**TRANSIÇÃO DE FASE
E FORMA ASSINTÓTICA EM UM
MODELO DE REAÇÃO EM CADEIA**

Oswaldo Scarpa Magalhães Alves

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**

Orientadores:

Prof. Dr. Fábio Prates Machado e Prof. Dr. Serguei Popov

-São Paulo, Agosto de 2001-

-Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES/PICD-

Transição de Fase e forma Assintótica em um Modelo de Reação em Cadeia

14 de agosto de 2001

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Oswaldo Scarpa Magalhães Alves e aprovada pela comissão julgadora.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Fábio Prates Machado (Presidente)- IME-USP
- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa - IME - USP
- Prof. Dr. Hervé Jean François Guiol - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - IME - UFG
- Prof. Dr. Krishnamurthi Ravishankar - SUNY AT NEW PALTZ

Para Denise

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico (forma assintótica e transição de fase) de um sistema crescente de passeios aleatórios simples, cuja dinâmica pode ser descrita do seguinte modo: inicialmente temos um número aleatório de partículas em cada sítio de um grafo G . Um sítio arbitrário de G é destacado dos demais e denominado, a partir de então, sua raiz e denotado pelo símbolo 0 . Todas as partículas estão inativas (dormentes) no instante zero, exceto aquelas localizadas na raiz de G , que estão ativas (acordadas). A cada novo instante de tempo, cada uma das partículas ativas morre com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais. Uma vez que uma partícula ativa sobrevive, ela salta sobre um sítio vizinho mais próximo, que é escolhido com probabilidade uniforme. Assim, cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples a tempo discreto em G , enquanto estiver viva. Durante o seu percurso, uma partícula ativa acorda todas as partículas dormentes que encontra pelo caminho e estas começam a se mover. Não há interação entre partículas ativas.

Abstract

We study the asymptotic behaviour, namely asymptotic shape and existence of phase transition, of a growing system of random walks on graphs. The dynamics of the model can be roughly outlined as follows. Initially there is a random number of particles at each site of a graph G . A site of G is singled out and called its root. All particles are sleeping at time zero, except for those that might be placed at the root, which are active. At each instant of time, each active particle might die with probability $(1 - p)$. Once a particle survives, it jumps on some of its nearest neighbors, chosen with uniform probability, performing independent discrete time simple random walk (SRW) on G . Up to the time a particle dies, it activates all sleeping particles it hits along its way. From the moment they are activated on, every such particle starts to walk, performing exactly the same dynamics, independent of everything else.

Sumário

Introdução e descrição do modelo	4
1 Forma assintótica	9
1.1 Introdução	9
1.2 Fatos básicos	16
1.2.1 Grandes desvios	17
1.2.2 Passeios aleatórios	18
1.3 O teorema ergódico subaditivo	22
1.4 A forma assintótica	36
2 Transição de fase	47
2.1 Teoremas sobre transição de fase	47
2.2 Demonstrações	52
3 Apêndice	75
3.1 Teoria ergódica	75
3.2 Percolação	78
3.3 Grandes desvios	82
Referências	85

Introdução e descrição do modelo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico (forma assintótica e transição de fase) de um sistema crescente de passeios aleatórios simples que denominaremos “modelo de reação em cadeia”. A dinâmica deste modelo pode ser descrita informalmente do seguinte modo. Inicialmente temos um número aleatório de partículas em cada sítio de um grafo G . Um sítio arbitrário de G é destacado dos demais e denominado, a partir de então, sua raiz, e denotado pelo símbolo 0 . Todas as partículas estão inativas (dormentes) no instante zero, exceto aquelas localizadas na raiz de G , que estão ativas (acordadas). A cada novo instante de tempo, cada uma das partículas ativas morre com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais. Uma vez que uma partícula ativa sobrevive, ela salta sobre um sítio vizinho mais próximo, que é escolhido com probabilidade uniforme. Assim, cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples a tempo discreto em G , enquanto estiver viva. Durante o seu percurso, uma partícula ativa acorda todas as partículas dormentes que encontra pelo caminho e estas começam a se mover. Não há interação entre partículas ativas, ou seja, os passeios aleatórios são independentes.

O sistema de partículas que estudamos pode ser pensado como um modelo que descreve uma reação em cadeia ou difusão de informação, sendo esta segunda interpretação devida a K. Ravishankar. A idéia é que cada partícula ativa possui uma certa informação que é transmitida para as partículas dormentes no momento em que a primeira salta sobre estas. As partículas que

possuem a informação movem-se livremente, fazendo com que a mesma se espalhe.

O modelo que estudamos neste trabalho é uma versão discreta de um modelo proposto por R. Durrett e K. Ravishankar em 1996. Porém, no modelo de reação em cadeia consideramos, também, o caso em que o número inicial de partículas por sítio é aleatório e as partículas ativas morrem após um tempo com distribuição geométrica.

O primeiro trabalho que trata do modelo de reação em cadeia sem mortes em $\mathbb{Z}^d$ é devido a Telcs e Wormald [23]. Neste artigo, prova-se que o modelo com condição inicial determinística (uma partícula por sítio) é recorrente, ou seja, a origem é visitada uma infinidade de vezes com probabilidade um. Nesta mesma linha, Popov [20] demonstra que o modelo de reação em cadeia é recorrente em dimensão $d > 2$ caso a configuração inicial seja aleatória e tal que uma *única* partícula seja colocada no sítio x com probabilidade $\alpha/\|x\|^2$, onde α é uma constante suficientemente grande.

Para descrever de modo rigoroso o modelo de reação em cadeia, necessitamos primeiramente precisar o tipo de grafo que temos em mente. Nestas notas, $G = (V, A)$ denota um grafo infinito, conexo, de grau localmente limitado. Mais precisamente, supomos que o conjunto dos *sítios* (*vértices*) de G , denotado por V ou $V(G)$, é infinito enumerável. O conjunto das *arestas* (*elos*) de G , denotado por A ou $A(G)$, é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V , ou seja, temos em mente um grafo não orientado e sem laços. O *grau* de um vértice x de V é o número de elementos do conjunto $\{\{a, b\} \in A : x \in \{a, b\}\}$, ou seja, é o número de arestas *incidentes* em

x . Dois vértices são ditos *adjacentes* (ou *vizinhos*) quando pertencem a uma mesma aresta. Um *caminho* ligando os sítios x e y é uma seqüência finita de vértices adjacentes cujo primeiro elemento é x e o último é y . A *distância*, $d(x, y)$, entre x e y , é o número de arestas do menor caminho que os une. O grafo G é *conexo* se para qualquer par de vértices de G existir um caminho que os una. Dizemos que G tem grau *localmente limitado* se o grau de cada um de seus vértices for finito.

Neste trabalho, fazemos o seguinte abuso de linguagem: o símbolo Z^d representa o grafo com conjunto de vértices dado por Z^d e conjunto de arestas formado pelos pares de vértices com distância unitária na norma euclidiana.

Sejam $\{\eta(x); x \in V\}$, $\{(S_n^x(i))_{n \in \{0,1,2,\dots\}}; i \in \{1, 2, \dots\}, x \in V\}$ e $\{Y_p^x(i); 0 < p < 1, i \in \{1, 2, \dots\}, x \in V\}$ conjuntos independentes de variáveis aleatórias independentes descritos como segue. As variáveis aleatórias $\eta(x)$, $x \in V$, possuem a mesma lei que uma certa variável aleatória η e, para cada sítio x , $\eta(x)$ fornece o número inicial de partículas em x . Caso $\eta(x)$ seja estritamente positiva, para cada $0 < i \leq \eta(x)$, $(S_n^x(i))_{n \in \{0,1,2,\dots\}}$ é um passeio aleatório simples a tempo discreto em G começando no sítio x , ou seja, dado que $S_n^x(i) = y$, a probabilidade de que $S_{n+1}^x(i)$ seja um dado vizinho de y independe de qual seja esse vizinho e a probabilidade de que $S_{n+1}^x(i)$ seja algum dos vizinhos de y é igual a 1. Finalmente, $Y_p^x(i)$ é uma variável aleatória cuja lei é dada por $\mathbf{P}[Y_p^x(i) = k] = (1 - p)p^{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. Fixado o parâmetro p , as seqüências acima descritas fornecem o movimento de cada uma das $\eta(x)$ partículas localizadas inicialmente no sítio x e começando a se mover no instante em que são ativadas, caso isso venha a ocorrer. A i -ésima partícula

originalmente em x segue o passeio aleatório $(S_n^x(i))_{n \in \{0,1,2,\dots\}}$ e morre (desaparece) $Y_p^x(i)$ unidades de tempo após ter sido ativada. A partir, inclusive, do instante de tempo em que a partícula morre, esta se torna incapaz de ativar outras partículas, pois, em cada etapa do processo, primeiramente a partícula morre ou não e só depois disso é que ela salta. Não existe interação entre partículas ativas.

O *modelo de reação em cadeia* no grafo G com parâmetro de sobrevivência p e distribuição inicial $\{\eta(x); x \in V\}$ é definido como sendo o conjunto de variáveis aleatórias

$$\text{RC}(G, p, \eta) := \{(S_n^x(i))_{n \in \{0,1,2,\dots, Y_p^x(i)-1\}}; x \in V, i \in \{0, 1, 2, \dots, \eta(x)\}\}$$

As figuras 1,2 e 3 ilustram os três primeiros instantes de uma possível realização do modelo de reação em cadeia em Z^2 : inicialmente, coloca-se um número $\eta(x)$ de partículas em cada sítio x de Z^2 . A partícula do sítio 0 , hachurada na figura 1, é a única ativa no tempo zero. Note-se que, caso não houvessem partículas no sítio 0 , o processo não evoluiria, ou seja, todas as configurações nos instantes $1,2,3, \dots$, seriam iguais àquela do instante zero.

Figura 1: tempo $n = 0$

No instante 1, suponhamos que a partícula ativa sobreviva e salte para a esquerda. Teremos, então, a configuração mostrada na figura 2.

Figura 2: tempo $n = 1$

No instante 2, suponhamos que uma das partículas ativas morra e que as duas outras sobrevivam, saltando uma delas para a esquerda e a outra para a direita. Teremos então a configuração mostrada na figura 3.

Figura 3: tempo $n = 2$

Ainda não existem trabalhos publicados sobre forma assintótica ou transição de fase para o modelo de reação em cadeia, se bem que os resultados contidos nesta tese tenham sido submetidos para publicação através dos artigos [1] e [2].

1 Forma assintótica

1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o modelo de reação em cadeia sem mortes ($p = 1$) e com exatamente uma partícula em cada sítio ($\eta \equiv 1$). Além disso, supomos que os passeios aleatórios têm lugar em $G = \mathbb{Z}^d$. Nossa meta é provar um teorema sobre a forma assintótica da região visitada pelas partículas ativas.

Denotando, por questão de simplicidade, $S_n^x(1)$ por S_n^x , definimos

$$t(x, z) := \min\{n : S_n^x = z\}, \quad (1.1)$$

ou seja, $t(x, z)$ é o tempo que o passeio aleatório começando em $x \in \mathbb{Z}^d$ leva para atingir o sítio z . Convém lembrar que, quando $d > 2$, $\mathbf{P}[t(x, z) = \infty] > 0$ (cf. [10], pag.142).

Seja $\Gamma(x, y)$ a coleção de todos os caminhos que ligam x a y . Dado $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \Gamma(x, y)$, seja

$$t(\gamma) := \sum_{i=1}^k t(x_{i-1}, x_i).$$

Tendo como base as variáveis aleatórias $t(\gamma)$, definimos

$$T(x, z) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x, z)} t(\gamma), \quad (1.2)$$

que é o tempo que o modelo de reação em cadeia, começando com a partícula ativa no sítio x , leva até atingir o sítio z . Note-se que a partícula ativa que

primeiro atinge o sítio z , acordando a partícula dormente que aí estiver, não necessita ser aquela que partiu de x .

Seja $Z_y^x(n)$ a localização, no instante n , da partícula inicialmente no sítio y , no processo que começa com a partícula ativa no sítio x (e as demais, dormentes). Formalmente, temos $Z_x^x(n) = S_n^x$, e

$$Z_y^x(n) = \begin{cases} y, & \text{caso } T(x, y) \geq n, \\ S_{n-T(x,y)}^y, & \text{caso } T(x, y) < n. \end{cases}$$

Uma vez que cada uma das variáveis aleatórias $Z_y^x(n)$ é construída através das variáveis aleatórias $\{(S_n^x)_{n \in \{0,1,2,\dots\}}, x \in Z^d\}$, temos um acoplamento entre cada um dos processos $\{Z^x : x \in Z^d\}$, onde Z^x é definido por $Z^x := \{Z_y^x(n) : y \in Z^d, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Observamos que qualquer partícula, tão logo seja acordada, executa exatamente a mesma trajetória em todos os processos Z^x , $x \in Z^d$. A única diferença é o tempo em que a partícula começa a se mover.

