) X_i^j - j \sigma_u^2 X_i^{j-1}, \quad \forall j \geq 2.$$

Prova

A expressão do *teorema 1* pode ser escrito como

$$X_i E(W_i^j) = E(W_i^{j+1}) - j \sigma_u^2 E(W_i^{j-1}).$$

Substituindo a expressão (2.23) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
X_i \left[\sum_{q=0}^j \binom{j}{q} X_i^{j-q} E(u_i^q) \right] &= \left[\sum_{q=0}^{j+1} \binom{j+1}{q} X_i^{j+1-q} E(u_i^q) \right] \\
&\quad - j \sigma_u^2 \left[\sum_{q=0}^{j-1} \binom{j-1}{q} X_i^{j-1-q} E(u_i^q) \right], \quad (2.25)
\end{aligned}$$

considerando $X_i = E(W_i)$ no primeiro somando do lado direito da expressão (2.25), temos

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} X_i^{j+1-q} E(u_i^q) &= \sum_{q=0}^{j+1} \binom{j+1}{q} E(W_i) X_i^{j-q} E(u_i^q) \\ &\quad - \sum_{q=0}^{j-1} \binom{j-1}{q} j \sigma_u^2 X_i^{j-1-q} E(u_i^q). \end{aligned}$$

A relação acima permite gerar a expressão seguinte

$$X_i^{j+1} = E(W_i) X_i^j - j \sigma_u^2 X_i^{j-1}, \quad (2.26)$$

esta expressão é válida para qualquer valor $j > 2$.

Considerando a expressão do teorema e as substituições de variáveis como em Cheng e Schneeweis (1998), temos que a expressão em (2.26) passa a ser

$$t_{i,(j+1)} = W_i t_{i,(j)} - j \sigma_u^2 t_{i,(j-1)}, \quad j > 2. \quad (2.27)$$

Com isto podemos ter a expressão da função escore corrigido em função de W_i e σ_u^2 , fazendo $t_{i,(0)} = 1$.

A técnica desenvolvida por Nakamura (1990) e Bolfarine e Gimenez (1997) é válida tanto no modelo funcional quanto no modelo estrutural.

Para o modelo estrutural a forma do *teorema 1* muda um pouco, sendo esta como no *teorema 3*.

Teorema 3

Se $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, e $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $i = 1, \dots, n$, temos a seguinte relação

$$E(W_i^{j+1}) = \mu_X E(W_i^j) + j(\sigma_u^2 + \sigma_X^2) E(W_i^{j-1}), \quad \forall j \geq 2.$$

Prova

Similar à prova do *teorema 1*.

No modelo estrutural a substituição de variáveis é um pouco diferente do modelo funcional apresentado por Cheng e Schneeweis (1998), sendo as substituições para o

modelo estrutural as seguintes: $E(W_i^m)$ por W_i^m e $E(X_i^m)$ por $t_{i,(m)}$, sendo a relação de $t_{i,(m)}$ como função de W_i a mesma que na expressão (2.27).

d) Observações.

- Considerando as funções escores corrigidas das expressões (2.18) e (2.19) podemos obter os seguintes estimadores dos parâmetros β e σ_e^2 , os quais tem expressões fechadas, quando σ_u^2 é conhecido.

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(p)} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j t_{i,(j)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \hat{\beta}_j \hat{\beta}_s t_{i,(j+s)} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

- A metodologia apresentada é válida tanto para modelos funcionais como para modelos estruturais.
- Esta metodologia se baseia em uma relação de recursividade para a obtenção dos estimadores.
- A metodologia proposta por Nakamura (1990) e a metodologia proposta por Bolfarine e Gimenez (1997) aplicadas aos modelos polinomiais com erros nas variáveis são coincidentes quando σ_u^2 é considerado conhecida.

- Os estimadores obtidos a partir de um modelo polinomial com erros nas variáveis usando o logaritmo da função verossimilhança corrigida Nakamura, (1990) ou a função escore corrigido Bolfarine e Gimenez, (1997) coincidem com os estimadores de mínimos quadrados ajustados (Cheng e Schneeweis, (1998)) quando σ_u^2 é conhecida.
- Para este caso (σ_u^2 conhecida) a condição fundamental da metodologia desenvolvida por Nakamura (1990), que é, $E(\bullet \mid \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}(\bullet)$ serem permutáveis, é satisfeita.

e) Exemplos.

1. Polinômio de primeiro grau

Considerando a expressão (2.28) e (2.29), para $p=1$ temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 t_{i,(2)} - 2Y_i \hat{\beta}_0 - 2Y_i \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} \right].$$

Após algumas manipulações algébricas temos

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n t_{i,(1)}}{n} \hat{\beta}_1,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} - \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} - \left(\sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \right)^2}.$$

Levando em conta (2.27) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} &= \sum_{i=1}^n W_i, \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} &= \sum_{i=1}^n W_i^2 - n\sigma_u^2 = nS_{WW} + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2 - n\sigma_u^2, \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} &= \sum_{i=1}^n Y_i W_i = nS_{WY} + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i \right) \end{aligned}$$

onde

$$nS_{WW} = \sum_{i=1}^n W_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2,$$

$$nS_{YW} = \sum_{i=1}^n Y_i W_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i \right),$$

logo,

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \bar{W} \hat{\beta}_1, \quad (2.30)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{YW}}{S_{WW} - \sigma_u^2}, \quad (2.31)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = S_{YY} + \hat{\beta}_1 \left[\hat{\beta}_1 (S_{WW} - \sigma_u^2) - 2S_{YW} \right]. \quad (2.32)$$

Os estimadores em (2.30) e (2.31) são similares aos obtidos pelo Bolfarine e Gimenez (1997), para $p = 1$.

2. Polinômio de segundo grau

Considerando as expressão (2.28) e (2.29) para $p=2$, temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(2)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n & \left[Y_i^2 + \hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 t_{i,(2)} + \hat{\beta}_2^2 t_{i,(4)} - 2Y_i \hat{\beta}_0 - 2Y_i \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} \right. \\ & \left. - 2Y_i \hat{\beta}_2 t_{i,(2)} + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_2 t_{i,(2)} + 2\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 t_{i,(3)} \right]. \end{aligned}$$

Considerando os seguintes desvios:

$$\begin{aligned}
A &= n \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \right), \\
B &= n \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(2)} - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \right), \\
C &= n \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} - \left(\sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \right)^2, \\
D &= n \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} - \left(\sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \right) \left(\sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \right), \\
E &= n \sum_{i=1}^n t_{i,(4)} - \left(\sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \right)^2,
\end{aligned}$$

após algumas manipulações algébricas temos

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \hat{\beta}_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \hat{\beta}_2, \quad (2.33)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{C} \left(A - D \hat{\beta}_2 \right), \quad (2.34)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{CB - DA}{EC - D^2}. \quad (2.35)$$

Levando em conta (2.27) segue $t_{i,(1)} = W_i$, $t_{i,(2)} = W_i^2 - \sigma_u^2$, $t_{i,(3)} = W_i^3 - 3W_i\sigma_u^2$ e $t_{i,(4)} = W_i^4 - 6W_i^2\sigma_u^2 + 3\sigma_u^4$, de forma que os desvios podem ser expressos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
A &= n^2 S_{YW}, & B &= n^2 S_{YW^2}, & C &= n^2 S_{WW} - n^2 \sigma_u^2, \\
D &= n^2 S_{WW^2} - 2n \sum_{i=1}^n W_i \sigma_u^2 & e \\
E &= n^2 S_{W^2W^2} - 4n^2 \sigma_u^2 S_{WW} - 4\sigma_u^2 \left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2 + 4n^2 \sigma_u^4.
\end{aligned}$$

Com estas novas expressões de A, B, C, D e E, podemos reescrever as expressões de $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$. O estimador de σ_e^2 , é obtido a partir de

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 = & (S_{YY} + S_{WW}\hat{\beta}_1^2 + S_{W^2W^2}\hat{\beta}_2^2 - 2S_{YW}\hat{\beta}_1^2 - 2S_{YW^2}\hat{\beta}_2^2 - 2S_{WW^2}\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_2^2) - \\ & -(4\hat{\beta}_2^2S_{WW} - \hat{\beta}_1^2 + 4\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\overline{W} + 4\hat{\beta}_2^2\overline{W^2})\sigma_u^2 + 2\hat{\beta}_2^2\sigma_u^4, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned} n^2S_{W^2W^2} &= n \sum_{i=1}^n W_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n W_i^2 \right)^2, \\ n^2S_{WW^2} &= n \sum_{i=1}^n W_i^3 - \left(\sum_{i=1}^n W_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i^2 \right), \\ n^2S_{WW} &= n \sum_{i=1}^n W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2, \\ n^2S_{YW^2} &= n \sum_{i=1}^n Y_i W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i^2 \right), \\ n^2S_{YW} &= n \sum_{i=1}^n Y_i W_i - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i \right). \end{aligned}$$

2.2.2 Obtenção da matriz de covariâncias assintóticas

No trabalho de Nakamura (1990) não foram apresentados as condições de regularidade para a validade dos resultados assintóticos, assumindo-se que a teoria de M-estimador (Huber, 1981) pode ser aplicada.

No trabalho de Bolfarine e Gimenes (1997) foram apresentadas as condições de regularidade que validam os resultados assintóticos, eles afirmam que se deve ter um tratamento rigoroso das condições de regularidade para o modelo funcional, já que a suposição de observações identicamente distribuídas não são verificadas. Isto é, para cada i , a distribuição (W_i, Y_i) dependerá do parâmetro estrutural θ e do parâmetro incidental X_i , porem qualquer convergência aos verdadeiros valores dependerá do comportamento assintótico assumido para a sequência de parâmetros incidentais (X_i) . Desta forma, as condições de regularidade impostas serão bastante diferentes das usuais no caso iid.

Bolfarine e Gimenes (1997) apresentam as condições de unicidade considerando as condições de regularidade, assim como a normalidade assintótica que são igualmente

válidas para nosso estudo, eles demonstraram que o estimador da matriz de covariâncias assintóticas tem a forma da expressão (1.21), deste modo nossa matriz de covariâncias assintóticas tem a mesma forma que a expressão referida, sendo esta

$$\mathcal{L}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} \mathbf{S}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1},$$

sendo

$$\mathbf{I}^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

e

$$\mathbf{S}^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t.$$

a partir disto temos

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_{p+1}(0, \mathcal{L}^*). \quad (2.37)$$

2.2.3 Teste de hipóteses para β

Bolfarine e Gimenes (1997) estudaram os testes apropriados para uma função escore corrigido qualquer, nos apresentaremos a adequação desse estudo ao caso polinomial, consideremos para esta situação que

$$U^*(\theta) = \begin{pmatrix} U^*(\beta_0) \\ U^*(\beta_1) \\ \vdots \\ U^*(\beta_p) \\ U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^*(\beta) \\ U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix},$$

$$I^*(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\beta_0) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\beta_0) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\beta_0) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta_0) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\beta_1) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\beta_1) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\beta_1) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\beta_p) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\beta_p) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\beta_p) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta_p) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\sigma_e^2) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\sigma_e^2) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\sigma_e^2) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \beta} U^*(\beta) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta} U^*(\sigma_e^2) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix}.$$

A partir dessas expressões podemos considerar que $\bar{\Lambda}_n(\theta) = \frac{1}{n} E [I^*(\theta)]$, onde $\theta = (\beta^t, \sigma_e^2)^t$ e $\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E [U_i^*(\theta) U_i^*(\theta)^t]$, quando n é grande as matrizes acima apresentadas, convergem para as matrizes positivas definidas $\Lambda(\theta)$ e $\Gamma(\theta)$. Como nosso interesse é testar a hipótese nula $H_0 : \beta = \beta^0$ na presença do parâmetro “nuisance” σ_e^2 , as matrizes particionadas segundo as dimensões de σ_e^2 e β são

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \Lambda_{\beta\beta}(\theta) & \Lambda_{\beta\sigma_e^2}(\theta) \\ \Lambda_{\sigma_e^2\beta}(\theta) & \Lambda_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta) \end{pmatrix} \quad \Gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \Gamma_{\beta\beta}(\theta) & \Gamma_{\beta\sigma_e^2}(\theta) \\ \Gamma_{\sigma_e^2\beta}(\theta) & \Gamma_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta) \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $\Lambda_{\beta\beta}(\theta)$ ou $\Gamma_{\beta\beta}(\theta)$ são de dimensão $(p+1) \times (p+1)$, os vetores $\Lambda_{\beta\sigma_e^2}(\theta)$ ou $\Gamma_{\beta\sigma_e^2}(\theta)$ são de dimensão $1 \times (p+1)$ e o escalar $\Lambda_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta)$ ou $\Gamma_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta)$ são de dimensão 1×1 .

Sejam $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^t, \hat{\sigma}_e^2)^t$ e $\hat{\theta}_0 = (\hat{\beta}_0^t, \hat{\sigma}_e^2)^t$ estimadores consistentes de θ , satisfazendo $U^*(\hat{\theta}) = 0$ e $U^*(\hat{\beta}) = 0$, ou seja, $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}_0$ são estimadores corrigidos irrestritos e restritos a H_0 , respectivamente. Os testes de Wald e Escore que podem ser aplicados são

$$W = n(\hat{\beta} - \beta^0)^t \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}(\hat{\theta}_0)(\hat{\beta} - \beta^0), \quad (2.38)$$

$$Q = \frac{1}{n} U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0)^t \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0), \quad (2.39)$$

$$W_c = n(\hat{\beta} - \beta^0)^t \hat{\Omega}_{\beta\beta}^{-1}(\hat{\theta}_0)(\hat{\beta} - \beta^0), \quad (2.40)$$

sendo

$$\hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}(\hat{\theta}_0) = \hat{\Lambda}_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) - \hat{\Lambda}_{\sigma_e^2\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}_{\beta\sigma_e^2}(\hat{\theta}_0),$$

e

$$\hat{\Omega}_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) = \left(\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Gamma}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0) \right)_{\beta\beta},$$

assim também

$$Q_c = \frac{1}{n} U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0)^t \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Omega}_{\beta\beta}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0). \quad (2.41)$$

Quando a função escore corrigido corresponde a gradiente do logaritmo da função de verossimilhança corrigida $\ell^*(\theta)$, isto é,

$$U^*(\theta) = \frac{\partial \ell^*(\theta)}{\partial \theta},$$

é possível definir um teste de razão de verossimilhança corrigida. A estatística de razão de verossimilhança corrigida é definida

$$L = 2 \ell^*(\hat{\theta}) - \ell^*(\hat{\theta}_0) . \quad (2.42)$$

Bolfarine e Gimenes (1997) demonstraram que os testes (2.38), (2.39) e (2.42) tem a mesma distribuição assintótica sob a hipótese nula, assim também demonstraram que os testes (2.40) e (2.41) também são assintoticamente equivalentes.

2.2.4 Aplicações numéricas.

Para avaliar a metodologia apresentada consideramos duas situações, uma simulação de Monte Carlo e um conjunto de dados reais.

a. Um estudo de simulação

Consideramos para nossa simulação o modelo funcional em um polinômio de grau dois. efetuamos 1.000 replicações para estudar a convergência dos estimadores e os seguintes parâmetros são tomados em consideração:

1. Para n especificado, selecionamos $X_i \sim \text{Binomial}(n; 0, 5)$, independente $u_i \sim N(0; 0, 05)$ independentes e $e_i \sim N(0; 1)$ independentes para $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Obtenção dos dados:

$$\begin{aligned} W_i &= X_i + u_i, \\ Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

sendo $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$.

3. Para efeitos práticos, deve-se considerar as expressões (2.33)-(2.36), para a estimação dos parâmetros.

Resultados

Em seguida apresentamos os resultados obtidos da simulação implementada acima em linguagem OX (Doornik, 1998)

Tabela 2.1. Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Naive			Escore corrigido		
		Estimativa	Desv.Pad.	EQM	Estimativa	Desv.Pad.	EQM
500	$\hat{\beta}_0$	0,9769	0,5689	0,3242	1,0172	0,6183	0,3826
	$\hat{\beta}_1$	1,2403	0,2829	0,1378	0,9873	0,3090	0,0956
	$\hat{\beta}_2$	0,9565	0,0322	0,0029	1,0019	0,0351	0,0012
	$\hat{\sigma}_e^2$	7,5487	-	43,1570	0,9340	-	0,2866
1000	$\hat{\beta}_0$	1,1045	0,5242	0,2857	1,0049	0,5767	0,3326
	$\hat{\beta}_1$	1,1701	0,2474	0,0902	0,9984	0,2720	0,0740
	$\hat{\beta}_2$	0,9635	0,0268	0,0020	1,0001	0,0293	0,0009
	$\hat{\sigma}_e^2$	7,3512	-	40,4760	0,9679	-	0,1457
2000	$\hat{\beta}_0$	0,9936	0,3670	0,1347	0,9973	0,4064	0,1651
	$\hat{\beta}_1$	1,2500	0,1760	0,0935	1,0026	0,1950	0,0380
	$\hat{\beta}_2$	0,9529	0,0195	0,0026	0,9996	0,0215	0,0005
	$\hat{\sigma}_e^2$	7,3875	-	40,8670	0,9859	-	0,0712
3000	$\hat{\beta}_0$	0,9684	0,2987	0,0902	1,0132	0,3317	0,1102
	$\hat{\beta}_1$	1,2741	0,1446	0,0960	0,9932	0,1608	0,0259
	$\hat{\beta}_2$	0,9492	0,0161	0,0028	1,0007	0,0179	0,0003
	$\hat{\sigma}_e^2$	7,3451	-	40,3040	0,9999	-	0,0456
4000	$\hat{\beta}_0$	1,1363	0,2514	0,0818	0,9989	0,2770	0,0768
	$\hat{\beta}_1$	1,1793	0,1201	0,0466	1,0002	0,1323	0,0175
	$\hat{\beta}_2$	0,9605	0,0132	0,0017	1,0000	0,0146	0,0002
	$\hat{\sigma}_e^2$	7,3612	-	40,4980	0,9903	-	0,0351

Como se pode observar na tabela acima, as estimativas para os parâmetros β e σ_e^2 obtidos pelo método de “escore corrigido” se aproximam dos valores selecionados em nossa simulação. Observa-se também, que as estimativas para os parâmetros β obtidos pelo método “naive” se aproximam, mais não quanto as estimativas obtidas pelo método de “escore corrigido”, se consideramos σ_e^2 obtido pelo método “naive” observa-se que a estimativa está muito afastado do valor selecionado para a simulação, além disso, observa-se que quanto o tamanho da amostra aumenta o Erro Quadrático Médio (EQM) é mais pequeno no método de “escore corrigido” que no método “naive”. Uma representação gráfica é apresentada a continuação,

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para σ_e^2

Fig. 2.1. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

Nas figuras acima podemos observar que os valores correspondentes aos estimadores dos parâmetros pelo método “naive” não são tão bons como os estimadores obtidos pelo método “escore corrigido” na presente simulação.

b. Um caso prático.

Para observar melhor as vantagens do método de escore corrigido consideramos o exemplo de Fuller (1987) onde é apresentada uma simulação com 120 observações (pag. 266) para um modelo quadrático. Para a aplicação do método de mínimos quadrados generalizados ele supôs que $\sigma_u^2 = 0,09$ para a análise. Os dados encontram-se no anexo deste trabalho, sendo as variáveis consideradas Y_1 e W .

Resultados

Os dados apresentam a seguinte dispersão

Fig. 2.2. Gráfico da dispersão das variáveis Y_1 e W

Da figura acima observa-se que os dados se alinham de acordo a uma curvatura, segundo a linha vermelha traçado no gráfico poderia tratar-se de uma curvatura quadrática, na construção do modelo consideramos um modelo polinomial de grau dois para analisar a curvatura observada. Os resultados obtidos a partir do método “naive”, “escore corrigido” e o apresentado por fuller é descrito na seguinte tabela

Tabela 2.2. Comparação das estimativas segundo os métodos “naive”, “escore corrigido” e de Fuller

Parâmetro	Naive		Escore corrigido		Fuller	
	Estimativa	Desv.Pad.	Estimativa	Desv.Pad.	Estimativa	Desv.Pad.
β_0	0,215	0,058	-0,024	0,041	-0,005	0,108
β_1	0,459	0,054	0,543	0,037	0,540	0,098
β_2	0,482	0,068	1,047	0,063	1,007	0,230
σ_e^2	0,203	-	0,081	-	0,090	-

Da tabela acima pode-se observar que tanto o modelo proposto por Fuller (1987) quanto o modelo de “escore corrigido” apresentam estimativas bastante semelhantes, enquanto o método “naive” está fornecendo estimativas diferentes a os outros dois métodos. Para observar a similitude ou diferenças entre os métodos, consideramos o gráfico a seguir,

Fig. 2.3. Comportamento das estimativas dos três modelos

Na figura de acima observa-se as estimativas de Fuller (1987) definido pelos pontos “◆” e as estimativas do método de escore corrigido definido pelos pontos “△” são quase coincidentes, enquanto as estimativas pelo método naíve definidos pelos pontos “□” segue outro comportamento diferente aos outros dois métodos.

Quando consideramos o método escore corrigido e desejamos saber que parâmetro em estudo realmente existe em um modelo quadrático, a tabela a seguir apresenta os resultados considerando os testes de Razão de Verossimilhança (R.V.), Wald e Escore para avaliar a hipótese $H_0 : \beta_0 = 0$ vs $H_1 : \beta_0 \neq 0$; $H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$; $H_0 : \beta_2 = 0$ vs $H_1 : \beta_2 \neq 0$, segundo a metodologia apresentada.

Tabela 2.3. Teste de Hipótese para os parâmetros do modelo.

Parâmetro	Estimador	R.V.	p-value	Wald	p-value	Escore	p-value
β_0	-0,024409	1,7627	0,18428	0,0458	0,83037	17,0670	0,00003
β_1	0,543150	219,47	0,00000	29,132	0,00000	1653,40	0,00000
β_2	1,046900	681,94	0,00000	18,672	0,00001	24906,0	0,00000

Notemos que ao efetuar o teste no exemplo proposto por Fuller (1987) para cada um dos parâmetros envolvidos em um modelo quadrático, os testes da razão de verossimilhanças, wald e escore consideram a presença dos parâmetros β_1 e β_2 no modelo, enquanto só o teste de escore aceita a presença do parâmetro β_0 no modelo. Como β_0 não vai modificar muito nossas previsões, podemos definir que o modelo a considerar para esse conjunto de dados seria

$$Y_i = \underset{(0,041)}{-0,024} + \underset{(0,037)}{0,543} W_i + \underset{(0,063)}{1,047} W_i^2 + e_i.$$

Uma representação gráfica dos modelos linear e quadrático para o método escore corrigido é apresentado a continuação,

Fig. 2.4. Comportamento das estimativas do modelo linear e quadrático no escore corrigido

Do gráfico acima podemos dizer que o modelo quadrático acompanha melhor ao conjunto de dados em estudo.

