Comportamento Assintótico
de Estimadores da Entropia
para Cadeias de Ordem Infinita
com Perda de Memória Exponencial

Daniela Guiol

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

Área de concentração: **Teoria das Probabilidades**

Orientador: **Antonio Galves**

Co-orientadora: **Nancy L. Garcia**

São Paulo, 15 de janeiro de 2002

Resumo

Nesta tese, apresentaremos resultados sobre as flutuações de dois estimadores da entropia para uma classe de cadeias de ordem infinita.

Consideraremos uma cadeia estacionária de ordem infinita isto é, na qual as probabilidades de transição dependem de todo o passado. Faremos a hipótese habitual em teoria de informação que a cadeia assume valores no alfabeto finito. Suponhamos também que a memória do passado decresce com velocidade exponencial.

A partir de uma amostra finita da cadeia, de comprimento n , consideraremos a k -ésima distribuição empírica de um cilindro de comprimento k como sendo a frequência relativa do cilindro na amostra. Nesta tese, será estudado caso em que esse comprimento k é uma função crescente do comprimento da amostra, isto é $k = k(n)$.

Consideraremos dois estimadores da entropia. O primeiro deles é a k -ésima entropia empírica. Ele é definido como a razão entre a esperança, com respeito a distribuição empírica do logaritmo da probabilidade dos k -cilindros e o próprio comprimento k .

O segundo deles é a k -ésima entropia empírica condicionada. Ele é definido considerando-se a esperança, com respeito a distribuição empírica do logaritmo da probabilidade condicionada empírica.

No Capítulo 4 se encontram as contribuições originais desta tese. Os resultados principais são os Teoremas 4.6.4 e 4.6.5. Demonstramos no Teorema 4.6.4, que a k -ésima entropia empírica condicionada tem flutuações gaussianas em torno da verdadeira entropia do processo. Demonstramos também, no Teorema 4.6.5, que o mesmo não acontece com a entropia empírica de ordem k . Nossos resultados valem se $k(n) < \frac{1}{2 \log |\mathcal{A}|} \log n$. Esta é uma condição natural, já que $\log |\mathcal{A}|$ é majorante da entropia do processo e que, em um contexto de aplicação concreta, a entropia do processo não é conhecida a priori.

Os Teoremas 4.6.4 e 4.6.5 respondem a uma questão deixada em aberto desde o artigo de Iosifescu (1965). Em particular o Teorema 4.6.5 aponta para uma diferença crucial entre cadeias de Markov e cadeias de ordem infinita.

Abstract

This dissertation addresses the question of the fluctuations of two estimators of the entropy for a chain of infinite order. We assume that the chain takes values on a finite alphabet and loses memory exponentially fast. We prove a central limit theorem for the conditional entropy of the empirical distribution of the chain, for cylinders growing logarithmically with the length of the sample. We also prove that the entropy of the empirical distribution of the cylinders, divided by the length of the cylinders does not have Gaussian fluctuations.

Sumário

1	Introdução	3
2	Cadeias de ordem infinita	7
2.1	Notações e definições	7
2.2	Uma construção regenerativa para cadeias de ordem infinita	9
2.2.1	Existência e unicidade de uma cadeia de ordem infinita . .	10
2.2.2	Regeneração. Resultados prévios	11
2.3	Resultados de Bressaud, Fernández e Galves (1999)	14
2.3.1	A aproximação canônica de Markov para cadeias de ordem infinita	14
2.3.2	Velocidade de decaimento das correlações	15
3	Entropia de um processo estocástico	17
3.1	Definições e interpretação	17
3.2	Estimadores da entropia	20
3.3	Resultados prévios	21
4	Resultados novos. Flutuações da entropia empírica em torno da entropia do processo.	25
4.1	Teorema-limite central	26
4.2	Regeneração. Propriedades	29
4.3	Covariâncias	38
4.4	Prova do Teorema-limite central	46
4.5	Entropia relativa	58
4.6	Teorema-limite central para a entropia empírica	59
4.6.1	Velocidade de convergência	61
4.6.2	Flutuações dos dois estimadores da entropia em torno da entropia do processo	62

Capítulo 1

Introdução

A entropia de um processo estocástico se revelou um conceito fundamental em diversas áreas científicas começando com a termodinâmica, a mecânica estatística, a teoria ergódica e mais recentemente a teoria da informação.

Do ponto de vista aplicado, em áreas como a teoria da informação uma questão central é a estimação da entropia de um processo a partir de uma longa porém finita realização do mesmo. Isso conduz naturalmente à questão da definição de estimadores para entropia e ao estudo de suas propriedades assintóticas.

Nesta tese, apresentaremos resultados sobre as flutuações de dois estimadores da entropia para uma classe de cadeias de ordem infinita.

Consideraremos uma cadeia estacionária de ordem infinita isto é, na qual as probabilidades de transição dependem de todo o passado. Faremos a hipótese habitual em teoria de informação que a cadeia assume valores no alfabeto finito. Suponhamos também que a memória do passado decresce com velocidade exponencial.

A partir de uma amostra finita da cadeia, de comprimento n , consideraremos a k -ésima distribuição empírica de um cilindro de comprimento k como sendo a frequência relativa do cilindro na amostra. Nesta tese, será estudado caso em que esse comprimento k é uma função crescente do comprimento da amostra, isto é $k = k(n)$.

Consideraremos dois estimadores da entropia. O primeiro deles é a k -ésima entropia empírica. Ele é definido como a razão entre a esperança, com respeito a distribuição empírica do logaritmo da probabilidade dos k -cilindros e o próprio comprimento k .

O segundo deles é a k -ésima entropia empírica condicionada. Ele é definido considerando-se a esperança, com respeito a distribuição empírica do logaritmo

da probabilidade condicionada empírica.

Em relação aos dois estimadores se coloca a questão da consistência dos mesmos e o estudo de suas flutuações em torno do valor limite.

No caso quando o comprimento k dos cilindros não depender do comprimento da amostra, como consequência da teoria ergódica clássica, temos os seguintes resultados. Quando o comprimento da amostra cresce, a k -ésima distribuição empírica converge quase certamente para a k -ésima distribuição verdadeira e temos também a convergência da k -ésima entropia empírica para a k -ésima entropia verdadeira. Segue que no caso de cadeias de Markov, isto é, de cadeias de ordem finita, a k -ésima entropia condicionada coincide com a entropia do processo sempre que o k for maior ou igual a ordem da cadeia. Neste caso os resultados clássicos acima mencionados mostram que os dois estimadores da entropia são consistentes.

No caso de cadeias de ordem infinita com perda de memória somável restringindo-se aos cilindros de comprimento k fixo, Iosifescu (1965) provou que os dois estimadores da entropia tem flutuações gaussianas em torno da k -ésima entropia do processo. Ou seja no caso de cadeia de Markov de ordem maior ou igual a k o resultado de Iosifescu (1965) mostra que a entropia empírica flutua em torno da entropia verdadeira do processo.

No caso de cadeia de ordem infinita, no entanto, a teoria ergódica clássica não resolve o problema da estimação da entropia do processo. Este é o tema da presente tese.

Para cadeias de ordem infinita temos que considerar cilindros de comprimento $k(n)$, crescendo junto com o comprimento n da amostra.

Ornstein e Weiss (1990) provaram que a distância em $\bar{d}$ entre a $k(n)$ -ésima distribuição empírica e a $k(n)$ -ésima distribuição verdadeira converge para zero se $k(n)$ cresce logaritmicamente com n . No mesmo contexto, Shields (1990) mostrou que a distância variacional (que majora a distância $\bar{d}$) entre a distribuição empírica e a distribuição verdadeira converge para zero se $k(n) < \frac{1}{h} \log n$, onde h designa a entropia do processo.

Csiszár e Shields (2000), estimam a velocidade de convergência da razão entre a $k(n)$ -ésima distribuição empírica e a distribuição verdadeira.

Para cadeias de Markov, Csiszár (2000), usando a teoria dos martingais, estima a diferença entre a distribuição empírica condicionada e a distribuição verdadeira condicionada e prova um resultado sobre a velocidade de convergência da entropia relativa.

Ornstein e Weiss (1990), provaram um resultado do tipo Teorema de Shannon-McMillan-Breiman, para a k -ésima entropia empírica. Dai segue que se o com-

primento dos cilindros cresce com n , mas não muito rápido, precisamente, se $k(n) \leq \frac{1}{h} \log n$ então a k -ésima entropia empírica é um estimador consistente da entropia do processo.

Shields (2001), mostrou a consistência do outro estimador da entropia, a k -ésima entropia empírica condicionada, se $k(n) < \frac{1}{h} \log n$. No caso de uma sequência de variáveis independentes e uniformemente distribuídas no alfabeto de entropia $h = 1$, Shields (2001), mostra que a entropia verdadeira não é atingida pela a $k(n)$ -ésima entropia empírica condicionada se $k = \log n$.

Apresentaremos estes resultados sobre a consistência dos estimadores da entropia no Capítulo 3.

No Capítulo 4 se encontram as contribuições originais desta tese. Os resultados principais são os Teoremas 4.6.4 e 4.6.5. Demonstramos no Teorema 4.6.4, que a k -ésima entropia empírica condicionada tem flutuações gaussianas em torno da verdadeira entropia do processo. Demonstramos também, no Teorema 4.6.5, que o mesmo não acontece com a entropia empírica de ordem k . Nossos resultados valem se $k(n) < \frac{1}{2 \log |\mathcal{A}|} \log n$. Esta é uma condição natural, já que $\log |\mathcal{A}|$ é majorante da entropia do processo e que, em um contexto de aplicação concreta, a entropia do processo não é conhecida a priori..

Os Teoremas 4.6.4 e 4.6.5 respondem a uma questão deixada em aberto desde o artigo de Iosifescu (1965). Em particular o Teorema 4.6.5 aponta para uma diferença crucial entre cadeias de Markov e cadeias de ordem infinita.

A prova destes teoremas é baseada em dois resultados originais nossos, interessantes por si só. O primeiro resultado, o Teorema 4.1.1, é um teorema-limite central para cadeias de ordem infinita observadas através de uma função cilíndrica de comprimento $k(n)$. O segundo resultado, o Teorema 4.5.1, é sobre a convergência da entropia relativa da distribuição empírica com respeito a distribuição verdadeira.

A prova do Teorema 4.1.1 é baseada na construção regenerativa de cadeias de ordem infinita, apresentada em Comets, Fernández e Ferrari (2000). Com essa construção, o processo pode ser visto como uma sequência de vetores aleatórios independentes. Para concluir a demonstração usamos o Teorema de Berry-Essen, que estima a velocidade de convergência para a distribuição normal, no caso, de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas..

A prova do Teorema 4.5.1 é baseada em resultados de Bressaud, Fernández e Galves (1999b), sobre a velocidade de decaimento de correlações de cadeias de ordem infinita com perda de memória somável.

Concluimos esta introdução com uma breve recapitulação histórica. Cadeias de ordem infinita foram consideradas por vários autores, sob diversas designações.

Onicescu e Mihoc (1935) são iniciadores da pesquisa na área logo seguidos por Doeblin e Fortet (1937). As primeiras demonstrações de teoremas-limite centrais para funções cilíndricas de comprimento fixo se encontram em Onicescu e Mihoc (1940), Iosifescu (1961), Mihoc (1963). Harris (1955) introduziu a idéia de construção regenerativa para cadeias de ordem infinita. Esquemas regenerativos reaparecem em Athreya e Ney (1978), Nummelin (1978), Lalley (1986) e Berbee (1987) e, mais recentemente, em Ferrari, Martinez e Ney (2000) e Comets, Fernández e Ferrari (2000).

O conceito de taxa de entropia de um processo estocástico foi introduzido em Shannon (1948), que explorou algumas conexões entre a taxa de entropia de um processo estocástico e o número de possíveis sequências geradas pelo processo. Os trabalhos de Shannon marcam o início da teoria da informação.

Uma apresentação histórica mais ampla das cadeias de ordem infinita pode ser encontrada no livro de Iosifescu e Grigorescu (1990). Uma apresentação moderna da teoria se encontra em Fernández, Ferrari e Galves (2001). Questões relativas a entropia no quadro da teoria ergódica e teoria da informação se encontra em Cover e Thomas (1991), Gray (1990), e Shields (1996).

Capítulo 2

Cadeias de ordem infinita

2.1 Notações e definições

Nesta seção definiremos o conceito de cadeia de ordem infinita, positiva e log-continua. Em Lalley (1986) essa classe particular de cadeias de ordem infinita é chamada de cadeia com conexões completas.

Consideraremos $\mathcal{A}$ um conjunto finito que chamaremos alfabeto. Denotaremos com $|\mathcal{A}|$ o número de elementos do alfabeto e $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o espaço das sequências infinitas

$$x = (x_i), x_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{Z}.$$

Para $-\infty \leq m \leq n \leq +\infty$ denotaremos x_m^n a sequência $x_m, \dots, x_n$.

Denotamos com $T : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o operador de translação à esquerda em uma coordenada, isto é:

$$(T(x))_n = x_{n+1}, x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.1.1. Chamaremos de probabilidade de transição uma função

$$P(\cdot|\cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*} \rightarrow [0, 1]$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) *Mensurabilidade:* Para cada $x_0 \in \mathcal{A}$ a função $P(x_0|\cdot)$ é mensurável com respeito à σ -álgebra produto.

(ii) *Normalização:* Para cada $x_{-\infty}^0 \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}$ vale

$$\sum_{x_0 \in \mathcal{A}} P(x_0|x_{-\infty}^{-1}) = 1.$$

Consideraremos um processo estocástico estacionário, $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ com valores no alfabeto $\mathcal{A}$.

Definição 2.1.2. Se existe $k \geq 1$ tal que para qualquer $a_{-\infty}^0 \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}$ vale

$$\mathbf{P}(X_0 = a_0 | X_{-k-m}^{-1} = a_{-k-m}^{-1}) = \mathbf{P}(X_0 = a_0 | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}). \quad (2.1.1)$$

para todo $m \geq 1$ então chamaremos $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de cadeia de Markov de ordem k .

Se não existe nenhum k satisfazendo (2.1.1), dizemos que a cadeia é de ordem infinita (c.o.i.).

Consideraremos $P(\cdot | \cdot)$ uma probabilidade de transição definida sobre o espaço $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$.

Definição 2.1.3. Dizemos que $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é consistente com a probabilidade de transição P se para cada $x \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}$ vale

$$\mathbf{P}(X = x_0 | X_{-\infty}^{-1} = x_{-\infty}^{-1}) = P(x_0 | x_{-\infty}^{-1}).$$

Para sequências $x, y \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}$ denotaremos por $x \stackrel{k}{=} y$ sempre que $x_{-k}^0 = y_{-k}^0$.

Definição 2.1.4. Chamaremos de cadeia de ordem infinita positiva e log-contínua (c.o.i.p.l.c.) com taxa de perda de memória $(\gamma_k)_{k \geq 1}$, uma cadeia de ordem infinita, $(X_n)_{n \geq 1}$, consistente com a probabilidade de transição P que satisfaz as seguintes condições:

(i) positividade:

$$\inf_{x \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}} P(x_0 | x_{-\infty}^{-1}) > 0.$$

(ii) log-continuidade:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0. \quad (2.1.2)$$

onde

$$\gamma_k := \sup_{\{x, y : x \stackrel{k}{=} y\}} \left| \frac{P(x_0 | x_{-\infty}^{-1})}{P(y_0 | y_{-\infty}^{-1})} - 1 \right|.$$

Se a taxa de perda de memória decresce exponencialmente, isto é, existe um $c > 0$ tal que $\gamma_k = \exp(-ck)$, chamaremos $(X_n)_{n \geq 1}$ de cadeia de ordem infinita positiva e log-contínua com perda de memória exponencial. (c.o.i.p.l.c.e.).

Definição 2.1.5. Chamaremos de aproximação canônica de Markov de ordem $k \geq 1$ de um processo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, uma cadeia de Markov de ordem k cuja a probabilidade de transição P^k satisfaz

$$P^k(a_0 | a_{-k}^{-1}) = \mathbf{P}(X_0 = a_0 | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1})$$

para qualquer $a_{-k}^0 \in \mathcal{A}^{k+1}$.

Observação 2.1.6. Apresentaremos, na Seção 2.3, um resultado do Bressaud, Fernández e Galves (1999a), que compara as probabilidades de transição de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, uma c.o.i.p.l.c. com taxa de perda de memória somável e da aproximação canônica de Markov de ordem $k \geq 1$ correspondente.

Seja $n > m$. Chamaremos de $(n - m)$ - cilindro, definido a partir da sequência a_m^n , o seguinte subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$:

$$[a_m^n] := \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_m^n = a_m^n\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}_n$ o conjunto de todos os n -cilindros. Denotaremos também por $\mathcal{F}$ a σ -álgebra definida sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ gerada pelos cilindros.

