ANÁLISE DE COVARIÂNCIA COM UM FATOR
E ERRO DE MEDIDA NA COVARIÁVEL

Flávio Guardiano de Souza

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM ESTATÍSTICA

Área de concentração: **Estatística**

Orientadora: **Profa. Dra. Mônica Carneiro Sandoval**

- São Paulo, junho de 2004 -

ANÁLISE DE COVARIÂNCIA COM UM FATOR E ERRO DE MEDIDA NA
COVARIÁVEL

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Flávio Guardiano de Souza e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 25 de junho de 2004

Banca Examinadora:

- **Profa. Dra. Mônica Carneiro Sandoval (orientadora) - IME/USP**
- **Profa. Dra. Claudia Regina de Oliveira Paiva Lima - UFPE**
- **Prof. Dr. Heleno Bolfarine - IME/USP**

Agradecimentos

Muitas são as pessoas que contribuíram sobremaneira nesta minha empreitada e que sem as quais este trabalho não seria possível.

- À Nelma Martelli Toledo, minha futura esposa e primeira pessoa a me incentivar neste importante passo de minha vida. Pela paciência infinita, meu muito obrigado.
- A minha irmã Lurdes, meu cunhado Israel e minhas sobrinhas Briza e Serenna, pelo acolhimento e apoio que tive (e venho tendo) todo este tempo.
- A Bete, Rex, Gohan, Jade, Sofia, Lisa e Meg (in memoriam), por me mostrarem que cachorro também é gente.
- Aos meus professores e colegas da UFPR, responsáveis por meus primeiros passos nesta fascinante ciência que se chama Estatística.
- Aos colegas do IME-USP pelo companheirismo, pela ajuda nas horas difíceis e pelos momentos de descontração.
- Aos grandes amigos Marcelo Pires, Marcelo Paraíba e Josevan. Ao primeiro, pelas filosofias de boteco; ao segundo pelas derrotas no Pebolin e no Master; e ao terceiro por nunca se esquecer de me convidar a ir aos estádios para ver meu Santos jogar.
- A meus pais Manoel e Maria pelo apoio, carinho e exemplo de vida.
- E como não poderia deixar de ser, a Mônica Carneiro Sandoval e Denise Aparecida Botter, pela excelente orientação e paciência que tiveram comigo.

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo de análise de covariância com um fator e erro de medida na covariável. Apresentamos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse e testes para a hipótese de inexistência de efeito de tratamento nos modelos normais funcional e estrutural. Para contornar o problema de não identificabilidade do modelo estrutural ou de não existência de estimadores de máxima verossimilhança no modelo funcional, supomos que a razão entre as variâncias dos erros é conhecida. Desenvolvemos também diversos estudos de simulação para avaliar algumas propriedades dos estimadores propostos e o desempenho dos testes de hipótese apresentados.

Abstract

In this work we study the covariance analysis model with one factor and measure error in the covariate. We present maximum likelihood estimators for the parameters of interest and tests for the hypothesis of inexistence of treatment effect for functional and structural normal models. To avoid the no identifiability problem in the structural model or inexistence of maximum likelihood estimators in the functional model we suppose that the errors variances ratio is known. We also develop several simulation studies to evaluate some properties of the proposed estimators and the behavior of the considered hypothesis tests.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Análise de covariância clássica	3
1.2	Análise de covariância com erro na covariável	7
2	Modelo funcional	10
2.1	Estimação e teste de hipótese	10
2.2	Simulações	13
2.2.1	Estimação dos parâmetros	14
2.2.2	Teste sobre os efeitos dos tratamentos	18
3	Modelo estrutural	30
3.1	Estimação	31
3.2	Testes de hipótese	34

<i>Índice</i>	ii
3.2.1 Teste da razão de verossimilhanças	34
3.2.2 Teste de Wald	35
3.2.3 Teste escore	36
3.3 Simulações	36
3.3.1 Estimação dos parâmetros	37
3.3.2 Testes sobre os efeitos dos tratamentos	41
4 Comentários finais	51
Referências Bibliográficas	53

Introdução

A análise de covariância (ANCOVA) é uma técnica que combina características de análise de regressão e de análise de variância.

Um exemplo do emprego da ANCOVA é dado por Montgomery (1991). Um estudo foi desenvolvido com o objetivo de se determinar se há diferença na resistência média de uma fibra produzida por três máquinas (tratamentos) diferentes. Sabe-se, porém, que a resistência da fibra é também afetada pela sua espessura (uma fibra grossa muito provavelmente será mais resistente que uma fina). A ANCOVA então é usada para remover o efeito da espessura (x) na resistência (y) ao se testar o efeito das máquinas, que é o que de fato interessa. A variável x é chamada covariável, variável concomitante, variável explicativa ou mesmo variável independente.

A teoria clássica de ANCOVA considera a covariável x como fixa e medida sem erro. Na prática, apesar dos constantes avanços tecnológicos estarem tornando cada vez mais precisos os procedimentos de mensuração, não é realista supor que a covariável x seja medida sem erro e o mais comum é não termos acesso aos seus verdadeiros valores. Neste trabalho é desenvolvida a ANCOVA sob o enfoque de que a variável explicativa é medida com erro, erro esse que pode ser devido à imprecisão do aparelho, por exemplo. Nos modelos de regressão com erros nas variáveis (Fuller, 1987), a variável explicativa observada é tratada como aleatória e seus verdadeiros

valores (não observados) podem ser fixos (modelos funcionais) ou aleatórios (modelos estruturais).

Alguns autores se dedicaram especificamente ao estudo do modelo de ANCOVA com erro de medida na covariável. De Gracie e Fuller (1972) propõem um estimador não viciado para o vetor de parâmetros que mede o efeito dos tratamentos no modelo funcional, derivam uma expressão para a sua variância e propõem um teste F assintótico para testar a hipótese de igualdade entre os efeitos dos tratamentos (exigindo para isso o conhecimento da variância do erro de medida da covariável). Carrol, Gallo e Gleser (1985) apresentam estimadores consistentes para o vetor de parâmetros de um modelo funcional e fornecem a expressão da sua matriz de covariância. Raadmackers e Pieters (1987) discutem a identificabilidade e a estimação dos parâmetros dos modelos funcional e estrutural e apresenta também um teste aproximado (com simulações) para a hipótese de igualdade entre os efeitos dos tratamentos no modelo funcional e ressalta a importância do conhecimento acerca do erro da covariável para a obtenção de resultados confiáveis. Carrol (1989) discute alguns modelos (regressão linear, não linear, logística, exponencial) aplicados à ANCOVA com erro na covariável nos enfoques funcional e estrutural e comenta que o fato de não levar em conta o erro de medida quando este existe pode levar a conclusões errôneas. Chen (1997) apresenta uma técnica não paramétrica (equações de estimação baseadas em postos) para estimar os parâmetros de interesse, comenta sobre a vantagem de exigir menos pressupostos e mostra via simulação sua maior eficiência quando os erros são assimétricos ou mal-especificados. Andrade Filho (2001) apresenta uma classe de estimadores para o efeito dos tratamentos no modelo de ANCOVA estrutural e mostra que os estimadores que contemplam o erro de medida são menos eficientes que os estimadores de mínimos quadrados usuais.

Este trabalho é composto por três capítulos. No primeiro são fornecidas as idéias básicas acerca de um modelo de análise de covariância nos enfoques clássico e com erro de medida na covariável. Os Capítulos 2 e 3 tratam, respectivamente, dos modelos de ANCOVA com um fator funcional e estrutural. Nestes capítulos são discutidas as restrições de cada modelo, seus pressupostos, e apresentados os estimadores de

máxima verossimilhança dos parâmetros. Testes de hipótese para o efeito do tratamento e diversas simulações são desenvolvidas nestes dois capítulos. Comentários gerais apresentados no Capítulo 4, concluem o trabalho.

1.1 Análise de covariância clássica

O modelo de ANCOVA clássico para um experimento com um fator e uma covariável, que assume uma relação linear entre a variável resposta e a covariável, é dado por:

$$Y_{ij} = \alpha + \tau_i + \beta x_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (1.1)$$

em que

Y_{ij} é o valor da variável resposta avaliada na j -ésima unidade experimental submetida ao i -ésimo tratamento ou nível do fator;

x_{ij} é o valor da covariável observado conjuntamente com Y_{ij} ;

α é o intercepto do modelo;

τ_i é o efeito do i -ésimo tratamento, sujeito à restrição $\sum_{i=1}^k \tau_i = 0$;

β é o coeficiente de regressão linear indicando a dependência de Y_{ij} em x_{ij} ;

ϵ_{ij} é o erro aleatório;

$i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$.

Assumimos ainda que os erros ϵ_{ij} são independentes e normalmente distribuídos com média zero e variância σ_e^2 constante para todos os tratamentos e que a covariável x não é afetada pelos tratamentos.

Usando (1.1) e modelando os dados na forma matricial temos

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.2)$$

sendo $\mathbf{Y} = (Y_{11}, \dots, Y_{1n}, \dots, Y_{k1}, \dots, Y_{kn})'$, $\mathbf{X}$ a matriz de planejamento correspondente (ver (1.4)), $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \beta)'$ e $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \dots, \epsilon_{k1}, \dots, \epsilon_{kn})'$.

Usando o método dos mínimos quadrados temos que o vetor de parâmetros esti-

dados $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{MQ}}$ é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{MQ}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{MQ} \\ \hat{\tau}_{1MQ} \\ \vdots \\ \hat{\tau}_{k-1MQ} \\ \hat{\beta}_{MQ} \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Nosso interesse é testar a hipótese $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_{k-1} = 0$ contra $H_1 : \text{existe pelo menos uma diferença}$.

Sob a hipótese nula, o modelo (1.1) se reduz a

$$Y_{ij} = \alpha + \beta x_{ij} + \epsilon_{ij},$$

que na forma matricial é dado por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_{\mathbf{R}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.3)$$

sendo $\mathbf{X}_{\mathbf{R}}$ a matriz de planejamento correspondente (ver (1.5)) e $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{R}} = (\alpha, \beta)'$.

Para testar H_0 usamos o teste F exato. A estatística de teste é dada por:

$$F^* = \frac{SQR_R - SQR_C}{k - 1} \div \frac{SQR_C}{nk - k - 1}$$

sendo SQR_C e SQR_R as somas de quadrados dos resíduos dos modelos completo e reduzido dados, respectivamente, por (1.2) e (1.3). Sob H_0 , F^* tem distribuição F -Snedecor com $k - 1$ graus de liberdade no numerador e $nk - k - 1$ graus de liberdade no denominador.