2.3 Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida

2.3.1 Estimação dos parâmetros

Nesta seção estudaremos a função escore corrigida derivada segundo a proposta de Bolfarine e Gimenez (1997), a metodologia a apresentar é válida para o modelo funcional quanto ao modelo estrutural.

a) Obtenção da função escore a partir do logaritmo da função verossimilhança “naive”

Dado que $\sigma_e^2 = \lambda\sigma_u^2$, o logaritmo da função verossimilhança “naive” é definido similarmente à expressão (2.3), isto é,

$$\ell(\beta, \sigma_u^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\lambda) - \frac{n}{2} \log(\sigma_u^2) - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j)^2. \quad (2.43)$$

Considerando os passos vistos na seção 2.2.1 (a), temos que o logaritmo da função verossimilhança corrigida é análogo com a expressão (2.9), isto é,

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, \sigma_u^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{n}{2} \log(2\pi\lambda) - \frac{n}{2} \log(\sigma_u^2) - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde $t_{i,(j)}$ é dado em (2.27).

Para obter a função escore corrigido, deve-se derivar (2.44) em relação a cada parâmetro, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\mathbf{U}^*(\beta_s) = \frac{1}{\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^n (Y_i t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+s)}), \quad (2.45)$$

para $s = 0, 1, \dots, p$ e

$$\begin{aligned}
U^*(\sigma_u^2) = & -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right] \\
& - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 \frac{\partial t_{i,(2j)}}{\partial \sigma_u^2} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{\partial t_{i,(j)}}{\partial \sigma_u^2} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s \frac{\partial t_{i,(j+s)}}{\partial \sigma_u^2} \right] \quad (2.46)
\end{aligned}$$

O calculo das derivadas $\frac{\partial}{\partial \sigma_u^2} t_{i,(j)}$ tem a forma seguinte,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_u^2} t_{i,(j+1)} = W_i \frac{\partial}{\partial \sigma_u^2} t_{i,(j)} - j \left(t_{i,(j-1)} + \sigma_u^2 \frac{\partial}{\partial \sigma_u^2} t_{i,(j-1)} \right)$$

b) Obtenção da função escore a partir da função escore “naive”.

Considerando o logaritmo da função verossimilhança “naive” apresentada na expressão (2.43) e derivando esta em relação a cada parâmetro temos as seguintes funções escore “naive”:

$$U(\beta_s) = \frac{1}{\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i W_i^s - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^{j+s} \right], \quad (2.47)$$

$$U(\sigma_u^2) = -\frac{1}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j \right)^2. \quad (2.48)$$

Repetindo os passos vistos na seção 2.2.1 (b), temos que a função escore corrigida é,

$$U^*(\beta_s) = \frac{1}{\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+s)} \right], \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}
U^*(\sigma_u^2) = & -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left(Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} \right. \\
& \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Sendo $t_{i,(m)}$ uma variável que esta em função de σ_u^2 , e que tem a forma como na expressão (2.27).

c) Observações

- A condição fundamental na proposta de Nakamura, estabelecendo que $E(\bullet|\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e $\frac{\partial(\bullet)}{\partial\theta}$ serem permutáveis, não é satisfeita neste caso, pois observemos que as expressões (2.46) e (2.50) não coincidem. Para este caso adotamos a metodologia proposta por Bolfarine e Gimenez (1997).
- A metodologia proposta por Bolfarine e Gimenez (1997) aplicada aos modelos polinomiais não foi explorada até agora.
- No caso do modelo com $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2} = \lambda$ conhecido não dá para usar a verossimilhança corrigida mas dá para usar o escore corrigido. Bolfarine e Gimenez (1997), descobriram esta mesma situação num modelo linear, agora segundo nossa análise este problema pode se estender também para o caso do modelo polinomial.
- De acordo com a metodo da função escore corrigido proposta por Bolfarine e Gimenez (1997), temos que as equações lineares definidas a partir das expressões (2.49) e (2.50) permitem-nos obter um processo iterativo para a estimação dos parâmetros. Inicialmente igualamos (2.49) a o resultado em

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(p)} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

onde cada $t_{i,(s)}$ é obtido segundo a expressão (2.27), enquanto que o estimador de σ_u^2 segue da expressão

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_u^2 = & \frac{1}{\lambda n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j t_{i,(j)} \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \hat{\beta}_j \hat{\beta}_s t_{i,(j+s)} \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

- Devido à inter dependência das expressões (2.51) e (??), desenvolvemos um processo iterativo tipo Newton-Raphson modificado para acelerar o processo de convergência para estimar o parâmetro σ_u^2 . Para isto consideramos a função escore corrigida para σ_u^2 que se obtém a partir da expressão (2.50). A derivada desta com relação a σ_u^2 é a informação observada deste parâmetro. O algoritmo é composto dos seguintes passos:

1. Escolha-se um valor inicial para σ_u^2 .
2. Substituir σ_u^2 na expressão (2.51).
3. Procede-se com o método de Newton-Raphson modificado para obter o novo valor de σ_u^2 , isto é,

$$\sigma_u^{2(m+1)} = \sigma_u^{2(m)} + \mathbf{I}^{-1}(\sigma_u^{2(m)}) \mathbf{U}(\sigma_u^{2(m)}), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.53)$$

$\mathbf{I}(\sigma_u^{2(m)})$ é obtida derivando a expressão (2.50) com relação a σ_u^2 , e $\mathbf{U}(\sigma_u^{2(m)})$ é obtida da expressão (2.50).

4. Retornar ao passo 2.

d) Exemplos.

1. Polinômio de primeiro grau

O estimador de β_0 é dado pela expressão (2.30). Em (2.32) fazemos $\hat{\sigma}_e^2 = \lambda \hat{\sigma}_u^2$ obtendo

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{S_{YY} + \hat{\beta}_1^2 S_{WW} - 2\hat{\beta}_1 S_{YW}}{\lambda + \hat{\beta}_1^2}. \quad (2.54)$$

Ao substituir (2.54) em (2.31), obtemos

$$\hat{\beta}_1 = \frac{-(\lambda S_{WW} - S_{YY}) + \sqrt{(\lambda S_{WW} - S_{YY})^2 + 4\lambda S_{YW}}}{2S_{YW}}. \quad (2.55)$$

Se $\lambda = 1$ temos

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(S_{YY} - S_{WW}) + \sqrt{(S_{YY} - S_{WW})^2 + 4S_{YW}}}{2S_{YW}}, \quad (2.56)$$

que é o estimador obtido por Bolfarine e Gimenez (1997).

2. Polinômio de segundo grau

Para estimar os parâmetros deste modelo procedemos do seguinte modo:

- (a) Atribuir um valor inicial a σ_u^2 .
- (b) De (2.49) formamos o sistema:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

onde para os elementos da matriz de acima deve-se considerar, $t_{i,(1)} = W_i$, $t_{i,(2)} = W_i^2 - \sigma_u^2$, $t_{i,(3)} = W_i^3 - 3W_i\sigma_u^2$ e $t_{i,(4)} = W_i^4 - 6W_i^2\sigma_u^2 + 3\sigma_u^4$.

De acordo com (2.50) a função escore corrigido para σ_u^2 é dada por

$$\begin{aligned}
U^*(\sigma_u^2) = & -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^2 \hat{\beta}_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^2 \hat{\beta}_j t_{i,(j)} + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^2 \hat{\beta}_j \hat{\beta}_s t_{i,(j+s)} \right], \tag{2.58}
\end{aligned}$$

e a informação observada tem a expressão

$$I^*(\sigma_u^2) = \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left[n\lambda + \beta_1^2 + 6\beta_2^2 t_{i,(2)} - 2Y_i \beta_2 + 2\beta_0 \beta_2 + 6\beta_1 \beta_2 t_{i,(1)} \right], \tag{2.59}$$

- (c) Obter o novo valor de σ_u^2 a partir do algoritmo Newton-Raphson, como na expressão (2.53)

2.3.2 Obtenção da matriz de covariâncias assintóticas

Para a obtenção da matriz de covariâncias assintóticas consideramos a expressão (1.21)

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{n} (I^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} S^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (I^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1},$$

onde,

$$I^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

e

$$S^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t.$$

concluindo que

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_{p+1}(0, \mathcal{L}^*).$$

2.3.3 Teste de Hipótese.

Devido à falta de uma da função verossimilhança corrigida adequada para este caso em estudo, recorreremos à função escore corrigido, que nos permite propor as seguintes estatísticas de teste:

- **Teste de wald.**

Esta é definido pela expressão seguinte

$$Q_W = \left(\hat{\beta} - \beta^{(0)} \right)^t \mathcal{L}(\beta) \left(\hat{\beta} - \beta^{(0)} \right) \sim \chi_{(d)}^2$$

onde $d = \dim(H_{01}) - \dim(H_0) = (p+1) - (p+1-q) = q$, sendo as hipóteses de interesse são $H_0 : \beta = \beta^{(0)}$ e $H_1 : \beta \neq \beta^{(0)}$ e q representa o número de parâmetros a serem testados.

- **Teste do escore (Rao)**

Esta é definido pela expressão seguinte

$$Q_E = U^*(\beta^{(0)}) \mathcal{L}(\beta^{(0)})^{-1} U^*(\beta^{(0)}) \sim \chi_{(d)}^2$$

2.3.4 Aplicações numéricas

Para avaliar a metodologia apresentada consideramos duas situações, uma simulação de Monte Carlo e uma situação prática.

a. Um estudo de simulação

Para esta simulação consideramos os seguintes processos

- Para n especificado selecionamos $X_i \sim \text{Poisson}(n, 1)$ independente, $u_i \sim N(0; 0, 05)$ independente e $e_i \sim N(0; 1)$ independente, para $i = 1, 2, \dots, n$.
- Obter os dados fazendo,

$$W_i = X_i + u_i,$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sendo β_0 , β_1 e β_2 iguais a um.

- Para efeitos práticos deve-se considerar as expressões (2.57)-(2.59), para a estimação dos parâmetros.

Resultados

Em seguida os resultados obtidos da simulação implementada acima em linguagem OX (Doornik, 1998) são apresentados na tabela seguinte

Tabela 2.4. Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Naive			Escore corrigido		
		Estimativa	Desv.Pad.	EQM	Estimativa	Desv.Pad.	EQM
500	$\hat{\beta}_0$	1,25450	0,07231	0,07002	1,00950	0,13310	0,01781
	$\hat{\beta}_1$	0,75959	0,15865	0,08297	0,93902	0,37569	0,14486
	$\hat{\beta}_2$	0,88381	0,07027	0,01844	1,02640	0,14208	0,02088
	$\hat{\sigma}_u^2$	3,85310	-	13,10600	0,24587	-	0,00053
1000	$\hat{\beta}_0$	1,29960	0,05332	0,09258	1,00590	0,09813	0,00967
	$\hat{\beta}_1$	0,77550	0,11952	0,06468	0,96082	0,27916	0,07947
	$\hat{\beta}_2$	0,86672	0,05261	0,02053	1,01780	0,10761	0,01190
	$\hat{\sigma}_u^2$	3,95360	-	13,77800	0,24770	-	0,00026
2000	$\hat{\beta}_0$	1,24150	0,03475	0,05952	1,00430	0,06062	0,00369
	$\hat{\beta}_1$	0,86194	0,07910	0,02532	0,98314	0,20693	0,04310
	$\hat{\beta}_2$	0,83327	0,03684	0,02916	1,00800	0,08313	0,00697
	$\hat{\sigma}_u^2$	3,69840	-	11,91800	0,24931	-	0,00013
3000	$\hat{\beta}_0$	1,26530	0,03077	0,07135	1,00230	0,05233	0,00274
	$\hat{\beta}_1$	0,83593	0,06779	0,03151	0,98985	0,17006	0,02902
	$\hat{\beta}_2$	0,83954	0,03151	0,02674	1,00340	0,06838	0,00469
	$\hat{\sigma}_u^2$	3,78680	-	12,52900	0,24996	-	0,00009
4000	$\hat{\beta}_0$	1,26600	0,02577	0,07142	0,99900	0,04587	0,00210
	$\hat{\beta}_1$	0,86994	0,05854	0,02034	0,99886	0,14884	0,02215
	$\hat{\beta}_2$	0,82695	0,02662	0,03066	1,00160	0,05926	0,00351
	$\hat{\sigma}_u^2$	3,79670	-	12,59200	0,24953	-	0,00006

Como se pode observar na tabela acima, os estimadores dos parâmetros β obtidos pelo método do escore corrigido atingem aos parâmetros propostos em nossa simulação, da mesma maneira os valores de σ_u^2 esta próximos dos valores fixados na simulação, enquanto as estimativas obtidas pelo método “naive” não se aproximam dos verdadeiros valores.

Uma representação gráfica é apresentada a seguir

(a) Estimativa para β_0

(b) Estimativa para β_1

(c) Estimativa para β_2

(d) Estimativa para σ_e^2

Fig. 2.5. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

Na figura de acima podemos observar que os valores correspondentes aos estimativas para os parâmetros “naive” não conseguem atingir os valores implementados na presente simulação, enquanto as estimativas para os parâmetros “escore corrigido” se aproximam adequadamente.

b. Um caso prático.

Neste caso consideramos um outro exemplo proposto por Fuller (1987) com 120 observações (pag. 248), adotando para isto um modelo quadrático, em que $\sigma_u^2 = 0,09$ e $\lambda = 1$ para a análise, Os dados encontram-se no anexo (tabela 4.25) sendo as variáveis consideradas Y_2 e W .

Resultados

Os dados considerados apresentam a seguinte dispersão

Fig. 2.6. Gráfico da dispersão das variáveis Y_2 e W

Tabela 2.5. Estimativas segundo as metodologias “naive” e “escore corrigido”.

Parâmetro	Naive		Escore Corrigido	
	Estimativa	Desvio Padrão	Estimativa	Desvio Padrão
β_0	0,20469	0,054678	-0,023631	0,10310
β_1	0,00178	0,050845	0,004183	0,09509
β_2	0,48967	0,064726	1,027800	0,22073
σ_u^2	0,18328	-	0,087207	-

Fig. 2.7. Gráfico do comportamento das estimativas dos métodos “naive” e “escore corrigido”

Podemos observar da tabela (2.5) e da figura (2.7) que o modelo quadrático quando é usado o método do escore corrigido se ajusta melhor aos dados que o método naive, por outro lado na tabela (2.5) observa-se que, quem estima melhor o valor de σ_u^2 é o método do escore corrigido.

Tabela 2.6. Avaliação das estimativas do método “escore corrigido”, usando o teste de wald.

Parâmetro	Estimativa	Teste de wald	nível descritivo
β_0	-0,023631	0,00071228	0,97871
β_1	0,004183	0,00001898	0,99652
β_2	1,027800	6,17680000	0,01294

Segundo o teste de wald podemos observar que o modelo só considera a β_2 como o único parâmetro válido para o modelo, a partir disto reformulamos o modelo sendo este o seguinte

$$Y_i = \underset{(0,10307)}{-0,023622} + \underset{(0,22067)}{1,0278} W_i^2$$

Fuller (1987) utilizou o mesmo conjunto de dados para avaliar as estimativas segundo o método de momentos e com o programa SUPER CARP obteve as estimativas seguintes,

$$Y_i = \underset{(0,074)}{0,016} + \underset{(0,134)}{1,019} W_i^2,$$

se bem é certo ele não considerou em sua análise a relação $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida, mas o interessante é que com uma metodologia diferente nos obtivemos resultados próximos.

2.4 Influência Local

2.4.1 Metodologia

Um dos métodos mais modernos de diagnóstico foi proposto por Cook (1986). A idéia básica consiste em estudar o comportamento de algumas medidas particulares de influência segundo pequenas perturbações nos dados modelo.

Em nosso estudo analisaremos só o caso 1 (onde σ_u^2 é conhecida), já que no caso 2 (λ conhecida), não dispomos do logaritmo da função verossimilhança corrigida.

A influência das perturbações sobre os estimadores de máxima verossimilhança corrigida de θ pode ser quantificado pelo afastamento da verossimilhança, definido pela expressão

$$F(v) = 2[\ell^*(\hat{\beta}) - \ell^*(\hat{\beta}(v))],$$

onde $F(v)$ é o distanciamento entre os logaritmos das funções verossimilhança corrigidas, $\ell^*(\hat{\theta})$ e $\ell^*(\hat{\theta}(v))$ são os logaritmos das funções verossimilhança corrigidas dos modelos postulado e perturbado, respectivamente $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}(v)$ correspondem aos estimadores de máxima verossimilhança corrigida de β , v é o vetor de perturbações, de dimensão $n \times 1$.

Cook (1986), com a finalidade de quantificar o distanciamento $F(v)$ avalia a curvatura normal na direção unitária d . Para tanto $F(v)$ deve ser uma função não negativa com mínimo global em v_0 , de maneira que a curvatura normal a $F(v_0)$ na direção unitária d é expressa como visto no capítulo 1, isto é,

$$C(d) = 2|d^t \Delta^t f^{-1} \Delta d|,$$

onde

$$\Delta = \frac{\partial^2 \ell^*(\beta | v)}{\partial \beta \partial v^t},$$

e

$$f = -\frac{\partial^2 \ell^*(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^t},$$

existem muitas formas de obter a influência local, mas aquela que corresponde a maior curvatura C_{max} é a mais usada, esta curvatura produz a maior mudança local nas estimativas dos parâmetros, e esta corresponde ao maior autovalor de $\Delta^t f^{-1} \Delta$, sendo o maior distanciamento definido por d_{max} , onde d_{max} é definida como o autovetor associada ao maior autovalor de $\Delta^t f^{-1} \Delta$.

$$\left(\Delta^t f^{-1} \Delta \right) |_{v=v_0; \beta=\hat{\beta}^0}, \quad (2.60)$$

onde Δ é a matriz $(p \times q)$ com elementos da forma,

$$\Delta_{sj} = \frac{\partial^2}{\partial v_s \partial \beta_j} \ell^*(\beta, v; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

para $j = 0, 1, 2, \dots, p$, e $s = 0, 1, 2, \dots, p$, onde j representa os índices dos parâmetros a serem estimados, e s representa o índice correspondente as perturbações a efetuar, f é a matriz de Informação de Fisher observada no modelo postulado ($v = v_0$), calculada em $\theta = \hat{\theta}$.

2.4.2 Esquemas de perturbação

a) Perturbação da Ponderação dos casos.

Consideremos o vetor v de dimensão $(n \times 1)$ de pesos aplicados ao logaritmo da função verossimilhança corrigida, onde $v_i = 1$, significa que a observação é incluída e $v_i = 0$ significa exclusão para $i = 1, 2, \dots, n$.

O logaritmo da função verossimilhança corrigida perturbada tem expressão,

$$\ell^*(\beta, v; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n v_i \ell^*(\beta, \sigma_e^2; W_i, Y_i), \quad (2.61)$$

onde $\ell^*(\beta, \sigma_e^2; W_i, Y_i)$, foi definido em (2.9), e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^t$. Observe-se que, neste caso o modelo não perturbado é obtido ao considerar $v_i = \mathbf{1}_n$.

Derivando (2.61) com respeito a v^t temos que

$$\frac{\partial}{\partial v^t} \ell^*(\beta, v, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = (\ell^*(\beta, v, \sigma_e^2; W_1, Y_1), \dots, \ell^*(\beta, v, \sigma_e^2; W_n, Y_n)),$$

logo derivando com respeito a θ , sendo $\theta = (\beta, \sigma_e^2)^t$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial \theta \partial v^t} \ell^*(\beta, v, \sigma_e^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\ell^*(\beta, v, \sigma_e^2; W_1, Y_1), \dots, \ell^*(\beta, v, \sigma_e^2; W_n, Y_n)), \\ &= (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_e^2} (Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)}) \\ \frac{1}{\sigma_e^2} (Y_i t_{i,(1)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+1)}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_e^2} (Y_i t_{i,(p)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+p)}) \\ -\frac{1}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \left(Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right) \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

para $j, s = 0, 1, \dots, p$, p representa ao total dos parâmetros β em estudo. A direção d_{max} é obtida a partir do maior valor autovalor absoluto da expressão (2.60).

b) Perturbação da variável resposta

Pode-se considerar dois tipos diferentes de perturbação da i -ésima observação, ou seja,

$$Y_i(v_i) = Y_i + v_i, \quad (2.64)$$

$$Y_i(v_i) = Y_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.65)$$

No primeiro caso se diz que a perturbação é aditiva e no segundo caso a perturbação é multiplicativa. O logaritmo da função verossimilhança corrigida perturbada da i -ésima observação é dado por,

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, \sigma_e^2, v_i; W_i, Y_i) = & -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left[Y_i^2(v_i) + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \\ & \left. - 2Y_i(v_i) \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Derivando (2.66) com respeito a v_i obtemos

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(\beta, v_i, \sigma_e^2; W_i, Y_i) = -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[\frac{\partial Y_i^2(v_i)}{\partial v_i} - 2 \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} \frac{\partial Y_i(v_i)}{\partial v_i} \right]. \quad (2.67)$$

Caso da perturbação aditiva, para esta situação consideramos a expressão (2.64), então a expressão acima fica

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \ell^*(\beta, v_i, \sigma_e^2; W_i, Y_i) = -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[2(Y_i + v_i) - 2 \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} \right],$$

logo considerando a expressão (2.61), um vetor que representa a cada Δ_i é dado por:

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_e^2} \\ \frac{1}{\sigma_e^2} t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_e^2} t_{i,(p)} \\ \frac{1}{\sigma_e^4} \left(Y_i + v_i - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Caso da perturbação multiplicativa, neste caso é considerada a expressão (2.65), e a expressão (2.67) fica como

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \ell^*(\beta, v_i, \sigma_e^2; W_i, Y_i) = -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[2Y_i^2 v_i - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} \right],$$

considerando a expressão (2.61), um vetor que representa a cada Δ_i é dado por:

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_e^2} Y_i \\ \frac{1}{\sigma_e^2} Y_i t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_e^2} Y_i t_{i,(p)} \\ \frac{1}{\sigma_e^4} \left(Y_i^2 v_i - Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

c) Perturbação das variâncias dos erros.