Denotaremos por ν a única medida de probabilidade sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, invariante por translações tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ e para cada $a_1^n \in \mathcal{A}^n$

$$\nu([a_1^n]) := \mathbf{P}(X_1^n = a_1^n).$$

Consideraremos ν a medida invariante de um processo estacionário $(X)_{n \in \mathbb{Z}}$. Para conveniência usaremos as seguintes notações: $\nu(a_m^n) = \nu([a_m^n])$.

Denotaremos as probabilidades condicionais como:

$$\nu(a_k^l | a_m^n) = \frac{\nu([a_k^l] \cap [a_m^n])}{\nu([a_m^n])}.$$

2.2 Uma construção regenerativa para cadeias de ordem infinita

Nesta seção apresentaremos a construção regenerativa de Comets, Fernández e Ferrari (2000), para cadeias de ordem infinita com perda de memória somável. Este esquema regenerativo será a base da prova do teorema-limite central para cadeias de ordem infinita que provaremos no Capítulo 4. Consideraremos $U =$

$(U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1)$, construídas sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$, onde Σ é a σ -álgebra gerada pela sequência de variáveis aleatórias uniformes U .

Consideraremos $(X_n)_{n \geq 1}$ uma c.o.i. de probabilidade de transição P e definida sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$.

2.2.1 Existência e unicidade de uma cadeia de ordem infinita

De fato, em Comets, Fernández e Ferrari (2000), é apresentada uma construção explícita, de uma c.o.i. compatível com a probabilidade de transição P , a partir da sequência de variáveis aleatórias uniformes U . Como consequência desta construção segue o teorema de existência e unicidade apresentada nesta Seção.

Definição 2.2.1. *Seja P uma probabilidade de transição. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathcal{A}$ e $x_{-k}^{-1} \in \mathcal{A}^k$ definiremos as seguintes funções:*

$$\begin{aligned}\alpha_0(x_0) &:= \inf_{x_{-\infty}^{-1}} P(x_0 | x_{-\infty}^{-1}); \\ \alpha_k(x_0 | x_{-k}^{-1}) &:= \inf_{z_{-\infty}^{-k-1}} P(x_0 | x_{-k}^{-1} z_{-\infty}^{-k-1}). \\ \alpha_k &:= \min_{x_{-k}^{-1} \in \mathcal{A}^k} \left(\sum_{x_0 \in \mathcal{A}} \alpha_k(x_0 | x_{-k}^{-1}) \right). \\ \beta_m &:= \prod_{k=0}^m \alpha_k\end{aligned}$$

onde $(x_{-k}^{-1} z_{-\infty}^{-k-1}) = (\dots, z_{-k-1}, x_{-1}, \dots, x_{-k})$.

Definição 2.2.2. *Chamaremos de tempo de regeneração de uma janela $[l, m]$, para $-\infty < l < \infty$, e $l \leq m \leq \infty$ a variável aleatória*

$$\tau[l, m] := \max \{t \leq l : U_n < \alpha_{n-t}, n \in [l, m]\}. \quad (2.2.1)$$

Por convenção $\tau[l, m] = -\infty$ se o conjunto do lado direito é vazio.

Se $l=m$, escrevemos $\tau[l] := \tau[l, l]$.

Teorema 2.2.3. *Se P for uma probabilidade de transição tal que*

$$\sum_{m \geq 0} \prod_{k=0}^m \alpha_k = \infty$$

então valem as seguintes propriedades:

(i) para cada janela finita $[l, m]$

$$\mathbf{P}(\tau[l, m] > -\infty) = 1.$$

(ii) Existe um único processo estocástico estacionário $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, definido sobre o espaço $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$, compatível com P .

(iii) Existe uma função $\Phi : [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ mensurável tal que $X_n = \Phi(U)(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Para cada intervalo finito $[l, m]$ a restrição $\{\Phi(U)(i) : i \in [l, m]\}$ depende somente de $\{U_i : i \in [\tau[l, m], m]\}$.

2.2.2 Regeneração. Resultados prévios

Nesta subseção apresentaremos um teorema, provado em Comets, Fernández e Ferrari (2000), que mostra que a construção apresentada na subseção precedente, é realizada de maneira regenerativa.

De fato, a partir da sequência de variáveis aleatórias uniformes U , são construídos em mesmo tempo, uma c.o.i compatível com a probabilidade de transição P e por outro lado um processo de renovação $(\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de tal jeito que a c.o.i. $(X_n)_{n \geq 1}$ pode ser vista como uma sequência de vetores aleatórios $X_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-1}$, de comprimento aleatório $\tau_{i+1} - \tau_i$, independentes e identicamente distribuídos.

Observação 2.2.4. Na Definição 2.2.1, para cada l fixo, a sequência dos tempos de regeneração $\tau[l, m]$ para $m \geq l$ é decrescente, portanto existe o limite

$$\tau[l, +\infty) := \lim_{m \rightarrow +\infty} \tau[l, m].$$

Definição 2.2.5. Se $\tau[l, +\infty) > -\infty$ chamaremos as variáveis $\tau[l, +\infty)$ de tempos de regeneração do processo.

Teorema 2.2.6. Se P é uma probabilidade de transição tal que

$$\prod_{k=0}^{\infty} \alpha_k > 0.$$

então valem as seguintes propriedades

(i) Para cada $l \in \mathbb{Z}$ temos $\mathbf{P}(\tau[l, \infty) > -\infty) = 1$.

(ii) Existe um único processo estocástico estacionário $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ compatível com P .

(iii) Existe uma função $\Phi : [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ mensurável tal que $X_n := \Phi(U)(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Para cada intervalo infinito $[l, +\infty)$ a restrição $\{\Phi(U)(i) : i \in [l, +\infty)\}$ depende somente de $(U_i)_{i \geq \tau[l, +\infty)}$.

Consideraremos as variáveis aleatórias $W \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ definidas por

$$W_j := 1\{\tau[j, +\infty) = j\}. \quad (2.2.2)$$

Sejam $(\tau_l)_{l \in \mathbb{Z}}$, os tempos ordenados correspondentes as realizações de W , definidos por

$$\begin{aligned} \tau_{-1} &:= \sup\{j \leq 0 : W_j = 1\} \\ \tau_i &:= \inf\{j > \tau_{i-1} : W_j = 1\} \text{ para } i \geq 0 \\ \tau_{-i} &:= \sup\{j < \tau_{-i+1} : W_j = 1\} \text{ para } i \geq 2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Denotaremos $\Delta_{\tau_i} := \tau_{i+1} - \tau_i$.

Observação 2.2.7. Note que τ_l é o l -ésimo tempo de regeneração do processo tal que $\tau[l, +\infty) = l$ que é diferente de $\tau[l]$, o tempo de regeneração da janela $[l, l]$.

Definição 2.2.8. Chamaremos de cadeia do castelo de cartas, uma cadeia de Markov $(Z_n)_{n \geq 0}$, com valores em $\mathbb{N}$, começando no tempo zero na origem e tal que a probabilidade de transição P satisfaz

$$P(y|x) = \begin{cases} \alpha_x, & y = x + 1 \\ 1 - \alpha_x, & y = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Definiremos γ_n^* como sendo a probabilidade do evento: cadeia do castelo de cartas retorna a zero no tempo n . Isto é,

$$\gamma_n^* := \mathbf{P}(Z_n = 0). \quad (2.2.5)$$

Lema 2.2.9. Sejam $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ uma sequência crescente, $\alpha_k \nearrow 1$, de reais positivos e $(\gamma_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ a sequência definida em (2.2.5). Então

- 1) $\sum_{n \geq 1} \prod_{k=0}^n \alpha_k = +\infty$ se e somente se $\gamma_n^* \rightarrow 0$.
- 2) $\prod_{k=0}^{+\infty} \alpha_k > 0$ se e somente se $\sum_{n \geq 0} \gamma_n^* < +\infty$.
- 3) Se $(1 - \alpha_k)_{k \geq 0}$ decresce exponencialmente então $(\gamma_n^*)_{n \geq 0}$ também decresce exponencialmente.

Denotaremos

$$\beta := \prod_{k=0}^{+\infty} \alpha_k. \quad (2.2.6)$$

Teorema 2.2.10. *Se P for uma probabilidade de transição tal que $\beta > 0$ então valem*

(i) *O processo $(W_j)_{j \geq 0}$ é um processo de renovação estacionário com $\mathbf{P}(W_j = 1) = \beta$ e*

$$\mathbf{P}(\tau_{l+1} - \tau_l \geq m) = \gamma_m^*$$

para $m \geq 1$ e $l \neq 0$.

(ii) *Os vetores aleatórios $\xi_l \in \cup_{n \geq 1} \mathcal{A}^n$, $l \in \mathbb{Z}$ definidos por $\xi_l = (X_{\tau_l}, \dots, X_{\tau_{l+1}-1})$ são independentes e identicamente distribuídos.*

Como consequência do Teorema 2.2.10 e do Lema 2.2.9 temos o seguinte resultado que mostra que para c.o.i.p.l.c. com perda de memória exponencial vale a construção regenerativa e, para todo $i \geq 1$, os incrementos Δ_{τ_i} tem momentos finitos de qualquer ordem. Este resultado será útil para provar o teorema-limite central do Capítulo 4.

Corolário 2.2.11. *Se $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma c.o.i.p.l.c.e. então*

i) $\beta > 0$.

ii) *a sequência γ_m^* decresce exponencialmente.*

iii) *Para todo $i \geq 1$ as variáveis aleatórias Δ_{τ_i} , são i.i.d. e tais que a distribuição comum é majorada por uma distribuição geométrica. Então para todo $m \geq 1$ temos*

$$\mathbf{E}(|\Delta_{\tau_1}|^m) < +\infty.$$

iv) *Os vetores $(X_{\tau_i}, \dots, X_{\tau_{i+1}-1})$, $i \in \mathbb{Z}^*$ são i.i.d.*

Prova. Segue da log-continuidade da probabilidade de transição P que para cada $a_0 \in \mathcal{A}$ e $v \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$

$$\inf \{ \mathbf{P}(a_0 | x_{-1}, \dots, x_{-k} z) : z \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*} \} \geq (1 - \gamma_k) \mathbf{P}(a_0 | x_{-1}, \dots, x_{-k} v).$$

Somando segundo $a_0 \in \mathcal{A}$ e tomando o mínimo sobre x_{-1}^{-k} concluímos que

$$\alpha_k \geq 1 - \gamma_k.$$

Como $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ decresce exponencialmente então a soma $\sum_{k \geq 0} (1 - \alpha_k) < +\infty$. Isto implica que $\prod_{k=0}^{+\infty} \alpha_k > 0$. Como consequência do Lema 2.2.9 temos $\gamma_m^* = (\gamma_1^*)^m$ para todo $m \geq 1$. Usando o Teorema 2.2.10 temos

$$P(\Delta_{\tau_1} = m) < (\gamma_1^*)^{m-1}(1 - \gamma_1^*).$$

Isto conclui a prova do corolário. ■

Denotaremos por

$$\gamma := E(\Delta_{\tau_1}). \quad (2.2.7)$$

2.3 Resultados de Bressaud, Fernández e Galves (1999)

2.3.1 A aproximação canônica de Markov para cadeias de ordem infinita

O Lema que apresentaremos nesta subseção foi provado em Bressaud, Fernández e Galves (1999a).

Lema 2.3.1. *Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i.p.l.c. com taxa de perda de memória $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ e P^k a probabilidade de transição da aproximação canônica de Markov de ordem $k \in \mathbb{N}$ do processo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Para cada $k \geq 1$ valem as seguintes propriedades:*

(i) Para cada $m \geq 1$ temos

$$\sup \left\{ \left| \frac{P(x_0 | x_{-\infty}^{-1})}{P^k(x_0 | y_{-k}^{-1})} - 1 \right| : x, y \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}, x_{-m}^{-1} = y_{-m}^{-1} \right\} \leq \gamma_{\inf\{m, k\}}. \quad (2.3.1)$$

(ii)

$$\inf_{\{x, y: x_{-\infty}^0 \stackrel{k}{=} y_{-\infty}^0\}} P(x_0 | x_{-\infty}^{-1}) \leq P^k(x_0 | y_{-\infty}^{-1}) \leq \sup_{\{x, y: x_{-\infty}^0 \stackrel{k}{=} y_{-\infty}^0\}} P(x_0 | x_{-\infty}^{-1}). \quad (2.3.2)$$

Como consequência deste resultado provaremos que a entropia de uma c.o.i.p.l.c. é positiva não-nula. Usaremos também este Lema na Seção 4.3, para estudar as covariâncias de algumas funções cilíndricas particulares.

2.3.2 Velocidade de decaimento das correlações

O teorema apresentado nesta seção foi provado em Bressaud, Fernández e Galves (1999b). Este teorema será, na Seção 4.3, uma ferramenta de base para estudar o comportamento assintótico das covariâncias.

Chamaremos de velocidade de decaimento das correlações de ordem $d \geq 0$, ou taxa de mistura, a velocidade de convergência do limite

$$\mathbf{E}_\nu(fT_{-d}g) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\nu f \mathbf{E}_\nu g.$$

Definição 2.3.2. *Sejam $f, g \in L^2(d\nu)$. Chamaremos $C_{f,g}(d)$ as covariâncias de ordem $d \geq 0$ das funções f e g*

$$C_{f,g}(d) := \int d\nu fT_d g - \left(\int d\nu f \right) \left(\int d\nu g \right).$$

Se $f = g$, denotaremos com $C_f(d)$ a covariância $C_{f,f}(d)$.

Denotaremos

$$(\sigma_f^2)^m := \mathbf{E}_\nu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{d=1}^m (T_d f - \mathbf{E}_\nu f) \right)^2 \right]. \quad (2.3.3)$$

Observamos que

$$(\sigma_f^2)^m = C_f(0) + 2 \sum_{d=1}^{m-1} C_f(d) - \frac{2}{m} \sum_{d=1}^{m-1} d C_f(d). \quad (2.3.4)$$

Se $\sum_{d=1}^{+\infty} d C_f(d) < +\infty$ então podemos definir

$$\sigma_f^2 := \lim_{m \rightarrow \infty} (\sigma_f^2)^m = C_f(0) + 2 \sum_{d=1}^{+\infty} C_f(d). \quad (2.3.5)$$

Consideraremos $f : \mathcal{A}^{-\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos $var_m(f)$ de variação de ordem $m \geq 1$ de f , onde

$$var_m(f) := \sup_{\{x, y \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}} : x \stackrel{m}{=} y\}} |f(x) - f(y)|. \quad (2.3.6)$$

Por conveniência denotaremos de

$$\text{var}_{-n}(f) := \sup_{\{x, y \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}\}} |f(x) - f(y)|.$$

para todo $n \geq 0$. Observamos que $\text{var}_{-n}(f) \leq 2\|f\|_\infty$, para todo $n \geq 0$.

Algumas propriedades assintóticas das covariâncias e das variações serão provadas na Seção 4.3.

Definiremos a função $\phi : \mathcal{A}^{-\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) := -\log \nu(x_0 | x_{-\infty}^{-1}).$$

Denotaremos por $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ o espaço das funções reais contínuas definidas sobre $\mathcal{A}$.

Para cada $g \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ definiremos a semi-norma

$$\|g\|_\phi = \sup_{k \geq 0} \frac{\text{var}_k(g)}{\text{var}_k(\phi)}.$$

e denotaremos de $V_\phi = \{g \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \|g\|_\phi < +\infty\}$.

Teorema 2.3.3. (*Bressaud, Fernández, Galves 1999b*)

Se $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma c.o.i.p.l.c. com taxa de perda de memória somável e de medida invariante ν , então para toda as funções $g \in V_\phi$ e $f \in L^1(\nu)$ e para todo $d \geq 0$ vale

$$|C_{f,g}(d)| \leq C \|f\|_1 \|g\|_\phi \gamma_d^*, \quad (2.3.7)$$

onde γ_n^* são os tempos de retorno definidos em (2.2.5).

Usaremos este teorema na Seção 4.3.

Observação 2.3.4. *Se a taxa de perda de memória do processo é exponencial então γ_d^* também decresce exponencialmente e se as funções f, g são limitadas temos que as covariâncias de ordem d decrescem exponencialmente em d .*

Capítulo 3

Entropia de um processo estocástico

Neste capítulo apresentaremos a definição e uma das possíveis interpretações clássicas da entropia de um processo estocástico. Definiremos dois estimadores da entropia e apresentaremos uma sequência de resultados sobre o comportamento assintótico destes estimadores.

3.1 Definições e interpretação

Definição 3.1.1. *Seja p uma densidade de probabilidade sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$.*

A entropia de p é definida como

$$H(p) := - \sum_{a \in \mathcal{A}} p(a) \log p(a)$$

com a convenção $0 \log 0 = 0$. Consideraremos logaritmo em base 2.

Lema 3.1.2. *A função entropia $H(p)$ é côncava e atinge seu valor máximo $\log |\mathcal{A}|$ somente para a distribuição uniforme, $p(a) = \frac{1}{|\mathcal{A}|}$, $a \in \mathcal{A}$.*

A prova deste Lema pode ser encontrada em Cover e Thomas (1991).

