UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

**ALGUNS RESULTADOS
SOBRE MODELAGEM DO FENÔMENO
DE DEPENDÊNCIA ATRAVÉS DE CÓPULAS**

FLÁVIO HENN FERREIRA

Dissertação submetida à avaliação,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Estatística

Prof. Dr. Nikolai Kolev
Orientador

São Paulo, junho de 2003

ALGUNS RESULTADOS SOBRE MODELAGEM DO FENÔMENO DE DEPENDÊNCIA ATRAVÉS DE CÓPULAS

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
Flávio Henn Ferreira
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, julho de 2003

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Nikolai Kolev (Orientador) – IME - USP
- Prof. Dra. Beatriz Mendes – UFRJ
- Prof. Dr. Adilson Simonis – IME - USP

Abstract

The subject of this thesis is the study of dependence between random variables, focusing on application of the theory of copulas on modeling dependence.

A synthesis of the main concepts and properties of copulas will be made, in order to provide a basic set of technical knowledge which will be used along this text.

Some dependence measures will be studied, as well as its properties. In the sequence will be treated some questions which were first proposed by Nelsen *et al.* (2001) about functions of dependent random variables using for it an analysis in terms of copulas. A generalization of the results obtained in this paper will be presented.

A more specific topic in this text will be the analysis of exchangeable random variables. The concepts of copulas and generalized binary distributions will be the basis of this study. The dependence structures of these random variables will be treated with special attention. An algorithm, which can generate a specified correlation structure between these random variables, will be presented. The importance of it is that this algorithm can generate the whole spectrum of possible correlation structure, including negative values, what had not received an appropriate treatment until now.

Finally, it will be studied a specific probability distribution function of exchangeable binary random variables, applying on it the concept of superadditive dependence order, and it will be shown to be the least superadditively dependent distribution among the distribution functions of exchangeable binary random variables, what was an open problem until now.

Resumo

O objeto dessa dissertação é o estudo da dependência entre variáveis aleatórias, com um enfoque na aplicação do conceito de cópulas na modelagem do fenômeno de dependência.

Um resumo dos principais conceitos e propriedades referentes às cópulas será feito, de modo a propiciar uma base de conhecimentos técnicos que serão aplicados ao longo deste texto. Também serão estudadas algumas medidas de dependência, bem como suas propriedades. Em seguida serão tratados alguns problemas levantados por Nelsen et al. (2001) a respeito de funções de variáveis aleatórias dependentes, tendo como base a teoria de cópulas. Uma generalização dos resultados obtidos por este será apresentada.

Um tópico mais específico desse texto será o estudo de variáveis aleatórias binárias permutáveis. Os conceitos de cópulas e distribuições binárias generalizadas embasarão este estudo. As formas de dependência entre essas variáveis serão estudadas com maior profundidade. Será apresentado um algoritmo de geração dessas variáveis aleatórias com estrutura de correlação especificada, incluindo a possibilidade de valores negativos, o que até então não havia recebido um tratamento adequado.

Por fim será estudada uma distribuição conjunta de probabilidade específica dessas variáveis aleatórias, aplicando-se os conceitos de ordem superaditiva de dependência, mostrando-se ser esta a distribuição menos superaditiva dependente, o que até então constituía-se num problema em aberto.

Sumário

1. Introdução	01
2. Aspectos Teóricos	03
2.1. Teoria de Cópulas	03
2.1.1. Conceitos Preliminares	03
2.1.2. Cópulas e Variáveis Aleatórias	05
2.2. Conceitos de Dependência	08
2.2.1. Definições e Conceitos Preliminares	09
2.2.1.1. Dependência Perfeita	10
2.2.1.2. Concordância	11
2.2.2.1. Medidas de Dependência	13
2.3. Distribuições Binomiais Generalizadas	17
2.3.1. Definições e Resultados	17
3. Uma Extensão do Conceito de “Probability Integral Transform” e Aplicações para Médias Ponderadas de Cópulas	23
3.1. Funções de Distribuição de Cópulas	23
3.2. Aplicações às Médias Ponderadas de Cópulas	26
3.3. Medidas de Dependência e Cópulas	27
3.4. Aplicações das Médias Ponderadas de Cópulas às Medidas de Dependência	29
4. Geração de Variáveis Aleatórias Binárias Permutáveis	32
4.1. Resultados Preliminares	32
4.2. Geração de Sequências Binárias Permutáveis	33
4.3. Geração de Estruturas de Correlação Negativa	34
4.3.1. Modelos com Estrutura de Dependência Negativa	34
4.3.2. Algoritmo de Geração de Variáveis Aleatórias Binárias Permutáveis	39
4.4. Ordem de Dependência Superaditiva	41
Conclusão	44
Referências	45

1. Introdução

Consideremos um contrato de seguro coletivo num período $(0, T]$, sendo que usualmente T é um ano. Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ os tamanhos de N sinistros observados.

A suposição básica na teoria clássica é que as variáveis envolvidas são independentes, veja Kaas et al. (2001), ou seja:

- (i) N e $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ são variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes;
- (ii) $Y_1, Y_2, \dots$ são independentes;
- (iii) $Y_1, Y_2, \dots$ têm distribuição comum.

As condições (i) e (ii) de independência mútua entre as v.a.'s são muito convenientes porque facilitam a análise em termos matemáticos.

Na prática os sinistros (riscos) são dependentes porque eles contêm usualmente um fator aleatório comum ou estão influenciados pelo mesmo ambiente econômico ou geográfico. Na presença de dependência entre os sinistros (que são v.a.'s), a lei dos grandes números e o teorema central do limite não são válidos e o risco médio fica cada vez mais imprevisível. Muitos autores têm estudado os modelos com diferentes tipos de dependência entre os sinistros. Por exemplo, Gerber (1982) estudou o problema da ruína quando os sinistros consecutivos formam um modelo autoregressivo; Goovaerts e Dhaene (1996) usam a aproximação Poisson composta para um portfólio de riscos dependentes; Ambagastipitiya (1998, 1999) considerou a distribuição da soma acumulada quando existe correlação entre o número de sinistros e diferentes classes agrupadas em clusters independentes; Asmussen (1989) usou o modelo modulado Markoviano que exhibe um tipo especial de dependência.

O estudo sobre o tipo e grau de dependência entre os sinistros é um tópico central na área atuarial recentemente. Veja ref. Dhaene et al. (2000), Goovaerts et al. (2000), Embrechts et al. (2002), Frey et al. (2001), Kaas et al. (2001), Simon et al. (2000), Vyncke et al. (2001).

Dhaene et al. (2002a) apresentam resultados novos para aproximações de somas aleatórias quando as distribuições marginais são conhecidas, mas a distribuição conjunta (estrutura estocástica de dependência) é desconhecida ou muito complicada. Eles mostram que a soma de elementos do vetor aleatório $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ tem limite superior quando a distribuição conjunta do vetor $\mathbf{Y}$ é comonotônica. Isso significa que todos os pares das possíveis realizações do vetor $\mathbf{Y}$ estão ordenados para qualquer par de elementos. No artigo seguinte, Dhaene et al. (2002b) apresentam diferentes aplicações do conceito de comonotonicidade na área financeira e atuarial.

O estudo dos prêmios do tipo "stop-loss" para modelos de dependência toma atenção de muitos pesquisadores recentemente, veja Dhaene e Goovaerts (1996), Hu e Wu (1999), Alberts (1999), Wang e Dhaene (1998), Dhaene e Denuit (1999), Kaas et al. (2001).

O objetivo básico da dissertação é estudar estruturas de dependência de vetores aleatórios substituindo a suposição de independência (ii) por alguma forma de dependência entre os elementos da sequência $(Y_1, \dots, Y_n)$ de v.a.'s, que neste caso serão permutáveis. Dessa maneira, esta dissertação tem como objetivo estudar algumas alternativas de modelar os fenômenos de dependência através de cópulas à luz do que foi exposto acima.

Na seção 2 apresentamos os conceitos básicos de cópulas (ou como utilizado em alguns textos brasileiros, acoplamento), os principais conceitos de dependência e finalmente os principais conceitos e resultados da teoria das distribuições binomiais generalizadas. Nas seções 3 e 4 apresentamos os resultados principais desenvolvidos a partir dos conceitos teóricos feitos na seção 2. Em especial, apresentamos na seção 3 extensões da “Probability Integral Transform” e algumas aplicações desse conceito para médias ponderadas de cópulas; e na seção 4 desenvolvemos um algoritmo para geração de variáveis aleatórias permutáveis com estrutura de correlação especificada. No final fazemos uma conclusão a respeito dos resultados obtidos, seguido pelas referências bibliográficas.

2. Aspectos Teóricos

Neste capítulo será apresentado um arcabouço teórico que embasará todos os desenvolvimentos futuros. Seguindo Embrechts et al. (2002) serão apresentados as principais definições e os mais relevantes teoremas, no sentido de aplicação durante essa dissertação, de três tópicos que são os seguintes: a teoria de cópulas, os principais conceitos de dependência e finalmente a teoria das distribuições binomiais generalizadas.

2.1. Teoria de Cópulas

Nesta seção trataremos das principais definições e dos principais resultados a respeito da teoria de cópulas, dando uma atenção especial a algumas cópulas especiais, que são os chamados limites de Fréchet-Hoeffding, e à efetiva aplicação de cópulas ao estudo de variáveis aleatórias. Esta seção serve como base para uma infinidade de aplicações dos conceitos aqui apresentados que serão feitas nos capítulos seguintes, sendo dessa forma relevante a apresentação dos conceitos aqui mostrados.

2.1.1. Conceitos Preliminares

A dependência entre as variáveis aleatórias de valores reais $Y_1, \dots, Y_n$ é completamente descrita pela função de distribuição conjunta

$$F(y_1, \dots, y_n) = P[Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n].$$

O coeficiente de correlação linear $\text{Corr}(Y_i, Y_j)$, $i \neq j$, é uma medida (paramétrica) de dependência linear entre as variáveis aleatórias. A correlação linear tem uma certa deficiência que é ser não-invariante sobre transformações não lineares estritamente crescentes $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, isto é

$$\text{Corr}(T(Y_i), T(Y_j)) \neq \text{Corr}[Y_i, Y_j].$$

Outras falhas da correlação linear discutidas por Embrechts et al. (2002) mostram que correlação pode facilmente ser mal interpretada.

Existem três importantes medidas da dependência conhecidas como o coeficiente de Spearman, o coeficiente de Gini e o coeficiente de Kendall que são consideradas como alternativas não-paramétricas da correlação linear. Estas medidas são baseadas no conceito de cópulas.

Definição 2.1. Uma cópula é definida como a função de distribuição conjunta

$$C(u_1, \dots, u_n) = P[U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n], \quad 0 \leq u_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sendo U_i v.a.'s uniformes $U(0,1)$.

Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ v.a.'s contínuas com distribuições marginais $F_{Y_1}, \dots, F_{Y_n}$. A partir da Definição 2.1 temos que

$$F(y_1, \dots, y_n) = C(F_{Y_1}(y_1), \dots, F_{Y_n}(y_n)). \quad (2.1)$$

O teorema de Sklar, veja Joe (1997), dá a existência e unicidade da função $C(\cdot)$ em (2.1) se as marginais $F_{Y_1}, \dots, F_{Y_n}$ são contínuas. Se algumas das marginais $F_{Y_1}, \dots, F_{Y_n}$ são discretas, a relação (2.1) é válida, mas $C(\cdot)$ não é mais única. As transformações não lineares estritamente crescentes alteram a distribuição conjunta $F(\cdot)$ e as suas marginais, mas a forma analítica da cópula $C(\cdot)$ fica a mesma. Esta é uma característica importante e desejável.

Exemplo 2.1. Seja Φ a função distribuição normal univariada e seja Φ_R^n a função distribuição normal padrão multivariada com matriz de correlações R . Então

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

é a cópula normal n -variada.

Os Limites de Fréchet-Hoeffding para Funções Distribuição Conjuntas são definidos através das funções M^n , Π^n , W^n definidas em $[0, 1]^n$ como a seguir:

$$\begin{aligned} M^n(\mathbf{u}) &= \min(u_1, \dots, u_n), \\ \Pi^n(\mathbf{u}) &= u_1 \dots u_n, \\ W^n(\mathbf{u}) &= \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0). \end{aligned}$$

As funções M^n e Π^n são cópulas n -dimensionais para todo $n \geq 2$, ao passo que a função W^n não é uma cópula para todo $n \geq 3$, como é mostrado no exemplo seguinte.

Exemplo 2.2. Considere o n -cubo $[1/2, 1]^n \subset [0, 1]^n$. Sejam $(a_1, \dots, a_n) = (1/2, \dots, 1/2)$ e $(b_1, \dots, b_n) = (1, \dots, 1)$. Temos que para $x_{j1} = a_j$ e $x_{j2} = b_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} W^n(x_{i_1 1}, \dots, x_{i_n 1}) &= \max(1 + \dots + 1 - n + 1; 0) \\ &\quad - n \max(1/2 + 1 + \dots + 1 - n + 1; 0) \\ &\quad + \binom{n}{2} \max(1/2 + 1/2 + 1 + \dots + 1 - n + 1) \\ &\quad + \max(1/2 + \dots + 1/2 - n + 1) \\ &= 1 - n/2 + 0 + \dots + 0. \end{aligned}$$

Portanto W^n não é uma cópula para $n \geq 3$, uma vez que a desigualdade triangular para funções distribuição multidimensionais não está satisfeita.