Nesta seção pretende-se estudar o caso de perturbações da homogeneidade de variâncias, considerando um modelo em que

$$Var(e_i) = \frac{\sigma_e^2}{v_i}, \quad (2.70)$$

onde $v_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. O logaritmo da função verossimilhança corrigida perturbada para a i -ésima observação é dado por

$$\begin{aligned}
\ell^*(\beta, \sigma_e^2, v_i; W_i, Y_i) = & -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_e^2) + \frac{1}{2} \log(v_i) - \frac{v_i}{2\sigma_e^2} \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \\
& \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right].
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Derivando a expressão (2.71) em função a v_i temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_i} \ell^*(\beta, \sigma_e^2, v_i; W_i, Y_i) = & \frac{1}{2v_i} - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \\
& \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right],
\end{aligned} \tag{2.72}$$

considerando a expressão (2.61), um vetor que representa a cada Δ_i é dado por

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_e^2} (Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)}) \\ \frac{1}{\sigma_e^2} (Y_i t_{i,(1)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+1)}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_e^2} (Y_i t_{i,(p)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+p)}) \\ \frac{1}{2\sigma_e^4} \left(Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right) \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

d) Perturbação da covariável.

Estudamos dois tipos diferentes de perturbação da i -ésima observação, ou seja,

$$W_i(v_i) = W_i + v_i, \quad (2.74)$$

$$W_i(v_i) = W_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.75)$$

No primeiro caso se diz que a perturbação das covariáveis é aditiva e no segundo caso a perturbação das covariáveis é multiplicativa. O logaritmo da função verossimilhança corrigida perturbada da i -ésima observação é dado por

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, v_i, \sigma_e^2; W_i, Y_i) = & -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)}(v_i) \right. \\ & \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)}(v_i) + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)}(v_i) \right], \end{aligned} \quad (2.76)$$

sendo que

$$t_{i,(j+1)}(v_i) = W_i(v_i) t_{i,(j)}(v_i) - j \sigma_u^2 t_{i,(j-1)}(v_i), \quad (2.77)$$

derivando a expressão (2.76) em função a v_i temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_i} \ell^*(\beta, v_i, \sigma_e^2; W_i, Y_i) = & -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[\sum_{j=0}^p \beta_j^2 \frac{\partial t_{i,(2j)}(v_i)}{\partial v_i} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{\partial t_{i,(2j)}(v_i)}{\partial v_i} \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s \frac{\partial t_{i,(j+s)}(v_i)}{\partial v_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Considerando a expressão (2.61), um vetor que representa a cada Δ_i é dado por,

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{\partial t_{i,(j)}(v_i)}{\partial v_i} \right] \\ \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i \frac{\partial t_{i,(1)}(v_i)}{\partial v_i} - \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{\partial t_{i,(j+1)}(v_i)}{\partial v_i} \right] \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i \frac{\partial t_{i,(p)}(v_i)}{\partial v_i} - \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{\partial t_{i,(j+p)}(v_i)}{\partial v_i} \right] \\ \frac{1}{2\sigma_e^4} \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 \frac{\partial t_{i,(2j)}(v_i)}{\partial v_i} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{\partial t_{i,(j)}(v_i)}{\partial v_i} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_j \beta_s \frac{\partial t_{i,(j+s)}(v_i)}{\partial v_i} \right] \end{pmatrix}.$$

As derivadas na expressão acima terá a forma seguinte, se estamos frente a um esquema aditivo

$$\frac{\partial t_{i,(m)}(v_i)}{\partial v_i} = m t_{i,(m-1)}(v_i) \quad m = 1, 2, \dots, s, \quad (2.79)$$

enquanto se estamos frente a um esquema multiplicativo, as derivadas terão a forma

$$\frac{\partial t_{i,(m)}(v_i)}{\partial v_i} = m W_i t_{i,(m-1)}(v_i) \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (2.80)$$

2.4.3 Aplicação

Selecionamos o exemplo apresentado por Fuller, (1987) onde se tem 120 observações (pag. 266). Adotamos um modelo quadrático, e assumindo $\sigma_u^2 = 0,09$ em nossa análise.

O logaritmo da função verossimilhança corrigida para um modelo quadrático, de acordo com (2.9) é expresso como

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 t_{i,(2)} + \beta_2^2 t_{i,(4)} - 2Y_i \beta_0 \right. \\ & \left. - 2Y_i t_{i,(1)} - 2Y_i t_{i,(2)} + 2\beta_0 \beta_1 t_{i,(1)} + 2\beta_0 \beta_2 t_{i,(2)} + 2\beta_1 \beta_2 t_{i,(3)} \right], \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$. As matrizes Δ_i nos diferentes esquemas de perturbação para este modelo são apresentados na sequência.

Esquema 1: Perturbação de ponderação dos Casos

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,0} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 t_{i,(1)} - \beta_2 t_{i,(2)} \right], \\
\Delta_{i,1} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i t_{i,(1)} - \beta_0 t_{i,(1)} - \beta_1 t_{i,(2)} - \beta_2 t_{i,(3)} \right], \\
\Delta_{i,2} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i t_{i,(2)} - \beta_0 t_{i,(2)} - \beta_1 t_{i,(3)} - \beta_2 t_{i,(4)} \right], \\
\Delta_{i,3} &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \left[Y_i^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 t_{i,(2)} + \beta_2^2 t_{i,(4)} - 2Y_i \beta_0 \right. \\
&\quad \left. - 2Y_i t_{i,(1)} - 2Y_i t_{i,(2)} + 2\beta_0 \beta_1 t_{i,(1)} + 2\beta_0 \beta_2 t_{i,(2)} + 2\beta_1 \beta_2 t_{i,(3)} \right],
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Esquema 2: Perturbação da variável resposta

Situação A: Perturbação aditiva

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,0} &= \frac{1}{\sigma_e^2}, \\
\Delta_{i,1} &= \frac{1}{\sigma_e^2} t_{i,(1)}, \\
\Delta_{i,2} &= \frac{1}{\sigma_e^2} t_{i,(2)}, \\
\Delta_{i,3} &= \frac{1}{\sigma_e^4} \left[v_i + Y_i - \beta_0 - \beta_1 t_{i,(1)} - \beta_2 t_{i,(2)} \right],
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Situação B: Perturbação multiplicativa

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,0} &= \frac{1}{\sigma_e^2} Y_i, \\
\Delta_{i,1} &= \frac{1}{\sigma_e^2} Y_i t_{i,(1)}, \\
\Delta_{i,2} &= \frac{1}{\sigma_e^2} Y_i t_{i,(2)}, \\
\Delta_{i,3} &= \frac{Y_i}{\sigma_e^4} \left[Y_i v_i - \beta_0 - \beta_1 t_{i,(1)} - \beta_2 t_{i,(2)} \right],
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Esquema 3: Perturbação das variâncias dos erros

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,0} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 t_{i,(1)} - \beta_2 t_{i,(2)} \right], \\
\Delta_{i,1} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i t_{i,(1)} - \beta_0 t_{i,(1)} - \beta_1 t_{i,(2)} - \beta_2 t_{i,(3)} \right], \\
\Delta_{i,2} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i t_{i,(2)} - \beta_0 t_{i,(2)} - \beta_1 t_{i,(3)} - \beta_2 t_{i,(4)} \right], \\
\Delta_{i,3} &= \frac{1}{2\sigma_e^4} \left[Y_i^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 t_{i,(2)} + \beta_2^2 t_{i,(4)} - 2Y_i \beta_0 \right. \\
&\quad \left. - 2Y_i t_{i,(1)} - 2Y_i t_{i,(2)} + 2\beta_0 \beta_1 t_{i,(1)} + 2\beta_0 \beta_2 t_{i,(2)} + 2\beta_1 \beta_2 t_{i,(3)} \right],
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Esquema 4: Perturbação da covariáveis**Situação A: Perturbação aditiva**

Para este tipo de esquema aditivo consideramos a expressão (2.79), obtendo

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,0} &= -\frac{1}{\sigma_e^2} \left[\beta_1 + 2\beta_2 t_{i,(1)}(v_i) \right], \\
\Delta_{i,1} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i - \beta_0 - 2\beta_1 t_{i,(1)}(v_i) - 3\beta_2 t_{i,(2)}(v_i) \right], \\
\Delta_{i,2} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[2Y_i t_{i,(1)} - 2\beta_0 t_{i,(1)} - 3\beta_1 t_{i,(2)} - 4\beta_2 t_{i,(3)} \right], \\
\Delta_{i,3} &= \frac{1}{\sigma_e^4} \left[Y_i \beta_1 + 2Y_i \beta_2 t_{i,(1)}(v_i) - \beta_1^2 t_{i,(1)}(v_i) - 2\beta_2^2 t_{i,(3)}(v_i) - \beta_0 \beta_1 \right. \\
&\quad \left. - 2\beta_0 \beta_2 t_{i,(1)}(v_i) - 3\beta_1 \beta_2 t_{i,(2)}(v_i) \right].
\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Situação B: Perturbação multiplicativa.

Para este tipo de esquema multiplicativo consideramos a expressão (2.80), obtendo

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,0} &= -\frac{1}{\sigma_e^2} \left[\beta_1 + 2\beta_2 W_i t_{i,(1)}(v_i) \right], \\
\Delta_{i,1} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \left[Y_i W_i - \beta_0 - 2\beta_1 W_i t_{i,(1)}(v_i) - 3\beta_2 W_i t_{i,(2)}(v_i) \right],
\end{aligned}$$

$$\Delta_{i,2} = \frac{1}{\sigma_e^2} \left[2Y_i W_i t_{i,(1)} - 2\beta_0 W_i t_{i,(1)} - 3\beta_1 W_i t_{i,(2)} - 4\beta_2 W_i t_{i,(3)} \right],$$

$$\Delta_{i,3} = \frac{1}{\sigma_e^4} \left[Y_i W_i \beta_1 + 2Y_i \beta_2 t_{i,(1)}(v_i) - \beta_1^2 W_i t_{i,(1)}(v_i) - 2\beta_2^2 W_i t_{i,(3)}(v_i) - \beta_0 \beta_1 \right. \\ \left. - 2\beta_0 \beta_2 W_i t_{i,(1)}(v_i) - 3\beta_1 \beta_2 W_i t_{i,(2)}(v_i) \right].$$

para $i = 1, \dots, n$.

Para esta aplicação prática considerarmos os diferentes esquemas de perturbação com a finalidade de obter os pontos que se forem perturbados podem afetar os resultados obtidos. Apresentamos os gráficos de índice da direção d_{max} nos diversos esquemas.

Fig. 2.8. Gráfico de índice segundo o esquema de perturbação da ponderação dos casos

(a) Caso aditivo

(b) Caso multiplicativo

Fig. 2.9. Gráfico de índice segundo o esquema de perturbação da variável resposta

Fig. 2.10. Gráfico de índice segundo o esquema perturbação das variâncias dos erros de medição da variável resposta

(a) Caso aditivo

(b) Caso multiplicativo

Fig. 2.11. Gráfico de índice segundo o esquema de perturbação da covariável

Dos gráficos acima notamos que os pontos com valores de d_{max} mais altos se apresentam nas primeiras quatro observações. Para observar se estes pontos poderia afetar o comportamento do modelo faremos uma análise confirmatória com a finalidade de avaliar quais pontos são influentes. Esta análise confirmatória é apresentada na seguinte tabela:

Tabela 2.7. Índice de variação percentual nos parâmetros em um modelo quadrático devido aos pontos 1, 2, 3 e 4

Pontos	β_0	β_1	β_2	σ_e^2	Comparação
1	6,24	1,99	1,26	2,85	0,83
2	22,46	0,17	0,75	1,94	0,83
3	9,59	2,49	0,96	5,97	0,83
4	24,29	0,64	0,62	2,72	0,83
1, 2	17,45	2,16	0,47	4,84	1,67
1, 3	10,89	0,67	0,02	2,84	1,67
1, 4	17,53	2,71	0,71	5,56	1,67
2, 3	11,98	2,37	1,69	4,06	1,67
2, 4	46,46	0,81	1,35	4,66	1,67
3, 4	15,10	1,94	1,63	3,21	1,67
1, 2, 3	11,83	0,54	0,75	0,87	2,50
1, 2, 4	40,93	2,90	0,06	7,55	2,50
1, 3, 4	13,47	0,05	0,60	0,07	2,50
2, 3, 4	36,36	1,81	2,35	1,30	2,50
1, 2, 3, 4	35,88	0,08	1,37	1,90	3,33

Observemos na tabela acima, que os pontos 1 e 3 são pontos que influem o comportamento dos parâmetros do modelo.

2.5 Caso 3: Variâncias heterogêneas

2.5.1 Metodologia

Nesta seção apresentaremos um método de estimação similar ao apresentado no Caso 1, com a diferença que as variâncias consideradas para cada observação são conhecidas e além disso diferentes de observação para observação. Este tipo de situação não foi muito estudada na literatura estatística. Um estudo de um caso similar em modelos de grau 1 foi Galea-Rojas, de Castilho, Bolfarine e de Castro (2003), que analisaram o modelo de regressão proposto por Ripley e Thompson (1987) e propuseram um algoritmo tipo EM para estimar os parâmetros. Em nosso caso estudaremos os estimadores segundo a proposta de Nakamura (1990), isto é, a partir do logaritmo da função verossimilhança corrigida.

Para esta seção pode-se considerar um modelo funcional com suposições do tipo

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_{e_i}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u_i}^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes, } i = 1, \dots, n, \quad (2.81)$$

ou pode-se considerar o modelo estrutural com suposições do tipo,

$$\begin{pmatrix} X_i \\ e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left[\begin{pmatrix} \mu_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{u_i}^2 \end{pmatrix} \right] \text{ independentes,} \quad (2.82)$$

$i = 1, \dots, n$. Como foi dito acima, $\sigma_{e_i}^2$ e $\sigma_{u_i}^2$ são conhecidas, de modo que o logaritmo da função verossimilhança corrigida pode ser obtido como na seção 2.2, levando a expressão que pode ser funcional ou estrutural

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{n}{2} \log(\pi) - \frac{1}{2} \log \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{e_i}^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{e_i}^2} \left(Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \\ & \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

A partir desta expressão podemos obter a função escore corrigido, derivando-a em relação a cada parâmetro β , resultando em

$$U^*(\beta_s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{e_i}^2} \left(Y_i t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j+s)} \right), \quad (2.84)$$

onde $s = 0, 1, 2, \dots, p$. Enquanto que os elementos de $t_{i,(s)}$ sofrem uma pequena mudança em relação à expressão apresentada em (2.27), passando a ser

$$t_{i,(j+1)} = W_i t_{i,(j)} - j \sigma_{u_i}^2 t_{i,(j-1)}, \quad (2.85)$$

$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p$.

A partir da função escore corrigido podemos obter as equações lineares que geram após alguns cálculos algébricos os estimadores para os parâmetros β , dados por

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{e_i}^2} & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(1)}}{\sigma_{e_i}^2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p)}}{\sigma_{e_i}^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(1)}}{\sigma_{e_i}^2} & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(2)}}{\sigma_{e_i}^2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p+1)}}{\sigma_{e_i}^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p)}}{\sigma_{e_i}^2} & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p+1)}}{\sigma_{e_i}^2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(2p)}}{\sigma_{e_i}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sigma_{e_i}^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{Y_i t_{i,(1)}}{\sigma_{e_i}^2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{Y_i t_{i,(p)}}{\sigma_{e_i}^2} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

2.5.2 Exemplos

1. Polinômio de primeiro grau

Considerando a expressão (2.86) e $m_i = \frac{1}{\sigma_{e_i}^2}$, para $p=1$. temos

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} \end{pmatrix}.$$

Após alguns cálculos algébricos, obtemos

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)}}{\sum_{i=1}^n m_i} \hat{\beta}_1,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} - \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} - \left(\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \right)^2}.$$

levando em conta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} &= \sum_{i=1}^n m_i W_i, \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} &= \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2 = \sum_{i=1}^n m_i S_{WW} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i} - \sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2, \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} &= \sum_{i=1}^n m_i Y_i W_i = \sum_{i=1}^n m_i S_{YW} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right)}{\sum_{i=1}^n m_i}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) S_{WW} &= \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i}, \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) S_{YW} &= \sum_{i=1}^n m_i Y_i W_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right)}{\sum_{i=1}^n m_i}, \end{aligned}$$

temos que

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i W_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \hat{\beta}_1,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{YW}}{S_{WW} - S_{uu}},$$

sendo que

$$Suu = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Conforme obtido por Castro, Castilho e Bolfarine.

2. Polinômio de segundo grau

Considerando a expressão (2.86) e $m_i = \frac{1}{\sigma_{e_i}^2}$ para $p=2$, temos

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(3)} \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(3)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(2)} \end{pmatrix}.$$

Se definirmos os desvios

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} - \left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \right),$$

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(2)} - \left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \right),$$

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} - \left(\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \right)^2,$$

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(3)} - \left(\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \right) \left(\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \right),$$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(4)} - \left(\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \right)^2,$$

temos, após alguns cálculos algébricos com o sistema de equações apresentado acima:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)}}{\sum_{i=1}^n m_i} \hat{\beta}_1 - \frac{\sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)}}{\sum_{i=1}^n m_i} \hat{\beta}_2, \quad (2.87)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\mathcal{C}} \left(\mathcal{A} - \mathcal{D} \hat{\beta}_2 \right), \quad (2.88)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\mathcal{CB} - \mathcal{DA}}{\mathcal{EC} - \mathcal{D}^2}, \quad (2.89)$$

levando em conta (2.85) temos que $t_{i,(1)} = W_i$, $t_{i,(2)} = W_i^2 - \sigma_{u_i}^2$, $t_{i,(3)} = W_i^3 - 3W_i\sigma_{u_i}^2$ e $t_{i,(4)} = W_i^4 - 6W_i^2\sigma_{u_i}^2 + 3\sigma_{u_i}^4$, os desvios podem ser expressos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{YW}, & \mathcal{B} &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 \left(S_{YW^2} - S_{Y\sigma_u^2} \right), \\ \mathcal{C} &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{WW} - \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2, \\ \mathcal{D} &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 \left(S_{WW^2} - S_{W\sigma_u^2} \right) - 2 \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i W_i \sigma_{u_i}^2, \\ \mathcal{E} &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 \left(S_{W^2W^2} + S_{\sigma_u^2\sigma_u^2} \right) + 2 \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^4 - \\ &\quad - 6 \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 \sigma_{u_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 \sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2. \end{aligned}$$

Com estas novas expressões de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$, podemos reescrever as expressões de $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$, tendo sido usada a notação abaixo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{W^2W^2}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i W_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i^2 \right)^2, \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{WW^2}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i W_i^3 - \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right) \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i^2 \right), \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{WW}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right)^2, \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{YW^2}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i^2 \right), \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 S_{YW}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i W_i - \left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)^2 S_{Y\sigma_u^2}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i \sigma_{u_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i\right) \left(\sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2\right), \\
\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)^2 S_{W\sigma_u^2}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i W_i \sigma_{u_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i W_i\right) \left(\sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2\right), \\
\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)^2 S_{\sigma_u^2 \sigma_u^2}^* &= \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^4 - \left(\sum_{i=1}^n m_i \sigma_{u_i}^2\right)^2.
\end{aligned}$$

2.5.3 Obtenção da matriz de covariâncias Assintóticas

Como a condição de que $E(\bullet \mid \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}(\bullet)$ serem permutáveis é satisfeita, para obter a matriz de covariâncias assintótica, precisamos conhecer matriz de informação de Fisher, definida a continuação,

$$\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{\partial}{\partial \beta} E[\mathbf{U}_n^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})], \quad (2.90)$$

assim como um componente que é o produto das funções escores individuais, isto é,

$$\mathbf{S}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n E[\mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t]. \quad (2.91)$$

com a finalidade de criar uma matriz de covariâncias de tipo sandwich, que segue a continuação

$$\mathcal{L}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} \mathbf{S}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1}, \quad (2.92)$$

e desta forma temos

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_{p+1}(0, \mathcal{L}^*).$$

2.5.4 Teste de hipóteses para β

É de interesse testar,

$$H_0 : \beta = \beta^{(0)},$$

$$H_1 : \beta \neq \beta^{(0)},$$

onde $\beta^{(0)}$ é um vetor p -dimensional sendo que $\sigma_{u_i}^2$ e $\sigma_{e_i}^2$ são conhecidas, $i = 1, \dots, n$.

a) Teste da razão de verossimilhanças (Teste de wilks)

A estatística de teste da razão de verossimilhanças é definida por

$$Q_{RV} = 2 \left\{ \ell^*(\hat{\beta}; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) - \ell^*(\beta^{(0)}; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \right\}, \quad (2.93)$$

cuja distribuição assintótica sob H_0 é $\chi^2_{(d)}$, onde $d = \dim(H_0 \cup H_1) - \dim(H_0) = p+1$, sendo $p+1$ o número de parâmetros que se deseja testar.

Substituindo a solução (2.86) em (2.93), levando em conta (2.83) temos

$$\begin{aligned} Q_{RV} = & - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{e_i}^2} \left[\sum_{j=0}^p (\hat{\beta}_j^2 - \beta_j^{2(0)}) t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p (\hat{\beta}_j - \beta_j^{(0)}) t_{i,(j)} \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p (\hat{\beta}_j \hat{\beta}_s - \beta_j^{(0)} \beta_s^{(0)}) t_{i,(j+s)} \right] \end{aligned}$$

b) Teste de wald.

A estatística de teste de wald é definido por

$$Q_W = \left(\hat{\beta} - \beta^{(0)} \right)^t \mathcal{L}^* \left(\hat{\beta} - \beta^{(0)} \right), \quad (2.94)$$

cuja distribuição assintótica sob H_0 é χ^2_d , onde $\mathcal{L}^*$ é segundo (2.92).

c) Teste de escore (Teste de rao).

A estatística de teste de escore é definido por

$$Q_E = U^*(\beta^{(0)})^t \mathcal{L}^{*-1} U^*(\beta^{(0)}) \quad (2.95)$$

cuja distribuição assintótica sob H_0 é χ^2_d , onde $U^*(\beta)$ vem de (2.84) e $\mathcal{L}^*$ é segundo (2.92).

2.5.5 Aplicações numéricas

Com a finalidade de aplicar a metodologia apresentada, consideramos dois tipos de aplicações. O primeiro será uma simulação de dados e a outra será uma aplicação prática.

a) Um estudo de simulação

Considerando um valor de n fixo, os elementos do modelo quadrático podem ser definidos a partir de:

- Gerar valores da forma $X_i \sim \text{Binomial}(n; 0,5)$,
- Gerar n valores u_i independentes com distribuição $N(0; \sigma_{u_i}^2)$,
- Gerar n valores e_i independentes com distribuição $N(0; \sigma_{e_i}^2)$,
- Os valores de $\sigma_{u_i}^2$ serão obtidos a partir de uma distribuição uniforme em $(0; 0,20)$, enquanto $\sigma_{e_i}^2$ serão obtidos a partir de uma distribuição uniforme em $(0; 0,5)$,
- Calcular $W_i = X_i + u_i$.
- Calcular $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i$, sendo os valores de β_0 , β_1 e β_2 iguais a um, $i = 1, \dots, n$.