Vamos aplicar o modelo de ANCOVA clássico dado em (1.1) ao exemplo apresentado em Montgomery (1991), citado anteriormente. Uma amostra de cinco fibras produzidas por cada máquina foi selecionada; de cada fibra amostrada foram mensurados a resistência à tração (Y) e o seu diâmetro (x). Os dados estão mostrados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Dados de resistência à tração Y (em libras) e de diâmetro x (em 10^{-3} polegadas)

Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3	
Y	x	Y	x	Y	x
36	20	40	22	35	21
41	25	48	28	37	23
39	24	39	22	42	26
42	25	45	30	34	21
49	32	44	28	32	15

Utilizando a forma matricial (1.2) temos

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 36 \\ \vdots \\ 49 \\ 40 \\ \vdots \\ 44 \\ 35 \\ \vdots \\ 32 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & 1 & 22 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 28 \\ 1 & -1 & -1 & 21 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & 15 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Ajustado o modelo (1.2) obtemos

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 17,111 \\ 0,182 \\ 1,219 \\ 0,954 \end{bmatrix},$$

e $SQR_C = 27,986$.

Sob o modelo (1.3) temos

$$\mathbf{X}_R = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 32 \\ 1 & 22 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 28 \\ 1 & 21 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 15 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Ajustando esse modelo, encontramos então $\hat{\theta}_R = \begin{bmatrix} 14,142 \\ 1,080 \end{bmatrix}$, $SQR_R = 41,270$.

O valor da estatística de teste é dado por $F^* = 2,61$. A distribuição $F_{2,11}$ fornece um nível descritivo igual a 33,4%, valor que indica que não devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, as máquinas não diferem entre si quanto à resistência média das fibras fabricadas.

1.2 Análise de covariância com erro na covariável

Seja o modelo definido em (1.1). No enfoque clássico, o vetor de covariáveis $\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{kn})'$ é considerado fixo e conhecido. No entanto o pesquisador pode ter motivos para acreditar que o valor observado da covariável não corresponde ao valor exato, ou seja, contém erro, erro este que pode ser devido a calibração do aparelho de medição, por exemplo.

Assim, ao invés da observação de $\mathbf{x}$ (o vetor de valores verdadeiros da covariável), observamos

$$X_{ij} = x_{ij} + u_{ij}, \quad (1.6)$$

em que u_{ij} representa o correspondente erro na medição de x_{ij} , $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$.

Em modelos com erros nas variáveis as seguintes suposições sobre os erros aleatórios são comumente estabelecidas:

$$\begin{aligned} i) \quad & E(e_{ij}) = 0, \text{Var}(e_{ij}) = \sigma_e^2, \text{Cov}(e_{ij}, e_{i'j'}) = 0, i \neq i', j \neq j' \\ ii) \quad & E(u_{ij}) = 0, \text{Var}(u_{ij}) = \sigma_u^2, \text{Cov}(u_{ij}, u_{i'j'}) = 0, i \neq i', j \neq j' \\ iii) \quad & \text{Cov}(e_{ij}, u_{ij}) = 0 \\ iv) \quad & \text{Cov}(x_{ij}, e_{ij}) = \text{Cov}(x_{ij}, u_{ij}) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

O modelo definido pelas equações (1.1), (1.6) e (1.7) é denominado modelo de ANCOVA com erro na covariável. A consideração de que o vetor de covariáveis $\mathbf{x}$ (valores verdadeiros, não observados) é suposto fixo ou aleatório leva a duas formas de tratar e denominar este modelo. Ambos os enfoques apresentam certos inconvenientes que dificultam a estimação consistente dos parâmetros de interesse do modelo.

a) Modelo estrutural

Supõe que $x_{11}, \dots, x_{kn}$ são variáveis aleatórias não correlacionadas ou independentes, com distribuição comum de média μ_x e variância σ_x^2 , ambas desconhecidas. No enfoque estrutural temos que o modelo pode ser não identificável no sentido de que valores diferentes do vetor de parâmetros podem dar origem à mesma distribuição das observações. Isto acontece, por exemplo, com o modelo de regressão normal (Fuller, 1987, pp. 9-10; Andrade Filho, 2001, Seção 4.1), a menos de uma suposição adicional, além das dadas em (1.7), que permita reduzir o número de parâmetros envolvidos no modelo. Considerando a normalidade, para o modelo tornar-se identificável basta fazer uma suposição adicional acerca dos parâmetros envolvidos. As mais comuns são:

- ao menos uma das variâncias (σ_e^2, σ_u^2) é conhecida;
- o coeficiente de atenuação ($\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}$) é conhecido;
- a razão entre as variâncias dos erros ($\frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$) é conhecida.

Neste trabalho a suposição adicional adotada será a de que a razão entre as variâncias dos erros $\lambda = \sigma_e^2 / \sigma_u^2$ é conhecida. Esta é uma suposição em que o pesquisador embora não conheça os valores da variância dos erros, sabe que eles mantêm entre si determinada proporcionalidade.

b) Modelo funcional

Supõe que $x_{11}, \dots, x_{kn}$ são valores fixos (não aleatórios), de modo que são tratados como parâmetros desconhecidos (denominados parâmetros incidentais) que devem ser estimados. Neste caso, o parâmetro μ_x e σ_x^2 podem ser interpretados como os limites quando $n \rightarrow \infty$ das seqüências $(nk)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} = \bar{x}_n$ e $(nk)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_n)^2 = S_{x,n}^2$, respectivamente. Note que o item iv) de (1.7) é irrelevante se estivermos tratando com o modelo funcional. De qualquer forma, supondo que $x_{11}, \dots, x_{kn}$ são variáveis aleatórias degeneradas, este modelo pode ser considerado um caso particular de **a**).

No enfoque funcional temos que o número de parâmetros incidentais $(x_{11}, \dots, x_{kn})$ cresce com n e com k , o que em geral impede a obtenção de estimadores con-

sistentes dos parâmetros de interesse. Bolfarine, Rodrigues e Cordani (1992) mostraram que não existe solução de máxima verossimilhança para β no modelo de regressão funcional normal, sendo que o ponto crítico da função é na verdade um ponto de sela. A estimação por máxima verossimilhança, então, só é possível com suposições adicionais feitas acerca do vetor de parâmetros. Assim como no modelo estrutural, a suposição adicional adotada neste trabalho é a de que a razão entre as variâncias dos erros seja conhecida.

Modelo funcional

O modelo definido em (1.1), (1.6) e (1.7), com o vetor de covariáveis não observável $\mathbf{x}$ sendo considerado constante e fixo, caracteriza o chamado modelo funcional. Considerando, além disso, que as variáveis aleatórias e_{ij} e u_{ij} têm distribuição normal, temos o modelo de ANCOVA funcional normal. Como já comentado no Capítulo 1, para contornar o problema de não existência de estimadores de máxima verossimilhança será suposto que a razão entre as variâncias dos erros $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$ é conhecida.

Nesta situação, temos que o vetor de parâmetros é composto dos elementos $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \beta, \mathbf{x}', \sigma_u^2)'$, sendo $\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{kn})'$, ou seja, $\boldsymbol{\theta}$ é composto por $(nk + k + 2)$ parâmetros.

2.1 Estimação e teste de hipótese

No modelo de ANCOVA funcional normal com λ conhecido temos que o vetor de variáveis observadas pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} Y_{ij} \\ X_{ij} \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} \alpha + \tau_i + \beta x_{ij} \\ x_{ij} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix} \right). \quad (2.1)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \ell(\boldsymbol{\theta}) &= -nk \log(2\pi\sqrt{\lambda}\sigma_u^2) - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \alpha - \tau_i - \beta x_{ij})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - x_{ij})^2,\end{aligned}$$

em que $\mathbf{X} = (X_{11}, \dots, X_{kn})'$ é o vetor de covariáveis observadas e $\mathbf{Y} = (Y_{11}, \dots, Y_{kn})'$ é o vetor de variáveis respostas observadas.

Derivando $\ell(\boldsymbol{\theta})$ em relação a cada um dos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ chegamos aos seguintes estimadores de máxima verossimilhança:

- $\hat{\beta} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$
- $\hat{\alpha} = \bar{Y}_{..} - \hat{\beta}\bar{X}_{..},$
- $\hat{\tau}_i = \bar{Y}_{i.} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\bar{X}_{i.}, i = 1, \dots, k,$
- $\hat{x}_{ij} = \frac{\hat{\beta}(Y_{ij} - \hat{\alpha} - \hat{\tau}_i) + \lambda X_{ij}}{\hat{\beta}^2 + \lambda}, j = 1, \dots, n,$
- $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{2nk\lambda} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \hat{\alpha} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}\hat{x}_{ij})^2 + \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \hat{x}_{ij})^2 \right),$

sendo

$$b = S_{YY} - \lambda S_{XX} - n \left(\sum_{i=1}^k \bar{Y}_{i.} - \lambda \sum_{i=1}^k \bar{X}_{i.} \right),$$

$$a = n \sum_{i=1}^k \bar{X}_{i.} \bar{Y}_{i.} - S_{XY}, \quad c = -\lambda a,$$

$$\bar{X}_{..} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad \bar{X}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad \bar{Y}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij},$$

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2, \quad S_{YY} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n Y_{ij}^2, \quad S_{XY} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij} Y_{ij}.$$

Seja $\boldsymbol{\theta}^* = (\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \beta)'$ o vetor de parâmetros estruturais. Carrol, Gallo e Gleser (1985) mostraram que o vetor $\sqrt{kn}\widehat{\boldsymbol{\theta}}^*$ é aproximadamente normal de média $\boldsymbol{\theta}^*$ e matriz de covariância igual a

$$Cov(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \frac{d}{kn} \left(\Delta^{-1} + \Delta^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times k} & Q \end{bmatrix} \Delta^{-1} \right) \quad (2.2)$$

em que

$$d = \sigma_u^2(\beta^2 + \lambda), \quad Q = \frac{\lambda \sigma_u^2}{\beta^2 + \lambda} \text{ e}$$

$$\Delta = \frac{1}{kn} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{x}_{..} \\ & \frac{2}{k} & \frac{1}{k} & \dots & \frac{1}{k} & \frac{\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{k.}}{k} \\ & & \frac{2}{k} & \dots & \frac{1}{k} & \frac{\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{k.}}{k} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \frac{2}{k} & \frac{\bar{x}_{(k-1).} - \bar{x}_{k.}}{k} \\ & & & & & S_{xx}^* + \bar{x}_{..}^2 \end{bmatrix}$$

sendo $\bar{x}_{..} = (1/kn) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}$, $S_{xx}^* = (1/kn) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^*$ o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}^*$.

Lima (1996) mostra que o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\sigma}_u^2$ não é consistente, pois $\widehat{\sigma}_u^2 \rightarrow \sigma_u^2/2$ quando n tende ao infinito. Segue então que um estimador consistente da variância do erro u_{ij} é dado por $\widehat{\sigma}_u^{2*} = 2\widehat{\sigma}_u^2$.

Queremos testar a inexistência de efeito de grupo (tratamento), ou seja, a hipótese nula $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \text{existe pelo menos uma diferença}$.