O próximo teorema é denominado desigualdade de Fréchet – Hoeffding.

Teorema 2.1. Se C é uma n -cópula qualquer, então para todo $\mathbf{u}$ em $[0, 1]^n$,

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u}).$$

Para maiores detalhes, incluindo interpretações geométricas, ver Mikusinski, Sherwood e Taylor (1992). Embora o limite inferior de Fréchet-Hoeffding W^n não seja sempre uma cópula, ele é o melhor limite inferior possível, da seguinte maneira.

Teorema 2.2. Para qualquer $n \geq 3$ e qualquer $\mathbf{u}$ em $[0, 1]^n$, existe uma cópula C (que depende de $\mathbf{u}$) tal que

$$C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u}).$$

Prova: ver Nelsen (1999) p.42.

Nós denotamos por $\bar{C}$ a função de sobrevivência conjunta para n variáveis aleatórias com função distribuição conjunta C , isto é, se $(U_1, \dots, U_n)^T$ tem função distribuição conjunta C , então $\bar{C}(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 > u_1, \dots, U_n > u_n)$.

Definição 2.2. Se C_1 e C_2 são cópulas, C_1 é menor que C_2 (denotado por $C_1 \prec C_2$) se

$$C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u}) \text{ e } \bar{C}_1(\mathbf{u}) \leq \bar{C}_2(\mathbf{u}),$$

para todo $\mathbf{u}$ em $[0, 1]^n$.

Note que no caso bivariado

$$\begin{aligned} \bar{C}_1(u_1, u_2) \leq \bar{C}_2(u_1, u_2) &\Leftrightarrow 1 - u_1 - u_2 + \bar{C}_1(u_1, u_2) \leq 1 - u_1 - u_2 + \bar{C}_2(u_1, u_2) \\ &\Leftrightarrow C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, u_2). \end{aligned}$$

O limite inferior de Fréchet-Hoeffding W^2 é menor que qualquer cópula bidimensional, e qualquer n -cópula é menor que o limite superior de Fréchet-Hoeffding M^n .

2.1.2. Cópulas e Variáveis Aleatórias

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias com funções distribuição contínuas $F_1, \dots, F_n$ respectivamente, e função distribuição conjunta H . Então $(X_1, \dots, X_n)^T$ tem uma única cópula C , onde C é dada por (2.1). A representação padrão em termos de cópula da distribuição do vetor aleatório $(X_1, \dots, X_n)^T$ é então:

$$H(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

As transformações $X_i \mapsto F_i (X_i)$ usadas na representação acima formam uma ferramenta padrão na metodologia de simulação, e são denominadas, em inglês, por “probability integral transform”.

Uma vez que $X_1, \dots, X_n$ são independentes se e somente se $H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$ para todos $x_1, \dots, x_n$ em $\overline{\mathfrak{R}}$, o próximo resultado segue da expressão (2.1) e do teorema de Sklar, veja Joe (1997).

Teorema 2.3. Seja $(X_1, \dots, X_n)^T$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula C , então $X_1, \dots, X_n$ são independentes se e somente se $C = \Pi^n$.

Um propriedade conveniente das cópulas é que para transformações estritamente monótonas das variáveis aleatórias, as cópulas das variáveis transformadas são invariantes, ou mudam de maneira simples. Note que se a função distribuição da variável aleatória X é contínua, e se α é uma função estritamente monótona cujo domínio contém a imagem de X , então a função distribuição da variável aleatória $\alpha(X)$ é também contínua.

Teorema 2.4. Seja $(X_1, \dots, X_n)^T$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula C . Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são estritamente crescentes em $\text{Im}(X_1), \dots, \text{Im}(X_n)$, onde $\text{Im}(\cdot)$ representa a imagem de $(\cdot)$, respectivamente, então $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ também tem cópula C .

Prova: Sejam $F_1, \dots, F_n$ funções distribuição de $X_1, \dots, X_n$ respectivamente e sejam $G_1, \dots, G_n$ as funções distribuição de $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$ respectivamente. Seja $(X_1, \dots, X_n)^T$ um vetor aleatório com cópula C e seja C_α a cópula de $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$. Uma vez que α_k é estritamente crescente para cada k ,

$$G_k(x) = P(\alpha_k(X_k) \leq x) = P(X_k \leq \alpha_k^{-1}(x)) = F_k(\alpha_k^{-1}(x))$$

para todo x em $\overline{\mathfrak{R}}$, portanto

$$\begin{aligned} C_\alpha(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= P(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n); \\ &= P(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)); \\ &= C(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))); \\ &= C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

Uma vez que $X_1, \dots, X_n$ são contínuas, $\text{Im}(G_1) = \dots = \text{Im}(G_n) = [0, 1]$. Segue portanto que $C_\alpha = C$ em $[0, 1]^n$.

Da expressão (2.1) temos que a função cópula C “separa” uma função distribuição n -dimensional a partir de suas funções marginais. O próximo teorema mostrará que existe também uma função $\hat{C}$ que separa uma função de sobrevivência n -dimensional a partir de suas funções de sobrevivência marginais univariadas. Além disso, pode-se mostrar que essa função é uma cópula e esta cópula de sobrevivência pode ser expressa facilmente em termos de C e de suas marginais k -dimensionais.

Teorema 2.5. Seja $(X_1, \dots, X_n)^T$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula C . Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são estritamente crescentes em $\text{Im}(X_1), \dots, \text{Im}(X_n)$, respectivamente, e seja $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ um vetor de variáveis aleatórias transformadas com cópula C' . Além disso seja α_k estritamente decrescente para algum k . Sem perda de generalidade, seja $k = 1$. Então

$$C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_1, \dots, u_n) = C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_2, \dots, u_n) - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(1-u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Prova: Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias com funções distribuição $F_1, \dots, F_n$ respectivamente e sejam $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$ variáveis aleatórias com funções distribuição $G_1, \dots, G_n$ respectivamente. Então

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= P(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n); \\ &= P(X_1 > \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n); \\ &= P(\alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) - \\ &\quad P(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n); \\ &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) - \\ &\quad C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)); \\ &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) - \\ &\quad C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(1-G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

De onde a conclusão segue diretamente.

Usando os dois teoremas anteriores recursivamente fica claro que a cópula $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$ pode ser expressa em função da cópula $C_{X_1, \dots, X_n}$ e de suas marginais de ordem mais baixa. Isso é exemplificado no exemplo abaixo.

Exemplo 2.3. Considere o caso bivariado. Sejam α_1 estritamente decrescente e α_2 estritamente crescente. Então

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1, \alpha_2(X_2)}(1-u_1, u_2) \\ &= u_2 - C_{X_1, X_2}(1-u_1, u_2). \end{aligned}$$

Sejam α_1 e α_2 estritamente decrescentes. Então

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1, \alpha_2(X_2)}(1-u_1, u_2); \\ &= u_2 - (1-u_1 - C_{X_1, X_2}(1-u_1, 1-u_2)); \\ &= u_1 + u_2 - 1 + C_{X_1, X_2}(1-u_1, 1-u_2). \end{aligned}$$

Aqui $C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}$ é a cópula de sobrevivência, $\hat{C}$, de $(X_1, X_2)^T$, isto é,

$$\bar{H}(x_1, x_2) = P[X_1 > x_1, X_2 > x_2] = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)).$$

Note também que a função de sobrevivência conjunta de n variáveis aleatórias $U(0, 1)$ cuja função de distribuição conjunta é a cópula C é $\bar{C}(u_1, u_2) = \hat{C}(1-u_1, 1-u_2)$. As derivadas parciais mistas de ordem k de uma cópula C , $\delta^k C(\mathbf{u}) / \delta u_1 \dots \delta u_k$, existem para quase todo $\mathbf{u}$ em $[0, 1]^n$. Para tal $\mathbf{u}$, $0 \leq \delta^k C(\mathbf{u}) / \delta u_1 \dots \delta u_k \leq 1$. Para maiores detalhes, veja Nelsen (1999), p. 11. Considerando isto, seja

$$C(u_1, \dots, u_n) = A_C(u_1, \dots, u_n) + S_C(u_1, \dots, u_n),$$

$$A_C(u_1, \dots, u_n) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} C(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n,$$

onde

$$S_C(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n) - A_C(u_1, \dots, u_n).$$

Ao contrário das distribuições multivariadas em geral, as marginais de uma cópula são contínuas, portanto uma cópula não tem pontos individuais $\mathbf{u} = (a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_n)$ em $[0, 1]^n$, com $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, para os quais

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) > 0, \text{ com } x_{j1} = a_j \text{ e } x_{j2} = b_j, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Se $C = A_C$ em $[0, 1]^n$, então C é dita absolutamente contínua. Neste caso C tem densidade

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n). \text{ Se } C = S_C \text{ em } [0, 1]^n, \text{ então } C \text{ é dita singular, e}$$

$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n) = 0$ em quase todo ponto em $[0, 1]^n$. O suporte de uma cópula é o complemento da união de todos os subconjuntos abertos $A = (a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_n)$ de $[0, 1]^n$, com $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, para os quais

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = 0, \text{ com } x_{j1} = a_j \text{ e } x_{j2} = b_j, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Quando C é singular seu suporte tem medida de Lebesgue nula e vice-versa.

2.2. Conceitos de dependência

Nesta seção tratamos dos conceitos de dependência que serão relevantes para o desenvolvimento desta dissertação. Uma discussão a respeito do que é intuitivamente a dependência e sua definição formal serão apresentadas primeiramente.

Em seguida serão tratadas duas formas específicas de dependência, a saber a concordância e a dependência perfeita, as quais são fortemente aplicadas no capítulo 3. Finalmente serão apresentadas algumas medidas de dependência e suas características, que serão também aplicadas no capítulo seguinte.

2.2.1. Definições e Conceitos Preliminares

Para melhor estruturar o conceito de dependência iremos primeiramente dar definições a respeito de um outro conceito, o de independência, para podermos contrastá-los e a partir daí ter mais claro o que significa dependência.

Seja $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com distribuição conjunta F e distribuições marginais $F_1, F_2, \dots, F_n$. Dizemos que os componentes de X são mutuamente independentes se e somente se para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$F(x) = F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n).$$

Em termos coloquiais a independência entre duas variáveis aleatórias X e Y é a propriedade de a variável X não ter o seu comportamento associado ao comportamento da variável Y , e vice-versa.

Em termos probabilísticos a dependência está associada ao fato de a probabilidade condicional de a variável X ser menor que um valor b dado que a variável Y é menor que um valor a , representado por $P(X < b / Y < a)$, ser diferente da probabilidade de a variável X ser menor que o valor b , ou seja, o conhecimento a respeito da variável Y tem relevância no comportamento probabilístico da variável X .

A dependência entre duas variáveis aleatórias é totalmente definida pela função de distribuição conjunta dessas variáveis, ou seja, todo o conhecimento a respeito das características da dependência entre as variáveis está encerrado nesta função. De uma maneira mais geral, todo o conhecimento a respeito das variáveis X e Y e de suas inter-relações está contido na função distribuição conjunta.

No entanto a distribuição conjunta não informa especificamente nem como é essa dependência, nem a mensura. Para isso são desenvolvidas as medidas de dependência, que são instrumentos que quantificam essa associação. Essa quantificação tem como base um intervalo entre -1 e $+1$, que representam respectivamente a dependência perfeita negativa e a dependência perfeita positiva. Dessa maneira qualquer associação entre as variáveis pode ser expressa como algo entre a dependência perfeita negativa e a dependência perfeita positiva. Como, de maneira análoga ao comportamento das funções, a associação entre variáveis tem uma infinidade de formas de se manifestar, por exemplo dependência linear, dependência caudal, entre outras, a mensurabilidade dessa dependência também tem um caráter bastante específico, ou seja, cada medida de dependência se destina a captar determinadas facetas da dependência, privilegiando as mesmas em detrimento de outras que a associação em particular apresenta. Isso é um fator importante na hora de se medir e, principalmente, avaliar o que a medida de dependência informa, no senso que cada medida de dependência é apropriada a mensurar um aspecto da dependência, e que se aplicada para mensurar um aspecto diverso pode levar a conclusões e interpretações errôneas.

Apesar da multiplicidade de medidas de dependência, todas elas são norteadas por um conjunto de propriedades desejáveis para tais medidas.

Seja $\delta(.,.)$ uma medida de dependência, essas propriedades são as seguintes:

- 1) Simetria ($\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$);
- 2) Normalização ($-1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$);
- 3) $\delta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X, Y$ comonotônicos (*);
 $\delta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow X, Y$ contramonotônicos (*);
- 4) Para $T: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ estritamente monótona no intervalo de variação de X :
 $\delta(T(X),Y) = \delta(X,Y)$, T crescente;
 $\delta(T(X),Y) = -\delta(X,Y)$, T decrescente;
- 5) $\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ independentes;

* X e Y são ditos comonotônicos se são positivamente dependentes perfeitamente ($X = Y$ quase certamente) e contramonotônicos se são negativamente dependentes perfeitamente ($X = -Y$ quase certamente).

Observação: As propriedades 4) e 5) são mutuamente excludentes, de modo que nenhuma medida de dependência tem essas propriedades juntas.