Consideraremos $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário e ν a medida invariante correspondente definida sobre o espaço $A^{\mathbb{Z}}$.

Apresentaremos o célebre Teorema de Shannon-McMillan-Breiman. Uma prova, mais recente deste Teorema encontra-se em Ornstein e Weiss (1983).

Teorema 3.1.3. *(Shannon-McMillan-Breiman)*

Se ν é uma medida ergódica então existe um número positivo $h = h(\nu)$ tal que ν -quase certamente vale

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \nu(x_1^n) = h. \quad (3.1.1)$$

Observação 3.1.4. De fato, o Teorema 3.1.3 mostra que para processos ergódicos $\nu(X_1^n)$ decresce quase-certamente exponencialmente em n com uma taxa constante h chamada de taxa de entropia do processo.

Definição 3.1.5. Sejam $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$. Chamaremos $T_n(\varepsilon)$ de conjunto das sequências típicas de comprimento n , o conjunto

$$T_n(\varepsilon) := \{x_1^n : 2^{-n(h+\varepsilon)} \leq \nu(x_1^n) \leq 2^{-n(h-\varepsilon)}\}. \quad (3.1.2)$$

Como consequência do Teorema 3.1.3 temos o seguinte resultado, que é uma expressão do teorema precedente numa forma exponencial e que introduz o conceito de conjunto de sequências típicas.

Teorema 3.1.6. Seja $T_n(\varepsilon)$ o conjunto das sequências típicas de comprimento n definido em (3.1.2).

1) Se $x_1^n \in T_n(\varepsilon)$ então

$$h(\nu) - \varepsilon \leq -\frac{1}{n} \log \nu(x_1^n) \leq h(\nu) + \varepsilon.$$

2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(T_n(\varepsilon)) = 1.$$

3)

$$(1 - \varepsilon)2^{n(h-\varepsilon)} \leq |T_n(\varepsilon)| \leq 2^{n(h+\varepsilon)}.$$

Interpretação: Como consequência do Teorema 3.1.3, sabemos que existe um conjunto $T_n(\varepsilon)$ que tem as seguintes propriedades: para n suficientemente grande a medida deste conjunto é próxima de 1, todos os elementos deste conjunto são quase equiprováveis e o número das sequências típicas de comprimento n é próximo de 2^{nh} .

Seja um processo estacionário de medida invariante ν . Para cada $k \geq 1$ denotaremos por ν_k os marginais de ordem k da medida ν . Consideraremos as seguintes funções: $\phi_k, e_k : A^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \phi_k(x_{-k}^0) &:= -\log \nu(x_0 | x_{-k}^{-1}); \\ e_k(x_{-k}^0) &:= -\log \nu(x_{-k}^0). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Algumas propriedades dessas funções serão provadas na Seção 4.3.

Definição 3.1.7. 1) Chamaremos $\frac{1}{k}H(\nu_k)$ de k -ésima entropia do processo onde

$$\begin{aligned} H(\nu_k) &:= - \sum_{a_1^k \in A^k} \nu_k(a_1^k) \log \nu_k(a_1^k) \\ &= - k\mathbb{E}(e_k) \end{aligned}$$

2) Chamaremos $h(\nu_{k+1})$ de k -ésima entropia condicionada do processo onde

$$\begin{aligned} h(\nu_{k+1}) &:= - \sum_{a_{-k}^0 \in A^{k+1}} \nu_{k+1}(a_{-k}^0) \log \nu_{k+1}(a_0 | a_{-k}^{-1}). \\ &= - \mathbb{E}(\phi_k) \end{aligned}$$

Por conveniência denotaremos às vezes $H(\nu_k) := H_k$ e $h(\nu_{k+1}) := h_k$.

Teorema 3.1.8. *Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário de medida invariante ν e $h(\nu)$ a taxa da entropia do processo definida em (3.1.1). Valem as seguintes propriedades:*

1)

$$H(\nu) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(\nu_k) \quad (3.1.4)$$

e

$$H(\nu) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(\nu_{k+1}). \quad (3.1.5)$$

2) Se $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário ergódico então $H(\nu) = h(\nu)$.

Este Teorema é provado em Shields (1996).

Definição 3.1.9. *Seja $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário ergódico de medida ν . Chamaremos $h(\nu)$, definida em (3.1.1), (3.1.4) e (3.1.5), de entropia do processo X .*

Observação 3.1.10. *Observamos em general, que para calcular a entropia de um processo estacionário temos que achar o limite da k -ésima entropia do processo ou da k -ésima entropia condicionada do processo quando k cresce. Se X é uma cadeia de Markov estacionária temos uma fórmula explícita exata para calcular a entropia do processo. Isto é, para qualquer $k \geq 1$, temos $h(\nu_{k+1}) = h(\nu_2) = h(\nu)$.*

Teorema 3.1.11. *Se $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma cadeia de Markov estacionária de medida invariante π e de probabilidade de transição P então*

$$h(\nu) = - \sum_{i,j \in \mathcal{A}} \pi(i) P_{ij} \log P_{ij}.$$

Uma prova deste teorema encontra-se em Cover e Thomas (1991).

Estudaremos a velocidade de convergência de $\frac{1}{k}H(\nu_k)$ e respectivamente de $h(\nu_{k+1})$ para a entropia do processo na Seção 4.6.1.

Definição 3.1.12. *Seja ν e μ duas medidas de probabilidades definidas sobre o mesmo espaço $A^{\mathbb{Z}}$. Seja $k \geq 1$. Chamaremos $D(\nu_k||\mu_k)$ de entropia relativa ou de distância de Kullback-Leibler, da medida ν_k com respeito à medida μ_k onde*

$$D(\nu_k||\mu_k) := \sum_{a_1^k \in A^k} \nu_k(a_1^k) \log \left(\frac{\nu_k(a_1^k)}{\mu_k(a_1^k)} \right). \quad (3.1.6)$$

Um estudo detalhado da entropia relativa é apresentado em Cover e Thomas (1991).

Na Seção 4.5 apresentaremos um resultado sobre a velocidade de convergência da entropia relativa para zero.

3.2 Estimadores da entropia

Para cada $n \geq 1$ consideraremos $x_1^n \in A^n$ uma amostra finita de um processo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $k \leq n$.

Definição 3.2.1. *Chamaremos de k -ésima distribuição empírica do processo, uma medida de probabilidade $\hat{\nu}_k$ sobre o espaço A^k definida como*

$$\hat{\nu}_k(a_1^k | x_1^n) := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbf{1}(x_i^{i+k-1} = a_1^k)}{n - k + 1}, \quad a_1^k \in A^k$$

Por conveniência denotaremos às vezes $\hat{\nu}_k(\cdot | x_1^n) = \hat{\nu}_{k,n}$.

A partir da k -ésima distribuição empírica definida em (3.2.1) e das Definições 3.1.7 e 3.1.7, definiremos dois estimadores da entropia, isto é.

Definição 3.2.2. *1) Chamaremos $H(\hat{\nu}_k(\cdot | x_1^n))$ de k -ésima entropia empírica.*

2) Chamaremos $h(\hat{\nu}_{k+1}(\cdot | x_1^n))$ de k -ésima entropia empírica condicionada.

Por conveniência denotaremos $\hat{H}_{k,n} = H(\hat{\nu}_k(\cdot | x_1^n))$ e $\hat{h}_{k,n} = h(\hat{\nu}_{k+1}(\cdot | x_1^n))$.

Observação 3.2.3. *Consideraremos duas escalas diferentes, isto é, n que representa o comprimento da amostra e k que representa o comprimento dos cilindros considerados da medida ν . O comportamento assintótico dos dois estimadores da entropia será analisado, na próxima Seção, separadamente segundo a relação existente entre as duas escalas. Consideramos em primeiro o caso quando k é fixo em seguida, o caso em que k é uma função crescente de n .*

3.3 Resultados prévios

Caso k fixo

No caso onde k não depende de n a consistência dos estimadores da entropia, $\hat{H}_{k,n}$ e $\hat{h}_{k,n}$, é consequência do teorema ergódico clássico.. Isto é,

Proposição 3.3.1. *Seja $x_1^n \in A^n$ uma amostra de um processo ergódico ν . Para cada $k \geq 1$ valem ν quase-certamente as seguintes propriedades:*

(i) para cada $a_1^k \in \mathcal{A}^k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\nu}_k(a_1^k | x_1^n) = \nu_k(a_1^k).$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(\hat{\nu}_k(\cdot | x_1^n)) &= h(\nu) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} h(\hat{\nu}_{k+1}(\cdot | x_1^n)) &= h(\nu). \end{aligned}$$

Para cada k fixo, Iosifescu (1965), provou que o estimador $\frac{1}{k} \hat{H}_{k,n}$ tem flutuações gaussianas em torno de $\frac{1}{k} H_k$, a k -ésima entropia do processo, e respectivamente o estimador $\hat{h}_{k,n}$ tem flutuações gaussianas em torno de h_k a k -ésima entropia condicionada do processo.

Apresentaremos o resultado do Iosifescu somente para o estimador $\frac{1}{k} \hat{H}_{k,n}$. Lembramos que σ_f foi definido em (2.3.2) e as funções e_k foram definidas em (3.1.3).

Teorema 3.3.2. (Iosifescu 1965)

Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i.p.l.c., definida em (2.1.4), com taxa de perda de memória somável, isto é, $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty$. Para cada k fixado, $1 \leq k \leq n$ valem

- Se $\sigma_{e_k}^2 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma_{e_k}^2}} \left(\frac{1}{k} \hat{H}_k - \frac{1}{k} H_k \right) < \lambda \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/2} du. \quad (3.3.1)$$

uniformemente com respeito a λ ;

- Se $\sigma_{e_k}^2 = 0$ então

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{k} \hat{H}_{k,n} - \frac{1}{k} H_k \right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (3.3.2)$$

Observação 3.3.3. Observamos em particular que se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ for uma cadeia de Markov estacionária os estimadores considerados são estimadores da entropia do processo e flutuam, como variáveis aleatórias gaussianas, em torno da entropia do processo. A pergunta natural que temos agora é saber em geral, para c.o.i. como flutuam os dois estimadores da entropia em torno da entropia do processo e por outro lado como tem que ser a dependência entre as duas escalas k e n . Este problema será considerado no próximo capítulo..

Caso $k=k(n)$

Ornstein e Weiss (1990), provaram um Teorema ergódico que pode ser visto como um Teorema de Shanon-McMillan-Breiman para a medida empírica $\hat{\nu}_{k,n}$ quando n cresce, para qualquer $k \leq \frac{1}{h} \log n$.

Teorema 3.3.4. (Ornstein-Weiss 1990) *Seja um processo estacionário ergódico de medida ν , e tal que $h(\nu) > 0$. Para cada $k \geq 1$ existe um conjunto $T_k(\varepsilon) \in \mathcal{A}^k$ com $|T_k(\varepsilon)| \leq 2^{n(h+\varepsilon)}$ e tal que para quase todos os $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ existe $K = K(\varepsilon, n)$ tal que se $k \geq K$ e $n \geq 2^{kh}$ então*

- (i) $\hat{\nu}_{k,n}(T_k(\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$;
- (ii) $\hat{\nu}_{k,n}(B) < \varepsilon$, para qualquer $B \in \mathcal{A}^k$ satisfazendo $|B| \leq 2^{n(h-\varepsilon)}$.

Observaremos que para cada k fixo o Teorema de Ornstein e Weiss é consequência do Teorema de Shanon-McMillan-Breiman e do Teorema ergódico clássico.

O Teorema de Ornstein e Weiss mostra que para quase todas as realizações do processo, dado $\varepsilon > 0$ para todo k suficientemente grande e $k \leq \frac{1}{h} \log n$ existe um conjunto $T_k(\varepsilon)$ de k -cilindros tal que uma grande fração (com respeito a distribuição empírica), próxima de 1, de k - cilindros da amostra pertencem a $T_k(\varepsilon)$ e por outro lado o número de k -cilindros que pertencem a $T_k(\varepsilon)$ e de ordem 2^{kh} .

Como consequência do Teorema precedente temos os seguintes resultados sobre a consistência dos dois estimadores da entropia considerados.

Teorema 3.3.5. (Ornstein e Weiss 1990)

Seja ν uma medida ergódica de entropia $h(\nu) > 0$. Se $k(n) \leq \frac{1}{h(\nu)} \log n$, então ν quase-certamente vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k(n)} H(\hat{\nu}_{k(n)}(\cdot | x_1^n)) = h(\nu)$$

Este Teorema foi provado em Ornstein e Weiss(1990) e Shields(1996).

Teorema 3.3.6. (Shields 2001)

Seja ν uma medida ergódica de entropia $h(\nu) > 0$. Se $k(n) < \frac{1}{h(\nu)} \log n$, então ν quase-certamente vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\hat{\nu}_{k(n)+1}(\cdot | x_1^n)) = h(\nu)$$

Observação 3.3.7. Observamos, como consequência do Lema 4.3.1 ítem i) a seguir, que a entropia de uma c.o.i. positiva e log-contínua, que será considerada no próximo capítulo, é estritamente positiva.. Então os resultados de Ornstein e Weiss (1990) e Shields (1990) valem em particular para c.o.i.p.l.c..

Capítulo 4

Resultados novos. Flutuações da entropia empírica em torno da entropia do processo.

Este capítulo contém os resultados originais desta tese que são os Teoremas 4.6.4 e 4.6.5. Eles são apresentados na Seção 4.6.2. Antes demonstraremos dois teoremas preliminares que são interessantes por si só. Usando a construção regenerativa, proposta em Comets, Fernández e Ferrari (2000), para cadeias de ordem infinita, provaremos um teorema-limite central (Teorema 4.1.1) para funções cilíndricas, ferramenta que usaremos para estudar as flutuações dos estimadores da entropia do processo. Usando o controle da velocidade de decaimentos das correlações, resultados apresentados em Bressaud, Fernández e Galves (1999 b), provaremos, no Teorema 4.5.1, um novo resultado sobre a velocidade de convergência para zero da distância de Kullback-Leibler, ver a equação (3.1.6), entre a $k(n)$ -ésima distribuição empírica e a $k(n)$ -ésima distribuição verdadeira, quando n , o comprimento da amostra, diverge.

Consideraremos o processo $(X_n, W_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, definido na Seção 2.2 sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$. Denotaremos por $\mathbf{E}$ a esperança com respeito a $\mathbf{P}$. Consideramos $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma cadeia de ordem infinita positiva, log-contínua com taxa de perda de memória exponencial, apresentados na Definição 2.1.4, com valores num alfabeto finito $\mathcal{A}$ e com probabilidade de transição P . Consideraremos ν a medida invariante do processo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Para cada $n \geq 1$ consideraremos o vetor aleatório X_1^n de comprimento n e para $k \leq n$ consideraremos os k -cilindros X_{j-k}^{j-1} onde $k+1 \leq j \leq n$. O

comprimento k destes cilindros X_{j-k}^j será considerado crescente em n , isto é $k = k(n)$. Consideraremos $(f_{k(n)})_{n \geq 1}$ uma sequência de funções cilíndricas, $f_{k(n)} : \mathcal{A}^{k(n)} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes condições

- i) $f_{k(n)} \in L^2(\nu)$;
- ii) $\sup_{n \geq 1} \sup_{k(n)} \|f_{k(n)}\|_{+\infty} < +\infty$;
- iii) para qualquer sequência $(s(n))_{n \geq 1}$ de inteiros positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{s(n)} = 0$ a sequência $((\sigma_{f_{k(n)}}^2)^{(s(n))})_{n \geq 1}$ é convergente. A sequência $((\sigma_{f_{k(n)}}^2)^m)_{m \geq 1}$ foi definida na (2.3.3).

Definiremos

$$\sigma^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_{f_{k(n)}}^2)^{(s(n))}. \quad (4.0.1)$$

4.1 Teorema-limite central

Teorema 4.1.1. *Seja $(k(n))_{n \geq 1}$ uma sequência não decrescente de números, $1 \leq k(n) \leq n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = +\infty$. Para qualquer sequência de funções cilíndricas $(f_{k(n)})_{n \geq 1}$ satisfazendo as condições precedentes valem*

- Se $\sigma^2 > 0$ então

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(T_i f_{k(n)}(X_{-k(n)}^0) - \mathbf{E}_\nu[f_{k(n)}(X_{-k(n)}^0)] \right)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

- Se $\sigma^2 = 0$ então

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(T_i f_{k(n)}(X_{-k(n)}^0) - \mathbf{E}_\nu[f_{k(n)}(X_{-k(n)}^0)] \right)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Esboço da prova :

Denotaremos

$$s_{k(n),n}(X_1^n) := \sum_{i=1}^n \left(T_i f_{k(n)}(X_{-k(n)}^0) - \mathbf{E}_\nu[f_{k(n)}(X_{-k(n)}^0)] \right). \quad (4.1.1)$$

Por abuso de notação denotaremos $f_k := f_k(X_{-k}^0)$ e $s_{k(n),n} := s_{k(n),n}(X_1^n)$.

