UMA COMPARAÇÃO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA,

ÁRVORES DE CLASSIFICAÇÃO
E REDES NEURAIS:
ANALISANDO DADOS DE CRÉDITO

Claudia Ohtoshi

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Estatística**

Orientadora: **Profa. Dra. Lúcia Pereira Barroso**

- São Paulo, Abril de 2003 -

UMA COMPARAÇÃO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA,
ÁRVORES DE CLASSIFICAÇÃO
E REDES NEURAIS: ANALISANDO DADOS DE CRÉDITO

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Claudia Ohtoshi
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, Abril de 2003.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Lúcia Pereira Barroso (orientadora) - IME-USP
- Profa. Dra. Júlia Maria Pavan Soler - IME-USP
- Profa. Dra. Édina Shisue Miazaki - UnB

*A meus queridos pais,
meu irmão Rodnei
e meu marido Roberto*

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram para a elaboração deste trabalho, em especial:

- À Profa. Dra. Lúcia Pereira Barroso, por toda sua dedicação, paciência e imensa disposição em me ajudar nos momentos difíceis que surgiram durante esta empreitada.
- A meus pais, Celso e Neusa, e a meu irmão Rodnei, que sempre carinhosamente me incentivaram e dos quais tenho muito orgulho.
- Ao meu marido Roberto, que com seu amor me apoiou durante os estudos e me suportou nos momentos de aflição.
- Aos meus superiores e demais colegas do Banco onde trabalho, que me apoiaram e me permitiram ausentar da empresa para me dedicar ao mestrado.
- Ao Departamento de Estatística do IME-USP, pela excelência dos professores, da estrutura oferecida aos alunos e dos programas de cursos existentes.
- À amiga de mestrado Cecília, pela qual tenho grande admiração por seu exemplo de força, coragem e determinação.
- Às amigas Cristina, Dulce, Hitomi e Neuci, que desde os tempos de faculdade até hoje continuam torcendo para que eu realize meus sonhos.

Resumo

Este trabalho tem como finalidade comparar quatro técnicas: Redes Neurais Artificiais, Árvore de Classificação Binária, Real Attribute Learning Algorithm (REAL) e Regressão Logística, aplicadas para definir um modelo de classificação que permita avaliar o risco do cliente de uma dada instituição financeira se tornar inadimplente.

Para a construção desses modelos foram utilizadas variáveis cadastrais e de utilização, ou seja, são modelos baseados não somente nas características do cliente, mas também no seu perfil de comportamento quanto à utilização de conta-corrente e cheque especial.

Tais modelos têm sido utilizados por empresas que concedem crédito massificado, para classificar clientes quanto ao nível de risco e conceder novos créditos ou definir limites em função desse risco.

Como resultado do estudo, foi observado que as Redes Neurais Artificiais e a Regressão Logística tiveram acerto superior às demais técnicas.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Descrição dos Dados	3
3	Regressão Logística	7
4	Árvores de Classificação	12
4.1	Árvore de Classificação Binária	12
4.2	REAL : Real Attribute Learning Algorithm	18
4.2.1	Construção da Árvore	18
4.2.2	Medida de Convicção e Função de Perda	19
4.2.3	Discretização das Variáveis Independentes	20
4.2.4	Ramificação e Agrupamento	21
5	Redes Neurais Artificiais	22

5.1	Definição	22
5.2	Tipos de Arquitetura	24
5.2.1	Redes com uma camada	26
5.2.2	Redes Multicamadas	28
5.3	Algoritmos de Treinamento	28
5.4	Funções de Ativação	38
5.5	Redes Neurais em Problemas de Classificação	39
6	Resultados	45
6.1	Seleção das Amostras	45
6.2	Transformação das Variáveis	47
6.3	Aplicação das Técnicas	48
6.3.1	Regressão Logística	48
6.3.2	Árvore de Classificação Binária	51
6.3.3	REAL	54
6.3.4	Rede Neural Artificial	56
6.4	Comparação dos modelos	58
7	Conclusões	62

A	Variáveis Preditoras	63
B	Valor de Informação (<i>VI</i>)	68
C	Escolha dos Parâmetros do REAL	79
o		
	Bibliografia	86

Capítulo 1

Introdução

A atividade de concessão de crédito para uma grande quantidade de consumidores, executada por bancos, supermercados, lojas de varejo e várias outras organizações, tem crescido rapidamente nos últimos 30 anos. Métodos tradicionais de decisão, baseados na experiência passada de um analista de crédito, tornaram-se ultrapassados e ineficientes em razão do aumento na demanda por crédito, aliado a um ambiente de maior competição internacional e ao avanço computacional. Assim, cada dia mais, modelos estatísticos sofisticados, construídos a partir de dados históricos, têm sido utilizados tanto para auxiliar na decisão sobre a concessão de crédito a um novo cliente, quanto para lidar com clientes existentes, incluindo a decisão de aumentar ou reduzir seus limites de crédito. O conjunto de modelos de decisão e técnicas subjacentes que ajudam na primeira decisão é denominado de *credit scoring*, enquanto que para o segundo tipo de decisão é chamado de *behavioral scoring*.

Em ambos os casos utilizam-se métodos estatísticos usuais, como Análise Discriminante, Regressão Logística e Árvores de Classificação, para a construção de modelos que consigam discriminar entre clientes “bons” e “ruins” de crédito. Uma técnica mais recentemente desenvolvida, baseada no funcionamento do cérebro humano, é um sistema de processamento conhecido por Rede Neural Artificial. Trabalho recente de Rosa (2000) tratou da questão de avaliação de risco de crédito. Entretanto ele não considerou Redes Neurais para a solução

de problemas de classificação, deixando-as como indicação para trabalhos futuros. Ferreira (1999) considerou Redes Neurais, comparando seus resultados com os da Regressão Logística e da Árvore de Classificação. Faltou entretanto fazer a comparação com o REAL (Real Attribute Learning Algorithm), algoritmo desenvolvido por Stern et al. (1996) que foi avaliado por Rosa (2000).

Neste trabalho, é feito um estudo comparativo entre Redes Neurais e o REAL em relação a duas técnicas estatísticas usuais: Regressão Logística e Árvores de Classificação Binária. Outra possibilidade seria fazer a comparação com Análise Discriminante (vide Oliveira (2000) e Desai et al. (1996)). Entretanto várias variáveis consideradas neste trabalho são categorizadas e o uso da transformação para variáveis binárias não levaria a bons resultados. Uma discussão sobre ganhos e perdas quando se categorizam variáveis quantitativas é dada em Rosa (2000). Neste trabalho, a comparação entre as técnicas é feita para um conjunto de dados reais de uma instituição financeira brasileira.

O trabalho é desenvolvido na seguinte seqüência: no Capítulo 2 são descritos os dados utilizados e nos Capítulos 3, 4 e 5, as técnicas de Regressão Logística, Árvores de Classificação (Binária e REAL) e Redes Neurais Artificiais, respectivamente. Maior ênfase foi dada a Redes Neurais e REAL por tratarem-se de técnicas mais recentes e menos usuais, sendo as outras mais exaustivamente estudadas, discutidas e aplicadas na literatura estatística. Os resultados da análise dos dados, a performance das técnicas são dadas no Capítulo 6 e as conclusões finais são dadas no Capítulo 7.

Capítulo 2

Descrição dos Dados

O principal motivo que diferencia entre a abordagem de *credit scoring* e *behavioral scoring* é o fato de que na segunda há mais variáveis disponíveis para a construção do modelo. Além de dados cadastrais e informações de restrição de crédito provenientes de empresas que prestam esse serviço, há características que descrevem o comportamento de pagamento e utilização de produtos dos clientes. Esses dados são obtidos a partir do histórico dos clientes, conforme o fluxo descrito por Thomas et al. (2002). Um particular ponto no tempo é escolhido como o ponto de observação. Um período anterior a esse ponto, por exemplo, 6 ou 12 meses, é designado como o período de “performance” e as características relativas a este período são construídas para serem adicionadas aos dados cadastrais e restritivos dos clientes. Um outro período, por exemplo, 12 meses após o ponto de observação, é considerado para avaliação dos clientes em relação ao comportamento de pagamento de crédito. Ao final desse período, no ponto de avaliação, os clientes são classificados como “bons” ou “ruins” dependendo de seu status de inadimplência no momento da verificação.

Para a aplicação das técnicas que serão apresentadas nos próximos capítulos, foi utilizada uma base com 106.696 clientes que tomaram pelo menos um empréstimo antes de 31 de dezembro de 1999, em uma dada instituição financeira brasileira. Esta base é composta por 38 variáveis independentes, sendo 18 cadastrais e 20 de utilização.

As variáveis cadastrais referem-se às características constantes no formulário que uma pessoa preenche ao abrir uma conta-corrente em um banco. Esses dados são geralmente armazenados em meio magnético e compõem o cadastro de clientes da instituição. Neste trabalho foram consideradas as informações existentes no cadastro em 31 de dezembro de 1999 (ponto de observação).

As variáveis de utilização referem-se às características que descrevem o comportamento do cliente na utilização de produtos e serviços bancários. Neste trabalho foram utilizadas as informações, mês a mês, da conta-corrente e das operações (empréstimos) do cliente, nos últimos seis meses do ano de 1999 (período de “performance”).

Além dessas informações, foi usado o conceito do cliente quanto a seu comportamento de pagamento de empréstimos na instituição, avaliado em determinado período. Assim, no ponto de avaliação (31 de dezembro de 2000), o cliente foi classificado como “bom”(CONCEITO = 1), quando não possuía anotações cadastrais restritivas¹ e seus empréstimos não apresentaram pagamentos com atraso superior a 10 dias, ao longo do ano de 2000 e como “ruim” (CONCEITO = 0), quando seus empréstimos apresentaram pagamentos com atraso superior a 60 dias, ao longo do ano de 2.000. Os clientes, cujos empréstimos apresentaram pagamentos com atraso superior a 10 dias e inferior a 60 dias, foram excluídos da base de análise. Assim, a variável CONCEITO ficou com 98.327 clientes “bons” e 8.369 “ruins”, uma relação de aproximadamente 12 clientes “bons” para 1 “ruim”. Essa última variável é utilizada como variável dependente (Y), a fim de se determinar uma regra de classificação.

Nas Tabelas A.1 e A.2 do Apêndice A estão listadas as variáveis cadastrais e de utilização, suas descrições e seus atributos de respostas.

Para cada variável foi calculado o valor da informação definido por Hand e Henley (1997)

¹Anotação cadastral restritiva refere-se a um apontamento que o cliente tem no cadastro da própria instituição ou de empresas prestadoras de informações (SERASA, SPC, etc.), que restringe acesso a crédito, em função de algum problema de crédito no mercado.

como

$$VI = \sum_j (pb_j - pr_j) \cdot e_j$$

em que

pb_j é a freqüência relativa de clientes “bons” na categoria j da variável considerada, em relação ao número total de clientes “bons”;

pr_j é a freqüência relativa de clientes “ruins” na categoria j da variável considerada, em relação ao número total de clientes “ruins” e

$e_j = \ln(pb_j/pr_j)$ é denominado peso de evidência da categoria j da variável considerada.

O peso de evidência de uma categoria de uma variável assumirá valor zero se a proporção de clientes “bons” e a proporção de clientes “ruins” nessa categoria forem iguais. Nesse caso a categoria não contribuirá para a discriminação dos clientes. Quanto mais distante de zero for o peso de evidência maior é o poder de discriminação da categoria. Se o valor é positivo a categoria discrimina clientes “bons”; se é negativo, clientes “ruins”. Os pesos de evidência podem ser usados como valores das variáveis preditoras em lugar de suas categorias.

Se os valores observados de pb_j e pr_j forem iguais para todas as categorias de uma variável, o valor de informação dessa variável é zero, e esta nada contribui para a regra de classificação. Quanto maiores forem as diferenças entre pb_j e pr_j mais informação a variável conterà. Assim, o valor de informação é um indicativo de quais variáveis têm maior poder de explicação para o modelo.

As tabelas de freqüências e respectivos valores de informação das variáveis e pesos de evidência das categorias são apresentadas no Apêndice B.

Analisando essas tabelas, pode-se concluir que as variáveis (categorias das variáveis) que mais parecem contribuir para a discriminação de clientes “bons” e “ruins” são, na ordem: “Tem restrições SERASA” (sim), “Tem restrições” (sim), “Utilização média de cheque especial” ($< 0,05$), “Utilização máxima de cheque especial” ($< 0,10$), “Dias de excesso em cheque especial” (nenhum dia) e “Saldo médio em conta corrente e investimentos” ($\geq R\$ 500$). As duas primeiras variáveis discriminam clientes “ruins”; as 4 últimas, clientes “bons”.

As variáveis que menos contribuem para a discriminação são: “Tem plano de previdência particular”, “Número de meses desde o menor saldo em conta corrente”, “Número de meses do menor saldo em conta corrente e investimentos”, “Tem plano de saúde particular” e “Sexo”.

Capítulo 3

Regressão Logística

Neste capítulo é descrita a técnica mais usual utilizada para a construção de modelos de regressão quando a variável dependente é categorizada : Regressão Logística. Aqui é descrito somente o caso em que a variável categorizada é dicotômica, por ser a situação de interesse neste trabalho. Para uma extensão do caso em que a variável dependente possui mais do que duas categorias sugere-se a leitura de Hosmer e Lemeshow (1989).

Muitas funções de distribuição foram estudadas para serem usadas na análise de uma variável dependente dicotômica. Cox (1970) e Walker e Duncan (1967) propuseram o uso da distribuição logística, baseado na suposição de que o logaritmo da razão das probabilidades de duas categorias é linear.

Considere o caso em que observações podem ser classificadas em uma de duas categorias mutuamente exclusivas (1 ou 0). Como um exemplo, as categorias 1 e 0 poderiam representar, respectivamente, os eventos em que um indivíduo pode ser classificado como cliente “bom” (pagará todos os empréstimos contraídos no prazo de 10 dias) ou cliente “ruim” (deixará de pagar algum empréstimo ou está inadimplente há mais de 60 dias).

Então seja Y a variável dependente binária que indica se um cliente pertence à categoria

1, ou seja,

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo indivíduo pertence à categoria dos clientes "bons"} \\ 0, & \text{se o } i\text{-ésimo indivíduo pertence à categoria dos clientes "ruins"} \end{cases}$$

e seja $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)'$ o vetor, cujo primeiro elemento é 1 e os demais são os valores observados de p variáveis explicativas ($\mathbf{x}_i$ é o vetor associado ao i -ésimo indivíduo).

O modelo de Regressão Logística é um caso particular dos Modelos Lineares Generalizados (McCullagh e Nelder, 1989), cuja função de ligação é definida por

$$\ln \left\{ \frac{\pi(\mathbf{x})}{1 - \pi(\mathbf{x})} \right\} = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x},$$

em que

$\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$: vetor de parâmetros desconhecidos;

$\pi(\mathbf{x}) = E(Y = 1|\mathbf{x}) = P(Y = 1|\mathbf{x})$: probabilidade de que o cliente esteja no grupo de “bons” clientes, dado o vetor de variáveis $\mathbf{x}$.

Esta probabilidade pode ser expressa como

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x})}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x})}$$

e o modelo pode ser escrito como

$$Y = \pi(\mathbf{x}) + \varepsilon,$$

em que ε é o erro aleatório do modelo.

Como Y pode assumir somente dois valores, o erro ε também pode assumir somente dois valores, ou seja,

- se $Y = 1$, então $\varepsilon = 1 - \pi(\mathbf{x})$, com probabilidade $\pi(\mathbf{x})$,
- se $Y = 0$, então $\varepsilon = -\pi(\mathbf{x})$, com probabilidade $1 - \pi(\mathbf{x})$,

isto é, ε segue uma distribuição com média 0 e variância $\pi(\mathbf{x})(1 - \pi(\mathbf{x}))$. A distribuição condicional de Y , dado o vetor $\mathbf{x}$, é Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a $\pi(\mathbf{x})$. É possível estimar $\pi(\mathbf{x})$ através da estimativa de $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}$.

O vetor de parâmetros β é estimado maximizando-se a função de verossimilhança em relação aos $p + 1$ elementos do vetor (Hosmer e Lemeshow, 1989). As soluções são obtidas por métodos iterativos, em especial o Método de Mínimos Quadrados Reponderados, tal que o passo $(m + 1)$ do algoritmo leva a

$$\beta^{(m+1)} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{(m)}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{(m)}\mathbf{z}^{(m)},$$

em que

$$m = 0, 1, \dots;$$

$\pi_i = P(Y_i = 1|\mathbf{x}_i)$: probabilidade de que o i -ésimo cliente seja classificado como “bom”;

$\mathbf{X}_{(n \times (p+1))}$: matriz das variáveis explicativas dos n indivíduos da amostra;

$$\mathbf{V} = \text{diag}[\pi_1(1 - \pi_1), \pi_2(1 - \pi_2), \dots, \pi_n(1 - \pi_n)];$$

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$: vetor de variáveis dependentes modificadas como a seguir,

$$z_i = \eta_i + \frac{(y_i - \pi_i)}{[\pi_i(1 - \pi_i)]};$$

$$\eta_i = \ln \left\{ \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Para iniciar o algoritmo é necessário atribuir valores iniciais a π_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Para estimar as variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros, o caminho mais comum é utilizar a teoria da verossimilhança, ou seja, obter estimadores pela inversão da matriz de informação dada pelas segundas derivadas parciais do logaritmo na última iteração. Assintoticamente, a variância de $\hat{\beta}$ é dada por $(\mathbf{X}'\mathbf{V}\mathbf{X})^{-1}$.