2.2.1.1. Dependência Perfeita

Para toda n -cópula C nós sabemos pela desigualdade de Fréchet-Hoeffding que:

$$W \leq C \leq M.$$

Além disso, para $n = 2$ os limites superior e inferior são cópulas e W e M são as funções distribuições conjuntas bivariadas dos vetores aleatórios $(U, 1-U)^T$ e $(U, U)^T$ respectivamente, onde U é uma variável aleatória com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Neste caso W e M descrevem as dependências perfeitas negativa e positiva respectivamente.

Teorema 2.6. Seja $(X, Y)^T$ com cópula W ou M . Então existem duas funções monótonas $\alpha, \beta: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e uma variável aleatória Z tal que

$$(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z)),$$

onde $=_d$ indica igualdade em distribuição e com α crescente e β decrescente no caso de $(X, Y)^T$ ter cópula W e ambos α e β crescentes no caso de $(X, Y)^T$ ter cópula M . A volta do teorema também é válida.

Prova: ver Embrechts et al. (2002).

É importante notar que se qualquer uma das distribuições marginais, seja de X ou de Y , tiver descontinuidades a cópula de X e Y não é única, sendo M ou W cópulas possíveis. No caso de as marginais serem contínuas uma versão mais forte do teorema pode ser apresentada:

BIBLIOTECA DO IME - USP

$C = W$ se e somente se $Y = T(X)$ quase certamente, $T = G^{-1} \circ (1-F)$ decrescente,
 $C = M$ se e somente se $Y = T(X)$ quase certamente, $T = G^{-1} \circ F$ crescente.

onde o símbolo $\circ$ indica função composta.

2.2.1.2. Concordância

Sejam $(x, y)^T$ e $(x', y')^T$ duas observações de um vetor $(X, Y)^T$ de variáveis aleatórias contínuas. Então $(x, y)^T$ e $(x', y')^T$ são ditos concordantes se $(x-x')(y-y') > 0$ e discordantes se $(x-x')(y-y') < 0$.

Teorema 2.7. Sejam $(X, Y)^T$ e $(X', Y')^T$ vetores independentes de variáveis aleatórias contínuas, com funções distribuição conjuntas H e H' , respectivamente, com marginais comuns F (de X e X') e G (de Y e Y'). Sejam C e C' as cópulas de $(X, Y)^T$ e $(X', Y')^T$ respectivamente de modo que $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ e $H'(x, y) = C'(F(x), G(y))$. Seja Q a diferença entre a probabilidade de concordância e a de discordância de $(X, Y)^T$ e $(X', Y')^T$, isto é, seja

$$Q = P[(X-X')(Y-Y') > 0] - P[(X-X')(Y-Y') < 0].$$

Então

$$Q = Q(C, C') = 4 \iint_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Prova:

Uma vez que as variáveis aleatórias são todas contínuas

$$P[(X-X')(Y-Y') < 0] = 1 - P[(X-X')(Y-Y') > 0],$$

e portanto $Q = 2P[(X-X')(Y-Y') > 0] - 1$. Mas

$$P[(X-X')(Y-Y') > 0] = P[X > X', Y > Y'] + P[X < X', Y < Y'],$$

e essas probabilidades podem ser obtidas integrando-se sobre a distribuição de um dos vetores $(X, Y)^T$ ou $(X', Y')^T$. Então

$$\begin{aligned} P[X > X', Y > Y'] &= P[X' < X, Y' < Y]; \\ &= \iint_{\mathfrak{R}^2} P[X' < x, Y' < y] dC(F(x), G(y)); \\ &= \iint_{\mathfrak{R}^2} C'(F(x), G(y)) dC(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Utilizando as transformações $u = F(x)$ e $v = G(y)$ resulta

$$P[X > X', Y > Y'] = \iint_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v).$$

De modo similar

$$\begin{aligned} P[X < X', Y < Y'] &= \iint_{\mathfrak{R}^2} P[X' > x, Y' > y] dC(F(x), G(y)); \\ &= \iint_{\mathfrak{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C'(F(x), G(y))] dC(F(x), G(y)); \\ &= \iint_{[0,1]^2} [1 - u - v + C'(u, v)] dC(u, v). \end{aligned}$$

Mas uma vez que C é a função distribuição conjunta de um vetor $(U, V)^T$ de variáveis aleatórias $U(0, 1)$, $E[U] = E[V] = 1/2$ e portanto

$$P[X < X', Y < Y'] = 1 - 1/2 - 1/2 + \iint_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v) = \iint_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v).$$

Assim,

$$P[(X-X')(Y-Y') > 0] = 2 \iint_{[0,1]^2} C'(u, v) dC(u, v),$$

e a conclusão segue.

Corolário 2.1. Sejam C , C' e Q como definidos no teorema anterior, então

- 1) Q é simétrica em seus argumentos: $Q(C, C') = Q(C', C)$.
- 2) Q é não-decrescente em cada argumento: se $C \prec C''$, então $Q(C, C') \leq Q(C'', C')$.
- 3) As cópulas podem ser substituídas pelas respectivas cópulas de sobrevivência em Q , isto é, $Q(C, C') = Q(\hat{C}, \hat{C}')$.

Definição 2.4. Uma medida real κ de dependência entre duas variáveis aleatórias contínuas X e Y com cópula C é uma medida de concordância se ela satisfaz as seguintes propriedades:

1. κ está definida para todo par X, Y de variáveis aleatórias contínuas;
2. $-1 \leq \kappa_{X, Y} \leq 1$, $\kappa_{X, X} = 1$ e $\kappa_{X, -X} = -1$;
3. $\kappa_{X, Y} = \kappa_{Y, X}$;
4. Se X e Y são independentes, então $\kappa_{X, Y} = \kappa_{\Pi} = 0$;
5. $\kappa_{-X, Y} = \kappa_{X, -Y} = -\kappa_{X, Y}$;
6. Se C e C' são cópulas tais que $C \prec C'$, então $\kappa_C \leq \kappa_{C'}$;
7. Se $\{(X_n, Y_n)\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias contínuas com cópulas C_n , e se $\{C_n\}$ converge ponto a ponto para C , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Seja κ uma medida de concordância para variáveis aleatórias contínuas X e Y . Como consequência da definição acima, se Y é quase certamente uma função crescente de X , então $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$, e se Y é quase certamente uma função decrescente de X , então $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$. Além disso, se α e β são quase certamente funções crescentes em $\text{Im}(X)$ e $\text{Im}(Y)$ respectivamente, onde $\text{Im}(\cdot)$ representa a imagem de $(\cdot)$, então $\kappa_{\alpha(X), \beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.

2.2.2.1. Medidas de Dependência

As principais medidas de dependência e suas características são apresentadas a seguir:

1) Coeficiente de Correlação Linear (Pearson)

Definição 2.5. Seja $(X, Y)^T$ um vetor de variáveis aleatórias com variâncias positivas finitas. O coeficiente de correlação linear de $(X, Y)^T$ é definido como:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}},$$

onde $\text{Cov}[X, Y]$ é a covariância entre X e Y e $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$ são as variâncias de X e Y respectivamente.

As principais propriedades do coeficiente de correlação linear são:

- a) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;
- b) X, Y independentes $\Rightarrow \rho(X, Y) = 0$;
- c) $\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sign}(\alpha\gamma)\rho(X, Y)$, $\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \beta, \delta \in \mathbb{R}$,
onde $\text{sign}(\cdot)$ é a função sinal de $(\cdot)$.
- d) o coeficiente de correlação linear é uma medida da dependência linear entre as variáveis, sendo invariante sob transformações lineares estritamente crescentes.

Devido à grande popularidade do uso do coeficiente de correlação, alguns comentários sobre essa medida de dependência serão feitos, com o objetivo de mostrar os pontos positivos e negativos do uso desse coeficiente, no sentido de justificar o uso de outras medidas de dependência que serão apresentadas ao longo do texto, que procuram solucionar alguns dos problemas apresentados pelo coeficiente de correlação linear, bem como para caracterizar as situações onde o uso do coeficiente de correlação linear é apropriado e aquelas onde o seu uso não é adequado. Assim, os pontos positivos são:

- facilidade de cálculo, dependendo, no caso de distribuições bivariadas, apenas dos momentos de ordem 2 dessa distribuição.
- correlações são fáceis de se manipular sob transformações lineares.
- o coeficiente de correlação é uma medida de dependência natural nas distribuições normais multivariadas, e num contexto mais amplo nas famílias de distribuições esférica e elíptica.

Os pontos negativos são:

- as variâncias das variáveis aleatórias subjacentes devem ser finitas, de modo ao coeficiente de correlação estar definido, o que restringe bastante o seu uso, uma vez que não contempla as distribuições de caudas pesadas.
- o coeficiente de correlação não é invariante sob transformações estritamente crescentes não-lineares, restringindo-se a invariância apenas às transformações lineares estritamente crescentes.
- coeficiente de correlação igual a zero não implica independência, a não ser no caso de distribuições normais multivariadas.

2) Coeficientes de Kendall τ , de Spearman ρ e de Gini γ

Nesta subseção nós discutimos três importantes medidas de dependência (concordância) conhecidas como Kendall τ , Spearman ρ e Gini γ . As duas primeiras são talvez as melhores alternativas em relação ao coeficiente de correlação linear como medidas de dependência para distribuições não-elípticas, para as quais o coeficiente de correlação linear não é apropriado e algumas vezes é enganoso (ver os comentários na seção referente ao coeficiente de correlação linear). O coeficiente Gini γ é uma medida de dependência que tem recebido crescente atenção recentemente, sendo muito aplicada no contexto de estudos econômicos, como por exemplo o grau de desigualdade de renda em uma sociedade.

Definição 2.6. A medida Kendall τ para um vetor $(X, Y)^T$ é definida como

$$\tau(X, Y) = P[(X-X')(Y-Y') > 0] - P[(X-X')(Y-Y') < 0],$$

onde $(X', Y')^T$ é uma cópia independente de $(X, Y)^T$.

Portanto, o Kendall τ para $(X, Y)^T$ é simplesmente a medida Q definida na seção anterior, ou seja, é a diferença entre as probabilidades de concordância e discordância.

Teorema 2.8. Seja $(X, Y)^T$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula C . Então o Kendall τ para $(X, Y)^T$ é dado por

$$\tau(X, Y) = Q(C, C) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Note que a integral acima é o valor esperado da variável aleatória $C(U, V)$, onde $U, V \sim U(0, 1)$ com função distribuição conjunta C , isto é, $\tau(X, Y) = E[C(U, V)] - 1$.

Definição 2.7. A medida Spearman ρ para o vetor aleatório $(X, Y)^T$ é definido como

$$\rho_s(X, Y) = 3 \{ P[(X-X')(Y-Y'') > 0] - P[(X-X')(Y-Y'') < 0] \},$$

onde $(X, Y)^T$, $(X', Y')^T$ e $(X'', Y'')^T$ são cópias independentes.

É importante notar que X' e Y'' são independentes.

Teorema 2.9. Seja $(X, Y)^T$ um vetor aleatório de variáveis aleatórias contínuas com cópula C . Então o coeficiente Spearman ρ para $(X, Y)^T$ é dado por

$$\rho_s(X, Y) = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 3.$$

Portanto, se $X \sim F$ e $Y \sim G$ e sendo $U = F(X)$ e $V = G(Y)$, então

$$\begin{aligned} \rho_s(X, Y) &= 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 E[UV] - 3; \\ &= \frac{E[UV] - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \frac{\text{Cov}[U, V]}{\sqrt{\text{Var}[U]}\sqrt{\text{Var}[V]}; \\ &= \rho(F(X), G(Y)), \end{aligned}$$

onde ρ é o coeficiente de correlação linear.

Definição 2.8. A medida Gini γ para o vetor aleatório $(X, Y)^T$ é definido como

$$\gamma_G = 2E[|U + V - 1| - |U - V|],$$

onde $U = F(X)$, $V = G(Y)$, com F e G denotando as funções distribuição de X e Y respectivamente.

Teorema 2.10. Seja $(X, Y)^T$ um vetor aleatório de variáveis aleatórias contínuas com cópula C . Então o coeficiente Gini γ para $(X, Y)^T$ é dado por

$$\begin{aligned} \gamma_G &= 2 \int \int_{[0,1]^2} (|u + v - 1| - |u - v|) dC(u, v); \\ &= Q(C, M) + Q(C, W). \end{aligned}$$

Prova:

A primeira igualdade é imediata a partir da definição de cópulas e do fato que U e V são variáveis distribuídas uniformemente em $[0, 1]$.

A segunda igualdade vem de que:

$$Q(C, M) = 4 \iint_{[0,1]^2} M(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Mas $M(u, v)$ pode ser escrito como

$$M(u, v) = (\frac{1}{2})[u+v-|u-v|].$$

Assim temos que:

$$Q(C, M) = 2 \iint_{[0,1]^2} [u + v - |u - v|] dC(u, v) - 1.$$

$$\text{Mas } \iint_{[0,1]^2} u dC(u, v) = \iint_{[0,1]^2} v dC(u, v) = \frac{1}{2}.$$

Portanto temos:

$$Q(C, M) = 1 - 2 \iint_{[0,1]^2} |u - v| dC(u, v).$$

De maneira análoga, fazendo uso da relação $W(u, v) = (\frac{1}{2})[u + v - 1 + |u + v - 1|]$ chegamos a

$$Q(C, W) = 2 \iint_{[0,1]^2} |u - v - 1| dC(u, v) - 1.$$

De onde o resultado segue.