Segue da construção regenerativa de c.o.i.p.l.c. com perda de memória exponencial que existe uma sequência de tempos de regeneração do processo $(\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que os vetores aleatórios $X_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-1}$ são i.i.d. para todo $i \geq 1$, ver o Corolário 2.2.11.

Queremos usar esta independência para demonstrar o teorema-limite central. Ingenuamente a idéia seria considerar apenas os $k(n)$ -cilindros que não contêm os tempos de regeneração. Entretanto, isto não é possível pois quando n cresce o comprimento dos $k(n)$ -cilindros também divergem, enquanto a distância entre dois instantes de renovação tem distribuição majorada por uma geométrica com esperança finita. Ou seja, tipicamente qualquer cilindro conterá mais de um tempo de renovação. Isto inviabiliza a estratégia ingênua. Uma solução para este problema será dizimar a sequência de instantes de renovação considerando para cada n fixo os índices múltiplos de $s(n)$ onde a sequência $s(n)$ é escolhida estritamente crescente em n e tal que a distância típica entre dois instantes de renovação sobreviventes seja muito maior que $k(n)$. Consideraremos por exemplo, $s(n) = k^4(n)$. Esta sequência verifica todas as condições requisitadas para a demonstração do teorema-limite central.

Então para cada $n \in \mathbb{Z}$ escolheremos uma nova sequência

$$\tilde{\tau}_{i,n} := \tau_{s(n)i} \quad (4.1.2)$$

e denotaremos os incrementos

$$\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}} := \tilde{\tau}_{i,n} - \tilde{\tau}_{i-1,n}. \quad (4.1.3)$$

As propriedades do processo $\tilde{\tau}_{i,n}$ serão estudadas na Seção 4.2. Como consequência do Lema 4.2.5 para cada $n \geq 1$, $(\tilde{\tau}_{n,i})_{i \geq 0}$ é um novo processo de renovação e temos que $X_{\tilde{\tau}_{i,n}}^{\tilde{\tau}_{i+1,n}-1}$ são i.i.d para todo $i \geq 1$.

Para cada $n \geq 1$, definiremos as seguintes variáveis aleatórias

$$S'_{(i,k(n),n)} := \sum_{j=\tilde{\tau}_{i,n}}^{\tilde{\tau}_{i+1,n}-k(n)-1} [T_{(j+k(n))} f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu[f_{k(n)}]]. \quad (4.1.4)$$

$$R'_{(i,k(n),n)} := \sum_{j=\tilde{\tau}_{i,n}-k}^{\tilde{\tau}_{i,n}-1} [T_{(j+k(n))} f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu[f_{k(n)}]]. \quad (4.1.5)$$

Por conveniência denotaremos por $S'_i = S'_{(i,k(n),n)}$ e $R'_i = R'_{(i,k(n),n)}$.

Observamos que para cada $i \geq 0$ os $k(n)$ -cilindros que entram na expressão da variável aleatória S'_i , não contêm o tempo de renovação $\tilde{\tau}_{i,n}$ e que os $k(n)$ -cilindros que entram na expressão da variável aleatória $R'_{(i,k(n),n)}$, contêm o tempo de renovação $\tilde{\tau}_{i,n}$. Consideraremos também as seguintes variáveis aleatórias

$$\tilde{N}(n) := \sup_{i \geq 1} \{\tau_{s(n)i} \leq n\} = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{1}(\tilde{\tau}_{j,n} \leq n). \quad (4.1.6)$$

e

$$Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} := \sum_{j=1}^{\tilde{\tau}_{0,n}+k(n)-1} [T_j f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu(f_{k(n)})] - \sum_{j=n+1}^{\tilde{\tau}_{\tilde{N}(n)+1,n}+k(n)-1} [T_j f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu(f_{k(n)})]. \quad (4.1.7)$$

Usando as variáveis aleatórias definidas antes, escreveremos (4.1.1) como

$$s_{k(n),n} = \sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S'_{(i,k(n),n)} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R'_{(i,k(n),n)} + Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}. \quad (4.1.8)$$

Consideraremos as seguintes variáveis aleatórias centralizadas

$$S_{(i,k(n),n)} := S'_{(i,k(n),n)} - \mathbf{E}S'_{(i,k(n),n)}. \quad (4.1.9)$$

e

$$R_{(i,k(n),n)} := R'_{(i,k(n),n)} - \mathbf{E}R'_{(i,k(n),n)}. \quad (4.1.10)$$

Por conveniência denotaremos por $S_i = S_{(i,k(n),n)}$ e $R_i = R_{(i,k(n),n)}$. Escreveremos (4.1.8) como

$$s_{k(n),n} = \sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i + \sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_i + Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} + L_{(\tilde{N}(n), k(n))}. \quad (4.1.11)$$

onde

$$L_{(\tilde{N}(n), k(n))} := (\tilde{N}(n) + 1) (\mathbf{E}S'_i + \mathbf{E}R'_i). \quad (4.1.12)$$

Provaremos, ver o Lema 4.4.9, que a variável aleatória $\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i$ converge em distribuição para uma variável gaussiana e que todos os outros termos do membro direito da igualdade (4.1.11) convergem em probabilidade para zero. Na Seção 4.4 apresentaremos uma prova do Teorema 4.1.1. As Seções 4.2 e 4.3 contêm resultados auxiliares que usaremos na Seção 4.4.

4.2 Regeneração. Propriedades

Consideraremos $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i.p.l.c. com perda de memória exponencial construída segundo esquema regenerativo apresentado em Comets, Fernández e Ferrari (2000). (Ver o Corolário 2.2.11.) Consideraremos $(\tau_i)_{i \geq -1}$ o processo de renovação estacionário, definido em (2.2.3), com $\gamma := \mathbf{E}(\Delta_{\tau_0})$. Consideraremos uma família de cadeias castelo de cartas $\{(Z_n^{0,t})_{n \geq t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ com as probabilidades de transição definidas em (2.2.4) e começando na origem no tempo $t \in \mathbb{Z}$. Acoplaremos essas cadeias usando a sequência de variáveis aleatórias uniformes U , isto é,

$$Z_n^{0,t} = \begin{cases} 0, & n \leq t \\ (Z_{n-1}^{0,t} + 1) \mathbf{1}\{U_n \leq \alpha_{Z_{n-1}^{0,t}}\}, & n \geq t+1 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Observamos que o processo definido em (2.2.4) é tal que $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (Z_n^{0,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Definição 4.2.1. *Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i. de probabilidade de transição P e $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ a sequência da Definição 2.2.1. Chamaremos, a família de processos (4.2.1), de cadeia de castelo de cartas associada ao processo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.*

Lema 4.2.2. *Sejam $\{(Z_n^{0,t})_{n \in \mathbb{Z}}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o castelo de cartas associado ao processo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\tau[l, m]$ o tempo de regeneração de uma janela $[l, m]$, definido em (2.2.1). Vale a seguinte identidade:*

$$\{\tau[l, m] < t\} = \cup_{i \in [l, m]} \{Z_i^{0,t} = 0\}. \quad (4.2.2)$$

para $t \leq l$.

Uma prova deste resultado se encontra no livro de Fernández, Ferrari, Galves (2001).

Observação 4.2.3. *Segue de (2.2.1) que*

$$\{\tau[t, +\infty] = t\} = \cap_{j \geq t} \{Z_j^{0,t-1} > 0\}.$$

Lema 4.2.4. *Sejam $f : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $l \leq j$ as variáveis aleatórias Δ_{τ_l} e $f(X_{\tau_j}^{+\infty})$ são independentes.*

Prova. Temos

$$\mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m, f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r) = \sum_t \mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m, f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t). \quad (4.2.3)$$

Escreveremos

$$\{\Delta_{\tau_l} \geq m, f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t\} = A_t \cap \{f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t\}$$

onde

$$\{\Delta_{\tau_l} \geq m, \tau_l = t\}$$

$$\begin{aligned} A_t &:= \{\Delta_{\tau_l} \geq m, \tau_l = t\} \\ &= \{\tau[t-1, +\infty] < t-m+1, \tau[t, +\infty] = t, \tau_l = t\} \\ &= \{\cup_{j \geq t-1} Z_j^{0, t-m} = 0\} \cap \{\cap_{j \geq t} Z_j^{0, t-1} > 0\} \cap \{\tau_l = t\} \end{aligned}$$

Como $Z_j^{0, t-1} \leq Z_j^{0, t-m}$ para todo $j \geq t$ e como $\{\tau_l = t\} \subseteq \{\tau[t, +\infty] = t\}$ temos então

$$\begin{aligned} A_t &= \{Z_{t-1}^{0, t-m} = 0\} \cap \{\cap_{j \geq t} Z_j^{0, t-1} > 0\} \cap \{\tau_l = t\} \\ &= \{Z_{t-1}^{0, t-m} = 0\} \cap \{\tau_l = t\}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Em conclusão temos

$$\{\Delta_{\tau_l} \geq m, f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t\} = \{Z_{t-1}^{0, t-m} = 0\} \cap \{f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t\}.$$

Observaremos que

$$\{Z_{t-1}^{0, t-m} = 0\} \in \Sigma(U_{t-m}^{t-1}) \quad (4.2.5)$$

Por outro lado para todo $l \leq j$ temos $\tau_l \leq \tau_j$, então

$$\{f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t\} \in \Sigma(U_t^{+\infty}). \quad (4.2.6)$$

Seque de (4.2.4), (4.2.5) e (4.2.6) que para todo $t \in \mathbb{Z}$ vale

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m | \tau_l = t) &= \mathbf{P}(A_t | \tau[t, +\infty] = t) \\ &= \mathbf{P}(Z_{t-1}^{0, t-m} = 0) = \gamma_m^*. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Como consequência temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m) &= \sum_t \mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m | \tau_l = t) \mathbf{P}(\tau_l = t) \\ &= \mathbf{P}(Z_{t-1}^{0, t-m} = 0) = \gamma_m^*. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Então segue de (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m, f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r) &= \sum_t \mathbf{P}(Z_{t-1}^{0,t-m} = 0) \mathbf{P}(f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t) \\
&= \mathbf{P}(Z_{t-1}^{0,t-m} = 0) \sum_t \mathbf{P}(f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r, \tau_l = t) \\
&= \mathbf{P}(\Delta_{\tau_l} \geq m) \mathbf{P}(f(X_{\tau_j}^{+\infty}) = r).
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova do Lema. ■

Para cada $n \geq 1$ consideraremos a variável aleatória

$$N(n) := \sup_{i \geq 0} \{\tau_i \leq n\}. \quad (4.2.9)$$

Consideraremos o processo $(\tilde{\tau}_{n,i})_{i \in \mathbb{Z}}$ definido em (4.1.2) e as variáveis aleatórias $\Delta_{\tilde{\tau}_{n,i}}$ definidas em (4.1.3).

Lema 4.2.5. 1) Para cada $n \geq 1$, $(\tilde{\tau}_{i,n})_{i \geq 0}$ é um processo de renovação estacionário e para todo $m \geq 1$ valem as seguintes propriedades

$$\mathbf{E}(\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}}) = O(s(n)); \quad (4.2.10)$$

$$\mathbf{E}(\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}} - \mathbf{E}(\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}}))^2 = O(s(n)) \quad (4.2.11)$$

$$\mathbf{E}(\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}})^m = O(s^m(n)) \quad (4.2.12)$$

$$(4.2.13)$$

2) Para cada $n \geq 1$, $(\tau_{i,n}^*)_{i \in \mathbb{Z}}$ é um processo de renovação estacionário, onde $\tau_{i,n}^* := \tau_{s(n)i-k(n)}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Prova. Observamos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}} &= \sum_{j=0}^{s(n)-1} \Delta_{\tau_{s(n)i-j}}. \\
\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}^*} &= \sum_{j=0}^{s(n)-1} \Delta_{\tau_{s(n)i-j-k(n)}}.
\end{aligned}$$

Como $(\tau_i)_{i \geq -1}$ é um processo de renovação estacionário podemos concluir a prova do lema. ■

Lema 4.2.6. Para as seqüências de variáveis aleatórias $(N(n))_{n \geq 1}$ e $(\tilde{N}(n))_{n \geq 1}$, definidas em (4.2.9) e (4.1.6). Valem as seguintes propriedades

i)

$$\frac{1}{n}N(n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{\gamma}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{1}{n}N(n) \right) = \frac{1}{\gamma}.$$

ii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{n} = 0$ então

$$\frac{s(n)}{n} \tilde{N}(n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{\gamma}. \quad (4.2.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{s(n)}{n} \tilde{N}(n) \right) = \frac{1}{\gamma}. \quad (4.2.15)$$

Prova. i) Segue da teoria clássica sobre os processos de renovação (ver, por exemplo, Grimmett & Stirzaker (1992)).

ii) Como consequências das definições (4.2.9) e (4.1.6) temos por um lado que $s(n)\tilde{N}(n) \leq N(n)$ e por outro lado temos $\left\lceil \frac{N(n)}{s(n)} \right\rceil \leq \tilde{N}(n)$. Então

$$N(n) - s(n) \leq \tilde{N}(n)s(n) \leq N(n).$$

Usando (i) concluimos a prova do (ii). ■

Consideraremos μ_C a lei conjunta do processo $(X_n, W_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ construído na Seção 2.2. Vamos estimar a diferença $D_j(f)$, definida em (4.4.7), entre $\mathbf{E}_{\mu_C}(T_{\tau_0+j}f)$ e $\mathbf{E}_{\mu_C}(f)$ e a diferença entre a variância da função $T_{\tau_0^n}f$ e a variância da função f . Lembramos (ver o Teorema 2.2.10 e a equação (2.2.2)), que $(W_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário de renovação com valores em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ e tal que $\mathbf{P}(W_j = 1) = \beta$.

Lema 4.2.7. Seja $f = f(a_{-k}^0) : A^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica e limitada. Valem as seguintes propriedades:

1) Para todo $j \geq 1$

$$|D_j(f)| \leq \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(f). \quad (4.2.16)$$

Onde $\text{var}_j(f)$, foi definida em (2.3.6).

2) Se $\sum_{j=0}^{+\infty} \text{var}_j(f) < +\infty$ então para todo $m \geq 1$ e para todo $j \geq 0$

$$\sum_{j=0}^m |D_j(f)| < +\infty. \quad (4.2.17)$$

3) Se $\sum_{j=0}^{+\infty} j \text{var}_j(f) < +\infty$ então para todo $m \geq 1$ e para todo $j \geq 0$ existe uma constante M tal que

$$\sum_{d=1}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m |D_j[(f - \mathbf{E}f)T_{-d}(f - \mathbf{E}f)]| \leq Mm. \quad (4.2.18)$$

Prova. Para todo $i \neq -1$, os vetores aleatórios $X_{\tilde{\tau}_{i,n}}^{\tilde{\tau}_{i,n}+1, n-1}$ são identicamente distribuídos então para todo $t, j \geq 1$ temos

$$\mathbf{E}(T_{\tilde{\tau}_{i,n}+j}f) = \mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=1)}(T_jf).$$

Para provar essa afirmação observaremos que para todo cilindro a_{-k}^0 e para todo $t \in \mathbb{Z}$ temos

$$\mathbf{P}(X_{\tilde{\tau}_{i,n}+j-k}^{\tilde{\tau}_{i,n}+j} = a_{-k}^0 | \tilde{\tau}_{i,n} = t) = \mathbf{P}(X_{t+j-k}^{t+j} = a_{-k}^0 | W_t = 1).$$

Usando a estacionariedade do processo $(X_t, W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ temos

$$\mathbf{P}(X_{\tilde{\tau}_{i,n}+j-k}^{\tilde{\tau}_{i,n}+j} = a_{-k}^0 | \tilde{\tau}_{i,n} = t) = \mathbf{P}(X_{j-k}^j = a_{-k}^0 | W_0 = 1).$$

Então para todo $t \in \mathbb{Z}$ vale

$$\mathbf{E}(T_{\tilde{\tau}_{i,n}+j}f | \tilde{\tau}_{i,n} = t) = \mathbf{E}(T_jf | W_0 = 1).$$

Em consequência, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_{\tilde{\tau}_{i,n}+j}f) &= \sum_{t \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}(T_{\tilde{\tau}_{i,n}+j}f | \tilde{\tau}_{i,n} = t) \mathbf{P}(\tilde{\tau}_{i,n} = t) \\ &= \mathbf{E}(T_jf | W_0 = 1). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} D_j(f) &= \mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=1)}(T_jf) - \mathbf{E}_{\mu_C}(f) \\ &= \mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=1)}(T_jf) - \beta \mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=1)}(T_jf) - (1 - \beta) \mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=0)}(T_jf) \\ &= (1 - \beta) (\mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=1)}(T_jf) - \mathbf{E}_{\mu_C(\cdot|W_0=0)}(T_jf)). \end{aligned}$$

Observamos que para qualquer $l \in \{0, 1\}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_C}(\cdot | W_0=l)(T_j f) &= \sum_{t_0 \geq 1} \mathbb{E}_{\mu_C}(\cdot | W_0=l, \tau_0=t_0)(T_j f) \mathbb{P}(\tau_0 = t_0 | W_0 = l) \\ &= \sum_{t_0 \geq 1} \beta(1 - \beta)^{t_0-1} \mathbb{E}_{\mu_C}(\cdot | W_0=l, \tau_0=t_0)(T_j f). \end{aligned}$$

Então

$$D_j(f) = \beta \sum_{t_0=1}^{+\infty} (1 - \beta)^{t_0} D_{j,t_0}(f). \quad (4.2.19)$$

onde

$$D_{j,t_0}(f) := \mathbb{E}_{\mu_C}(\cdot | W_0=1, \tau_0=t_0)(T_j f) - \mathbb{E}_{\mu_C}(\cdot | W_0=0, \tau_0=t_0)(T_j f). \quad (4.2.20)$$

Provaremos que para cada $t_0 \geq 1$ vale

$$|D_{j,t_0}(f)| \leq \text{var}_{j-t_0}(f). \quad (4.2.21)$$

Suponhamos, inicialmente, que $t_0 \leq j$.