A hipótese genérica $H_0' : \mathbf{C}\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{0}$ pode ser testada por meio da estatística de Wald

$$W = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{*'} \mathbf{C}' (\mathbf{C} \times \widehat{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^*) \times \mathbf{C}')^{-1} \mathbf{C} \widehat{\boldsymbol{\theta}}^*$$

em que $\widehat{\mathbf{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ é a matriz de covariância apresentada em (2.2) avaliada nos estimadores de máxima verossimilhança consistentes e $\mathbf{C}$ é escolhida convenientemente. Sob H'_0 , W converge para uma distribuição qui-quadrado com número de graus de liberdade igual ao posto da matriz $\mathbf{C}$. Para testar H_0 (nulidade de efeito de grupo), a matriz $\mathbf{C}$, de dimensão $(k-1) \times (k-1)$ e posto $(k-1)$ é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como no modelo funcional o número de parâmetros cresce com o tamanho da amostra, a implementação dos testes da razão de verossimilhanças e escore ficou impossibilitada. Uma alternativa, por exemplo, seria desenvolver estes testes com base numa função escore corrigida (ver Gimenez, 1997).

2.2 Simulações

Nesta seção avaliamos numericamente, em amostras finitas, propriedades dos estimadores e o desempenho do teste de Wald propostos neste capítulo. Para a obtenção dos resultados utilizamos o pacote estatístico S-Plus 4.5 (Venables e Ripley, 1999).

Em uma primeira etapa comparamos os estimadores de máxima verossimilhança de α , β e τ incorporando o erro de medida da covariável com os estimadores usuais de mínimos quadrados (apresentadas no Capítulo 1) considerando a covariável medida sem erro. Em seguida mostramos o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança simulando os valores (fixos) da covariável x_{ij} a partir de diferentes distribuições de probabilidades. Fizemos ainda um estudo de simulação com algumas violações nas distribuições dos erros para avaliação do comportamento das estimativas

de máxima verossimilhança nestes casos.

O comportamento da estatística de Wald para o modelo funcional é verificado na segunda parte desta seção. Primeiramente, avaliamos o tamanho observado do teste de Wald da hipótese de inexistência de efeito de tratamento para diferentes distribuições da covariável, distribuições dos erros aleatórios e diferentes valores de n , k e tamanhos nominais. Em seguida, estudamos o poder do teste de Wald. Finalmente, comparamos o tamanho observado e o poder do teste de Wald com os do teste F usual em que não se consideram os erros de medida.

2.2.1 Estimação dos parâmetros

Foram geradas 10.000 amostras do modelo funcional normal definido por (2.1). Em todas as amostras os valores usados para os parâmetros foram $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ grupos e $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Na Tabela 2.1 comparamos os vícios médios e os respectivos erros quadráticos médios (EQMs) dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , β e τ do modelo com erro na covariável com os dos estimadores de mínimos quadrados ignorando o erro de medida. Os vícios médios são dados por $\sum_{t=1}^{10.000} (\hat{\psi}_t - \psi)/10.000$ e os erros quadráticos médios por $\sum_{t=1}^{10.000} (\hat{\psi}_t - \psi)^2/10.000$, em que $\hat{\psi}$ é um estimador de ψ e $\psi = \alpha, \tau, \beta$. As amostras foram geradas com n , o número de observações por grupo, igual a 5, 20 e 50. O componente do erro da variável resposta (e_{ij}) foi gerado de acordo com uma distribuição normal de média zero e variância unitária, ao passo que o componente do erro da covariável (u_{ij}) foi gerado de uma normal de média também zero mas com variância (σ_u^2) igual a 1, 1/5 e 1/10 ($\lambda = 1, 5$ e 10, respectivamente). A covariável foi gerada segundo uma distribuição uniforme U(0,5).

Observando a Tabela 2.1, verificamos que os valores dos vícios e dos erros quadráticos médios dos dois estimadores de τ são pequenos e estão próximos. O EQM do estimador de máxima verossimilhança de τ é maior do que o do estimador de mínimos quadrados em todos os casos, mas é mais evidente para $n = 5$ e $\lambda = 1$. Verificamos,

Tabela 2.1: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados para os estimadores de máxima verossimilhança e os de mínimos quadrados.

n	λ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_{MQ}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\tau}_{MQ}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_{MQ}$
5	1	-0,145(27,227)	0,772(1,303)	-0,017(1,258)	-0,004(0,196)	0,063(4,048)	-0,305(0,176)
	5	-0,037(0,822)	0,207(0,657)	-0,009(0,161)	-0,007(0,141)	0,018(0,114)	-0,081(0,083)
	10	0,005(0,669)	0,128(0,618)	0,009(0,134)	0,010(0,131)	-0,003(0,086)	-0,52(0,078)
20	1	-0,035(0,270)	0,801(0,767)	-0,001(0,056)	-0,001(0,044)	0,013(0,035)	-0,322(0,117)
	5	-0,016(0,134)	0,206(0,157)	0,000(0,031)	-0,000(0,030)	0,005(0,017)	-0,084(0,021)
	10	-0,003(0,123)	0,112(0,125)	-0,001(0,028)	-0,001(0,027)	0,003(0,015)	-0,043(0,015)
50	1	-0,012(0,101)	0,814(0,711)	0,001(0,020)	0,000(0,017)	0,006(0,013)	-0,325(0,110)
	5	-0,008(0,053)	0,213(0,090)	0,002(0,013)	0,002(0,012)	0,002(0,007)	-0,086(0,013)
	10	-0,009(0,047)	0,106(0,055)	0,001(0,011)	0,001(0,011)	0,002(0,006)	-0,044(0,007)

também, que os valores dos vícios médios dos estimadores de mínimos quadrados de α e β , respectivamente, são maiores do que os dos estimadores de máxima verossimilhança. Em geral, os valores dos EQMs dos dois estimadores de α e β são próximos, exceto para $n = 5$ e $\lambda = 1$, quando os EQMs dos estimadores de máxima verossimilhança são maiores. Ainda com relação aos parâmetros α e β , os EQMs diminuem com o aumento do tamanho da amostra, para todo valor de λ e diminuem com o aumento de λ , para todo valor de n .

Nas Tabelas 2.2 a 2.4 simulamos os vícios médios e os erros quadráticos médios dos estimadores de máxima verossimilhança de α , τ e β , respectivamente, do modelo de ANCOVA com erro de medida na covariável para as seguintes distribuições da covariável: U(0, 1), U(0, 10), N(0, 1), N(0, 10) e lognormal LN(0, 1). Os valores de n e de λ adotados foram os mesmos utilizados nas simulações da Tabela 2.1.

A análise das Tabelas 2.2 a 2.4 mostra que para os três parâmetros estimados os vícios e os erros quadráticos médios, em geral, se apresentaram maiores quando a covariável tem distribuição U(0,1), independentemente do tamanho da amostra. Quando a covariável tem distribuição LN(0, 1), o EQM é grande apenas para n

Tabela 2.2: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$ para diferentes distribuições da covariável.

n	λ	Distribuição da covariável				
		U(0,1)	U(0,10)	N(0,1)	N(0,10)	LN(0,1)
5	1	1,311(2.668,7)	-0,106(1,407)	-0,050(9,642)	-0,005(0,282)	-0,126(81,373)
	5	1,983(11.779)	-0,013(0,696)	-0,023(1,325)	0,004(0,137)	-0,143(33,380)
	10	-0,643(3.030,7)	-0,016(0,630)	-0,008(0,158)	0,000(0,126)	-0,007(1,329)
20	1	0,573(438,04)	-0,010(0,230)	-0,008(0,069)	-0,004(0,054)	-0,023(0,121)
	5	0,379(1.765,6)	0,005(0,128)	-0,002(0,031)	0,001(0,032)	-0,001(0,060)
	10	0,033(46,044)	-0,005(0,117)	-0,006(0,028)	0,004(0,027)	-0,002(0,053)
50	1	0,041(258,30)	-0,008(0,084)	-0,002(0,021)	-0,000(0,020)	-0,003(0,039)
	5	-0,007(16,721)	0,003(0,050)	0,001(0,012)	0,001(0,012)	-0,004(0,022)
	10	-0,026(1,280)	0,000(0,046)	-0,001(0,011)	0,000(0,011)	-0,002(0,020)

pequeno (e $\lambda = 1$ no caso de τ). De um modo geral, os vícios e os erros quadráticos médios dos três estimadores apresentam os menores valores quando a covariável tem distribuição U(0, 10) ou N(0, 10).

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , τ e β obtidos na Seção 2.1 supõem distribuição normal para os erros e_{ij} e u_{ij} . Na Tabela 2.5 avaliamos o vício médio e o EQM destes estimadores sob a suposição de normalidade dos erros e também violando esta suposição. Nas duas primeiras colunas da Tabela 2.5, as distribuições dos erros variam segundo a normal padrão, a t de Student com 3 graus de liberdade ($t_{3,}$) a U(-2,2) e a qui-quadrado com 1 grau de liberdade (χ_1^2). Os valores de λ variam conforme a razão entre as variâncias dos erros e seus valores estão discriminados na terceira coluna da Tabela 2.5. Geramos a covariável $\mathbf{x}$ segundo uma

Tabela 2.3: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\tau}$ para diferentes distribuições da covariável.

n	λ	Distribuição da covariável				
		U(0,1)	U(0,10)	N(0,1)	N(0,10)	LN(0,1)
5	1	-0,684(1.625,1)	-0,009(0,263)	-0,076(18,604)	0,013(0,247)	-0,093(15,904)
	5	-0,177(1.173,7)	0,007(0,137)	-0,017(1,098)	-0,001(0,141)	0,001(0,242)
	10	-0,042(197,25)	-0,004(0,134)	0,004(0,144)	0,014(0,125)	-0,005(0,145)
20	1	-0,145(34,089)	0,002(0,051)	0,013(1,102)	-0,001(0,051)	0,000(0,054)
	5	0,014(3,940)	0,001(0,031)	0,001(0,031)	0,001(0,031)	-0,003(0,031)
	10	-0,007(0,326)	0,001(0,028)	0,001(0,028)	-0,002(0,028)	-0,001(0,028)
50	1	-0,003(17,807)	-0,001(0,019)	-0,002(0,021)	-0,000(0,020)	0,000(0,021)
	5	-0,001(0,034)	0,003(0,012)	-0,003(0,012)	-0,002(0,012)	0,002(0,012)
	10	0,003(0,027)	-0,001(0,011)	0,003(0,011)	0,000(0,011)	0,001(0,011)

distribuição U(0,5) e fixamos $n = 30$ e $k = 2$.

Analisando a Tabela 2.5, podemos observar que quando a distribuição de e_{ij} é uniforme ou normal e a de u_{ij} é simétrica, o vício médio dos três estimadores é pequeno e quando a distribuição de u_{ij} é qui-quadrado, o vício de $\hat{\alpha}$ é grande. Com e_{ij} seguindo uma t_3 , os vícios médios de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são bem maiores do que o de $\hat{\tau}$ e em geral os EQM dos três estimadores são grandes. Quando e_{ij} segue uma distribuição χ_1^2 , os vícios médios de $\hat{\tau}$ e $\hat{\beta}$ são pequenos e o vício médio de $\hat{\alpha}$ é bem maior do que os de $\hat{\tau}$ e $\hat{\beta}$. Em geral, $\hat{\tau}$ é o menos afetado quanto ao vício e EQM.