Com a ajuda das variáveis aleatórias $T(x, z)$, podemos definir o conjunto dos sítios visitados por partículas ativas até o tempo n , quando o processo inicia com todas as partículas do conjunto B ativas, através da seguinte expressão:

$$\xi_n^B = \{y \in Z^d : T(x, y) \leq n \text{ para algum } x \in B\}.$$

Nosso interesse é estudar o comportamento assintótico do conjunto aleatório $\xi_n := \xi_n^0$. Para isso, definimos

$$\bar{\xi}_n = \{x + (-1/2, 1/2]^d : x \in \xi_n\} \subset \mathbb{R}^d,$$

ou seja, $\bar{\xi}_n$ é o conjunto dos hipercubos unitários de $\mathbb{R}^d$, com arestas paralelas aos eixos coordenados, centrados nos pontos de $\mathbb{Z}^d$ que são visitados por alguma partícula ativa até o instante n .

Temos, na figura 4, a ilustração de uma possível realização de $\xi_n \subset \mathbb{Z}^2$, juntamente com o conjunto $\bar{\xi}_n$ correspondente.

Figura 4: ξ_n e $\bar{\xi}_n$ em dimensão 2

Um fato básico sobre os passeios aleatórios em $\mathbb{Z}^d$, obtido como aplicação imediata do teorema central do limite (multivariado), é que, no instante n , a distância da partícula ao ponto de partida é, com grande probabilidade, da ordem de $\sqrt{n}$. No principal teorema deste capítulo provamos que no modelo de reação em cadeia as partículas ativas cooperam umas com as outras de modo que $\bar{\xi}_n$ cresça linearmente com o tempo.

Teorema 1.1. *Existe um conjunto convexo, não vazio, $A \subset \mathbb{R}^d$, tal que, qualquer que seja $0 < \varepsilon < 1$,*

$$(1 - \varepsilon)A \subset \frac{\bar{\xi}_n}{n} \subset (1 + \varepsilon)A \quad (1.3)$$

assintoticamente, quase certamente, ou seja, dado ε , para quase toda realização ω do processo $\bar{\xi}_n$, existe um inteiro $n_0 = n_0(\omega, \varepsilon)$ tal que, para $n > n_0$, (1.3) ocorre.

A figura 5 mostra uma ilustração do teorema da forma: para quase toda realização do processo $\bar{\xi}_n$, os conjuntos A e $(1/n)\bar{\xi}_n$ ficam arbitrariamente próximos para todo n suficientemente grande.

Figura 5: Ilustração do teorema 1.1

Note-se que, embora o teorema 1.1 estabeleça a existência da forma assintótica A , tudo o que se pode dizer, a princípio, a respeito dessa forma é que ela é simétrica com respeito às simetrias de Z^d que preservam a origem e que $A \subset \mathcal{D}$, onde

$$\mathcal{D} = \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d : |x^{(1)}| + \dots + |x^{(d)}| \leq 1\},$$

pois $T(0, x) \geq |x^{(1)}| + \dots + |x^{(d)}|$. Além disso, é intuitivamente claro que, se a configuração inicial é aumentada, de modo que novas partículas sejam acrescentadas a cada sítio, a forma assintótica (caso exista) é, consequentemente, aumentada (ou, pelo menos, não diminui). Provaremos que, se a configuração inicial for suficientemente aumentada, então a forma limite A contém pedaços da fronteira de $\mathcal{D}$, ou até mesmo coincide com $\mathcal{D}$.

Para formular estes resultados, necessitamos introduzir a seguinte notação. Para $1 \leq i < j \leq d$ seja

$$\Lambda_{ij} = \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d : x^{(k)} = 0 \text{ para } k \neq i, j\},$$

e, para $0 < \beta < 1/2$ seja

$$\Theta_{ij}^\beta = \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \Lambda_{ij} : |x^{(i)}| + |x^{(j)}| = 1, \min\{|x^{(i)}|, |x^{(j)}|\} \geq \beta\}.$$

Seja Θ^β o fecho convexo de $(\Theta_{ij}^\beta)_{1 \leq i < j \leq d}$. Denotamos por A_m a forma assintótica no modelo de reação em cadeia quando a configuração inicial é tal que cada sítio de Z^d contém exatamente m partículas e as únicas partículas ativas inicialmente são as da origem. A existência de A_m , para m arbitrário, pode ser deduzida do mesmo modo que no caso $m = 1$ (teorema 1.1). De modo mais

geral, denotaremos por A_η a forma assintótica (caso exista) para o modelo de reação em cadeia com configuração inicial dada por $\{\eta(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$. Novamente, lembramos que as únicas partículas ativas inicialmente são aquelas da origem de $\mathbb{Z}^d$.

Teorema 1.2. *Se m é suficientemente grande, então existe $0 < \beta < 1/2$ tal que $\Theta^\beta \subset A_m$.*

Teorema 1.3. *Suponha que, para um certo $\delta < d$ e para todo n suficientemente grande, tenhamos*

$$\mathbf{P}[\eta \geq (2d)^n] \geq n^{-\delta}, \quad (1.4)$$

e $\eta \geq 1$ quase certamente. Então $A_\eta = \mathcal{D}$.

Figura 6: Ilustração dos teoremas 1.2 e 1.3 em dimensão 2

O presente capítulo é organizado do seguinte modo. O restante desta primeira seção contém o plano para a demonstração do teorema da forma, que é semelhante ao do teorema da forma no modelo de Richardson (cf. [4], [8] e [21]). A seção 1.2 contém alguns resultados conhecidos sobre grandes

desvios e passeios aleatórios simples em Z^d . Necessitamos destes resultados a fim de verificar as hipóteses do teorema ergódico subaditivo de Kingman-Liggett. Estas hipóteses são verificadas na seção 1.3 e a demonstração do teorema da forma, dada na seção 1.4. Para finalizar, demonstramos, na seção 1.4, os teoremas 1.2 e 1.3.

Plano para a demonstração do teorema da forma:

- Inicialmente, analisamos o comportamento dos tempos $T(x, y)$ ao longo de direções fixadas. Mais precisamente, fixado $v \in Z^d \setminus \{0\}$, estudamos a seqüência de variáveis aleatórias $(T(0, nv))_{n \geq 0}$. Observe-se que, caso a seqüência $(T(nv, (n+1)v))_{n \geq 0}$ fosse formada por variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) e, além disso, fosse aditiva, ou seja, se valesse

$$T(0, nv) = T(0, v) + T(v, 2v) + T(2v, 3v) + \cdots + T((n-1)v, nv),$$

poderíamos usar a lei dos grandes números para obter

$$\frac{T(0, nv)}{n} \rightarrow \mu(v), \text{ q.c.} \quad (1.5)$$

para um certo $\mu(v) > 0$, uma vez que $T(0, x) \geq |x^{(1)}| + \cdots + |x^{(d)}|$.

De fato, a seqüência $(T(nv, (n+1)v))_{n \geq 0}$ não é i.i.d., embora seja ergódica (cf. Apêndice: teoria ergódica). Além disso esta seqüência não é aditiva, porém, subaditiva, ou seja

$$T(\mathbf{0}, nv) \leq T(\mathbf{0}, v) + T(v, 2v) + T(2v, 3v) + \cdots + T((n-1)v, nv).$$

Assim, embora não se possa usar a lei dos grandes números, pode-se utilizar a teoria ergódica subaditiva, obtendo-se, desta maneira, a validade de (1.5).

- Em seguida, estende-se o domínio da função μ de $\mathbb{Z}^d$ para $\mathbb{R}^d$ e prova-se que tal extensão é uma norma. Isto é possível devido, entre outras coisas, à subaditividade das variáveis aleatórias $T(x, y)$. (A forma assintótica A do teorema 1.1 será dada pela bola unitária nessa norma).
- Utilizando-se um teorema de grandes desvios devido a Nagaev (cf. Apêndice: grandes desvios), prova-se que, assintoticamente, quase certamente, $\bar{\xi}_n$ contém uma bola de raio proporcional a n , ou seja, de raio δn , para um certo δ .
- Finalmente, através do uso de argumentos envolvendo a compacidade de A, conclui-se a demonstração do teorema da forma.

1.2 Fatos básicos

Nesta seção enunciamos alguns fatos básicos sobre grandes desvios e passeios aleatórios que são necessários para que possamos provar os teoremas enunciados na seção anterior. Alguns resultados, embora elementares, são seguidos de suas respectivas demonstrações, uma vez que não foi possível encontrá-las

na literatura. Os símbolos $C, C_1, C_2, \dots$ denotam constantes positivas cujos valores específicos não são relevantes para os nossos propósitos e, além disso, podem variar no decorrer do texto. Denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x , enquanto que $\lceil x \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a x .

Lema 1.1. *Se X é uma variável aleatória assumindo valores inteiros positivos tal que $X \leq a$ quase certamente e $\mathbf{E}X \geq b > 0$, então*

$$\mathbf{P}\left[X \geq \frac{b}{2}\right] \geq \frac{b}{2a}. \quad (1.6)$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} b \leq \mathbf{E}X &= \sum_{i < b/2} i\mathbf{P}[X = i] + \sum_{i \geq b/2} i\mathbf{P}[X = i] \\ &\leq \frac{b}{2} + a\mathbf{P}\left[X \geq \frac{b}{2}\right], \end{aligned}$$

logo, (1.6) segue. Λ

1.2.1 Grandes desvios

Nesta subseção, enunciamos dois resultados sobre grandes desvios. O primeiro deles (lema 1.2) é uma aplicação da desigualdade de Chebyshev, enquanto que o segundo (lema 1.3) é útil quando se tem variáveis aleatórias positivas para as quais não se pode garantir a existência da função geradora de momentos.

Lema 1.2 ([22], pag. 68.). *Sejam $\{X_i, i \geq 1\}$ variáveis aleatórias i.i.d. tais que $\mathbf{P}[X_i = 1] = p$ e $\mathbf{P}[X_i = 0] = 1 - p$. Então, para quaisquer $0 < p < a < 1$*

e $N \geq 1$ temos

$$\mathbf{P}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \geq a\right] \leq \exp\{-NH(a, p)\}, \quad (1.7)$$

onde

$$H(a, p) = a \log \frac{a}{p} + (1 - a) \log \frac{1 - a}{1 - p} > 0. \quad (1.8)$$

O próximo resultado sobre grandes desvios é uma consequência imediata do teorema 1.1, pag. 748 de [18] (cf. Apêndice - grandes desvios).

Lema 1.3. *Sejam $\{X_i, i \geq 1\}$ variáveis aleatórias i.i.d., positivas e assumindo valores inteiros, tais que existem $C_1 > 0$ e $0 < \alpha < 1$ satisfazendo*

$$\mathbf{P}[X_i \geq n] \leq C_1 \exp\{-n^\alpha\}. \quad (1.9)$$

Então, existem $a > 0$, $0 < \beta < 1$ e $C_2 > 0$ tais que, para todo n

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \geq an\right] \leq C_2 \exp\{-n^\beta\}.$$

1.2.2 Passeios aleatórios

Os seguintes resultados sobre passeios aleatórios simples em Z^d podem ser encontrados em [10] e [14]. Seja $p_n(x) = \mathbf{P}[S_n^0 = x]$ e $\|x\|$ a norma euclidiana. A partir da seção 1.3, trabalharemos também com a norma $\|x\|_1 = \|(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})\|_1 = \sum_{i=1}^d |x^{(i)}|$.

Teorema 1.4 ([14], pag. 14, 30.).

$$p_n(x) = \frac{2}{n^{d/2}} \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left\{\frac{-d\|x\|^2}{2n}\right\} + e_n(x), \quad (1.10)$$

onde $|e_n(x)| \leq Cn^{-(d+2)/2}$ para algum C e, para todo $a < d$,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^a \sum_{n=1}^{\infty} |e_n(x)| = 0.$$

Teorema 1.5 ([14], pag. 29.). *Existe uma constante C tal que, para quaisquer n, t ,*

$$\mathbf{P}\left[\sup_{0 \leq i \leq n} \|S_i^0\| \geq tn^{1/2}\right] \leq Ce^{-t}. \quad (1.11)$$

Seja

$$R_n^B = \{S_i^B : 0 \leq i \leq n\} = \{y \in Z^d : t(x, y) \leq n \text{ para algum } x \in B\}$$

o conjunto dos sítios visitados pela família de passeios aleatórios, começando do conjunto B , até, inclusive, o instante n . Denominaremos de *traço* do passeio aleatório (S_n^0) o conjunto aleatório R_n^0 . O símbolo $|R_n^B|$ denota a cardinalidade de R_n^B . Note-se que $|R_n^B| \leq (n+1)|B|$.