Resultados

Após implementar a metodologia apresentada na linguagem Ox (Doornik, 1998), temos os seguintes resultados experimentais que são apresentados em forma resumida nas tabelas abaixo. Apresentamos também os resultados de um modelo polinomial quadrático quando são usados estimadores ingênuos (“naive”).

Tabela 2.8. Estimativas segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra em um modelo de regressão quadrática quando são consideradas variâncias heterogêneas.

n	Parâmetro	Naive			Escore corrigido		
		Estimativa	Desv.Pad.	EQM	Estimativa	Desv.Pad.	EQM
500	$\hat{\beta}_0$	0,85079	0,69524	0,50562	1,02730	0,84490	0,71459
	$\hat{\beta}_1$	1,53040	0,35641	0,40838	0,98609	0,43274	0,18746
	$\hat{\beta}_2$	0,90782	0,04120	0,01020	1,00180	0,04960	0,00246
1000	$\hat{\beta}_0$	1,44650	0,62075	0,58470	0,99636	0,75628	0,57198
	$\hat{\beta}_1$	1,22330	0,30231	0,14125	1,00420	0,36359	0,13222
	$\hat{\beta}_2$	0,93918	0,03350	0,00482	0,99918	0,03974	0,00158
2000	$\hat{\beta}_0$	1,20320	0,41766	0,21573	1,02260	0,51281	0,26349
	$\hat{\beta}_1$	1,36920	0,20749	0,17934	0,99109	0,25308	0,06413
	$\hat{\beta}_2$	0,92205	0,02341	0,00662	1,00070	0,02826	0,00080
3000	$\hat{\beta}_0$	1,19520	0,41306	0,20873	0,99967	0,51422	0,26442
	$\hat{\beta}_1$	1,39980	0,19895	0,19943	0,99847	0,24587	0,06046
	$\hat{\beta}_2$	0,91679	0,02190	0,00740	1,00050	0,02680	0,00072
4000	$\hat{\beta}_0$	1,24270	0,35233	0,18306	1,00540	0,43683	0,19085
	$\hat{\beta}_1$	1,35880	0,16847	0,15712	0,99614	0,20731	0,04299
	$\hat{\beta}_2$	0,92216	0,01840	0,00640	1,00050	0,02243	0,00050

Como pode ser observado na tabela os estimadores “naive” dos parâmetros de um modelo quadrático não se aproximam dos valores adotados na presente simulação, no gráfico poderemos acompanhar essa situação.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2

Fig. 2.12. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

Como pode ser observado tanto na tabela quanto nos gráficos, que os estimadores pelo método de escore corrigido dos parâmetros de um modelo quadrático variam em torno dos valores fixados na presente simulação, enquanto os estimadores pelo método “naive” não conseguem aproximar-se a estes valores fixados.

a) Um caso prático

Como exemplo ilustrativo tomamos os dados do exemplo 4 em Galea-Rojas, de Castilho, Bolfarine e de Castro (2003), onde foi considerada o problema da presença de partículas de grossas de ouro na amostra num depósito de barris. Para avaliar esta situação considerou-se uma tela de ensaio contendo 501 amostras preparadas baixo dois tipos de análise químicas, em cada amostra foi considerada uma variabilidade particular para σ_e^2 e σ_u^2 , os dados do exemplo 4 são apresentados no anexo.

Resultados

O gráfico abaixo apresenta a distribuição dos dados a serem considerados na presente metodologia.

Fig. 2.13. Gráfico de dispersão dos dados

Após implementar a metodologia no linguagem Ox (Doornik, 1998) obtemos a tabela a seguir apresentando as estimativas, desvios padrões, assim como os testes de hipóteses para cada parâmetro em estudo (β_0 , β_1 e β_2) para um modelo quadrático.

Tabela 2.9. Estimativas e testes de hipóteses para os parâmetros de um modelo quadrático

Parâmetro	Estimativa	Desv.Pad.	Raz.Var.	p	Wald	p	escore	p
β_0	0,47412	0,07409	3884,9	0	1326,7	0	36863,0	0
β_1	-1,67880	0,36417	44072,0	0	769,1	0	25290,0	0
β_2	0,63764	0,13876	883,3	0	56,5	0	34368,0	0

Onde p é o nível descritivo do teste.

Observamos na tabela acima que as estimativas (β_0 , β_1 e β_2) existem no modelo, de acordo com isto o modelo quadrático se esta ajustando melhor aos dados propostos neste exemplo, para fazer uma comparação consideramos um modelo linear com a finalidade de observar se os dados se ajustam melhor a um modelo linear que a um quadrático. Para isto apresentamos o gráfico abaixo

Fig. 2.14. Gráfico de dois modelos propostos, Linear e Quadrático

Segundo o gráfico acima pode-se ver que os dados se ajustam melhor a um modelo quadrático que a um linear.

Modelo Multiplicativo

3.1 Introdução

Nesta seção estudaremos os modelos polinomiais com erros nas variáveis e com erros de medição multiplicativo na covariável. Este modelo é definido pelas equações

$$Y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j X_i^j + e_i, \quad (3.1)$$

$$W_i = X_i u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

As variáveis no modelo acima têm o mesmo significado que as variáveis definidas no Capítulo 2, para o caso aditivo. A expressão (3.2) constitui o chamado modelo multiplicativo, que foi pouco estudado na literatura, de modo que julgamos relevante estudá-lo segundo o enfoque de Nakamura (1990) e Bolfarine e Gimenez (1997).

Na seção 3.2 será estudada a estimação dos parâmetros, as variâncias assintóticas dos estimadores e os testes de hipóteses de interesse no caso em que σ_u^2 é conhecida. Na seção 3.3 será estudada a estimação dos parâmetros, as variâncias assintóticas dos estimadores e os testes de hipóteses de interesse no caso em que $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida. Na seção 3.4 enfocamos um modelo em que σ_e^2 e σ_u^2 são heterogêneas e conhecidas.

3.2 Caso 1 : σ_u^2 conhecida

3.2.1 Estimação dos parâmetros

Em modelos funcionais se trabalha com a suposição seguinte:

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes, } i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

enquanto em modelos estruturais uma suposição usualmente adotada é definida por

$$\begin{pmatrix} X_i \\ e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right] \text{ independentes, } i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Para qualquer um das suposições mencionadas acima a função log-verossimilhança “naive” (ingênua) é definida como

$$\ell(\beta, \sigma_u^2; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j \right)^2. \quad (3.5)$$

Para estimar os parâmetros a partir desta função log-verossimilhança recorreremos aos passos das seções 2.2.1 (a) e (b) a fim de encontrar a função verossimilhança corrigida e também a função escore corrigido.

Para estabelecer a relação apresentada no capítulo 2, entre a variável auxiliar $t_{i,(s)}$ e a variável observável W_i consideramos o seguinte

$$W_i^s = X_i^s u_i^s,$$

$$E(W_i^s) = E(X_i^s u_i^s),$$

No caso funcional temos que X_i é fixo, de modo que

$$E(W_i^s) = X_i^s E(u_i^s),$$

e

$$X_i^s = \frac{E(W_i^s)}{E(u_i^s)}, \quad (3.6)$$

enquanto no caso estrutural temos que umas das suposições possíveis é que X_i e u_i sejam independentes, de forma que

$$E(X_i^s) = \frac{E(W_i^s)}{E(u_i^s)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Se nas expressões (3.6) e (3.7) consideramos as mudanças de variáveis X_i^s por $t_{i,(s)}$ e $E(W_i^s)$ por W_i^s para o caso funcional, e $E(X_i^s)$ por $t_{i,(s)}$ e $E(W_i^s)$ por W_i^s para o caso estrutural, temos que ambas as expressões podem ser substituídas por,

$$t_{i,(s)} = \frac{W_i^s}{E(u_i^s)}, \quad s = 0, 1, \dots, p, \text{ e } i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Para obter os momentos da variável u_i utilizamos a proposição seguinte:

Proposição 2 Se $H_i \sim N(1, \sigma_h^2)$, a função geradora de momentos da variável H_i é $M_{H_i}(t) = \exp(t + \frac{1}{2}\sigma_h^2 t^2)$, valendo a seguinte relação:

$$\frac{\partial^{(j+1)}}{\partial t^{(j+1)}} M_{H_i}(t) = (1 + t\sigma_h^2) \frac{\partial^{(j)}}{\partial t^{(j)}} M_{H_i}(t) - j\sigma_h^2 \frac{\partial^{(j-1)}}{\partial t^{(j-1)}} M_{H_i}(t)$$

para $j \geq 2$, onde $\partial t^{(q)}$ denota a q -ésima derivada parcial em relação a t .

Usando a relação da **proposição 2** para obter o q -ésimo momento da variável H_i , temos

$$E(H_i^q) = \frac{\partial^{(q)}}{\partial t^{(q)}} M_{H_i}(0) = E(H^{q-1}) + (q-1)\sigma_h^2 E(H^{q-2}).$$

Então, para a variável u_i temos a relação seguinte:

$$E(u_i^s) = E(u_i^{s-1}) + (s-1)\sigma_u^2 E(u_i^{s-2}), \quad s \geq 2. \quad (3.9)$$

Seguindo os procedimentos para a obtenção do logaritmo da função verossimilhança corrigida no Capítulo 2, temos que o logaritmo da função de verossimilhança corrigida para o modelo multiplicativo é dado como em (2.9), isto é,

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \beta_j^2 t_{i,(2j)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2Y_i \sum_{j=0}^p \beta_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ s < j}}^p \beta_j \beta_s t_{i,(j+s)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde $t_{i,(s)}$ tem a forma (3.8).

Considerando o logaritmo da função verossimilhança corrigida apresentada acima e derivando com relação a cada parâmetro em (β, σ_e^2) , temos como na seção 2.2.1:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(p)} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \hat{\beta}_j \hat{\beta}_s t_{i,(j+s)} \right]. \quad (3.11)$$

A partir destas expressões e da expressão (3.8) podemos obter os estimadores dos parâmetros.

3.2.2 Exemplos

1. Polinômio de primeiro grau

Considerando a expressão (3.10) e (3.11), para $p=1$, temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 t_{i,(2)} - 2Y_i \hat{\beta}_0 - 2Y_i \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} \right].$$

Levando em conta que $t_{i,(1)} = W_i$ e $t_{i,(2)} = \frac{W_i^2}{\sigma_u^2 + 1}$, temos os seguintes estimadores:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \bar{W} \hat{\beta}_1, \quad (3.12)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sigma_u^2 + 1) S_{YW}}{S_{WW} - n \bar{W}^2 \sigma_u^2}, \quad (3.13)$$

onde S_{WW} e S_{YW} são a variância amostral de W e a covariância amostral de W e Y , respectivamente que foram definidas no Capítulo 2, seção exemplos polinômio de 1 grau,

O estimador de β_1 acima foi obtido por Hwang, J. (1986) e Nakamura (1990), ver também Gasco, L. et al. (2002)

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 W_i - \hat{\beta}_2 W_i^2 \right)^2 - \frac{\hat{\beta}_1^2 \sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + 1)} (S_{WW} + \bar{W}^2). \quad (3.14)$$

2. Polinômio de segundo grau

Considerando as expressões (3.10) e (3.11), para $p=2$, temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(2)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n & \left[Y_i^2 + \hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 t_{i,(2)} + \hat{\beta}_2^2 t_{i,(4)} - 2Y_i \hat{\beta}_0 - 2Y_i \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} \right. \\ & \left. - 2Y_i \hat{\beta}_2 t_{i,(2)} + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 t_{i,(1)} + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_2 t_{i,(2)} + 2\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 t_{i,(3)} \right]. \end{aligned}$$

Como

$$t_{i,(1)} = \frac{W_i}{E(u_i)}, \quad t_{i,(2)} = \frac{W_i^2}{E(u_i^2)}, \quad t_{i,(3)} = \frac{W_i^3}{E(u_i^3)} \quad \text{e} \quad t_{i,(4)} = \frac{W_i^4}{E(u_i^4)},$$

usando a **proposição 2** com, $E(u_i) = 1$, $E(u_i^2) = 1 + \sigma_u^2$, $E(u_i^3) = 1 + 3\sigma_u^2$ e $E(u_i^4) = 1 + 6\sigma_u^2 + 3\sigma_u^4$. Por outro lado, levando em conta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n W_i^2 &= n(S_{WW} + \overline{W}^2), \\ \sum_{i=1}^n W_i^3 &= n[S_{WW^2} + \overline{W}(S_{WW} + \overline{W}^2)], \\ \sum_{i=1}^n W_i^4 &= n[S_{W^2W^2} + (S_{WW} + \overline{W}^2)^2], \\ \sum_{i=1}^n Y_i W_i &= n(S_{YW} + \overline{Y}\overline{W}), \\ \sum_{i=1}^n Y_i W_i^2 &= n[S_{YW^2} + \overline{Y}(S_{WW} + \overline{W}^2)], \end{aligned}$$

sendo S_{WW} a variância amostral da variável W , S_{WW^2} a covariâncias amostral das variáveis W e W^2 , $S_{W^2W^2}$ a covariâncias amostral das variáveis W^2 e W^2 , S_{YW} a

covariâncias amostral das variáveis Y e W e S_{YW^2} a covariâncias amostral das variáveis Y e W^2 , os estimadores podem ser escritos como

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \bar{W}\hat{\beta}_1 - \frac{1}{\sigma_u^2}(S_{WW} + \bar{W}^2)\hat{\beta}_2, \quad (3.15)$$

$$\hat{\beta}_1 = \left[\frac{(\sigma_u^2 + 1)S_{YW}}{S_{WW} - \bar{W}^2\sigma_u^2} \right] - B\hat{\beta}_2, \quad (3.16)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{S_{YW^2}}{A + B} - \left[\frac{(\sigma_u^2 + 1)S_{YW}}{S_{WW} - \bar{W}^2\sigma_u^2} \right] \left[\frac{B}{A + B} \right], \quad (3.17)$$

onde

$$A = \frac{(\sigma_u^2 + 1)S_{WW^2} - 2\sigma_u^2(S_{WW} + \bar{W}^2)^2}{3\sigma_u^4 + 6\sigma_u^2 + 1},$$

$$B = \frac{(\sigma_u^2 + 1)S_{WW^2} - 2\bar{W}\sigma_u^2(S_{WW} + \bar{W}^2)}{3\sigma_u^2 + 1},$$

sendo o estimador de σ_e^2 dado por

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 W_i - \hat{\beta}_2 W_i^2)^2 - \frac{\hat{\beta}_1 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + 1} (S_{WW} + \bar{W}^2) \\ & - \frac{3\hat{\beta}_2^2 \sigma_u^2 (\sigma_u^2 + 2)}{3\sigma_u^4 + 6\sigma_u^2 + 1} [S_{W^2W^2} + (S_{WW} + \bar{W}^2)^2] + \frac{2\hat{\beta}_2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + 1} [S_{YW^2} + \bar{Y}(S_{WW} + \bar{W}^2)] \\ & - \frac{2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + 1} (S_{WW} + \bar{W}^2) + \frac{4\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \sigma_u^2}{3\sigma_u^2 + 1} [S_{WW^2} + \bar{W}(S_{WW} + \bar{W}^2)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2.3 Obtenção da matriz de covariâncias assintóticas

O calculo da matriz de covariâncias assintóticas é similar ao modo apresentado na seção 2.2.2, sendo

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{n} (\mathbf{I}^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} \mathbf{S}^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (\mathbf{I}^*(\hat{\theta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1},$$

onde,

$$I^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}),$$

e

$$S^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) U_i^*(\hat{\beta}; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t.$$

concluindo que

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_{p+1}(0, \mathcal{L}^*).$$

3.2.4 Teste de hipóteses para β

Nesta seção consideramos os mesmos testes de hipóteses apresentados na seção 2.2.3, sendo

$$U^*(\theta) = \begin{pmatrix} U^*(\beta_0) \\ U^*(\beta_1) \\ \vdots \\ U^*(\beta_p) \\ U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^*(\beta) \\ U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix},$$

$$I^*(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\beta_0) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\beta_0) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\beta_0) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta_0) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\beta_1) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\beta_1) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\beta_1) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\beta_p) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\beta_p) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\beta_p) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta_p) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_0} U^*(\sigma_e^2) & -\frac{\partial}{\partial \beta_1} U^*(\sigma_e^2) & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \beta_p} U^*(\sigma_e^2) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \beta} U^*(\beta) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\beta) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta} U^*(\sigma_e^2) & -\frac{\partial}{\partial \sigma_e^2} U^*(\sigma_e^2) \end{pmatrix}.$$

A partir dessas expressões podemos considerar que $\bar{\Lambda}_n(\theta) = \frac{1}{n} E[I^*(\theta)]$, onde $\theta = (\beta^t, \sigma_e^2)^t$ e $\bar{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[U_i^*(\theta) U_i^*(\theta)^t]$, quando n é grande as matrizes acima apresentadas, convergem para as matrizes positivas definidas $\Lambda(\theta)$ e $\Gamma(\theta)$. Como nosso interesse é testar a hipóteses nula $H_0 : \beta = \beta^0$ na presença do parâmetro “nuisance” σ_e^2 , as matrizes particionadas segundo as dimensões de σ_e^2 e β são

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \Lambda_{\beta\beta}(\theta) & \Lambda_{\beta\sigma_e^2}(\theta) \\ \Lambda_{\sigma_e^2\beta}(\theta) & \Lambda_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta) \end{pmatrix} \quad \Gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \Gamma_{\beta\beta}(\theta) & \Gamma_{\beta\sigma_e^2}(\theta) \\ \Gamma_{\sigma_e^2\beta}(\theta) & \Gamma_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta) \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $\Lambda_{\beta\beta}(\theta)$ ou $\Gamma_{\beta\beta}(\theta)$ são de dimensão $(p+1) \times (p+1)$, os vetores $\Lambda_{\beta\sigma_e^2}(\theta)$ ou $\Gamma_{\beta\sigma_e^2}(\theta)$ são de dimensão $1 \times (p+1)$ e o escalar $\Lambda_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta)$ ou $\Gamma_{\sigma_e^2\sigma_e^2}(\theta)$ são de dimensão 1×1 .

Sejam $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^t, \hat{\sigma}_e^2)^t$ e $\hat{\theta}_0 = (\hat{\beta}_0^t, \hat{\sigma}_e^2)^t$ estimadores consistentes de θ , satisfazendo $U^*(\hat{\theta}) = 0$ e $U^*(\hat{\beta}) = 0$, ou seja, $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}_0$ são estimadores corrigidos irrestritos e restritos a H_0 , respectivamente. Os testes de Wald e Escore que podem ser aplicados são

$$W = n(\hat{\beta} - \beta^0)^t \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}(\hat{\theta}_0)(\hat{\beta} - \beta^0),$$

$$Q = \frac{1}{n} U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0)^t \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0),$$

$$W_c = n(\hat{\beta} - \beta^0)^t \hat{\Omega}_{\beta\beta}^{-1}(\hat{\theta}_0)(\hat{\beta} - \beta^0),$$

sendo

$$\hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}(\hat{\theta}_0) = \hat{\Lambda}_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) - \hat{\Lambda}_{\sigma_e^2\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}_{\beta\sigma_e^2}(\hat{\theta}_0),$$

e

$$\hat{\Omega}_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) = \left(\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Gamma}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0) \right)_{\beta\beta},$$

assim também

$$Q_c = \frac{1}{n} U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0)^t \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Omega}_{\beta\beta}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}_{\beta\beta.\sigma_e^2}^{-1}(\hat{\theta}_0) U_{\beta}^*(\hat{\theta}_0).$$

Quando a função escore corrigido corresponde a gradiente do logaritmo da função de verossimilhança corrigida $\ell^*(\theta)$, isto é,

$$U^*(\theta) = \frac{\partial \ell^*(\theta)}{\partial \theta},$$

é possível definir um teste de razão de verossimilhança corrigida. A estatística de razão de verossimilhança corrigida é definida

$$L = 2 \ell^*(\hat{\theta}) - \ell^*(\hat{\theta}_0).$$

3.2.5 Aplicação numérica

Para a aplicação da metodologia apresentada consideramos duas formas de aplicação, a primeira consistente em uma simulação de dados e uma segunda com dados reais.

a) Um estudo de simulação

Para esta situação consideramos um modelo funcional em um polinômio de grau dois. Efetuamos 1.000 replicações para estudar a convergência dos estimadores e os seguintes parâmetros são tomados em consideração

1. Para n especificado, considerar $X_i \sim \text{Binomial}(n; 0,5)$, $u_i \sim N(1; 0,05)$ e $e_i \sim N(0; 1)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Obtenção dos dados:

$$W_i = X_i u_i,$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i,$$

sendo $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$.

3. Para os efeitos práticos, deve-se considerar as expressões (3.15)-(3.17), para a estimação dos parâmetros.

Resultados

Após implementada a metodologia apresentada na linguagem Ox (Doonik, 1998), temos os seguintes resultados experimentais que são apresentados em forma resumida na tabela abaixo. Nesta tabela encontram-se as estimativas de um modelo quadrático, considerando o desvio gerado para cada estimativa, assim como o erro quadrático médio.