Na Regressão Logística há várias maneiras de avaliar o ajuste do modelo. Aqui destacamos algumas delas; entretanto, mais informações e detalhes podem ser encontrados em Pregibon (1981), Hosmer e Lemeshow (1989), Neter et al.(1996) e Paula (1997).

A adequacidade do modelo pode ser avaliada através do teste da razão de verossimilhanças. A estatística do teste, também conhecida como desvio do modelo, é

$$D = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i \ln \left(\frac{\hat{\pi}_i}{y_i} \right) + (1 - y_i) \ln \left(1 - \frac{\hat{\pi}_i}{y_i} \right) \right],$$

em que $\hat{\pi}_i = \hat{\pi}(\mathbf{x}_i)$. Sob a hipótese nula, essa estatística segue aproximadamente uma distribuição Qui-Quadrado com $n - (p + 1)$ graus de liberdade e valores altos da mesma indicam falta de ajuste.

No caso do teste univariado sobre cada parâmetro ($H_0 : \beta_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots, p$) uma alternativa é a utilização do Teste de Wald (Rao, 1973), cuja estatística é dada por

$$w_k = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{EP}(\hat{\beta}_k)},$$

em que $\hat{EP}(\hat{\beta}_k)$ é o estimador do erro padrão de $\hat{\beta}_k$. Sob a hipótese nula, essa estatística tem distribuição assintótica Normal Padrão.

Duas medidas baseadas na diferença entre os valores observados e os valores ajustados podem auxiliar na detecção de valores discrepantes; são o resíduo de Pearson e o desvio residual. Para definir esses resíduos considere a seguinte notação:

L : número de valores observados distintos de $\mathbf{x}$;

m_l : número de observações com $\mathbf{x} = \mathbf{x}_l, l = 1, 2, \dots, L$;

y_l : número de vezes que Y assume o valor 1 dentre as observações que apresentam $\mathbf{x} = \mathbf{x}_l$;

$\hat{\pi}_l$: estimativa de $\pi(\mathbf{x}_l)$.

O resíduo de Pearson para o l -ésimo valor de $\mathbf{x}$ é dado por

$$\chi_l = \frac{y_l - m_l \hat{\pi}_l}{\sqrt{m_l \hat{\pi}_l (1 - \hat{\pi}_l)}}$$

e o desvio residual por

$$d_l \pm \left\{ 2 \left[y_l \ln \left(\frac{y_l}{m_l \hat{\pi}_l} \right) + (m_l - y_l) \ln \left(\frac{m_l - y_l}{m_l (1 - \hat{\pi}_l)} \right) \right] \right\}^{1/2}$$

onde o sinal $+$ ou $-$ é o mesmo sinal de $(y_l - m_l \hat{\pi}_l)$.

Um gráfico desses resíduos versus o seu índice l ou $\hat{\pi}_l$ podem indicar dados discrepantes. Além disso, os resíduos podem ser resumidos nas estatísticas $\chi^2 = \sum_{l=1}^L \chi_l^2$ e $D = \sum_{l=1}^L d_l^2$. Sob a suposição de que o modelo é adequado, as distribuições de χ^2 e D são aproximadamente Qui-Quadrado com $L - (p + 1)$ graus de liberdade. A indicação de não adequacidade do modelo é dada por valores altos de χ^2 e D .

Outra maneira de avaliar o ajuste do modelo é a aplicação do teste desenvolvido por Hosmer e Lemeshow (1989). Esse teste é baseado em probabilidades estimadas, ordenadas de forma

crescente e agrupadas em g grupos. Esse agrupamento pode ser feito com base em percentis, ou seja, dividir as probabilidades estimadas em g grupos com o mesmo número de observações por grupo (n/g) ou em valores fixados; por exemplo, o primeiro grupo conteria as observações cujas probabilidades estimadas são menores do que 0,10; o segundo as que têm probabilidade entre 0,10 e 0,20 e assim por diante.

A estatística do teste é a estatística de Qui-Quadrado de Pearson aplicada a uma tabela de dimensão $2 \times g$, isto é,

$$\hat{C} = \sum_{k=1}^g \frac{(o_k - n_k \bar{\pi}_k)^2}{n_k \bar{\pi}_k (1 - \bar{\pi}_k)}$$

em que

n_k : número de observações no k -ésimo grupo;

o_k : número de observações no k -ésimo grupo com $Y = 1$;

$\bar{\pi}_k$: média das probabilidades estimadas das observações.

Segundo Hosmer e Lemeshow (1989), quando $L = n$ e o modelo é bem ajustado, $\hat{C}$ tem distribuição aproximadamente Qui-Quadrado com $g - 2$ graus de liberdade. A falta de ajuste é indicada por valores altos de $\hat{C}$.

A regra de classificação em uma das populações consiste em estimar $\pi(\mathbf{x})$ para uma nova observação $\mathbf{x}_c$: se $\hat{\pi}(\mathbf{x}_c) \geq 0,50$, classificar a observação no grupo dos clientes “bons”; caso contrário, no grupo dos “ruins”.

Capítulo 4

Árvores de Classificação

Neste capítulo é considerada a classificação em uma de g populações e são descritos dois tipos de Árvores de Classificação : a binária e o REAL. Outros métodos não paramétricos são detalhados em Sanda (1990).

4.1 Árvore de Classificação Binária

A análise com Árvore de Classificação Binária é um método não paramétrico utilizado para explorar a estrutura de um conjunto de dados, podendo ser utilizado tanto em problemas de regressão como de classificação. Nestes problemas há um conjunto de variáveis explicativas x e uma única variável dependente Y . Foi primeiramente descrita no livro de Breiman et al.(1984) e é uma extensão do algoritmo AID (Automatic Interaction Detection) proposto por Morgan e Sonquist (1963). A apresentação de árvores de classificação descrita aqui segue a discussão desse livro.

A Árvore de Classificação Binária é um conjunto de regras, dispostas na forma de árvore, determinadas por um procedimento conhecido como particionamento recursivo.

A idéia implícita na árvore de classificação é dividir a amostra de dados em grupos cada vez mais homogêneos em relação às categorias da variável dependente até que todos os subgrupos sejam suficientemente homogêneos e não possam mais ser divididos.

Assim, uma árvore de classificação T para uma variável dependente categorizada Y é construída por repetidamente dividir uma amostra em dois subconjuntos descendentes “mais puros”, com elementos pertencentes à mesma categoria da variável dependente, do que o subconjunto matriz. O problema principal é como utilizar as variáveis explicativas para dividir a amostra de forma otimizada formando subconjuntos menores e mais puros. A regra denotada por s para dividir a amostra em dois subgrupos usa as variáveis explicativas de acordo com o critério que será descrito a seguir. Os subgrupos são chamados de nós. A amostra inteira é denotada como nó raiz e é representado por t_1 . Conseqüentemente, os nós descendentes são batizados por t_L para a subamostra descendente à esquerda e por t_R para a subamostra descendente à direita. Subgrupos que não são mais divididos são chamados de nós terminais. Graficamente, os nós e regras de partição, denotados respectivamente por t e s , podem ser visto na Figura 4.1.

Figura 4.1: *Um Exemplo de Árvore de Classificação*

Neste exemplo, t_1 é o nó raiz que é dividido de acordo com a regra s_1 em dois subconjuntos descendentes t_2 e t_5 , ou seja t_2 é o nó descendente à esquerda e t_5 é o nó descendente à direita do nó matriz t_1 . Então t_2 é dividido de acordo com a regra s_2 em mais dois nós descendentes t_3 e t_4 . Uma vez que esses nós não são mais divididos, eles são nós terminais. O nó t_5 é dividido de acordo com a regra s_5 em dois nós descendentes t_6 e t_7 dos quais t_6 é um nó terminal. Finalmente t_7 se divide de acordo com s_7 nos nós terminais t_8 e t_9 .

Para determinar a partição de um nó qualquer t em t_L e t_R , considera-se inicialmente o conjunto $S(t)$ de todas as possíveis regras de partição s em relação ao nó t . Cada regra de partição s é definida em função de uma das variável X_j ($j = 1, \dots, p$) do vetor $\mathbf{x}$.

No caso de variáveis explicativas quantitativas, um exemplo de regra poderia ser s_1 definida como

$$s_1 : t_L = \{\mathbf{x} \in t | x_1 \leq 3\} \quad \text{e} \quad t_R = \{\mathbf{x} \in t | x_1 > 3\}.$$

No caso de variáveis explicativas categorizadas, um exemplo de regra poderia ser s_2 definida como

$$s_2 : t_L = \{\mathbf{x} \in t | x_2 \in \{1, 2\}\} \quad \text{e} \quad t_R = \{\mathbf{x} \in t | x_2 \in \{3\}\},$$

em que X_2 é uma variável categorizada que assume os valores $\{1, 2, 3\}$.

Em seguida, é necessário determinar a regra de partição $s \in S$ que melhor separa as populações subjacentes da variável dependente, denominada de regra de partição ótima e denotada por s^* . Uma vez determinada essa regra, t é particionado em t_R e t_L de acordo com s^* . O processo se repete sucessivamente, considerando os nós subjacentes t_R e t_L criados, até que o nó subjacente criado se torne “puro”, ou seja, as observações provenham da mesma população ou tenha poucas observações de outras populações (usualmente, em torno de 5). O nó puro é o que denominamos anteriormente de nó terminal.

Um dos critérios utilizados para determinar a regra de partição ótima s^* é o critério de Gini, que se baseia no somatório das variâncias das observações em um determinado nó. Denotando a i -ésima população por τ_i , $i = 1, 2, \dots, g$ e redefinindo as observações no nó t como 1 se a

observação provier de τ_i e 0, caso contrário, a variância amostral destas observações será estimada por $\hat{P}(\tau_i|t)(1 - \hat{P}(\tau_i|t))$, onde

$$\hat{P}(\tau_i|t) = \frac{\hat{p}_i n_i(t)}{n_i \hat{P}(t)},$$

p_i é a probabilidade a priori da i -ésima população, que geralmente é estimada por $\frac{n_i}{n}$ ou é considerada igual para todas as populações, isto é, $\frac{1}{g}$, $n_i(t)$ é o número de casos da população i no nó t , n_i é o número de casos na população i e $\hat{P}(t)$ é a probabilidade estimada de que uma observação esteja no nó t , dada por

$$\hat{P}(t) = \sum_{j=1}^g \frac{\hat{p}_j n_j(t)}{n_j}.$$

Somando-se essas variâncias para todas as populações obtemos a medida de impureza de Gini, dada por

$$i(t) = \sum_{i=1}^g \hat{P}(\tau_i|t)(1 - \hat{P}(\tau_i|t)),$$

que indica o grau de heterogeneidade das observações no nó em questão, ou seja, quanto menor essa medida, mais homogêneas são as observações no nó.

A medida de Gini pode ser reescrita como

$$i(t) = 1 - \sum_{i=1}^g \hat{P}^2(\tau_i|t)$$

uma vez que $\sum_{i=1}^g \hat{P}(\tau_i|t) = 1$.

Essa medida atinge o valor máximo quando $\hat{P}^2(\tau_i|t) = 1/g$ para $i = 1, \dots, g$ e valor mínimo quando o nó t for “puro”, ou seja, quando $\hat{P}^2(\tau_i|t) = 1$, para algum i e $\hat{P}^2(\tau_h|t) = 0$, para todo $h \neq i$. Por isso, $i(t)$ é denominado medida de impureza do nó t .

A melhor partição de um nó t em t_R e t_L é dada pela regra ótima s^* que maximiza

$$\Delta i(s, t) = i(t) - P_L i(t_L) - P_R i(t_R),$$

em que P_L é a probabilidade de uma observação ser classificada como membro do nó descendente esquerdo e P_R é a probabilidade de uma observação ser classificada como membro do

nó descendente direito. A partição ótima é aquela que maximiza o descréscimo na impureza da árvore inicial $i(t)$.

A função $\Delta i(s, t)$ é maximizada em uma rotina de dois passos. Primeiro, para cada variável explicativa qualitativa encontra-se a categoria ou subconjunto de categorias A que maximiza $\Delta i(s, t)$, ou seja, se uma observação do nó original pertence à categoria A então ela é alocada no nó descendente esquerdo; caso contrário, no nó descendente direito. Se a variável explicativa é quantitativa, um valor c é escolhido de modo a maximizar $\Delta i(s, t)$, ou seja, se uma observação é menor ou igual a c então ela é alocada no nó descendente esquerdo; caso contrário, no nó descendente direito. Segundo, escolhe-se a variável que conduz ao maior valor de $\Delta i(s, t)$ em relação a todas as variáveis explicativas. O processo de partição segue nos nós descendentes até que a árvore não possa ser mais particionada, ou seja, quando atinge o nó completamente puro ($i(t) = 0$) ou quando o número de observações em um nó fica abaixo de um número pré especificado (já mencionado anteriormente ser usualmente 5). Esta árvore final é denominada árvore máxima e é denotada por T_{max} . No entanto, essa árvore pode não produzir uma regra de classificação boa para novas observações, pois depende da amostra utilizada.

Portanto, o próximo objetivo é encontrar a árvore de tamanho correto (árvore ótima) T^* , através do corte (ou poda) da árvore T_{max} .

A regra de classificação para um nó t é feita classificando-se todas as observações deste nó na população cuja probabilidade a posteriori estimada $\hat{P}(\tau_i|t)$ for maior ($i = 1, \dots, g$). A taxa de erro aparente no nó t é então definida como

$$e_{ap}(t) = 1 - \max_{i=1, \dots, g} \hat{P}(\tau_i|t).$$

Conseqüentemente, a taxa de erro aparente de uma árvore é dada por

$$e_{ap}(T) = \sum_{t \in \tilde{T}} e_{ap}(t) \hat{P}(t),$$

em que $\tilde{T}$ é o conjunto de nós terminais de T . Define-se uma sub-árvore T_t da árvore T como a árvore formada pelo nó t e todas as ramificações de t em T . Assim, analogamente, a taxa

de erro aparente devido à sub-árvore T_t é dada por

$$e_{ap}(T_t) = \sum_{t' \in \tilde{T}_t} e_{ap}(t') \hat{P}(t'),$$

em que $\tilde{T}_t$ é o conjunto de nós terminais de T_t .

O primeiro passo para determinar a árvore ótima é construir uma sequência de árvores $T_0 = T_{max}, T_1, T_2, \dots, T_N = t_1$ candidatas a T^* . Partindo-se de T_{max} o objetivo é definir como as podas devem ser feitas até se chegar a t_1 . Para qualquer nó, sub-árvore, árvore T , o critério de poda está baseado na seguinte medida

$$R_\alpha(T) = e_{ap} + \alpha n(T),$$

em que

$\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ é denominado parâmetro de complexidade;

$e_{ap}(T)$ é a taxa de erro aparente e

$n(T)$ é o número de nós terminais da árvore T .

Então, o procedimento consiste em:

- (i) seja $i = 0$ e $T_0 = T_{max}$;
- (ii) calcule $\alpha_{i+1} = \frac{e_{ap}(t) - e_{ap}(T_t)}{n(T_t) - 1}$ para cada nó não terminal de T_i ;
- (iii) considere o menor valor de α_{i+1} e corte da árvore T_i , todas as partições feitas a partir de t transformando-o em nó terminal. Denote a árvore resultante em T_{i+1} ;
- (iv) incremente o índice i em uma unidade e retorne ao passo (ii) até que T_i seja igual ao nó inicial t_1 .

Uma vez obtidas as candidatas a T^* : $T_1, T_2, \dots, t_1$ escolhe-se como árvore ótima aquela que minimiza a taxa de erro real, que usualmente refere-se a taxa de erro da amostra teste.

4.2 REAL : Real Attribute Learning Algorithm

O REAL é um algoritmo desenvolvido por Stern et al. (1996) para construir árvores de classificação utilizando variáveis independentes contínuas e que também pode ser aplicado quando as variáveis são categorizadas ordinais. Suas principais vantagens são:

- (i) em geral, as árvores de classificação desenvolvidas apresentam menores taxas de erros;
- (ii) uma medida de convicção (ou confiança) é utilizada para se definir o desenvolvimento da árvore;
- (iii) não há necessidade de um critério externo para se definir a árvore ótima (critério de “poda” da árvore).

4.2.1 Construção da Árvore

Cada iteração do algoritmo corresponde a uma ramificação de um nó terminal na árvore. Os dados naquele nó são classificados de acordo com um valor do atributo selecionado e novos ramos são associados a um intervalo de valores específicos. O processo de particionamento dos valores da variável independente em intervalos subjacentes que não se sobrepõem é denominado processo de discretização. Cada iteração inclui:

- (i) a discretização de cada variável e sua avaliação por uma função de perda;
- (ii) a seleção do melhor atributo (variável) e sua adequada partição;
- (iii) a junção de intervalos adjacentes que não alcançam o limite mínimo de convicção.

4.2.2 Medida de Convicção e Função de Perda

Dado um nó t com $n(t)$ clientes, k dos quais classificados incorretamente e $(n(t) - k)$ classificados corretamente, é necessário definir um parâmetro escalar simples para medir a probabilidade de má classificação e seu respectivo nível de confiança.