Teorema 1.6 ([10], pag. 333, 338.). • *Se $d = 2$ então existe $a_2 > 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|R_n^0|}{n/\log n} = a_2. \quad (1.12)$$

• *Se $d \geq 3$ então, existe $a_3 := a_3(d) > 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|R_n^0|}{n} = a_3. \quad (1.13)$$

Seja $G_n(x) := \sum_{j=0}^n p_j(x)$ o número médio de visitas ao sítio x até o tempo n e $G(x) = G_\infty(x)$. Estas funções, de extrema importância no estudo dos passeios aleatórios, são conhecidas na literatura como *funções de Green*. Seja $q(n, x) = \mathbf{P}[t(0, x) \leq n]$. A partir do teorema 1.4, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.7. • Se $d = 2, x \neq 0$ e $n \geq \|x\|^2$, então existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$q(n, x) \geq \frac{C_2}{\log \|x\|}. \quad (1.14)$$

• Se $d \geq 3, x \neq 0$ e $n \geq \|x\|^2$, então existe $C_3 = C_3(d) > 0$ tal que

$$q(n, x) \geq \frac{C_3}{\|x\|^{d-2}}. \quad (1.15)$$

Demonstração. Note-se que basta estabelecer o resultado para $\|x\|$ suficientemente grande e que, uma vez que $q(n, x)$ é crescente em n , pode-se supor que

$$\|x\|^2 \leq n \leq 2\|x\|^2.$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \sum_{j=0}^n p_j(x) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j p_k(0) \mathbf{P}[t(0, x) = j - k] \\ &= \sum_{k=0}^n p_k(0) q(n - k, x) \leq q(n, x) G_n(0). \end{aligned}$$

Logo

$$q(n, x) \geq \frac{G_n(x)}{G_n(0)} \geq \begin{cases} \frac{\sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x)}{\sum_{j=0}^n p_j(0)}, & d = 2, \\ (G(0))^{-1} \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x), & d \geq 3. \end{cases}$$

No caso $d = 2$, usando (1.10) obtemos que

$$p_n(0) = \frac{2}{n\pi} + e_n(0).$$

Logo

$$\sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{0}) = \sum_{j=1}^n \frac{2}{\pi j} + \sum_{j=1}^n e_j(\mathbf{0}).$$

Portanto, sendo $n \leq 2\|x\|^2$, temos

$$\sum_{j=0}^n p_j(\mathbf{0}) \leq K_1 \log n \leq 4K_1 \log \|x\|,$$

onde K_1 é uma constante positiva.

Também de (1.10), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x) &= \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n \frac{2}{\pi j} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{j}\right) + \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n e_j(x) \geq \\ &\sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n \frac{2}{\pi j} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{\lfloor n/2 \rfloor}\right) + \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n e_j(x). \end{aligned}$$

Assim sendo, como $n \geq \|x\|^2$, segue que, para $\|x\|$ suficientemente grande, teremos

$$\sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x) \geq K_2,$$

onde K_2 é uma constante positiva.

Portanto,

$$q(n, x) \geq \frac{\sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x)}{\sum_{j=0}^n p_j(\mathbf{0})} \geq \frac{C_2}{\log \|x\|}$$

onde C_2 é uma constante positiva, o que completa a prova no caso $d = 2$.

Consideremos agora o caso $d \geq 3$. De (1.10), temos que, para $\|x\|$ suficientemente grande, temos que

$$\sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x) =$$

$$\sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n \frac{2}{j^{d/2}} \left(\frac{d}{2\pi} \right)^{d/2} \exp \left(\frac{-d\|x\|^2}{2j} \right) + \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n e_j(x) \geq \frac{K_3}{n^{d/2-1}}$$

onde K_3 é uma constante positiva.

Lembrando, novamente, que $n \leq 2\|x\|^2$, obtemos

$$q(n, x) \geq G(0)^{-1} \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^n p_j(x) \geq \frac{C_3}{\|x\|^{d-2}},$$

o que completa a demonstração. Λ

1.3 O teorema ergódico subaditivo

As ferramentas fundamentais utilizadas na prova de teoremas de forma são resultados sobre grandes desvios além dos teoremas ergódicos subaditivos. A demonstração do teorema ergódico subaditivo de Kingman-Liggett, enunciado abaixo, pode ser encontrada em [15].

Teorema 1.8. *Seja $\{Y(m, n)\}$ uma coleção de variáveis aleatórias positivas indexadas por pares de números inteiros, m, n , satisfazendo $0 \leq m < n$, tal que*

- $Y(0, n) \leq Y(0, m) + Y(m, n)$ para todo $0 \leq m < n$ (subaditividade);
- a distribuição conjunta de $\{Y(m+1, m+k+1), k \geq 1\}$ é a mesma que a de $\{Y(m, m+k), k \geq 1\}$ para todo $m \geq 0$;

- para cada $k \geq 1$, a seqüência de variáveis aleatórias $\{Y(nk, (n+1)k), n \geq 1\}$ é estacionária e ergódica;
- $\mathbf{E}Y(0, 1) < \infty$.

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y(0, n)}{n} \rightarrow \gamma \quad q.c.,$$

onde

$$\gamma = \inf_{n \geq 0} \frac{\mathbf{E}Y(0, n)}{n}.$$

Nosso próximo objetivo é verificar as hipóteses do teorema ergódico subaditivo de Kingman-Liggett para as variáveis aleatórias $Y(m, n) = T(mx, nx)$, onde $x \in \mathbb{Z}^d$ é arbitrário, o que garante a validade de (1.5).

Inicialmente, observe-se que o conjunto de variáveis aleatórias $\{T(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^d\}$ definido na seção é *subaditivo*, ou seja

$$T(x, z) \leq T(x, y) + T(y, z) \text{ para quaisquer } x, y, z \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.16)$$

A fim de provar este fato, consideremos sítios distintos $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$ e o processo Z^x , começando com a única partícula ativa no sítio x . Caso o sítio z seja atingido antes do sítio y , o resultado segue imediatamente. Se isto não ocorre, note-se que o processo Z^y , começando com a partícula ativa no sítio y , está acoplado com o processo Z^x , no qual podem haver outras partículas acordadas no tempo $T(x, y)$ além daquela localizada em y . Portanto, o tempo restante (a partir de $T(x, y)$) para que o sítio z seja atingido no processo Z^x pode ser no máximo $T(y, z)$. Isto prova que as variáveis aleatórias $T(nx, mx)$ satisfazem a primeira hipótese do teorema.

Para um dado $x \in \mathbb{Z}^d$ e $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, a sequência

$$\{T((n-1)kx, nkx), n \geq 1\}$$

é estacionária uma vez que, devido à simetria de $\mathbb{Z}^d$, qualquer que seja $a \in \mathbb{Z}^d$, temos que $T(x, y)$ e $T(x + a, y + a)$ possuem a mesma distribuição. Sua ergodicidade segue; mais que isso, pode-se demonstrar que tal sequência é (fortemente) misturadora (cf. Apêndice - teoria ergódica). Para verificar esse fato, observe-se que os eventos $\{T(n_1 kx, (n_1 + 1)kx) = a\}$ e $\{T(n_2 kx, (n_2 + 1)kx) = b\}$ são independentes caso $a + b < \|(n_1 - n_2)kx\|_1$.

Não é difícil verificar que a quarta hipótese é cumprida no caso $d = 1$. Para se ver isso, lembramos que se $\tau =$ o tempo em que um passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ retorna pela primeira vez ao sítio de partida, então $\mathbf{P}[\tau > t] \leq Ct^{-1/2}$. (cf. [10], pag. 128). Além disso, em um tempo aleatório com cauda exponencial, temos pelo menos três partículas ativas saltando independentemente no modelo de reação em cadeia em $\mathbb{Z}$. Combinando estes dois fatos, obtém-se $\mathbf{E}T(0, 1) < \infty$. Logo, para $d = 1$ tem-se $T(0, n)/n \rightarrow \gamma$ q.c., e, portanto, segue-se a prova do teorema da forma para o caso unidimensional, sendo $A = [-\gamma^{-1}, \gamma^{-1}]$.

Para dimensões maiores, necessitamos trabalhar um pouco mais a fim de checar a quarta hipótese do teorema ergódico subaditivo. Isto será feito no próximo teorema, que pode ser considerado o resultado fundamental para a obtenção do teorema da forma no modelo de reação em cadeia.

Teorema 1.9. *Dados $d \geq 2$ e $x_0 \in \mathbb{Z}^d$, existem constantes positivas $C =$*

$C(x_0)$ e γ tais que

$$\mathbf{P}[T(0, x_0) \geq n] \leq C \exp\{-n^\gamma\}.$$

Demonstração. O esquema da demonstração para os casos $d = 2$ e $d = 3$ é o seguinte:

- Observamos o movimento da primeira partícula ativa até o instante n , onde n é escolhido suficientemente grande em comparação com $\|x_0\|$.
- Utilizando os resultados da seção “fatos básicos”, conclui-se que, com grande probabilidade
 - a primeira partícula ativa fica relativamente próxima da origem durante todo o seu percurso, até o instante n ;
 - esta mesma partícula acorda um número relativamente grande de partículas.
- Prova-se que, com grande probabilidade, alguma das partículas acordadas pela primeira partícula ativa atinge o sítio 0 em um tempo não muito longo.
- Assim sendo, tem-se uma boa estimativa para $\mathbf{P}[T(0, x_0) \geq n]$, e, conseqüentemente, a demonstração do teorema.

Antes de iniciar a demonstração, vamos deixar claro um abuso de linguagem que será extremamente importante para que o texto fique mais compacto. Em frases como “divida-se o intervalo de tempo $[0, n]$ em n^ε pedaços

Figura 7: Com probabilidade alta, $R_n^0 \subset D(0, n^{1/2+\epsilon})$ e $|R_n^0|$ é grande

de tamanho $n^{1-\epsilon}$ estamos querendo dizer: “divida-se o intervalo de tempo $[0, n] := \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ em $\lfloor n^\epsilon \rfloor$ pedaços de tamanho $\lfloor n^{1-\epsilon} \rfloor$ e despreze-se o resto”. Outros abusos de linguagem semelhantes a este serão feitos frequentemente no decorrer do texto para facilitar a sua leitura.

Passemos, agora, à demonstração que, por razões técnicas, é feita para o caso $d = 2$ em separado. Seja, então, $d = 2$ e tomemos $n \geq \|x_0\|^2$. Lembremos que

$$R_n^0 = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(0, x) \leq n\}$$

é o traço do passeio aleatório realizado pela primeira partícula ativa até, inclusive, o instante n . Pelo teorema 1.6 tem-se que, para todo k suficientemente grande, $\mathbf{E}|R_k^0| \geq 2C_1 k / \log k$. Como $|R_k^0| \leq k + 1$, usando o lema 1.1, obtemos

$$\mathbf{P}\left[|R_k^0| \geq \frac{C_1 k}{\log k}\right] \geq \frac{C_2}{\log k}. \quad (1.17)$$

Primeiramente, divide-se o intervalo de tempo $[0, n]$ em $n^{1/2}$ subintervalos

disjuntos de tamanho (cardinalidade) $n^{1/2}$. Então, observa-se o percurso da primeira partícula ativa em cada um desses subintervalos. Para cada subintervalo de tamanho $n^{1/2}$, a cardinalidade do subtraço correspondente não depende dos demais subintervalos. Portanto, para o evento

$$A := \left\{ |\xi_n| \geq \frac{2C_1 n^{1/2}}{\log n} \right\} \supset \left\{ |R_n^0| \geq \frac{2C_1 n^{1/2}}{\log n} \right\}$$

utilizando (1.17), obtemos

$$\mathbf{P}[A] \geq 1 - \left(1 - \frac{2C_2}{\log n}\right)^{n^{1/2}}. \quad (1.18)$$

Consideremos agora o evento

$$B = B(n, \varepsilon) = \left\{ \sup_{0 \leq i \leq n} \|S_i^0\| < n^{1/2+\varepsilon} \right\}$$

onde $0 < \varepsilon < 1$. Observe-se que, pelo teorema 1.5, existe C_3 tal que

$$\mathbf{P}[B^c] \leq C_3 \exp\{-n^\varepsilon\}. \quad (1.19)$$

Note-se que

$$\mathbf{P}[T(0, x_0) > n + 4n^{1+2\varepsilon}] \leq \mathbf{P}[T(0, x_0) > n + 4n^{1+2\varepsilon} | A \cap B] + \mathbf{P}[A^c] + \mathbf{P}[B^c]. \quad (1.20)$$

Com respeito às partículas acordadas pela primeira partícula ativa, utilizando o teorema 1.7, obtemos

$$\mathbf{P}[T(0, x_0) > n + 4n^{1+2\varepsilon} | A \cap B] \leq \left(1 - \frac{C_3}{\log n}\right)^{2C_1 n^{1/2} (\log n)^{-1}} \quad (1.21)$$

para qualquer $0 < \varepsilon < 1$. Logo, o resultado segue para $d = 2$ de (1.18)–(1.21).

Consideramos agora dimensões maiores que 2. Separamos a prova em quatro etapas denominadas *primeiro passo*, *segundo passo*, *argumento geral* e *desenlace*. Como o caso $d = 3$ é mais simples que os demais, é possível concluir a sua demonstração imediatamente após o *primeiro passo*. Para $d = 4, 5$ pode-se omitir a parte *argumento geral*. Para dimensões maiores, cada uma das etapas é necessária.