Tabela 3.1. Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Naive			Escore corrigido		
		Estimativa	Desv.Pad.	EQM	Estimativa	Desv.Pad.	EQM
5000	$\hat{\beta}_0$	1,36316	0,07830	0,75294	1,01236	0,09462	0,00719
	$\hat{\beta}_1$	0,80059	0,06058	0,43581	0,94613	0,15071	0,10533
	$\hat{\beta}_2$	0,81168	0,07015	2,58860	1,00112	0,13922	0,00683
	$\hat{\sigma}_e^2$	3,44628	-	2,42016	0,24185	-	0,00012
6000	$\hat{\beta}_0$	1,44200	0,02171	1,05699	1,03410	0,13267	0,01319
	$\hat{\beta}_1$	0,71663	0,09125	0,69516	0,94472	0,19588	0,09863
	$\hat{\beta}_2$	0,81171	0,06742	1,43404	1,03710	0,06663	0,02035
	$\hat{\sigma}_e^2$	3,46400	-	3,42229	0,24290	-	0,00014
7000	$\hat{\beta}_0$	1,36496	0,06053	0,86309	0,97612	0,07759	0,00504
	$\hat{\beta}_1$	0,76038	0,08068	0,82293	1,00530	0,36075	0,10549
	$\hat{\beta}_2$	0,78112	0,03427	2,30774	1,04233	0,13811	0,01575
	$\hat{\sigma}_e^2$	4,15370	-	2,01921	0,23735	-	0,00042
8000	$\hat{\beta}_0$	1,41531	0,05627	0,53438	1,04103	0,05838	0,00301
	$\hat{\beta}_1$	0,73497	0,08848	0,85725	1,04202	0,28083	0,04926
	$\hat{\beta}_2$	0,84314	0,03296	2,32944	1,01476	0,07262	0,00313
	$\hat{\sigma}_e^2$	3,73979	-	2,72934	0,24596	-	0,00036
9000	$\hat{\beta}_0$	1,25717	0,07063	0,91534	1,02509	0,07522	0,01185
	$\hat{\beta}_1$	0,78058	0,10043	0,54817	0,95670	0,34900	0,03394
	$\hat{\beta}_2$	0,82977	0,07225	1,94595	0,99153	0,07996	0,00549
	$\hat{\sigma}_e^2$	3,32005	-	3,48797	0,23241	-	0,00048

Como se pode observar na tabela acima, as estimativas para os parâmetros β obtidas pelo método de “escore corrigido” estão próximos dos valores fixados em nossa simulação, enquanto as estimativas para os parâmetros “naive” não conseguem aproximar-se aos valores fixados em nossa simulação. O resultado da tabela acima são mostrados na figura seguinte

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para σ_e^2

Fig. 3.1. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

Da figura acima pode-se observar que as estimativas mediante o método “escore corrigido”, tem uma maior proximidade com os valores fixados na presente simulação que as estimativas mediante o método “naive”.

a) Um caso prático

Devido a que na literatura estatística não existem trabalhos semelhantes, consideramos os mesmos dados apresentados por Fuller (pag 266) com a finalidade de comparar os

resultados obtidos com esta metodologia e a metodologia da seção 2.2, para isto considera-se as variáveis Y_1 e W que estão no anexo deste trabalho.

Resultados

Após a implementação da metodologia no linguagem Ox (Doornik, 1998) obtemos a seguinte tabela

Tabela 3.2. Estimativas segundo o método de escore corrigido

Parâmetro	Aditivo		Multiplicativo	
	Estimativa	Desv.Pad.	Estimativa	Desv.Pad.
β_0	-0,02441	0,11394	-0,03824	0,08588
β_1	0,54315	0,10063	0,50089	0,07374
β_2	1,04690	0,24227	0,99276	0,14833
σ_e^2	0,08138	-	0,11658	-

Observemos na tabela acima que as estimativas obtidas pelo método de escore corrigido tanto para o modelo aditivo quanto para o modelo multiplicativo são similares.

3.3 Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida

3.3.1 Estimação dos parâmetros

Nesta seção estudaremos a função escore corrigido derivada segundo a proposta de Bolfarine e Gimenez (1997).

Para fazer a estimação de parâmetros deve-se considerar que em modelos funcionais se trabalha com a suposição seguinte:

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda\sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes } i = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

enquanto em modelos estruturais a suposição a considerar pode ser definida por

$$\begin{pmatrix} X_i \\ e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\sigma_u^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes } i = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

A metodologia para estimar os parâmetros segue a linha de trabalho da seção 2.3.1 obtendo-se as equações (2.51) e (??), com uso das expressões (3.8) e (3.9). Neste caso, como no modelo aditivo, precisamos de um processo iterativo para estimar os parâmetros do modelo. O processo iterativo considera o algoritmo de Newton-Raphson que procede como segue.

Algoritmo para estimação dos parâmetros no método do escore corrigido

1. Escolha um valor inicial para σ_u^2 .
2. Substitua o valor considerado na etapa anterior na expressão seguinte:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(m)} \\ \hat{\beta}_1^{(m)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(p)} \end{pmatrix},$$

lembrando que $t_{i,(s)} = \frac{W_i^s}{E(u_i^s)}$ e que $E(u_i^s)$ pode ser obtida segundo a expressão (3.9).

3. Agora com os valores $\beta^{(m)}$ obtidos como solução do sistema acima, devemos atualizar σ_u^2 de acordo com o método de Newton-Raphson:

$$\sigma_u^{2(m+1)} = \sigma_u^{2(m)} + \frac{U^*(\sigma_u^{2(m)})}{I^*(\sigma_u^{2(m)})}.$$

4. Retornar ao passo 2.

3.3.2 Exemplos

1. Polinômio de primeiro grau

Considerando as expressões (3.10) e (3.11), para $p=1$, temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \end{pmatrix},$$

sendo a função escore corrigida para σ_u^2 ,

$$U^*(\sigma_u^2) = -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left(Y_i^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 t_{i,(2)} - 2Y_i\beta_0 - 2Y_i\beta_1 t_{i,(1)} - 2\beta_0\beta_1 t_{i,(1)} \right).$$

Como $t_{i,(1)} = W_i$ e $t_{i,(2)} = \frac{W_i^2}{\sigma_u^2 + 1}$, temos

$$U^*(\sigma_u^2) = -\frac{n}{2\sigma_u^2} - \frac{n\beta_1^2(S_{WW} + \overline{W}^2)}{2\lambda\sigma_u^2(\sigma_u^2 + 1)} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 W_i \right)^2,$$

e a informação corrigida para σ_u^2 é dada por

$$I^*(\sigma_u^2) = \frac{n}{2\sigma_u^4} + \frac{n\beta_1^2(S_{WW} + \overline{W}^2)}{2\lambda\sigma_u^4(\sigma_u^2 + 1)^2}.$$

Considerando o método de Newton-Raphson modificado, temos o seguinte algoritmo,

1. Escolha um valor inicial para σ_u^2 , faça $m=0$
2. faça

$$\hat{\beta}_0^{(m)} = \bar{Y} - \bar{W}\hat{\beta}_1^{(m)},$$

com

$$\hat{\beta}_1^{(m)} = \frac{\hat{\sigma}^{2(m)} S_{YW}}{S_{WW} + \bar{W}(\sigma_u^{2(m)} + 1)}.$$

3. Atualizar σ_u^2 fazendo

$$\hat{\sigma}_u^{2(m+1)} = \hat{\sigma}_u^{2(m)} + \frac{U^*(\sigma_u^{2(m)})}{I^*(\sigma_u^{2(m)})}.$$

4. Se convergir, parar; caso contrario, faça $m = m + 1$ e retornar ao passo (2).

Nas expressões acima,

$$\begin{aligned} n^2 S_{WW} &= n \sum_{i=1}^n W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2, \\ n^2 S_{YW} &= n \sum_{i=1}^n Y_i W_i - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i \right). \end{aligned}$$

2. Polinômio de segundo grau

Considerando as expressões (3.10) e (3.11), para $p=2$, temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(3)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n Y_i t_{i,(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

A função escore corrigido para σ_u^2 é,

$$U^*(\sigma_u^2) = \frac{n}{2\sigma_u^2} - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 + \sum_{j=0}^2 \hat{\beta}_j^2 t_{i,(2j)} - 2Y_i \sum_{j=0}^2 \hat{\beta}_j t_{i,(j)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^2 \hat{\beta}_j \hat{\beta}_s t_{i,(j+s)} \right].$$

Levando em conta que $t_{i,(1)} = W_i$, $t_{i,(2)} = \frac{W_i^2}{\sigma_u^2 + 1}$, $t_{i,(3)} = \frac{W_i^3}{3\sigma_u^2 + 1}$ e $t_{i,(4)} = \frac{W_i^4}{3\sigma_u^4 + 6\sigma_u^2 + 1}$, a função escore corrigida para σ_u^2 pode ser escrita como

$$U^*(\sigma_u^2) = -\frac{n}{2\lambda\sigma_u^2} \left(\lambda + \frac{\beta_1^2}{n(\sigma_u^2 + 1)} \sum_{i=1}^n W_i^2 + \frac{3\beta_2^2(\sigma_u^2 + 2)}{n\sigma_u^2(3\sigma_u^4 + 6\sigma_u^2 + 1)} \sum_{i=1}^n W_i^4 - \right. \\ \left. - \frac{2\beta_2}{n(\sigma_u^2 + 1)} \sum_{i=1}^n W_i^2 Y_i + \frac{2\beta_0\beta_1}{(\sigma_u^2 + 1)} + \frac{6\beta_1\beta_2}{n(3\sigma_u^2 + 1)} \sum_{i=1}^n W_i^3 \right) + \\ + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 W_i - \beta_2 W_i^2 \right)^2,$$

sendo a informação observada para σ_u^2 dada por

$$I^*(\sigma_u^2) = \frac{n}{\lambda\sigma_u^2} \left[\frac{\lambda}{\sigma_u^2} + \frac{\beta_1^2}{n\sigma_u^2(\sigma_u^2 + 1)} \sum_{i=1}^n W_i^2 + \frac{3\beta_2^2(15\sigma_u^6 + 36\sigma_u^4 + 15\sigma_u^2 + 2)}{n\sigma_u^4(3\sigma_u^4 + 6\sigma_u^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n W_i^4 - \right. \\ \left. - \frac{2\beta_2\sigma_u^2}{n(\sigma_u^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n Y_i W_i + \frac{2\beta_0\beta_2\sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + 1)^2} + \frac{6\beta_1\beta_2(3\sigma_u^2 + 2)}{n(3\sigma_u^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n W_i^3 \right],$$

O algoritmo de estimação dos parâmetros funciona do modo seguinte:

1. Escolha um valor inicial para σ_u^2 ; faça $m = 0$.
2. Faça

$$\hat{\beta}_0^{(m)} = \bar{Y} - \bar{W} \hat{\beta}_1^{(m)} - \frac{(S_{WW} + \bar{W}^2) \hat{\beta}_2^{(m)}}{(\hat{\sigma}_u^{2(m)} + 1)},$$

$$\hat{\beta}_1^{(m)} = \left[\frac{(\hat{\sigma}_u^{2(m)} + 1)S_{YW}}{S_{WW} - \bar{W}^2 \hat{\sigma}_u^{2(m)}} \right] - \mathbf{B}^{(m)} \hat{\beta}_2^{(m)}, \quad (3.22)$$

com

$$\hat{\beta}_2^{(m)} = \frac{S_{YW^2}}{\mathbf{A}^{(m)} + \mathbf{B}^{(m)}} - \left[\frac{(\hat{\sigma}_u^{2(m)} + 1)S_{YW}}{S_{WW} - \bar{W}^2 \hat{\sigma}_u^{2(m)}} \right] \left[\frac{\mathbf{B}^{(m)}}{\mathbf{A}^{(m)} + \mathbf{B}^{(m)}} \right],$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(m)} &= \frac{(\hat{\sigma}_u^{2(m)} + 1)S_{WW^2} - 2\hat{\sigma}_u^{2(m)}(S_{WW} + \bar{W}^2)^2}{3\hat{\sigma}_u^{4(m)} + 6\hat{\sigma}_u^{2(m)} + 1}, \\ \mathbf{B}^{(m)} &= \frac{(\sigma_u^{2(m)} + 1)S_{WW^2} - 2\bar{W}\sigma_u^{2(m)}(S_{WW} + \bar{W}^2)}{3\sigma_u^{2(m)} + 1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} n^2 S_{WW} &= n \sum_{i=1}^n W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n W_i \right)^2, \\ n^2 S_{WW^2} &= n \sum_{i=1}^n W_i^3 - \left(\sum_{i=1}^n W_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i^2 \right), \\ n^2 S_{W^2 W^2} &= n \sum_{i=1}^n W_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n W_i^2 \right)^2, \\ n^2 S_{YW} &= n \sum_{i=1}^n Y_i W_i - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i \right), \\ n^2 S_{YW^2} &= n \sum_{i=1}^n Y_i W_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n W_i^2 \right). \end{aligned}$$

3. Atualizar σ_u^2 , fazendo

$$\hat{\sigma}_u^{2(m+1)} = \hat{\sigma}_u^{2(m)} + \frac{U^*(\sigma_u^{2(m)})}{I^*(\sigma_u^{2(m)})} \quad (3.23)$$

4. Se convergiu parar; caso contrario, faça $m = m + 1$ e retorne ao passo (2).

3.3.3 Aplicações numéricas

Para as aplicações numéricas consideramos duas situações, um estudo da simulação e uma situação prática.

Um estudo de simulação.

Para esta simulação consideramos um modelo funcional em um polinômio de grau dois. Efetuamos 1.000 replicações para estudar a convergência dos estimadores e os seguintes parâmetros foram tomados em consideração:

1. Para n especificado, considerar $X_i = \text{Binomial}(n; 0,5)$, $u_i \sim N(1; 0,05)$ e $e_i \sim N(0; 1)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Obtenção dos dados:

$$W_i = X_i u_i,$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i,$$

sendo $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$.

3. Para os efeitos práticos, deve-se considerar o processo iterativo: “Algoritmo para estimação dos parâmetros no caso de Escore Corrigida”.

Resultados

Na tabela a seguir é o resultado da implementação da metodologia apresentada na linguagem Ox (Doornik, 1998), e resume os resultados obtidos pelo método “naive” e “escore corrigido” apresentando as estimativas, os desvios padrões e o erro quadrático médio (EQM) para cada metodologia.

Tabela 3.3. Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Naive			Escore corrigido		
		Estimativa	Desv.Pad.	EQM	Estimativa	Desv.Pad.	EQM
5000	$\hat{\beta}_0$	1,45541	0,06726	0,70190	0,98836	0,09568	0,81499
	$\hat{\beta}_1$	0,73549	0,08937	0,45840	0,96160	0,35259	0,04139
	$\hat{\beta}_2$	0,65522	0,03074	2,75173	1,00743	0,12508	0,16945
	$\hat{\sigma}_e^2$	2,82161	-	3,03813	0,22933	-	0,49092
6000	$\hat{\beta}_0$	1,32373	0,03963	0,89150	1,05442	0,13553	0,04155
	$\hat{\beta}_1$	0,73662	0,06116	0,45144	1,02286	0,35192	0,03582
	$\hat{\beta}_2$	0,65750	0,05342	2,95609	0,99281	0,09676	0,13004
	$\hat{\sigma}_e^2$	2,51670	-	2,28504	0,26779	-	0,09304
7000	$\hat{\beta}_0$	1,27637	0,07194	0,61855	1,05532	0,09608	0,21479
	$\hat{\beta}_1$	0,76080	0,07221	0,65348	0,95655	0,27234	0,03489
	$\hat{\beta}_2$	0,62510	0,03658	1,24128	0,99382	0,05992	0,18398
	$\hat{\sigma}_e^2$	2,71499	-	1,92783	0,21109	-	0,49164
8000	$\hat{\beta}_0$	1,32021	0,07038	0,84191	1,04245	0,09726	0,44846
	$\hat{\beta}_1$	0,59478	0,08483	0,60268	1,00311	0,19326	0,03253
	$\hat{\beta}_2$	0,70573	0,02411	1,14961	1,00797	0,14584	0,17164
	$\hat{\sigma}_e^2$	2,83781	-	2,93282	0,26210	-	0,41846
9000	$\hat{\beta}_0$	1,36812	0,05217	0,64416	1,04353	0,09444	0,28291
	$\hat{\beta}_1$	0,72324	0,06921	0,66959	1,03396	0,23717	0,03275
	$\hat{\beta}_2$	0,68556	0,06883	2,16227	1,01087	0,10774	0,18260
	$\hat{\sigma}_e^2$	2,90807	-	3,37423	0,21006	-	0,39237

Como se pode observar na tabela acima, os estimadores dos parâmetros β obtidos pelo método do escore corrigido atingem aos parâmetros propostos em nossa simulação, da mesma maneira os valores de σ_u^2 esta próximos dos valores fixados na simulação, enquanto as estimativas obtidas pelo método “naive” não se aproximam dos verdadeiros valores. Uma representação gráfica é apresentada a seguir

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para σ_e^2

Fig. 3.2. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

Na figura de acima podemos observar que os valores correspondentes aos estimativas para os parâmetros “naive” não conseguem atingir os valores implementados na presente simulação, enquanto as estimativas para os parâmetros “escore corrigido” se aproximam adequadamente.

b. Um caso prático.

Para avaliar a metodologia proposta, consideramos a informação apresentada por Fuller (1987) (pag. 248), estes dados encontram-se no anexo deste trabalho e as variáveis consideradas são Y_2 e W .

Resultados

Após a implementação da metodologia apresentada no Ox (Doornik, 1998) um resumo dos resultados são apresentados na seguinte tabela, considerando-se as estimativas do modelo de escore corrigido no caso aditivo frente ao modelo de escore corrigido no caso multiplicativo.

Tabela 3.4. Estimativas segundo o método de escore corrigido

Parâmetro	Aditivo		Multiplicativo	
	Estimativa	Desv.Pad.	Estimativa	Desv.Pad.
β_0	-0,023631	0,10310	-0,052640	0,082671
β_1	0,004183	0,09509	0,003048	0,072302
β_2	1,027800	0,22073	1,008500	0,146250
σ_u^2	0,087207	-	0,090000	-

Observemos na tabela acima que as estimativas obtidas pelo método de escore corrigido tanto para o modelo aditivo quanto para o modelo multiplicativo tem estimativas muito similares.

3.4 Caso 3: Variâncias heterogêneas

3.4.1 Estimação dos parâmetros

Como as expressões de $\hat{\beta}$ são similares nos casos multiplicativo e aditivo, consideramos a metodologia implementada na seção 2.5, considerando a equação (3.8) para a obtenção dos $t_{i,(s)}$. Para a estimação dos parâmetros devemos considerar o sistema de equações lineares abaixo, de acordo com (2.86)

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{e_i}^2} & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(1)}}{\sigma_{e_i}^2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p)}}{\sigma_{e_i}^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(1)}}{\sigma_{e_i}^2} & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(2)}}{\sigma_{e_i}^2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p+1)}}{\sigma_{e_i}^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p)}}{\sigma_{e_i}^2} & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(p+1)}}{\sigma_{e_i}^2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{t_{i,(2p)}}{\sigma_{e_i}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sigma_{e_i}^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{Y_i t_{i,(1)}}{\sigma_{e_i}^2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{Y_i t_{i,(p)}}{\sigma_{e_i}^2} \end{pmatrix}.$$

A solução deste sistema de equações permite-nos obter os estimadores do modelo.

3.4.2 Exemplos

1. Polinômio de primeiro grau

Considerando a expressão apresentada acima para $p=1$, temos

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} \end{pmatrix},$$

onde $t_{i,(1)} = W_i$, $t_{i,(2)} = \frac{W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1}$ e $m_i = \frac{1}{\sigma_{e_i}^2}$, de maneira que

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i W_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \hat{\beta}_1,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{YW}}{S_{WW} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i \sigma_{u_i}^2 W_i^2}{(\sigma_{u_i}^2 + 1)}},$$

onde

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) S_{WW} = \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i W_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) S_{YW} = \sum_{i=1}^n m_i Y_i W_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n m_i W_i\right)}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Gostaríamos de esclarecer que os estimadores acima não foram ainda obtidos na literatura.

2. Polinômio de segundo grau

Considerando a expressão apresentada acima para $p=2$, temos

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(3)} \\ \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(2)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(3)} & \sum_{i=1}^n m_i t_{i,(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(1)} \\ \sum_{i=1}^n m_i Y_i t_{i,(2)} \end{pmatrix},$$

segue de (3.8) que $t_{i,(1)} = W_i$, $t_{i,(2)} = \frac{W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1}$, $t_{i,(3)} = \frac{W_i^3}{3\sigma_{u_i}^2 + 1}$, $t_{i,(4)} = \frac{W_i^4}{3\sigma_{u_i}^4 + 6\sigma_{u_i}^2 + 1}$ e lembrando que $m_i = \frac{1}{\sigma_{e_i}^2}$, temos

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i W_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \hat{\beta}_1 - \frac{\sum_{i=1}^n m_i W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1} \frac{\hat{\beta}_2}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n m_i S_{YW} - B \hat{\beta}_2,$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{C}{D} + \frac{B}{AD} \sum_{i=1}^n m_i S_{YW},$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^n m_i S_{WW} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i \sigma_{u_i}^2 W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1},$$

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{m_i W_i^3}{3\sigma_{u_i}^2 + 1} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i W_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n \frac{m_i W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1},$$

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{m_i Y_i W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1} \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$D = B \sum_{i=1}^n \frac{m_i W_i^3}{3\sigma_{u_i}^2 + 1} \left(\sum_{i=1}^n m_i S_{YW} - 1 \right) + \sum_{i=1}^n \frac{m_i W_i^4}{3\sigma_{u_i}^4 + 6\sigma_{u_i}^2 + 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i W_i^2}{\sigma_{u_i}^2 + 1} \right)^2,$$

e

$$\sum_{i=1}^n m_i S_{WW} = \sum_{i=1}^n m_i W_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i W_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$\sum_{i=1}^n m_i S_{YW} = \sum_{i=1}^n m_i Y_i W_i - \frac{\sum_{i=1}^n m_i W_i \sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

3.4.3 Aplicações numéricas

Para as aplicações numéricas realizamos uma simulação de Monte Carlo para avaliar os parâmetros e também uma aplicação em um modelo usado na detecção do viés analítica publicado por Galea-Rojas, de Castilho, Bolfarine e de Castro (2003).

a) Um estudo de simulação.

Considerando um valor de n fixo, os elementos do modelo quadrático podem ser definidos a partir dos passos abaixo:

- Gerar variáveis da forma $X_i \sim U(40; 80)$.
- Gerar n variáveis independentes para u_i , onde $u_i \sim N(1; \sigma_{u_i}^2)$.
- Gerar n variáveis independentes para e_i , onde $e_i \sim N(0; \sigma_{e_i}^2)$.
- Os valores de $\sigma_{u_i}^2$ serão obtidos a partir de uma distribuição uniforme em $(0; 0,5)$ enquanto $\sigma_{e_i}^2$ serão obtidos a partir de uma distribuição uniforme em $(0; 0,05)$.
- Gerar n variáveis independentes para $W_i = X_{ii}$.
- Obter para $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + e_i$, sendo os valores de $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 1$.