Seja q a probabilidade de classificar incorretamente um cliente em um dado nó, então, $p = (1 - q)$ é a probabilidade de se classificar corretamente um cliente. Seja $D(c)$ a distribuição acumulada a priori de q , ou seja,

$$D(c) = P(q \leq c) = P(p \geq 1 - c).$$

A medida de convicção é definida como:

$$mc = \min c \mid P(q \leq c) \geq 1 - g(c),$$

em que $g(c)$ é uma função bijetora monotonicamente crescente no intervalo $[0,1]$.

A função convexa $g(c)$ atende aos requisitos anteriores e é dada por:

$$g(c) = c^r, r \geq 1,$$

em que r é denominado parâmetro de convexidade e é um valor a ser definido pelo usuário.

Com as suposições anteriores e assumindo que a distribuição a priori de q é uma Uniforme $(0,1)$, a distribuição a posteriori $D(c, n, k)$ é dada por

$$D(c, n, k) = \frac{\int_{q=0}^c B(n, k, q)}{\int_{q=0}^1 B(n, k, q)},$$

onde

$$B(n, k, q) = \binom{n(t)}{k} q^k p^{n(t)-k}.$$

Desta forma, a distribuição a posteriori é dada pela função beta incompleta e mc é a raiz da função monotonicamente decrescente:

$$mc(n, k, r) = c \mid f(c) = 0$$

$$f(c) = 1 - g(c) - D(c, n, k)$$

$$f(c) = 1 - c^r - \text{betainc}(c, k + 1, n(t) - k + 1).$$

As variáveis independentes são discretizadas em intervalos e a discretização escolhida é aquela que minimiza a função de perda dada por

$$\text{loss} = \sum_j n_j m c_j,$$

ou seja, é a soma das medidas de convicção dos intervalos multiplicadas pelo número de observações em cada intervalo. O valor da função de perda é uma estimativa do número de casos classificados incorretamente nas populações definidas pela variável resposta, fixadas as classes das variáveis independentes.

4.2.3 Discretização das Variáveis Independentes

Dada uma variável preditora, o primeiro passo do procedimento de discretização é ordenar as observações em relação a essa variável e agrupá-las segundo intervalos de valores.

Depois disso agrupam-se os intervalos adjacentes de forma a diminuir a função de perda total da discretização. Em cada passo realiza-se a operação de agrupar intervalos que apresentam ganho máximo.

O ganho em se agrupar J intervalos adjacentes é o decréscimo relativo na função de perda, ou seja, é a diferença entre o valor da função de perda obtido com a discretização da variável em questão nos J intervalos e o valor da função de perda obtido se todos os J intervalos forem agrupados em um só. Esse ganho é dado por

$$\text{gain}(J, 1) = \text{loss}_J - \text{loss}_1,$$

em que loss_J é a função de perda com J intervalos e loss_1 é a função de perda com 1 intervalo.

O procedimento de discretização é interrompido quando não há mais agrupamento de intervalos com ganho positivo.

4.2.4 Ramificação e Agrupamento

Para cada nó terminal na árvore:

- (1) realiza-se o procedimento de discretização para cada variável independente;
- (2) mede-se a função de perda no final da discretização;
- (3) seleciona-se a variável com perda mínima;
- (4) ramifica-se o nó de acordo com a discretização da variável.

Se nenhuma discretização de variável diminui a função de perda por um valor limitante de $\epsilon > 0$ então nenhuma ramificação acontece.

Uma discretização prematura pelo parâmetro selecionado em um dado nível pode inibir a melhoria adicional da árvore de classificação pelo processo de ramificação. Por esta razão, o usuário deve estabelecer um valor limiar de convicção, cl , de modo a agrupar todos os intervalos adjacentes que não alcancem $mc \leq cl$. Para prevenir um loop infinito, o valor da função de perda associado ao intervalo resultante do agrupamento é a soma dos valores da função de perda dos intervalos agrupados. Nos ramos finais, este agrupamento não é feito. O limite de convicção interrompe naturalmente o processo de ramificação e não há necessidade de um procedimento de podagem externo como na Árvore de Classificação Binária.

Capítulo 5

Redes Neurais Artificiais

Neste capítulo é apresentado um resumo sobre Redes Neurais Artificiais. O assunto é muito amplo e maiores detalhes podem ser encontrados em Bishop (1995).

5.1 Definição

A Rede Neural Artificial (RNA) é um sistema de processamento de informações inspirado no funcionamento do cérebro humano. Redes Neurais Artificiais são baseadas nas seguintes suposições:

1. a transmissão das informações ou sinais ocorrem através de elementos de processamento simples chamados de neurônios, nós ou unidades;
2. os sinais são passados para outros neurônios através de conexões (sinapses);
3. cada conexão tem um peso associado que é multiplicado pelo sinal transmitido;
4. a cada neurônio se aplica uma função de ativação (usualmente não linear). A função é aplicada ao seu correspondente valor de entrada.

Assim, uma rede neural consiste de um conjunto de neurônios interligados entre si através de conexões, que têm um peso associado. Cada neurônio tem um estado interno, chamado de ativação, que é uma função das entradas recebidas.

Por exemplo, considere um neurônio artificial simples Y , conforme a Figura 5.1, que recebe as informações das unidades de entrada X_1, X_2 e X_3 . Os valores dessas unidades são respectivamente x_1, x_2 e x_3 . Os pesos das conexões de X_1, X_2 e X_3 ao neurônio Y são w_1, w_2 e w_3 , respectivamente. A entrada da rede, y' , para o neurônio Y é a soma ponderada dos valores de entradas x_1, x_2 e x_3 , ou seja

$$y' = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3.$$

Figura 5.1: *Um neurônio artificial simples*

A ativação do neurônio Y é dada por alguma função da entrada da rede, $y = \varphi(y')$, onde φ é em geral uma função não linear como, por exemplo, a função logística

$$\varphi(y') = \frac{1}{1 + \exp(-y')}.$$

Tipicamente, uma RNA é formada por unidades de entrada, unidades escondidas ou intermediárias e unidades de saída, ponderadas por camadas de pesos, chamados pesos adaptativos ou sinápticos. Como exemplo, veja a Figura 5.2 a seguir, referente a uma rede neural com duas camadas de pesos adaptativos.

Figura 5.2: Rede neural com duas camadas de pesos adaptativos

Uma RNA é caracterizada principalmente pelos seguintes fatores:

1. a arquitetura da rede - a forma como estão conectados os neurônios na rede;
2. o algoritmo de treinamento (ou aprendizado) - método utilizado para determinar os pesos nas conexões da rede;
3. a função de ativação - função que produz a ativação do neurônio, que é função dos sinais de entrada recebidos pelo neurônio.

5.2 Tipos de Arquitetura

É conveniente tratar os neurônios numa rede arranjados em camadas. Geralmente, os neurônios de uma mesma camada possuem a mesma função de ativação e estão conectados aos mesmos conjuntos de neurônios.

A arquitetura da rede consiste na forma como estão arranjadas as camadas de neurônios e os tipos de conexões permitidas entre eles. Em geral, a ativação de cada unidade da camada

de entrada é igual ao próprio valor de entrada externo (ou seja, da informação da amostra), que poderia ser considerado como o valor resultante da função identidade aplicada ao valor de entrada externo.

As redes neurais com alimentação para frente, em que os sinais fluem das unidades de entrada para as unidades de saída em uma direção para frente, são chamadas feedforward. Exemplos são dados nas Figuras 5.1 e 5.2.

Um outro tipo de rede é a rede recorrente que permite que os neurônios dependam não somente dos valores de entrada, mas também dos seus próprios valores defasados. Este tipo de rede é semelhante ao processo utilizado em regressão com médias móveis e envolvem análise de séries de tempo. Um exemplo é a rede de Hopfield (Hopfield, 1984), em que um caso particular é o da Figura 5.3.

Figura 5.3: Rede neural recorrente

Redes Neurais Artificiais são freqüentemente classificadas como de uma camada ou multi-camada, conforme a quantidade de camadas de pesos adaptativos.

5.2.1 Redes com uma camada

Uma RNA com uma única camada é aquela que tem apenas uma camada de pesos adaptativos. Como um exemplo veja a Figura 5.1.

Note que uma rede neural simples, como a da Figura 5.1, com uma única camada e função de ativação identidade ($y = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$) é equivalente a um modelo de regressão múltipla. Os círculos à esquerda equivalem às variáveis explicativas, os pesos adaptativos aos coeficientes de regressão e o círculo à direita à variável resposta.

A seguir serão apresentadas duas redes neurais típicas com uma camada que fornecem a base para o conceito de redes multicamadas.

Neurônio de McCulloch-Pitts

O modelo de McCulloch-Pitts (McCulloch e Pitts, 1943) é considerado como a primeira Rede Neural Artificial. Neste modelo, o neurônio recebe a soma ponderada dos valores provenientes das unidades de entrada e tem como saída o valor 1, se a soma for maior do que determinado valor limiar ou 0, se a soma for menor ou igual a este valor limiar.

Matematicamente, o k -ésimo neurônio deste modelo pode ser representado como

$$y_k = \varphi\left(\sum_{j=1}^p w_{kj}x_j\right),$$

em que y_k é o valor de saída do neurônio k , w_{kj} é o peso associado à entrada j e ao neurônio k , x_j é o valor da j -ésima unidade de entrada e φ é a função de ativação definida como

$$\varphi(y') = \begin{cases} 1, & \text{se } y' > \theta \\ 0, & \text{se } y' \leq \theta \end{cases},$$

em que θ é o valor limiar.

Perceptron de Rosenblatt

Rosenblatt e outros autores desenvolveram uma classe de RNA chamada perceptron (Rosenblatt, 1958). A mais típica dessas redes tem uma única camada de pesos fixos, com função de ativação limiar.

A Figura 5.4 apresenta uma rede Perceptron com uma camada de pesos adaptativos.

Figura 5.4: *Perceptron*

O Perceptron é equivalente a uma análise discriminante linear, em que a função discriminante é dada por

$$y_k = \varphi\left(\sum_{j=0}^p w_{kj}x_j\right),$$

em que $w_{k0} = -\theta$ e $x_0 = 1$. Se a análise discriminante é aplicada a duas populações, φ é definida como

$$\varphi(y') = \begin{cases} 1, & \text{se } y' > 0 \\ -1, & \text{se } y' \leq 0 \end{cases}.$$

A constante $w_{k0} = -\theta$ é referida como limiar ou viés, fazendo uma referência a que a soma

ponderada das entradas deve exceder θ .

5.2.2 Redes Multicamadas

Uma rede multicamada é aquela com mais de uma camada de pesos adaptativos. É uma rede com uma ou mais camadas de unidades escondidas entre as unidades de entrada e de saída.

A utilização de redes multicamadas permite resolver problemas mais complexos não abrangidos pelas redes com uma camada. Entretanto, seu treinamento é mais difícil.

O perceptron multicamada (PML) é talvez a arquitetura de rede multicamada mais comumente utilizada; foi originariamente criada por Rumelhart e McClelland (1986) e é amplamente discutida na maioria dos livros sobre redes neurais (por exemplo, Bishop, 1995). É uma rede formada de unidades perceptrons arranjadas em camadas, onde a função de ativação é limiar (0 - 1) ou sigmoideal. Conseqüentemente a rede tem uma interpretação simples como uma forma de modelo de entradas e saídas, com os pesos e valores limiares (viéses) sendo os parâmetros livres do modelo.

Outra característica de uma rede PML é seu algoritmo de aprendizado, conhecido como algoritmo de retropropagação ou ainda “regra delta generalizada”, que será descrito na Seção 5.3.

5.3 Algoritmos de Treinamento

O treinamento da rede consiste em ajustar os pesos com o objetivo de otimizar o desempenho da mesma, por exemplo, minimizando uma função de erros. Do ponto de vista estatístico, o treinamento seria correspondente à fase de estimação dos parâmetros de um modelo com uma amostra de dados.

O treinamento pode ser classificado de duas formas:

- Supervisionado - é aquele em que para cada vetor de entrada se conhece a saída, podendo-se então modificar os pesos adaptativos da rede de forma ordenada a fim de atingir o objetivo desejado. Na área estatística poderia por exemplo corresponder à análise discriminante ou à regressão logística em que o vetor de entradas é composto pelas variáveis explicativas e a saída é a variável que classifica as unidades em cada grupo.
- Não-supervisionado - difere do anterior pelo fato de não se conhecer a saída para cada vetor de entrada. O treinamento não-supervisionado poderia corresponder aos métodos estatísticos de análise de conglomerados e de componentes principais.

Em relação aos diferentes algoritmos utilizados nos treinamentos supervisionados destacamos os seguintes:

- a) Back-propagation;
- b) Gradiente Descendente Conjugado;
- c) Levenberg-Marquardt;
- d) Delta-bar-Delta;
- e) Quick-propagation.

Algoritmo Back-propagation

O algoritmo mais conhecido e utilizado para treinamento de redes neurais é o Back-propagation (Fausett, 1994). Algoritmos mais avançados considerando a abordagem de redução do gradiente são o Gradiente Descendente Conjugado (Bishop, 1995) e Levenberg-Marquardt (Shepherd, 1997), que são substancialmente mais rápidos do que o Back-propagation em muitos problemas.

Os algoritmos Delta-bar-Delta (Jacobs, 1988) e Quick-Propagation (Fahlman, 1988) são variações do algoritmo Back-propagation.

No Back-propagation, o vetor gradiente da superfície de erros é calculada. Este vetor aponta na direção da inclinação mais íngreme a partir do ponto atual; então movendo-se uma curta distância nesta linha, obtém-se uma diminuição do erro. Com uma seqüência de tais movimentos, eventualmente se chegará a um mínimo de algum tipo. A parte difícil é decidir qual o tamanho da distância (passo) a se mover.

Passos grandes podem convergir mais rapidamente, mas podem também passar da solução ou apontar para a direção errada. Em contrapartida, passos muito pequenos, podem levar à direção correta, mas um número excessivo de iterações poderá ser necessário. Na prática, o tamanho do passo é proporcional à inclinação e a uma constante especial, chamada de taxa de aprendizagem, que é escolhida experimentalmente. A escolha dos pesos iniciais influenciará a chegada a um mínimo global ou local. Um procedimento comum é iniciar com pesos e viéses com valores entre -0,5 e 0,5 e taxa de aprendizagem α com valor entre 0 e 1.

Como ilustração, os passos de um algoritmo Back-propagation para uma rede com uma camada escondida são dados a seguir. O treinamento por Back-propagation tem três estágios: o Feedforward das unidades de entrada, o Back-propagation do erro associado e o ajustamento dos pesos e viéses. Os pesos e viéses (v_{jh} e w_{hk}) e a taxa de aprendizagem (α) são fixados no passo inicial. Os passos restantes são os seguintes:

- **Feedforward**

Para cada unidade da amostra de treinamento, execute os passos 1 a 7:

- 1) cada unidade de entrada (x_j , $j = 1, 2, \dots, p$) transmite seu valor para as unidades da camada escondida;
- 2) calcula-se o valor para a camada escondida (z_h , $h = 1, 2, \dots, q$)

$$z_h^* = v_{0h} + \sum_{j=1}^p x_j v_{jh}$$

e aplica-se a função de ativação

$$z_h = \varphi(z_h^*);$$

- 3) repete-se esse procedimento para as unidades de saída (y_k ; $k = 1, 2, \dots, m$), ou seja,

$$y_k^* = w_{0k} + \sum_{h=1}^q z_h w_{hk} \quad \text{e} \quad y_k = \varphi(y_k^*);$$

- **Back-propagation**

- 4) para cada unidade de saída, calcula-se o erro

$$e_k = (t_k - y_k),$$

em que t_k é o valor alvo de saída (por exemplo, no caso da regressão, t_k é o valor da variável resposta, conhecida na amostra) e multiplica-se pela primeira derivada da função de ativação

$$\delta_k^{(2)} = e_k \varphi'(y_k^*).$$

Os termos para correção dos pesos e vieses das conexões posteriores à camada escondida são

$$\Delta w_{0k} = \alpha \delta_k^{(2)} \quad \text{e} \quad \Delta w_{hk} = \alpha \delta_k^{(2)} z_h,$$

respectivamente;

- 5) para as unidades da camada escondida, calcula-se

$$\delta_h^{(1)} = \sum_{k=1}^m \delta_k^{(2)} w_{hk} \varphi'(z_h^*).$$

Os termos para correção dos pesos e vieses das conexões anteriores à camada escondida são

$$\Delta v_{0h} = \alpha \delta_h^{(1)} \quad \text{e} \quad \Delta v_{jh} = \alpha \delta_h^{(1)} x_j;$$

- **Ajustamento dos pesos e vieses**

- 6) para $h = 0, 1, \dots, q$ e $k = 1, 2, \dots, m$

$$w_{hk}(\text{atual}) = w_{hk}(\text{anterior}) + \Delta w_{hk};$$

7) para $j = 0, 1, \dots, p$ e $h = 1, 2, \dots, q$

$$v_{jh}(atual) = v_{jh}(anterior) + \Delta v_{jh}.$$

Em cada iteração do algoritmo, todos os casos de treinamento (unidades amostrais) são submetidos um a um à rede e os valores de saída real e previsto são comparados através dos erros calculados. Estes erros, juntamente com o gradiente da superfície de erros, são usados para ajustar os pesos e então o processo se repete. Ao final de cada iteração é verificado se um número estipulado de iterações foi atingido ou se o erro total alcançou um nível aceitável. Caso positivo, o algoritmo é interrompido.