No próximo teorema veremos que os coeficientes Kendall τ , Spearman ρ e Gini γ são medidas de concordância.

Teorema 2.11. Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas com cópula C , então os coeficientes Kendall τ , Spearman ρ e Gini γ satisfazem as propriedades da definição 2.4 para medidas de concordância.

Prova: ver Nelsen (1999), p. 137.

Além das propriedades listadas na definição 2.4 para medidas de concordância, é importante notar que as medidas Kendall τ e Spearman ρ satisfazem algumas outras propriedades bastante úteis. Abaixo enunciamos algumas delas. Seja $(X, Y)^T$ um vetor aleatório com cópula C , então

$$C = M \Rightarrow \tau_C = \rho_C = 1,$$

$$C = W \Rightarrow \tau_C = \rho_C = -1.$$

O próximo teorema estabelece, com algumas restrições nas hipóteses, a volta das propriedades acima.

Teorema 2.12. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula C , e seja κ a medida Kendall τ ou Spearman ρ . Então

1. $\kappa(X, Y) = 1 \Leftrightarrow C = M$.
2. $\kappa(X, Y) = -1 \Leftrightarrow C = W$.

Prova: ver Embrechts, McNeil e Straumann (1999).

Das definições de Kendall τ e Spearman ρ segue que ambos são funções crescentes do valor da cópula considerada. Além disso, para variáveis aleatórias contínuas todos os valores possíveis (o intervalo $[-1, 1]$) das medidas Kendall τ e Spearman ρ podem ser obtidos através de uma mudança adequada da cópula em questão.

2.3. Distribuições Binomiais Generalizadas

O que será feito nesta seção é uma apresentação da teoria de distribuições binomiais generalizadas, sendo essencialmente mostrados as principais definições e resultados a respeito desse tópico. A importância dessa seção é no sentido de propiciar um embasamento teórico a respeito dessas distribuições, uma vez que elas serão extensamente aplicadas no capítulo 4, sendo a base de todo o desenvolvimento feito para a geração de variáveis permutáveis com dependência negativa.

2.3.1. Definições e Resultados

As premissas básicas que caracterizam uma distribuição binomial são:

- a) sequência de n experimentos.
- b) cada experimento tem apenas dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso.
- c) a probabilidade de sucesso (fracasso) é a mesma para todos os experimentos.
- d) os experimentos são independentes.

Como nem sempre num problema é possível garantir a validade de todas as quatro premissas acima, surgiu a abordagem das distribuições binomiais generalizadas, onde basicamente se substitui a premissa de independência pela premissa de permutabilidade.

Definição 2.9. As variáveis $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ são ditas permutáveis se a distribuição de probabilidades do vetor $(Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_n})$ é idêntica à do vetor $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ para todas as permutações $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ dos subscritos $(1, 2, \dots, n)$.

A premissa de permutabilidade generaliza o uso de distribuições binomiais, uma vez que permite analisar uma gama maior de casos, sem deixar de contemplar os dados independentes identicamente distribuídos, já que uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com mesma distribuição é permutável. Em particular permite considerar muitos casos onde a variabilidade dos dados é maior do que a distribuição binomial pode explicar, casos estes freqüentemente encontrados na vida prática. Uma caracterização mais formal das distribuições binomiais generalizadas e de suas propriedades é dada a seguir:

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma seqüência de variáveis aleatórias de tipo Bernoulli. Definimos:

$$\pi_n = P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1],$$

com $\pi_0 = 1$, onde $P[A]$ é a probabilidade do evento A .

A seqüência $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, define unicamente a distribuição de probabilidade do vetor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. No entanto nem todas as seqüências $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, definem uma distribuição de probabilidade. Nós mostraremos que para isso ser verdadeiro $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, deve satisfazer a condição que as diferenças de todas as ordens de $\{\pi_k\}$ sejam não-negativas.

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma seqüência de variáveis aleatórias de tipo Bernoulli. A seqüência é dita permutável se para um número inteiro positivo m arbitrário, a função distribuição conjunta de $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nm}$ é a mesma não importa quais X_{ni} , $i = 1, 2, \dots, m$, são escolhidos. Isso implica que para todo $e_i = 0$ ou 1 ,

$$P[X_1 = e_1, X_2 = e_2, \dots, X_n = e_n] = P[X_1 = e_{a1}, X_2 = e_{a2}, \dots, X_n = e_{an}],$$

onde $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma permutação qualquer dos inteiros $(1, 2, \dots, n)$.

Isso significa que a probabilidade de ocorrência de qualquer seqüência que contenha exatamente k sucessos em n experimentos é a mesma.

Assim, definamos $a_{n,k} = P[X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n \mid \sum_{j=1}^n i_j = k]$, isto é, $a_{n,k}$ é a probabilidade de uma seqüência qualquer conter exatamente k sucessos em n experimentos, que é idêntica, como vimos acima, para todas as seqüências de tamanho n que contenham exatamente k sucessos.

Veremos a seguir que $\{\pi_k\}$ e $\{a_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, têm uma relação estreita, e que $\{a_{n,k}\}$ também define unicamente a função distribuição de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Considerando as probabilidades marginais e a invariância das probabilidades $\{a_{n,k}\}$ em relação às permutações $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$ temos que dada a seqüência $\{a_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, a seqüência $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, pode ser obtida e vice-versa.

Por exemplo, seja $n = 2$, temos

x_1	x_2	$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$
0	0	$a_{2,0}$
0	1	$a_{2,1}$
1	0	$a_{2,1}$
1	1	$a_{2,2}$

Além disso temos que :

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= \pi_2, \\ a_{2,1} + a_{2,2} &= \pi_1, \\ a_{2,0} + 2a_{2,1} + a_{2,2} &= \pi_0. \end{aligned}$$

No caso $n = 3$ temos

x_1	x_2	x_3	$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3]$
0	0	0	$a_{3,0}$
0	0	1	$a_{3,1}$
0	1	0	$a_{3,1}$
0	1	1	$a_{3,2}$
1	0	0	$a_{3,1}$
1	0	1	$a_{3,2}$
1	1	0	$a_{3,2}$
1	1	1	$a_{3,3}$

Temos que:

$$\begin{aligned} a_{3,3} &= \pi_3, \\ a_{3,2} + a_{3,3} &= \pi_2, \\ a_{3,1} + 2a_{3,2} + a_{3,3} &= \pi_1, \\ a_{3,0} + 3a_{3,1} + 3a_{3,2} + a_{3,3} &= \pi_0. \end{aligned}$$

Generalizando para dimensões maiores e colocando em forma matricial temos que:

$$\begin{bmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \dots & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \\ \pi_n \end{bmatrix}$$

Ou mais resumidamente $M_n A_n = \Pi_n$.

Os valores $a_{n,k}$ podem ser usados para se obter a distribuição da variável $Z_n = \sum_{j=1}^n i_j$, que é o número total de sucessos em n experimentos para a distribuição binomial generalizada. Ou seja

$$P[Z_n = k] = \binom{n}{k} a_{n,k}.$$

Além disso, podemos escrever π_k em função dos $a_{n,k}$'s. Assim temos

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} a_{n,k+j}.$$

De maneira inversa, podemos escrever $a_{n,k}$ em função das probabilidades π_k 's pela resolução do sistema $M_n A_n = \Pi_n$, ou seja,

$$A_n = M_n^{-1} \Pi_n.$$

Assim, no caso $n = 3$ teríamos

$$\begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$$

Como os $a_{n,k}$'s são probabilidades, devem estar dentro do intervalo $[0, 1]$. Isso implica no fato de nem toda sequência $\{\pi_k\}$ definir uma função distribuição. Aplicando essa restrição no exemplo acima temos:

$$\begin{aligned} a_{3,3} &= \pi_3 \geq 0; \\ a_{3,2} &= \pi_2 - \pi_3 \geq 0; \\ a_{3,1} &= \pi_1 - 2\pi_2 + \pi_3 \geq 0; \\ a_{3,0} &= \pi_0 - 3\pi_1 + 3\pi_2 - \pi_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Generalizando os fatos acima temos:

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \pi_n \geq 0 \Rightarrow \text{diferença de ordem zero de } \pi_n \text{ deve ser não-negativa.} \\ a_{n,n-1} &= \pi_{n-1} - \pi_n \geq 0 \Rightarrow \text{diferença de primeira ordem de } \pi_n \text{ deve ser não-negativa.} \\ a_{n,n-2} &= \pi_{n-2} - 2\pi_{n-1} + \pi_n \geq 0 \Rightarrow \text{diferença de segunda ordem de } \pi_n \text{ deve ser não-negativa.} \\ a_{n,n-3} &= \pi_{n-3} - 3\pi_{n-2} + 3\pi_{n-1} - \pi_n \geq 0 \Rightarrow \text{diferença de terceira ordem de } \pi_n \text{ deve ser não-negativa.} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$a_{n,0} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \pi_j \geq 0 \Rightarrow \text{diferença de n-ésima ordem de } \pi_n \text{ deve ser não-negativa.}$$

Portanto temos que as diferenças de todas as ordens (de 0 até n) de π_n devem ser não-negativas. Como a sequência $\{a_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, define unicamente uma distribuição de probabilidade conjunta temos:

Teorema 2.13. Uma sequência $\{\pi_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, define uma distribuição binomial generalizada se e somente se $\pi_0 = 1$ e as diferenças de todas as ordens de π_n forem não-negativas.

Prova:

Se $\{\pi_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, satisfaz as condições do teorema, podemos escrever os $a_{n,k}$'s em função dos π_k 's. Assim, temos pela resolução de $M_n A_n = \Pi_n$, ou equivalentemente de $A_n = M_n^{-1} \Pi_n$:

$$a_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \pi_{j+k} = \frac{P[Z_n = k]}{\binom{n}{k}}.$$

Se $\{\pi_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, não satisfaz as condições do teorema, é fácil encontrar um exemplo de sequência $\{\pi_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, a partir da qual os valores $a_{n,k}$'s não são não-negativos.

Exemplos:

1) Seja $\pi_k = p^k$, onde $p \in [0,1]$.

Temos que $\Delta^j \pi_k = (1-p)^j p^k \geq 0$. Como $\pi_0 = 1$ temos que $\pi_k = p^k$ define unicamente uma função distribuição conjunta.

Os $a_{n,k}$'s são da forma $a_{n,k} = p^k (1-p)^{n-k}$, correspondendo à distribuição binomial, ou seja, ao caso de independência.

2) Seja $\pi_0 = 1$ e $\pi_k = p$, onde $p \in [0,1]$.

Temos que $\Delta^j \pi_k = 0$, portanto π_k define unicamente uma função distribuição conjunta.

Os $a_{n,k}$'s são da forma $a_{n,k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$; $a_{n,n} = p$ e $a_{n,0} = 1-p$. Esse caso corresponde ao caso de dependência total dos X_i 's.

3) Seja $\pi_k = \beta + (1-\beta)\alpha^k$, com $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Quando $\alpha = 0$ o modelo se reduz ao modelo do exemplo 2), correspondendo ao caso de dependência total. Quando $\beta = 0$ o modelo se reduz ao modelo do exemplo 1), correspondendo à distribuição binomial, ou seja, ao caso de independência.

Este exemplo é portanto um caso de mistura entre independência e dependência total.

Temos que $\Delta^j \pi_k = (1-\beta)\alpha^j(1-\alpha)^j$. Além disso temos:

$$a_{n,k} = \begin{cases} (1-\beta)\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n-1. \\ \frac{\beta + (1-\beta)\alpha^n}{\binom{n}{k}}, & k = n. \end{cases}$$

Teorema 2.14. Se $\{\pi_k\}$ e $\{v_k\}$ são seqüências de probabilidades com $\pi_0 = v_0 = 1$ e para as quais as diferenças de todas as ordens são não-negativas, então $\{\alpha\pi_k + (1-\alpha)v_k\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, também satisfaz as condições acima.

Prova: $\pi_0 = v_0 = 1 \Rightarrow \alpha\pi_0 + (1-\alpha)v_0 = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^j \pi_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \\ \Delta^j v_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^j [\alpha\pi_k + (1-\alpha)v_k] = \alpha\Delta^j \pi_k + (1-\alpha)\Delta^j v_k \geq 0.$$

A seguir serão enunciados alguns teoremas acerca da teoria de distribuições binomiais generalizadas. Como esses teoremas não terão uma aplicação mais imediata ao longo dessa dissertação as provas serão omitidas.

Teorema 2.15. Se $\{\pi_k\}$ e $\{v_k\}$ são seqüências de probabilidades com $\pi_0 = v_0 = 1$ e para as quais as diferenças de todas as ordens são não-negativas, então $\{\pi_k * v_k\}$, onde o símbolo $*$ indica convolução, também satisfaz essas mesmas condições.

Teorema 2.16. Seja $f(x)$ uma função satisfazendo:

- a) $f(x) \geq 0$.
- b) $f(0) = 1$.
- c) $f^{(j)}(x) \leq 0$, j ímpar
 ≥ 0 , j par.