Primeiro passo:

Tome-se $n \geq \|x_0\|^2$. Usando o teorema 1.6 e o lema 1.1, temos que, para um certo $r_1 > 0$

$$\mathbf{P}[|R_k^0| \geq r_1 k] \geq C_1. \quad (1.22)$$

Dividimos o intervalo de tempo $[0, n]$ em n^ε subintervalos disjuntos de tamanho (cardinalidade) $n^{1-\varepsilon}$, onde $0 < \varepsilon < 1$ será escolhido posteriormente. Em seguida, observamos o traço da primeira partícula acordada durante este intervalo de tempo. Note-se que, para cada subintervalo de tamanho $n^{1-\varepsilon}$, a cardinalidade do subtraço correspondente não depende dos demais subtraços. Seja

$$A_1 := A_1(n, \varepsilon) := \{|\xi_n| \geq r_1 n^{1-\varepsilon}\} \supset \{|R_n^0| \geq r_1 n^{1-\varepsilon}\};$$

por (1.22) temos que

$$\mathbf{P}[A_1] \geq 1 - (1 - C_1)^{n^\varepsilon}. \quad (1.23)$$

Definimos

$$B = B(n, \varepsilon) = \left\{ \sup_{0 \leq i \leq n} \|S_i^0\| < n^{1/2+\varepsilon} \right\}$$

observando que, pelo teorema 1.5 existe C_2 tal que

$$\mathbf{P}[B^c] \leq C_2 \exp\{-n^\varepsilon\}. \quad (1.24)$$

Para $d = 3$, pelo teorema 1.7, de modo análogo a (1.20)–(1.21) obtemos

$$\mathbf{P}[T(0, x_0) > n + 4n^{1+2\varepsilon} \mid A_1 \cap B] \leq \left(1 - \frac{C_3}{n^{1/2+\varepsilon}}\right)^{r_1 n^{1-\varepsilon}}.$$

Escolhendo $\varepsilon < 1/4$ e utilizando (1.23)–(1.24), obtemos o resultado.

Para dimensões maiores que 3 tornam-se necessários alguns argumentos a mais para que se possa provar o teorema. Para $d = 4$ ou 5, o plano da demonstração é o seguinte: pelo que foi visto no primeiro passo da demonstração, temos que, com grande probabilidade, $R_n^0 \subset D(\mathbf{0}, n^{1/2+\varepsilon})$ e, além disso, $|R_n^0|$ é, pelo menos, da ordem de $n^{1-\varepsilon}$. Prova-se, então, que, com grande probabilidade, as partículas de R_n^0 (que foram acordadas pela primeira partícula ativa) acordam, por sua vez, um número maior ainda de partículas no anel $D(\mathbf{0}, 2n^{1/2+\varepsilon}) \setminus D(\mathbf{0}, n^{1/2+\varepsilon})$, em um intervalo de tempo não muito longo. Prova-se, por fim que, com grande probabilidade, alguma das partículas de $D(\mathbf{0}, 2n^{1/2+\varepsilon})$ atinge o sítio $\mathbf{0}$ após um tempo relativamente curto. Os argumentos detalhados constituem o segundo passo da prova do teorema 1.9.

Figura 8: As partículas de R_n^0 acordam um grande número de partículas do anel $D(0, 2n^{1/2+\epsilon}) \setminus D(0, n^{1/2+\epsilon})$

Segundo passo:

Denotemos por

$$D_{i,\epsilon} := \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\| \leq in^{1/2+\epsilon}\}$$

a bola euclidiana de raio $in^{1/2+\epsilon}$.

Suponhamos que os eventos A_1 e B ocorram. Além disso, suponhamos que todas as partículas acordadas pela primeira partícula ativa até o tempo n começam a se mover *exatamente* no instante n . É claro que esta última suposição pode apenas aumentar o tempo até que o sítio x_0 seja atingido. Assim sendo, temos *pelo menos* $r_1 n^{1-\epsilon}$ partículas ativas no instante n e todas elas estão dentro da bola $D_{1,\epsilon}$. Escolhemos $r_1 n^{1-\epsilon}$ dessas partículas e denominamos este conjunto de G_1 . Dividimos, então, G_1 em $r_1 n^\epsilon$ subgrupos de tamanho (cardinalidade) $n^{1-2\epsilon}$. Tais subgrupos serão denotados por

$G_1^1, G_1^2, \dots, G_1^{r_1 n^\varepsilon}$. Para cada y no anel $D_{2,\varepsilon} \setminus D_{1,\varepsilon}$, seja $\zeta_i^{(2)}(y)$ a função indicadora do evento

$$\{\text{existe } x \in G_1^i \text{ tal que } t(x, y) \leq 9n^{1+2\varepsilon}\}.$$

Pelo teorema 1.7, e utilizando o fato de que, para $x \in D_{1,\varepsilon}$, $y \in D_{2,\varepsilon} \setminus D_{1,\varepsilon}$, a distância $\|x - y\|$ é menor ou igual a $3n^{1/2+\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\zeta_i^{(2)}(y)|A_1 \cap B) &= \mathbf{P}[\zeta_i^{(2)}(y) = 1|A_1 \cap B] \\ &\geq 1 - \prod_{x \in G_1^i} (1 - \mathbf{q}(9n^{1+2\varepsilon}, y - x)) \\ &\geq 1 - \left(1 - \frac{C_3}{3^{(d-2)}n^{(1/2+\varepsilon)(d-2)}}\right)^{n^{1-2\varepsilon}} \\ &\geq \frac{C_4}{n^{d/2+d\varepsilon-2}} \end{aligned} \tag{1.25}$$

(aqui usamos o fato de que $d/2 + d\varepsilon > 2$ para $d \geq 4$). Seja

$$\zeta_i^{(2)} = \sum_{y \in D_{2,\varepsilon} \setminus D_{1,\varepsilon}} \zeta_i^{(2)}(y).$$

Como $|\{x \in Z^d : x \in D_{2,\varepsilon} \setminus D_{1,\varepsilon}\}| \geq C_5 n^{d/2+d\varepsilon}$, temos que existe $r_2 > 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\zeta_i^{(2)}|A_1 \cap B) \geq 2r_2 n^2. \tag{1.26}$$

Além disso,

$$\zeta_i^{(2)} \leq n^{1-2\varepsilon} \times 4n^{1+2\varepsilon} = 4n^2. \tag{1.27}$$

Portanto, utilizando o lema 1.1, obtemos, de (1.26)–(1.27) que

$$\mathbf{P}[\zeta_i^{(2)} \geq r_2 n^2 | A_1 \cap B] \geq C_6 > 0. \tag{1.28}$$

Para $n_2 := n + 9n^{1+2\varepsilon}$ seja

$$A_2 = A_2(n, \varepsilon) = \{|\xi_{n_2} \cap (D_{2,\varepsilon} \setminus D_{1,\varepsilon})| \geq r_2 n^2\}.$$

Uma vez que G_1 foi subdividido em $r_1 n^\varepsilon$ subgrupos, obtemos, de (1.28), que

$$\mathbf{P}[A_2^c | A_1 \cap B] \leq (1 - C_6)^{r_1 n^\varepsilon}. \quad (1.29)$$

Para $d = 4$ ou 5 , pode-se ir diretamente ao *desenlace*.

O argumento geral nada mais é do que uma repetição do segundo passo aos anéis $D(\mathbf{0}, (i+1)n^{1/2+\varepsilon}) \setminus D(\mathbf{0}, in^{1/2+\varepsilon})$, ou seja, supondo que o anel $D(\mathbf{0}, (i+1)n^{1/2+\varepsilon}) \setminus D(\mathbf{0}, in^{1/2+\varepsilon})$ possui um grande número de partículas ativas, prova-se que, com grande probabilidade, em um intervalo de tempo relativamente curto, estas partículas acordam um número ainda maior de partículas no anel $D(\mathbf{0}, (i+2)n^{1/2+\varepsilon}) \setminus D(\mathbf{0}, (i+1)n^{1/2+\varepsilon})$.

Argumento geral:

Seja a seqüência de tempos

$$n_1 := n, n_2 := n + 9n^{1+2\varepsilon}, \dots, n_k := n + n^{1+2\varepsilon} \sum_{j=2}^k (2j-1)^2,$$

$k \leq \lfloor d/2 \rfloor$. Partindo desta seqüência, definimos os eventos

$$A_k = \{|\xi_{n_k} \cap (D_{k,\varepsilon} \setminus D_{k-1,\varepsilon})| \geq r_k n^k\},$$

onde as constantes r_k serão escolhidas mais tarde. Definimos, também, os conjuntos aleatórios

$$\tilde{G}_k = \{x \in D_{k,\varepsilon} \setminus D_{k-1,\varepsilon} : T(0, x) < n_k\},$$

onde $k \in \{1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor\}$. Temos que, para $2 \leq k \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$,

$$\mathbf{P}[A_{k+1}|A_k] \geq 1 - \exp\{-Cn^{2\varepsilon}\}. \quad (1.30)$$

Para demonstrar esta afirmação, tomamos $r_k n^k$ sítios de $\tilde{G}_k$ (os quais estão dentro do conjunto $D_{k,\varepsilon} \setminus D_{k-1,\varepsilon}$) no tempo n_k . Dividimos, então, estes sítios em $r_k n^{2\varepsilon}$ subgrupos de tamanho (cardinalidade) $n^{k-2\varepsilon}$. Denominaremos estes subgrupos por $G_k^1, \dots, G_k^{r_k n^{2\varepsilon}}$ e, à sua união, G_k . Note-se que $G_k \subset \tilde{G}_k$. Como anteriormente, suponhamos que as partículas originalmente no conjunto G_k começam a se mover somente a partir do instante n_k . Para cada y no anel $D_{k+1,\varepsilon} \setminus D_{k,\varepsilon}$ seja $\zeta_i^{(k+1)}(y)$ a função indicadora do evento

$$\{\text{existe } x \in G_k^i \text{ tal que } t(x, y) \leq n_{k+1} - n_k\}.$$

Note-se que a sequência (n_k) foi definida de tal modo que se $x \in D_{k,\varepsilon}$, $y \in D_{k+1,\varepsilon}$, então $\|x - y\| \leq n_{k+1} - n_k$. Logo, pelo teorema 1.7 e utilizando o fato de que, para $x \in D_{k,\varepsilon}$, $y \in D_{(k+1),\varepsilon} \setminus D_{k,\varepsilon}$, a distância $\|x - y\|$ é menor ou igual a $(2k+1)n^{1/2+\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\zeta_i^{(k+1)}(y)|A_k \cap B) &= \mathbf{P}[\zeta_i^{(k+1)}(y) = 1|A_k \cap B] \\ &\geq 1 - \prod_{x \in G_k^i} (1 - q((2k+1)^2 n^{1+2\varepsilon}, y - x)) \\ &\geq 1 - \left(1 - \frac{C_7}{(2k+1)^{(d-2)} n^{(1/2+\varepsilon)(d-2)}}\right)^{n^{k-2\varepsilon}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Portanto, segue que

$$\mathbf{E}(\zeta_i^{(k+1)}(y)|A_k) \geq \frac{C_8}{n^{d/2+d\varepsilon-(k+1)}}$$

onde C_8 é uma constante positiva. Note-se que $d/2 + d\varepsilon > k + 1$ se $k \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$. Seja

$$\zeta_i^{(k+1)} = \sum_{y \in \mathcal{D}_{k+1} \setminus \mathcal{D}_k} \zeta_i^{k+1}(y).$$

Temos que existe $r_{k+1} > 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\zeta_i^{(k+1)} | A_k) \geq 2r_{k+1}n^{k+1}$$

e, além disso,

$$\zeta_i^{(k+1)} \leq n^{k-2\varepsilon} \times (2k+1)^2 n^{1+2\varepsilon} = (2k+1)^2 n^{k+1}.$$

Logo, pelo lema 1.1, existe C_9 tal que

$$\mathbf{P}[\zeta_i^{(k+1)} \geq r_{k+1}n^{k+1} | A_k] \geq C_9 > 0,$$

e, considerando agora todos os $r_k n^{2\varepsilon}$ grupos, obtém-se

$$\mathbf{P}[A_{k+1}^c | A_k] \leq (1 - C_9)^{r_k n^{2\varepsilon}},$$

que é equivalente a (1.30). Usando (1.23)–(1.24), (1.29)–(1.30) e a seguinte desigualdade

$$\mathbf{P}[A_{\lfloor d/2 \rfloor}] \geq \mathbf{P}[A_{\lfloor d/2 \rfloor} | A_{\lfloor d/2 \rfloor - 1}] \cdots \mathbf{P}[A_3 | A_2] \mathbf{P}[A_2 | A_1 \cap B] \mathbf{P}[A_1 \cap B]$$

obtemos

$$\mathbf{P}[A_{\lfloor d/2 \rfloor}] \geq 1 - C \exp\{-n^{\gamma_1}\} \quad (1.32)$$

Onde C e γ_1 são constantes positivas.

Finalmente, no desenlace, obtemos uma boa estimativa para $\mathbf{P}[T(\mathbf{0}, x_0) > n]$, concluindo, assim, a demonstração do teorema.

Desenlace:

Seja

$$I = \sum_{i=2}^{\lfloor d/2 \rfloor} (2i-1)^2.$$

A idéia que temos em mente é a de observar as partículas em $\tilde{G}_{\lfloor d/2 \rfloor}$ no tempo $n_{\lfloor d/2 \rfloor} = n + In^{1+2\varepsilon}$ e esperar até o momento $n_{\lfloor d/2 \rfloor} + d^2n^{1+2\varepsilon}$ de modo a obtermos uma boa estimativa para a probabilidade de que alguma delas atinja o sítio x_0 .