A base matemática para o algoritmo Back-propagation é a técnica de otimização conhecida como gradiente descendente. O gradiente de uma função (neste caso, a função é a função de erros e as variáveis são os pesos da rede), quando assume valor positivo, dá a direção em que a função cresce mais rapidamente; o valor negativo do gradiente dá a direção em que a função decresce mais rapidamente.

O algoritmo foi desenvolvido com o objetivo de obter os pesos que minimizem a função de erros, dada por

$$E = 0,5 \sum_{j=1}^m (t_j - y_j)^2.$$

Para isso é necessário calcular as derivadas de E com relação aos pesos e vieses ou gradiente da superfície de erros, de onde vêm os δ 's.

Pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial w_{hk}} &= \frac{\partial}{\partial w_{hk}} 0,5 \sum_{j=1}^m [t_j - y_j]^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial w_{hk}} 0,5 [t_k - \varphi(y_k^*)]^2 \\ &= -[t_k - y_k] \frac{\partial}{\partial w_{hk}} \varphi(y_k^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[t_k - y_k]\varphi'(y_k^*)\frac{\partial}{\partial w_{hk}}(y_k^*) \\
&= -[t_k - y_k]\varphi'(y_k^*)z_h = -e_k\varphi'(y_k^*)z_h.
\end{aligned}$$

Por definição, seja $\delta_k^{(2)} = [t_k - y_k]\varphi'(y_k^*)$.

Em relação aos pesos das camadas escondidas, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial v_{jh}} &= -\sum_{k=1}^m [t_k - y_k]\frac{\partial}{\partial v_{jh}}y_k \\
&= -\sum_{k=1}^m [t_k - y_k]\varphi'(y_k^*)\frac{\partial}{\partial v_{jh}}y_k^* \\
&= -\sum_{k=1}^m \delta_k^{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{jh}}y_k^* \\
&= -\sum_{k=1}^m \delta_k^{(2)}w_{hk}\frac{\partial}{\partial v_{jh}}z_h \\
&= -\sum_{k=1}^m \delta_k^{(2)}w_{hk}\varphi'(z_h^*)x_j.
\end{aligned}$$

Por definição, seja $\delta_h^{(1)} = \sum_{k=1}^m \delta_k^{(2)}w_{hk}\varphi'(z_h^*)$.

Consequentemente, as atualizações para os pesos das unidades de saída são dadas por

$$\begin{aligned}
\Delta w_{hk} &= -\alpha \frac{\partial E}{\partial w_{hk}} \\
&= \alpha [t_k - y_k]\varphi'(y_k^*)z_h \\
&= \alpha \delta_k^{(2)}z_h
\end{aligned}$$

e para os pesos das camadas escondidas temos

$$\begin{aligned}
\Delta v_{jh} &= -\alpha \frac{\partial E}{\partial v_{jh}} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^m \delta_k^{(2)}w_{hk}\varphi'(z_h^*)x_j
\end{aligned}$$

$$= \alpha \delta_h^{(1)} x_j$$

Note também que, para o desenvolvimento acima, a função de ativação deve ser contínua, diferenciável e monotonicamente não decrescente. Além disso, para eficiência computacional, é desejável que as derivadas sejam fáceis de calcular.

O algoritmo também pode ser modificado pela inclusão de um termo de momento, o qual reforça o movimento em uma determinada direção, de modo que se muitos passos são tomados numa mesma direção, o algoritmo aumenta a velocidade para se mover rapidamente sobre platôs.

Exemplo de Back-propagation: considere uma rede com duas unidades de entrada, duas unidades escondidas em uma única camada e uma unidade de saída, com função de ativação binária sigmoidal conforme ilustra a Figura 5.5.

Figura 5.5: *Perceptron*

Como em muitos modelos, os valores 1 na Figura 5.5 estão associados a constantes. No

caso da regressão, por exemplo, estariam associados a interceptos. O conjunto de dados de treinamento é dado a seguir:

$$\begin{array}{cccc} (x_0 & x_1 & x_2 & t_1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 1 & 0 & -1) \\ (1 & 0 & 1 & -1) \end{array}$$

Os pesos e viéses iniciais das unidades de entrada para as unidades escondidas são:

$$\begin{array}{lll} -0,3 & 0,3 & (\text{viéses relacionados às duas unidades escondidas}) \\ 0,2 & 0,3 & (\text{pesos referentes à primeira unidade de entrada}) \\ -0,1 & -0,1 & (\text{pesos referentes à segunda unidade de entrada}) \end{array}$$

Os pesos e viéses iniciais das unidades escondidas para a unidade de saída são:

$$\begin{array}{ll} -0,3 & (\text{viés relacionado à unidade de saída}) \\ 0,2 & (\text{peso da primeira unidade escondida}) \\ 0,3 & (\text{peso da segunda unidade escondida}) \end{array}$$

A função de ativação binária sigmoidal varia no intervalo $(0, 1)$ e é definida como

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}.$$

Sua derivada é dada por

$$\varphi'(x) = \varphi(x)[1 - \varphi(x)].$$

Assim, aplicando o algoritmo Back-propagation, para os dados acima e $\alpha = 1$, temos que os resultados para a primeira iteração são:

x_0	1	1	1
x_1	1	1	0
x_2	1	0	0
t_1	0	-1	-1
v_{01}	-0,300	-0,300	-0,300
v_{11}	0,200	0,200	0,198
v_{21}	-0,100	-0,100	-0,100
v_{02}	0,300	0,300	0,300
v_{12}	0,300	0,300	0,274
v_{22}	-0,100	-0,100	-0,100
y_1	0,544	0,546	0,534
$(t_1 - y_1)^2$	0,296	2,392	2,354
$\sqrt{\sum(t_1 - y_1)^2}$	2,245		

Ao considerar o valor da raiz quadrada da soma dos erros quadráticos em cada iteração como referência para o critério de parada, o algoritmo é interrompido após 695 iterações. Os resultados finais são:

x_0	1	1	1
x_1	1	1	0
x_2	1	0	0
t_1	0	-1	-1
v_{01}	-0,183	-0,183	-0,183
v_{11}	0,421	0,421	0,421
v_{21}	-0,035	-0,035	-0,035
v_{02}	0,389	0,389	0,389
v_{12}	2,542	2,542	2,543
v_{22}	-0,034	-0,034	-0,034
y_1	0,035	0,035	0,051
$(t_1 - y_1)^2$	0,001	1,071	1,104
$\sqrt{\sum(t_1 - y_1)^2}$	1,475		

Outros Algoritmos de Treinamento

Além do Back-propagation, outros algoritmos de treinamento mais sofisticados para oti-

mização da função não linear são utilizados. O algoritmo Gradiente Descendente Conjugado e Levenberg-Marquardt são duas outras formas de algoritmo e se baseiam nas abordagens da procura da linha e da região de confiança do modelo.

O algoritmo da procura da linha é o seguinte : tome uma direção sensível para se mover no espaço multidimensional. Então projete uma linha naquela direção, localize o ponto mínimo junto a esta linha. O que é uma direção sensível neste contexto? Uma escolha óbvia é a direção da inclinação descendente (a mesma direção que seria escolhida pelo Back-propagation). Entretanto, esta escolha intuitivamente óbvia prova ser um tanto pobre. Para obter o mínimo junto a uma direção, mesmo em uma superfície simples como uma parábola, um grande número de procuras de linhas pode ser necessário. Uma melhor abordagem é selecionar direções “sem interferências” ou conjugadas - daí temos o Gradiente Descendente Conjugado. A idéia implícita é que o algoritmo encontra o valor mínimo junto a uma direção particular e a segunda derivada junto a essa direção deve ser mantida zero. Direções conjugadas são selecionadas para manter esta derivada de segunda ordem igual a zero, sob a suposição de que a superfície é parabólica. Se esta condição vale, o número de iterações N para alcançar um ponto mínimo é menor do que no Back-propagation. Na realidade, em uma superfície de erros complexa as direções conjugadas desaparecem, mas essa propriedade continua valendo.

A abordagem da região de confiança do modelo funciona como segue : ao invés de seguir a procura em uma dada direção, é assumido que a superfície tem uma forma simples, tal que o ponto de mínimo possa ser localizado facilmente. O modelo tipicamente assume que a superfície tem uma forma bem comportada (por exemplo, uma parábola), que será verdadeiro se estiver suficientemente perto do ponto de mínimo. De qualquer forma, a suposição pode ser violada grosseiramente e o modelo poderia escolher pontos muito inadequados para se mover. O modelo pode somente ser confiável dentro da região em torno do ponto atual, mesmo que o tamanho desta região não seja conhecido. Portanto, é importante escolher novos pontos para testar o comprometimento entre aquilo sugerido pelo modelo e aquilo sugerido pelo Gradiente Descendente Conjugado. Se o novo ponto é bom, então move-se para ele e reforça-se o papel do modelo em selecionar um novo ponto; se o novo ponto é ruim, permanece-se onde está e reforça-se o papel do passo do Gradiente Descendente Conjugado em selecionar um novo

ponto (e tomar passos menores).

O algoritmo de Levenberg-Marquardt usa um modelo que assume que a função subjacente é localmente linear. É tipicamente o mais rápido dos algoritmos de treinamento, embora tenha algumas limitações. Especificamente, ele pode somente ser usado em redes com saída simples, com a função soma dos erros quadráticos e exige memória de processamento da ordem de W^2 , em que W é o número de pesos na rede. O algoritmo do Gradiente Descendente Conjugado é quase tão rápido e não sofre estas restrições.

O Back-propagation pode ser útil, apesar de não oferecer uma solução tão rápida. É também uma boa escolha se o conjunto de dados é muito grande e contém uma grande quantidade de dados redundantes. Em contraste, os algoritmos do Gradiente Descendente Conjugado e o de Levenberg-Marquardt realizam ambos os cálculos usando todo o banco de dados. Assim, aumentar o número de casos pode reduzir significativamente a velocidade em cada iteração, mas não necessariamente fornece melhoria naquela iteração. Se os dados são esparsos, então adicionar dados fará cada iteração melhor. O Back-propagation pode também ser igualmente bom se o conjunto de dados for muito pequeno.

Duas variações do Back-propagation, que são o Delta-bar-Delta e o Quick-propagation, foram projetadas para lidar com algumas das limitações desta técnica. Em muitos casos, eles não são significativamente melhores do que o Back-propagation e às vezes são piores. Eles também requerem mais controle dos parâmetros do que qualquer dos outros algoritmos descritos anteriormente, o que torna-os mais difíceis de usar.

5.4 Funções de Ativação

A função de ativação é aquela aplicada à entrada de um neurônio. Esta entrada pode ser uma soma ponderada para o caso dos neurônios localizados nas camadas escondidas ou um valor de dado externo (dados da amostra). Assim, para as unidades de entrada, a função de ativação é a função identidade. A mesma função é utilizada para todos os neurônios em uma

camada da rede, podendo ser diferente para camadas distintas. As funções mais comuns são:

1. Função identidade (rampa)

$$\varphi(y') = y';$$

2. Função indicadora (degrau)

$$\varphi(y') = \begin{cases} 1, & y' \geq \theta \\ 0, & y' < \theta \end{cases},$$

em que θ é um valor limiar;

3. Função logística (sigmóide binária)

$$\varphi(y') = \frac{1}{1 + \exp(-y')}, \quad y' \in (0, 1);$$

4. Função tangente hiperbólica (sigmóide bipolar)

$$\varphi(y') = \tanh\left(\frac{y'}{2}\right) = \frac{1 - \exp(-y')}{1 + \exp(-y')}, \quad y' \in (-1, 1);$$

5. Função normal (probit)

$$\varphi(y') = \phi(y'),$$

em que ϕ é a função de distribuição acumulada da Normal padrão.

5.5 Redes Neurais em Problemas de Classificação

Em problemas de classificação, o propósito da rede é associar cada caso a uma das possíveis classes (ou, mais genericamente, estimar a probabilidade do caso pertencer a uma classe). No aplicativo *STATISTICA* Neural Network, usado neste trabalho, um problema de classificação pode ser resolvido através dos seguintes tipos de redes:

- Perceptrons Multicamadas (PML);
- Redes com funções de bases radiais (RBF);

- Redes de Kohonen;
- Redes Neurais Probabilísticas (RNP);
- Redes Lineares.

Perceptrons Multicamadas (PML)

As redes do tipo PML mencionadas na Seção 5.2.2. utilizam uma função de ativação identidade para as unidades de entrada e uma função de ativação não linear para as demais unidades da rede.

A função de ativação padrão é a função logística para todas as camadas. Uma boa alternativa é a função tangente hiperbólica ($\tanh$), que é uma versão simétrica da função logística. Esta pode produzir uma melhor “performance” do que a função logística em muitos casos.

As redes PML podem ser treinadas utilizando-se os seguintes algoritmos: Gradiente Descendente Conjugado, Levenberg-Marquardt, Back-propagation, Quick-propagation ou Delta-bar-Delta. Essas redes são relativamente compactas e amplamente aplicáveis. No entanto, o processo de treinamento pode ser prolongado.

Redes com Funções de Bases Radiais (RBF)

A maioria das redes PML utilizam como argumento ao qual a função de ativação é aplicada, o produto escalar do vetor de entrada e do vetor de pesos relacionado a um neurônio. Os neurônios das camadas intermediárias das redes tipo PML utilizam, geralmente, funções de bases sigmoidais. No entanto, existem redes como a de funções de bases radiais cuja ativação de um neurônio é função da distância entre seus vetores de entradas e de pesos. A rede portanto foi batizada com tal nome, em virtude dos neurônios da camada intermediária utilizarem funções de bases radiais.

As redes com funções de bases radiais geralmente possuem uma camada de entrada, uma camada escondida de unidades radiais e uma camada de saída de unidades lineares. Foram

introduzidas por Broomhead e Lowe (1988) e Moody e Darken (1989) e foram também estudadas por Bishop (1995) e Haykin (1994).

A camada radial tem funções de ativação exponenciais e a camada de saída tem funções de ativação lineares.

É às vezes útil alterar a função de ativação da camada de saída para a logística e usar o algoritmo de treinamento Gradiente Descendente Conjugado, uma vez que a otimização linear é mais propensa a erro. Gradientes Descendentes Conjugados podem também ser alterados na camada de saída linear, embora sejam mais lentos.

Redes com função de bases radiais são treinadas em três etapas:

- Avaliação do centro: os centros da camada escondida radial são otimizados primeiro, usando treinamento não supervisionado. Os centros podem ser avaliados por diversos algoritmos: por amostragem, K-médias ou Kohonen. Esses algoritmos substituem os centros por grupos associados. O objetivo neste passo é particionar o espaço dos padrões em K conjuntos S_j disjuntos e posicionar os centros no ponto médio de cada conjunto S_j .
- Avaliação dos desvios: a dispersão dos dados é refletida nos desvios radiais. Esses podem ser avaliados por diversos algoritmos: explícito, isotrópico, k-vizinhos mais próximos, por exemplo. Neste passo, a finalidade é minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre os vetores de entrada e o centro do conjunto S_j ao qual eles pertencem.
- Otimização linear: a função da camada intermediária da rede RBF é transformar um conjunto de exemplos não linearmente separável em um conjunto linearmente separável. Assim, uma vez que os centros foram associados, o problema agora se reduz a ajustar os pesos da camada de saída linear, através por exemplo da técnica de otimização da pseudo-inversa. Esta garante rapidamente a minimização do erro quando os desvios não são muito grandes. No entanto, pode-se também utilizar o Gradiente Descendente Conjugado ou outros algoritmos iterativos de treinamento.

Os treinamentos das redes RBF são relativamente rápidos. No entanto, tendem a ser maiores do que os das PML's.

Redes de Kohonen

As redes Kohonen têm um camada de entrada e uma camada de saída de unidades radiais. Inventadas por Kohonen (1982), elas são também descritas em muitos outros livros de redes neurais (por exemplo: Haykin, 1994; Patterson, 1996; Fausett, 1994).

A raiz quadrada da função de ativação é usada posteriormente, de modo que a saída representa a distância do caso de entrada a partir do vetor de pesos da unidade. Isto pode ser mudado, se desejado (por exemplo, para linear, quando se quer distância quadrada ou uma execução rápida).

As redes de Kohonen têm tipicamente uma camada de saída bidimensional e são usadas para classificação, executando isso de uma forma incomum. A definição do pós processamento sempre inclui uma variável de saída nominal simples, com um valor nominal para cada classe. As unidades da camada de saída são rotuladas para corresponder às classes. Quando a rede é executada, o nó vencedor (ou seja, um nó com a mais baixa ativação, indicando maior proximidade ao padrão de entrada) é selecionado e seu rótulo é usado para associar o nó à classe. Como uma consequência desta estrutura incomum, a camada de saída da rede de Kohonen é definida pelo usuário e pode ter qualquer número de unidades.

As redes de Kohonen são treinadas usando um algoritmo de aprendizado não supervisionado, que não requer variáveis de saída nos dados de treinamento. Este algoritmo pode também ser usado para atribuir centros a qualquer outra rede onde a primeira camada escondida é radial, incluindo as redes com funções radiais.