Tabela 2.4: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\beta}$ para diferentes distribuições da covariável.

n	λ	Distribuição da covariável				
		U(0,1)	U(0,10)	N(0,1)	N(0,10)	LN(0,1)
5	1	-1,665(4.732,4)	0,021(0,049)	-0,053(119,20)	0,023(0,056)	0,075(98,663)
	5	-4,815(74.526)	0,002(0,022)	0,111(29,109)	0,006(0,020)	0,142(36,746)
	10	1.387(12.289)	0,003(0,020)	0,021(0,582)	0,002(0,018)	0,009(1,441)
20	1	-1,290(1.722,2)	0,002(0,007)	0,016(8,298)	0,003(0,006)	0,014(0,041)
	5	-0,576(6.181,2)	-0,001(0,004)	0,009(0,040)	0,001(0,003)	0,002(0,014)
	10	-0,096(210,92)	0,001(0,004)	0,007(0,034)	0,000(0,003)	0,001(0,012)
50	1	0,019(992,107)	0,002(0,003)	0,018(0,036)	0,001(0,002)	0,003(0,008)
	5	0,008(67,150)	-0,001(0,001)	0,004(0,014)	0,000(0,001)	0,001(0,004)
	10	0,057(5,469)	-0,000(0,001)	0,002(0,013)	0,001(0,001)	0,001(0,004)

2.2.2 Teste sobre os efeitos dos tratamentos

Nesta subseção avaliamos o teste de Wald (apresentado na Seção 2.1) para o modelo funcional por meio de algumas simulações. A hipótese nula de interesse é H_0 : não há efeito de tratamento e a hipótese alternativa considerada é H_1 : há efeito de tratamento.

Foram geradas 10.000 amostras do modelo funcional normal definido por (2.1) fixando $\alpha = \beta = 1$.

Em uma primeira etapa realizamos simulações para avaliar o tamanho observado do teste da hipótese H_0 .

Tabela 2.5: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados dos estimadores de máxima verossimilhança para diferentes distribuições dos erros.

Distribuição de e_{ij}	Distribuição de u_{ij}	λ	Estimadores		
			$\hat{\alpha}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\beta}$
$N(0,1)$	$N(0,1)$	1	-0,235(0,176)	0,000(0,021)	0,245(0,074)
	t_3	1/3	-0,185(1,387)	0,000(0,084)	0,073(0,162)
	$U(-2,2)$	3/4	-0,030(0,208)	0,001(0,041)	0,014(0,027)
	χ^2_1	1/2	-1,071(1,740)	0,000(0,054)	0,026(0,055)
t_3	$N(0,1)$	3	0,383(2,383,0)	-0,034(13,433)	-0,139(351,319)
	t_3	1	-0,312(355,210)	0,029(2,311)	0,124(52,562)
	$U(-2,2)$	9/4	-0,237(41,729)	0,002(0,286)	0,097(6,989)
	χ^2_1	3/2	-1,494(141,133)	0,001(0,831)	0,151(11,726)
$U(-2,2)$	$N(0,1)$	4/3	-0,026(0,200)	0,000(0,004)	0,009(0,025)
	t_3	4/9	-0,194(0,721)	0,004(0,075)	0,078(0,103)
	$U(-2,2)$	1	-0,031(0,221)	-0,009(0,048)	0,014(0,028)
	χ^2_1	2/3	-1,089(1,845)	-0,000(0,058)	0,032(0,063)
χ^2_1	$N(0,1)$	2	0,931(1,295)	-0,003(0,055)	0,027(0,080)
	t_3	2/3	0,613(4,123)	0,002(0,125)	0,156(0,711)
	$U(-2,2)$	3/2	0,907(1,367)	-0,001(0,065)	0,039(0,104)
	χ^2_1	1	-0,211(1,947)	-0,002(0,078)	0,070(0,195)

Na Tabela 2.6 consideramos $k = 2$ grupos e apresentamos os tamanhos observados, em porcentagem, do teste de Wald da hipótese $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$. As amostras foram geradas assumindo que os erros e_{ij} e u_{ij} tinham distribuições normais de média zero, fixando $\tau = 0$, variando o tamanho amostral n , $n = 5, 20$ e 50 , a razão de variâncias λ , $\lambda = 1, 5$ e 10 e a variância do erro e_{ij} , $\sigma_e^2 = 1, 0$ e $5, 0$. A covariável foi gerada segundo uma distribuição $U(0,5)$ e os tamanhos nominais foram fixados em 1%, 5% e 10%. O tamanho observado do teste de Wald é a proporção de rejeições de H_0 dentre as 10.000 amostras geradas. Na Tabela 2.7 repetimos as simulações para $k = 3$ grupos. Observamos, por meio da análise dessas tabelas que os tamanhos observados são bem maiores do que os nominais para $n = 5$ e se aproximam dos mesmos à medida que cresce o número de elementos por grupo. De um modo geral, para $n = 5$, os tamanhos observados estão mais distantes dos nominais à medida que λ aumenta. Não parece haver diferenças significativas entre os tamanhos observados para os diferentes valores de σ_e^2 .

Nas Tabelas 2.8 e 2.9 exibimos os tamanhos observados, em porcentagem, do teste de Wald fixando $\lambda = 1, 0$ e diferentes distribuições para a covariável, a saber: $U(0,1)$, $U(0,10)$, $N(0,1)$, $N(0,10)$ e $LN(0,1)$. As distribuições dos erros, os valores de σ_e^2 , o número de observações por grupo e os tamanhos nominais foram fixados como na Tabela 2.6. Na Tabela 2.8 geramos as amostras para $k = 2$ grupos, ao passo que na Tabela 2.9 temos $k = 3$ grupos. Essas tabelas mostram que os tamanhos observados se aproximam dos nominais à medida que aumenta o tamanho da amostra. Os tamanhos observados são grandes apenas para $n = 5$. Em geral, a variabilidade do modelo (σ_e^2) e a distribuição da covariável não parecem influenciar os tamanhos observados.

Na Tabela 2.10 temos os tamanhos observados do teste de Wald quando o pressuposto de normalidade de um dos erros não está satisfeito. Os parâmetros das distribuições dos erros foram escolhidos de forma a tornar $\lambda = 1$. Os erros foram gerados segundo uma $N(0,2)$, t_4 , $U(-2,4;2,4)$ e χ_1^2 . A covariável foi gerada segundo uma distribuição $U(0, 5)$, o valor de τ foi fixado em zero, o número de grupos foi igual a 3, o tamanho amostral foi igual a 5, 20 e 50 e os tamanhos nominais adotados

Tabela 2.6: Tamanhos observados do teste de Wald para $k = 2$ grupos (porcentagem de rejeições em 10.000 réplicas).

σ_e^2	n	Tamanho	λ		
		Nominal(%)	1	5	10
5,0	5	1	4,4	6,4	6,5
		5	10,8	13,8	15,0
		10	15,9	19,7	23,5
	20	1	0,9	1,9	2,1
		5	3,9	6,9	7,3
		10	9,9	12,2	11,7
	50	1	1,3	1,3	1,6
		5	4,6	5,4	4,2
		10	9,6	10,7	11,7
1,0	5	1	5,7	6,5	8,2
		5	11,9	14,4	14,5
		10	17,8	20,4	21,8
	20	1	1,9	1,6	1,8
		5	6,7	6,4	5,9
		10	10,8	11,8	11,7
	50	1	1,1	1,2	1,3
		5	4,6	6,1	6,2
		10	10,1	11,2	12,1

Tabela 2.7: Tamanhos observados do teste de Wald para $k = 3$ grupos (porcentagem de rejeições em 10.000 réplicas).

σ_e^2	n	Tamanho	λ		
		Nominal(%)	1	5	10
5,0	5	1	4,8	5,9	5,2
		5	12,4	13,3	13,9
		10	16,2	19,4	21,4
	20	1	0,9	1,1	1,6
		5	4,9	3,6	5,7
		10	10,1	8,7	9,4
	50	1	0,9	0,8	0,7
		5	4,8	4,4	4,1
		10	10,3	8,7	10,1
1,0	5	1	5,2	7,3	6,8
		5	12,9	14,2	15,1
		10	18,9	21,3	21,3
	20	1	1,1	1,1	0,8
		5	5,8	6,5	5,6
		10	10,5	11,4	11,2
	50	1	1,0	1,2	0,8
		5	4,9	5,3	4,4
		10	10,1	10,6	9,1

Tabela 2.8: Tamanhos observados do teste de Wald para $k = 2$ grupos e diferentes distribuições da covariável (porcentagem de rejeições em 10.000 réplicas).

σ_e^2	n	Tamanho	Distribuição da covariável				
		Nominal(%)	U(0,1)	U(0,10)	N(0,1)	N(0,10)	LN(0,1)
5,0	5	1	5,7	7,7	7,3	6,3	8,3
		5	13,1	15,3	16,0	13,8	16,1
		10	19,8	21,9	22,4	20,4	22,8
	20	1	1,2	1,4	1,9	1,8	1,4
		5	5,1	6,5	5,5	7,0	6,4
		10	10,4	12,3	11,0	12,1	12,7
	50	1	1,0	1,1	1,6	4,0	1,4
		5	6,3	5,3	5,0	5,3	5,3
		10	11,8	11,1	10,3	10,2	11,4
1,0	5	1	6,5	8,3	6,7	6,4	8,5
		5	12,9	16,1	13,8	13,5	17,3
		10	19,4	22,1	21,0	19,2	23,9
	20	1	2,5	1,2	1,8	1,4	1,7
		5	8,1	7,0	6,6	7,6	5,6
		10	14,3	13,9	11,4	13,8	11,1
	50	1	2,1	1,0	1,6	1,7	1,0
		5	5,4	4,7	5,6	5,9	4,0
		10	11,2	9,8	10,3	11,6	8,7

Tabela 2.9: Tamanhos observados do teste de Wald para $k = 3$ grupos e diferentes distribuições da covariável (porcentagem de rejeições em 10.000 réplicas).

σ_e^2	n	Tamanho	Distribuição da covariável				
		Nominal(%)	U(0,1)	U(0,10)	N(0,1)	N(0,10)	LN(0,1)
5,0	5	1	5,9	6,4	6,0	6,6	8,5
		5	12,4	12,9	13,9	11,2	13,3
		10	17,5	20,6	23,2	18,8	19,9
	20	1	1,2	1,1	1,7	1,0	1,3
		5	4,9	5,9	5,1	5,9	5,2
		10	10,0	11,5	10,8	10,3	11,1
	50	1	1,1	0,9	1,3	1,4	1,1
		5	5,1	5,0	5,4	5,9	5,2
		10	10,2	10,6	10,3	10,0	11,4
1,0	5	1	5,6	8,9	5,1	3,6	5,6
		5	11,1	14,4	10,0	9,6	13,0
		10	16,2	20,5	14,3	18,7	21,5
	20	1	1,9	1,3	1,2	1,0	1,8
		5	6,3	5,1	5,9	5,8	5,1
		10	10,9	10,4	12,0	11,6	10,8
	50	1	1,2	0,9	1,1	1,3	1,2
		5	5,0	5,2	5,6	4,8	4,9
		10	10,0	10,1	9,9	10,2	9,4

foram de 1%, 5% e 10%. Observamos que, em geral, a violação nos pressupostos dos erros faz com que os tamanhos observados sejam bem maiores que os tamanho nominais para os tamanhos amostrais iguais a 5 e 20. Já, para $n = 50$, os tamanhos observados estão mais próximos dos nominais.