Segue da construção regenerativa das cadeias de ordem infinita $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (ver 2.2.11), que os vetores aleatórios $(X_{\tilde{\tau}_0, n}, \dots, X_{\tilde{\tau}_1, n-1})$ são independentes das variáveis aleatórias $\{X_i : i < \tilde{\tau}_0, n\}$. Então

$$\begin{aligned} \mu_C([a_{-k+j}^j] | W_0 = 1, \tau_0 = t_0) &= \mu([a_{t_0}^j]) \mu^1([a_{-k+j}^{t_0-1}], \\ \mu_C([a_{-k+j}^j] | W_0 = 0, \tau_0 = t_0) &= \mu([a_{t_0}^j]) \mu^2([a_{-k+j}^{t_0-1}]). \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Onde μ^1, μ^2, μ são algumas medidas de probabilidade.

$$D_{j,t_0}(f) = \sum_{a_{t_0}^j} \mu([a_{t_0}^j]) A(a_{t_0}^j) \quad (4.2.23)$$

onde

$$A(a_{t_0}^j) := \sum_{a_{-k+j}^{t_0-1}} \mu^1([a_{-k+j}^{t_0-1}]) f(a_{-k+j}^j) - \sum_{a_{-k+j}^{t_0-1}} \mu^2([a_{-k+j}^{t_0-1}]) f(a_{-k+j}^j).$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
|A(a_{t_0}^j)| &\leq \sup_{a_{-k+j}^{t_0-1}} f(a_{-k+j}^j) - \inf_{a_{-k+j}^{t_0-1}} f(a_{-k+j}^j) \\
&\leq \sup_{a_{t_0}^j} \left(\sup_{a_{-k+j}^{t_0-1}} f(a_{-k+j}^j) - \inf_{a_{-k+j}^{t_0-1}} f(a_{-k+j}^j) \right) \\
&= \text{var}_{j-t_0}(f)
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Então, como consêquencia de (4.2.23) e (4.2.24) temos

$$|D_{j,t_0}(f)| \leq \text{var}_{j-t_0}(f). \tag{4.2.25}$$

Se $t_0 \geq j+1$ temos

$$\begin{aligned}
|D_{j,t_0}(f)| &\leq \sum_{a_{j-k}^j} \mu_C([a_{j-k}^j] | W_0 = 1, \tau_0 = t_0) f(a_{-k+j}^j) \\
&\quad - \sum_{a_{-k+j}^j} \mu_C([a_{-k+j}^j] | W_0 = 0, \tau_0 = t_0) f(a_{-k+j}^j) \\
&\leq \sup_{a_{-k+j}^j} f(a_{-k+j}^j) - \inf_{a_{-k+j}^j} f(a_{-k+j}^j) = \text{var}_{-1}(f). \\
&\leq \|f\|_\infty.
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Em consequência, via (4.2.19), (4.2.25) e (4.2.26) podemos concluir a prova do primeiro ítem do Lema.

2) Podemos estender o Lema 4.2.7 para funções não cilíndricas. Então usando o primeiro ítem do lema temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m |D_j(f)| &\leq M \sum_{j=0}^m \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(f) \\
&\leq M \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} \left(\sum_{j=1}^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(f) + \sum_{j=t_0+1}^{+\infty} \text{var}_{j-t_0}(f) \right) \\
&\leq M \|f\|_\infty \sum_{t_0=1}^{+\infty} t_0 \beta(1-\beta)^{t_0} + M \sum_{j=1}^{+\infty} \text{var}_j(f) \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

3) Para todo $m \geq d$, usando a Definição 2.3.6, vale

$$\begin{aligned}
V &:= \text{var}_m[(f - \mathbf{E}f)T_{-d}(f - \mathbf{E}f)] \\
&= \sup_{a \stackrel{m}{=} b} |(f(a) - \mathbf{E}f)T_{-d}(f(a) - \mathbf{E}f) - (f(b) - \mathbf{E}f)T_{-d}(f(b) - \mathbf{E}f)| \\
&\leq \sup_{a \stackrel{m}{=} b} |(f(a) - f(b))(T_{-d}f(a) - \mathbf{E}f)| \\
&\quad + \sup_{a \stackrel{m}{=} b} |(T_{-d}f(a) - T_{-d}f(b))(f(b) - \mathbf{E}f)| \\
&\leq 2\|f\|_\infty \left(\sup_{a \stackrel{m}{=} b} |(f(a) - f(b))| + \sup_{a \stackrel{m}{=} b} |(T_{-d}f(a) - T_{-d}f(b))| \right) \\
&= 2\|f\|_\infty (\text{var}_m(f) + \text{var}_{m-d}(f)). \tag{4.2.27}
\end{aligned}$$

Se $m \leq d - 1$ vale

$$\text{var}_m[(f - \mathbf{E}f)T_{-d}(f - \mathbf{E}f)] \leq 8\|f\|_\infty. \tag{4.2.28}$$

Notaremos $\tilde{f} := (f - \mathbf{E}f)T_{-d}(f - \mathbf{E}f)$.

Usando (4.2.16) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m |D_j(\tilde{f})| &\leq \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m \sum_{t_0 \geq 1} \beta(1 - \beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(\tilde{f}) \\
&\leq \sum_{t_0 \geq 1} \sum_{d=1}^{m-1} \sum_{j=d+1}^{d+t_0-1} \beta(1 - \beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(\tilde{f}) \\
&\quad + \sum_{t_0 \geq 1} \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+t_0+1}^{+\infty} \beta(1 - \beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(\tilde{f})
\end{aligned}$$

Para cada um dos termos do membro direito da desigualdade precedente, provaremos, para cada k e n , que é limitado por uma constante vezes m . Isto é, usando (4.2.28) temos

$$\begin{aligned}
A &:= \sum_{t_0 \geq 1} \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^{d+t_0-1} \beta(1 - \beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(\tilde{f}) \\
&\leq 8m\|f\|_\infty \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta t_0 (1 - \beta)^{t_0}.
\end{aligned}$$

Usando (4.2.27) temos

$$\begin{aligned}
B &:= \sum_{t_0 \geq 1} \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+t_0+1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} \text{var}_{j-t_0}(\tilde{f}) \\
&\leq 2\|f\|_{\infty} \sum_{t_0 \geq 1} \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+t_0+1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} (\text{var}_{j-t_0}(f) + \text{var}_{j-t_0-d}(f)) \\
&\leq M \left(\sum_{j=0}^{+\infty} j \text{var}_j(f) \right) \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0} \\
&+ mM \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \text{var}_j(f) \right) \sum_{t_0=1}^{+\infty} \beta(1-\beta)^{t_0}.
\end{aligned}$$

Então, sobre a hipótese do item 3 do lema temos $B \leq Mm$. Isto conclui a prova do lema. $\blacksquare$

Corolario 4.2.8. *Sejam $n, k \geq 1$ e $f = f(a_{-k}^0) : A^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cilíndrica e limitada. Para tudo $m \geq 1$ valem*

1) *Se $\sum_{j=0}^{+\infty} j \text{var}_j(f) < +\infty$ então existe uma constante M tal que*

$$\left| \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^m (T_{\tilde{\tau}_i^n + j} f - \mathbf{E}f) \right)^2 - m(\sigma_f^2)^m \right| \leq Mm. \quad (4.2.29)$$

2)

$$\left| \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^m (T_{\tilde{\tau}_i^n + j+k} f - \mathbf{E}f) \right)^2 - m(\sigma_f^2)^m \right| < +\infty. \quad (4.2.30)$$

Prova. Usando a notação $\tilde{f} = f - \mathbf{E}f$ escreveremos para cada $l \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^m (T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} f - \mathbf{E}f) \right)^2 &= \sum_{j=0}^m \sum_{j'=0}^m [T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} \tilde{f}] [T_{\tilde{\tau}_i^n + j'+l} \tilde{f}] \\
&= \sum_{j=0}^m T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} \tilde{f}^2 + 2 \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} [\tilde{f} T_{-d} \tilde{f}].
\end{aligned}$$

Usando a notação de $(\sigma_f^2)^m$ introduzida em (2.3.3), escreveremos

$$\begin{aligned} L &:= \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^m (T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} f - \mathbf{E} f) \right)^2 - m(\sigma_f^2)^m \\ &= \sum_{j=0}^m \left(\mathbf{E}[T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} \tilde{f}^2] - \mathbf{E}[\tilde{f}^2] \right) \\ &\quad + 2 \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m \left(\mathbf{E}[T_{\tilde{\tau}_i^n + j+l} (\tilde{f} T_{-d} \tilde{f})] - \mathbf{E}[\tilde{f} T_{-d} \tilde{f}] \right). \end{aligned}$$

Usando as notações do Lema 4.2.7 podemos escrever

$$L = \sum_{j=0}^m D_{j+l}(\tilde{f}^2) + 2 \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m D_{j+l}(\tilde{f} T_{-d} \tilde{f}).$$

Observamos que para $l = 0$ se $\sum_{j=0}^{+\infty} j \text{var}_j(f) < +\infty$ usando o lema precedente podemos concluir o primeiro ítem do lema.

Do outro lado segue do Lema 4.2.7 que

$$|D_{j+k}(f)| \leq M(1 - \beta)^{j+1}.$$

Então temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m |D_{j+k}(f)| &< +\infty. \\ \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{j=d+1}^m |D_{j+k}(f)| &< +\infty. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do Corolário. ■

4.3 Covariâncias

Consideraremos ν a medida invariante de um processo estacionário com valores em $\mathcal{A}$. Usaremos as notações e as definições das covariâncias introduzidas na Seção 2.3.2. Consideraremos as funções ϕ , ϕ_k e e_k com $k \geq 1$ definidas em (3.1.3) e $I_{[a_1^k]}$ a função indicadora de um k -cilindro $[a_1^k] \in A^{\mathbb{Z}}$, $k \geq 1$. Consideraremos $\text{var}_m f$, a variação da função f , definida em (2.3.6).

Lema 4.3.1. Se $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ for uma c.o.i.p.l.c. com taxa de perda de memória $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ então

- i) As funções ϕ , ϕ_k , e e_k são estritamente positivas e uniformemente limitadas.
- ii) Existem duas constantes M e M' tal que $M'\gamma_k \leq \text{var}_k(\phi) \leq M\gamma_k$.
- iii) Para todo $m \leq k$, $\text{var}_m(\phi_k) \leq \gamma_k$ e para $m \geq k$, $\text{var}_m(\phi_k) = 0$.
- iv) Para todo $k \geq 1$ vale

$$\|\phi - \phi_k\|_\infty = O(\gamma_k). \quad (4.3.1)$$

- v) Para todo $i, j \geq 1$ existe M'' tal que

$$\|\phi_i - \phi_j\|_\infty \leq M''\gamma_{\inf\{i,j\}}. \quad (4.3.2)$$

Prova. Seque da definição da cadeia considerada, que

$$0 < \inf_x \nu(x_0 | x_{-\infty}^{-1}) \leq \nu(x_0 | x_{-\infty}^{-1}) \leq \sup_x \nu(x_0 | x_{-\infty}^{-1}) < 1. \quad (4.3.3)$$

então ϕ é estritamente positiva e uniformemente limitada. Como consêquencia de (2.3.2) temos também, que ϕ_k é estritamente positiva e uniformemente limitada. Consideraremos as seguintes constantes

$$c_M := -\log(\inf_x \nu(x_0 | x_{-\infty}^{-1})),$$

e

$$c_m := -\log(\sup_x \nu(x_0 | x_{-\infty}^{-1})).$$

Segue de (4.3.3) que $0 < c_m \leq c_M < 1$. Então para todo k -cilindro $[a_1^k] \in A^{\mathbb{Z}}$, $k \geq 1$ vale

$$e^{-c_M k} \leq \nu(a_1^k) \leq e^{-c_m k}.$$

Isto prova que e_k é estritamente positiva e uniformemente limitada. Como consêquencia de (2.3.1) podemos concluir a prova. ■

Lema 4.3.2. Se $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ for uma c.o.i.p.l.c.e. então para todo $d \geq 0$, para todo $i, j \geq 1$ e para todo $k \geq 1$ valem as seguintes propriedades

1)

$$|C_\phi(d)| = O(\gamma_d^*), \quad |C_{\phi_i}(d)| = O(\gamma_d^*), \quad e \quad |C_{\phi_i, \phi_j}(d)| = O(\gamma_d^*); \quad (4.3.4)$$

2) existe M tal que

$$|C_{\phi_i, \phi_j}(d) - C_\phi(d)| \leq M \gamma_{\inf\{i, j\}}; \quad (4.3.5)$$

3) existe M' tal que

$$|C_{\phi_i}(d) - C_\phi(d)| \leq M' \gamma_{\sup\{i, d\}}^*; \quad (4.3.6)$$

4)

$$|C_{I[a_1^k]}(d)| \leq 2\nu([a_1^k])e^{-c_m \inf\{k, d\}}. \quad (4.3.7)$$

5) existe M'' tal que

$$|C_{I[a_1^k]}(d)| \leq M'' \nu([a_1^k]) \frac{\gamma_d^*}{\gamma_k}. \quad (4.3.8)$$

Lembramos que se $\gamma_k = \exp^{-ck}$ então $\gamma_k^* = \exp^{-c'k}$ onde $c' < c$.

Prova. Observamos que (4.3.4) é consequência do Teorema 2.3.3. A partir da Definição 2.3.2, usando (3.1.7), (3.1.5) e o Lema 4.3.1 temos

$$\begin{aligned} |C_{\phi_i, \phi_j}(d) - C_\phi(d)| &\leq 2(\|\phi_i - \phi\|_\infty h + \|\phi_j - \phi\|_\infty h_i) \\ &\leq M \gamma_{\inf\{i, j\}}. \end{aligned}$$

Fazendo $j = i$ em (4.3.5) e por outro lado usando (4.3.4) podemos concluir (4.3.6).