Redes Neurais Probabilísticas (RNP)

As redes probabilísticas (Bayesianas) são usadas somente para classificações. Elas têm três ou quatro camadas. Há uma camada de entrada, uma camada de unidades radiais e

uma camada de unidades de classificação lineares. Opcionalmente, pode haver uma quarta camada, também linear, que contém uma matriz de perda. Se uma matriz de perda é incluída, ela pode ser quadrada, ou seja, a terceira e quarta camadas podem ter o mesmo número de unidades. Proposta por Specht (1990), elas contemplam o método de aproximação das funções pela estimação kernel (Parzen, 1962) na forma de uma rede neural. (Leia também Patterson (1996 e Bishop (1995)).

As unidades radiais em redes probabilísticas são usadas para armazenar os exemplares padrões, tomados diretamente dos casos de treinamento. Tipicamente, todo o conjunto de dados de treinamento é utilizado e então o número de unidades na primeira camada escondida deve ser igual ao número de casos de treinamento.

Cada uma das unidades da camada de classificação é somada às saídas dos exemplares padrões para cada classe, conseqüentemente construindo uma estimativa da probabilidade do membro pertencer àquela classe. Seus pesos são ajustados para levar em conta a representação de cada classe e as probabilidades a priori conhecidas de cada classe.

Se definida, a matriz de perda é usada para probabilidades ponderadas pelo custo de má classificação, a fim de chegar a um custo mínimo de decisão.

A função de normalização de soma unitária é usada, de modo que as saídas podem ser interpretadas diretamente como probabilidades (se uma matriz de perda foi definida).

Os treinamentos de redes probabilísticas são extremamente rápidos, mas são em geral muito grandes.

Redes Lineares

As redes lineares têm somente duas camadas: uma de entrada e uma de saída.

Muitos problemas não podem ser resolvidos (ou bem resolvidos) por técnicas lineares. No entanto, muitos outros podem. Quando isto ocorre, deve-se sempre treinar uma rede linear, como um padrão de comparação em relação às demais não lineares, mais complexas.

Redes lineares são melhor treinadas usando uma técnica da pseudo-inversa. Esta técnica otimiza a última camada em qualquer rede assumindo que ela é uma camada linear. A técnica da pseudo-inversa é rápida e garante que se descubra uma solução ótima.

Pode-se também usar o Gradient Descendente Conjugado ou outros algoritmos de treinamento iterativos, para otimizar uma rede linear.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Seleção das Amostras

A partir da base de dados descrita no Capítulo 2, contendo 106.696 casos (98.327 clientes “bons” e 8.369 clientes “ruins”), foram selecionadas 3 amostras (de treinamento, de validação e de teste) a serem utilizadas para aplicação das técnicas mencionadas nos capítulos anteriores. Para a construção das amostras foram utilizados todos os casos de clientes “ruins”, selecionando-se aleatoriamente metade da base de clientes “ruins” (4.185 casos) para compor a amostra de treinamento, sendo o restante dos casos divididos aleatoriamente para compor as amostras restantes (2.092 casos em cada amostra). Para que as amostras tivessem a mesma quantidade de clientes “bons” e “ruins”, foram selecionados aleatoriamente 4.185 clientes “bons” para compor a primeira amostra e 2.092 casos para as demais. A amostra de treinamento, com 8.370 casos, foi utilizada para estimar os pesos (parâmetros) do modelo. A amostra de teste, com 4.184 casos, foi utilizada para checar o poder preditivo do modelo construído. E a amostra de validação, também com 4.184 casos, foi utilizada para evitar o superajuste do modelo, ao se aplicar a Rede Neural Artificial na sua construção. Note que a amostra de validação não é necessária para o ajuste do modelo nas demais técnicas e portanto pode ser utilizada como uma amostra adicional para testar o modelo.

O motivo para não se utilizar uma amostra refletindo a mesma razão de “bons” e “ruins” da população na construção do modelo é que esta é tão fortemente orientada para os clientes “bons” (na base utilizada, 12 “bons” para 1 “ruim”) que poderia interferir na identificação das características da subpopulação de “ruins”, gerando uma regra de classificação que favorece o acerto dos clientes que são “bons”.

Para explicar o termo “superajuste” do modelo, mencionado no primeiro parágrafo deste capítulo, na aplicação da técnica de Redes Neurais, será utilizada a analogia que é feita para o ajustamento da curva polinomial a um conjunto de pontos, cujo conceito implícito pode ser estendido para redes neurais.

Um polinômio é uma equação com termos contendo somente constantes e potência das variáveis. Por exemplo

$$y = 2x + 3 \quad \text{ou}$$

$$y = 3x^2 + 4x + 1.$$

Polinômios diferentes têm diferentes formatos de curva; para potências maiores (e portanto maior número de termos) apresentam formas mais excêntricas. Dado um conjunto de dados, pode-se ajustar uma curva polinomial (ou seja, um modelo) para explicar os dados, que provavelmente apresentará ruídos. Polinômios que apresentam potências menores podem não ser suficientemente flexíveis para se ajustarem a todos os pontos, ao passo que polinômios de potências maiores são mais flexíveis, ajustando os dados exatamente pela adoção de uma forma altamente excêntrica.

Redes Neurais apresentam precisamente o mesmo problema. Uma rede com mais pesos ou com função mais complexa está sujeita a “superajuste”. Uma rede com menos pesos pode não ser suficientemente poderosa para modelar a função subjacente. Por exemplo, uma rede com nenhuma camada intermediária modela, de fato, uma função linear simples.

Desta forma, como é possível então escolher a complexidade da rede? Uma rede grande invariavelmente alcança uma taxa de erro menor, mas isso não necessariamente indica um

bom modelo, ao contrário, pode estar indicando um “superajuste” do modelo.

Uma solução para se evitar o “superajuste” é a utilização de uma amostra de validação no processo de implementação do modelo. Quando o treinamento progride, o erro no treinamento naturalmente cai e a função de erro do modelo diminui. De fato, se o erro na amostra de validação pára de cair, isto indica que a rede está começando a iniciar um “superajuste”. Quando o “superajuste” ocorre na amostra de treinamento é aconselhável diminuir o número de camadas escondidas ou de unidades da rede. Em contrapartida, se a rede não é suficientemente poderosa para modelar a função subjacente, o “superajuste” não é provável acontecer e nem o erro com a amostra de treinamento nem o erro com a amostra de validação diminuirá para um nível satisfatório.

6.2 Transformação das Variáveis

Os dados ausentes (missing) das variáveis preditoras foram tratados como uma categoria separada pois a omissão de resposta nas variáveis cadastrais pode indicar algum problema de crédito e a falta de resposta nas variáveis de utilização o encerramento da conta corrente, por exemplo.

Para a aplicação da Regressão Logística, as respostas das variáveis contínuas das amostras foram primeiramente divididas em classes, conforme apresentado no Apêndice B. Após essa transformação, as variáveis contínuas foram categorizadas e finalmente, todas as variáveis categorizadas, originalmente ou por transformação, foram transformadas em variáveis dummy.

Para a aplicação da Árvore de Classificação Binária, foi utilizada a mesma transformação de variáveis mencionada anteriormente. No entanto, não foram criadas variáveis dummy a partir das respostas ou classes de respostas. As variáveis categorizadas, originalmente ou por transformação, foram utilizadas diretamente na construção da árvore de classificação.

Para aplicação do REAL e da Rede Neural Artificial, as variáveis contínuas também foram

divididas em classes, como mencionado no parágrafo anterior. No entanto, ao invés de criar variáveis dummy a partir de variáveis categorizadas, optou-se por substituir a resposta da variável pelo respectivo peso de evidência da classe a qual pertence. Essa transformação é necessária pois o REAL trabalha com variáveis ordenadas, agrupando categorias vizinhas ou valores próximos. Ao usar a transformação do peso de evidência, as categorias das variáveis ficam ordenadas em relação à variável resposta. Quanto à Rede Neural, os pesos de evidência foram utilizados no lugar das variáveis dummy pois estas fariam aumentar muito o número de variáveis para treinar a rede.

6.3 Aplicação das Técnicas

6.3.1 Regressão Logística

Para a construção do modelo foi utilizado o procedimento de Regressão Logística do aplicativo SAS, o algoritmo stepwise e a opção `LOGIT` como função de ligação. Esse algoritmo verifica a importância das variáveis que são incluídas ou excluídas do modelo com base em uma medida de significância estatística do coeficiente da variável, fixada em 0,05.

Após a definição do modelo foi verificado se havia multicolinearidade entre as variáveis através da opção `TOL` e `VIF` da regressão linear entre a variável dependente e as variáveis independentes do modelo avaliado. Valores de `TOL` abaixo de 0,40 indicam a existência de multicolinearidade.

Na Tabela 6.1 a seguir são apresentadas as estimativas dos parâmetros das variáveis selecionadas para o modelo final, bem como, os erros padrões das estimativas, as estatísticas de Wald, os graus de liberdade e os níveis descritivos do teste de Wald. As estimativas com valor igual a zero referem-se aos atributos das variáveis que representam a categoria de referência na construção da variável dummy.

Tabela 6.1: *Modelo Final da Regressão Logística*

Variável	Estimativa	Erro-Padrão	Wald	g.l.	p-value
<i>Intercepto</i>	3,717	0,4912	57,2548	1	<,0001
<i>Estado civil</i>					
<i>solteiro(a)</i>	-	-	-	1	-
<i>casado(a)-comunhão universal</i>	-0,2864	0,0858	11,1343	1	0,0008
<i>casado(a)-comunhão parcial</i>	-0,2554	0,0931	7,528	1	0,0061
<i>casado(a)-separação de bens</i>	-0,0369	0,3189	0,0134	1	0,9078
<i>viúvo(a)</i>	-0,2579	0,2301	1,2563	1	0,2623
<i>separado(a)judicialmente</i>	0,2612	0,1706	2,3464	1	0,1256
<i>divorciado(a)</i>	0,3854	0,1764	4,7717	1	0,0289
<i>Escolaridade</i>					
<i>analfabeto(a)</i>	-	-	-	1	-
<i>superior completo</i>	-0,7509	0,4497	2,7878	1	0,0950
<i>primeiro grau</i>	-0,1697	0,4451	0,01453	1	0,7031
<i>segundo grau</i>	-0,3072	0,4451	0,04763	1	0,4901
<i>superior incompleto</i>	-0,4169	0,4856	0,07369	1	0,3907
<i>pós-graduado(a)</i>	-1,2885	0,5674	5,1574	1	0,0231
<i>mestrado</i>	-0,944	0,689	1,8769	1	0,1707
<i>doutorado</i>	-3,1991	1,3384	5,7129	1	0,0168
<i>superior em andamento</i>	-1,2526	0,5256	5,6807	1	0,0172
<i>Tipo de residência</i>					
<i>própria quitada</i>	-	-	-	1	-
<i>própria financiada</i>	0,1981	0,1428	1,9238	1	0,1654
<i>alugada</i>	0,2331	0,0948	6,0465	1	0,0139
<i>familiar</i>	0,0877	0,0925	0,08976	1	0,3434
<i>cedida</i>	0,5343	0,1839	8,4447	1	0,0037
<i>Sexo</i>					
<i>feminino</i>	-	-	-	1	-
<i>masculino</i>	0,3692	0,0725	25,9576	1	<,0001
<i>Tem restrições SERASA</i>					
<i>não tem restrições</i>	-	-	-	1	-
<i>tem restrições</i>	4,5924	0,2353	381,0543	1	<,0001

Tabela 6.1: *Modelo Final da Regressão Logística (continuação)*

Variável	Estimativa	Erro-Padrão	Wald	g.l.	p-value
<i>Natureza da ocupação</i>					
<i>trabalhador sem vínc. empregatício</i>	-	-	-	1	-
<i>empregado em empresa privada</i>	-0,2923	0,2067	2,0001	1	0,1573
<i>profissional liberal</i>	-0,3219	0,1147	7,8702	1	0,0050
<i>proprietário de empresa</i>	0,0741	0,0919	0,06505	1	0,4199
<i>funcionário público</i>	-0,0734	0,1081	0,04609	1	0,4972
<i>demais naturezas</i>	0,0356	0,1798	0,00392	1	0,8431
<i>aposentado ou pensionista</i>	-0,405	0,3998	1,026	1	0,3111
<i>Recebe proventos pelo banco</i>					
<i>não recebe proventos</i>	-	-	-	1	-
<i>recebe proventos</i>	-1,2493	0,0829	227,1754	1	<,0001
<i>Região</i>					
<i>norte</i>	-	-	-	1	-
<i>nordeste</i>	-0,164	0,1403	1,3655	1	0,2426
<i>centro-oeste</i>	0,0603	0,1544	0,01526	1	0,6961
<i>sudeste</i>	-0,4047	0,1364	8,8088	1	0,0030
<i>sul</i>	-0,6605	0,1492	19,5903	1	<,0001
<i>Tempo de conta</i>					
<i>(≥ 0 e < 6 meses)</i>	-	-	-	1	-
<i>(≥ 6 e < 12 meses)</i>	0,0879	0,1668	0,02776	1	0,5983
<i>(≥ 1 e < 3 anos)</i>	-0,3788	0,1312	8,3356	1	0,0039
<i>(≥ 3 e < 7 anos)</i>	-0,6586	0,1418	21,5743	1	<,0001
<i>(≥ 7 anos)</i>	-0,6965	0,142	24,0733	1	<,0001
<i>Variação do saldo médio em c/c e investimentos</i>					
<i>missing ou ($< 0,30$)</i>	-	-	-	1	-
<i>($\geq 0,30$ e $< 0,75$) ou ($\geq 2,85$)</i>	-0,1912	0,0877	4,7501	1	0,0293
<i>($\geq 0,75$ e $< 1,05$) ou ($\geq 1,35$ e $< 2,85$)</i>	-0,4011	0,0884	20,5971	1	<,0001
<i>($\geq 1,05$ e $< 1,35$)</i>	-0,7295	0,1301	31,4395	1	<,0001

Tabela 6.1: *Modelo Final da Regressão Logística (continuação)*

Variável	Estimativa	Erro-Padrão	Wald	g.l.	p-value
<i>Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c</i>					
$(\geq 21,25)$	-	-	-	1	-
<i>missing</i> ou $(\geq 13,75$ e $< 21,25)$	-0,2229	0,0989	5,0746	1	0,0243
$(< 1,25)$ ou $(\geq 10,00$ e $< 13,75)$	-0,4842	0,1318	13,498	1	0,0002
$(\geq 6,25$ e $< 10,00)$	-0,6798	0,1097	38,365	1	<,0001
$(\geq 3,75$ e $< 6,25)$	-0,8139	0,1335	37,1787	1	<,0001
$(\geq 1,25$ e $< 3,75)$	-1,2188	0,1375	78,5642	1	<,0001
<i>Cheques devolvidos</i>					
<i>mais que 5 cheques</i>	-	-	-	1	-
<i>missing</i>	-2,029	0,1803	126,6159	1	<,0001
3, 4 ou 5 cheques	-0,8429	0,1596	27,8957	1	<,0001
1 ou 2 cheques	-1,1456	0,1383	68,6629	1	<,0001
<i>nenhum cheque</i>	-1,7682	0,1188	221,4148	1	<,0001
<i>Utilização média de cheque especial</i>					
<i>missing</i> ou $(\geq 0,70)$	-	-	-	1	-
$(\geq 0,50$ e $< 0,70)$	-0,7704	0,1159	44,2057	1	<,0001
$(\geq 0,30$ e $< 0,50)$	-0,8436	0,1119	56,8775	1	<,0001
$(\geq 0,15$ e $< 0,30)$	-1,1909	0,124	92,2646	1	<,0001
$(\geq 0,05$ e $< 0,15)$	-1,52	0,1526	99,2798	1	<,0001
$(< 0,05)$	-2,0409	0,1334	234,2207	1	<,0001

A taxa de acerto do modelo pode ser vista na seção “Comparação dos Modelos”.

6.3.2 Árvore de Classificação Binária

Utilizando o aplicativo ANSWER TREE, foi obtida uma Árvore de Classificação Binária com 8 níveis e 13 nós terminais. As regras de classificação para cada nó podem ser vistas na Figura 6.1 e Tabela 6.2 a seguir.

Figura 6.1: *Árvore de Classificação Final*

Tabela 6.2: *Árvore de Classificação Binária*

Nó	Regra à Esquerda	Regra à Direita
0	“Tem restrições SERASA” = {sim}	“Tem restrições SERASA” = {não}
2	“Dias de excesso em cheque especial” = 0	“Dias de excesso em cheque especial” > 0
4	“Recebe proventos pelo banco” = {sim}	“Recebe proventos pelo banco” = {não}
5	“Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c” $\leq 13,75$	“Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c” > 13,75
7	“Cheques devolvidos” > 5	“Cheques devolvidos” ≤ 5
9	“Escolaridade” $\in$ {superior completo, pós-graduado, mestrado, doutorado}	“Escolaridade” $\in$ {analfabeto, primeiro grau, segundo grau, superior incompleto, superior em andamento}
11	“Dias de excesso em cheque especial” ≤ 7	“Dias de excesso em cheque especial” > 7
13	“Região” $\in$ {sul, sudeste}	“Região” $\in$ {centro-oeste, nordeste, norte}
16	“Cheques devolvidos” > 5	“Cheques devolvidos” ≤ 5
18	“Tempo de conta” ≥ 3	“Tempo de conta” < 3
19	(“Valor de empréstimos dividido pela renda” $\leq 0,55$) ou (missing)	“Valor de empréstimos dividido pela renda” > 0,55
21	(“Utilização máxima de cheque especial” $\geq 0,85$) ou (missing)	“Utilização máxima de cheque especial” < 0,85

A Tabela 6.3 apresenta a descrição dos nós terminais a partir da aplicação das regras da árvore de classificação final na amostra de treinamento. A primeira coluna contém o código correspondente a cada nó terminal desenhado na Figura 6.1. A segunda coluna contém a quantidade de casos que foram associados a cada nó específico. A terceira coluna contém a quantidade de clientes “bons” em cada nó. A quarta coluna contém o percentual de clientes classificados como “bons” em cada nó. E a última coluna contém a classe da variável dependente que foi associada a cada nó terminal.