Então $\pi_k = f(k)$ é tal que $\pi_0 = 1$ e $\Delta^j \pi_k \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, n$. Portanto $\{\pi_k\}$ define unicamente uma função distribuição conjunta.

Teorema 2.17. Seja $f(x)$ uma função satisfazendo:

- a) $f(x) \geq 0$.
- b) $f(0) = 1$.
- c) $f^{(j)}(x) \leq 0$, j ímpar
 ≥ 0 , j par.
- d) $f^{(1)}(x) < 0$.

Então $\pi_k = f^{(1)}(k) / f^{(1)}(0)$ é tal que $\pi_0 = 1$ e $\Delta^j \pi_k \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, n$. Portanto $\{\pi_k\}$ define unicamente uma função distribuição conjunta.

3. Uma Extensão do Conceito de “Probability Integral Transform” e Aplicações para Médias Ponderadas de Cópias.

Neste capítulo trataremos do seguinte problema relacionado à teoria de cópias:

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com funções distribuição F e G respectivamente e sejam H_1 e H_2 funções distribuição conjuntas bivariadas tais que suas marginais sejam F e G . Então $H_1(X, Y)$ é uma variável aleatória. Se a função distribuição conjunta de X e Y é H_2 , qual é a função distribuição de $H_1(X, Y)$?

A relação do problema acima com a teoria de cópias é imediata, uma vez que funções distribuições conjuntas podem ser escritas em forma de cópias, e estas por sua vez relacionam essas funções distribuição conjuntas com suas respectivas marginais.

A importância de se estudar esse problema reside basicamente no fato de as medidas de dependência baseadas no conceito de concordância poderem ser escritas na forma de cópias, de modo que a resolução do problema descrito acima tem aplicação direta na análise de dependência entre variáveis aleatórias e entre funções dessas variáveis, o que é um tema de pesquisa de relevância tanto teórica quanto prática.

Como forma de estruturar o desenvolvimento feito acerca do problema primeiramente será feita uma introdução teórica dos principais conceitos a serem utilizados, bem como também será introduzida uma notação básica que norteará todo o capítulo. Em seguida será tratado o problema propriamente dito, com posterior apresentação de resultados em termos das medidas de dependência Kendall τ , Spearman ρ e Gini γ .

3.1. Funções de Distribuição de Cópias

Ao longo do texto será utilizada uma notação básica que acompanhará todo o desenvolvimento desse capítulo. Dessa forma, temos que $M(\cdot)$ e $W(\cdot)$ denotarão respectivamente os limites superior e inferior de cópias bivariadas, conhecidos como limites de Fréchet-Hoeffding bivariados. Assim sendo, seja $C(u, v)$ uma cópia bivariada qualquer, temos que:

$$W(u, v) = \max(u+v-1; 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v).$$

Para variáveis aleatórias contínuas X e Y , sua cópia se escreve como $M(u, v)$ se e somente se X é quase certamente uma função estritamente crescente de Y . No caso oposto, a cópia de X e Y se escreve com $W(u, v)$ se e somente se X é quase certamente uma função estritamente decrescente de Y .

A cópia de duas variáveis aleatórias independentes se escreve como $\Pi(u, v) = uv$. Convencionaremos ser μ_H a medida em $\mathbb{R}^2$ induzida pela função distribuição conjunta bivariada H , ou em termos de cópia, μ_C é a medida em $[0, 1]^2$ induzida pela cópia C .

Também fica convencionado que δ_C é a seção diagonal da cópia bivariada C , ou em outras palavras $\delta_C(t) = C(t, t)$.

Estabelecida a notação a ser utilizada, vamos passar ao desenvolvimento propriamente dito.

Definição 3.1. Sejam H_1 e H_2 funções distribuição bivariadas com marginais comuns F e G . Sejam X e Y variáveis aleatórias cuja função distribuição conjunta é H_2 e seja $\langle H_1/H_2 \rangle(X, Y)$ a variável aleatória $H_1(X, Y)$. A H_2 -função distribuição de H_1 , isto é, $F(\langle H_1/H_2 \rangle(X, Y))$ que será denotada por (H_1/H_2) é dada por:

$$(H_1/H_2)(t) = P[\langle H_1/H_2 \rangle(X, Y) \leq t] = \mu_{H_2}(\{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / H_1(x, y) \leq t\}), t \in [0, 1].$$

Uma definição análoga para cópulas é possível já que uma função distribuição conjunta pode ser escrita em termos de cópulas. Dessa maneira, se C_1 e C_2 forem cópulas quaisquer e U e V forem variáveis aleatórias uniformes em $[0, 1]$ com função distribuição conjunta C_2 , então $\langle C_1/C_2 \rangle(U, V)$ denota a variável $C_1(U, V)$ e a C_2 -função distribuição de C_1 é dada por:

$$(C_1/C_2)(t) = P[\langle C_1/C_2 \rangle(U, V) \leq t] = \mu_{C_2}(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / C_1(u, v) \leq t\}), t \in [0, 1].$$

Um teorema importante faz a ligação entre a definição aplicada às funções distribuição conjuntas e as cópulas fazendo uso da propriedade mencionada acima. Assim:

Teorema 3.1. Sejam H_1 , H_2 , F , G , X e Y como na definição acima e sejam C_1 e C_2 as cópulas associadas a H_1 e H_2 respectivamente. Então $(H_1/H_2) = (C_1/C_2)$.

Prova: para $t \in [0, 1]$ temos

$$(H_1/H_2)(t) = \mu_{H_2}(\{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / H_1(x, y) \leq t\}) = \mu_{H_2}(\{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / C_1(F(x), G(y)) \leq t\}),$$

fazendo $u = F(x)$ e $v = G(y)$ temos então

$$\mu_{H_2}(\{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / C_1(F(x), G(y)) \leq t\}) = \mu_{C_2}(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / C_1(u, v) \leq t\}) = (C_1/C_2)(t).$$

Assim, $(H_1/H_2)(t) = (C_1/C_2)(t)$.

Portanto temos que a H_2 -função distribuição de H_1 é idêntica à C_2 -cópula de C_1 .

Pela propriedade de invariância das cópulas sob transformações estritamente crescentes de X e Y , temos que a H_2 -função distribuição de H_1 também é invariante sob transformações estritamente crescentes de X e Y , o que será de fundamental importância no cálculo de medidas de dependência baseadas no conceito de concordância, como por exemplo as medidas Kendall τ e Spearman ρ .

De modo a ilustrar os conceitos apresentados até o momento veremos alguns exemplos concernentes à teoria apresentada:

Exemplo 3.1. Sejam U e V variáveis aleatórias uniformes em $[0, 1]$ cuja função distribuição conjunta é a cópula C .

Temos que para $t \in [0, 1]$, $(M/C)(t) = 2t - \delta_C(t)$, onde M é o limite superior de Fréchet-Hoeffding e $\delta_C(t)$ é a seção diagonal da cópula C . Esse resultado vem de:

$$\begin{aligned}
 (M/C)(t) &= \mu_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / M(u, v) \leq t\}); \\
 &= \mu_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / \min(u, v) \leq t\}); \\
 &= 1 - \mu_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / \min(u, v) > t\}); \\
 &= 1 - \mu_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / u > t, v > t\}); \\
 &= 1 - [1 - C(1, t) - C(t, 1) + C(t, t)]; \\
 &= C(1, t) + C(t, 1) - C(t, t); \\
 &= 2t - \delta_C(t).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. Sejam U e V variáveis aleatórias uniformes em $[0, 1]$ cuja função distribuição conjunta é a cópula W , onde W é o limite inferior de Fréchet-Hoeffding.

Temos que para $t \in [0, 1]$, $(M/W)(t) = \min(2t, 1)$, onde M é a função que representa o limite superior de Fréchet-Hoeffding. Esse resultado vem de:

$$\begin{aligned}
 (M/W)(t) &= \mu_W(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / M(u, v) \leq t\}); \\
 &= \mu_W(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / \min(u, v) \leq t\}); \\
 &= 1 - \mu_W(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / \min(u, v) > t\}); \\
 &= 1 - \mu_W(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / u > t, v > t\}); \\
 &= 1 - [1 - W(1, t) - W(t, 1) + W(t, t)]; \\
 &= W(1, t) + W(t, 1) - W(t, t) \\
 &= \max(t, 0) + \max(t, 0) - \max(2t-1, 0); \\
 &= 2t - \max(2t-1, 0); \\
 &= \min(2t, 1).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Sejam U e V variáveis aleatórias uniformes em $[0, 1]$ cuja função distribuição conjunta é a cópula M , onde M é o limite superior de Fréchet-Hoeffding.

Temos que para $t \in [0, 1]$, $(\Pi/M)(t) = t^{1/2}$, onde Π é a função que representa a cópula de independência. Esse resultado vem de:

$$\begin{aligned}
 (\Pi/M)(t) &= \mu_M(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / \Pi(u, v) \leq t\}); \\
 &= \mu_M(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / uv \leq t\}).
 \end{aligned}$$

Como vimos no capítulo referente à teoria de cópulas, U e V têm cópula M se e somente se $U = V$ quase certamente. Dessa maneira temos que:

$$\begin{aligned}
 (\Pi/M)(t) &= \mu_M(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / u^2 \leq t\}); \\
 &= \mu_M(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / u \leq t^{1/2}\}); \\
 &= t^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.4. Sejam M , Π e W como convencionado anteriormente. Calculando-se $(C_1/C_2)(t)$ para $C_1, C_2 \in \{M, \Pi, W\}$ temos na tabela 3.1 um resumo dos resultados.

Tabela 3.1: $(C_1/C_2)(t)$

$C_1 \backslash C_2$	M	Π	W
M	t	$2t - t^2$	$\min(2t, 1)$
Π	$t^{1/2}$	$t(1 - \ln(t))$	$1 - [\max(0; 1-4t)]^{1/2}$
W	$(t+1)/2$	$1 - (1-t)^2/2$	-1

3.2. Aplicações às Médias Ponderadas de Cópulas

A idéia básica é completar a Tabela 3.1 para médias ponderadas de cópulas.

Sejam $C_1(u, v)$ uma cópula bivariada qualquer e $C_2(u, v)$ uma cópula bivariada tal que: $C_2(u, v) = \alpha_1 M(u, v) + \alpha_2 \Pi(u, v) + \alpha_3 W(u, v)$, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Temos que

$$(C_1/C_2)(t) = \mu_{C_2}(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / C_1(u, v) \leq t\}), t \in [0, 1].$$

$$= \iint_{\{C_1(u,v) \leq t\}} dC_2(u, v) = \alpha_1 \iint_{\{C_1(u,v) \leq t\}} dM(u, v) + \alpha_2 \iint_{\{C_1(u,v) \leq t\}} d\Pi(u, v) + \alpha_3 \iint_{\{C_1(u,v) \leq t\}} dW(u, v);$$

$$= \alpha_1 (C_1/M)(t) + \alpha_2 (C_1/\Pi)(t) + \alpha_3 (C_1/W)(t).$$

No caso $C_1(u, v) = \min(u, v)$ temos

$$(C_1/C_2)(t) = (\alpha_1 + 2\alpha_2) t - \alpha_2 t^2 + \alpha_3 \min(1; 2t).$$

No caso $C_1(u, v) = uv$ temos

$$(C_1/C_2)(t) = \alpha_1 t^{1/2} + \alpha_2 t(1 - \ln(t)) + \alpha_3 [1 - (\max(0, 1-4t))^{1/2}].$$

No caso $C_1(u, v) = \max(u + v - 1; 0)$ temos

$$(C_1/C_2)(t) = \alpha_1 (1 + t)/2 + \alpha_2 (1 - (1 - t)^2/2) + \alpha_3.$$

Escolhendo apropriadamente os valores dos coeficientes α_1 , α_2 e α_3 os resultados acima se reduzem àqueles da tabela 3.1 do exemplo 3.4.

A conclusão é que para cópulas C_2 expressas como médias ponderadas dos casos de dependência total positiva, independência e dependência total negativa, a função $(C_1/C_2)(t)$ é uma média ponderada de funções $(C_1/C')(t)$, onde $C' \in \{M, \Pi, W\}$ são as cópulas que compõe a cópula C_2 . Essa média ponderada tem os mesmos pesos que as cópulas C' têm na cópula C_2 .

No entanto o resultado acima não se restringe aos casos de misturas de dependência total positiva, independência e dependência total negativa. Como a função distribuição conjunta é linear, o resultado é válido para quaisquer médias ponderadas. Dessa forma:

Sejam $C_1(u, v)$ uma cópula bivariada qualquer, $C_2(u, v)$ e $C_{2,i}(u, v)$ cópulas bivariadas tais

$$\text{que: } C_2(u, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_{2,i}, \text{ com } 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Temos que

$$(C_1/C_2)(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (C_1 / C_{2,i})(t).$$

3.3. Medidas de Dependência e Cópulas

Antes de apresentar os resultados que relacionam os conceitos tratados previamente com o fenômeno da dependência, e mais especificamente com medidas de dependência, é necessário lembrar o conceito de concordância, uma vez que grande parte das medidas de dependência utilizadas neste capítulo se apóiam nesse conceito. Assim, dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de números reais são ditos concordantes se $(x_1, y_1)(x_2, y_2) > 0$ e discordantes se $(x_1, y_1)(x_2, y_2) < 0$. Serem concordantes significa, em termos intuitivos, que se x aumenta, y também aumenta e se x diminui, y também diminui, ou seja, x e y concordam em seus comportamentos.