Resultados

Após implementada a metodologia na linguagem Ox (Doornik, 1998), os resultados obtidos são apresentados na tabela a seguir

Tabela 3.5. Estimativas segundo os métodos “naive” e “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Naive			Escore corrigido		
		Estimativa	Desv.Pad.	EQM	Estimativa	Desv.Pad.	EQM
5000	$\hat{\beta}_0$	1,21249	0,59676	0,60782	0,98639	0,57699	0,71449
	$\hat{\beta}_1$	1,41770	0,20090	0,16607	0,99433	0,34213	0,04850
	$\hat{\beta}_2$	0,93610	0,02364	0,01033	0,99204	0,02924	0,00073
6000	$\hat{\beta}_0$	1,21867	0,49487	0,39585	1,00702	0,58175	0,57051
	$\hat{\beta}_1$	1,23705	0,24910	0,38741	0,98364	0,31725	0,05921
	$\hat{\beta}_2$	0,93898	0,04161	0,00483	0,99546	0,04176	0,00187
7000	$\hat{\beta}_0$	1,19404	0,63631	0,76630	1,02672	0,75499	0,62193
	$\hat{\beta}_1$	1,25169	0,27943	0,18340	0,99310	0,25700	0,17179
	$\hat{\beta}_2$	0,91209	0,03518	0,00798	0,99625	0,02138	0,00083
8000	$\hat{\beta}_0$	1,22684	0,48879	0,84694	1,02377	0,49102	0,54898
	$\hat{\beta}_1$	1,23036	0,17417	0,31152	0,99361	0,30723	0,10072
	$\hat{\beta}_2$	0,92119	0,01801	0,01078	0,99424	0,02001	0,00183
9000	$\hat{\beta}_0$	1,23219	0,36816	0,88695	1,01648	0,82497	0,52792
	$\hat{\beta}_1$	1,30309	0,20946	0,40615	1,00345	0,37062	0,17920
	$\hat{\beta}_2$	0,91069	0,04160	0,00525	0,99168	0,02147	0,00162

Da tabela podemos observar que a metodologia proposta leva a estimativas muito próximas aos valores fixados na presente simulação, pode-se observar também que as estimativas obtidas pelo método naive não se aproximam aos valores fixados. Uma representação gráfica é apresentada a seguir

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2

Fig. 3.3. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

a) Um caso prático.

Para a aplicação prática considerou-se o exemplo 4 em Galea-Rojas, de Castilho, Bolfarine e de Castro (2003) com a finalidade de comparar a presente metodologia com a metodologia apresentada no capítulo 2, onde foi utilizado este mesmo exemplo, os resultados se apresentam na tabela a seguir

Tabela 3.6. Estimativas segundo o método de escore corrigido

Parâmetro	Aditivo		Multiplicativo	
	Estimativa	Desv.Pad.	Estimativa	Desv.Pad.
β_0	0,47412	0,07409	0,017457	0,011139
β_1	-1,67880	0,36417	0,930970	0,091829
β_2	0,63764	0,13876	-0,020733	0,048761

Observe-se que as estimativas de ambos modelos são um pouco diferentes, para observar melhor apresentamos um gráfico das tendências de ambos modelos

Fig. 3.4. Gráfico comparativo dos modelos aditivo e multiplicativo na metodologia escore corrigido

Do gráfico acima, pode-se observar que os dados se ajustaram melhor a um modelo multiplicativo que a um modelo aditivo.

Calibração Comparativa

4.1 Introdução

A calibração estatística é importante em aplicações práticas em diversas áreas. A calibração estatística é o processo através do qual a escala de um instrumento de medição é determinada ou ajustada a partir de um instrumento de referência.

Deve-se diferenciar a definição entre calibração absoluta e calibração comparativa. A calibração absoluta pode entender-se como uma forma de predição inversa que alguns autores chamam de regressão inversa. Na calibração comparativa pretende-se determinar a relação entre diversos testes ou instrumentos que fornecem medidas indiretas das mesmas unidades experimentais.

Suponha que dispomos de $r + 1$ ($r \geq 1$) instrumentos para medir uma característica ou resposta X_i em um grupo de n unidades. Um modelo freqüentemente adotado para este tipo de problema na literatura é dado por Barnett, (1969):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i, \quad (4.1)$$

$$W_i = X_i + u_i, \quad (4.2)$$

onde $Y_i = (Y_{i,1}, Y_{i,2}, \dots, Y_{i,r})^t$, $e_i = (e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,r})^t$, para $i = 1, 2, \dots, n$, são vetores aleatórios de dimensão $r \times 1$, $\beta_0 = (\beta_{0,1}, \beta_{0,2}, \dots, \beta_{0,r})^t$ e $\beta_1 = (\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{1,r})^t$ são parâmetros sobre os quais desejamos fazer inferências, sendo os β_0 's os vícios aditivos e os

β_1 's os vícios multiplicativos, X_i representa o verdadeiro valor da característica de interesse na i -ésima unidade, Y_{ij} corresponde à medida fornecida pelo k -ésimo instrumento para a característica da i -ésima unidade, $k = 1, 2, \dots, r$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

A equação (4.2) considera que um dos instrumentos mede a quantidade desconhecida X_i correspondente à i -ésima unidade sem vício. Segundo Barnnet (1969), este instrumento é chamado de instrumento de referência ou padrão. Para esta análise é assumido que $e_i \sim N_r(0, \Sigma)$ independentes, com $\Sigma = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2)$ e $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ independentes, para $i = 1, 2, \dots, n$, sendo e_i e u_i independentes.

No presente capítulo pretende-se estender o modelo de calibração comparativa usual para o polinomial, que não foi tratado na literatura. O modelo de calibração comparativa polinomial é expresso por

$$Y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j X_i^j + e_i, \quad (4.3)$$

$$W_i = X_i + u_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

onde os β_0 é o vício aditivo e os $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ são os vícios multiplicativos. No modelo de calibração polinomial, a expressão (4.4) é conhecida na literatura como a equação do instrumento de referência (ou padrão), que fornece as medições não viciadas.

O presente capítulo está estruturado do modo seguinte. Na seção 4.2 será estudado o caso em que as variâncias dos erros são homogêneas, isto é, $\Sigma = \sigma_e^2 \mathbf{I}$; supondo que σ_u^2 e depois supondo que $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ é conhecida. Na seção 4.3 trataremos o caso em que as variâncias dos erros são heterogêneas, isto é, $\Sigma = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2)$, considerando-se os casos em que σ_u^2 e $\lambda_k = \frac{\sigma_{ek}^2}{\sigma_u^2}$ são conhecidas, $k = 1, \dots, r$.

4.2 Variâncias homogêneas

4.2.1 Caso 1: σ_u^2 conhecida

a) Estimação dos parâmetros.

Nesta seção estenderemos os resultados obtidos no capítulo 2 (modelos aditivos) quando é considerado o método de Nakamura (1990), o modelo de calibração “Naive” a considerar segundo a metodologia no capítulo 2 é a seguinte,

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{j=0}^p \beta_j W_i^j + \mathbf{e}_i, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{Y}_i = (Y_{i,1}, \dots, Y_{i,r})^t$, $\beta_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,r})^t$ e $\mathbf{e}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,r})^t$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e n é o total de observações, p é a ordem do polinômio e r é o número de instrumentos avaliados.

Quando consideramos variâncias homogêneas, uma suposição para modelos funcionais é

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_{r+1} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right] \text{ independentes,} \quad (4.6)$$

onde $\Sigma = \sigma_e^2 \mathbf{I}$, enquanto que para modelos estruturais a expressão (4.6) pode ser apresentado conjuntamente com a distribuição $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, independentes. Consideramos que σ_u^2 é conhecida.

O logaritmo da função verossimilhança corrigida segundo a metodologia apresentada no capítulo 2, seção 2.2, é dada por uma generalização de (2.9)

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{nr}{2} \log 2\pi - \frac{nr}{2} \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \left(Y_{ik}^2 + \sum_{j=0}^p \beta_{jk}^2 t_{i,(2j)} \right. \\ & \left. - 2Y_{ik} \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_{jk} \beta_{sk} t_{i,(j+s)} \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

De acordo com (2.10) e (2.11) as funções escores corrigidos são

$$U^*(\beta_{sk}) = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{i=1}^n \left(Y_{ik} t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j+s)} \right), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
U^*(\sigma_e^2) = & -\frac{nr}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^4} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \left(Y_{ik}^2 + \sum_{j=0}^p \beta_{jk}^2 t_{i,(2j)} \right. \\
& \left. - 2Y_{ik} \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_{jk} \beta_{sk} t_{i,(j+s)} \right), \quad (4.9)
\end{aligned}$$

para $s = 0, 1, 2, \dots, p$ e $k = 1, 2, \dots, r$.

Considerando as expressões (4.8) e (4.9), podemos obter as seguintes equações lineares:

$$\begin{pmatrix}
n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\
\sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\hat{\beta}_{0,k} \\
\hat{\beta}_{1,k} \\
\vdots \\
\hat{\beta}_{p,k}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^n Y_{i,k} \\
\sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(1)} \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(p)}
\end{pmatrix},$$

sendo $k = 1, 2, \dots, r$,

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \left(Y_{ik}^2 + \sum_{j=0}^p \beta_{jk}^2 t_{i,(2j)} - 2Y_{ik} \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{s=0 \\ j < s}}^p \beta_{jk} \beta_{sk} t_{i,(j+s)} \right),$$

para obter os valores de $t_{i,(s)}$ precisamos da equação (2.27).

Para obter a variância assintótica das estimativas necessitamos a matriz de informação corrigida dada pela seguinte expressão,

$$I_{k,k}^*(\beta) = \begin{pmatrix}
n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\
\sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)}
\end{pmatrix},$$

para $k = 1, \dots, r$. Da mesma maneira se precisa dos componentes das funções escores corrigidos individuais, isto é,

$$\mathbf{S}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n E[\mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t]. \quad (4.10)$$

sendo que $\mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \left(U(\beta_{01}), \dots, U(\beta_{p1}), \dots, U(\beta_{0r}), \dots, U(\beta_{pr}) \right)^t$, a finalidade disto é criar uma matriz de covariâncias de tipo sandwich, que tem a forma seguinte

$$\mathcal{L}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} \mathbf{S}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1},$$

com isto temos

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_{(p+1) \times r} (0, \mathcal{L}^*). \quad (4.11)$$

b) Aplicação numérica.

Para esta seção consideramos um estudo da simulação. Para tal fim, consideramos as seguintes características:

1. São considerados três instrumentos a comparar em um modelo quadrático.
2. Se gera $X_i \sim \text{Binomial}(10; 0, 5)$, $u_i \sim N(0; 0, 05)$ e $e_{i,k} \sim N(0, 1)$, sendo que e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} são independentes.
3. Os parâmetros considerados na presente simulação são $\beta_0 = (1, 2, 3)^t$, $\beta_1 = (2, 4, 5)^t$ e $\beta_2 = (3, 5, 9)^t$.
4. Considerar os modelos seguintes

$$W_i = X_i + u_i$$

$$Y_{i1} = \beta_{01} + \beta_{11}X_i + \beta_{21}X_i^2 + e_{i1}$$

$$Y_{i2} = \beta_{02} + \beta_{12}X_i + \beta_{22}X_i^2 + e_{i2}$$

$$Y_{i3} = \beta_{03} + \beta_{13}X_i + \beta_{23}X_i^2 + e_{i3}$$

Resultados

Após implementar a metodologia na linguagem Ox (Doornik, 1998) obtemos os seguintes resultados

Tabela 4.1. Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	2,36200	2,37080	2,37130	2,36970	2,36720
β_1	2	1,17010	1,17390	1,16620	1,16890	1,17790
β_2	3	0,08379	0,07107	0,08338	0,07976	0,08094
σ_e^2	1	7,48180	7,52250	7,50870	7,51220	7,48250

Tabela 4.2. Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	0,96522	0,92649	0,96984	1,08090	1,08397
β_1	2	2,06070	2,03190	2,06490	1,99640	2,09962
β_2	3	2,99380	2,95350	2,97690	3,05782	2,97130
σ_e^2	1	0,98097	0,96910	1,02710	1,01055	0,95740

Das tabelas acima podemos apreciar que os estimadores “escore corrigido” para o instrumento 1, se aproximam aos valores propostos. Gráficamente pode-se ver o seguinte

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para σ_e^2

Fig. 4.1. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra para o instrumento 1

Os gráficos acima indicam a proximidade dos estimadores “escore corrigido” a os valores propostos, para o instrumento 1.

Tabela 4.3. Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	2	4,52620	4,53620	4,53740	4,53330	4,52930
β_1	4	2,12160	2,12340	2,11250	2,11270	2,13040
β_2	5	0,13663	0,11978	0,13649	0,13447	0,13254
σ_e^2	1	7,48180	7,52250	7,50870	7,51220	7,48250

Tabela 4.4. Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	2	1,96250	1,87390	1,93740	2,14990	2,01830
β_1	4	4,07850	4,04490	4,03090	4,00560	3,94370
β_2	5	4,93360	4,98710	4,97270	5,05210	5,07090
σ_e^2	1	0,98097	0,96910	1,02710	1,01055	0,95740

Para o instrumento 2 vemos que os estimadores de “escore corrigido” se aproximam a os valores fixados na simulação que os estimadores “naive”, gráficamente este comportamento se expressa nas figuras seguintes,

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2

Fig. 4.2. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra e instrumento 2

Pode-se observar dos gráficos acima que as estimativas “escore corrigido” se aproximam aos valores fixados na simulação quando é considerado o instrumento 2.

Tabela 4.5. Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	3	6,72790	6,73980	6,74160	6,73460	6,72860
β_1	5	3,27410	3,27120	3,25660	3,25320	3,28120
β_2	9	0,24048	0,21995	0,24195	0,24186	0,23690
σ_e^2	1	7,48180	7,52250	7,50870	7,51220	7,48250

Tabela 4.6. Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetro	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	3	2,96250	3,07390	2,98740	3,04990	3,01830
β_1	5	4,97850	4,98490	4,99090	5,00560	5,04370
β_2	9	8,93360	8,98710	8,99270	9,05210	9,07090
σ_e^2	1	0,98097	0,96910	1,02710	1,01055	0,95740

Da mesma maneira no instrumento 3, as estimativas no método “naive” não se aproximam a os valores fixados na simulação, enquanto os estimadores “escore corrigido” se aproximam bastante aos valores fixados.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2

Fig. 4.3. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra

Esta situação pode ser vista nos gráficos acima, observando-se no caso dos estimadores “escore corrigido” a proximidade com os valores fixados na simulação.

4.3 Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida

a) Estimação dos parâmetros.

Nesta seção aplicaremos a metodologia do escore corrigido apresentada por Bolfarine e Gimenez (1997) aos modelos polinomiais para calibração comparativa. Para tal fim, utilizaremos os procedimentos vistos na seção 2.3.

O modelo de calibração “naive” é como na equação (4.5). Quando consideramos variâncias homogêneas, a suposição para modelos de tipo funcionais é

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_{r+1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \sigma_u^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \text{ independentes, } i = 1, \dots, n, \quad (4.12)$$

enquanto nos modelos estruturais a expressão (4.10) pode ser apresentada conjuntamente com a distribuição $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, independentes, $i = 1, 2, \dots, n$. Consideramos que Λ é conhecida.

Para a estimação dos parâmetros consideramos um processo algorítmico de tipo Newton-Raphson, que segue a seguinte estrutura,

Algoritmo para estimação dos parâmetros no caso de Escore Corrigida

1. Atribua um valor inicial para σ_u^2 .
2. Substitua σ_u^2 da etapa anterior na expressão seguinte:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{0,k}^{(m)} \\ \hat{\beta}_{1,k}^{(m)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{p,k}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_{i,k} \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(p)} \end{pmatrix},$$

para $k = 1, \dots, r$, lembrando que cada valor de $t_{i,(s)}$ segue a forma da expressão (2.27).

3. Agora com os valores $\beta_{j,k}^{(m)}$, $j = 0, 1, \dots, p$ e $k = 1, 2, \dots, r$ obtidos devemos atualizar σ_u^2 . Para isto consideramos o método de Newton-Raphson em cada instrumento que segue segundo,

$$\sigma_u^{2(m+1)} = \sigma_u^{2(m)} + \frac{U^*(\sigma_u^{2(m)})}{I^*(\sigma_u^{2(m)})},$$

b) Aplicação numérica.

Nesta seção apresentamos uma simulação com as seguintes características:

1. São considerados três instrumentos a comparar em um modelo quadrático.
2. Se gera $X_i \sim \text{Binomial}(10; 0, 5)$, $u_i \sim N(0; 0, 05)$, $\lambda = 20$ e $e_{i,k} \sim N(0; \lambda \times \sigma_u^2)$, sendo que e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} são independentes.
3. Os parâmetros considerados na presente simulação são $\beta_0 = (1, 2, 3)^t$, $\beta_1 = (2, 4, 5)^t$ e $\beta_2 = (3, 5, 9)^t$.
4. Considerar os modelos seguintes

$$W_i = X_i + u_i$$

$$Y_{i1} = \beta_{01} + \beta_{11}X_i + \beta_{21}X_i^2 + e_{i1}$$

$$Y_{i2} = \beta_{02} + \beta_{12}X_i + \beta_{22}X_i^2 + e_{i2}$$

$$Y_{i3} = \beta_{03} + \beta_{13}X_i + \beta_{23}X_i^2 + e_{i3}$$

Resultados

Após implementada a metodologia na linguagem Ox (Doornik, 1998), os resultados obtidos são apresentados na tabela a seguir

Tabela 4.7. Estimativas dos parâmetros segundo o método “Naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	1,53590	1,54290	1,54300	1,54360	1,54290
β_1	2	0,26781	0,27655	0,27158	0,27732	0,27851
β_2	-1	-0,01945	-0,03002	-0,02182	-0,02696	-0,02380
σ_e^2	1	1,22900	1,23130	1,23430	1,23810	1,23840

Tabela 4.8. Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	1,00090	0,95853	0,98217	1,01940	1,01510
β_1	2	1,96910	2,08120	2,03050	1,98990	1,99350
β_2	-1	-0,97667	-1,06360	-1,01070	-0,99413	-0,99264
σ_e^2	1	0,91652	0,97094	0,99219	0,99275	1,01805

Das tabelas acima podemos apreciar que as estimativas do método “escore corrigido” apresentam uma maior proximidade aos valores fixados que o método naive.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para σ_e^2

Fig. 4.4. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 1

Os gráficos acima amostram o bom ajuste das estimativas do método “escore corrigido” no instrumento 1 aos valores fixados na simulação.

Tabela 4.9. Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	2	2,22870	2,33640	2,23630	2,13730	2,23620
β_1	-1	0,19393	0,19832	0,19409	0,19904	0,19893
β_2	2	0,05616	0,04856	0,05630	0,05106	0,05590
σ_e^2	1	1,22900	1,23130	1,23430	1,23810	1,23840

Tabela 4.10. Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	2	1,98150	1,98940	2,04230	2,00810	1,98410
β_1	-1	-0,97018	-0,98095	-1,01690	-1,08420	-1,07879
β_2	2	1,96940	1,96170	2,02070	2,01036	1,97380
σ_e^2	1	0,91652	0,97094	0,99219	0,99275	1,01805

Para o instrumento 2 pode-se observar que as estimativas do método “escore corrigido” tem uma boa proximidade aos valores fixados na simulação, graficamente este comportamento se expressa nas figuras seguintes,

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2

Fig. 4.5. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 2

Das figuras acima pode-se observar que as estimativas do método “naive” não se aproximam aos valores fixados na simulação quando é avaliado no instrumento 2, como se mencionou acima o método “escore corrigido” apresenta estimativas bastante próximas aos valores fixados.

Tabela 4.11. Estimativas dos parâmetros segundo o método “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	-1	-0,05106	-0,04314	-0,04288	-0,04335	-0,04492
β_1	2	0,71895	0,72522	0,71889	0,72311	0,72822
β_2	1	0,03217	0,02053	0,03078	0,02640	0,02857
σ_e^2	1	1,22900	1,23130	1,23430	1,23810	1,23840

Tabela 4.12. Estimativas dos parâmetros segundo o método “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	-1	-1,01690	-1,05750	-1,05400	-0,99983	-1,07260
β_1	2	2,01490	2,05010	2,04770	1,97320	2,04980
β_2	1	1,05857	1,09497	1,06310	1,04200	1,05932
σ_e^2	1	0,91652	0,97094	0,99219	0,99275	1,01805

Da mesma maneira no instrumento 3, os estimadores “naive” estabilizam seus valores longe dos parâmetros propostos, enquanto os estimadores de “escore corrigido” tem uma boa aproximação aos valores propostos na simulação.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2

Fig. 4.6. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 3

Nos gráficos da acima, pode-se observar que no caso das estimativas do método de “escore corrigido” estas foram bastante próximas aos valores fixados, enquanto que as estimativas do método “naive” estas estão afastados dos valores fixados na simulação para o instrumento 3.

4.4 Variâncias heterogêneas

4.4.1 Caso 1: σ_u^2 conhecida

a) Estimação dos parâmetros.

Nesta seção estenderemos os resultados obtidos no capítulo 2 (modelos aditivos) quando é considerado o método de Nakamura (1990), o modelo de calibração “naive” a considerar segundo a metodologia no capítulo 2 é a mesma apresentada na equação (4.5), quando consideramos variâncias heterogêneas a suposição para modelos de tipo funcional é

$$\begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_{r+1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{ee} & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \quad (4.13)$$

onde $\Sigma_{ee} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2)$, enquanto para modelos de tipo estrutural a expressão (4.11) pode ser apresentado conjuntamente com a distribuição $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Consideramos que σ_u^2 é conhecida.

O logaritmo da função de verossimilhança corrigida segundo a metodologia apresentada no capítulo 2, seção 2.2, é dada por:

$$\begin{aligned} \ell^*(\beta, \sigma_e^2; \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = & -\frac{nr}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \sum_{k=1}^r \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{k=1}^r \frac{1}{2\sigma_k^2} \sum_{i=1}^n \left(Y_{ik}^2 + \sum_{j=0}^p \beta_{jk}^2 t_{i,(2j)} \right. \\ & \left. - 2Y_{ik} \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_{jk} \beta_{sk} t_{i,(j+s)} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sendo as funções escore corrigidas dadas por

$$U^*(\beta_{sk}) = \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^n \left(Y_{ik} t_{i,(s)} - \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j+s)} \right), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} U^*(\sigma_k^2) = & -\frac{n}{2\sigma_k^2} + \frac{1}{2\sigma_k^4} \sum_{i=1}^n \left(Y_{ik}^2 + \sum_{j=0}^p \beta_{jk}^2 t_{i,(2j)} \right. \\ & \left. - 2Y_{ik} \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_{jk} \beta_{sk} t_{i,(j+s)} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

para $s = 0, 1, 2, \dots, p$ parâmetros e $k = 1, 2, \dots, r$ instrumentos.