Tabela 6.3: *Nós Terminais da Árvore de Classificação Binária*

Nó	Qtde. casos	Qtde. bons	% bons	Classe
1	1.890	21	1,11	0
3	2.634	2.356	89,45	1
6	441	359	81,41	1
8	148	47	31,76	0
10	223	169	75,78	1
12	61	51	83,61	1
14	287	175	60,98	1
15	374	166	44,39	0
17	448	73	16,29	0
20	477	294	61,64	1
22	223	64	28,70	0
23	70	43	61,43	1
24	1.094	367	33,54	0

6.3.3 REAL

Para desenvolvimento da árvore de classificação utilizando o REAL, foram primeiramente construídas 10 amostras, com o objetivo de escolher quais parâmetros do REAL conduzem à melhor regra de classificação. Os valores considerados para o parâmetro de convexidade (r) e para a medida de convicção (cl) foram respectivamente $r = (2,0; 3,0; 4,0 \text{ e } 5,0)$ e $cl = (0,10; 0,30 \text{ e } 0,50)$.

Para a aplicação da versão disponível do REAL é necessário especificar o percentual mínimo de casos de um nó interno em relação ao conjunto de dados de treinamento. As simulações foram feitas fixados os valores 0%, 2%, 6% e 8%. Observou-se que quanto maior essa porcentagem menor é o número de níveis e de variáveis que compõem a árvore. Ao utilizar 0%, a árvore incluiu 37 variáveis independentes, isto é, praticamente todas as variáveis disponíveis. Com o valor fixado em 2%, a árvore foi reduzida para 18 variáveis, sem grande comprometimento da taxa de acerto e por isso esse foi o valor escolhido.

No Apêndice C são apresentados o tamanho das amostras (Tabela C.1) e as taxas de acerto na classificação de clientes “ruins” (TAR), “bons” (TAB) e total (TAT), para cada grupo de

parâmetros utilizados (Tabelas C.2 a C.13).

Comparando-se as taxas médias de acerto obtidas com as 10 amostras, verificou-se que os valores $r = 2$ e $cl = 0,5$ (Tabela C.4) conduzem à melhor classificação, especialmente para a taxa de acertos de clientes “ruins” (TAR), que é a mais importante.

A árvore de classificação final obtida ao se aplicar o REAL na amostra de treinamento, com os parâmetros escolhidos acima, apresenta 13 camadas e as 18 variáveis relacionadas abaixo:

1. Escolaridade;
2. Tem plano de previdência particular;
3. Tem restrições;
4. Tem restrições SERASA;
5. Recebe proventos pelo banco;
6. Idade;
7. Saldo médio em c/c e investimentos;
8. Saldo médio em c/c dividido pela renda;
9. Variação do saldo médio em c/c;
10. Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c;
11. Dias de excesso em c/c;
12. Cheques devolvidos;
13. Dias de excesso em cheque especial;
14. Utilização máxima de cheque especial;
15. Utilização média de cheque especial;

16. Valor médio de empréstimos;
17. Valor de empréstimos dividido pela renda;
18. Menor valor de saldo médio em c/c dividido por empréstimos.

Não serão apresentadas as regras de classificação de cada nó como na seção anterior, em virtude da grande quantidade de nós formados pela árvore. As taxas de acerto do modelo nas amostras de treinamento, validação e teste são apresentadas na Tabela 6.5.

6.3.4 Rede Neural Artificial

Utilizando o aplicativo STATISTICA, a rede neural final apresentou 23 variáveis de entrada e 8 nós na camada intermediária, conforme Figura 6.2. As variáveis que compõem o modelo de rede neural são:

1. Estado civil;
2. Escolaridade;
3. Tem restrições SERASA;
4. Recebe proventos pelo banco;
5. Região;
6. Tempo na ocupação;
7. Renda;
8. Tempo de conta;
9. Saldo médio em c/c dividido pela renda;
10. Saldo médio em c/c e investimentos dividido pela renda;

11. Variação do saldo médio em c/c;
12. Variação do saldo médio em c/c e investimentos;
13. Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c;
14. Número de meses desde o menor saldo em c/c;
15. Dias de excesso em c/c;
16. Cheques devolvidos;
17. Dias de excesso em cheque especial;
18. Utilização máxima de cheque especial;
19. Utilização média de cheque especial;
20. Número de meses da utilização de cheque;
21. Valor médio de empréstimos;
22. Menor valor de saldo médio em c/c dividido por empréstimos;
23. Menor valor de saldo médio em c/c e investimentos dividido por empréstimos.

As taxas de acerto do modelo nas amostras de treinamento, validação e teste são apresentadas na Tabela 6.5.

Figura 6.2: *Rede Neural Final, contendo 23 variáveis de entrada e 8 nós na camada intermediária*

6.4 Comparação dos modelos

A Tabela 6.4 apresenta um quadro comparativo da composição de cada um dos modelos obtidos com as técnicas descritas anteriormente.

As variáveis “Escolaridade”, “Tem restrições SERASA”, “Recebe proventos pelo banco”, “Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c” e “Cheques devolvidos” estão presentes em todos os modelos ajustados. As variáveis “Região”, “Tempo de conta”, “Dias de excesso em cheque especial”, “Utilização máxima de cheque especial” e “Utilização média

de cheque especial” estão em três dos quatro modelos e todas no modelo de Redes Neurais. Os modelos que apresentam mais variáveis em comum são os do REAL e de Redes Neurais; 13 das variáveis preditoras estão presentes nos dois. Algumas variáveis foram incluídas em algum modelo mesmo apresentando baixo valor de informação. Isso pode ser explicado pelo fato de que uma variável pode ter maior poder de discriminação na presença de outra do que isoladamente.

A Tabela 6.5 contém as porcentagens de clientes “bons”, “ruins” e totais classificados corretamente para os quatro modelos ajustados.

Observa-se que, com relação ao acerto global, o pior desempenho foi da Árvore de Classificação Binária e os melhores da Rede Neural Artificial e da Regressão Logística, com ligeira superioridade para a Rede Neural Artificial.

Já para a taxa de acerto dos clientes “ruins”, que é a principal delas, os comentários são análogos uma vez que a Árvore de Classificação Binária teve o pior desempenho e a Rede Neural Artificial o melhor. Nesse caso, a superioridade da Rede Neural Artificial sobre a Regressão Logística foi um pouco mais acentuada.

Em termos gerais, espera-se que a taxa de acerto na amostra de treinamento seja maior do que nas amostras de validação e teste pois na primeira as mesmas unidades amostrais são utilizadas tanto para a estimação dos parâmetros como para a classificação das unidades. Isso em geral aconteceu com algumas exceções como, por exemplo, a taxa de acerto de clientes “ruins” da Regressão Logística na amostra de treinamento é de 0,8172 enquanto que na amostra teste é de 0,8231. Entretanto esses valores são bem próximos.

É interessante notar que a maior diferença está nas taxas de acerto de clientes “ruins” na Árvore de Classificação Binária; enquanto a taxa da amostra de treinamento é de 0,8217, as taxas das amostras de validação e teste são respectivamente 0,6689 e 0,6785, bem mais baixas.

Tabela 6.4: *Quadro comparativo das variáveis nos modelos finais*

I=Regressão Logística; II=Árvore de Classificação Binária; III=REAL; IV=Rede Neural Artificial.

Variável		I	II	III	IV
V1	Estado civil	*			*
V2	Escolaridade	*	*	*	*
V3	Tipo de residência	*			
V4	Sexo	*			
V8	Tem plano de previdência particular			*	
V9	Tem restrições			*	
V10	Tem restrições SERASA	*	*	*	*
V11	Natureza da ocupação	*			
V12	Recebe proventos pelo banco	*	*	*	*
V13	Região	*	*		*
V14	Tempo na ocupação				*
V16	Idade			*	
V18	Renda				*
V19	Tempo de conta	*	*		*
V21	Saldo médio em c/c e investimentos			*	
V22	Saldo médio em c/c dividido pela renda			*	*
V23	Saldo médio em c/c e investimentos dividido pela renda				*
V24	Variação do saldo médio em c/c			*	*
V25	Variação do saldo médio em c/c e investimentos	*			*
V26	Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c	*	*	*	*
V27	Número de meses desde o menor saldo em c/c				*
V29	Dias de excesso em c/c			*	*
V30	Cheques devolvidos	*	*	*	*
V31	Dias de excesso em cheque especial		*	*	*
V32	Utilização máxima de cheque especial		*	*	*
V33	Utilização média de cheque especial	*		*	*
V34	Número de meses da utilização de cheque				*
V35	Valor médio de empréstimos			*	*
V36	Valor de empréstimos dividido pela renda		*	*	
V37	Menor valor de saldo médio em c/c dividido por empréstimos			*	*
V38	Menor valor de saldo médio em c/c e investimentos dividido por empréstimos				*

Tabela 6.5: Quadro comparativo do acerto dos modelos

Regressão Logística											
Amostra de Treinamento				Amostra de Validação				Amostra Teste			
	predito				predito				predito		
obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}
ruim	3.420	765	0,8172	ruim	1.718	374	0,8212	ruim	1.722	370	0,8231
bom	617	3.568	0,8526	bom	330	1.762	0,8423	bom	729	1.986	0,8509
total	4.037	4.333	0,8349	total	2.048	2.136	0,8314	total	2.034	2.150	0,8370

Árvore de Classificação Binária											
Amostra de Treinamento				Amostra de Validação				Amostra Teste			
	predito				predito				predito		
obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}
ruim	3.439	746	0,8217	ruim	1.816	899	0,6689	ruim	1.842	873	0,6785
bom	658	2.058	0,7577	bom	744	1.971	0,7260	bom	718	1.997	0,7355
total	2.613	2.819	0,7390	total	2.560	2.870	0,6970	total	2.560	2.870	0,7070

REAL-Real Attribute Learning Algorithm											
Amostra de Treinamento				Amostra de Validação				Amostra Teste			
	predito				predito				predito		
obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}
ruim	3.446	739	0,8234	ruim	1.707	385	0,8160	ruim	1.701	391	0,8131
bom	671	3.514	0,8397	bom	409	1.683	0,8045	bom	350	1.742	0,8327
total	4.117	4.253	0,8315	total	2.116	2.068	0,8102	total	2.051	2.133	0,8229

Rede Neural Multicamada											
Amostra de Treinamento				Amostra de Validação				Amostra Teste			
	predito				predito				predito		
obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}	obs.	ruim	bom	p_{acerto}
ruim	3.545	640	0,8471	ruim	1.754	338	0,8384	ruim	1.763	329	0,8427
bom	616	3.569	0,8528	bom	339	1.753	0,8380	bom	352	1.740	0,8317
total	4.161	4.209	0,8499	total	2.093	2.091	0,8382	total	2.115	2.069	0,8372

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho foram desenvolvidos modelos de *behavioral scoring* com base em variáveis cadastrais e de utilização de clientes de uma instituição financeira, a fim de classificá-los como “bons” ou “ruins” de crédito. Esses modelos foram ajustados por meio de quatro técnicas: Regressão Logística, Árvore de Classificação Binária, Real Attribute Learning Algorithm e Redes Neurais Artificiais, com o objetivo de fazer uma comparação entre elas.

Tomando como critério de comparação a porcentagem de clientes classificados corretamente como “bons” ou “ruins” de crédito, a técnica que apresentou o pior desempenho foi a Árvore de Classificação Binária. Os melhores resultados foram obtidos com a Regressão Logística e com as Redes Neurais Artificiais, com ligeira superioridade para a última, especialmente com relação à taxa de acerto na classificação de clientes “ruins”, que é a principal delas.

Como sugestão para trabalhos futuros destacamos:

1. consideração de um terceiro grupo de clientes (nem “bons” e nem “ruins”) - aqueles que estão inadimplentes entre 10 e 60 dias;
2. verificação da eficácia dos modelos no decorrer do tempo, uma vez que envolvem variáveis comportamentais de clientes, sujeitas a mudanças.

Apêndice A

Variáveis Preditoras

Tabela A.1: Variáveis Cadastrais

	Nome	Descrição	Tipo	Atributos
1	<i>Estado Civil</i>	estado civil do cliente	categorizada	solteiro(a), divorciado(a), separado(a) judicialmente, casado(a)-separação de bens, casado(a)-comunhão parcial, casado(a)-comunhão universal, viúvo(a)
2	<i>Escolaridade</i>	nível de escolaridade do cliente	categorizada	analfabeto(a), primeiro grau, segundo grau, superior incompleto, superior em andamento, superior completo, pós-graduado(a), mestrado, doutorado
3	<i>Tipo de residência</i>	tipo de residência do cliente	categorizada	alugada, cedida ou familiar, própria financiada, própria quitada
4	<i>Sexo</i>	sexo do cliente	binária	1=masculino; 0=feminino
5	<i>Tem plano de saúde do empregador</i>	indicadora se o cliente tem plano de saúde pago pelo empregador	binária	1=sim; 0=não
6	<i>Tem plano de previdência do empregador</i>	indicadora se o cliente tem plano de previdência pago pelo empregador	binária	1=sim; 0=não
7	<i>Tem plano de saúde particular</i>	indicadora se o cliente tem plano de saúde particular	binária	1=sim; 0=não
8	<i>Tem plano de previdência particular</i>	indicadora se o cliente tem plano de previdência particular	binária	1=sim; 0=não

Tabela A.1: Variáveis Cadastrais (continuação)

	Nome	Descrição	Tipo	Atributos
9	<i>Tem restrições</i>	indicadora se o cliente tem anotações restritivas no cadastro do banco	binária	1=sim; 0=não
10	<i>Tem restrições SERASA</i>	indicadora se o cliente tem anotações restritivas no cadastro da SERASA	binária	1=sim; 0=não
11	<i>Natureza da ocupação</i>	natureza da ocupação principal do cliente	categorizada	trabalhador sem vínculo empregatício, empregado em empresa do setor privado, profissional liberal, proprietário de empresa, servidor público ou funcionário de empresa pública ou de economia mista, aposentado ou pensionista, outras
12	<i>Recebe proventos pelo banco</i>	indicadora se o cliente recebe pagamento de salário via banco	binária	1=sim; 0=não
13	<i>Região</i>	região geográfica em que o cliente mora	categorizada	Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sul, Sudeste
	Nome	Descrição	Tipo	
14	<i>Tempo na ocupação</i>	tempo que exerce a ocupação (em anos)	discreta	
15	<i>Tempo de residência</i>	tempo que mora na residência (em anos)	discreta	
16	<i>Idade</i>	idade do cliente (em anos)	discreta	
17	<i>Número de dependentes</i>	quantidade de dependentes + 1	discreta	
18	<i>Renda</i>	valor da renda bruta mensal	contínua	

Tabela A.2: Variáveis de Utilização

	Nome	Descrição	Tipo
19	<i>Tempo de conta</i>	tempo que o cliente possui c/c no banco (em anos)	discreta
20	<i>Saldo médio em conta corrente (c/c)</i>	valor do saldo médio em c/c nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
21	<i>Saldo médio em c/c e investimentos</i>	valor do saldo médio em c/c e investimentos nos últimos 6 meses do ano de 1.999	contínua
22	<i>Saldo médio em c/c dividido pela renda</i>	valor do saldo médio em conta corrente nos últimos 6 meses de 1.999 dividido pela renda	contínua
23	<i>Saldo médio em c/c e investimentos dividido pela renda</i>	valor do saldo médio em conta corrente e investimentos nos últimos 6 meses do ano de 1.999 dividido pela renda	contínua
24	<i>Variação do saldo médio em c/c</i>	saldo médio em c/c no último trimestre de 1.999 dividido pelo saldo médio em c/c no penúltimo trimestre de 1.999	contínua
25	<i>Variação do saldo médio em c/c e investimentos</i>	saldo médio em c/c e investimentos no último trimestre de 1.999 dividido pelo saldo médio em c/c e investimentos no penúltimo trimestre de 1.999	contínua
26	<i>Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c</i>	soma das entradas e saídas dividida pelo saldo médio em c/c nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
27	<i>Número de meses desde o menor saldo em c/c</i>	número de meses desde a ocorrência do menor saldo em c/c nos últimos 6 meses de 1.999	discreta
28	<i>Número de meses do menor saldo em c/c e investimentos</i>	número de meses desde a ocorrência do menor saldo em c/c e investimentos nos últimos 6 meses de 1.999	discreta
29	<i>Dias de excesso em c/c</i>	quantidade de dias em que o cliente excedeu o saldo em c/c nos últimos 6 meses de 1.999	discreta
30	<i>Cheques devolvidos</i>	quantidade de cheques devolvidos nos últimos 6 meses de 1.999	discreta