A ligação entre o conceito de concordância e as funções distribuição de cópulas é feita no seguinte teorema:

Teorema 3.2. Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) vetores aleatórios independentes de variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição conjuntas H_1 e H_2 respectivamente e com marginais comuns F (referente a X_1 e X_2) e G (referente a Y_1 e Y_2) e sejam C_1 e C_2 as cópulas de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) . Seja Q a diferença entre as probabilidades de concordância e discordância de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , isto é, (veja teorema 2.7)

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Então Q é função de C_1 e C_2 e pode ser escrita como

$$Q = Q(C_1, C_2) = 3 - 4 \int_0^1 (C_1 / C_2)(t) dt = 3 - 4 \int_0^1 (C_2 / C_1)(t) dt.$$

Prova:

Prova:

Como já foi visto na seção respectiva à concordância do capítulo de dependência, podemos escrever Q como

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{[0,1]^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 = 4 \iint_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1,$$

que é equivalente a

$$Q = 4 E[<C_1/C_2>(U_2, V_2)] - 1 = 4 E[<C_2/C_1>(U_1, V_1)] - 1.$$

onde $U_i = F(X_i)$ e $V_i = G(Y_i)$, $i = 1, 2$. Mas

$$(C_1/C_2)(t) = \mu_{C_2}(\{(u, v) \in [0, 1]^2 / C_1(u, v) \leq t\}),$$

e portanto

$$E[<C_1/C_2>(U_2, V_2)] = 1 - \int_0^1 (C_1 / C_2)(t) dt, \text{ de onde o resultado segue.}$$

Corolário 3.1. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula C e sejam τ_C , ρ_C e γ_C as versões populacionais das medidas de dependência Kendall τ , Spearman ρ e Gini γ respectivamente. Então

- 1) $\tau_C = Q(C, C) = 3 - 4 \int_0^1 (C/C)(t) dt;$
- 2) $\rho_C = 3Q(C, \Pi) = 9 - 12 \int_0^1 (C/\Pi)(t) dt;$
- 3) $\gamma_C = 2Q\left(C, \frac{M+W}{2}\right) = 6 - 8 \int_0^1 \left(C / \frac{M+W}{2}\right)(t) dt.$

Os resultados seguem das definições dos coeficientes em função de Q e da aplicação imediata do teorema anterior.

3.4. Aplicações das Médias Ponderadas de Cópias às Medidas de Dependência

Sejam $C_1(u, v)$ uma cópia bivariada qualquer e $C_2(u, v)$ uma cópia bivariada tal que:
 $C_2(u, v) = \alpha_1 M(u, v) + \alpha_2 \Pi(u, v) + \alpha_3 W(u, v)$, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Temos pela linearidade de C_2 que

$$dC_2(u, v) = \alpha_1 dM(u, v) + \alpha_2 d\Pi(u, v) + \alpha_3 dW(u, v), \text{ então}$$

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= 4 \iint_{[0,1]^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1; \\ &= 4 \left\{ \alpha_1 \iint_{[0,1]^2} C_1 dM(u, v) + \alpha_2 \iint_{[0,1]^2} C_1 d\Pi(u, v) + \alpha_3 \iint_{[0,1]^2} C_1 dW(u, v) \right\} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3); \\ &= \alpha_1 \left\{ 4 \iint_{[0,1]^2} C_1 dM(u, v) - 1 \right\} + \alpha_2 \left\{ 4 \iint_{[0,1]^2} C_1 d\Pi(u, v) - 1 \right\} + \alpha_3 \left\{ 4 \iint_{[0,1]^2} C_1 dW(u, v) - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$Q(C_1, C_2) = \alpha_1 Q(C_1, M) + \alpha_2 Q(C_1, \Pi) + \alpha_3 Q(C_1, W).$$

Sejam agora

$$\begin{aligned} C_1(u, v) &= \alpha_1 M(u, v) + \beta_1 \Pi(u, v) + \gamma_1 W(u, v) \text{ e} \\ C_2(u, v) &= \alpha_2 M(u, v) + \beta_2 \Pi(u, v) + \gamma_2 W(u, v). \end{aligned}$$

com $0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq 1$; $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$ e $i = 1, 2$.

Aplicando o resultado anterior e a simetria de $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$ temos que

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= \alpha_2 Q(C_1, M) + \beta_2 Q(C_1, \Pi) + \gamma_2 Q(C_1, W); \\ &= \alpha_2 Q(M, C_1) + \beta_2 Q(\Pi, C_1) + \gamma_2 Q(W, C_1); \\ &= \alpha_2 [\alpha_1 Q(M, M) + \beta_1 Q(M, \Pi) + \gamma_1 Q(M, W)] + \\ &\quad \beta_2 [\alpha_1 Q(\Pi, M) + \beta_1 Q(\Pi, \Pi) + \gamma_1 Q(\Pi, W)] + \\ &\quad \gamma_2 [\alpha_1 Q(W, M) + \beta_1 Q(W, \Pi) + \gamma_1 Q(W, W)]. \end{aligned}$$

Resumindo temos o seguinte resultado:

Lema 3.1. Sob notações acima, a seguinte relação é válida:

$$Q(C_1, C_2) = \alpha_2 \alpha_1 Q(M, M) + \beta_2 \beta_1 Q(\Pi, \Pi) + \gamma_2 \gamma_1 Q(W, W) + (\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 \alpha_1) Q(M, \Pi) + (\alpha_2 \gamma_1 + \gamma_2 \alpha_1) Q(M, W) + (\beta_2 \gamma_1 + \gamma_2 \beta_1) Q(\Pi, W).$$

Fazendo uso da relação $Q(C_1, C_2) = 3 - 4 \int_0^1 (C_1 / C_2)(t) dt$ e dos resultados apresentados no exemplo 3.4 temos:

$$Q(\Pi, \Pi) = 3 - 4 \int_0^1 (t - t \ln(t)) dt = 0.$$

$$Q(M, M) = 3 - 4 \int_0^1 t dt = 1.$$

$$Q(W, W) = 3 - 4 \int_0^1 1 dt = -1.$$

$$Q(M, W) = 3 - 4 \int_0^1 \min(1, 2t) dt = 0.$$

$$Q(\Pi, W) = 3 - 4 \int_0^1 (1 - \sqrt{\max(0, 1 - 4t)}) dt = -1/3.$$

$$Q(M, \Pi) = 3 - 4 \int_0^1 (2t - t^2) dt = 1/3.$$

Finalmente obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.1. Sob notações acima temos que:

$$Q(C_1, C_2) = \alpha_2 \alpha_1 - \gamma_2 \gamma_1 + \frac{\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 \alpha_1 - \beta_2 \gamma_1 - \gamma_2 \beta_1}{3}.$$

Aplicando este resultado no cálculo das medidas de dependência τ_C , ρ_C e γ_C temos:

$$\tau_{C_1} = Q(C_1, C_1) = Q(C_1, C_2)_{\{\alpha_2=\alpha_1, \beta_2=\beta_1, \gamma_2=\gamma_1\}} = \frac{(\alpha_2 - \gamma_2)(\alpha_2 + \gamma_2 + 2)}{3}.$$

$$\rho_{C_1} = 3Q(C_1, \Pi) = Q(C_1, C_2)_{\{\alpha_1=\gamma_1=0, \beta_1=1\}} = \alpha_2 - \gamma_2.$$

$$\gamma_{C_1} = 2Q\left(C_1, \frac{M+W}{2}\right) = Q(C_1, C_2)_{\{\alpha_1=\gamma_1=\frac{1}{2}, \beta_1=0\}} = \alpha_2 - \gamma_2.$$

Esses desenvolvimentos somados aos obtidos no capítulo de aplicações às médias ponderadas de cópulas nos dão uma clara noção da importância da teoria de funções de distribuição de cópulas, na medida em que tem uma relação estreita com as medidas de dependência τ_C , ρ_C e γ_C . Os resultados acima estendem aqueles obtidos em Nelsen et *al.* (2001).

4. Geração de Variáveis Aleatórias Binárias Permutáveis

Neste capítulo trataremos da geração de variáveis binárias permutáveis. Os resultados apresentados são inéditos e estendem aqueles apresentados por Nelsen (2001), e são base para o cálculo de medidas de dependência apresentadas na seção 3.2.

O intuito é apresentar uma maneira sistemática de gerar variáveis binárias permutáveis, dada uma estrutura particular de correlação. Os métodos propostos até o momento não são capazes de gerar todo o espectro de correlações possíveis, sendo que basicamente o caso de correlações positivas é tratado. Dessa maneira, o grande resultado desse capítulo é fornecer um método unificado capaz de gerar todo o intervalo de correlações possíveis para o caso de variáveis aleatórias permutáveis.

A construção desse método faz uso de muitos dos conceitos tratados nos capítulos anteriores, de modo que maiores detalhes a respeito de teoremas e definições utilizados podem ser verificados nos capítulos pertinentes. Algumas definições e resultados serão repetidos de modo a dar uma maior fluidez ao texto, evitando-se recorrer a todo momento a capítulos passados. Desse modo, antes de apresentarmos os desenvolvimentos obtidos, será feita uma apresentação desses resultados preliminares que embasam os resultados obtidos.

4.1. Resultados Preliminares

Como foi definido no capítulo 2.3, uma sequência $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ de variáveis aleatórias é dita permutável se a função distribuição conjunta do vetor $(Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_n})$ é idêntica àquela do vetor $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ para todas as permutações $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ dos subscritos $(1, 2, \dots, n)$.

Um caso particular importante dessa definição é que se $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas então elas são permutáveis.

Se $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ é uma sequência de variáveis aleatórias permutáveis com os dois primeiros momentos de suas distribuições finitos, então existe uma correlação entre as variáveis Y_i e Y_j

$$\rho = \text{Corr}[Y_i, Y_j], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

No sentido inverso temos que se $\rho \geq \frac{-1}{n-1}$, com igualdade se e somente se

$$\sum_{i=1}^n \frac{Y_i - E[Y_i]}{\text{Var}[Y_i]} = 0, \text{ quase certamente,}$$

então ρ ocorre como correlação em alguma sequência permutável.

Para mostrar isso, seja $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E[R_i] = 0$, $\text{Var}[R_i] = 1$ e defina

$$X_i = \frac{Y_i - E[Y_i]}{\text{Var}[Y_i]} = R_i + d \sum_{i=1}^n R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

para alguma constante d .

Então $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma seqüência permutável e

$$\rho = E[X_i X_j] = 1 - \frac{1}{nd^2 + 2d + 1}, \quad i \neq j. (*)$$

À medida que d varia, os valores de ρ variam no intervalo $\left[\frac{-1}{n-1}, 1\right]$.

Em particular, $\rho = \frac{-1}{n-1}$ para $d = \frac{-1}{n}$.

(para uma amostra sem reposição de uma urna com n elementos, ou se os X_i 's tem uma distribuição multinomial simétrica), e $\rho = 1$ fazendo-se com que:

$X_1 = X_2 = \dots = X_n$ quase certamente. ($d \rightarrow \infty$).

Note que no caso infinito (quando $n \rightarrow \infty$), (*) implica que $\rho = 1$.

4.2. Geração de Seqüências Binárias Permutáveis

Agora seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma seqüência de variáveis aleatórias permutáveis de tipo Bernoulli com distribuições comuns $P(X_i = 1) = \pi \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Defina: $\pi_0 = 1$ e

$$\pi_k = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_k = 1), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Como vimos no capítulo 2.3, uma condição necessária e suficiente para $\{\pi_k\}$ definir uma função distribuição própria é que as diferenças de todas as ordens de $\{\pi_k\}$ sejam não-negativas. Definamos, assim como no capítulo 2.3, a probabilidade conjunta de uma seqüência de n variáveis Bernoulli contendo exatamente m sucessos por:

$$a_{n,m} = P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n / \sum i_j = m), \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Como já foi visto no capítulo mencionado acima, sob hipótese de permutabilidade as probabilidades $a_{n,m}$ podem ser determinadas unicamente pelas probabilidades $\{\pi_k\}$, isto é,

$$a_{n,m} = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} (-1)^j \pi_{m+j}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

E no sentido inverso temos que as probabilidades π_k podem ser determinadas unicamente pela seqüência de probabilidades $\{a_{n,m}\}$, isto é,

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} a_{n,k+j}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

A partir da estrutura da seqüência $\{\pi_k\}$ e da permutabilidade das variáveis é possível gerar a função distribuição conjunta do vetor aleatório $(X_1, X_2, \dots, X_k)$, tal que

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

com ρ variando no intervalo $\left[\frac{-1}{n-1}, 1\right]$.

Essa função distribuição terá sua estrutura de dependência caracterizada pelas possíveis escolhas da sequência $\{\pi_k\}$. Alguns exemplos simples de sequências $\{\pi_k\}$ são dados abaixo:

- 1) $\pi_0 = 1, \pi_k = \pi^k$ (caso correspondente à independência),
- 2) $\pi_0 = 1, \pi_k = \pi$ (caso correspondente à dependência total),
- 3) $\pi_0 = 1, \pi_k = \alpha \pi + (1-\alpha) \pi^k, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$

Neste caso $\text{Corr}(X_i, X_j) = \alpha$.