A próxima etapa consiste no estudo do poder do teste de Wald da hipótese $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$ para $k=2$. Nas simulações fixamos $\lambda = 1, 0$, $\sigma_e^2 = 1, 0$, tamanho nominal igual a 5% e geramos a covariável segundo uma distribuição $U(0,5)$. Na Tabela 2.11 e na Figura 2.1 apresentamos o poder observado, em porcentagem, para $n = 5, 15$ e 30 e diversos valores de τ . O poder observado do teste de Wald é a proporção de rejeições de H_0 dentre as 10.000 amostras geradas sob diferentes valores de τ . Os resultados verificados indicam que o poder do teste aumenta com o tamanho da amostra e à medida que o valor de τ se distancia de zero.

Finalmente, procuramos comparar o desempenho do teste de Wald com o do teste F clássico que ignora o erro de medida da covariável. Para obtermos os tamanhos e poderes observados dos dois testes, utilizamos o modelo de ANCOVA funcional normal dado em (2.1), gerando a covariável segundo uma distribuição $U(0, 5)$ e os erros e_{ij} e u_{ij} segundo a distribuição normal padrão, fixando $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ grupos, tamanho nominal igual a 5% e n igual a 5, 20 e 50. A Figura 2.2 apresenta os tamanhos observados dos dois testes (consideramos a porcentagem de rejeições, em 10.000 réplicas, da hipótese nula $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$). Nas Figuras 2.3 a 2.5 apresentamos os poderes observados, em porcentagem, para diversos valores de τ .

A Figura 2.2 mostra que os tamanhos simulados do teste F estão sempre próximos de 5%. Já o teste de Wald requer amostras grandes para apresentar o mesmo comportamento. Pelas Figuras 2.3 a 2.5 temos que o poder de ambos os testes aumenta com o tamanho da amostra. Para $n = 5$, o teste de Wald é mais poderoso que o clássico para valores pequenos de τ ; com τ se distanciando de zero, o teste clássico é mais poderoso. Para amostras maiores, embora os poderes dos dois testes se aproximem para valores de τ distantes de zero, o poder do teste clássico é sempre maior que o de Wald. Para $n = 50$, o teste clássico é mais poderoso para todo valor de τ .

Tabela 2.10: Tamanhos observados do teste de Wald, para $k = 3$ grupos, violando os pressupostos das distribuições dos erros (porcentagem de rejeições em 10.000 réplicas).

Distribuição de e_{ij}	Distribuição de u_{ij}	Tamanho Nominal (%)	n		
			5	20	50
$N(0, 2)$	t_4	1	9,4	1,7	2,1
		5	25,3	10,9	6,4
		10	37,7	22,8	14,8
$N(0, 2)$	$U(-2,4;2,4)$	1	10,1	0,9	1,4
		5	26,1	9,0	5,5
		10	46,1	16,7	11,4
$N(0, 2)$	χ_1^2	1	14,9	3,4	1,1
		5	28,8	11,6	6,3
		10	51,3	22,8	15,9
t_4	$N(0, 2)$	1	10,0	0,7	0,8
		5	24,4	8,6	5,0
		10	38,9	12,7	11,5
$U(-2,4;2,4)$	$N(0, 2)$	1	8,9	1,7	0,5
		5	26,1	12,0	5,4
		10	35,5	17,0	14,6
χ_1^2	$N(0, 2)$	1	11,8	2,2	0,7
		5	28,8	6,3	5,9
		10	40,2	16,0	12,8

Tabela 2.11: Poder observado do teste de Wald com tamanho nominal igual a 5% (porcentagem de rejeições em 10.000 réplicas).

	Valores de τ												
	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	1,3	1,6	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0
$n = 5$	12,9	14,8	22,6	30,9	46,2	63,6	79,7	85,1	90,4	92,8	95,7	96,9	98,4
$n = 15$	7,2	9,7	24,6	51,7	76,7	93,1	98,3	99,6					
$n = 30$	5,3	9,0	39,6	78,0	96,1	99,6

Figura 2.1 Poder observado do teste de Wald

Figura 2.2 Tamanhos observados dos testes de Wald e F

Figura 2.3 Poder observado dos testes de Wald e F para $n = 5$

Figura 2.4 Poder observado dos testes de Wald e F para $n = 20$

Figura 2.5 Poder observado dos testes de Wald e F para $n = 50$

Modelo estrutural

Neste capítulo faremos um estudo acerca do modelo de análise de covariância estrutural, isto é, o vetor dos verdadeiros valores da covariável é considerado aleatório.

Ao contrário do que ocorre com o modelo funcional, no modelo estrutural o número de parâmetros desconhecidos não cresce com o tamanho da amostra, uma vez que o vetor de verdadeiros valores da covariável ($\mathbf{x}$) é tratado não como um parâmetro a ser estimado, mas como variável aleatória à qual atribuímos uma distribuição de probabilidade. O fato do número de parâmetros não crescer com o tamanho da amostra torna possível a derivação dos testes da razão de verossimilhanças e escore (ver Seção 3.3) não aplicáveis no modelo funcional; por outro lado, a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros é mais complexa, exigindo aplicação de métodos numéricos para a obtenção das estimativas.

Seja o modelo definido por (1.1), (1.6) e (1.7). Com o pressuposto adicional de que e_{ij} , u_{ij} e x_{ij} são normalmente distribuídos, temos o modelo de análise de covariância estrutural normal com erro na covariável. Para tornar o modelo identificável, vamos supor ainda que $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$ (razão entre as variâncias dos erros) é conhecida. Desta forma o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \beta, \mu_x, \sigma_u^2, \sigma_x^2)'$ é composto por $(k+4)$ parâmetros e o modelo estrutural normal fica devidamente identificável.

3.1 Estimação

Seja o modelo de análise de covariância estrutural normal com a razão de variâncias dos erros conhecida. Temos então que

$$\begin{bmatrix} e_{ij} \\ u_{ij} \\ x_{ij} \end{bmatrix} \sim N_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda\sigma_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \right).$$

Conseqüentemente, o vetor das variáveis observadas pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} Y_{ij} \\ X_{ij} \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} \alpha + \tau_i + \beta\mu_x \\ \mu_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda\sigma_u^2 + \beta^2\sigma_x^2 & \beta\sigma_x^2 \\ \beta\sigma_x^2 & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.1)$$

Andrade Filho (2001) apresenta expressões para o logaritmo da função de verossimilhança e suas primeira e segunda derivadas para modelos estruturais bastante gerais. Aqui, particularizamos suas expressões ao modelo de análise de covariância com um fator.

Definindo $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{kj})'$ e $\mathbf{X}_j = (X_{1j}, \dots, X_{kj})'$, $j = 1, \dots, n$, uma outra forma de escrever (3.1) é

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \sim N_{2k} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_Y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}, \mathbf{V} \right),$$

com

$$\boldsymbol{\mu}_Y = \begin{pmatrix} \alpha + \tau_1 + \beta\mu_x \\ \vdots \\ \alpha + \tau_k + \beta\mu_x \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{1}_k \otimes \mu_x = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \vdots \\ \mu_x \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \mathbf{I}_k \otimes \begin{bmatrix} \lambda\sigma_u^2 + \beta^2\sigma_x^2 & \beta\sigma_x^2 \\ \beta\sigma_x^2 & \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}_k$ sendo a matriz identidade de ordem k e " $\otimes$ " denotando o produto de Kronecker.

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \ell(\boldsymbol{\theta}) = -nk \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log |\mathbf{V}| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_j' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{d}_j, \quad (3.2)$$

em que $|\mathbf{V}| = \delta^k$, $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}_k \otimes \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_u^2 & -\beta\sigma_x^2 \\ -\beta\sigma_x^2 & \sigma_e^2 + \beta^2\sigma_x^2 \end{bmatrix}$, $\delta = (\sigma_u^2\sigma_x^2)(\beta^2 + \lambda)(1 + \lambda)$,
 $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1', \dots, \mathbf{Y}_n')'$, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1', \dots, \mathbf{X}_n')'$ e $\mathbf{d}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j - \mu_Y \\ \mathbf{X}_j - \mu_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{jY} \\ \mathbf{d}_{jX} \end{pmatrix}$.

Definimos $\mathbf{M} = \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_j \mathbf{d}_j' / n$ uma matriz $2k \times 2k$ e $\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{V})\mathbf{V}^{-1}$. Sejam v_{lm} e θ_r elementos genéricos de $\mathbf{V}$ e $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente. Definimos também $\mathbf{V}_{\theta_r}$ a matriz $2k \times 2k$ com elemento $\partial v_{lm} / \partial \theta_r$, $\mathbf{d}_{\theta_r}$ o vetor $2k \times 1$ com expressão

$$\mathbf{d}_{\theta_r} = \frac{\partial}{\partial \theta_r} \bar{\mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \theta_r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}_Y \\ \bar{\mathbf{d}}_X \end{pmatrix},$$

$$\text{em que } \bar{\mathbf{d}}_Y = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 - \alpha - \tau_1 - \beta\mu_x \\ \vdots \\ \bar{Y}_k - \alpha - \tau_k - \beta\mu_x \end{pmatrix} \text{ e } \bar{\mathbf{d}}_X = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - \mu_x \\ \vdots \\ \bar{X}_k - \mu_x \end{pmatrix}.$$

Sabendo que θ_r e θ_s são elementos genéricos de $\boldsymbol{\theta}$ e designando por m_{tu} um elemento qualquer de $\mathbf{M}$, definimos $\mathbf{d}_{\theta_s, \theta_r}$ o vetor $2k \times 1$ dado por $\partial \mathbf{d}_{\theta_r} / \partial \theta_s$, $\mathbf{M}_{\theta_r}$ a matriz $2k \times 2k$ formada pelos $\partial m_{tu} / \partial \theta_r$ e $\mathbf{V}_{\theta_s, \theta_r}$ a matriz $2k \times 2k$ dada por $\partial \mathbf{V}_{\theta_r} / \partial \theta_s$. Andrade Filho (2001) mostrou que

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} \ell(\boldsymbol{\theta}) = n[0, 5 \times \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{V}_{\theta_r}) - \mathbf{d}_{\theta_r}' \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{d}}]$$

e que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s \partial \theta_r} &= n[\text{tr}(-\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_r} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}_{\theta_s} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_r} \\ &\quad - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_r} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s, \theta_r} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_r} \\ &\quad - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s, \theta_r}) - \mathbf{d}_{\theta_s, \theta_r}' \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{d}} + \mathbf{d}_{\theta_r}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s} \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{d}_{\theta_r}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{d}_{\theta_s}], \end{aligned}$$

em que "tr" indica o traço de uma matriz.