Seja

$$H := \left\{ \begin{array}{c} \text{nenhuma partícula atinge } x_0 \\ \text{durante o intervalo de tempo } (n_{\lfloor d/2 \rfloor}, n_{\lfloor d/2 \rfloor} + d^2n^{1+2\varepsilon}] \end{array} \right\}.$$

O número de partículas em $\tilde{G}_{\lfloor d/2 \rfloor}$ é, pelo menos, $r_{\lfloor d/2 \rfloor}n^{\lfloor d/2 \rfloor}$ e todas as partículas estão a uma distância da ordem de $n^{1/2+\varepsilon}$ do sítio x_0 . Logo, pelo teorema 1.7, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[T(0, x_0) > n + (I + d^2)n^{1+2\varepsilon} | A_{\lfloor d/2 \rfloor}] &\leq \mathbf{P}[H | A_{\lfloor d/2 \rfloor}] \\ &\leq \left(1 - \frac{C_9}{n^{(1/2+\varepsilon)(d-2)}}\right)^{r_{\lfloor d/2 \rfloor}n^{\lfloor d/2 \rfloor}}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon < \frac{1}{2(d-2)}$, e usando o fato de que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[T(0, x_0) > n + (I + d^2)n^{1+2\varepsilon}] \\ \leq \mathbf{P}[T(0, x_0) > n + (I + d^2)n^{1+2\varepsilon} | A_{\lfloor d/2 \rfloor}] + \mathbf{P}[A_{\lfloor d/2 \rfloor}^c] \end{aligned}$$

juntamente com (1.32), terminamos a demonstração. Λ

1.4 A forma assintótica

Na seção anterior, provamos que, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, a seqüência $(T(nx, (n+1)x), n \geq 0)$ satisfaz as hipóteses do teorema ergódico subaditivo de Kingman-Liggett. Portanto, definindo $T(x) := T(0, x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, segue que existe $\mu(x) \geq 0$ satisfazendo

$$\frac{T(nx)}{n} \rightarrow \mu(x) \quad q.c., n \rightarrow \infty. \quad (1.33)$$

Como $T(nx) \geq n\|x\|_1$ segue que $\mu(x) \geq \|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

Lema 1.4. *Para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ existem constantes $0 < \delta_0 < 1$, $C > 0$ e $0 < \gamma < 1$ tais que*

$$\mathbf{P}\left[T(x) \geq \frac{\|x\|_1}{\delta_0}\right] \leq C \exp\{-\|x\|_1^\gamma\}.$$

Demonstração. Seja $n := \|x\|_1$ e $\mathbf{0} = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x$ um caminho conectando a origem ao sítio x tal que, para todo i , $\|x_i - x_{i-1}\|_1 = 1$. Seja $Y_i := T(x_{i-1}, x_i)$. Devido à subaditividade, é suficiente provar que

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^n Y_i \geq \frac{\|x\|_1}{\delta_0}\right] \leq C \exp\{-\|x\|_1^\gamma\}. \quad (1.34)$$

Seja

$$B := \left\{Y_i < \frac{\sqrt{n}}{2}, i = 1, \dots, n\right\}.$$

Pelo teorema 1.9, temos

$$\mathbf{P}[B] \geq 1 - C_1 n \exp\{-n^{\gamma'}\} \quad (1.35)$$

para algum $\gamma' > 0$. Qualquer que seja $i = 1, \dots, \lceil \sqrt{n} \rceil$ seja

$$\sigma_i := \sum_{j=0}^{M_i} Y_{i+j\lceil \sqrt{n} \rceil},$$

onde

$$M_i := \max\{j \in \{0, 1, 2, \dots\} : i + j \lceil \sqrt{n} \rceil \leq n\}.$$

Observe-se que, se o evento B ocorre, cada σ_i é uma soma de variáveis aleatórias i.i.d., pois, nesse caso, as variáveis aleatórias $\{Y_{i+j\lceil\sqrt{n}\rceil} : j = 1, \dots, M_i\}$ são funções de conjuntos disjuntos de passeios aleatórios.

É importante observar que não é possível garantir a existência da função geradora de momentos de Y_i . Tudo o que temos é uma estimativa sub-exponencial para a cauda dessas variáveis, dada por (1.9). Porém, o lema 1.3 resolve o nosso problema, permitindo-nos obter (para $\delta_0 = 1/a$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^n Y_i > \frac{n}{\delta_0} \middle| B\right] &\leq \mathbf{P}\left[\left\{\sigma_1 \leq \frac{M_1}{\delta_0}, \dots, \sigma_{\lceil\sqrt{n}\rceil} \leq \frac{M_{\lceil\sqrt{n}\rceil}}{\delta_0}\right\}^c \middle| B\right] \\ &\leq \sum_{i=1}^{\lceil\sqrt{n}\rceil} \mathbf{P}\left[\sigma_i \geq \frac{M_i}{\delta_0} \middle| B\right] \\ &\leq C_2 \sum_{i=1}^{\lceil\sqrt{n}\rceil} \exp\{-M_i^\beta\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Note-se que, se n é suficientemente grande, então, para todo $i \leq \lceil\sqrt{n}\rceil$ existem constantes positivas, K_1, K_2 , tais que $K_1\sqrt{n} \leq M_i \leq K_2\sqrt{n}$. O resultado segue de (1.35) e (1.36). Λ

Estende-se $T(x, y)$ para todo o $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ através da seguinte definição

$$T(x, y) := \min\{n : y \in \bar{\xi}_n^{x_0}\},$$

onde $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ é tal que $x \in (-1/2, 1/2]^d + x_0$. Esta extensão preserva a subaditividade. Nossa próxima meta é provar que μ pode ser estendida de tal modo que (1.33) valha para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Por simplicidade de notação, seja $T(x) := T(0, x)$.

Lema 1.5. Para todo $x \in \mathbb{Q}^d$

$$\frac{T(nx)}{n} \rightarrow \frac{\mu(mx)}{m},$$

onde m é o menor inteiro positivo tal que $mx \in \mathbb{Z}^d$.

Demonstração. Seja $n = km + r$, onde $k, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < m$. Temos que

$$\left| \frac{T(nx)}{n} - \frac{\mu(mx)}{m} \right| \leq \left| \frac{T(kmx)}{km} - \frac{\mu(mx)}{m} \right| + \left| \frac{T(nx)}{n} - \frac{T(kmx)}{km} \right| \leq$$

$$\left| \frac{T(kmx)}{km} - \frac{\mu(mx)}{m} \right| + \left| \frac{T(kmx + rx)}{n} - \frac{T(kmx)}{n} \right| + \left| \frac{T(kmx)}{n} - \frac{T(kmx)}{km} \right|.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{T(nx)}{n} - \frac{\mu(mx)}{m} \right| = 0,$$

o que conclui a demonstração. Λ

Definimos, para todo $x \in \mathbb{Q}^d$,

$$\mu(x) := \frac{\mu(mx)}{m},$$

onde m é o menor inteiro positivo tal que $mx \in \mathbb{Z}^d$. Pelo lema 1.5, segue que

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(nx)}{n}$$

para todo $x \in \mathbb{Q}^d$. Assim, segue que, dado $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mu(kx) = |k| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(nkx)}{n|k|} = |k|\mu(x)$$

e, de modo semelhante,

$$\mu(x/k) = \frac{\mu(k(1/k)x)}{|k|} = \frac{\mu(x)}{|k|},$$

ou seja, para todo $c \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$\mu(cx) = |c|\mu(x).$$

Como

$$\mu(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n(x+y))}{n} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(nx)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(ny)}{n} = \mu(x) + \mu(y),$$

segue que $\mu : \mathbb{Q}^d \rightarrow [0, \infty)$ é uma norma em $\mathbb{Q}^d$ (considerado como espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$). Como toda norma em um espaço vetorial de dimensão finita é uniformemente contínua, segue que μ pode ser estendida, continuamente, ao espaço $\mathbb{R}^d$. Tal extensão é uma norma em $\mathbb{R}^d$ e vale

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(nx)}{n}. \quad (1.37)$$

Com efeito, dados $x \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$, sejam $x_k \in \mathbb{Q}^d$, $c_k \in \mathbb{Q}$ tais que $x_k \rightarrow x$, $c_k \rightarrow c$. Pela continuidade de $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, segue que

$$\mu(cx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(c_k x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k| \mu(x_k) = |c| \mu(x).$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^d$, sejam $x_k, y_k \in \mathbb{Q}^d$ tais que $x_k \rightarrow x$ e $y_k \rightarrow y$. Temos que

$$\mu(x + y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(x_k + y_k) \leq \mu(x) + \mu(y).$$

Logo, μ é uma norma em $\mathbb{R}^d$.

Finalmente, da desigualdade

$$\left| \mu(x) - \frac{T(nx)}{n} \right| \leq$$

$$\left| \mu(x) - \mu(x_k) \right| + \left| \mu(x_k) - \frac{T(nx_k)}{n} \right| + \left| \frac{T(nx_k)}{n} - \frac{T(nx)}{n} \right|$$

segue que

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(nx)}{n}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Dados $y \in \mathbb{R}^d$ e $a > 0$ denotamos por $D(y, a) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_1 \leq a\}$ a bola de centro y e raio a na norma da soma.

Lema 1.6. *Existem $0 < \delta < 1$, $C > 0$, $\gamma_0 > 0$ tais que*

$$\mathbf{P}[D(0, n\delta) \subset \bar{\xi}_n] \geq 1 - C \exp\{-n^{\gamma_0}\}$$

para todo n suficientemente grande.

Figura 9: ilustração do lema 1.6

Demonstração. Pelo lema 1.4, se x é tal que $\|x\|_1 = n$, temos que

$$\mathbf{P}\left[T(x) \geq \frac{n}{\delta_0}\right] \leq C \exp\{-n^\gamma\}.$$

Seja $y \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|y\|_1 < n$. Existe $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x\|_1 = n$ e $\|x - y\|_1 = n$ ou $\|x - y\|_1 = n + 1$. Suponhamos que $\|x - y\|_1 = n$ (o outro caso se trata de modo análogo). Como $T(y) \leq T(x) + T(x, y)$ e, pelo lema 1.4 obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left[T(y) \geq \frac{2n}{\delta_0}\right] &\leq \mathbf{P}\left[T(x) + T(x, y) \geq \frac{2n}{\delta_0}\right] \\ &\leq \mathbf{P}\left[T(x) \geq \frac{n}{\delta_0}\right] + \mathbf{P}\left[T(x - y) \geq \frac{n}{\delta_0}\right] \\ &\leq 2C \exp\{-n^\gamma\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{P}\left[\text{existe } y \in D(0, n) \text{ tal que } T(y) \geq \frac{2n}{\delta_0}\right] \leq C_1 n^d \exp\{-n^\gamma\},$$

o que termina a prova do lema 1.6. Λ

Note-se que, pelo lema de Borel-Cantelli,

$$D(0, n\delta) \subset \bar{\xi}_n$$

assintoticamente, quase certamente.

Agora estamos aptos a concluir a demonstração do teorema da forma para o modelo de reação em cadeia.

Teorema 1.1 *Existe um conjunto convexo, não vazio, $A \subset \mathbb{R}^d$, tal que, qualquer que seja $0 < \varepsilon < 1$,*

$$(1 - \varepsilon)A \subset \frac{\bar{\xi}_n}{n} \subset (1 + \varepsilon)A \quad (1.38)$$

assintoticamente, quase certamente, ou seja, dado ε , para quase toda realização ω do processo $\bar{\xi}_n$, existe um inteiro $n_0 = n_0(\omega, \varepsilon)$ tal que, para $n > n_0$, (1.38) ocorre.

Demonstração. Seja $A := \{x \in \mathbb{R}^d : \mu(x) \leq 1\}$. Inicialmente provaremos que

$$n(1 - \varepsilon)A \subset \bar{\xi}_n \text{ assintoticamente, quase certamente.}$$

Como A é compacto, existe um conjunto finito $F := \{x_1, \dots, x_k\} \in A$ tal que $\mu(x_i) < 1$ para $i = 1, \dots, k$, e (com δ do lema 1.6)

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k D(x_i, \varepsilon\delta).$$

Note-se que (1.37) implica que $nF \subset \bar{\xi}_n$ assintoticamente, quase certamente.

Pelo lema 1.6, assintoticamente, quase certamente, temos

$$nD((1 - \varepsilon)x_i, \varepsilon\delta) \subset \bar{\xi}_{n\varepsilon}^{n(1-\varepsilon)x_i}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, k$$

e, portanto, esta parte da demonstração está terminada.

Agora, provaremos que

$$\bar{\xi}_n \subset n(1 + \varepsilon)A \text{ assintoticamente, quase certamente.}$$

Seja $G := \{y_1, \dots, y_k\} \subset 2A \setminus A$ um subconjunto finito de $2A \setminus A$ tal que

$$2A \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^k D(y_i, \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1}\delta).$$

Observe-se que $\mu(y_i) > 1$ para $i = 1, \dots, k$. O resultado (1.37) implica que

$$nG \cap \bar{\xi}_n = \emptyset \text{ assintoticamente, quase certamente.} \quad (1.39)$$

Suponhamos que, com probabilidade positiva,

$$\bar{\xi}_n \not\subset n(1 + \varepsilon)A \text{ para infinitos } n \in \mathbb{N}. \quad (1.40)$$

Fixada uma realizaço do processo $\bar{\xi}_n$, tal que (1.39) e (1.40) ocorram, escolhemos n_0 to grande de modo que, se $n > n_0$, $nG \cap \bar{\xi}_n = \emptyset$ e escolhemos $n > n_0$ tal que $\bar{\xi}_n \not\subset n(1 + \varepsilon)A$.