Quando $\alpha = 0$, o modelo se reduz ao caso de independência e quando $\alpha = 1$, ele se reduz ao caso de dependência total.

- 4) $\pi_0 = 1, \pi_k = p^{k^a}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq a \leq 1.$

Quando $a = 1$, o modelo se reduz ao caso independência, e quando $a = 0$, ele se reduz ao caso de dependência total.

4.3. Geração de Estruturas de Correlação Negativa

Três modelos são estudados nesta seção. Dois deles são versões do limite inferior de Fréchet para sequências binárias permutáveis e o terceiro é um caso especial apresentado em Hu e Wu (1999). O propósito principal dessa seção é fazer uso do limite inferior de Fréchet e de suas características de modo a construir alguns métodos de gerar sequências binárias permutáveis negativamente correlacionadas. Um outro objetivo é mostrar a relação entre esse terceiro modelo e os outros dois casos.

4.3.1. Modelos com Estrutura de Dependência Negativa

Notação:

$X_i^1, \bar{X}_i^1, X_i', X_i^2, \bar{X}_i^2, X_i'', \quad i = 1, 2, \dots, n$ denotam variáveis aleatórias binárias com esperança comum π .

$\{\pi_k^1\}, \{\bar{\pi}_k^1\}, \{\pi_k'\}, \{\pi_k^2\}, \{\bar{\pi}_k^2\}, \{\pi_k''\}$ denotam sequências das seguintes probabilidades:

$$\pi_k^1 = P(X_1^1 = 1, X_2^1 = 1, \dots, X_k^1 = 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$\bar{\pi}_k^1 = P(\bar{X}_1^1 = 1, \bar{X}_2^1 = 1, \dots, \bar{X}_k^1 = 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$\pi_k' = P(X_1' = 1, X_2' = 1, \dots, X_k' = 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$\pi_k^2 = P(X_1^2 = 1, X_2^2 = 1, \dots, X_k^2 = 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$\bar{\pi}_k^2 = P(\bar{X}_1^2 = 1, \bar{X}_2^2 = 1, \dots, \bar{X}_k^2 = 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$\pi_k'' = P(X_1'' = 1, X_2'' = 1, \dots, X_k'' = 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

A seguir apresentaremos alguns modelos básicos que formaram a estrutura para um algoritmo geral de geração de sequências permutáveis.

Modelo 1:

Considere a sequência $X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1$ de variáveis binárias, cuja função distribuição conjunta é a seguinte:

$$P(X_i^1 = 0, X_j^1 = 0) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X_i^1 = 1, X_j^1 = 0) = 1 - \pi, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X_1^1 = 1, X_2^1 = 1, \dots, X_n^1 = 1) = 1 - n(1 - \pi).$$

Pelo fato de serem probabilidades, devem ser positivas, de modo que $\pi \geq \frac{n-1}{n}$.

Esta função distribuição conjunta poderia ser expressa em termos da sequência $\{\pi_k^1\}$ como:

$$\pi_0^1 = 1$$

$$\pi_k^1 = 1 - k(1 - \pi), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

É fácil ver que as marginais são $P(X_i = 1) = \pi$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Esta função distribuição conjunta é equivalente ao limite inferior de Fréchet quando

$\pi \geq \frac{n-1}{n}$ (ver condições para o limite inferior de Fréchet configurar uma função distribuição em Joe (1997, capítulo 3)).

Agora considere a sequência $\bar{X}_1^1, \bar{X}_2^1, \dots, \bar{X}_n^1$ de variáveis binárias, cuja função distribuição conjunta é expressa em termos de uma nova sequência $\{\bar{\pi}_k^1\}$ definida por:

$$\bar{\pi}_0^1 = 1.$$

$$\bar{\pi}_k^1 = \alpha[\pi_k^1] + (1 - \alpha)\pi^k, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Esta estrutura é portanto uma média ponderada do modelo de independência e do limite inferior de Fréchet (no caso onde $\pi \geq \frac{n-1}{n}$).

Temos que

$$\text{Corr}(\bar{X}_i^1, \bar{X}_j^1) = \frac{E[\bar{X}_i^1 \bar{X}_j^1] - E[\bar{X}_i^1]E[\bar{X}_j^1]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{X}_i^1]} \sqrt{\text{Var}[\bar{X}_j^1]}}$$

Mas temos também que:

$$E[\bar{X}_i^1] = E[\bar{X}_j^1] = \pi$$

e

$$\sqrt{\text{Var}[\bar{X}_i^1]} = \sqrt{\text{Var}[\bar{X}_j^1]} = \pi(1 - \pi).$$

Além disso, a permutabilidade permite escrever:

$$E[\bar{X}_i^1 \bar{X}_j^1] = \bar{\pi}_2^1 = \pi^2 - \alpha(\pi-1)^2.$$

Resultando que:

$$\text{Corr}(\bar{X}_i^1, \bar{X}_j^1) = -\alpha \left(\frac{1-\pi}{\pi} \right), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Como $\bar{\pi}_2^1$ é uma probabilidade e $-1 \leq \text{Corr}(\bar{X}_i^1, \bar{X}_j^1) \leq 1$,

$$\text{então } 0 \leq \alpha \leq \min \left\{ \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right)^2; \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right) \right\}.$$

Por este método é possível gerar variáveis binárias as quais são negativamente correlacionadas.

Lembrete:

Agora considere a seqüência $X_1', X_2', \dots, X_n'$ de variáveis binárias, cuja função distribuição de probabilidade é uma média ponderada entre o modelo de dependência total positiva, o limite inferior de Fréchet e o modelo de independência, expresso em termos de uma nova seqüência $\{\pi_k'\}$ definida por:

$$\pi_0' = 1 \text{ e}$$

$$\pi_k' = p_1\pi + p_2(\pi_k^1) + (1-p_1-p_2)\pi^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p_1, p_2, \quad 0 \leq p_1 + p_2 \leq 1, \quad \pi \geq \frac{n-1}{n}.$$

Procedendo de maneira análoga à exposta acima, chegamos a:

$$\text{Corr}(X_i', X_j') = p_1 p_2 \left(\frac{1-\pi}{\pi} \right) \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1 \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

A última relação mostra que é possível gerar seqüências binárias com correlação tal que:

$$\frac{-1}{n-1} \leq \text{Corr}(X_i', X_j') \leq 1,$$

que é o espectro todo de correlações possíveis para variáveis aleatórias permutáveis, como mostrado na seção 4.3.

Modelo 2:

Considere a seqüência $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ de variáveis binárias, cuja função distribuição conjunta é a seguinte:

$$P(X_i^2 = 1, X_j^2 = 1) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X_i^2 = 1, X_j^2 = 0) = \pi, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X_1^2 = 0, X_2^2 = 0, \dots, X_n^2 = 0) = 1 - n\pi.$$

Pelo fato de serem probabilidades, devem ser positivas, de modo que $\pi \leq \frac{1}{n}$.

Esta função distribuição conjunta poderia ser expressa em termos de uma seqüência $\{\pi_k^2\}$ como:

$$\begin{aligned}\pi_0^2 &= 1; \\ \pi_1^2 &= \pi; \\ \pi_k^2 &= 0, \quad k=2, \dots, n.\end{aligned}$$

É fácil ver que as marginais são $P(X_i = 1) = \pi$, $i = 1, 2, \dots, n$. Esta função distribuição conjunta é equivalente ao limite inferior de Fréchet quando $\pi \leq \frac{1}{n}$ (ver condições para o limite inferior de Fréchet configurar uma função distribuição em Joe (1997, capítulo 3)).

Agora considere a seqüência $\bar{X}_1^2, \bar{X}_2^2, \dots, \bar{X}_n^2$ de variáveis binárias, cuja função distribuição conjunta é expressa em termos de uma nova seqüência $\{\bar{\pi}_k^2\}$ definida como:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_0^2 &= 1; \\ \bar{\pi}_k^2 &= \alpha[\pi_k^2] + (1-\alpha)\pi^k, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \pi \leq \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Esta estrutura é portanto uma média ponderada do modelo de independência e do limite inferior de Fréchet (no caso onde $\pi \leq \frac{1}{n}$). Calculando -se de modo análogo ao do modelo 1 temos que para $i \neq j$:

$$\text{Corr}(\bar{X}_i^2, \bar{X}_j^2) = -\alpha \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Como $\bar{\pi}_2^2$ é uma probabilidade e $-1 \leq \text{Corr}(\bar{X}_i^2, \bar{X}_j^2) \leq 1$,

$$\text{então } 0 \leq \alpha \leq \min \left\{ 1; \left(\frac{1-\pi}{\pi} \right) \right\}.$$

Por este método é possível gerar variáveis binárias as quais são negativamente correlacionadas.

Lembrete:

Agora considere a seqüência $X_1'', X_2'', \dots, X_n''$ de variáveis binárias, cuja função distribuição de probabilidade é uma média ponderada entre o modelo de dependência total positiva, o limite inferior de Fréchet e o modelo de independência, expresso em termos de uma nova seqüência $\{\pi_k''\}$ definida como:

$$\begin{aligned}\pi_0'' &= 1 \text{ e} \\ \pi_k'' &= p_1\pi + p_2(\pi_k^2) + (1-p_1-p_2)\pi^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p_1, p_2, \quad 0 \leq p_1 + p_2 \leq 1.\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento de cálculo anteriormente desenvolvido chegamos a:

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = p_1 - p_2 \left(\frac{\pi}{1 - \pi} \right) \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1 \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

A última relação mostra que é possível gerar seqüências binárias com correlação tal que:

$$\frac{-1}{n-1} \leq \text{Corr}(X_i, X_j) \leq 1,$$

que é o espectro todo de correlações possíveis para variáveis aleatórias permutáveis, como mostrado na seção 4.3.

Modelo 3:

Considere a seguinte função distribuição de probabilidade:

$$P(X_1=\delta_1, X_2=\delta_2, \dots, X_n=\delta_n) = \begin{cases} (r+1-n\pi) \binom{n}{r}^{-1}, & \text{se } \sum_{i=1}^n \delta_i = r \\ (n\pi - r) \binom{n}{r+1}^{-1}, & \text{se } \sum_{i=1}^n \delta_i = r+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (**)$$

onde r é um inteiro tal que $r \leq n\pi < r+1$, e $\delta_1, \dots, \delta_n$ assume valores 0 ou 1.

É possível expressar a função distribuição de probabilidade mencionada acima em termos da seqüência $\{\pi_k\}$ fazendo uso dos seguintes fatos:

1) As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ são permutáveis e uma vez que apenas o número total de sucessos é relevante podemos escrever:

$$(r+1-n\pi) \binom{n}{r}^{-1} = a_{n,r}.$$

$$(n\pi - r) \binom{n}{r+1}^{-1} = a_{n,r+1}.$$

$$a_{n,k} = 0, \quad k \neq r, r+1.$$

2) Como visto na seção 3.3 podemos escrever π_k em função dos $a_{n,k}$'s

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} a_{n,k+j}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Segue que a seqüência $\{\pi_k\}$ pode ser expressa como:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\binom{r}{k}}{\binom{n}{k}} \left[\frac{r+1-k(r+1-n\pi)}{r+1-k} \right], & k = 0, 1, \dots, r. \\ (n\pi - r) \binom{n}{k+1}, & k = r+1. \\ 0, & k = r+2, r+3, \dots, n. \end{cases}$$

No caso onde $\pi \geq \frac{n-1}{n}$, $\{\pi_k\}$ tem a seguinte estrutura:

$$\pi_k = 1-k(1-\pi), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

a qual é a mesma estrutura do modelo 1. Portanto quando $\pi \geq \frac{n-1}{n}$ a distribuição apresentada é o limite inferior de Fréchet da família de distribuições multivariadas Bernoulli permutáveis.

No caso onde $\pi \leq \frac{1}{n}$, $\{\pi_k\}$ tem a seguinte estrutura:

$$\pi_0 = 1;$$

$$\pi_1 = \pi;$$

$$\pi_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

que é a mesma estrutura do modelo 2. Portanto quando $\pi \leq \frac{1}{n}$ a distribuição apresentada é o limite inferior de Fréchet da família de distribuições multivariadas Bernoulli permutáveis.

Quando $\frac{1}{n} < \pi < \frac{n-1}{n}$ o limite inferior de Fréchet não é uma função distribuição, de modo que não é necessário desenvolver conexões entre esse limite e a distribuição apresentada.

4.3.2 Algoritmo de Geração de Variáveis Aleatórias Binárias Permutáveis

Apresentaremos agora um algoritmo de geração de variáveis binárias permutáveis. Este algoritmo é baseado nos modelos apresentados na seção anterior, e tem como característica mais relevante cobrir todo o espectro possível de correlações que essas variáveis aleatórias podem apresentar.

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias binárias permutáveis com esperança comum π . Além disso, identificaremos com um inteiro j , satisfazendo $0 \leq j \leq 2^n - 1$, a seqüência binária de tamanho n que é a representação binária do inteiro j .

Assim, se $n = 3$, o inteiro 0 identifica a seqüência 000, o inteiro 1 a seqüência 001, o inteiro 2 a seqüência 010 e assim por diante.

Além disso, para $0 \leq j \leq 2^n - 1$, seja P_j a probabilidade

$$P_j = P[X_1 = j_1, X_2 = j_2, \dots, X_n = j_n],$$

onde a seqüência $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ é a representação binária do inteiro j .