Tabela A.2: *Variáveis de Utilização (continuação)*

	Nome	Descrição	Tipo
31	<i>Dias de excesso em cheque especial</i>	quantidade de dias em que o cliente excedeu o limite de cheque especial nos últimos 6 meses de 1.999	discreta
32	<i>Utilização máxima de cheque especial</i>	valor da máxima utilização do limite de cheque especial nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
33	<i>Utilização média de cheque especial</i>	valor da utilização média do limite de cheque especial nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
34	<i>Número de meses da utilização de cheque</i>	número de meses desde a última utilização do limite de cheque especial nos últimos 6 meses de 1.999	discreta
35	<i>Valor médio de empréstimos</i>	valor médio dos empréstimos do cliente nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
36	<i>Valor de empréstimos dividido pela renda</i>	valor dos empréstimos dividido pela renda do cliente nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
37	<i>Menor valor de saldo médio em c/c dividido por empréstimos</i>	menor valor do saldo médio em c/c dividido pelo total de empréstimos que o cliente tem com o banco nos últimos 6 meses de 1.999	contínua
38	<i>Menor valor de saldo médio em c/c e investimentos dividido por empréstimos</i>	menor valor do saldo médio em c/c e investimentos dividido pelo total de empréstimos que o cliente tem com o banco nos últimos 6 meses de 1.999	contínua

Apêndice B

Valor de Informação (*VI*)

Variável 1 - Estado civil

	Bons	Ruins	Total	<i>pb/pr</i>	$\ln(pb/pr)$	<i>VI</i>
Solteiro(a)	26.702	3.154	29.856	0,7206	-0,3277	0,0345
Separado(a) judicialmente	3.768	400	4.168	0,8018	-0,2209	0,0021
Divorciado(a)	3.382	342	3.724	0,8417	-0,1724	0,0011
Casado(a)-separação de bens	1.208	103	1.311	0,9982	-0,0018	0,0000
Casado(a)-comunhão parcial	20.953	1.623	22.576	1,0988	0,0942	0,0018
Casado(a)-comunhão universal	39.271	2.599	41.870	1,2861	0,2516	0,0224
Viúvo(a)	3.043	148	3.191	1,7500	0,5596	0,0074
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0693

Variável 2 - Escolaridade

	Bons	Ruins	Total	<i>pb/pr</i>	$\ln(pb/pr)$	<i>VI</i>
Analfabeto(a)	491	62	553	0,6740	-0,3945	0,0010
Primeiro grau	26.825	3.105	29.930	0,7353	-0,3074	0,0302
Segundo grau	33.648	3.570	37.218	0,8022	-0,2204	0,0186
Superior incompleto	2.549	213	2.762	1,0186	0,0184	0,0000
Superior em andamento	1.525	82	1.607	1,5829	0,4593	0,0026
Superior completo	29.884	1.246	31.130	2,0414	0,7136	0,1106
Pós-graduado(a)	2.232	69	2.301	2,7533	1,0128	0,0146
Mestrado	735	18	753	3,4755	1,2457	0,0066
Doutorado	438	4	442	9,3200	2,2322	0,0089
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,1932

Variável 3 - Tipo de residência

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Alugada	12.445	1.714	14.159	0,6180	-0,4813	0,0377
Cedida ou familiar	18.420	1.924	20.344	0,8149	-0,2047	0,0087
Própria financiada	6.000	467	6.467	1,0935	0,0894	0,0005
Própria quitada	61.462	4.264	65.726	1,2268	0,2044	0,0236
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0705

Variável 4 - Sexo

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Masculino	61.108	5.840	66.948	0,8906	-0,1159	0,0088
Feminino	37.440	2.529	39.748	1,2526	0,2252	0,0172
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0260

Variável 5 - Tem plano de saúde do empregador

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Não possui	80.765	7.586	88.351	0,9062	-0,0985	0,0084
Possui	17.562	783	18.345	1,9090	0,6466	0,0550
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0634

Variável 6 - Tem plano de previdência do empregador

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Não possui	82.973	7.676	90.649	0,9200	-0,0833	0,0061
Possui	15.354	693	16.047	1,8858	0,6343	0,0465
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0526

Variável 7 - Tem plano de saúde particular

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Não possui	84.639	7.614	92.253	0,9461	-0,0554	0,0027
Possui	13.688	755	14.443	1,5431	0,4338	0,0213
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0240

Variável 8 - Tem plano de previdência particular

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Não possui	93.887	8.053	101.940	0,9923	-0,0077	0,0001
Possui	4.440	316	4.756	1,1959	0,1789	0,0013
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0014

Variável 9 - Tem restrições

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Sim	1.413	4.147	5.560	0,0290	-3,5404	1,7035
Não	96.914	4.222	101.136	1,9538	0,3222	0,2204
TOTAL	98.327	8.369	106.696			2,0257

Variável 10 - Tem restrições SERASA

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Sim	491	3.729	4.220	0,0112	-4,4912	1,9787
Não	97.836	4.640	102.476	1,7947	0,5848	0,2577
TOTAL	98.327	8.369	106.696			2,2364

Variável 11 - Natureza da ocupação

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Trabalhador sem vínculo empregatício	26.702	3.154	29.856	0,7206	-0,3277	0,0345
Empregado em empresa do setor privado	3.768	400	4.168	0,8018	-0,2209	0,0021
Profissional liberal	3.382	342	3.724	0,8417	-0,1724	0,0011
Proprietário de empresa	1.208	103	1.311	0,9982	-0,0018	0,0000
Funcionário público	20.953	1.623	22.576	1,0988	0,0942	0,0018
Demais naturezas	39.271	2.599	41.870	1,2861	0,2516	0,0224
Aposentado ou pensionista	3.043	148	3.191	1,7500	0,5596	0,0074
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0693

Variável 12 - Recebe proventos pelo banco

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Não	48.172	6.553	54.725	0,6257	-0,4689	0,1374
Sim	50.155	1.816	51.971	2,3507	0,8547	0,2505
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,3879

Variável 13 - Região

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
Nordeste	20.118	2.271	22.389	0,7540	-0,2824	0,0188
Norte	5.423	563	5.986	0,8198	-0,1986	0,0024
Centro-Oeste	11.364	1.129	12.493	0,8567	-0,1546	0,0030
Sudeste	43.578	3.190	46.768	1,1627	0,1508	0,0094
Sul	17.844	1.216	19.060	1,2490	0,2223	0,0080
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0416

Variável 14 - Tempo na ocupação

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(≥ 0 e < 2 anos)	11.147	1.491	12.638	0,6363	-0,4521	0,0293
(≥ 2 e < 12 anos)	52.324	5.064	57.388	0,8794	-0,1285	0,0094
(≥ 12 e < 28 anos)	28.935	1.584	30.519	1,5548	0,4413	0,0463
(≥ 28 anos)	5.921	230	6.151	2,1911	0,7844	0,0257
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,1107

Variável 15 - Tempo de residência

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(≥ 0 e < 6 anos)	35.557	3.743	39.300	0,8085	-0,2126	0,0182
(≥ 6 e < 14 anos)	31.998	2.681	34.679	1,0158	0,0157	0,0001
(≥ 14 e < 28 anos)	23.753	1.625	25.378	1,2441	0,2184	0,0104
(≥ 28 anos)	7.019	320	7.339	1,8669	0,6243	0,0207
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0493

Variável 16 - Idade

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(< 25 anos)	5.306	904	6.210	0,4996	-0,6939	0,0375
(≥ 25 e < 40 anos)	37.555	4.092	41.647	0,7811	-0,2471	0,0264
(≥ 40 e < 58 anos)	42.392	2.871	45.263	1,2568	0,2286	0,0201
(≥ 58 anos)	13.074	0.502	13.576	2,2167	0,7960	0,0581
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,1422

Variável 17 - Número de dependentes + 1

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(= 1 dependente)	29.308	3.301	32.609	0,7557	-0,2801	0,027
(> 1 dependente)	69.019	5.068	74.087	1,1591	0,1476	0,0142
TOTAL	98.327	8.369	10.6696			0,0412

Variável 18 - Renda

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(< R\$ 500)	15.354	2.297	17.651	0,5689	-0,5641	0,0667
(≥ R\$ 500 e < R\$ 1.000)	24.257	2.359	26.616	0,8752	-0,1333	0,0047
(≥ R\$ 1.000 e < R\$ 2.000)	27.301	2.011	29.312	1,1555	0,1445	0,0054
(≥ R\$ 2.000 e < R\$ 4.000)	18.713	1.186	19.899	1,3429	0,2948	0,0143
(≥ R\$ 4.000)	12.702	516	13.218	2,0952	0,7396	0,0499
TOTAL	98.327	8.369	10.6696			0,0412

Variável 19 - Tempo de conta

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(≥ 0 e < 6 meses)	3.712	692	4.404	0,4566	-0,7839	0,0352
(≥ 6 e < 12 meses)	3.810	596	4.406	0,5441	-0,6086	0,0198
(≥ 1 e < 3 anos)	28.640	3.530	32.170	0,6906	-0,3702	0,0483
(≥ 3 e < 7 anos)	21.109	1.707	22.816	1,0525	0,0512	0,0005
(≥ 7 anos)	41.056	1.844	42.900	1,8950	0,6392	0,1261
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,2299

Variável 20 - Saldo médio em c/c

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing	16.355	2.810	19.165	0,4954	-0,7024	0,1190
(< -R\$ 130)	4.243	666	4.909	0,5423	-0,6119	0,0223
(≥ -R\$ 130 e < R\$ 30)	37.903	4.276	42.179	0,7545	-0,2817	0,0353
(≥ R\$ 30 e < R\$ 70)	10.672	283	10.955	3,2097	1,1662	0,0871
(≥ R\$ 70 e < R\$ 100)	5.620	81	5.701	5,9054	1,7759	0,0843
(≥ R\$ 100 e < R\$ 160)	6.935	79	7.014	7,4717	2,0111	0,1229
(≥ R\$ 160)	16.599	174	16.773	8,1196	2,0943	0,3100
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,7810

Variável 21 - Saldo médio em c/c e investimentos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
($\geq$ R\$ 0 e < R\$ 40)	5.159	1.507	6.666	0,2914	-1,2331	0,1574
missing	13.966	2.527	16.493	0,4704	-0,7542	0,1206
(< R\$ 0) ou ($\geq$ R\$ 40 e < R\$ 100)	22.475	2.918	25.393	0,6556	-0,4222	0,0507
($\geq$ R\$ 100 e < R\$ 200)	5.467	458	5.925	1,0160	0,0159	0,0000
($\geq$ R\$ 200 e < R\$ 500)	10.349	468	10.817	1,8821	0,6324	0,0312
($\geq$ R\$ 500)	40.911	491	41.402	7,0918	1,9589	0,7001
TOTAL	98.327	8.369	106.696			1,0600

Variável 22 - Saldo médio em c/c dividido pela renda

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(< -0,90)	1.627	331	1.958	0,4184	-0,8713	0,0200
missing	16.355	2.810	19.165	0,4954	-0,7024	0,1190
($\geq$ -0,90 e < -0,30)	6.258	937	7.195	0,5685	-0,5648	0,0273
($\geq$ -0,30 e < 0,20)	37.464	3.628	41.092	0,8789	-0,1291	0,0068
($\geq$ 0,20 e < 0,50)	16.416	356	16.772	3,9248	1,3673	0,1701
($\geq$ 0,50)	20.207	307	20.514	5,6023	1,7232	0,2909
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,6342

Variável 23 - Saldo médio em c/c e investimentos dividido pela renda

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou (< -0,90)	15.272	2.813	18.085	0,4621	-0,7720	0,1396
($\geq$ -0,90 e < -0,30)	4.949	0.826	5.775	0,51	-0,6733	0,0326
($\geq$ -0,30 e < 0,30)	33.479	3.951	37.430	0,7212	-0,3268	0,043
($\geq$ 0,30 e < 0,70)	11.646	0.379	12.025	2,6154	0,9614	0,0703
($\geq$ 0,70 e < 1,00)	4.639	0.117	4.756	3,3747	1,2163	0,0404
($\geq$ 1,00)	28.342	0.283	28.625	8,524	2,1429	0,5452
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,8711

Variável 24 - Variação do saldo médio em c/c

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing	11.617	3.004	14.621	0,3292	-1,1111	0,2676
(< 0,25)	10.756	1.636	12.392	0,5596	-0,5805	0,0500
(≥ 0,25 e < 0,50) ou (≥ 5,00)	17.144	1.307	18.451	1,1164	0,1101	0,0020
(≥ 0,50 e < 1,00) ou (≥ 2,25 e < 5,00)	32.045	1.444	33.489	1,8888	0,6359	0,0975
(≥ 1,00 e < 2,25)	26.765	978	27.743	2,3293	0,8456	0,1314
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,5485

Variável 25 - Variação do saldo médio em c/c e investimentos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou (< 0,30)	17.405	4.031	21.436	0,3675	-1,0010	0,3050
(≥ 0,30 e < 0,75) ou (≥ 2,85)	28.721	1.989	30.710	1,2290	0,2062	0,0112
(≥ 0,75 e < 1,05) ou (≥ 1,35 e < 2,85)	37.352	1.869	39.221	1,7010	0,5312	0,0832
(≥ 1,05 e < 1,35)	14.849	480	15.329	2,6330	0,9681	0,0907
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,4900

Variável 26 - Entradas mais saídas dividido pelo saldo médio em c/c

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(≥ 21,25)	20.334	3.735	24.069	0,4634	-0,7692	0,1842
missing ou (≥ 13,75 e < 21,25)	16.314	2.737	19.051	0,5073	-0,6787	0,1093
(< 1,25) ou (≥ 10,00 e < 13,75)	7.330	414	7.744	1,5070	0,4101	0,0103
(≥ 6,25 e < 10,00)	20.058	847	20.905	2,0156	0,7009	0,0720
(≥ 3,75 e < 6,25)	14.324	347	14.671	3,5135	1,2566	0,1310
(≥ 1,25 e < 3,75)	19.967	289	20.256	5,8805	1,7716	0,2986
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,8054

Variável 27 - Número de meses desde o menor saldo em c/c

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
0 meses	10.582	1.064	11.646	0,8465	-0,1666	0,0033
missing ou 1 ou 2 meses	36.436	3.458	39.894	0,8968	-0,1089	0,0046
3, 4 ou 5 meses	51.309	3.847	55.156	1,1352	0,1268	0,0079
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0158

Variável 28 - Número de meses do menor saldo em c/c e investimentos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing, 0, 1 ou 2 meses	42.364	4.211	46.575	0,8563	-0,1551	0,0112
3, 4 ou 5 meses	55.963	4.158	60.121	1,1456	0,1359	0,0098
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,0210

Variável 29 - Dias de excesso em c/c

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou (≥ 30 dias)	7.155	2.056	9.211	0,2962	-1,2167	0,2104
(≥ 7 e < 30 dias)	2.359	447	2.806	0,4492	-0,8003	0,0235
(≥ 1 e < 7 dias)	1.349	202	1.551	0,5684	-0,5649	0,0059
(< 1 dia)	87.464	5.664	93.128	1,3143	0,2733	0,0581
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,2980

Variável 30 - Cheques devolvidos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
mais que 5 cheques	2.987	1.657	4.644	0,1534	-1,8747	0,3142
missing	5.838	1.651	7.489	0,3010	-1,2006	0,1656
3, 4 ou 5 cheques	3.625	621	4.246	0,4968	-0,6996	0,0261
1 ou 2 cheques	8.778	876	9.654	0,8529	-0,1591	0,0025
nenhum cheque	77.099	3.564	80.663	1,8412	0,6104	0,2187
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,7270

Variável 31 - Dias de excesso em cheque especial

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
mais do que 29 dias	2.528	1.104	3.632	0,1949	-1,6353	0,1737
missing	23.103	4.890	27.993	0,4021	-0,9111	0,3182
de 15 a 29 dias	2.962	505	3.467	0,4992	-0,6947	0,0210
de 8 a 14 dias	3.323	387	3.710	0,7308	-0,3136	0,0039
de 2 a 7 dias	7.123	505	7.628	1,2005	0,1827	0,0022
1 dia	3.256	193	3.449	1,4359	0,3618	0,0036
nenhum dia	56.032	785	56.817	6,0753	1,8042	0,8589
TOTAL	98.327	8.369	106.696			1,3816

Variável 32 - Utilização máxima de cheque especial

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou ($\geq 0,85$)	30.194	6.678	36.872	0,3848	-0,9550	0,4687
($\geq 0,60$ e $< 0,85$)	11.305	816	12.121	1,1792	0,1648	0,0029
($\geq 0,45$ e $< 0,60$)	6.424	255	6.679	2,1442	0,7628	0,0266
($\geq 0,30$ e $< 0,45$)	6.513	168	6.681	3,2997	1,1938	0,0551
($\geq 0,20$ e $< 0,30$)	5.137	95	5.232	4,6024	1,5266	0,0624
($\geq 0,10$ e $< 0,20$)	6.633	72	6.705	7,8411	2,0594	0,1212
(< 0,10)	32.121	285	32.406	9,5928	2,2610	0,6616
TOTAL	98.327	8.369	106.696			1,3986

Variável 33 - Utilização média de cheque especial

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou ($\geq 0,70$)	26.944	6.070	33.014	0,3778	-0,9734	0,4393
($\geq 0,50$ e $< 0,70$)	6.371	857	7.228	0,6327	-0,4578	0,0172
($\geq 0,30$ e $< 0,50$)	9.125	651	9.776	1,1930	0,1765	0,0027
($\geq 0,15$ e $< 0,30$)	9.542	317	9.859	2,5620	0,9408	0,0557
($\geq 0,05$ e $< 0,15$)	10.760	182	10.942	5,0320	1,6158	0,1417
(< 0,05)	35.585	292	35.877	10,3725	2,3392	0,7649
TOTAL	98.327	8.369	106.696			1,4214