Como $\bar{\xi}_n$ conexo e (1.40) ocorre, existe um stio

$$x \in \bar{\xi}_n \cap (1 + \varepsilon)n(2A \setminus A).$$

Pelo lema 1.6, pode-se supor que, nesta realizao, n_0 to grande que, para $n > n_0$, $D(x, n\varepsilon\delta) \subset \bar{\xi}_{n(1+\varepsilon)}$.

Note-se que, como $(1 + \varepsilon)n(2A \setminus A) \subset \bigcup_{i=1}^k D((1 + \varepsilon)ny_i, n\varepsilon\delta)$, temos que existe i tal que

$$n(1 + \varepsilon)y_i \in D(x, n\varepsilon\delta) \subset \bar{\xi}_{n(1+\varepsilon)}.$$

Isto contradiz (1.39), concluindo, assim, a prova do teorema. Λ

Passamos agora à demonstração dos teoremas 1.2 e 1.3.

Teorema 1.2. *Se m é suficientemente grande, então existe $0 < \beta < 1/2$ tal que $\Theta^\beta \subset A_m$.*

Demonstração. Para demonstrar este teorema, é suficiente provar o seguinte fato: fixados i, j , existe β tal que

$$\Theta_{ij}^\beta \subset A_m. \tag{1.41}$$

De fato, neste caso (1.41) ocorre para todos i, j e para um mesmo β por simetria, logo, $\Theta^\beta \subset A_m$ em virtude da convexidade de A_m .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i = 1, j = 2$ e m é par. Provaremos que o modelo de reação em cadeia observado apenas em $\Lambda_{12} \cap Z_+^d$ domina um processo de percolação orientada em Z_+^2 com parâmetro $\theta = 1 - (1 - (2d)^{-1})^{m/2}$. (cf. Apêndice - percolação). Para provar isto, suponhamos que, inicialmente, para cada x , todas as partículas do sítio x são marcadas por “ $x \rightarrow$ ” ou “ $x \uparrow$ ” de modo que o sítio x contém $m/2$ partículas de cada tipo. Denotando por e_1, e_2 os dois primeiros vetores da base canônica, o processo de percolação orientada é, então, definido do seguinte modo: Dado $x \in \Lambda_{12} \cap Z_+^d$,

- a aresta ligando x a $x + e_1$ é declarada aberta se para o modelo de

reação em cadeia, exatamente no instante seguinte ao da ativação do sítio x , pelo menos uma partícula marcada por “ $x \rightarrow$ ” salta sobre $x + e_1$;

- a aresta ligando x a $x + e_2$ é declarada aberta se no instante seguinte ao da ativação do sítio x , pelo menos uma partícula marcada por “ $x \uparrow$ ” salta sobre $x + e_2$.

Os dois eventos acima descritos são independentes e a probabilidade de que ocorram é dada por θ . Logo, o modelo de reação em cadeia domina o modelo de percolação orientada no seguinte sentido: se um sítio $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ (por simplicidade, ignoramos as coordenadas nulas) pertence ao aglomerado da origem no modelo de percolação, então, no modelo de reação em cadeia, o sítio x é acordado *exatamente* no instante $x^{(1)} + x^{(2)}$. Escolhendo m suficientemente grande de modo a tornar o modelo de percolação super-crítico (note-se que $\theta \rightarrow 1$ se $m \rightarrow \infty$) e utilizando o resultado de que (condicionado no evento de que o aglomerado da origem é infinito) a interseção do aglomerado da origem com a reta $\{(x^{(1)}, x^{(2)}) : x^{(1)} + x^{(2)} = n\}$ cresce linearmente em n , conclui-se a demonstração (cf. Apêndice - percolação). Λ

Teorema 1.3. *Suponha que, para um certo $\delta < d$ e para todo n suficientemente grande, tenhamos*

$$\mathbf{P}[\eta \geq (2d)^n] \geq n^{-\delta}, \quad (1.42)$$

e $\eta \geq 1$ quase certamente. Então $A_\eta = \mathcal{D}$.

Demonstração. Denotamos por

$$\mathcal{D}_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}$$

a bola de centro na origem e raio n , com respeito à norma da soma.

Seja $\theta < 1$ tal que $\delta < d\theta$. Começemos o processo, aguardando até o instante n^θ . Como $\eta \geq 1$ q.c., pelo lema 1.6 existe C_1 tal que, com probabilidade pelo menos $1 - \exp\{n^{\gamma_0}\}$, todas as partículas na bola de raio $C_1 n^\theta$ e centro $\mathbf{0}$ estarão acordadas. Sejam $x_1, \dots, x_N$ os sítios com coordenadas inteiras pertencentes a esta bola, enumerados de forma arbitrária. Seja ζ_i a função indicadora do evento

$$\{\text{na configuração inicial, } x_i \text{ contém menos que } (2d)^n \text{ partículas}\}.$$

A desigualdade (1.42) implica que $\mathbf{P}[\zeta_i = 1] \leq 1 - n^{-\delta}$. Como N é da ordem de $n^{d\theta}$, pode-se aplicar o lema 1.2 com $p = 1 - n^{-\delta}$ e $a = 1 - n^{-\delta}/2$ para obter-se que, com probabilidade pelo menos, $1 - \exp\{-C_2 n^{d\theta-\delta}\}$, no tempo n^θ teremos, pelo menos, $C_3 n^{d\theta-\delta}$ sítios ativos x_i tais que $\zeta_i = 0$. Portanto, no instante n^θ teremos, pelo menos $C_3 n^{d\theta-\delta} (2d)^n$ partículas ativas em $\mathcal{D}_{n^\theta}$. Note-se que se x contém, pelo menos, $(2d)^n$ partículas ativas e $\|x - y\|_1 \leq n$, então, até o tempo n , com probabilidade positiva, pelo menos uma dessas partículas atingirá o sítio y . Usando este fato, obtemos que, com grande probabilidade, todas as partículas no conjunto $\mathcal{D}_{n-n^\theta}$ estarão acordadas no tempo $n^\theta + n$. Isto completa a demonstração. Λ

2 Transição de fase

2.1 Teoremas sobre transição de fase

Neste capítulo estudamos o problema da existência de transição de fase no modelo de reação em cadeia. Supomos que o parâmetro p é maior que zero, porém, menor que um, de modo que cada uma das partículas ativas morre (desaparece) após um tempo com distribuição geométrica. Além disso, a configuração inicial do sistema é aleatória. Os passeios aleatórios têm lugar não apenas nos reticulados Z^d , mas também nas árvores regulares T_k , definidas formalmente como se segue. O conjunto $V(T_k)$ é formado por um símbolo especial, chamado raiz de T_k e denotado por 0 , pelos símbolos $1, 2, \dots, k$ e por todas as seqüências finitas da forma

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

tais que a_1 pertence a $\{1, 2, \dots, k\}$ e, para $i > 1$, a_i pertence a $\{2, 3, \dots, k\}$. O conjunto das arestas de T_k é definido da seguinte forma. Os vértices vizinhos da raiz de T_k são dados por $1, 2, \dots, k$ e, de modo geral, os vizinhos do vértice $a_1 a_2 \cdots a_n$ são o vértice $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ e os vértices da forma $a_1 a_2 \cdots a_n b$, onde b pertence a $\{2, 3, \dots, k\}$. Suporemos sempre que k é maior ou igual a 3.

A figura 10 mostra o pedaço da árvore T_k formado pelos sítios cuja distância à raiz é menor ou igual a 3, ou seja, temos representada a bola $D(0, 3) := \{v \in V(T_3) : d(v, 0) \leq 3\}$.

Nesta seção apresentamos resultados sobre transição de fase com respeito

Figura 10: $D(0, 3) \subset T_3$

ao parâmetro de sobrevivência p , o grafo G onde os passeios aleatórios estão definidos e a distribuição inicial de partículas, dada por η . Denotaremos por

$$RC(G, p, \eta)$$

o modelo de reação em cadeia no grafo G com parâmetro de sobrevivência p e distribuição inicial dada por η (ou seja, em cada sítio x de G , coloca-se, inicialmente, independentemente dos demais sítios, um número $\eta(x)$ de partículas, onde $\eta(x)$ tem a mesma distribuição de η). Utilizaremos a seguinte notação: $p_j := \mathbf{P}[\eta = j]$.

Para introduzir o conceito de transição de fase, precisamos da seguinte definição

Definição 2.1. *Uma dada realização do modelo de reação em cadeia **sobrevive** se para todo instante de tempo existe pelo menos uma partícula ativa. Caso contrário, dizemos que aquela realização do modelo de reação em cadeia*

morre.

No próximo lema, provamos que, para p suficientemente pequeno (com respeito a η), o modelo de reação em cadeia morre quase certamente em qualquer grafo.

Lema 2.1. *Se $p \leq (\mathbf{E}\eta + 1)^{-1}$, então o modelo de reação em cadeia morre quase certamente em qualquer grafo G .*

Demonstração. O conjunto de partículas ativas no modelo de reação em cadeia é dominado pela população do seguinte processo de ramificação de Galton-Watson (cf. [5], pag. 212). Cada indivíduo tem um número de descendentes distribuído como $(\eta + 1)\xi$, onde as variáveis aleatórias ξ e η são independentes e $\mathbf{P}[\xi = 1] = p = 1 - \mathbf{P}[\xi = 0]$. Portanto, como o número médio de descendentes por indivíduo é $(1 + \mathbf{E}\eta)p$, o resultado segue por comparação com o processo de Galton-Watson. Λ

Observando que $\mathbf{P}[\text{RC}(G, p, \eta) \text{ sobrevive}]$ é não decrescente em p definimos

$$p_c(G, \eta) := \inf\{p : \mathbf{P}[\text{RC}(G, p, \eta) \text{ sobrevive}] > 0\}.$$

Diremos que $\text{RC}(G, \eta, p)$ possui *transição de fase* se

$$0 < p_c(G, \eta) < 1.$$

Ainda por comparação com um processo de ramificação, damos outra cota inferior para $p_c(G, \eta)$. Tal cota é melhor que aquela fornecida pelo lema 2.1 para grafos de grau uniformemente limitado.

Lema 2.2. *Se G é um grafo de grau máximo k , temos que*

$$p_c(G, \eta) \geq \frac{k}{1 + (k - 1)(\mathbf{E}\eta + 1)}.$$

Demonstração. Seja o processo de ramificação em que os indivíduos não deixam descendentes com probabilidade $1 - p$, produzem um descendente com probabilidade $(p + pp_0(k - 1))/k$ e, em geral, produzem $j \geq 2$ descendentes com probabilidade $p_{j-1}p(k - 1)/k$, onde $p_j = \mathbf{P}[\eta = j]$. Observando que, no modelo de reação em cadeia, cada sítio que possui pelo menos uma partícula ativa no instante $n > 0$ tem pelo menos um vizinho cujas partículas foram ativadas antes do instante n , podemos acoplar o modelo de reação em cadeia com o processo de ramificação descrito acima de modo que o primeiro é dominado pelo segundo. Como $p \leq k(1 + (k - 1)(\mathbf{E}\eta + 1))^{-1}$ implica que o processo de ramificação é subcrítico, morrendo quase certamente, o mesmo ocorre para o modelo de reação em cadeia. Λ

Enunciamos agora os principais resultados deste capítulo. As demonstrações serão dadas na próxima seção.

Teorema 2.1. *Se $\mathbf{E}\eta < \infty$ então $p_c(Z, \eta) = 1$.*

Este primeiro teorema nos diz que se η tem esperança finita, então, para qualquer valor de $p \in (0, 1)$, $\text{RC}(Z, p, \eta)$ morre quase certamente. Por outro lado, o próximo teorema mostra que se η possui uma cauda suficientemente pesada, então, para todo $p \in (0, 1)$, $\text{RC}(Z, p, \eta)$ sobrevive com probabilidade positiva.

Teorema 2.2. *Para o modelo de reação em cadeia $\text{RC}(\mathbb{Z}, p, \eta)$, suponha que existam $\sigma > 1$ e $0 < \varepsilon < 1$ tais que*

$$\mathbf{P}[\eta > \sigma^n] > n^{-(1-\varepsilon)}.$$

Então, $p_c(\mathbb{Z}, \eta) = 0$.

Os dois próximos teoremas dizem que, diferentemente do que ocorre em $\mathbb{Z}$, a condição $\mathbf{E}\eta < \infty$ é suficiente para garantir a existência de transição de fase em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$ e em $\mathbb{T}_k$, $k \geq 3$.