A função escore é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell(\boldsymbol{\theta}), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \ell(\boldsymbol{\theta}) \right]',$$

sendo p o número de parâmetros do modelo. A matriz hessiana é definida como

$$H(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \theta_p^2} \end{pmatrix}$$

e para obtermos a matriz de informação de Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ utilizamos a expressão (Andrade Filho, 2001):

$$-E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \ell(\boldsymbol{\theta}) \right) = n[0, 5 \times \text{tr}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_s} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}_{\theta_r}) + \mathbf{d}_{\theta_r}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{d}_{\theta_s}],$$

que fornece um elemento genérico dessa matriz.

O processo de obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança se dará pela maximização do logaritmo da função de verossimilhança (3.2). No modelo de análise de covariância estrutural normal os EMV não têm expressão fechada. A solução então será obtida via métodos numéricos. Neste trabalho mostramos os métodos de Newton-Raphson e o Scoring de Fisher.

Seja $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ um vetor de valores iniciais para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Estes valores iniciais podem ser obtidos, por exemplo, basendo-se nos estimadores de um modelo funcional similar e no método dos momentos.

O método de Newton-Raphson tem no passo m a expressão

$$\boldsymbol{\theta}^{(m)} = \boldsymbol{\theta}^{(m-1)} - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}).$$

A matriz hessiana deve ser inversível a cada passo, e o processo é repetido até convergência.

O método Scoring de Fisher substitui a matriz hessiana por seu valor esperado, tendo então no passo m a expressão

$$\boldsymbol{\theta}^{(m)} = \boldsymbol{\theta}^{(m-1)} + \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}).$$

Em grandes amostras e sob condições de regularidade a distribuição do EMV $\hat{\theta}$ é aproximadamente normal de média θ e matriz de variância-covariância igual a $\mathbf{I}^{-1}(\theta)$ (Andrade Filho, 2001).

3.2 Testes de hipótese

Em análise de covariância, o principal interesse é saber se há efeito dos tratamentos sobre a variável resposta. Nesta seção, derivamos três testes: o da razão de verossimilhanças, o de Wald e o escore. Seus fundamentos e desenvolvimentos serão apresentados em seguida.

Considerando o modelo de análise de covariância estrutural normal com a razão entre as variâncias dos erros conhecida, estamos interessados em testar a hipótese $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \text{pelo menos um } \tau_i \text{ é diferente de zero, } i = 1, \dots, k$.

O teste da razão de verossimilhanças envolve estimação do modelo sob a hipótese nula e sob a hipótese alternativa; o teste de Wald envolve estimação apenas sob a hipótese alternativa e o teste escore envolve estimação apenas sob a hipótese nula.

3.2.1 Teste da razão de verossimilhanças

Seja $\theta = (\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2)'$, o vetor de parâmetros do modelo de análise de covariância estrutural normal.

Sejam $\tilde{\theta}$ e $\hat{\theta}$ estimadores de máxima verossimilhança de θ sob a hipótese nula e sob a hipótese alternativa, respectivamente. Sejam também, respectivamente, $\ell(\hat{\theta})$ e $\ell(\tilde{\theta})$ os logaritmos das funções de verossimilhanças (obtidos de (3.2)) aplicados nos estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e sob H_0 . A estatística da razão de

verossimilhanças é dada por

$$RV = 2[\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}})].$$

Sob a hipótese de igualdade dos tratamentos (H_0) a estatística RV tem distribuição aproximada (nk grande) qui-quadrado com $(k - 1)$ graus de liberdade, em que $(k - 1)$ é o número de parâmetros do modelo sob H_1 menos o número de parâmetros do modelo sob H_0 .

3.2.2 Teste de Wald

Podemos particionar o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ em $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \boldsymbol{\theta}'_2)'$, em que $\boldsymbol{\theta}_1 = (\tau_1, \dots, \tau_{k-1})'$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = (\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2)'$. Estamos interessados em testar a hipótese $H_0 : \boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{0}$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \boldsymbol{\theta}_1 \neq \mathbf{0}$.

Como visto no final da Seção 3.1, temos que a variância assintótica do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é igual à inversa da matriz de informação de Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$. O teste de Wald então pode ser derivado da forma seguinte.

Rearranjemos os elementos de $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ e fazamos $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{12} \\ \mathbf{I}_{21} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix}$, sendo $\mathbf{I}_{11}$ uma matriz de dimensão $(k-1) \times (k-1)$ cujos elementos se referem aos $(k-1)$ parâmetros de $\boldsymbol{\theta}_1$ e, analogamente, $\mathbf{I}_{12} = \mathbf{I}'_{21}$ matrizes de dimensão $(k-1) \times 5$ e $\mathbf{I}_{22}$ matriz de dimensão 5×5 . O inverso da matriz de informação de Fisher pode ser escrito na forma $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{11} & \mathbf{I}^{12} \\ \mathbf{I}^{21} & \mathbf{I}^{22} \end{bmatrix}$. Temos então que a estatística de Wald é dada por

$$W = \hat{\boldsymbol{\theta}}'_1 (\hat{\mathbf{I}}^{11})^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1,$$

em que $\hat{\mathbf{I}}^{11}$ é a matriz $\mathbf{I}^{11}$ avaliada nos estimadores de máxima verossimilhança do modelo sob a hipótese alternativa.

A estatística W converge (nk grande) para uma distribuição qui-quadrado com $(k - 1)$ graus de liberdade.

3.2.3 Teste escore

Da mesma forma que na Subseção 3.2.2, redefinimos o vetor escore (ver Seção 3.1) em função dos parâmetros de interesse e dos parâmetros de perturbação: $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{U}'_1, \mathbf{U}'_2)'$, sendo $\mathbf{U}_1$ um vetor com $(k - 1)$ componentes relativos aos parâmetros de interesse $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ e $\mathbf{U}_2$ um vetor relativo aos 5 parâmetros de perturbação $\alpha, \beta, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_u^2$. Semelhantemente ao teste de Wald, o interesse é testar $H_0 : \boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{0}$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \boldsymbol{\theta}_1 \neq \mathbf{0}$.

A estatística escore é dado pela expressão

$$S = \tilde{\mathbf{U}}'_1 \tilde{\mathbf{I}}^{11} \tilde{\mathbf{U}}_1,$$

em que o " $\sim$ " em cima dos componentes significa os mesmos avaliados nos estimadores de máxima verossimilhança sob a hipótese nula.

3.3 Simulações

Com o pacote estatístico S-Plus fizemos algumas simulações para avaliar propriedades dos estimadores e desempenho dos testes propostos neste capítulo, em amostras finitas.

Em cada caso foram geradas 1.000 amostras do modelo estrutural normal, e em todos eles usamos $\alpha = \beta = 1$.

Primeiramente, comparamos os estimadores de máxima verossimilhança de α, β e τ , apresentados na Seção 3.1 com os estimadores usuais de mínimos quadrados. Depois verificamos o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança

α , β e τ com os pressupostos de normalidade da covariável e dos erros de medida violados.

Fizemos também simulações para avaliar o comportamento dos testes apresentados na Seção 3.2. Avaliamos os tamanhos observados dos testes da razão de verossimilhanças, de Wald e escore da hipótese de inexistência de efeito de tratamento. Avaliamos o comportamento dos testes na presença de violações na normalidade dos erros e da covariável. Finalmente, estudamos o poder dos três testes apresentados.

3.3.1 Estimação dos parâmetros

Na Tabela 3.1 comparamos os estimadores de máxima verossimilhança do modelo estrutural normal apresentados neste capítulo com os estimadores de mínimos quadrados usuais (Seção 1.1), por meio dos respectivos vícios médios e erros quadráticos médios. As amostras foram geradas com $k = 2$ grupos, $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$, covariáveis x_{ij} geradas conforme uma distribuição $N(0, 1)$ ($\mu_x = 0$ e $\sigma_x^2 = 1, 0$) e variância do erro e_{ij} igual a 1,0. Usamos também $n = 5, 20$ e 50 e $\lambda = 1, 5$ e 10 . O corpo da Tabela 3.1 mostra os vícios médios $\sum_{t=1}^{1.000} (\hat{\psi}_t - \psi)/1.000$ e os erros quadráticos médios $\sum_{t=1}^{1.000} (\hat{\psi}_t - \psi)^2/1.000$, em que $\hat{\psi}$ é um estimador de ψ e $\psi = \alpha, \tau, \beta$.

Observando a Tabela 3.1, verificamos que, em geral, os valores dos vícios e dos erros quadráticos médios dos dois estimadores de τ e de α são pequenos e estão próximos. Para $n = 5$ e $\lambda = 1$, os EQMs do estimador de máxima verossimilhança de ambos os parâmetros são maiores do que os do estimador de mínimos quadrados. Para $n = 20$ e $\lambda = 1$, temos que o EQM de $\hat{\alpha}$ é bastante maior que o EQM de $\hat{\alpha}_{MQ}$. Verificamos também que, em geral, os valores dos vícios e dos EQM médios do estimador de mínimos quadrados de β são menores do que os do estimador de máxima verossimilhança. Para os três parâmetros, os EQMs diminuem com o aumento do tamanho da amostra, para todo valor de λ .

Tabela 3.1: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados para os estimadores de máxima verossimilhança e os de mínimos quadrados .

n	λ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_{MQ}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\tau}_{MQ}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_{MQ}$
5	1	1,293(726,61)	0,012(0,188)	0,028(19,034)	0,027(0,194)	6,274(11.136)	-0,513(0,392)
	5	-0,010(0,211)	-0,013(0,117)	0,005(0,115)	0,005(0,115)	0,181(0,732)	-0,026(0,158)
	10	0,002(0,130)	0,003(0,122)	-0,003(0,111)	-0,003(0,111)	0,125(0,213)	0,024(0,149)
20	1	0,021(0,332)	0,006(0,038)	0,007(0,040)	0,007(0,040)	0,007(8,402)	0,501(0,273)
	5	-0,001(0,027)	0,000(0,025)	-0,001(0,025)	-0,001(0,025)	0,186(0,077)	-0,007(0,030)
	10	0,015(0,026)	0,014(0,025)	-0,005(0,026)	-0,005(0,026)	0,104(0,046)	0,003(0,028)
50	1	-0,002(0,021)	0,001(0,016)	-0,002(0,015)	-0,002(0,015)	0,007(0,036)	-0,501(0,260)
	5	-0,007(0,010)	-0,006(0,010)	0,002(0,010)	0,002(0,010)	0,098(0,054)	0,004(0,011)
	10	0,004(0,010)	0,004(0,010)	-0,003(0,010)	-0,003(0,010)	0,097(0,023)	-0,001(0,011)

A Tabela 3.2 apresenta os vícios e os erros quadráticos simulados dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α , τ e β do modelo de ANCOVA estrutural para diferentes distribuições da covariável. As 1.000 amostras foram geradas com $k = 2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$, $\sigma_u^2 = 1, 0$, $\lambda = 1, 0$ e $n = 30$. A covariável foi gerada segundo as seguintes distribuições: U(0,1), U(0,10), N(0,1), N(0,10), nestes dois últimos casos o pressuposto de normalidade da covariável está satisfeito, e LN(0, 1).