Considerando as expressões (4.13) e (4.14) podemos obter as seguintes equações lineares,

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{0,k} \\ \hat{\beta}_{1,k} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{p,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_{i,k} \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(p)} \end{pmatrix},$$

e

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(Y_{ik}^2 + \sum_{j=0}^p \beta_{jk}^2 t_{i,(2j)} - 2Y_{ik} \sum_{j=0}^p \beta_{jk} t_{i,(j)} + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{s=0}^p \beta_{jk} \beta_{sk} t_{i,(j+s)} \right).$$

Para obter a variância assintótica necessitamos a matriz de informação corrigida dada pela seguinte expressão,

$$I^*(\beta) = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \dots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix},$$

assim como um componente que é o produto das funções escores individuais, isto é,

$$S^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = E \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \mathbf{U}_i^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y})^t \right]. \quad (4.17)$$

com a finalidade de criar uma matriz de covariâncias de tipo sandwich, que segue a continuação

$$\mathcal{L}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n} (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1} S^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}) (\mathbf{I}^*(\beta; \mathbf{W}, \mathbf{Y}))^{-1},$$

e desta forma temos

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_{p+1}(0, \mathcal{L}^*). \quad (4.18)$$

b) Aplicação numérica.

Para esta seção consideramos uma simulação com as seguintes características:

1. São considerados três instrumentos a comparar em um modelo quadrático.
2. Se gera $X_i \sim \text{Binomial}(10; 0,5)$, $u_i \sim N(0; 0,25)$ e $e_1 \sim N(0; 0,25)$, $e_2 \sim N(0; 0,5)$, $e_3 \sim N(0; 1)$, sendo que e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} são independentes.
3. Os parâmetros considerados na presente simulação são $\beta_0 = (-1, 1, 1)^t$, $\beta_1 = (1, -1, 4)^t$ e $\beta_2 = (1, 1, -1)^t$.
4. Considerar os modelos seguintes

$$W_i = X_i + u_i$$

$$Y_{i1} = \beta_{01} + \beta_{11}X_i + \beta_{21}X_i^2 + e_{i1}$$

$$Y_{i2} = \beta_{02} + \beta_{12}X_i + \beta_{22}X_i^2 + e_{i2}$$

$$Y_{i3} = \beta_{03} + \beta_{13}X_i + \beta_{23}X_i^2 + e_{i3}$$

Resultados

Tabela 4.13. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	-1	-0,42323	-0,42130	-0,41563	-0,42186	-0,41796
β_1	1	0,48097	0,46838	0,47222	0,47623	0,47811
β_2	1	0,02691	0,03154	0,02539	0,02622	0,02165
σ_e^2	0,25	0,50216	0,50369	0,50594	0,50309	0,50484

Tabela 4.14. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	-1	-1,05530	-1,06730	-0,99374	-1,01100	-1,05440
β_1	1	1,99530	1,90610	1,98581	1,93840	1,98610
β_2	1	0,97258	1,03663	1,05490	0,99640	0,97847
σ_e^2	0,25	0,28396	0,22261	0,23737	0,24797	0,25169

Das tabelas acima podemos apreciar que os estimadores “escore corrigido” estão próximos aos valores fixados na presente simulação quando é avaliado o instrumento 1.

(a) Estimativa para β_0

(b) Estimativa para β_1

(c) Estimativa para β_2

(d) Estimativa para β_2

Fig. 4.7. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 1

Dos gráficos acima pode-se apreciar que as estimativas do método do “escore corrigido” estão próximos aos valores fixados, enquanto as estimativas do método “naive” não.

Tabela 4.15. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	0,82958	0,83453	0,82787	0,83237	0,83238
β_1	-1	-0,033512	-0,0224	-0,026124	-0,023105	-0,027958
β_2	1	0,028706	2,05E-02	0,023947	0,024398	0,026684
σ_e^2	0,5	0,50292	0,50645	0,50399	0,50546	0,50554

Tabela 4.16. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	1,04590	1,00250	0,98508	1,00480	0,99910
β_1	-1	-1,26230	-0,93013	-1,00440	-1,02650	-0,96270
β_2	1	1,23640	0,90000	1,03700	1,02980	0,94483
σ_e^2	0,5	0,51940	0,50710	0,50370	0,51250	0,49838

Para o instrumento 2 observa-se que as estimativas do método do “escore corrigido” estão mais próximos aos valores fixados na simulação que as estimativas do método “naive”, graficamente este comportamento se expressa nas figuras seguintes,

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para β_2

Fig.4.8. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 2

A partir destas figuras pode-se observar que para o instrumento 2 as estimativas do método “naive” não conseguem aproximar-se aos valores fixados, enquanto as estimativas do método do “escore corrigido” conseguem aproximar-se aos valores fixados.

Tabela 4.17. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	2,28960	2,29520	2,29070	2,29040	2,29420
β_1	4	0,79817	0,77016	0,78311	0,77741	0,77530
β_2	-1	-0,04274	-0,02125	-0,02968	-0,02127	-0,02832
σ_e^2	1	1,54260	1,55470	1,56840	1,56470	1,56860

Tabela 4.18. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valor	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	1,01533	1,06063	1,02220	0,96927	0,99755
β_1	4	4,19970	4,13940	3,96020	4,11650	4,11170
β_2	-1	-1,22810	-1,00440	-1,05923	-1,09000	-1,03510
σ_e^2	1	1,06247	1,18080	1,08340	1,13050	1,10680

No instrumento 3, as estimativas obtidas pelo método “naive” não se aproximam aos valores fixados na presente simulação, enquanto as estimativas do método do “escore corrigido” se aproximam aos valores fixados.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para β_2

Fig. 4.9. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 3

Dos gráficos acima podemos observar que as estimativas do método “escore corrigido” se aproximam aos valores fixados, enquanto as estimativas do método “naive” não se aproximam a estes valores.

4.5 Caso 2: $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ conhecida

a) Estimação dos parâmetros.

Nesta seção implementaremos a metodologia apresentada por Bolfarine e Gimenez (Escore Corrigida) em modelos polinomiais para calibração comparativa, para tal fim, estaremos utilizando os procedimentos vistos na seção 2.3 do capítulo 2.

O modelo de calibração “naive” é como na equação (4.5), quando consideramos variâncias homogêneas a suposição para modelos de tipo funcional é

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ u_i \end{pmatrix} \sim N_{r+1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \Sigma_{\lambda\lambda} & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} \right], \quad (4.19)$$

onde $\Sigma_{\lambda\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, enquanto para modelos de tipo estrutural a expressão (4.15) pode ser apresentado conjuntamente com a distribuição $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Consideramos que λ é conhecida.

Para a estimação dos parâmetros consideramos um processo algorítmico de tipo Newton-Raphson, que segue a seguinte estrutura,

Algoritmo para estimação dos parâmetros no caso de escore corrigido

1. Considere um valor inicial para σ_u^2 .
2. Substitua o valor considerado na etapa anterior na expressão seguinte,

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(1)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(2)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n t_{i,(p)} & \sum_{i=1}^n t_{i,(p+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^n t_{i,(2p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{0,k}^{(m)} \\ \hat{\beta}_{1,k}^{(m)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{p,k}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_{i,k} \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n Y_{i,k} t_{i,(p)} \end{pmatrix},$$

lembrando que cada valor de $t_{i,(s)}$ segue a forma da expressão (2.37).

3. Agora com os valores $\beta_{j,k}^{(m)}$, $j = 0, 1, \dots, p$ parâmetros β e $k = 1, 2, \dots, r$ instrumentos, obtidos devemos atualizar os valores de σ_u^2 , para isto consideramos o método de Newton-Raphson em cada instrumento que segue segundo,

$$\sigma_{u_k}^{2(m+1)} = \sigma_{u_k}^{2(m)} + \frac{U^*(\sigma_{u_k}^{2(m)})}{I^*(\sigma_{u_k}^{2(m)})},$$

4. O novo valor de $\sigma_u^{2(m+1)}$ será a media obtida em cada instrumento, isto é,

$$\sigma_u^{2(m+1)} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \sigma_{u_k}^{2(m+1)},$$

b) Aplicação numérica.

Para esta seção consideramos uma simulação com as seguintes características:

1. São considerados três instrumentos a comparar em um modelo quadrático.
2. Se gera $X_i \sim \text{Binomial}(10; 0, 5)$, $u_i \sim N(0; 0, 25)$ e $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, sendo que e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} são independentes.
3. Os parâmetros considerados na presente simulação são $\beta_0 = (1, 2, -1)^t$, $\beta_1 = (2, -1, 2)^t$ e $\beta_2 = (-1, 2, 1)^t$.
4. Considerar os modelos seguintes

$$W_i = X_i + u_i$$

$$Y_{i1} = \beta_{01} + \beta_{11}X_i + \beta_{21}X_i^2 + e_{i1}$$

$$Y_{i2} = \beta_{02} + \beta_{12}X_i + \beta_{22}X_i^2 + e_{i2}$$

$$Y_{i3} = \beta_{03} + \beta_{13}X_i + \beta_{23}X_i^2 + e_{i3}$$

Resultados

Em seguida os resultados obtidos da simulação implementada acima em linguagem OX (Doornik, 1998) são apresentados nas tabelas seguintes

Tabela 4.19. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	1,54620	1,53970	1,54560	1,54620	1,54490
β_1	2	0,27620	0,27551	0,27828	0,27524	0,27763
β_2	-1	-0,03074	-0,02228	-0,02770	-0,02772	-0,02904
σ_e^2	0,25	0,31345	0,31663	0,31807	0,31800	0,31775

Tabela 4.20. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 1.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	1	1,03100	0,92095	1,00470	1,01380	0,97888
β_1	2	0,97947	2,39530	1,99410	1,94100	2,11450
β_2	-1	-1,02830	-1,06300	-0,99747	-0,95048	-1,10990
σ_e^2	0,25	0,23105	0,23227	0,22633	0,22112	0,27462

Das tabelas acima podemos apreciar que as estimativas do método de “escore corrigido” se aproxima adequadamente aos valores fixados na simulação para o instrumento 1.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para β_2

Fig. 4.10. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 1

Segundo os gráficos acima amostram o bom ajuste das estimativas do método do “escore corrigido” a os valores fixados. Também, observa-se que as estimativas do método “naive” não conseguem aproximar-se a os valores fixados para o instrumento 1.

Tabela 4.21. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	2	2,03750	2,03630	2,03480	2,03790	2,03890
β_1	-1	0,19495	0,19720	0,19944	0,19724	0,19359
β_2	2	0,05216	0,05414	0,04889	0,05162	0,05480
σ_e^2	0,5	0,57638	0,58671	0,58325	0,58174	0,58613

Tabela 4.22. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 2.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	2	2,02340	2,04850	1,98750	2,02660	2,00190
β_1	-1	-0,97271	-1,07570	-0,95198	-1,16690	-0,98823
β_2	2	2,00450	2,28050	1,95130	2,17160	1,98050
σ_e^2	0,5	0,46210	0,66454	0,55265	0,54223	0,54923

Para o instrumento 2 pode-se observar que as estimativas do método do “escore corrigido” tem uma boa proximidade aos valores fixados na simulação que as estimativas do método “naive”, gráficamente este comportamento se expressa nas figuras seguintes,

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para β_2

Fig. 4.11. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 2

Destas figuras pode-se observar que as estimativas do método “naive” não se aproximam aos valores fixados, enquanto as estimativas do método “escore corrigido” se aproximam razoavelmente aos valores fixados no instrumento 2.

Tabela 4.23. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “naive” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	-1	-0,03839	-0,04120	-0,04536	-0,04080	-0,04039
β_1	2	0,72362	0,73019	0,72963	0,71675	0,72654
β_2	1	0,01500	0,02375	0,01988	0,03051	0,02186
σ_e^2	0,75	1,31180	1,30900	1,31240	1,32150	1,31550

Tabela 4.24. Estimativas dos parâmetros segundo o modelo “escore corrigido” para diferentes tamanhos de amostra e Instrumento 3.

Parâmetros	Valores	500	1000	2000	3000	4000
β_0	-1	-1,11663	-1,05790	-1,02320	-0,94406	-1,03250
β_1	2	2,23079	2,13090	2,16800	1,95600	2,01120
β_2	1	1,00149	0,90639	0,90986	1,15480	0,98565
σ_e^2	0,75	0,69320	0,79681	0,77898	0,76335	0,74385

Da mesma maneira no instrumento 3, as estimativas do método “naive” não se aproximam aos valores fixados na presente simulação, enquanto as estimativas do método do “escore corrigido” tem uma boa aproximação aos valores fixados na simulação.

(a) Estimativa para β_0 (b) Estimativa para β_1 (c) Estimativa para β_2 (d) Estimativa para β_2

Fig. 4.12. Comportamento das estimativas “naive” e “escore corrigido” segundo o tamanho da amostra no instrumento 3

Dos gráficos acima, pode observar-se que no caso das estimativas do método do “escore corrigido” estas apresentam boa aproximação aos valores fixados na simulação, enquanto as estimativas do método “naive” não conseguem ter uma aproximação adequada aos valores propostos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal do presente trabalho foi a de avaliar a metodologia proposta por Nakamura (1990) em modelos polinomiais com erros nas variáveis, no decorrer do presente trabalhos obtivemos que a metodologia proposta por Nakamura (1990) pode-se aplicar adequadamente aos modelos polinomiais com erros nas variáveis quando σ_u^2 é conhecida, isto é assim, devido a que a função verossimilhança corrigida produz a função de escore corrigida pela derivada simple do parâmetro.

Esta metodologia em modelos aditivos obtém estimativas próximas aos valores fixados com tamanhos de amostra menores que os modelos multiplicativos.

Quando σ_e^2 não é conhecida diretamente a metodologia proposta por Nakamura (1990) não é conveniente, devido a que a função verossimilhança corrigida não produz a função escore corrigido de σ_u^2 , este fato é devido à falta do suposto de permutabilidade da derivada e o a esperança da variável que Nakamura manifesta em seu trabalho.

Frente a este problema se considerou trabalhar com a metodologia proposta por Bolfarine e Gimenez (1997), esta metodologia propõe trabalhar a correção da função escore e não a da função verossimilhança, permitindo obter boas estimativas.

Quando foi comparado o tamanho de amostra necessário para a simulação observou-se que também na metodologia proposta por Bolfarine e Gimenez (1997) foi preciso aumentar o tamanho de amostra para os modelos multiplicativos, já que com tamanhos de amostra

proposto em modelos aditivos não se conseguia obter estimativas próximas aos valores fixados na simulação.

As metodologias estudadas no presente trabalho poderiam ser estendidas a modelos mais complexos que muitas vezes são considerados na econometria, por exemplo, poderia ser considerada o modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i1}^2 + \beta_3 X_{i2},$$

sendo

$$W_{i1} = X_{i1} + u_{i1}, \quad \text{ou} \quad W_{i1} = X_{i1}u_{i1},$$

e

$$W_{i2} = X_{i2} + u_{i2}, \quad \text{ou} \quad W_{i2} = X_{i2}u_{i2}.$$

Uma outra extensão que poderia ser considerada é estudar os modelos ultra-estrutural que não foi considerada no presente trabalho.

Este trabalho poderia ser estendido aos modelos polinomiais de Berkson considerando as metodologias propostas por Nakamura (1990) e Bolfarine e Gimenez (1997).

Tabela 6.1. Dados simulados por Fuller (1987) para um polinômio de segundo grau.

No	Y ₁	Y ₂	W	No	Y ₁	Y ₂	W	No	Y ₁	Y ₂	W
1	0,7	1,24	-1,44	17	0,1	0,64	-1,11	33	0,2	0,47	-0,22
2	0,05	0,59	-0,9	18	0,31	0,85	-0,57	34	0,16	0,43	-0,98
3	0,99	1,53	-0,81	19	0,24	0,78	-0,9	35	0,45	0,72	-0,54
4	0,3	0,84	-1,14	20	0,13	0,67	-1,25	36	0,42	0,69	-0,54
5	1,1	1,64	-1,36	21	0,45	0,99	-0,81	37	0,14	0,41	-0,81
6	0,93	1,47	-0,61	22	0,66	1,19	-1,07	38	-0,21	0,06	-0,14
7	0,3	0,84	-1,11	23	0,18	0,72	-0,51	39	-0,59	-0,31	-1,03
8	0,24	0,78	-1,46	24	0,47	1,01	-0,86	40	-0,22	0,05	-0,36
9	0,28	0,82	-0,77	25	0,18	0,45	-0,16	41	-0,25	0,02	-0,14
10	0,86	1,4	-1,31	26	-0,18	0,09	-0,64	42	-0,23	0,04	-0,37
11	0,76	1,3	-0,98	27	0,15	0,42	0,21	43	-0,13	0,14	-0,71
12	0,48	1,02	-0,93	28	0,12	0,39	-0,5	44	-0,41	-0,14	-0,21
13	0,11	0,65	-1,02	29	0,05	0,32	-0,45	45	0,02	0,29	-0,52
14	0,21	0,75	-1,6	30	-0,28	-0,01	-0,71	46	0,34	0,61	-1,01
15	0,6	1,14	-0,45	31	-0,59	-0,32	-0,7	47	-0,31	-0,04	-0,34
16	0,58	1,12	-1,07	32	0,38	0,65	-0,46	48	0,31	0,58	-0,68

Tabela 6.2. Dados simulados por Fuller (1987) para um polinômio de segundo grau (Continuação...).

Obs	Y ₁	Y ₂	W	Obs	Y ₁	Y ₂	W	Obs	Y ₁	Y ₂	W
49	-0,06	-0,06	-0,40	73	0,05	-0,22	0,83	97	1,54	1,00	1,03
50	0,35	-0,35	-0,06	74	0,51	0,24	0,70	98	1,53	0,99	0,92
51	-0,35	-0,35	0,13	75	0,69	0,42	0,35	99	1,32	0,78	1,28
52	0,09	0,09	-0,18	76	0,20	-0,07	0,64	100	1,48	0,94	1,53
53	0,11	0,11	0,11	77	1,08	0,81	0,52	101	1,03	0,49	1,22
54	0,03	0,03	-0,04	78	0,70	0,43	0,67	102	1,11	0,57	0,84
55	0,26	0,26	-0,54	79	0,17	-0,10	0,50	103	1,33	0,79	1,23
56	0,41	0,41	-0,10	80	0,39	0,12	-0,26	104	1,43	0,89	1,36
57	-0,01	-0,01	0,35	81	0,68	0,41	0,56	105	1,76	1,22	0,72
58	-0,45	-0,45	-0,32	82	0,87	0,60	0,44	106	1,16	0,62	0,71
59	0,32	0,32	-0,23	83	0,79	0,52	0,99	107	1,96	1,42	1,44
60	-0,14	-0,14	-0,12	84	0,05	-0,22	0,76	108	2,05	1,51	0,82
61	-0,06	-0,06	-0,05	85	0,43	0,16	0,55	109	1,80	1,26	0,58
62	0,32	0,32	0,31	86	0,17	-0,10	0,53	110	1,63	1,09	0,39
63	-0,06	-0,06	-0,45	87	0,40	0,13	0,89	111	0,92	0,38	0,63
64	-0,22	-0,22	0,65	88	0,33	0,06	0,35	112	1,86	1,32	1,11
65	-0,30	-0,30	0,57	89	0,73	0,46	0,33	113	1,50	0,96	0,84
66	-0,26	-0,26	0,17	90	0,57	0,30	0,39	114	2,04	1,50	1,07
67	-0,59	-0,59	-0,16	91	0,57	0,30	-0,19	115	1,85	1,31	0,80
68	-0,31	-0,31	-0,02	92	0,36	0,09	0,55	116	1,34	0,80	1,08
69	0,23	0,23	0,08	93	0,57	0,30	0,55	117	1,60	1,06	0,85
70	-0,25	-0,25	-0,17	94	0,64	0,37	0,02	118	1,56	1,02	0,97
71	0,59	0,59	0,09	95	0,27	0,00	0,46	119	1,60	1,06	1,00
72	0,34	0,34	0,43	96	1,25	0,98	0,84	120	1,57	1,03	1,60

Tabela 6.3. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,229	0,074693	0,330	0,042531	0,134	0,057042	0,180	0,031355
0,487	0,109180	0,601	0,057543	0,347	0,092063	0,325	0,042223
0,257	0,079156	0,292	0,040004	1,032	0,159305	1,442	0,089488
0,894	0,148205	0,294	0,040114	0,138	0,057892	0,278	0,038998
0,131	0,056396	0,398	0,046731	1,256	0,175852	1,206	0,081788
0,122	0,054412	0,241	0,036256	1,164	0,169249	1,837	0,101136
0,092	0,047209	0,110	0,024383	0,067	0,040248	0,467	0,050647
0,540	0,115004	0,663	0,060450	0,081	0,044280	0,381	0,045720
0,211	0,071679	0,319	0,041805	0,136	0,057468	0,079	0,020667
0,164	0,063144	0,182	0,031478	0,250	0,078064	0,563	0,055657
0,149	0,060169	0,149	0,028464	0,040	0,031049	0,074	0,019992
0,116	0,053049	0,117	0,025207	0,040	0,031049	0,242	0,036347
0,246	0,077433	0,273	0,038657	0,538	0,114790	0,439	0,049123
0,274	0,081748	0,300	0,040548	0,368	0,094825	0,214	0,034176
0,347	0,092063	0,384	0,045902	0,144	0,059145	0,108	0,024213
0,381	0,096496	0,149	0,028506	0,062	0,038708	0,054	0,017132
0,241	0,076637	0,285	0,039509	0,140	0,058313	0,343	0,043378
0,200	0,069774	0,282	0,039241	0,070	0,041145	0,168	0,030260
0,115	0,052818	0,156	0,029126	0,313	0,087409	0,612	0,058053
0,150	0,060372	0,615	0,058194	0,693	0,130382	0,526	0,053794
0,040	0,031049	0,059	0,017809	0,096	0,048231	0,113	0,024713
0,561	0,117233	0,462	0,050414	0,125	0,055081	0,160	0,029529
0,151	0,060574	0,143	0,027900	0,175	0,065241	0,346	0,043560
0,141	0,058522	0,146	0,028213	0,213	0,072020	0,164	0,029850
0,136	0,057468	0,104	0,023781	0,495	0,110078	0,497	0,052292