Teorema 2.3. *Se $\mathbf{E}\eta < \infty$ então $0 < p_c(\mathbb{Z}^d, \eta) < 1$ para todo $d \geq 2$.*

Teorema 2.4. *Se $\mathbf{E}\eta < \infty$ então $0 < p_c(\mathbb{T}_k, \eta) < 1$ para todo $k \geq 3$.*

Existe outro tipo de transição de fase neste modelo. Por exemplo, seja p tal que $p_c(\mathbb{G}, 1) < p < 1$ e η_q uma variável aleatória tomando valores 0 e 1 tal que $\mathbf{P}[\eta_q = 1] = q$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Existe transição de fase em q , ou seja, $\text{RC}(\mathbb{G}, p, \eta_q)$ morre quase certamente quando q é pequeno e sobrevive quando q é grande.*

Para finalizar, os próximos teoremas fornecem valores assintóticos para os parâmetros críticos nos reticulados $\mathbb{Z}^d$ e nas árvores regulares.

Teorema 2.6.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{T}_k, \eta) = \frac{1}{1 + \mathbf{E}\eta}.$$

Teorema 2.7.

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{Z}^d, \eta) = \frac{1}{1 + \mathbf{E}\eta}.$$

2.2 Demonstrações

Seja

$$R_x^i = \{S_n^x(i) : 0 \leq n < Y_p^x(i)\}$$

o conjunto “virtual” de sítios visitados pela i -ésima partícula originalmente em x . O conjunto R_x^i torna-se “real” caso o sítio x seja visitado por alguma partícula ativa. Define-se o traço (virtual) do sítio x por

$$R_x := \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{\eta(x)} R_x^i, & \eta(x) > 0 \\ \{x\}, & \eta(x) = 0. \end{cases}$$

Note-se que o modelo de reação em cadeia sobrevive se, e somente se, existir uma seqüência infinita de sítios distintos $0 = x_1, x_2, x_3, \dots$ tal que, para todo j ,

$$x_{j+1} \in R_{x_j}. \quad (2.1)$$

Este fato é a chave da demonstração do nosso primeiro resultado.

Teorema 2.1 *Se $E\eta < \infty$ então $p_c(Z, \eta) = 1$.*

Demonstração. Note-se que, para $n \geq 1$, e para quaisquer sítios distintos $x, y \in Z$,

$$\mathbf{P}[y \notin R_x^1] \geq 1 - p^{|y-x|}$$

logo, lembrando que $p_i = \mathbf{P}[\eta = i]$, temos que

$$\mathbf{P}[y \in R_x] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (1 - (\mathbf{P}[y \notin R_x^1])^i) \leq p^{|y-x|} \mathbf{E}\eta.$$

Assim, se ζ_y é a função indicadora do evento

$$\{\text{para todo } x \neq y, y \notin R_x\},$$

segue que

$$\mathbf{E}\zeta_y = \mathbf{P}[\zeta_y = 1] \geq \prod_{\{x: x \neq y\}} (1 - \mathbf{P}[y \in R_x]) \geq$$

$$\prod_{\{z: z \neq 0\}} (1 - p^{|z|} \mathbf{E}\eta) > 0.$$

A seqüência $(\zeta_y)_{y \in \mathbb{Z}}$ é, claramente, estacionária. Utilizando argumentos bem conhecidos, pode-se provar que esta seqüência é misturadora (a demonstração está no Apêndice - teoria ergódica, proposição 3.1). Portanto, pelo teorema ergódico (cf. [22] pag. 314), existe, quase certamente, uma seqüência infinita de sítos $\dots < y_{-1} < y_0 < y_1 < \dots$ tal que, para todo i , $\zeta_{y_i} = 1$. Portanto, para quase toda realização do processo, existe um número enumerável de blocos de sítos sem comunicação com o seu exterior, fazendo com que o modelo de reação em cadeia morra. Isto conclui a prova do teorema. Λ

Teorema 2.2: *Para o modelo de reação em cadeia $\text{RC}(\mathbb{Z}, p, \eta)$, suponha que existam $\sigma > 1$ e $0 < \varepsilon < 1$ tais que*

$$\mathbf{P}[\eta > \sigma^n] > n^{-(1-\varepsilon)}.$$

Então, $p_c(Z, \eta) = 0$.

Demonstração. A idéia da demonstração é a seguinte. Dividimos $Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ em uma união disjunta de intervalos de tamanho crescente, $I_k := [a_k, a_{k+1})$, de modo que, com grande probabilidade (crescente em k), I_k possui um grande número de partículas no tempo zero; além disso, dado que I_k têm muitas partículas, com grande probabilidade (crescente em k), alguma destas atinge o sítio $a_{k+2} - 1$, ativando, portanto, todas as partículas colocadas originalmente em I_{k+1} . Construindo-se adequadamente os conjuntos acima, todos os eventos descritos ocorrem, simultaneamente, com probabilidade positiva, o que implica que o processo sobrevive com probabilidade positiva.

A fim de começar a demonstração, seja $\{I_k : k = 1, 2, \dots\}$ tal que $I_1 = [0, N + 1)$ e, se $I_k = [a_k, a_{k+1})$, então $I_{k+1} = [a_{k+1}, a_{k+1} + 2^k N + 1)$.

Definimos

$$F := \{\eta(0) > 0 \text{ e alguma partícula ativa do sítio } 0 \text{ atinge o sítio } N\}$$

$$A_k := \{\text{existem mais que } \theta^{2^{k-1}N} \text{ partículas em } I_k\}$$

$$B_k := \{\text{alguma partícula de } I_k \text{ atinge o sítio } a_{k+2} - 1\}$$

onde $\theta > 1$ e $N \in \mathbb{N}$ são constantes a serem escolhidas posteriormente.

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\text{RC}(Z, p, \eta) \text{ sobrevive}] &\geq \mathbf{P}[F \cap (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)] \\
&\geq \mathbf{P}[F] \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i] \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_i \mid (\cap_{k=1}^{i-1} B_k) \cap A_{i-1} \cap F].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto, para concluir a demonstração, é suficiente provar que os fatores acima são estritamente positivos para N e θ convenientemente escolhidos.

Note-se que, fixado θ , se N é tão grande que, para todo $n > N$

$$\sigma^{n^{1+\varepsilon}} > \theta^n \tag{2.3}$$

e

$$\mathbf{P}[\eta > \sigma^{n^{1+\varepsilon}}] > n^{-(1-\varepsilon^2)} \tag{2.4}$$

então

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[A_i] &\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{(i-1)(1-\varepsilon^2)} N^{1-\varepsilon^2}}\right)^{N 2^{i-1}} \\
&= 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{2^{(i-1)(1-\varepsilon^2)} N^{1-\varepsilon^2}}\right)^{N^{1-\varepsilon^2} 2^{(i-1)(1-\varepsilon^2)}}\right)^{N^{\varepsilon^2} 2^{(i-1)\varepsilon^2}}.
\end{aligned}$$

Logo, escolhendo N tão grande que, para $n > N$,

(2.3), (2.4) e

$$\left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon^2}}\right)^{n^{1-\varepsilon^2}} < 2e^{-1} \tag{2.5}$$

ocorram, temos que, para i suficientemente grande,

$$\mathbf{P}[A_i] \geq 1 - (2e^{-1})^{N\epsilon^2 2^{(i-1)\epsilon}}.$$

Portanto,

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i] > 0.$$

Observe-se que uma partícula ativa partindo de r tem probabilidade maior que $(p/2)^s$ de atingir o sítio $r + s$ se $s > 0$. Logo, escolhendo $\theta > (2/p)^3$, ou seja, $\theta = (2/p)^{3+\delta}$, $\delta > 0$ e N tão grande que para $n > N$, (2.3)–(2.5) e

$$\left(1 - \frac{1}{(2/p)^{3n}}\right)^{\left(\frac{2}{p}\right)^{3n}} < 2e^{-1} \quad (2.6)$$

ocorrem, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[B_i | (\cap_{k=1}^{i-1} B_k) \cap A_{i-1} \cap F] &\geq \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{(2/p)^{2^{i-1}3N}}\right)^{\theta^{2^{i-1}N}} &= \\ 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{(2/p)^{2^{i-1}3N}}\right)^{\left(\frac{2}{p}\right)^{2^{i-1}3N}}\right)^{\left(\frac{2}{p}\right)^{\delta 2^{i-1}N}}. \end{aligned}$$

Assim, por (2.6), segue que

$$\mathbf{P}[B_i | (\cap_{k=1}^{i-1} B_k) \cap A_{i-1} \cap F] \geq 1 - (2e^{-1})^{\left(\frac{2}{p}\right)^{\delta 2^{i-1}N}}.$$

Portanto

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_i | (\cap_{k=1}^{i-1} B_k) \cap A_{i-1} \cap F] > 0,$$

o que conclui a demonstração.

Λ

Pelo lema 2.1, para provar os teoremas 2.3 e 2.4 é suficiente mostrar que se p é suficientemente grande, o modelo de reação em cadeia sobrevive com probabilidade positiva em Z^d , $d \geq 2$ e em T_k . Seja η' definida por

$$\eta'(x) = \mathbf{1}_{\{\eta(x) \geq 1\}}.$$

Como $\text{RC}(G, p, \eta)$ domina $\text{RC}(G, p, \eta')$, a fim de demonstrar os teoremas 2.3 e 2.4, sem perda de generalidade, podemos supor que a configuração inicial do sistema é dada por $\{\eta'(x) : x \in G\}$.

Teorema 2.3: *Se $E\eta < \infty$ então $0 < p_c(Z^d, \eta) < 1$ para todo $d \geq 2$.*

Demonstração. Como a prova é feita por indução, começamos considerando o caso $G = Z^2$.

É bem conhecido o fato de que o passeio aleatório simples (sem mortes) é recorrente em Z^2 (cf. [10]). Logo, dado $N \in \mathbb{N}$ e supondo $\eta'(0) = 1$, é possível escolher p tão grande de modo que a probabilidade de a primeira partícula ativa visitar todos os sítios do quadrado $[-2N, 2N]^2 \cap Z^2$ antes de morrer fique arbitrariamente grande. Temos, também, que a probabilidade de que exista x no quadrado $[0, N]^2 \cap Z^2$ tal que $\eta'(x) = 1$ pode ser feita arbitrariamente grande desde que N seja suficientemente grande.

Definimos um processo de percolação do seguinte modo. Inicialmente, dividimos Z^2 em quadrados disjuntos de lado N :

$$Z^2 = \bigcup_{r,k} Q(r, k)$$

onde $Q(r, k) = (kN, rN) + [0, N]^2 \cap Z^2$. Dizemos que $Q(r, k)$ é aberto se o seguinte evento ocorre

$$\bigcup_{x \in Q(r,k)} \left(\{\eta'(x) = 1\} \cap \left\{ R_x^1 \supseteq \left([-2N, 2N]^2 + x \right) \cap Z^2 \right\} \right) \neq \emptyset$$

caso contrário, dizemos que $Q(r, k)$ é fechado.

Note-se que o modelo de reação em cadeia domina este processo de percolação no seguinte sentido: pode-se acoplar os dois processos de modo que se ocorre percolação então o modelo de reação em cadeia sobrevive. Portanto, se N e p são escolhidos de modo que o processo de percolação seja supercrítico, o modelo de reação em cadeia sobrevive, com probabilidade positiva, para a mesma escolha de p .

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para a dimensão $d - 1$. Modificando um pouco a notação, escreveremos $R^{p,d}(x)$ ao invés de R^x , pois temos que levar em conta a dimensão e o parâmetro de sobrevivência. Lembramos que o modelo de reação em cadeia sobrevive se, e somente se, existe uma seqüência $\mathbf{0} = x_0, x_1, \dots$ de sítios distintos tal que $x_{j+1} \in R^{p,d}(x_j)$ para todo j (cf. (2.1)). Os traços $R^{p,d}(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ podem ser construídos indutivamente do seguinte modo: inicialmente, ordena-se, de modo arbitrário, os sítios de Z^d . Se $R^{p,d}(x_0) = \{\mathbf{0}\}$, o modelo de reação em cadeia morre. Caso contrário, existe $y \in R^{p,d}(x_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$. seja x_1 o menor sítio de $R^{p,d}(x_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se

$R^{p,d}(x_0) \cup R^{p,d}(x_1) = \{x_0, x_1\}$, o processo morre. Caso contrário, existe um menor sítio, x_3 , em $(R^{p,d}(x_0) \cup R^{p,d}(x_1)) \setminus \{x_0, x_1\}$, e assim em diante. O modelo de reação em cadeia sobrevive se, e somente se, a seqüência $x_0, x_1, x_2 \dots$ for infinita. Tendo isso em mente, a partir do modelo de reação em cadeia, definimos os seguintes processos:

- *modelo de reação em cadeia modificado* - Este processo inicia com $\eta'(\mathbf{0})$ partículas na origem, nenhuma partícula nos sítios de $(\{(0, 0, \dots, 0)\} \times \mathbb{Z}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\eta'(x)$ partículas em cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$, como no modelo original. Os traços do modelo de reação em cadeia modificado são construídos de modo indutivo, como para o modelo de reação em cadeia. A diferença é que, no momento em que a reta $\gamma := \{(z^{(1)} \dots z^{(d-1)})\} \times \mathbb{Z}$ é atingida pela primeira vez, suponhamos, no sítio y , todas as partículas de γ são apagadas, exceto aquelas do sítio y .
- *Projeção do modelo de reação em cadeia modificado* - Projetando os traços do modelo de reação em cadeia modificado em $\mathbb{Z}^{d-1}$ (as primeiras $d-1$ coordenadas), obtém-se a projeção do modelo de reação em cadeia modificado.