Tabela 3.2: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados dos estimadores de máxima verossimilhança para diferentes distribuições da covariável.

Distribuição da covariável	Estimadores		
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\beta}$
$U(0, 1)$	-0,156(267,98)	0,007(0,017)	0,134(119,71)
$U(0, 10)$	35,214(8.058,4)	-0,060(1,192)	20,407(166,07)
$N(0, 1)$	-0,020(0,113)	-0,006(0,027)	0,026(0,079)
$N(0, 10)$	-0,022(0,140)	-0,003(0,032)	-0,022(0,074)
$LN(0, 1)$	0,523(3,124)	0,001(0,027)	-0,187(0,409)

Para analisar os resultados da Tabela 3.2, tomamos como referência os valores dos vícios e erros quadráticos médios das amostras geradas com covariável normal, obedecendo os pressupostos do modelo de ANCOVA estrutural normal. Nestes casos, os estimadores apresentam vícios médios próximos de zero e os menores erros quadráticos médios. Quando a covariável tem distribuição uniforme, os estimadores de α e β apresentam os maiores vícios e erros quadráticos médios. A distribuição $LN(0,1)$ afeta os estimadores de α e de β de forma menos acentuada. A conclusão é que o pressuposto de normalidade da covariável deve estar atendido para termos boas propriedades dos estimadores.

Na Tabela 3.3 temos os vícios e os erros quadráticos médios simulados dos estimadores de máxima verossimilhança para o modelo de ANCOVA estrutural na presença de violação dos pressupostos dos erros. As amostras foram geradas com $k = 2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$, $n = 30$ e o vetor de covariáveis foi gerado segundo uma $N(0,1)$. Os erros e_{ij} e u_{ij} foram gerados segundo as distribuições $N(0,1)$, t_3 , $U(-2,2)$ e χ_1^2 .

A Tabela 3.3 nos permite concluir que em geral $\hat{\tau}$ é o menos afetado quanto ao vício e ao erro quadrático médio. Se um dos erros é normal e o outro tem distribuição

Tabela 3.3: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados dos estimadores de máxima verossimilhança para diferentes distribuições dos erros.

Distribuição de e_{ij}	Distribuição de u_{ij}	λ	Estimadores		
			$\hat{\alpha}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\beta}$
$N(0,1)$	$N(0,1)$	1,0	-0,001(0,020)	0,005(0,014)	0,012(0,036)
	t_3	1/3	0,008(0,048)	0,002(0,022)	-0,024(0,122)
	$U(-2,2)$	3/4	-0,002(0,270)	0,005(0,017)	-0,126(9,913)
	χ_1^2	1/2	-1,252(21,323)	-0,003(0,017)	0,204(12,875)
t_3	$N(0,1)$	3,0	-0,003(0,068)	-0,010(0,036)	0,075(4,448)
	t_3	1,0	-0,302(47,150)	0,050(2,786)	2,136(4741,090)
	$U(-2,2)$	9/4	0,042(0,791)	0,000(0,036)	0,075(31,217)
	χ_1^2	3/2	0,447(1108,450)	-0,010(0,036)	-1,125(847,708)
$U(-2,2)$	$N(0,1)$	4/3	-0,010(0,026)	0,004(0,020)	0,014(0,040)
	t_3	4/9	0,051(50,218)	0,041(1,298)	1,097(2087,320)
	$U(-2,2)$	1,0	0,003(0,029)	0,007(0,020)	0,018(0,044)
	χ_1^2	2/3	-0,750(17,875)	0,002(1,298)	-0,169(13,676)
χ_1^2	$N(0,1)$	2,0	0,996(0,240)	-0,002(0,026)	0,007(15,273)
	t_3	2/3	0,421(179,113)	0,005(0,029)	0,547(355,344)
	$U(-2,2)$	3/2	0,991(0,073)	0,008(0,026)	0,017(8,229)
	χ_1^2	1,0	0,756(134,425)	0,007(0,026)	0,263(87,148)

simétrica, os vícios e erros quadráticos médios dos três estimadores são pouco afetados. À exceção de $\hat{\tau}$, quando um ou os dois erros têm distribuição χ_1^2 , os erros quadráticos médios dos estimadores são, em geral, muito grandes. A distribuição t_3 para pelo menos um dos erros, em geral, conduz a estimadores dos três parâmetros com erros quadráticos médios grandes. O estimador de β é, em geral, o mais afetado pela violação nos pressupostos dos erros.

3.3.2 Testes sobre os efeitos dos tratamentos

Nesta subseção avaliamos os testes apresentados na Seção 3.2, por meio de simulações de amostras de tamanhos $n = 5, 10, 30$ e 50 . Alguns casos ocorreram em que a convergência dos estimadores não foi alcançada ou algumas matrizes não puderam ser invertidas. Para $k = 2$ grupos, esses problemas ocorreram principalmente para $n = 5$ (no máximo em 4% da amostras). Para $k = 3$ o problema é minimizado. Para estes casos geramos amostras adicionais para que se completassem as 1.000 amostras.

Nas Tabelas 3.4 e 3.5 temos os tamanhos observados (em porcentagem) dos testes da razão de verossimilhanças (RV), de Wald e escore para o modelo de ANCOVA estrutural normal. As amostras foram geradas com $k = 2$ grupos, $\tau = 0$, covariável $N(0,1)$, e_{ij} e u_{ij} normais de média zero, $\lambda = 1, 5$, e 10 , $n = 5, 10, 50$. Usamos tamanhos nominais iguais a 1%, 5% e 10%. Para a construção da Tabela 3.4, fixamos $\sigma_e^2 = 5$, ao passo que na Tabela 3.5 fixamos $\sigma_e^2 = 1$. A hipótese nula em questão é a de igualdade entre os tratamentos.

Para ambos os valores de σ_e^2 , os tamanhos observados se aproximam dos nominais à medida que cresce o valor de n . Os testes de Wald e o da razão de verossimilhanças apresentam tamanhos observados bem maiores que os nominais para amostras de tamanho pequeno ($n = 5$). O teste de Wald é o menos conservador dos três, apresentando sempre o maior número de rejeições da hipótese nula. Estas conclusões valem para os três tamanhos nominais considerados. O teste escore tem comportamento um pouco diferente dos outros dois, apresentando muitas vezes número de rejeições

Tabela 3.4: Tamanhos observados dos testes para $k = 2$ grupos e $\sigma_e^2 = 5,0$ (porcentagem de rejeições em 1.000 réplicas).

λ	n	Tamanho	Teste		
		Nominal (%)	RV	Wald	Escore
1,0	5	1	4,4	7,6	0,6
		5	12,3	16,4	6,0
		10	20,1	22,0	12,9
	20	1	1,6	1,8	1,0
		5	6,2	7,6	4,5
		10	11,3	12,6	10,1
	50	1	1,2	1,4	1,1
		5	7,1	7,6	6,9
		10	12,7	13,3	12,1
5,0	5	1	4,3	7,6	0,7
		5	12,7	16,6	6,1
		10	19,6	22,0	13,5
	20	1	1,5	1,8	1,0
		5	6,0	7,4	5,3
		10	11,7	12,6	10,5
	50	1	1,1	1,3	1,0
		5	7,0	7,6	6,2
		10	12,7	12,9	12,1
10,0	5	1	4,1	9,8	0,8
		5	12,5	16,6	5,8
		10	18,8	22,6	13,0
	20	1	1,4	2,0	1,0
		5	6,0	7,2	5,2
		10	11,6	12,7	10,5
	50	1	1,0	1,3	0,9
		5	6,5	7,0	6,1
		10	12,5	13,0	12,1

Tabela 3.5: Tamanhos observados dos testes para $k = 2$ grupos e $\sigma_e^2 = 1,0$ (porcentagem de rejeições em 1.000 réplicas).

λ	n	Tamanho	Teste		
		Nominal(%)	RV	Wald	Escore
1,0	5	1	3,3	7,4	0,3
		5	10,6	14,7	5,1
		10	16,5	23,2	11,1
	20	1	1,4	1,7	1,1
		5	6,0	7,3	5,1
		10	12,6	13,4	11,2
	50	1	0,8	0,9	0,6
		5	3,7	4,2	3,7
		10	10,0	10,5	9,1
5,0	5	1	3,2	8,2	0,4
		5	10,7	15,3	4,7
		10	16,7	23,2	11,6
	20	1	1,4	1,8	0,7
		5	6,9	7,7	6,1
		10	11,7	12,9	11,0
	50	1	0,9	1,1	0,9
		5	4,2	5,0	4,8
		10	9,8	10,5	9,2
10,0	5	1	3,3	8,4	0,6
		5	10,7	15,9	4,7
		10	16,8	23,3	11,8
	20	1	1,3	2,0	0,9
		5	7,5	8,0	6,3
		10	12,5	13,0	10,9
	50	1	0,8	1,0	0,8
		5	4,3	4,5	4,8
		10	9,6	10,3	9,2

da hipótese nula abaixo do esperado. De um modo geral, este teste parece ser o melhor dos três no que se refere à simulação do tamanho (probabilidade de rejeição de H_0 dado que H_0 é verdadeira), pois apresenta número de rejeições da hipótese nula bastante próximos do esperado já para amostras de moderado valor de n .

Semelhantemente às Tabelas 3.4 e 3.5, na Tabela 3.6 temos os tamanhos observados dos testes do modelo estrutural normal para $k = 3$ grupos. As amostras foram geradas fixando $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau = 0$ e $\sigma_e^2 = 1, 0$. A covariável foi gerada segundo uma $N(0,1)$, os erros e_{ij} e u_{ij} segundo normais de média zero, os valores de λ foram iguais a 1, 5 e 10 e $n = 5, 10$, e 30. Para este caso, a hipótese nula é $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$. As conclusões acerca dos testes são parecidas com as das Tabelas 3.4 e 3.5. O teste de Wald é o que apresenta maior tamanho observado, seguido pelo teste da razão de verossimilhanças e pelo teste escore, este o mais conservador dos três. Todos os testes, no entanto, têm tamanhos observados se aproximando dos tamanhos nominais à medida que cresce o tamanho da amostra ou aumenta o valor de λ .

Verificamos o efeito da violação do pressuposto na normalidade da covariável na Tabela 3.7. Esta fornece os tamanhos observados dos testes para amostras geradas com 2 e 3 grupos, tamanhos nominais de 1%, 5% e 10% e distribuições para a covariável $U(0,1)$, $U(0,10)$, $N(0,1)$, $N(0,10)$ e $LN(0,1)$. Usamos ainda para a geração das amostras erros normais de média zero e variância igual a 1 e $n = 30$. De um modo geral, os tamanhos observados dos testes não são muito afetados quando o pressuposto de normalidade da covariável não está atendido. Com $k = 2$, a covariável $N(0,10)$ apresentou tamanhos observados acima dos nominais (5% e 10%) para os três testes. Já, quando a distribuição da covariável é $U(0,10)$, os tamanhos observados são menores do que 5% e 10% em todos os três testes. Em amostras geradas com $k = 3$ grupos, a distribuição $N(0,10)$ mostrou porcentagens de rejeição diferentes das esperadas para o teste da razão de verossimilhanças. O teste escore, para $k = 3$, apresentou comportamento dentro do esperado para todas as covariáveis geradas.