Podemos escrever a probabilidade P_j em função da seqüência $\{a_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Dessa forma temos que:

$$P_j = a_{n,k}, \quad \text{onde } k = \sum_{i=1}^n j_i.$$

Mas a seqüência $\{a_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, pode ser escrita em função da seqüência $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, como visto na seção 2.3.

Aqui faremos uso dos modelos desenvolvidos na seção anterior para gerarmos seqüências com estruturas de correlação especificada. Assim sendo, temos que

$$a_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \pi_{j+k}.$$

Temos que no caso $\pi \geq \frac{n-1}{n}$ a seqüência $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ se escreve como:

$$\pi_0 = 1;$$

$$\pi_k = p_1 \pi + p_2 (1 - k(1 - \pi)) + (1 - p_1 - p_2) \pi^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p_1, p_2, \quad 0 \leq p_1 + p_2 \leq 1.$$

No caso $\pi \leq \frac{1}{n}$ a seqüência $\{\pi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ se escreve como:

$$\pi_0 = 1;$$

$$\pi_k = p_1 \pi + p_2 \pi I(k=1) + (1 - p_1 - p_2) \pi^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p_1, 0 \leq p_2, \quad 0 \leq p_1 + p_2 \leq 1,$$

onde $I(\cdot)$ representa a função indicadora.

Assim, temos que para $\pi \geq \frac{n-1}{n}$,

$$P_j = a_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \pi_{j+k};$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \{I(k=0) + I(k \in \{1, 2, \dots, n\}) [p_1 \pi + p_2 (1 - k(1 - \pi)) + (1 - p_1 - p_2) \pi^k]\},$$

$$\text{onde } k = \sum_{i=1}^n j_i.$$

Neste caso temos

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = p_1 p_2 \left(\frac{1-\pi}{\pi} \right) \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1 \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

E no caso $\pi \leq \frac{1}{n}$,

$$P_j = a_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \pi_{j+k};$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \{I(k=0) + I(k \in \{1, 2, \dots, n\}) [p_1 \pi + p_2 \pi I(k=1) + (1-p_1-p_2) \pi^k]\},$$

onde $k = \sum_{i=1}^n j_i$.

Neste caso temos

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = p_1 p_2 \left(\frac{\pi}{1-\pi} \right) \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1 \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, um algoritmo geral é o seguinte

1. Defina $z_0, z_1, \dots, z_{2^n}$ por

$$z_0 = 0,$$

$$z_j = z_{j-1} + P_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2^n-1,$$

$$z_{2^n} = 1.$$
2. Gerar uma amostra U de uma variável com distribuição uniforme em $[0, 1]$.
3. Retornar a sequência j tal que $z_j \leq U < z_{j+1}$.

Assim, calculando-se os valores P_j , levando-se em conta se $\pi \geq \frac{n-1}{n}$ ou $\pi \leq \frac{1}{n}$, temos toda a informação necessária para gerar as seqüências com estruturas de correlação especificadas a partir dos pesos p_1, p_2 . Com essa estrutura, podemos gerar todo o espectro possível de correlações a partir da definição adequada desses pesos.

4.4. Ordem de Dependência Superaditiva

Nesta seção utilizaremos o conceito de ordem de dependência superaditiva e apresentaremos alguns dos principais resultados acerca deste tópico. Em seguida, aplicaremos esses conceitos nos modelos estudados no capítulo anterior e apresentaremos, por meio de um teorema, algumas conclusões sobre a ordenação superaditiva desses modelos.

Definição 4.1. Uma função real Φ definida em $\mathcal{R}^n$ é dita ser superaditiva se

$$\Phi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + \Phi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \geq \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n.$$

onde $\wedge$ e $\vee$ denotam, respectivamente, o máximo e o mínimo componente a componente. Uma função $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é superaditiva se e somente se, para qualquer $i \neq j$, com as outras variáveis fixas, $\Phi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$ é superaditiva em (x_i, x_j) .

Se Φ tem derivadas parciais de segunda ordem, então Φ é superaditiva se e somente se

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0, \text{ para todo } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Definição 4.2. Sejam $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{W}$ dois vetores aleatórios reais n -variados os quais pertencem a $H_n(F_1, F_2, \dots, F_n)$, onde $H_n(F_1, F_2, \dots, F_n)$ denota a família das funções distribuição n -variadas com marginais $F_1, F_2, \dots, F_n$.

$\mathbf{W}$ é dito ser mais superaditivamente dependente que $\mathbf{Z}$ (denotado por $\mathbf{W} \geq_{sa} \mathbf{Z}$) se $E[\Phi(\mathbf{W})] \geq E[\Phi(\mathbf{Z})]$, para todas as funções superaditivas Φ para as quais a esperança existe. Se pelo menos uma das condições acima não for satisfeita, então usaremos a notação

$\mathbf{W} \not\geq_{sa} \mathbf{Z}$.

Teorema 4.1. Sejam $\mathbf{Z}'$ e $\mathbf{W}'$ dois vetores aleatórios reais n -variados os quais pertencem a $H_n(G, G, \dots, G)$, onde G é a função distribuição de uma variável aleatória Bernoulli com esperança π . Seja $\mathbf{Z}'$ com função distribuição de probabilidades idêntica à do modelo 3. Então

- a) para $\pi \leq \frac{1}{n}$ e $\pi \geq \frac{n-1}{n}$, $\mathbf{W}' \geq_{sa} \mathbf{Z}'$.
- b) quando $\frac{1}{n} < \pi < \frac{n-1}{n}$, $\mathbf{W}' \not\geq_{sa} \mathbf{Z}'$.

Prova:

a) Como mostrado no modelo 3, a função distribuição (**) é equivalente ao modelo 1 quando $\pi \geq \frac{n-1}{n}$. De maneira análoga, é equivalente ao modelo 2 quando $\pi \leq \frac{1}{n}$.

Está provado em Hu e Wu (1999, teorema 4.3) que nos casos onde $\frac{n-1}{n} \leq \pi$ e $\pi \leq \frac{1}{n}$, quando $\mathbf{Z}'$ tem função distribuição como nos modelos 1 e 2 respectivamente, $\mathbf{W}' \geq_{sa} \mathbf{Z}'$.

Assim, para $\frac{n-1}{n} \leq \pi \leq \frac{1}{n}$, $\mathbf{W}' \geq_{sa} \mathbf{Z}'$.

b) Para mostrar que quando $\frac{1}{n} < \pi < \frac{n-1}{n}$, $\mathbf{W}' \not\geq_{sa} \mathbf{Z}'$ é suficiente apresentar um contra-exemplo.

Contra-exemplo:

Seja $n=3$, $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 10 \sum_{i=1}^3 \alpha_i$ e $\pi = 0,5$.

Neste caso temos: $\mathbf{W}' = [w_1', w_2', w_3']$ e $\mathbf{Z}' = [z_1', z_2', z_3']$.

É fácil ver que $\Phi(\cdot)$ é uma função superaditiva a partir de que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$,

para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, com $n=3$ e $\pi = 0.5$ neste caso. Então

$\frac{1}{n} < \pi < \frac{n-1}{n}$. Como definido no modelo 3, r é um inteiro tal que $r \leq n\pi < r+1$. Neste caso temos $r = 1$.

No caso especial onde $w_1' = w_2' = w_3' = 0$, quase certamente, temos que $E[\Phi(\mathbf{W}')] = 0$.

Se $\mathbf{Z}'$ é distribuído como $(**)$, temos

$$E[\Phi(\mathbf{Z}')] = \frac{\binom{2-\frac{3}{2}}{\binom{3}{1}}}{\binom{3}{1}} [\Phi(1,0,0) + \Phi(0,1,0) + \Phi(0,0,1)] + \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)}{\binom{3}{2}} [\Phi(1,1,0) + \Phi(1,0,1) + \Phi(0,1,1)].$$

$$E[\Phi(\mathbf{Z}')] = 15.$$

Assim, para $\frac{1}{n} < \pi < \frac{n-1}{n}$, $\mathbf{W}' \not\leq_{sa} \mathbf{Z}'$.

Conclusão

Nesta dissertação estudamos vários conceitos e desenvolvemos alguns resultados a respeito do fenômeno da dependência. Os resultados mais importantes que foram obtidos foram:

- 1) A extensão de alguns resultados da teoria da “Probability Integral Transform” e a aplicação desses resultados a médias ponderadas de cópulas. A importância desse resultado está relacionada com a ligação dos mesmos à estrutura de algumas medidas de dependência, a saber as medidas de dependência baseadas no conceito de concordância (veja Lema 3.1 e Corolário 3.1).
- 2) O desenvolvimento de um algoritmo de geração de seqüências permutáveis com estrutura de correlação especificada, incluindo o caso de correlações negativas. A importância desse resultado está no fato que até então não havia um método sistemático capaz de gerar todo o espectro possível e de modo especificado de correlações para as seqüências permutáveis (veja Modelo 1, 2, 3 e seção 4.3.2).
- 3) A prova que uma distribuição de probabilidade conjunta específica (veja teorema 4.1) é a menos superaditiva dependente dentro da classe da distribuições binárias permutáveis. A importância desse resultado reside no fato que até então a questão se essa distribuição era a menos superaditiva dependente dentro da classe da distribuições binárias permutáveis era um problema em aberto.

Os resultados nesta dissertação propiciam uma base e uma oportunidade para estudar outros relevantes tipos de dependência de variáveis aleatórias multidimensionais que sejam quase-permutáveis, m -dependentes, por exemplo.

Referências

- Alberts, W. (1999). Stop-loss premiums under dependence. *Insurance: Mathematics and Economics* **24**, 173-185.
- Ambagastipitiya, R.S. (1998). On the distribution of a sum of correlated aggregated claims. *Insurance: Mathematics and Economics* **23**, 15-19.
- Ambagastipitiya, R.S. (1999). On the distribution of two classes of correlated aggregate claims. *Insurance: Mathematics and Economics* **24**, 301-308.
- Asmussen, S., (1989). Risk theory in a Markovian environment. *Scandinavian Actuarial Journal* **23**, 69-100.
- Daykin, C.D., Pentikäinen, T. and Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries*. London: Chapman and Hall.
- Diaconis, P. and Freedman, D. (1980). De Finetti's theorem for Markov chains. *The Annals of Probability* **8**, 115-130.
- Dhaene, J. and Goovaerts, M. (1996). Dependency of risks and stop-loss order. In: *ASTIN Bulletin* **26**, 201-212.
- Dhaene, J. and Denuit, M. (1999). The safest dependence structure among risk. *Insurance: Mathematics and Economics* **25**, 11-21.
- Dhaene, J., Wang, S., Young, V. and Goovaerts, M. (2000). Comonotonicity and maximal stop-loss premiums. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries* **2**, 99-113.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. (2002a). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics* **31**, 3-33.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. (2002b). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications. *Insurance: Mathematics and Economics* **31**, 133-161.
- Embrechts, P., McNeil, A. and Strauman, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. by M. Dempster and H.K. Moffatt, 176-223.
- Frey, R., McNeil, A. and Nyfeler, M. (2001). Copulas and credit models, *Risk*, October 2001, 111-114.
- Gerber, H.U. (1982). Risk theory in the linear model. *Insurance: Mathematics and Economics* **1**, 177-184.

- Goovaerts, M. and Dhaene, J. (1996). The compound Poisson approximation for a portfolio of dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics* **18**, 81-85.
- Goovaerts, M., Dhaene, J. and De Schepper, A. (2000). Stochastic upper bounds for present value functions. *Journal of Risk and Insurance* **67**, 1-14.
- Gupta, S. (1999). Gini association and pseudo Lorenz curve. *Communications in Statistics: Theory and Methods* **28**, 2181-2199.
- Hoefding, W. and Robbins, H. (1948). The central limit theorem for dependent random variables. *Duke Mathematical Journal* **15**, 773-780.
- Hu, T. and Wu, Z. (1999). On dependency of risks and stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics* **24**, 323-332.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers.
- Kowalczyk, T. (2000). Link between grade measures of dependence and of separability in pairs of conditional distributions. *Statistics & Probability Letters* **46**, 371-379.
- Lee, A.J. (1993). Generating random binary deviates having fixed marginal distributions and specified degrees of association. *The American Statistician* **47**, 209-214.
- Lunn, A.D. and Davies, S.J. (1998). A note on generating correlated binary variables. *Biometrika* **85**, 487-490.
- Mikusinsky, P., H. Sherwood, e M. Taylor (1992). The Fréchet bounds revisited. *Real Analysis Exchange* **17**, 759-764.
- Nelsen, R. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- Nelsen, R., Quesada-Molina, J., Rodríguez-Lallena, J. and Úbeda-Flores, M. (2001). Distribution function of copulas: a class of bivariate probability integral transforms. *Statistics & Probability Letters* **54**, 277-282.
- Simon S., Goovaerts, M. and Dhaene, J. (2000). An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option. *Insurance: Mathematics and Economics* **26**, 175-184.
- Vyncke, D., Goovaerts, M. and Dhaene, J. (2001). Convex upper and lower bounds for present value functions. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **17**, 149-164.
- Wang, S. and Dhaene, J. (1998). Comonotocity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics* **22**, 235-242.