Como já foi provado no Lema 4.3.1, temos que existem duas constantes $0 < c_m \leq c_M < 1$ tais que para todo k -cilindro $[a_1^k] \in A^{\mathbb{Z}}$, $k \geq 1$ vale

$$e^{-c_M k} \leq \nu(a_1^k) \leq e^{-c_m k}.$$

Como consequência do Teorema 2.3.3 e do Lema 4.3.1 (ii) segue (4.3.8). ■

Lema 4.3.3. Para qualquer sequência $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k(n) = +\infty$ e para qualquer sequência $(s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = +\infty$ vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_{\phi_{k(n)}}^2)^{s(n)} = \sigma_\phi^2.$$

Prova. Segundo (2.3.4) e 2.3.5 temos

$$\begin{aligned} |(\sigma^2)_{\phi_{k(n)}}^{s(n)} - \sigma_\phi^2| &\leq |C_{\phi_{k(n)}}(0) - C_\phi(0)| + 2 \sum_{d=1}^{s(n)-1} |C_{\phi_{k(n)}}(d) - C_\phi(d)| \\ &\quad + 2 \sum_{d=s(n)}^{+\infty} |C_\phi(d)| + \frac{2}{s(n)} \sum_{d=1}^{+\infty} d |C_{\phi_{k(n)}}(d)| := A + B + C + D. \end{aligned}$$

Cada um desses termos serão analisados separadamente. Segundo (4.3.6) temos

$$A := |C_{\phi_{k(n)}}(0) - C_\phi(0)| = O(\gamma_{k(n)}^*)$$

e

$$\begin{aligned} B &:= 2 \sum_{d=1}^{s(n)-1} |C_{\phi_{k(n)}}(d) - C_\phi(d)| \\ &\leq 2 \sum_{d=1}^{k(n)} |C_{\phi_{k(n)}}(d) - C_\phi(d)| + 2 \sum_{d=k(n)+1}^{+\infty} |C_{\phi_{k(n)}}(d) - C_\phi(d)| \\ &= O(k(n)\gamma_{k(n)}^*) + O(\gamma_{k(n)}^*). \end{aligned}$$

Segundo(4.3.4) temos

$$C := 2 \sum_{d=s(n)}^{+\infty} |C_\phi(d)| = O(\gamma_{s(n)}^*)$$

e

$$D := \frac{2}{s(n)} \sum_{d=1}^{+\infty} d |C_{\phi_{k(n)}}(d)| = O\left(\frac{1}{s(n)}\right).$$

Como $k(n)\gamma_{k(n)}^*$ e $\gamma_{s(n)}^*$ convergem para zero podemos concluir a prova. ■

Lema 4.3.4. Para qualquer sequência $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k(n) = +\infty$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in A^{\mathbb{Z}}} \left(\frac{(\sigma_{I[a_1^{k(n)}]}^2)^n}{\nu(a_1^{k(n)})} \right) < +\infty.$$

Prova. Segundo (4.3.7) e (2.3.4) temos

$$(\sigma_{I[a_1^{k(n)}]}^2)^n \leq |C_{I[a_1^{k(n)}]}(0)| + 2 \sum_{d=1}^{n-1} \left(1 + \frac{d}{n}\right) |C_{I[a_1^{k(n)}]}(d)|.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $m(n) = k(n) + 1 + [e^{c_m k(n)}]$ e $i(n) = \inf\{m(n), n\}$. No membro direito da precedente desigualdade escrevemos o segundo termo como a soma de tres termos $A + B + C$. Usando (4.3.7) temos

$$|C_{I[a_1^{k(n)}]}(0)| \leq 2\nu([a_1^{k(n)}]),$$

$$\begin{aligned} A &:= 2 \sum_{d=1}^{k(n)} \left(1 + \frac{d}{n}\right) |C_{I[a_1^{k(n)}]}(d)| \\ &\leq 4\nu([a_1^{k(n)}]) \sum_{d=1}^{k(n)} \left(1 + \frac{d}{n}\right) e^{-c_m d}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &:= 2 \sum_{d=k(n)+1}^{i(n)-2} \left(1 + \frac{d}{n}\right) |C_{I[a_1^{k(n)}]}(d)| \\ &\leq 8\nu([a_1^{k(n)}]) e^{-c_m(k(n)+1)} (i(n) - k(n) - 1). \end{aligned}$$

Usando (4.3.8) temos

$$\begin{aligned} C &:= 2 \sum_{d=i(n)-1}^{n-1} \left(1 + \frac{d}{n}\right) |C_{I[a_1^{k(n)}]}(d)| \\ &\leq M'' \nu([a_1^{k(n)}]) \sum_{d=i(n)-1}^{n-1} e^{ck(n)-c'd}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do lema. ■

Lema 4.3.5. Para qualquer sequências $(k(n))_{n \geq 1}$ e $(s(n))_{n \geq 1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n)}{s(n)} = 0$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_{e_{k(n)}}^2)^{s(n)} = \sigma_\phi^2.$$

Prova. Observamos a partir das definições de ϕ_k e e_k (ver (3.1.3)) que

$$e_k = \frac{1}{k} \sum_{d=1}^k T_d \phi_{d-1}.$$

Enão usando a Definição 2.3.2 temos

$$\begin{aligned} C_{e_k}(d) &= \frac{1}{k^2} \left[\int \sum_{i,j=1}^k T_i \phi_{i-1} T_{(d+j)} \phi_{j-1} - \left(\int \sum_{i=1}^k T_i \phi_{i-1} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{i,j=1}^k C_{\phi_{i-1}, \phi_{j-1}}(d+j-i). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (\sigma_{e_{k(n)}}^2)^{s(n)} &= C_{e_{k(n)}}(0) + 2 \sum_{d=1}^{s(n)-1} C_{e_{k(n)}}(d) - \frac{2}{s(n)} \sum_{d=1}^{s(n)-1} d C_{e_{k(n)}}(d) \\ &= \frac{1}{k^2(n)} \sum_{i,j=1}^{k(n)} C_{\phi_{i-1}, \phi_{j-1}}(j-i) \\ &\quad + 2 \sum_{d=1}^{s(n)-1} \frac{1}{k^2(n)} \sum_{i,j=1}^{k(n)} C_{\phi_{i-1}, \phi_{j-1}}(d+j-i) \\ &\quad - \frac{2}{s(n)} \sum_{d=1}^{s(n)-1} \frac{1}{k^2(n)} \sum_{i,j=1}^{k(n)} d C_{\phi_{i-1}, \phi_{j-1}}(d+j-i). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Observaremos que (4.3.4) e (4.3.5) continuam verdadeiras se no lugar de $C_{\phi_i, \phi_j}(d)$ colocamos $C_l(d)$ onde $l = \inf\{i, j\}$. Por essa razão denotaremos por $(\tilde{\sigma}_{e_{k(n)}}^2)^{s(n)}$ a expressão precedente (4.3.9) onde $C_{\phi_i, \phi_j}(d)$ será trocado por $C_l(d)$ com $l = \inf\{i, j\}$. Em (4.3.9) agruparemos juntos no termo $\mathcal{T}_n(d)$ as covariâncias do mesmo espaçamento d . Isto é

$$(\tilde{\sigma}_{e_{k(n)}}^2)^{s(n)} = \sum_{d=0}^{s(n)+k(n)-2} \mathcal{T}_n(d). \quad (4.3.10)$$

Enão

$$\begin{aligned} |(\tilde{\sigma}_{e_{k(n)}}^2)^{s(n)} - \sigma_\phi^2| &\leq |\mathcal{T}_n(0) - C_\phi(0)| + \sum_{d=1}^{k(n)} |\mathcal{T}_n(d) - 2C_\phi(d)| \\ &+ \sum_{d=k(n)}^{s(n)+k(n)-2} |\mathcal{T}_n(d)| + 2 \sum_{d=k(n)}^{+\infty} |C_\phi(d)|. \end{aligned}$$

Nas seguintes cotas usaremos

$$C_{\phi_i, \phi_j}(-d) = C_{\phi_j, \phi_i}(d).$$

Escreveremos o membro direito de (4.3.11) como uma soma de quatro termos $A + B + C + D$.

- Em primeiro vamos estudar o termo $\mathcal{T}_n(0)$.

$$\mathcal{T}_n(0) = \frac{1}{k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] C_{i-1}(0) - \mathcal{T}_n^1(0).$$

onde

$$\mathcal{T}_n^1(0) = \frac{1}{s(n)k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [k(n) - i][k(n) - i + 1] C_{i-1}(0) = O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right)$$

Usando (4.3.6) temos

$$\begin{aligned} A : &= |\mathcal{T}_n(0) - C_\phi(0)| \\ &= \frac{1}{k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] |C_{i-1}(0) - C_\phi(0)| + O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right) \\ &\leq \frac{M'}{k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] \gamma_{i-1} + O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right) \\ &\leq O\left(\frac{1}{k(n)}\right) + O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right). \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathcal{T}_n(0) - C_\phi(0)| = 0.$$

- Para cada $1 \leq d \leq k(n) - 1$

$$\mathcal{T}_n(d) = \frac{2}{k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] C_{i-1}(d) + \mathcal{T}_n^1(d).$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n^1(d) &= \frac{2}{s(n)k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)-d-1} [(k(n) - i) + 1] C_{i-1}(d) \\ &+ \frac{2}{s(n)k^2(n)} \sum_{i=k(n)-d}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] C_{i-1}(d). \end{aligned}$$

Usando (4.3.4) temos

$$\mathcal{T}_n^1(d) = O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right) \gamma_d^*.$$

Para estudar o segundo termo B usaremos (4.3.6).

$$\begin{aligned} B_n(d) &:= |\mathcal{T}_n(d) - 2C_\phi(d)| \\ &\leq \frac{2}{k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] |C_{i-1}(d) - C_\phi(d)| \\ &+ O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right) \gamma_d^* \\ &\leq \frac{M'}{k^2(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] \gamma_{\sup\{i-1, d\}} + O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right) \gamma_d^* \\ &= O\left(\frac{1}{k(n)}\right) d\gamma_d + O\left(\frac{1}{k(n)}\right) \gamma_d + O\left(\frac{k(n)}{s(n)}\right) \gamma_d^*. \end{aligned}$$

Então

$$B := \sum_{d=1}^{k(n)} B_n(d) = O\left(\frac{1}{k(n)}\right).$$

- Como consequência de (4.3.9) temos para cada $d \geq k(n)$

$$|\mathcal{T}_n(d)| \leq \frac{2}{k^2(n)} \left(1 + \frac{d}{n}\right) \sum_{i=1}^{k(n)} [2(k(n) - i) + 1] |C_{i-1}(d)|.$$

Então usando (4.3.4) temos

$$|\mathcal{T}_n(d)| = O(1)\gamma_d^*.$$

Isto implica

$$C := \sum_{d=k(n)}^{s(n)+k(n)-2} |\mathcal{T}_n(d)| = O(\gamma_{k(n)}^*).$$

Finalmente usando (4.3.6) temos

$$D := \sum_{d=k(n)}^{+\infty} |C_\phi(d)| = O(\gamma_{k(n)}^*).$$

Como todos os termos A, B, C e D convergem para zero, o lema esta provado. ■

4.4 Prova do Teorema-limite central

Nesta Seção apresentaremos uma sequência de Lemas que provam o Teorema 4.1.1. Usaremos as notações e as definições introduzidas na Seção 4.1.

Lema 4.4.1. 1) Se $k(n) = o(s(n))$ então para cada $m \geq 1$ vale

$$\mathbb{E}|Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}|^m = O(s^m(n)).$$

2) Se $s(n) = o(\sqrt{n})$ então

$$\frac{Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Prova. Segue de (4.1.7) e do fato que as funções $f_{k(n)}$ são uniformemente limitadas, que existe uma constante M tal que

$$\begin{aligned} |Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}| &\leq M \left(\tilde{\tau}_{\tilde{N}(n)+1, n} - n + \tilde{\tau}_{0, n} + 2(k(n) - 1) \right) \\ &\leq M \left(\Delta_{\tilde{\tau}_{\tilde{N}(n)+1, n}} + \tilde{\tau}_{0, n} + 2(k(n) - 1) \right). \end{aligned}$$

Provaremos que $\mathbf{E}|Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}| = O(s(n))$. Observamos que

$$\mathbf{E}\Delta_{\tilde{N}(n)+1,n} = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(\Delta_{\tilde{N}(n)+1,n} | \tilde{N}(n) + 1)\right). \quad (4.4.1)$$

Por outro lado, $\{j \leq \tilde{N}(n) + 1\} = \{\tilde{\tau}_{j-1,n} > n\}^c$. Então o evento $\{j = \tilde{N}(n) + 1\}$ pode ser escrito em função das variáveis aleatórias $\Delta_{\tilde{\tau}_{i,n}}$ com $i \leq j-1$. Então, como a sequência $(\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}})_{j \geq 0}$ é constituída de variáveis aleatórias independentes (ver o Lema 4.2.5), temos que $\{j = \tilde{N}(n) + 1\}$ é independente $\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}}$. Então segue de (4.4.1) que

$$\mathbf{E}\Delta_{\tilde{N}(n)+1,n} = \mathbf{E}\Delta_{\tilde{\tau}_{0,n}}.$$

Usando (4.2.10) temos que $\mathbf{E}\Delta_{\tilde{N}(n)+1,n} = O(s(n))$ e como $\mathbf{E}\tilde{\tau}_{0,n} < +\infty$ podemos concluir a prova do Lema usando a desigualdade de Chebychev. ■

Denotaremos as variáveis aleatórias R'_i definidas em (4.1.5) por $R'(\tilde{\tau}_{i,n}) = R'_i$. Definiremos uma nova sequência de variáveis aleatórias $R'(\tau_i)$ como sendo

$$R'(\tau_i) := \sum_{j=\tau_i-k}^{\tau_i-1} [T_{(j+k(n))}f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu[f_{k(n)}]]. \quad (4.4.2)$$

Lema 4.4.2. *Seja $(s(n)_{n \geq 1})$ uma sequência tal que $s(n) \geq 2k(n)$ para todo $n \geq 1$. Então*

1) *para cada $n \geq 1$, as sequências $(R'_i)_{i \geq 0}$ e $(R_i)_{i \geq 0}$, definidas em (4.1.5) e respectivamente em (4.1.10), são constituídas de variáveis aleatórias i.i.d.*

2) *para cada $l \geq 1$ temos que a variável aleatória $R'(\tau_l)$, definida em (4.4.2), é independente de Δ_{τ_j} para qualquer $j \leq l-1$.*

3) *para cada $i \geq 1$ temos que a variável aleatória R'_i é independente de $\Delta_{\tilde{\tau}_j}$ para qualquer $j \leq i-1$.*

4) *para todo $i \geq 1$ as variáveis aleatórias $\mathbf{1}(i \leq \tilde{N}(n) + 1)$ e R'_i são independentes.*

5) *valem as seguintes igualdades*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R'_i\right) = \mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)\mathbf{E}R'_1 \quad (4.4.3)$$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_i\right)^2 = \mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)\mathbf{E}R_1^2 \quad (4.4.4)$$

Prova. 1) Segue de (4.1.5) que $R'_i = R'_i(X_{\tilde{\tau}_i - k(n)}^{\tilde{\tau}_i + k(n) - 1})$. Então, como consequência do Corolário 2.2.11, $(R'_i)_{i \geq 1}$ é uma sequência que contém variáveis aleatórias i.i.d. Pela mesma razão R_i é uma sequência que também é constituída de variáveis aleatórias i.i.d..

2) Observaremos que $R'(\tau_l)$ é uma função de $X_{\tau_{l-1}}^{+\infty}$ então, como consequência do Lema 4.2.4 temos que $R'(\tau_l)$ é independente de Δ_{τ_j} para todo $j \leq l - 1$.

3) Como $\tilde{\tau}_{i,n} := \tau_{s(n)i}$ temos $R'_i = R'(\tilde{\tau}_{i,n}) = R'(\tau_{s(n)i})$. Segue do item 2 do Lema que $R'(\tilde{\tau}_{i,n})$ é independente de Δ_{τ_j} para todo $j \leq s(n)i - 1$. Observamos por outro lado que $\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}} = \sum_{l=0}^{s(n)-1} \Delta_{\tau_{s(n)j-l}}$.

Isto conclui a prova do item 3 do Lema.

4) Observamos que o evento $\{i \leq \tilde{N}(n) + 1\} = \{\tilde{\tau}_{i-1,n} > n\}^c$. Então as variáveis $1(i \leq \tilde{N}(n) + 1)$ podem ser escritas em função das variáveis aleatórias $\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}}$ com $j \leq i - 1$. Usando o item 3 do Lema concluímos que as variáveis aleatórias $1(i \leq \tilde{N}(n) + 1)$ e $R'_{(i,k(n),n)}$ são independentes para todo $i \geq 1$.

5) Como consequência do item 4 temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R'_i \right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} \left(1(i \leq \tilde{N}(n) + 1) R'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} 1(i \leq \tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} R'_i \\ &= \mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} R'_1. \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} \left(1(i \leq \tilde{N}(n) + 1) R_i^2 \right) \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j}^{\infty} \mathbf{E} \left(1(j \leq \tilde{N}(n) + 1) R_i R_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} 1(i \leq \tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} R_i^2 \\ &= \mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} R_1^2. \end{aligned}$$

Pois de um lado, para cada $j > i$ as variáveis aleatórias R'_j são independentes de $1(j \leq \tilde{N}(n) + 1) R_i$ e por outro lado, temos $\mathbf{E} R_j = 0$. Isto conclui a prova do

Lema. ■

Lema 4.4.3. *Se $(k(n)_{n \geq 1})$ for uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = +\infty$ então para cada $m \geq 1$ valem*

$$\mathbf{E} |R'_1|^m = O(k^m(n)) \quad (4.4.5)$$

$$\mathbf{E} |R_1|^m = O(k^m(n)). \quad (4.4.6)$$

Em particular se $f_k = \phi_k$, definida em (3.1.3), vale

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} R'_1| &< +\infty. \\ \mathbf{E} [(R_1)^2] &= O(k(n)). \end{aligned}$$

Prova. Observamos que

$$\begin{aligned} R'_1 &:= \sum_{j=\tilde{\tau}_{1,n}-k(n)}^{\tilde{\tau}_{1,n}-1} [T_{(j+k(n))} f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu(f_{k(n)})] \\ &= \sum_{j=0}^{k(n)-1} [T_{(\tilde{\tau}_{1,n}+j)}(f_{k(n)}) - \mathbf{E}_\nu(f_{k(n)})]. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Então, como as funções $f_{k(n)}$ são uniformemente limitadas, podemos concluir (4.4.5). Para cada $j \geq 1$ definimos

$$D_j(f) := \mathbf{E}(T_{\tau_0+j} f) - \mathbf{E}(f). \quad (4.4.8)$$

Escreveremos (4.4.7) como

$$\mathbf{E} R'_1 = \sum_{j=0}^{k(n)-1} D_j(f_{k(n)}).$$

Segue do Lema 4.3.1 ítem (ii), que $\text{var}_j(\phi_{k(n)}) \leq \gamma_j$. Isto prova que $\sum_{j=1}^{\infty} j \text{var}_j(\phi_k) < +\infty$. Então em consequência do Lema 4.2.7 ítem (ii) temos $|\mathbf{E} R'_1(\phi_k)| < +\infty$.