Na Tabela 3.8 temos os tamanhos dos testes quando o pressuposto de normalidade de um dos erros não está satisfeito. Os parâmetros das distribuições dos erros foram

Tabela 3.6: Tamanhos observados dos testes $k = 3$ grupos (porcentagem de rejeições em 1.000 réplicas).

λ	n	Tamanho	Teste		
		Nominal(%)	RV	Wald	Escore
1,0	5	1	3,1	9,7	0,6
		5	10,9	14,1	6,2
		10	16,2	26,0	11,8
	10	1	1,5	3,9	0,6
		5	7,4	10,1	4,4
		10	13,8	15,9	10,4
	30	1	1,0	1,3	0,6
		5	4,3	5,2	3,7
		10	10,5	11,4	9,5
5,0	5	1	3,3	8,9	0,7
		5	11,5	15,6	4,8
		10	18,4	27,0	11,1
	10	1	1,5	5,9	0,7
		5	8,0	10,5	4,4
		10	13,5	16,1	10,2
	30	1	0,8	1,3	0,6
		5	4,9	5,4	4,8
		10	10,2	10,7	9,3
10,0	5	1	3,7	9,5	0,6
		5	12,0	19,6	4,4
		10	20,2	27,0	11,9
	10	1	2,4	4,4	0,9
		5	7,8	10,6	5,1
		10	14,0	16,6	10,6
	30	1	0,8	1,2	0,7
		5	5,0	5,6	4,4
		10	10,4	10,9	9,2

Tabela 3.7: Tamanhos observados dos testes para diferentes distribuições da co-variável (porcentagem de rejeições em 1.000 réplicas).

k	Teste	Tamanho Nominal(%)	Distribuição da covariável				
			$U(0,1)$	$U(0,10)$	$N(0,1)$	$N(0,10)$	$LN(0,1)$
2	RV	1	1,3	2,4	1,0	1,2	0,8
		5	4,8	4,4	5,6	8,4	4,8
		10	10,1	8,5	10,7	13,6	9,6
	WALD	1	1,5	1,2	1,4	2,0	1,0
		5	5,8	3,6	6,0	8,8	5,5
		10	10,8	7,6	11,1	13,6	10,2
	ESCORE	1	1,0	0,8	0,7	0,8	0,7
		5	3,5	2,8	4,5	6,4	4,5
		10	9,0	7,2	9,4	13,7	9,4
3	RV	1	1,3	0,8	1,5	2,0	1,1
		5	5,4	4,5	5,9	3,5	5,2
		10	10,4	10,9	11,6	8,9	10,4
	WALD	1	1,6	1,6	2,2	1,9	1,4
		5	6,0	6,0	6,7	4,6	5,8
		10	11,6	12,8	12,6	9,9	12,1
	ESCORE	1	0,8	0,7	1,0	1,7	1,0
		5	4,6	4,4	5,4	5,1	4,5
		10	10,4	10,0	10,8	10,1	9,5

escolhidos de forma a tornar $\lambda = 1$. Os erros foram gerados segundo uma $N(0,2)$, t_4 , $U(-2,4;2,4)$ e χ_1^2 . O vetor de verdadeiros valores da covariável foi gerado segundo uma normal padrão, o número de grupos foi fixado em $k = 3$, adotamos $n = 30$ e tamanhos nominais iguais a 1%, 5% e 10%. De um modo geral, a violação do pressuposto de normalidade de um dos erros afeta pouco os tamanhos observados dos três testes. O teste escore é o que apresenta menores porcentagens de rejeição da hipótese nula.

Na Tabela 3.9 estão os resultados das simulações que fizemos para o poder dos testes da razão de verossimilhanças, de Wald e escore para o modelo ANCOVA estrutural normal com $k = 3$ grupos. As amostras foram geradas com $n=5$ e 30, $\sigma_e^2 = \sigma_u^2 = 1$, covariável normal padrão e $\tau_2 = 0$. O corpo da Tabela 3.9 fornece a porcentagem de rejeições da hipótese de igualdade entre os tratamentos para diversos valores de τ_1 : 0,0, 0,1, 0,5, 0,7, 1,0, 1,5, 2,0, para $n = 5$ e 30. Assim como no tamanho, o teste de Wald é o que apresenta sempre o maior número de rejeições (sendo portanto o teste mais poderoso), seguido pelo teste da razão de verossimilhanças e, por último, pelo teste escore. O fenômeno é mais evidente em amostras pequenas. As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram o comportamento dos poderes simulados dos testes apresentados na Tabela 3.9.

Tabela 3.8: Tamanhos observados dos testes para diferentes distribuições dos erros (porcentagem de rejeições em 1.000 réplicas).

Distribuição de e_{ij}	Distribuição de u_{ij}	Tamanho Nominal (%)	Teste		
			RV	WALD	ESCORE
$N(0, 2)$	t_4	1	1,2	2,1	1,0
		5	6,5	7,4	6,0
		10	11,7	12,8	10,5
$N(0, 2)$	$U(-2, 4; 2, 4)$	1	1,9	2,5	1,6
		5	5,8	7,1	5,0
		10	12,4	13,4	11,7
$N(0, 2)$	χ_1^2	1	1,0	1,2	0,6
		5	4,9	5,4	4,3
		10	10,2	10,6	9,1
t_4	$N(0, 2)$	1	1,3	1,9	1,1
		5	5,8	6,5	5,0
		10	11,2	12,0	10,6
$U(-2, 4; 2, 4)$	$N(0, 2)$	1	1,1	1,6	0,7
		5	6,4	6,7	5,5
		10	12,1	13,2	10,7
χ_1^2	$N(0, 2)$	1	1,1	1,4	0,8
		5	5,0	5,6	4,7
		10	10,5	11,6	9,5

Tabela 3.9: Poder observado dos testes com tamanho nominal igual a 5% (porcentagem de rejeições em 1.000 réplicas).

n	τ_1	Teste		
		RV	WALD	ESCORE
5	0,0	11,7	19,5	5,4
	0,1	12,7	18,8	5,4
	0,5	28,7	38,7	14,5
	0,7	31,6	40,3	17,4
	1,0	63,9	73,8	44,0
	1,5	92,1	95,3	89,9
	2,0	98,6	98,7	93,9
30	0,0	6,6	7,6	6,2
	0,1	8,4	9,2	7,4
	0,2	21,2	23,4	19,3
	0,3	35,4	37,8	33,6
	0,4	58,4	60,8	56,2
	0,5	80,2	81,5	78,6
	0,6	93,3	94,1	92,7
	0,8	99,6	99,8	99,5
	1,0	99,9	100,0	99,9

Figura 3.1 Poder observado dos testes RV, Wald e escore para $n = 5$

Figura 3.2 Poder observado dos testes RV, Wald e escore para $n = 30$

Comentários finais

Neste trabalho estudamos o modelo de ANCOVA com um fator e erro de medida na covariável sob os enfoques funcional e estrutural. Desenvolvemos estudos de simulação para avaliar os vícios e os erros quadráticos médios dos estimadores dos parâmetros envolvidos e o desempenho (tamanho e poder) de testes de hipótese sobre os parâmetros que medem o efeito dos tratamentos.

Os resultados dessas simulações mostram que para os modelos funcional e estrutural normais, o vício e o erro quadrático médio dos estimadores de máxima verossimilhança dos efeitos dos tratamentos são pequenos. Quando a suposição de normalidade dos erros dos modelos é violada, os estimadores de máxima verossimilhança dos efeitos dos tratamentos são os menos afetados quando comparados aos estimadores dos demais parâmetros da regressão. Observamos também que no modelo estrutural, a suposição de normalidade da covariável é importante para que os estimadores dos parâmetros de regressão tenham boas propriedades.

Com relação ao teste de Wald no modelo funcional normal, os estudos de simulação mostram que os tamanhos observados estão próximos dos nominais para amostras de tamanho (n) moderado para qualquer valor da razão entre as variâncias dos erros (λ). Para n pequeno, o tamanho observado cresce com o aumento de λ . A distribuição da covariável não parece afetar os tamanhos observados do teste de Wald. Já, quando

violamos a suposição de normalidade dos erros, os tamanhos observados são maiores que os nominais para tamanhos amostrais pequenos e moderados. Para n grande os tamanhos estão próximos.

Comparando os desempenhos dos três testes no modelo estrutural normal, os resultados das simulações apresentam tamanhos observados dos testes da razão de verossimilhanças (RV) e de Wald maiores que os nominais. Esse resultado se inverte para o teste escore. Em geral, já para um tamanho amostral moderado, o teste escore apresenta tamanhos observados mais próximos dos nominais. Para os três testes, a violação da suposição de normalidade da covariável ou de um dos erros não parece afetar os tamanhos observados. O teste de Wald é o mais poderoso seguido pelo teste RV e pelo teste escore.

Finalizando, mesmo quando é sabido que a covariável é medida com erro, o teste F clássico (que ignora o erro de medida) tem bom desempenho tanto em relação ao tamanho quanto ao poder.

Referências Bibliográficas

- [1] Bolfarine, H., Rodrigues, J., Cordani, L. K. (1992). *O Modelo de Regressão com Erros nas Variáveis*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística. 10º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- [2] Carrol, R. J. (1989). Covariance analysis in generalized linear measurement error models. *Statistics in Medicine*, **8**, 1075–1093.
- [3] Carrol, R. J., Gallo, P., Gleser, L. J. (1985). Comparison of least squares and error-in-variables regression, with special reference to randomized analysis of covariance. *Journal of the American Statistical Association*, **80**, 929–932.
- [4] Andrade Filho, M. C. (2001). *Contribuições ao estudo de modelos com erros nas variáveis*. São Paulo: IME–USP. Tese de Doutorado.
- [5] Chen, C. C. (1997). Rank transformations when covariables are measured with error or mismodelled. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **26**, 2967–2982.
- [6] De Gracie, J. S., Fuller, W. A. (1972). Estimation of the slope and analysis of covariance when the concomitant variable is measured with error. *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 930–937.
- [7] Fuller, W. A. (1987). *Measurement Error Models*. New York: Wiley.

- [8] Gimenez, P. C. (1997). *Inferência em modelos com erros nas variáveis através do método do escore corrigido*. São Paulo: IME-USP. Tese de Doutorado.
- [9] Lima, C. R. O. P. (1996). *Calibração absoluta com erros nas variáveis*. São Paulo: IME-USP. Tese de Doutorado.
- [10] Montgomery, D. C. (1991). *Design and Analysis of Experiments*. New York: Wiley.
- [11] Raadmakers, J. G. W. e Pieters, J. P. M. (1987). Measurement error and ANCOVA: functional and structural relationship approaches. *Psychometrika*, 4, 521–538.
- [12] Venables, W. M. e Ripley, B. D. (1999). *Modern Applied Statistics with S-Plus*. 3a. ed. New York: Springer-Verlag.