Variável 34 - Número de meses da utilização de cheque

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
não utilizou nos últimos 6 meses	36.862	5.027	41.889	0,6241	-0,4714	0,1064
mês corrente ou 5 meses atrás	46.886	2.906	49.792	1,3732	0,3171	0,0411
2, 3 ou 4 meses atrás	7.137	258	7.395	2,3545	0,8563	0,0358
mês passado	7.442	178	7.620	3,5585	1,2693	0,0691
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,2524

Variável 35 - Valor médio de empréstimos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
($\geq$ R\$ 5.000)	2.241	662	2.903	0,2881	-1,2444	0,0701
($\geq$ R\$ 410 e $<$ R\$ 5.000)	17.405	2.884	20.289	0,5137	-0,6661	0,1116
($\geq$ R\$ 110 e $<$ R\$ 410)	15.396	1.728	17.124	0,7583	-0,2767	0,0138
($\geq$ R\$ 30 e $<$ R\$ 110) ou missing	26.843	2.299	29.142	0,9938	-0,0062	0,0000
($<$ R\$ 30)	36.442	796	37.238	3,8966	1,3601	0,3747
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,5703

Variável 36 - Valor de empréstimos dividido pela renda

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
(≥ 14)	572	264	836	0,1844	-1,6906	0,0435
($\geq 1,05$ e < 14)	5.817	1.684	7.501	0,2940	-1,2242	0,1739
($\geq 0,55$ e $< 1,05$)	5.352	1.148	6.500	0,3968	-0,9243	0,0765
($\geq 0,10$ e $< 0,55$) ou missing	39.069	4.168	43.237	0,7978	-0,2259	0,0227
(≥ 0 e $< 0,10$)	20.496	0.695	21.191	2,5101	0,9203	0,1154
(igual a zero)	27.021	410	27.431	5,6094	1,7244	0,3894
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,8214

Variável 37 - Menor valor de saldo médio em c/c dividido por empréstimos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou (≥ 0 e $< 0,60$)	22.503	4.161	26.664	0,4603	-0,7759	0,2082
(< 0) ou ($\geq 0,60$ e < 6)	47.757	3.840	51.597	1,0585	0,0569	0,0015
(≥ 6 e < 40)	5.000	229	5.229	1,8584	0,6197	0,0146
(≥ 40 e < 70)	1.503	32	1.535	3,9977	1,3857	0,0159
(≥ 70 e < 100)	1.920	36	1.956	4,5394	1,5128	0,0230
(≥ 100 e < 500)	9.876	58	9.934	14,4929	2,6737	0,2500
(≥ 500)	9.768	13	9.781	63,9533	4,1582	0,4066
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,9198

Variável 38 - Menor valor de saldo médio em c/c e investimentos dividido por empréstimos

	Bons	Ruins	Total	pb/pr	$\ln(pb/pr)$	VI
missing ou (≥ 0 e $< 0,10$)	16.826	3.819	20.645	0,3750	-0,9808	0,2797
($\geq 0,10$ e $< 0,30$) ou (≥ -6 e < 0)	23.069	2.739	25.808	0,7169	-0,3328	0,0308
($\geq 0,30$ e $< 1,25$) ou (≥ -30 e < -6)	7.210	513	7.723	1,1962	0,1791	0,0022
($\geq 1,25$ e $< 2,50$) ou (< -30)	11.888	690	12.578	1,4664	0,3828	0,0147
($\geq 2,50$ e < 10)	5.182	218	5.400	2,0232	0,7047	0,0188
(≥ 10)	34.152	390	34.542	7,4534	2,0087	0,6041
TOTAL	98.327	8.369	106.696			0,9503

Apêndice C

Escolha dos Parâmetros do REAL

Tabela C.1: *Tamanho das amostras*

Amostra	Qtde.Bons	Qtde.Ruins	Total
1	848	825	1.673
2	809	864	1.673
3	846	827	1.673
4	858	815	1.673
5	829	844	1.673
6	839	834	1.673
7	851	822	1.673
8	808	865	1.673
9	863	810	1.673
10	818	863	1.681
Total	8.369	8.369	16.738

Tabela C.2: $r = 2,0; cl = 0,10$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,6764	0,8278	0,7531
2	0,6528	0,8245	0,7358
3	0,6759	0,8180	0,7478
4	0,6699	0,8403	0,7573
5	0,6528	0,8384	0,7448
6	0,6847	0,8069	0,7460
7	0,6983	0,8249	0,7627
8	0,6566	0,8391	0,7448
9	0,6790	0,8134	0,7484
10	0,6860	0,7946	0,7388
Média	0,6732	0,8228	0,7479
D.P.	0,0152	0,0149	0,0081

Tabela C.3: $r = 2,0; cl = 0,30$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7152	0,8774	0,7974
2	0,6759	0,8912	0,7800
3	0,7098	0,8948	0,8033
4	0,7043	0,8904	0,7998
5	0,6943	0,9119	0,8022
6	0,7182	0,8892	0,8039
7	0,7360	0,8872	0,8129
8	0,8763	0,7785	0,8290
9	0,7272	0,8934	0,8129
10	0,8413	0,8020	0,8221
Média	0,7398	0,8716	0,8064
D.P.	0,0654	0,0441	0,0137

Tabela C.4: $r = 2,0; cl = 0,50$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,8097	0,8290	0,8195
2	0,7731	0,8504	0,8105
3	0,7944	0,8203	0,8075
4	0,8098	0,8403	0,8255
5	0,8270	0,8359	0,8314
6	0,7974	0,8415	0,8195
7	0,8285	0,8261	0,8273
8	0,8104	0,8601	0,8344
9	0,8247	0,8192	0,8219
10	0,8146	0,8264	0,8203
Média	0,8090	0,8349	0,8218
D.P.	0,0171	0,0133	0,0084

Tabela C.5: $r = 3,0; cl = 0,10$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,6764	0,8278	0,7531
2	0,6528	0,8245	0,7358
3	0,6759	0,8180	0,7478
4	0,6699	0,8403	0,7573
5	0,6528	0,8384	0,7448
6	0,6847	0,8069	0,7460
7	0,6983	0,8249	0,7627
8	0,6566	0,8391	0,7448
9	0,6790	0,8134	0,7484
10	0,6860	0,7946	0,7388
Média	0,6732	0,8228	0,7479
D.P.	0,0152	0,0149	0,0081

Tabela C.6: $r = 3,0; cl = 0,30$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7212	0,8502	0,7866
2	0,6771	0,8554	0,7633
3	0,7050	0,8830	0,7950
4	0,7018	0,8869	0,7968
5	0,7026	0,8914	0,7962
6	0,7098	0,8701	0,7902
7	0,7348	0,8707	0,8039
8	0,8694	0,7512	0,8123
9	0,7148	0,8911	0,8057
10	0,8343	0,7641	0,8001
Média	0,7371	0,8514	0,7950
D.P.	0,0628	0,0515	0,0134

Tabela C.7: $r = 3,0; cl = 0,50$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7952	0,8373	0,8165
2	0,7905	0,8504	0,8195
3	0,7944	0,8203	0,8075
4	0,7828	0,8636	0,8243
5	0,6943	0,9119	0,8022
6	0,7878	0,8403	0,8141
7	0,8285	0,8261	0,8273
8	0,7896	0,8787	0,8326
9	0,8247	0,8192	0,8219
10	0,8146	0,8289	0,8215
Média	0,7902	0,8477	0,8187
D.P.	0,0373	0,0296	0,0091

Tabela C.8: $r = 4,0; cl = 0,10$

Amostra	TAL	TAB	TAT
1	0,6764	0,8278	0,7531
2	0,6528	0,8245	0,7358
3	0,6759	0,8180	0,7478
4	0,6699	0,8403	0,7573
5	0,6528	0,8384	0,7448
6	0,6847	0,8069	0,7460
7	0,6983	0,8249	0,7627
8	0,6566	0,8391	0,7448
9	0,6790	0,8134	0,7484
10	0,6860	0,7946	0,7388
Média	0,6732	0,8228	0,7479
D.P.	0,0152	0,0149	0,0081

Tabela C.9: $r = 4,0; cl = 0,30$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7273	0,8738	0,8016
2	0,8310	0,7862	0,8093
3	0,7098	0,8948	0,8033
4	0,7043	0,8904	0,7998
5	0,7026	0,9059	0,8033
6	0,7182	0,8903	0,8045
7	0,7360	0,8872	0,8129
8	0,8763	0,7785	0,8290
9	0,7272	0,8934	0,8129
10	0,8494	0,7763	0,8138
Média	0,7582	0,8577	0,8091
D.P.	0,0666	0,0540	0,0087

Tabela C.10: $r = 4,0; cl = 0,50$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7200	0,8691	0,7956
2	0,8044	0,8269	0,8153
3	0,7944	0,8203	0,8075
4	0,6982	0,8974	0,8004
5	0,6955	0,9131	0,8033
6	0,7866	0,8403	0,8135
7	0,7299	0,8954	0,8141
8	0,8012	0,8688	0,8338
9	0,7148	0,9038	0,8123
10	0,8239	0,8130	0,8186
Média	0,7569	0,8648	0,8114
D.P.	0,0495	0,0374	0,0107

Tabela C.11: $r = 5,0; cl = 0,10$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,6764	0,8278	0,7531
2	0,6528	0,8245	0,7358
3	0,6759	0,8180	0,7478
4	0,6699	0,8403	0,7573
5	0,6528	0,8384	0,7448
6	0,6847	0,8069	0,7460
7	0,6983	0,8249	0,7627
8	0,6566	0,8391	0,7448
9	0,6790	0,8134	0,7484
10	0,6860	0,7946	0,7388
Média	0,6732	0,8228	0,7479
D.P.	0,0152	0,0149	0,0081

Tabela C.12: $r = 5,0; cl = 0,30$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7273	0,8738	0,8016
2	0,8310	0,7862	0,8093
3	0,7098	0,8948	0,8033
4	0,7043	0,8904	0,7998
5	0,8614	0,7973	0,8296
6	0,7182	0,8903	0,8045
7	0,8625	0,7767	0,8189
8	0,8763	0,7785	0,8290
9	0,7272	0,8934	0,8129
10	0,8494	0,7763	0,8138
Média	0,7867	0,8358	0,8123
D.P.	0,0743	0,0562	0,0108

Tabela C.13: $r = 5,0; cl = 0,50$

Amostra	TAR	TAB	TAT
1	0,7200	0,8738	0,7980
2	0,7731	0,8591	0,8147
3	0,8089	0,8038	0,8063
4	0,6957	0,8998	0,8004
5	0,8235	0,8408	0,8320
6	0,7074	0,8987	0,8033
7	0,8431	0,8120	0,8273
8	0,8520	0,8230	0,8380
9	0,7148	0,9038	0,8123
10	0,8239	0,8130	0,8186
Média	0,7762	0,8528	0,8151
D.P.	0,0614	0,0396	0,0138

Bibliografia

- [1] Anderson, J.A.; Rosenfeld, E. (1988). *Neurocomputing: Foundations of Research*. MIT Press, Cambridge.
- [2] Bishop, C. M. (1995). *Neural Networks for Pattern Recognition*. University Press, Oxford.
- [3] Breiman, L.; Friedman, J.H.; Olshen, R.A. and Stone, C.H. (1984). *Classification and regression trees*. Warshaw International, California.
- [4] Broomhead, D.S. and Lowe, D. (1988). Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks. *Complex Systems*, **2**, 321-355.
- [5] Cox, D.R. (1970). *The Analysis of Binary Data*. Methuen & Co. Ltd., London.
- [6] Desai, V. S.; Crook, J. N. and Overstreet Jr., G. A. (1996). A comparison of neural networks and linear scoring models in the credit union environment. *European Journal of Operational Research*, **95**, 24-37.
- [7] Fahlman, S.E. (1988). Faster-learning variations on back-propagation: an empirical study. In D. Touretzky, G.E. Hinton e T.J. Sejnowski Eds.), *Proceedings of the 1988 Connectionist Models Summer School*, 38-51, Morgan Kaufmann, San Mateo.
- [8] Fausett, L. (1994). *Fundamentals of Neural Networks*. Prentice Hall, New York.
- [9] Ferreira, C.A. (1999). *Comparação da Capacidade Preditiva da Regressão Logística, CART e Redes Neurais*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Estatística. Universidade Federal de Minas Gerais.

- [10] Hand, D.J. and Henley, W.E. (1997). Statistical Classification Methods in Consumer Credit Scoring: a Review. *Journal of the Royal Statistical Society A*, **160**, 523-541.
- [11] Haykin, S. (1994). *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*. Macmillan Publishing, New York.
- [12] Hopfield, J.J. (1984). Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties like Those of Two-state Neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **81**, 3088-3092. Reprinted in Anderson & Rosenfeld (1988).
- [13] Hosmer, Jr. D. W and Lemeshow, S. (1989). *Applied Logistic Regression*. John Wiley & Sons, New York.
- [14] Jacobs, R.A. (1988). Increased Rates of Convergence Through Learning Rate Adaptation. *Neural Networks*, **1**(4), 295-307.
- [15] Kohonen, T. (1982). Self-organized Formation of Topologically Correct Feature Maps. *Biological Cybernetics*, **43**, 59-69.
- [16] McCullagh, P. and Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models* (The Monographs on Statistics and Applied Probability), Vol 37, 2. Ed., Chapman and Hall.
- [17] McCulloch, W.S.; Pitts, W. (1943). A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**, 115-133. Reprinted in Anderson & Rosenfeld (1988).
- [18] Moody, J.; Darken, C.J. (1989). Fast Learning in Networks of Locally Tuned Processing Units. *Neural Computation*, **1**, 281-294.
- [19] Morgan, J.N.; Sonquist, J.A. (1963). Problems in the Analysis of Survey Data, and a Proposal. *Journal of the American Statistical Association*, **58**, 514-435.
- [20] Neter, J.; Kutner, M.H.; Nachtschiem, C.J.; Wasserman, W. (1996). *Applied Linear Statistical Models*. Irwin, Boston.

- [21] Oliveira, R.B.S. (2000). *Detecção de Problemas em Instituições Financeiras Utilizando Modelos Estatísticos*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Estatística. Universidade de São Paulo.
- [22] Parzen, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1065-1076.
- [23] Patterson, D. (1996). *Artificial Neural Networks*. Prentice Hall, Singapore.
- [24] Paula, G. A. (1997). *Modelos de Regressão*. Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo.
- [25] Pregibon, D. (1981). Logistic Regression Diagnostics. *The Annals of Statistics*, **9**, 705-724.
- [26] Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. 2. Ed., John Wiley & Sons, New York.
- [27] Rosa, P.T.M. (2000). *Modelos de "Credit Scoring": Regressão Logística, CHAID e REAL*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Estatística. Universidade de São Paulo.
- [28] Rosenblatt, F. (1958). The Perceptron: a Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain. *Psychological Review*, **65**, 386-408. Reprinted in Anderson & Rosenfeld (1988).
- [29] Rumelhart, D.E. and McClelland, J. (1986). *Parallel Distributed Processing : Explorations in the Microstructure of Cognition*, Vol 1., MIT Press, Cambridge.
- [30] Sanda, R. (1990). *Análise Discriminante com Mistura de Variáveis Categóricas e Contínuas*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Estatística. Universidade de São Paulo.
- [31] SAS Institute Inc., SAS/Language: Reference, Version 6, First Edition, Cary, NC: SAS Institute Inc., 1990.
- [32] SAS Institute Inc., SAS/Guide to Macro Processing, Version 6, Second Edition, Cary, NC: SAS Institute Inc., 1990.

- [33] SAS Institute Inc., SAS/Procedures Guide, Release V.03 Edition. Cary, NC: SAS Institute Inc., 1988.
- [34] SAS Institute Inc., SAS/STAT User's Guide, Version 6, Fourth Edition, Volume 1, Cary, NC: SAS Institute Inc., 1989.
- [35] SAS Institute Inc., SAS/STAT User's Guide, Version 6, Fourth Edition, Volume 2, Cary, NC: SAS Institute Inc., 1989.
- [36] Shepherd, A.J. (1997). *Second-Order Methods for Neural Networks*. Springer, New York.
- [37] Specht, D.F. (1990). Probabilistic Neural Networks. *Neural Networks*, **3**(1), 109-118.
- [38] SPSS Inc., AnswerTree 2.0 User's Guide, Chicago, IL: SPSS Inc., 1998.
- [39] StatSoft Inc., STATISTIC Neural Networks User's Guide, Addendum for Version 4, Tulsa, OK: StatSoft Inc., 1998.
- [40] StatSoft Inc., STATISTIC Neural Networks User's Guide, Tulsa, OK: StatSoft Inc., 1998.
- [41] Stern, J.M.; Nakano, F. e Laurotto, M. (1996). *REAL: Real Attribute Learning for Strategic Market Operation.*, Tech.Report RT-MAC-9606, Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo.
- [42] Thomas, L.C.; Edelman, D.B. and Crook, J.N. (2002). *Credit Scoring and Its Applications*. SIAM monographs on mathematical modeling and computation.
- [43] Walker, S.H.; Duncan, D.B. (1967). Estimation of the Probability of an Event as a Function of Several Independent Variables. *Biometrika*, **6**, 568-576.