Por outro lado, usando o Corolário 4.2.8 temos

$$\mathbf{E} [(R'_1)^2] - k(n)(\sigma_{\phi_{k(n)}}^2)^{k(n)} = O(k(n)).$$

Então como $(\sigma_{\phi_{k(n)}}^2)^{k(n)} < +\infty$ temos $\mathbf{E} [(R'_1)^2] = O(k(n))$.

Para concluir o lema so precisamos observar que

$$\mathbf{E} [(R_1)^2] = \mathbf{E} [(R'_1)^2] - (\mathbf{E} R'_1)^2.$$

■

Lema 4.4.4. *Se $k^2(n) = o(s(n))$ então*

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)} R_{(i,k(n),n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Prova. Usando (4.4.4), (4.4.5) e (4.2.15) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left[\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_1 \right]^2 \right) &= \mathbf{E}(\tilde{N}(n)) O(k^2(n)) \\ &= O\left(\frac{nk^2(n)}{s(n)}\right). \end{aligned}$$

Para concluir a prova do lema usamos a desigualdade de Chebychev de ordem dois. ■

Lema 4.4.5. *Seja $(s(n))_{n \geq 1}$ uma sequência de inteiros tal que $s(n) > k(n) + 1$. Para s variáveis aleatórias S'_i definidas em (4.1.4) temos as seguintes propriedades:*

1) *para cada $n \geq 1$, as sequências $(S'_i)_{i \geq 0}$ e $(S_i)_{i \geq 0}$ são constituídas de variáveis aleatórias i.i.d..*

2) *valem as seguintes igualdades*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S'_i \right) = \mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} S'_0 \quad (4.4.9)$$

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i \right)^2 = \mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} S_0^2; \quad (4.4.10)$$

Prova. 1) Segue de (4.1.4) que $S'_i = S'_i(X_{\tilde{\tau}_{i,n}}^{\tilde{\tau}_{i+1,n}-1})$. Então, como consequência do Corolário 2.2.11, concluímos o primeiro item do Lema.

2) Temos $\{i \leq \tilde{N}(n)\} = \{\tilde{\tau}_{i,n} > n\}^c$. Então as variáveis aleatórias $1(i \leq \tilde{N}(n))$ podem ser escritas em função de $\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}}$ com $j \leq i$. Observaremos que S'_i é uma função de $X_{\tau_{s(n)i}}^\infty$ então, como consequência do Lema 4.2.4 temos que S'_i é independente de Δ_{τ_j} para todo $j \leq s(n)i$. Como $\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}} = \sum_{l=0}^{s(n)-1} \Delta_{\tau_{s(n)j-l}}$ então S'_i é independente de $\Delta_{\tilde{\tau}_{j,n}}$ para todo $j \leq i$. Concluimos a prova do item 2 do lema fazendo referência á prova do (4.4.3) e (4.4.4). ■

Lema 4.4.6. *Valem as seguintes propriedades:*

1)

$$\mathbf{E}S'_1 + \mathbf{E}R'_1 = -\frac{\mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n),k(n))}}{\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)}. \quad (4.4.11)$$

e conseqüentemente

$$L_{(\tilde{N}(n),k(n))} = -(\tilde{N}(n) + 1) \frac{\mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n),k(n))}}{\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)}. \quad (4.4.12)$$

2) Se $s(n) = o(\sqrt{n})$ então

$$\frac{L_{(\tilde{N}(n),k(n))}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (4.4.13)$$

e

$$\mathbf{E}L_{(\tilde{N}(n),k(n))}^2 = O(s^4(n)).$$

Prova. 1) Calcularemos a esperança de cada membro da igualdade (4.1.8). Em consequência de (4.4.9) e (4.4.3) temos

$$0 = \mathbf{E} \left(\tilde{N}(n) + 1 \right) \mathbf{E} (S'_1) + \mathbf{E} \left(\tilde{N}(n) + 1 \right) \mathbf{E} (R'_1) + \mathbf{E} \left(Q_{(\tilde{N}(n),k(n))} \right).$$

Isto conclui a prova do (4.4.11).

Como consequência de (4.4.11) e de (4.1.12) concluímos (4.4.12).

2) Segue do (4.4.12) e do Lema 4.4.1 que $\mathbf{E}L_{(\tilde{N}(n),k(n))} = O(s(n))$. Então usando a desigualdade de Chebychev concluímos a prova.

3) Como consequência de (4.4.12), (4.4.6), (4.2.15) do Lema 4.4.1 e do fato que $N(n) \leq n$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 &= \mathbf{E} \left((\tilde{N}(n) + 1)^2 \right) \left(\frac{\mathbf{E}(Q_{(\tilde{N}(n), k(n))})}{\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)} \right)^2 \\ &= O(s^4(n)). \end{aligned}$$

■

Lema 4.4.7. *Seja $n \geq 1$. Para todo $m \geq 1$ valem*

$$\mathbf{E}|S'_1|^m = O(s^m(n)) \quad (4.4.14)$$

$$\mathbf{E}|S_1|^m = O(s^m(n)) \quad (4.4.15)$$

$$|\mathbf{E}S'_1| = O(k(n)) \quad (4.4.16)$$

$$\mathbf{E}S_1'^2 = O(s(n)); \quad (4.4.17)$$

$$\mathbf{E}S_1^2 = O(s(n)). \quad (4.4.18)$$

Prova. Segue de (4.1.4) e do fato que as funções $f_k(n)$ são uniformemente limitadas, que existe uma constante M tal que

$$|S'_1| \leq M|\Delta_{\tilde{\tau}_{1,n}} - k(n)|.$$

Isto prova (4.4.14) e usando (4.1.9) podemos concluir a prova de (4.4.15).

O resultado (4.4.16) segue de (4.4.11), de (4.4.5) e de (4.2.15).

Para provar (4.4.17) escreveremos

$$\begin{aligned} S'_1 &:= \sum_{j=\tilde{\tau}_{1,n}}^{\tilde{\tau}_{2,n}-k(n)-1} [T_{(j+k(n))} f_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu(f_{k(n)})] \\ &= \sum_{j=0}^{\Delta\tilde{\tau}_{1,n}-k(n)} (T_{\tilde{\tau}_{1,n}+j+k(n)} f_{k(n)} - \mathbf{E}(f_{k(n)})) \\ &= \sum_{j=0}^{\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_{1,n}-k(n)} (T_{\tilde{\tau}_{1,n}+j+k(n)} f_{k(n)} - \mathbf{E}(f_{k(n)})) + S''_1 \quad (4.4.19) \end{aligned}$$

onde

$$S_1'' := \sum_{j=0}^{\Delta\tilde{\tau}_1, n-k(n)} (T_{\tilde{\tau}_1, n+j+k(n)} f_{k(n)} - \mathbf{E}(f_{k(n)})) \\ - \sum_{j=0}^{\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1, n-k(n)} (T_{\tilde{\tau}_1, n+j+k(n)} f_{k(n)} - \mathbf{E}(f_{k(n)})) .$$

Observamos que

$$|S_1''| \leq M|\Delta\tilde{\tau}_1, n - \mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1, n|.$$

Como consequência de (4.2.11) temos que a variância das variáveis $\Delta\tilde{\tau}_i, n$ é de ordem de $s(n)$. Então

$$\mathbf{E}S_1''^2 = O(s(n)). \quad (4.4.20)$$

Usando a notação $(\sigma_f)^m$, introduzida em (2.3.3), consideraremos

$$A := \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^{\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n)} (T_{\tilde{\tau}_1, n+j+k(n)} f_{k(n)} - \mathbf{E}f_{k(n)}) \right)^2 \\ - (\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n))(\sigma_{f_{k(n)}}^2)^{(\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n))}.$$

e

$$B := (\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n))(\sigma_{f_{k(n)}}^2)^{(\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n))}.$$

Como consequência do Corolário 4.2.8 aplicado para as funções $f_{k(n)}$ e para $m = \mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n)$ temos $A = O(1)$. Por outro lado usando a hipótese (iii) sobre as funções $f_{k(n)}$ temos $B = O(s(n))$. Então

$$\mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^{\mathbf{E}\Delta\tilde{\tau}_1 - k(n)} (T_{\tilde{\tau}_1, n+j+k(n)} f_{k(n)} - \mathbf{E}f_{k(n)}) \right)^2 = A + B = O(s(n)). \quad (4.4.21)$$

Então a partir da igualdade (4.4.19) usando (4.4.20), (4.4.21) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz podemos concluir a prova do (4.4.17).

Como $\mathbf{E}[(S_1)^2] = \mathbf{E}[(S_1')^2] - (\mathbf{E}[S_1'])^2$, então (4.4.18) é consequência de (4.4.16) e (4.4.17). ■

Lembramos que o nosso objetivo agora é de provar que a variável aleatória $\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i$ converge em distribuição para uma variável gaussiana. Por essa razão queremos estudar o comportamento assintótico da variância da variável aleatória $\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i$. Como consequência dos lemas precedentes temos o seguinte resultado.

Proposição 4.4.8. *Sejam γ definido em (2.2.7) e σ definido em (4.0.1). Se $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = +\infty$, $k^2(n) = o(s(n))$ e $s^4(n) = O(n)$ então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{E} S_1^2}{\gamma s(n)} = \sigma^2. \quad (4.4.22)$$

Prova. Cada termo da igualdade (4.1.11) será elevado ao quadrado. Depois, será calculado o valor esperado de cada membro. Isto é,

$$\begin{aligned} n \left(\sigma_{f_{k(n)}}^2 \right)^n &= \mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i \right)^2 + \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_i \right)^2 \\ &+ \mathbf{E} \left(Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right)^2 + \mathbf{E} \left(L_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right)^2 + A. \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} A : &= 2\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i \right) \\ &+ 2\mathbf{E}_{\mu_C} \left(Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right) \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i \right) \\ &+ 2\mathbf{E} \left(Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right) \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_i \right) \\ &+ 2\mathbf{E} \left(L_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right) \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i \right) \\ &+ 2\mathbf{E} \left(L_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right) \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)+1} R_i \right) \\ &+ 2\mathbf{E} \left(L_{(\tilde{N}(n), k(n))} Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right). \end{aligned}$$

Como consequência de (4.4.23) e usando (4.4.4) e (4.4.10) temos

$$\begin{aligned}
B &:= \frac{\mathbf{E}\tilde{N}(n) + 1}{n} \mathbf{E}S_1^2 - \left(\sigma_{f_{k(n)}}^2\right)^n \\
&= -\frac{\mathbf{E}\tilde{N}(n) + 1}{n} \mathbf{E}R_1^2 - \frac{1}{n} \mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 \\
&\quad - \frac{1}{n} \left(\mathbf{E}L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 + A\right). \tag{4.4.24}
\end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 = O(s^2(n))$ (ver o Lema 4.4.1) e que $\mathbf{E}R_1^2 = O(k^2(n))$ (ver (4.4.6)). Por outro lado temos que $\mathbf{E}S_1^2 = O(s(n))$ (ver (4.4.18)) e que $\mathbf{E}L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 = O(s^4(n))$ (ver o Lema 4.4.12). Usaremos também o resultado (4.2.15) sobre a esperança da variável $\tilde{N}(n)$.

Então

$$\frac{\mathbf{E}(L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2)}{n} = O\left(\frac{s^4(n)}{n}\right) \tag{4.4.25}$$

e

$$\frac{1}{n} \mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 = \left(\frac{k^2(n)}{s(n)}\right). \tag{4.4.26}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_{(i, k(n), n)}\right)\right|}{n} &\leq \frac{\sqrt{\mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 (\mathbf{E}\tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E}S_1^2}}{n} \\
&= O\left(\frac{s(n)}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E}\left|Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_{(i, k(n), n)}\right)\right|}{n} &\leq \frac{\sqrt{\mathbf{E}Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 (\mathbf{E}\tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E}R_1^2}}{n} \\
&= O\left(\sqrt{\frac{s^2(n) k^2(n)}{n s(n)}}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E}\left|\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_{(i, k(n), n)}\right) \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_{(i, k(n), n)}\right)\right|}{n} &\leq \frac{\sqrt{(\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)^2 \mathbf{E}S_1^2 \mathbf{E}R_1^2)}}{n} \\
&= \left(\sqrt{\frac{k^2(n)}{s(n)}}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E} \left| L_{(\tilde{N}(n), k(n))} \left(\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_{(i, k(n), n)} \right) \right|}{n} &\leq \frac{\sqrt{\mathbf{E} L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 (\mathbf{E} \tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} S_1^2}}{n} \\ &= O \left(\frac{s(n)}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E} \left| L_{(\tilde{N}(n), k(n))} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(n)+1} R_{(i, k(n), n)} \right) \right|}{n} &\leq \frac{\sqrt{\mathbf{E} L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 (\mathbf{E} \tilde{N}(n) + 1) \mathbf{E} R_1^2}}{n} \\ &= O \left(\sqrt{\frac{s^4(n) k^2(n)}{n s(n)}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E} \left| L_{(\tilde{N}(n), k(n))} Q_{(\tilde{N}(n), k(n))} \right|}{n} &\leq \frac{\sqrt{\mathbf{E} L_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2 \mathbf{E} Q_{(\tilde{N}(n), k(n))}^2}}{n} \\ &= O \left(\frac{s^3(n)}{n} \right). \end{aligned}$$

Então $A = o(n)$. Em conclusão, em (4.4.24), cada um de termos do membro direito converge para zero e usando de novo (4.2.15) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\gamma s(n)} \mathbf{E} S_1^2 - \left(\sigma_{f_{k(n)}}^2 \right)^n \right) = 0.$$

Usando a hipótese (iii) sobre as funções $f_{k(n)}$ podemos concluir a prova. ■

Lema 4.4.9. *Sejam $(k(n))_{n \geq 1}$ e $(s(n))_{n \geq 1}$ sequências tal que $k^2(n) = o(s(n))$ e $s^4(n) = O(n)$.*

1) *Se $\sigma^2 > 0$ então*

$$\frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_{(i, k(n), n)}}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

2) *Se $\sigma^2 = 0$ então*

$$\frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_{(i, k(n), n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Prova. 1) Escreveremos o teorema de Berry-Esseen para as variáveis aleatórias i.i.d. de média zero, $S_i = S_{(i,k(n),n)}$. Isto é

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_i}{\sqrt{(\mathbf{E}\tilde{N}(n) + 1)\mathbf{E}S_1^2}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C_{BE} \frac{\mathbf{E}(|S_1|^3)}{(\mathbf{E}S_1^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)}}. \quad (4.4.27)$$

onde C_{BE} é uma constante e $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2} dy$.

Usando (4.4.15) e (4.4.22) temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_i}{\sqrt{\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)\mathbf{E}S_1^2}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| = O \left(\frac{s^2(n)}{\sqrt{n}} \right).$$

Observamos que

$$\frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_i}{\sigma\sqrt{n}} = c_n \frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_i}{\sqrt{\mathbf{E}(S_1^2)\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)}}. \quad (4.4.28)$$

onde

$$c_n = \sqrt{\frac{\mathbf{E}(\tilde{N}(n) + 1)\mathbf{E}S_1^2}{n\sigma^2}}.$$

Usando (4.4.22) temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$. Isto conclui a prova. ■

Finalmente temos o seguinte resultado (proposto como exercício em Billingsley (1995))

Lema 4.4.10.

$$\frac{\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_{(i,k(n),n)}}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathcal{N}}(0, 1). \quad (4.4.29)$$

Prova. Seja $\delta > 0$. Escreveremos

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{\sum_{i=0}^{\tilde{N}(n)} S_i}{\sqrt{n}} - \frac{\sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_i}{\sqrt{n}} \right| > \delta \right) \leq A + B.$$

Onde

$$A := \mathbf{P} \left(\left| \tilde{N}(n) - \mathbf{E}(\tilde{N}(n)) \right| > \delta^3 \frac{\beta n}{s(n)} \right).$$

e

$$B := \mathbf{P} \left(\sup_{|j - \mathbf{E}(\tilde{N}(n))| \leq \delta^3 \frac{\beta n}{s(n)}} \frac{\left| \sum_{i=0}^j S_i - \sum_{i=0}^{\mathbf{E}(\tilde{N}(n))} S_i \right|}{\sqrt{n}} > \delta \right)$$

Usando Lema 4.2.6, o termo A converge para zero.