Tabela 6.4. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,074	0,042311	0,142	0,027738	0,205	0,070646	0,153	0,028842
0,040	0,031049	0,040	0,014657	0,093	0,047467	0,068	0,019118
0,196	0,069069	0,186	0,031835	0,088	0,046165	0,165	0,029929
0,513	0,112074	0,454	0,049972	0,081	0,044280	0,071	0,019581
0,080	0,044004	0,088	0,021777	0,111	0,051886	0,130	0,026572
0,241	0,076637	0,133	0,026832	0,040	0,031049	0,039	0,014461
0,082	0,044554	0,072	0,019761	0,260	0,079619	0,204	0,033345
0,331	0,089902	0,472	0,050952	0,040	0,031049	0,050	0,016381
0,279	0,082495	0,259	0,037642	0,176	0,065428	0,177	0,031043
0,743	0,135033	0,516	0,053303	0,152	0,060776	0,155	0,029040
0,111	0,051886	0,102	0,023496	0,040	0,031049	0,131	0,026661
0,088	0,046165	0,128	0,026337	0,122	0,054412	0,186	0,031867
0,585	0,119730	0,652	0,059941	0,077	0,043166	0,068	0,019088
1,146	0,167928	0,664	0,060507	1,011	0,157665	0,207	0,033602
0,204	0,070473	0,254	0,037225	0,806	0,140677	0,422	0,048146
0,108	0,051175	0,097	0,022861	0,189	0,067816	0,134	0,026983
0,137	0,057681	0,111	0,024518	0,161	0,062560	0,147	0,028299
0,128	0,055742	0,119	0,025395	0,360	0,093783	0,216	0,034307
0,205	0,070646	0,197	0,032740	1,062	0,161618	1,041	0,075917
0,067	0,040248	0,056	0,017437	0,085	0,045367	0,093	0,022459
0,321	0,088526	0,923	0,071444	0,287	0,083677	0,213	0,034119
1,381	0,184450	1,023	0,075241	0,040	0,031049	0,120	0,025549
0,096	0,048231	0,084	0,021310	0,071	0,041439	0,062	0,018238
0,141	0,058522	0,190	0,032214	0,225	0,074034	0,175	0,030896
0,336	0,090583	0,181	0,031362	0,202	0,070124	0,189	0,032113

Tabela 6.5. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,060	0,038074	0,061	0,018088	0,040	0,031049	0,060	0,017968
0,757	0,136307	1,135	0,079317	0,298	0,085275	0,359	0,044381
0,616	0,122881	0,751	0,064376	0,122	0,054412	0,149	0,028493
0,088	0,046165	0,099	0,023181	0,177	0,065615	0,209	0,033761
0,091	0,046950	0,116	0,025075	0,189	0,067816	0,188	0,031986
0,098	0,048734	0,090	0,022056	0,544	0,115432	0,295	0,040151
0,061	0,038392	0,105	0,023887	0,252	0,078377	0,508	0,052875
0,264	0,080233	0,289	0,039775	0,094	0,047723	0,097	0,022911
0,154	0,061177	0,148	0,028364	0,098	0,048734	0,108	0,024213
0,348	0,092197	0,709	0,062550	0,094	0,047723	0,126	0,026103
0,115	0,052818	0,154	0,028920	0,839	0,143546	0,562	0,055606
0,622	0,123482	0,746	0,064153	0,399	0,098763	0,388	0,046148
0,385	0,097004	0,617	0,058302	0,159	0,062168	0,191	0,032267
0,229	0,074693	0,143	0,027854	0,475	0,107818	0,408	0,047332
0,138	0,057892	0,137	0,027260	0,100	0,049232	0,109	0,024317
0,164	0,063144	0,168	0,030273	0,103	0,049969	0,120	0,025514
0,850	0,144490	0,566	0,055836	0,117	0,053278	0,204	0,033312
0,206	0,070819	0,208	0,033715	0,079	0,043726	0,187	0,031939
0,063	0,039021	0,075	0,020064	0,343	0,091528	0,536	0,054296
0,103	0,049969	0,089	0,021903	0,124	0,054859	0,340	0,043172
0,211	0,071679	0,210	0,033811	0,335	0,090447	0,490	0,051907
0,040	0,031049	0,038	0,014376	0,090	0,046690	0,100	0,023281
0,160	0,062365	0,219	0,034571	0,272	0,081447	0,325	0,042183
0,080	0,044004	0,041	0,014891	0,321	0,088526	0,351	0,043855
0,061	0,038392	0,087	0,021704	0,105	0,050455	0,124	0,025900

Tabela 6.6. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,477	0,108046	0,444	0,049408	0,222	0,073535	0,267	0,038190
0,103	0,049969	0,304	0,040818	0,040	0,031049	0,040	0,014580
0,123	0,054636	0,127	0,026295	0,141	0,058522	0,185	0,031737
0,040	0,031049	0,063	0,018482	0,252	0,078377	0,329	0,042439
0,132	0,056612	0,094	0,022592	0,308	0,086703	0,262	0,037842
0,040	0,031049	0,074	0,019955	0,134	0,057042	0,151	0,028610
0,161	0,062560	0,209	0,033788	0,100	0,049232	0,123	0,025882
0,164	0,063144	0,249	0,036905	0,231	0,075020	0,334	0,042784
0,225	0,074034	0,200	0,033027	0,740	0,134759	1,117	0,078672
1,083	0,163218	1,022	0,075210	0,099	0,048984	0,099	0,023193
0,061	0,038392	0,095	0,022666	0,189	0,067816	0,191	0,032226
0,146	0,059557	0,152	0,028752	0,099	0,048984	0,149	0,028502
0,097	0,048483	0,152	0,028785	0,040	0,031049	0,051	0,016619
0,558	0,116917	0,949	0,072452	0,040	0,031049	0,040	0,014657
0,451	0,105042	0,566	0,055809	0,267	0,080691	0,418	0,047876
0,060	0,038074	0,099	0,023141	0,062	0,038708	0,068	0,019113
0,403	0,099260	0,190	0,032185	0,092	0,047209	0,121	0,025628
0,170	0,064296	0,188	0,032020	0,068	0,040549	0,106	0,023943
0,138	0,057892	0,127	0,026220	0,114	0,052587	0,130	0,026565
0,123	0,054636	0,115	0,024981	0,040	0,031049	0,049	0,016176
0,145	0,059351	0,080	0,020796	0,481	0,108501	0,655	0,060071
0,080	0,044004	0,088	0,021798	0,040	0,031049	0,063	0,018403
0,151	0,060574	0,230	0,035404	0,200	0,069774	0,146	0,028214
0,298	0,085275	0,286	0,039547	0,593	0,120551	0,609	0,057929
2,644	0,255732	0,985	0,073824	0,163	0,062950	0,214	0,034134

Tabela 6.7. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,040	0,031049	0,040	0,014657	0,074	0,042311	0,141	0,027655
0,040	0,031049	0,040	0,014657	0,764	0,136940	0,687	0,061558
0,040	0,031049	0,063	0,018431	0,040	0,031049	0,190	0,032216
0,235	0,075671	0,391	0,046312	0,040	0,031049	0,039	0,014466
0,320	0,088387	0,731	0,063508	0,175	0,065241	0,163	0,029767
0,115	0,052818	0,204	0,033321	0,192	0,068356	0,206	0,033515
0,423	0,101709	0,345	0,043496	1,136	0,167189	0,844	0,068302
0,101	0,049479	0,115	0,024995	0,133	0,056827	0,144	0,027929
0,040	0,031049	0,201	0,033146	0,399	0,098763	0,279	0,039043
1,373	0,183911	1,276	0,084134	0,071	0,041439	0,151	0,028701
0,071	0,041439	0,221	0,034700	0,082	0,044554	0,109	0,024284
1,132	0,166892	1,566	0,093312	0,175	0,065241	0,315	0,041509
0,241	0,076637	0,380	0,045650	0,446	0,104454	0,286	0,039576
0,306	0,086420	0,336	0,042899	0,203	0,070299	0,249	0,036890
0,191	0,068176	0,272	0,038584	0,540	0,115004	0,494	0,052112
0,265	0,080386	0,313	0,041400	4,523	0,335036	2,506	0,118282
1,036	0,159615	0,971	0,073293	0,179	0,065987	0,479	0,051340
0,065	0,039639	0,114	0,024895	0,167	0,063723	0,134	0,026959
0,040	0,031049	0,060	0,017923	0,125	0,055081	0,174	0,030816
0,040	0,031049	0,072	0,019729	0,336	0,090583	0,299	0,040435
0,040	0,031049	0,066	0,018912	0,140	0,058313	0,227	0,035175
0,250	0,078064	0,373	0,045221	0,040	0,031049	0,039	0,014494
0,597	0,120959	0,343	0,043347	0,114	0,052587	0,098	0,023050
0,129	0,055961	0,130	0,026595	0,040	0,031049	0,039	0,014465
0,138	0,057892	0,165	0,029971	0,190	0,067997	0,186	0,031855

Tabela 6.8. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,139	0,058103	0,265	0,038090	0,253	0,078534	0,370	0,045058
0,094	0,047723	0,140	0,027542	0,040	0,031049	0,039	0,014464
0,130	0,056179	0,215	0,034276	0,364	0,094305	0,426	0,048365
0,367	0,094696	0,425	0,048299	0,169	0,064106	0,144	0,027987
0,127	0,055523	0,125	0,026037	0,479	0,108274	0,571	0,056093
0,525	0,113386	0,588	0,056908	0,707	0,131701	0,634	0,059110
0,668	0,127994	0,434	0,048830	0,735	0,134300	0,491	0,051949
0,092	0,047209	0,143	0,027865	0,214	0,072190	0,149	0,028496
0,107	0,050936	0,148	0,028410	0,040	0,031049	0,039	0,014417
0,139	0,058103	0,120	0,025508	0,408	0,099878	0,487	0,051728
0,248	0,077749	0,469	0,050791	0,116	0,053049	0,121	0,025652
0,674	0,128572	0,372	0,045198	1,424	0,187317	1,677	0,096573
0,394	0,098139	0,607	0,057837	0,798	0,139973	0,399	0,046777
1,133	0,166966	1,154	0,079995	0,143	0,058938	0,269	0,038331
0,701	0,131137	1,035	0,075712	0,354	0,092993	0,862	0,069042
0,179	0,065987	0,158	0,029271	0,318	0,088108	0,383	0,045819
0,106	0,050696	0,159	0,029419	0,231	0,075020	0,154	0,028926
0,667	0,127898	0,616	0,058283	0,496	0,110190	0,485	0,051651
1,395	0,185388	0,359	0,044342	1,444	0,188636	1,352	0,086634
0,275	0,081898	0,199	0,032930	0,329	0,089629	0,257	0,037485
0,454	0,105393	0,263	0,037890	0,249	0,077907	0,295	0,040201
0,563	0,117443	0,790	0,066043	0,117	0,053278	0,067	0,018957
0,188	0,067636	0,218	0,034495	0,194	0,068713	0,215	0,034239
0,134	0,057042	0,162	0,029665	0,199	0,069598	0,210	0,033829
0,246	0,077433	0,215	0,034217	0,407	0,099755	0,787	0,065918

Tabela 6.9. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,553	0,116389	0,669	0,060717	0,063	0,039021	0,040	0,014657
1,014	0,157901	0,761	0,064832	0,274	0,081748	0,427	0,048404
0,175	0,065241	0,154	0,028959	0,125	0,055081	0,125	0,026013
0,117	0,053278	0,130	0,026570	0,259	0,079465	0,194	0,032518
0,122	0,054412	0,118	0,025263	0,284	0,083236	0,315	0,041553
0,260	0,079619	0,412	0,047540	0,086	0,045634	0,165	0,029936
0,387	0,097258	0,313	0,041377	0,040	0,031049	0,109	0,024271
2,872	0,266599	2,650	0,121669	0,092	0,047209	0,040	0,014657
0,280	0,082644	0,223	0,034907	0,040	0,031049	0,048	0,016125
0,311	0,087127	0,430	0,048608	0,478	0,108160	0,040	0,014657
0,040	0,031049	0,039	0,014529	0,040	0,031049	0,039	0,014445
0,799	0,140061	0,855	0,068762	0,254	0,078690	0,305	0,040830
0,146	0,059557	0,146	0,028160	0,163	0,062950	0,096	0,022850
0,104	0,050213	0,098	0,023029	0,345	0,091796	0,480	0,051365
0,632	0,124476	1,071	0,077006	0,672	0,128379	0,651	0,059896
0,230	0,074857	0,227	0,035162	0,945	0,152400	0,857	0,068822
0,060	0,038074	0,038	0,014363	0,061	0,038392	0,064	0,018540
0,040	0,031049	0,039	0,014453	0,199	0,069598	0,186	0,031847
0,630	0,124278	0,233	0,035679	1,122	0,166149	1,702	0,097317
0,406	0,099631	0,271	0,038507	0,073	0,042023	0,072	0,019740
1,510	0,192925	1,675	0,096517	0,097	0,048483	0,129	0,026500
0,107	0,050936	0,082	0,021047	0,310	0,086986	0,297	0,040306
1,793	0,210340	0,995	0,074213	0,088	0,046165	0,086	0,021505
0,064	0,039331	0,040	0,014573	0,201	0,069949	0,219	0,034585
0,097	0,048483	0,101	0,023402	0,161	0,062560	0,126	0,026196

Tabela 6.10. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,040	0,031049	0,124	0,025965	0,073	0,042023	0,048	0,016130
0,152	0,060776	0,218	0,034485	0,099	0,048984	0,090	0,022049
0,199	0,069598	0,200	0,033019	0,070	0,041145	0,105	0,023888
0,425	0,101950	0,557	0,055357	0,256	0,079001	0,372	0,045160
0,116	0,053049	0,158	0,029342	0,507	0,111413	0,595	0,057228
0,137	0,057681	0,119	0,025383	0,295	0,084843	0,460	0,050266
0,040	0,031049	0,040	0,014565	0,140	0,058313	0,107	0,024102
4,401	0,330458	2,215	0,111152	0,234	0,075509	0,331	0,042565
0,381	0,096496	0,610	0,057950	0,078	0,043447	0,059	0,017814
0,243	0,076956	0,267	0,038223	0,040	0,031049	0,054	0,017082
0,067	0,040248	0,082	0,021015	0,040	0,031049	0,061	0,018198
0,097	0,048483	0,092	0,022276	0,294	0,084698	0,382	0,045761
0,093	0,047467	0,106	0,023950	0,193	0,068535	0,133	0,026860
0,093	0,047467	0,074	0,020027	0,072	0,041732	0,174	0,030824
0,040	0,031049	0,040	0,014647	0,461	0,106207	0,175	0,030894
0,184	0,066908	0,133	0,026890	0,040	0,031049	0,040	0,014646
0,814	0,141378	0,957	0,072752	0,113	0,052354	0,141	0,027713
0,497	0,110302	0,479	0,051320	0,104	0,050213	0,109	0,024365
0,512	0,111964	0,519	0,053457	0,072	0,041732	0,071	0,019599
0,265	0,080386	0,291	0,039888	0,141	0,058522	0,163	0,029817
0,071	0,041439	0,040	0,014607	0,040	0,031049	0,085	0,021399
0,040	0,031049	0,040	0,014593	0,079	0,043726	0,081	0,020963
0,176	0,065428	0,261	0,037789	0,190	0,067997	0,254	0,037222
0,148	0,059966	0,163	0,029805	0,099	0,048984	0,108	0,024150
0,060	0,038074	0,051	0,016582	0,138	0,057892	0,125	0,026022

Tabela 6.11. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,071	0,041439	0,073	0,019877	0,040	0,031049	0,046	0,015759
0,107	0,050936	0,106	0,023982	0,103	0,049969	0,095	0,022652
0,040	0,031049	0,066	0,018822	0,303	0,085992	0,287	0,039612
0,080	0,044004	0,104	0,023713	0,152	0,060776	0,156	0,029155
0,090	0,046690	0,105	0,023909	0,122	0,054412	0,124	0,025937
0,113	0,052354	0,064	0,018643	0,084	0,045097	0,083	0,021203
0,059	0,037754	0,079	0,020649	0,092	0,047209	0,081	0,020896
0,431	0,102672	0,588	0,056900	0,072	0,041732	0,070	0,019480
0,111	0,051886	0,136	0,027182	0,040	0,031049	0,056	0,017427
0,040	0,031049	0,040	0,014615	1,835	0,212805	1,290	0,084605
0,071	0,041439	0,079	0,020708	0,040	0,031049	0,053	0,016903
0,094	0,047723	0,121	0,025583	0,405	0,099508	0,292	0,040001
0,417	0,100980	0,630	0,058939	0,284	0,083236	0,266	0,038139
0,040	0,031049	0,048	0,016080	0,130	0,056179	0,097	0,022903
0,476	0,107932	0,366	0,044812	0,201	0,069949	0,176	0,030944
0,040	0,031049	0,049	0,016184	0,113	0,052354	0,091	0,022190
0,040	0,031049	0,047	0,015976	0,194	0,068713	0,534	0,054222
1,147	0,168001	0,926	0,071560	0,329	0,089629	0,357	0,044258
0,040	0,031049	0,040	0,014591	0,079	0,043726	0,074	0,020025
1,569	0,196682	1,027	0,075418	0,074	0,042311	0,063	0,018419
0,246	0,077433	0,186	0,031829	0,103	0,049969	0,101	0,023398
0,040	0,031049	0,039	0,014533	0,201	0,069949	0,238	0,036048
0,843	0,143890	0,437	0,049005	0,237	0,075994	0,239	0,036093
0,129	0,055961	0,109	0,024296	0,083	0,044826	0,077	0,020379
0,172	0,064676	0,100	0,023331	0,138	0,057892	0,177	0,031086

Tabela 6.12. Dados do exemplo 4 em Galea-Rojas et. al. (2003).

(Continuação...).

W	σ_u^2	Y	σ_e^2	W	σ_u^2	Y	σ_e^2
0,084	0,045097	0,058	0,017752	0,451	0,105042	0,299	0,040441
0,259	0,079465	0,162	0,029732	0,309	0,086845	0,229	0,035384
0,068	0,040549	0,055	0,017282	0,040	0,031049	0,071	0,019646
0,040	0,031049	0,039	0,014474	0,075	0,042598	0,100	0,023250
0,040	0,031049	0,039	0,014425	0,113	0,052354	0,174	0,030801
0,081	0,044280	0,076	0,020289	0,082	0,044554	0,131	0,026689
0,040	0,031049	0,039	0,014490	0,209	0,071336	0,352	0,043897
0,116	0,053049	0,156	0,029157	0,125	0,055081	0,178	0,031153
0,092	0,047209	0,105	0,023873	0,066	0,039945	0,081	0,020959
0,092	0,047209	0,150	0,028589	0,849	0,144404	0,558	0,055401
0,142	0,058730	0,085	0,021494	0,477	0,108046	0,275	0,038802
0,103	0,049969	0,202	0,033177	0,040	0,031049	0,039	0,014470
0,103	0,049969	0,127	0,026298	0,341	0,091259	0,182	0,031498
0,165	0,063338	0,152	0,028777	0,107	0,050936	0,231	0,035524
0,098	0,048734	0,108	0,024160	0,097	0,048483	0,118	0,025346
0,093	0,047467	0,172	0,030619	0,161	0,062560	0,223	0,034915
0,070	0,041145	0,044	0,015463	0,135	0,057255	0,157	0,029224
0,071	0,041439	0,069	0,019231	0,647	0,125954	0,556	0,055342
0,040	0,031049	0,067	0,019034	0,211	0,071679	0,199	0,032899
0,062	0,038708	0,084	0,021338	0,245	0,077274	0,348	0,043664
0,040	0,031049	0,047	0,015849	0,826	0,142423	1,092	0,077778
0,439	0,103626	0,504	0,052666	0,322	0,088664	0,628	0,058841
0,230	0,074857	0,295	0,040168	0,314	0,087549	0,401	0,046923
0,305	0,086277	0,364	0,044675	0,577	0,118903	0,622	0,058546
0,261	0,079773	0,287	0,039613	0,040	0,031049	1,270	0,083939
0,215	0,072360	0,262	0,037843				

BIBLIOGRAFIA

- ★[1] Barnett, V.D., *Simulation pairwise linear structural relationship*, Biometrics, 25 (1969), 129-142.
- ★[2] Bolfarine, H. and Gimenez, P., *Corrected score functions in classical error-in-variables and incidentais parameters models*. Australian Journal Statistical, 39, 3, (1997), 325-344.
- ★[3] Carroll, R.J., Ruppert, D. and Stefanski, L.A. *Measurement Error in Nonlinear Models*. Chapman and Hall, New York, (1995).
- ★[4] Castro, M., Castilho, M.V. and Bolfarine, H. *Consistent Estimation and Testing in Comparing Analytical bias Models*. Relatório técnico do Departamento de Estatística da Universidade de São Paulo (RT-MAE 2004-01) (2004).
- ★[5] Chan and Mak *On the polynomial functional relationship* J. R. Statist. Soc. B, 47 (3) (1985), 510-518.
- ★[6] Cheng, C-L. *On the polynomial Berkson Model*. Inst. of Statist. Science, Acad. Sinica, Taiwan - China, (1997).
- ★[7] Cheng, C-L. and Scheneeweiss, H. *Polynomial Regression with error in the variables*. J.R. Statist., B, 60, Part I, (1998), 189-199.

- ★[8] Cheng, C-L. and Vann Ness, J. *Statistical Regression with Measurement Error*. Arnold. Oxford University, Press Inc., New York, (1999).
- ★[9] Cook, R. *Assessment of local Influence*. J.R. Statist. Soc., B, 48 (2), (1986), 133-169.
- ★[10] Cook, J. and Stefanski, L.A. *A Simulation Extrapolation Method for parametric measurement error model*. Journal of the American Statistical Association, 89, (1995), 1314-1328.
- ★[11] Fuller, W.A. *Measurement Error Models*. John Willey and Sons, New York, (1987).
- ★[12] Galea-Rojas, M., de Castilho, M., Bolfarine, H. and de Castro, M. *Detection of analytical bias*, The Analyst, (2003), p 1073-1081.
- ★[13] Gasco, L., Bolfarine, H. and Arellano-Valle, R. *Measurement Error Models with Nonconstant Covariance Matrices*. (2002), Vol 82, Issue 2, pp 395-415.
- ★[14] Hubert P.J., *Robust Statistics*. (1981). New York. Willey.
- ★[15] Hwang, J. *Multiplicative error in variables models with applications to recent data released by U.S. Departament of Energy*. Journal of the American Statistical Association, 81, (1986), 680-688.
- ★[16] Lee, A. and Zhao Y. *Assessing local influence in measurement error models*. Biometrical Journal, 38, 7,(1996), 829-841.
- ★[17] Nakamura, T. *Corrected score function for errors-in-variables models: Methodology and application to generalized linear model*. Biometrika, 77, 1,(1990), 127-137.
- ★[18] Stylian, G. *Hadamard product and multivariate statistical analysis*. Linear algebra and its applications, 6, (1973), 217-240.
- ★[19] Wolter, K. and Fuller W. *Estimation of the quadratic error-in-variables model*. Biometrika, 69, 1,(1982), 175-182.