Usando a desigualdade de Kolmogorov, escreveremos

$$\begin{aligned} B &\leq 2 \frac{\mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{\delta^3 \frac{\beta n}{s(n)}} S_i \right)^2}{\delta^2 \sigma^2 n} \\ &\leq 2 \delta \frac{\beta \mathbf{E} S_1^2}{s(n)} \end{aligned} \tag{4.4.30}$$

Usando (4.4.22), o termo B converge em probabilidade para zero. ■

4.5 Entropia relativa

Lembramos que a entropia relativa foi definida em (3.1.6). Como consequência do Lema 4.3.4 temos do seguinte resultado.

Teorema 4.5.1. *Seja $\epsilon > 0$. Para qualquer sequência $(k(n)_{n \in \mathbb{N}})$ tal que $k(n) \leq \frac{1-\epsilon}{2 \log |A|} \log n$ vale*

$$\sqrt{n} D(\hat{\nu}_{k(n),n} || \nu_{k(n)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Prova. Como consequência das desigualdades de convexidade temos:

$$\begin{aligned}
0 \leq D(\hat{\nu}_{k(n),n} || \nu_{k(n)}) &\leq \log \left(\sum_{a_1^{k(n)}} \frac{(\hat{\nu}_{k(n),n}(a_1^{k(n)}))^2}{\nu(a_1^{k(n)})} \right) \\
&= \log \left(1 + \sum_{a_1^{k(n)}} \frac{(\hat{\nu}_{k(n),n}(a_1^{k(n)}) - \nu(a_1^{k(n)}))^2}{\nu(a_1^{k(n)})} \right) \\
&\leq \sum_{a_1^{k(n)}} \frac{(\hat{\nu}_{k(n),n}(a_1^{k(n)}) - \nu(a_1^{k(n)}))^2}{\nu(a_1^{k(n)})} \\
&= \frac{1}{n - k(n) + 1} \left[\sum_{a_1^{k(n)}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-k(n)+1} (\mathbf{1}(x_i^{i+k-1} = a_1^{k(n)}) - \nu(a_1^{k(n)}))}{\sqrt{(n - k(n) + 1)\nu(a_1^{k(n)})}} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Usando (2.3.4) e o Lemma 4.3.4, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu (\sqrt{n} D(\hat{\nu}_{k(n),n} || \nu_{k(n)})) &= O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{a_1^{k(n)}} \frac{(\sigma^2)_{I[a_1^{k(n)}]}}{\nu([a_1^{k(n)}])} \\
&= O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) |A|^{k(n)} \quad (4.5.1) \\
&= O(n^{-\frac{\epsilon}{2}}). \quad (4.5.2)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Chebychev podemos concluir a prova. ■

4.6 Teorema-limite central para a entropia empírica

Consideraremos $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i. positiva e log-contínua com decaimentos exponenciais.

Teorema 4.6.1. *Seja $\epsilon > 0$. Para qualquer sequência $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $k(n) \leq \frac{1-\epsilon}{2 \log |A|} \log n$, vale*

- Se $\sigma_\phi^2 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma_\phi^2}} (\hat{h}_{k(n),n} - h_k) < \lambda \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/2} du. \quad (4.6.1)$$

uniformemente com respeito a λ ;

- Se $\sigma_\phi^2 = 0$ então

$$\sqrt{n} (\hat{h}_{k(n),n} - h_k(n)) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (4.6.2)$$

Prova. Escreveremos

$$\begin{aligned} y_{k(n),n} &:= \hat{h}_{k(n),n} - h_k(n) \\ &= \xi_{k(n),n} + \lambda_{k(n),n} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_{k(n),n} &:= \sum_{a_{-k(n)}^0} \hat{\nu}_{k(n)+1,n}(a_{-k(n)}^0) \log \frac{\nu_{k(n)+1}(a_0 | a_{-k(n)}^{-1})}{\hat{\nu}_{k(n)+1,n}(a_0 | a_{-k(n)}^{-1})} \\ &= -D(\hat{\nu}_{k(n)+1,n} || \nu_{k(n)+1}) + D(\hat{\nu}_{k(n),n} || \nu_{k(n)}). \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_{k(n),n} &:= - \sum_{a_{-k(n)}^0} \hat{\nu}_{k(n)+1,n}(a_{-k(n)}^0) \log(\nu_{k(n)+1}(a_0 | a_{-k(n)}^{-1})) \\ &\quad + \sum_{a_{-k(n)}^0} \nu_{k(n)+1}(a_{-k(n)}^0) \log(\nu_{k(n)+1}(a_0 | a_{-k(n)}^{-1})). \\ &= \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=1}^{n-k+1} (T_i \phi_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu[\phi_{k(n)}]) \\ &= \frac{1}{n} s_{k(n),n}(\phi_{k(n)}) + O\left(\frac{k(n)}{n}\right) \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

onde $s_{k(n),n}$ foi definido em (4.1.8).

Como consêquência do Teorema 4.5.1 temos que, $\sqrt{n}\xi_{k(n),n}$ converge em probabilidade para zero.

Com consequência das Lemas 4.3.1, 4.3.3, 4.3.5 podemos concluir que as funções ϕ_k , satisfazem as condições do Teorema 4.1.1. Então as variáveis aleatórias $\sqrt{n}\lambda_{k(n),n}$ tem flutuações gaussianas. Isto conclui a prova do teorema. ■

Teorema 4.6.2. *Seja $\epsilon > 0$. Para qualquer sequência $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $k(n) \leq \frac{1-\epsilon}{2 \log |A|} \log n$, vale*

- Se $\sigma_\phi^2 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma_\phi^2}} \left(\frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - \frac{1}{k(n)} H_{k(n)} \right) < \lambda \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/2} du. \quad (4.6.5)$$

uniformemente com respeito a λ ;

- Se $\sigma_\phi^2 = 0$ então

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - \frac{1}{k(n)} H_{k(n)} \right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (4.6.6)$$

Prova. Escreveremos

$$\begin{aligned} Y_{k(n),n} &:= \frac{1}{k(n)} \left(\hat{H}_{k(n),n} - H_{k(n)} \right) \\ &= D(\hat{\nu}_{k(n),n} || \nu_{k(n)}) + \Lambda_{k(n),n}. \end{aligned}$$

onde

$$\Lambda_{k(n),n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-k(n)} (T_i e_{k(n)} - \mathbf{E}_\nu [e_{k(n)}])}{n - k(n) + 1}.$$

Como consêquência do Teorema 4.5.1 que $\sqrt{n} D(\hat{\nu}_{k(n),n} || \nu_{k(n)})$ converge em probabilidade para zero.

De outro lado, em consequência das Lemas 4.3.1, 4.3.3, 4.3.5 podemos concluir que as funções $e_{k(n)}$, satisfazem as condições do Teorema 4.1.1. Então as variáveis aleatórias $\sqrt{n} \Lambda_{k(n),n}$ tem flutuações gaussianas. Isto conclui a prova do teorema. ■

4.6.1 Velocidade de convergência

Lema 4.6.3. *Seja $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i. positiva com taxa de log-continuidade γ_k . Para qualquer $k \geq 0$ temos*

$$0 \leq h_k - h \leq \gamma_k. \quad (4.6.7)$$

Se $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < +\infty$ então

$$\frac{1}{k} H_k - h = O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (4.6.8)$$

Prova. Usando as desigualdades de convexidade temos: $0 \leq d_k \leq d_{k-1}$.

$$\begin{aligned} d_k &:= h_k - h \\ &= \int_{a_{-\infty}^0} d\nu(a_{-\infty}^0) \log \frac{\nu(a_0|a_{-\infty}^{-1})}{\nu(a_0|a_{-k}^{-1})} \\ &\leq \int_{a_{-\infty}^0} d\nu(a_{-\infty}^0) \left(\frac{\nu(a_0|a_{-\infty}^{-1})}{\nu(a_0|a_{-k}^{-1})} - 1 \right) \\ &\leq \gamma_k. \end{aligned}$$

Como $H_k = \sum_{i=1}^k h_k$ temos $\frac{1}{k} H_k - h = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k d_i$. ■

4.6.2 Flutuações dos dois estimadores da entropia em torno da entropia do processo

Podemos finalmente, nesta Seção, apresentar os dois teoremas centrais desta tese. Os dois respondem à pergunta deixada em aberto no artigo de Iosifescu (1965), á saber, como flutuam as entropias empíricas em torno da entropia do processo, no caso de cadeias de ordem infinita. O Teorema 4.6.4 mostra que as flutuações da $k(n)$ -ésima entropia empírica condicionada em torno da entropia do processo são normais com variância finita. O Teorema 4.6.5 mostra que, com qualquer normalização, o outro estimador considerado nesta tese, a $k(n)$ -ésima entropia empírica, não tem flutuações normais em torno da entropia. Esta é uma diferença importante entre o caso Markoviano e cadeias de ordem infinita.

Consideraremos $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma c.o.i. positiva e log-contínua com decaimentos exponenciais, isto é $\gamma_m = e^{-cm}$ com $c > \log |A|$.

Com consequência do teorema (4.6.1) temos o seguinte Teorema.

Teorema 4.6.4. *Seja $\epsilon > 0$. Para qualquer sequência $\frac{1+\epsilon}{2c} \log n \leq (k(n))_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $k(n) \leq \frac{1-\epsilon}{2 \log |A|} \log n$, vale*

- Se $\sigma_\phi^2 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma_\phi^2}} (\hat{h}_{k(n),n} - h) < \lambda \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/2} du. \quad (4.6.9)$$

uniformemente com respeito a λ ;

- Se $\sigma_\phi^2 = 0$ então

$$\sqrt{n} \left(\hat{h}_{k(n),n} - h \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (4.6.10)$$

Prova.

$$\sqrt{n} \left(\hat{h}_{k(n),n} - h \right) = \sqrt{n} \left(\hat{h}_{k(n),n} - h_{k(n)} \right) + \sqrt{n} d_{k(n)}.$$

Usando (4.6.7) temos

$$\sqrt{n} d_{k(n)} \leq \sqrt{n} \gamma_{k(n)} \leq n^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (4.6.11)$$

Em consequência do Teorema 4.6.1 e de (4.6.11) podemos concluir a prova. ■

Teorema 4.6.5. Para qualquer sequência $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $k(n) \leq \frac{1-\epsilon}{2 \log |\mathcal{A}|} \log n$, vale

- 1) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(n)}{k(n)} = 0$ então

$$q(n) \left(\left(\frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - h \right) \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

- 2) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(n)}{k(n)} = \alpha$ onde $0 < \alpha < +\infty$, então

$$q(n) \left(\left(\frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - h \right) \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha \sum_{i=0}^{\infty} d_i.$$

- 3) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(n)}{k(n)} = +\infty$ então para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(q(n) \left(\frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - h \right) > \lambda \right) = 1.$$

Prova.

$$\begin{aligned} q(n) \left(\frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - h \right) &= q(n) (Y_{k(n),n} + D_{k(n)}) \\ &= \frac{q(n)}{\sqrt{n}} (\sqrt{n} Y_{k(n),n}) + q(n) D_{k(n)}. \end{aligned}$$

onde

$$Y_{k(n),n} := \frac{1}{k(n)} \hat{H}_{k(n),n} - \frac{1}{k(n)} H_{k(n)}.$$

e

$$D_{k(n)} := \frac{1}{k(n)} H_{k(n)} - h.$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(n)}{k(n)} = \alpha$, usando o Teorema 4.6.2 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) Y_{k(n),n} = 0.$$

De outro lado usando (4.6.8) temos

$$\begin{aligned} q(n) D_{k(n)} &= q(n) \left(\frac{1}{k(n)} H_{k(n),n} - h \right) \\ &= O \left(\frac{q(n)}{k(n)} \right). \end{aligned} \tag{4.6.12}$$

Isto conclui a prova. ■

Referências Bibliográficas

- [1] K. ATHREYA and P. NEY (1978). A new approach to the limit theory of recurrent Markov chain. *Trans. Am. Math. Soc.* **245**, 493–501.
- [2] H. BERBEE (1987). Chains with infinite connections: Uniqueness and Markov representation. *Probab. Th. Rel. Fields.* **76**, 243–253.
- [3] P. BILLINGSLEY (1995). *Probability and Measures*. Third edition. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York. xiv+593 pp.
- [4] X. BRESSAUD, R. FERNÁNDEZ, and A. GALVES (1999a). Speed of $\bar{d}$ -convergence for Markov approximations of chains with complete connections. A coupling approach. *Stoc. Process. Appl.* **83**, 127–138.
- [5] X. BRESSAUD, R. FERNÁNDEZ, and A. GALVES (1999b). Decay of Correlation for non Holderian Dynamics. A coupling Approach. *El. Jour. Prob.* **4**, No 3, 1–19.
- [6] F. COMETS, R. FERNÁNDEZ, P.A. FERRARI (2000). Processes with Long Memory: Construction, Perfect Simulation and Regeneration. *Preprint*. (<http://arXiv.org/> Math.PR 0009204) or (<http://www.ime.usp.br/pablo/publications.html>. file N 71)
- [7] T. COVER and J.A. THOMAS (1991). *Elements of information theory*. Wiley Series in Telecommunications. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York. xxiv+542 pp.
- [8] I. CSISZÁR (1989). *Lecture Notes*. Univ. Maryland. 32 pp.
- [9] I. CSISZÁR (2000). Large scale typicality of Markov sample paths and consistency of MLD order estimators. *Preprint* 24 pp.

- [10] I. CSISZÁR and P.C. SHIELDS (2000). The consistency of the BIC Markov order estimator. *Ann. Statist.* **28**, no. 6, 1601-1619.
- [11] W. DOEBLIN and R. FORTET (1937). Sur les chaînes à liaisons complètes. *Bull. Soc. Math. France.* **65**, 132–148.
- [12] R. FERNÁNDEZ, P.A. FERRARI and A. GALVES (2001). *Coupling, renewal and perfect simulation of chains of infinite order*. Notes for the V Brazilian School of Probability, Ubatuba, August 2001 or (<http://www.ime.usp.br/pablo/publications.html>. file N 78)
- [13] P.A. FERRARI, A. MAASS, S. MARTÍNEZ and P. NEY (2000). Cesàro mean distribution of group automata starting from measures with summable decay. *Ergodic Theory Dynam. Systems.* **20**, No. 6, 1657–1670.
- [14] R.M. GRAY (1990). *Entropy and information theory*. Springer-Verlag, New York. xxiv+332 pp.
- [15] G.R. GRIMMETT and D.R. STIRZAKER (1992). *Probability and random processes*. Second edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992. xii+541 pp.
- [16] T. E. HARRIS (1955). On chains of infinite order. *Pacific J. Math.* **5**:707–724.
- [17] M. IOSIFESCU (1961). On the asymptotic behavior of chains with complete connections. *Comunicările Acad. RPR.* **11**, 619–24.
- [18] M. IOSIFESCU (1965). Sampling Entropy for Random Homogeneous Systems with Complete Connections. *Ann. Math. Stat.* **36**, 1433-1436.
- [19] M. IOSIFESCU and S. GRIGORESCU (1990). *Dependence with complete connections and its applications*. Cambridge Tracts in Mathematics, 96. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xiv+304 pp.
- [20] S.P. LALLEY (1986). Regeneration representation for one-dimensional Gibbs states. *Ann. Prob.* **14**, 1262–1271.
- [21] K. MARTON and P.C. SHIELDS (1994). Entropy and the consistent estimation of joint distributions. *Ann. Prob.* **22**, No 2, 960–977.

- [22] K. MARTON and P.C. SHIELDS (1996). Correction: "Entropy and the consistent estimation of joint distributions" [Ann. Probab. 22 (1994), no. 2, 960–977]. *Ann. Prob.* **24**, No 1, 541–545.
- [23] G. MIHOC (1963). The limit law for sums of vector valued random variables forming a multiple stationary chain with complete connections. em *Comunicările Acad. RPR.*, **13**, 5–9.
- [24] E. NUMMELIN (1978). A splitting technique for Harris recurrent Markov chains. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* **43**, 309–318.
- [25] O. ONICESCU and G. MIHOC (1935). Sur les chaînes de variables statistiques. *Bull Sci. Math.* **59**, 174–92.
- [26] O. ONICESCU and G. MIHOC (1940). Le comportement asymptotique des chaînes à liaisons complètes. *Disq. Math. Phys.* **1**, 61–2.
- [27] D.S. ORNSTEIN, B. WEISS (1983). The Shannon-McMillan-Breiman theorem for a class of amenable groups. *Israel J. Math.* **44**, No 1, 53–60.
- [28] D. S. ORNSTEIN, B. WEISS (1990). How sampling reveals a process. *Ann. Prob.* **18**, 905–930.
- [29] P.C. SHIELDS (1996). *The ergodic theory of discrete sample paths*. Graduate Studies in Mathematics, **13**. American Mathematical Society, Providence, RI. xii+249 pp.
- [30] P. SHIELDS (2001). *Private Communication*.