Observamos que a projeção do modelo de reação em cadeia modificado em $\mathbb{Z}^{d-1}$ tem o mesmo comportamento que o modelo de reação em cadeia em $\mathbb{Z}^{d-1}$, exceto pelo fato de que cada partícula ativa, caso sobreviva, pode ficar no mesmo sítio que estava com probabilidade $1/d$. Mais precisamente, no

modelo projetado, para uma partícula específica, a probabilidade de sobreviver e saltar para algum outro sítio é $p' = p(d-1)/(d-p)$. Assim sendo, pode-se acoplar estes processos de tal maneira que o modelo de reação em cadeia $RC(Z^d, p, \eta)$ domina o modelo de reação em cadeia modificado em Z^d , que, por sua vez, domina a sua projeção em Z^{d-1} , que é equivalente ao modelo $RC(Z^{d-1}, p', \eta)$. Como $p' < 1$ implica $p < 1$, obtemos que $p_c(Z^{d-1}, \eta) < 1$ implica que $p_c(Z^d, \eta) < 1$. O resultado segue por indução. Λ

A fim de demonstrar o teorema 2.4, a partir de T_k , definimos $T_k^+ \subset T_k$ como sendo a componente conexa de T_k que contém o sítio $\mathbf{0}$, quando o sítio 1 é removido de T_k . Dados $a = a_1 a_2 \cdots a_n \in T_k$ e $b = b_1 b_2 \cdots b_m \in T_k^+$, definimos o produto ab por

$$ab := a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$$

Dados $a, b \in T_k$, escrevemos $a < b$ quando $a = \mathbf{0}$, ou se existir $c \in T_k^+$ tal que $ac = b$. Denominaremos uma translação em T_k^+ a toda função da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a : V(T_k^+) &\rightarrow V(T_k^+) \\ b &\rightarrow ab \end{aligned}$$

Dado um conjunto $A \subset V(T_k)$, definimos a sua *fronteira*, ∂A , como o conjunto dos sítios de A que possuem algum vizinho fora de A . A *fronteira exterior* de A é o conjunto $\partial_e A$, definido do seguinte modo:

$$\partial_e A = A \setminus \{a \in A : \text{existe } b \in A \text{ tal que } b > a\}.$$

Na figura 11, temos ilustrado o conjunto $A \subset V(T_3)$, cuja fronteira coincide com A . Note-se que $\partial_e A = \{12, 23\} \neq A = \{0, 1, 2, 12, 23\}$.

Figura 11: $\partial A = A = \{0, 1, 2, 12, 23\}$, porém $\partial_e A = \{12, 23\}$

Para demonstrar o teorema 2.4 necessitamos de dois resultados auxiliares que enunciamos e provamos a seguir.

Lema 2.3. *Sejam $A, B \subset V(T_k)$ conjuntos conexos finitos tais que $A \subset B$. Temos que*

$$|\partial_e A| \leq |\partial_e B|.$$

Demonstração. Note-se que, escrevendo $B = A \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_i = A \cup \{v_1, \dots, v_i\}$ segue que é suficiente verificar que $|\partial_e A| \leq |\partial_e B_1|$, uma vez que o mesmo argumento serve para provar que $|\partial_e B_i| \leq |\partial_e B_{i+1}|$, qualquer que seja i . Seja u o vértice de A adjacente a $v_1 \in B_1$. Caso u não pertença à fronteira exterior de A , o resultado segue, pois a fronteira exterior de B_1 tem, neste

caso, pelo menos tantos vértices quanto a de A. Caso contrário, v_1 pertence à fronteira exterior de B_1 e u não. Logo $|\partial_e A| \leq |\partial_e B|$.

Λ

Seja W_n o conjunto dos sítios visitados até o tempo n por um passeio aleatório simples (sem mortes) em T_k começando da origem. Como o passeio aleatório em T_k é transiente (cf. [10], pag. 113), segue que, com probabilidade positiva, para todo n , $W_n \subset T_k^+$. Pelo lema 2.3, temos que $|\partial_e W_n|$ é uma seqüência não decrescente.

Lema 2.4. *Temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\partial_e W_n| = \infty \text{ quase certamente.}$$

Demonstração. Dado N , temos que, quase certamente, existe n tal que $|W_n| = N$, uma vez que S_n sai da bola $\{v \in V(T_k) : d(v, \mathbf{0}) = N\}$ num tempo finito. Assim sendo, passando a uma subsequência, se necessário, pode-se supor que $|W_n|$ é crescente. Suponhamos que, para todo n , $|\partial_e W_n| \leq M < \infty$. Como $|W_n| \uparrow \infty$, o conjunto W_n teria que, a partir de certa ordem, crescer ao longo de um número finito de cópias de Z^+ imersas em T_k . Como este evento tem probabilidade zero, isto termina a demonstração.

Λ

Teorema 2.4. *Se $E\eta < \infty$ então $0 < p_c(T_k, \eta) < 1$ para todo $k \geq 3$.*

Demonstração. Note-se que, assim como na demonstração do teorema 2.3, basta considerar o caso em que a configuração inicial é dada por $\{\eta'(x) : x \in V(T_k)\}$, onde $\eta'(x) = \mathbf{1}_{\{\eta(x) \geq 0\}}$.

Dos lemas 2.3 e 2.4 segue que

$$\mathbf{E}|\partial_e R_0 \cap T_k^+| = \mathbf{E}\left(|\partial_e R_0 \cap T_k^+| \middle| \eta'(\mathbf{0}) = 1\right) \mathbf{P}[\eta'(\mathbf{0}) = 1] \geq$$

$$N \mathbf{P}\left[|\partial_e R_0 \cap T_k^+| \geq N \middle| \eta'(\mathbf{0}) = 1\right] \mathbf{P}[\eta'(\mathbf{0}) = 1] \geq$$

$$N \mathbf{P}\left[|\partial_e R_0 \cap T_k^+| \geq N \middle| \eta'(\mathbf{0}) = 1, R_0 \subset T_k^+\right] \mathbf{P}[\eta'(\mathbf{0}) = 1] \mathbf{P}[R_0 \subset T_k^+] > 1$$

desde que N seja escolhido tão grande que

$$N \mathbf{P}[R_0 \subset T_k^+] \mathbf{P}[\eta'(\mathbf{0}) = 1] > 1$$

e, fixado N , p seja escolhido suficientemente grande.

Definimos o conjunto das partículas inicialmente dormentes de $\partial_e(R_0) \cap T_k^+$ como sendo os descendentes da primeira partícula ativa. Utilizando o fato de que, dados $x, y \in \partial_e R_0$, $x \neq y$, temos que $\mathcal{T}_x(T_k^+) \cap \mathcal{T}_y(T_k^+) = \emptyset$, obtemos que o modelo de reação em cadeia é dominado por um processo de ramificação com número médio de descendentes maior que 1 desde que p seja suficientemente grande, concluindo, assim, a prova do teorema. Λ

Teorema 2.5 *Caso p seja maior que $p_c(G, \eta)$, existe transição de fase em q , ou seja, $\text{RC}(G, p, \eta_q)$ morre quase certamente quando q é pequeno e sobrevive com probabilidade positiva quando q é grande.*

Demonstração. Note-se que $\text{RC}(G, p, \eta_q)$ é dominado pelo seguinte processo de ramificação: um indivíduo qualquer possui 0 descendentes com proba-

bilidade $1 - p$, 1 descendente com probabilidade $p(1 - q)$, e 2 descendentes com probabilidade pq . O número médio de descendentes por indivíduo neste processo de ramificação é $p(1 + q)$. Logo, $\text{RC}(\mathbf{G}, p, \eta_q)$ morre se $q < -1 + 1/p$.

Porém, quando $p > p_c(\mathbf{G}, 1)$ e q é suficientemente grande, o processo sobrevive com probabilidade positiva. De fato, este modelo domina o seguinte processo: Começando com uma partícula por sítio, a cada passo, as partículas ativas decidem *duas vezes* se sobrevivem ou não. Na primeira vez, a decisão é tomada com probabilidade q e, depois, com probabilidade p . Este último modelo é equivalente ao modelo $\text{RC}(\mathbf{G}, pq, 1)$. Portanto, segue que $\text{RC}(\mathbf{G}, p, \eta_q)$ sobrevive quando $q > p_c(\mathbf{G}, 1)/p$. Λ

Teorema 2.6

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbf{T}_k, \eta) = \frac{1}{1 + \mathbf{E}\eta}.$$

Demonstração. Pela proposição 2.1, $p_c(\mathbf{T}_k, \eta) \geq (1 + \mathbf{E}\eta)^{-1}$. Logo, é suficiente mostrar que, fixado $p > (1 + \mathbf{E}\eta)^{-1}$, é possível escolher k suficientemente grande de modo que $\text{RC}(\mathbf{T}_k, p, \eta)$ sobreviva.

Seja

$$\eta^{(s)} = \begin{cases} \eta, & \text{se } \eta \leq s, \\ 0, & \text{se } \eta > s. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pelo teorema da convergência monótona temos que $\mathbf{E}\eta^{(s)} \rightarrow \mathbf{E}\eta$ se $s \rightarrow \infty$, assim, se $p > (1 + \mathbf{E}\eta)^{-1}$, é possível escolher s tão grande que p satisfaça $p > (1 + \mathbf{E}\eta^{(s)})^{-1}$. Fixados s e p , note-se que $\text{RC}(\mathbf{T}_k, p, \eta)$ domina

$\text{RC}(T_k, p, \eta^{(s)})$, ou seja, se $\text{RC}(T_k, p, \eta^{(s)})$ sobrevive com probabilidade positiva, o mesmo ocorre com $\text{RC}(T_k, p, \eta)$. Portanto, é suficiente provar que, se $p > (1 + \mathbf{E}\eta^{(s)})^{-1}$, então $\text{RC}(T_k, p, \eta^{(s)})$ sobrevive se k é suficientemente grande.

Seja ξ_k o conjunto das partículas ativas de $\text{RC}(T_k, p, \eta^{(s)})$, no nível k (ou seja, cuja distância à raiz é k) no tempo k . Vamos mostrar que existe um processo de ramificação em T_k que é dominado por ξ_k . Isto é feito através da construção de um processo auxiliar, denotado por $\tilde{\xi}_k \subset \xi_k$ e definido do seguinte modo: a partícula no sítio $\mathbf{0}$ pertence a $\tilde{\xi}_0$ e, em geral, o processo $\tilde{\xi}_k$ é definido pelas seguintes regras. Se no tempo $n - 1$ o conjunto $\tilde{\xi}_{n-1}$, do nível $n - 1$, já foi construído, então, no tempo n o conjunto $\tilde{\xi}_n$ (que está no nível n) é construído assim: ordena-se, de modo arbitrário, as partículas de $\tilde{\xi}_{n-1}$; estas irão saltar de acordo com a ordem definida. Se uma dada partícula sobrevive, então

- caso a partícula salte para algum sítio do nível n e não encontre qualquer partícula que já pertença a $\tilde{\xi}_n$, então esta partícula assim como as partículas por ela ativadas pertencem a $\tilde{\xi}_n$;
- caso contrário, a partícula é apagada.

Note-se que o processo $\tilde{\xi}_k$ foi construído de tal modo que cada sítio pode ser ocupado por, no máximo, $s + 1$ partículas de $\tilde{\xi}_k$. Logo, segue que o número médio de descendentes de cada partícula de $\tilde{\xi}_k$ é maior ou igual a

$$\frac{k - 1 - s}{k} (\mathbf{E}\eta^{(s)} + 1)p$$

(o “pior caso” para uma partícula de $\tilde{\xi}_n$ é quando ela divide seu sítio com outras s partículas de $\tilde{\xi}_n$ e estas partículas, todas, sobreviveram e já saltaram para sítios distintos do nível $n + 1$). Portanto, como $p > (\mathbf{E}\eta^{(s)} + 1)^{-1}$, escolhendo k suficientemente grande, o processo $\tilde{\xi}_k$ domina um processo de ramificação supercrítico. Isto termina a demonstração. Λ

A fim de provar o teorema 2.7, necessitamos dos seguintes fatos sobre projeções de modelos de percolação. Seja $\mathcal{H}^d := \{H_x^d : x \in \mathbb{Z}^d\}$ uma coleção de conjuntos aleatórios tal que $x \in H_x^d$ e, além disso, os conjuntos $H_x^d - x$, $x \in \mathbb{Z}^d$, sejam i.i.d.. Utilizando os conjuntos de $\mathcal{H}^d$, definimos um processo de percolação orientada em $\mathbb{Z}^d$ analogamente ao que foi feito para o modelo de reação em cadeia: se existir uma seqüência infinita de sítios distintos, $0 = x_0, x_1, x_2, \dots$, tal que $x_{j+1} \in H_{x_j}^d$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots$, dizemos que o aglomerado da origem é infinito, ou, equivalentemente, que $\mathcal{H}^d$ sobrevive.

Sejam $\Lambda := \{x \in \mathbb{Z}^d : x^{(k)} = 0 \text{ para } k \geq 3\} \subset \mathbb{Z}^d$ uma cópia de $\mathbb{Z}^2$ imersa em $\mathbb{Z}^d$ e $\mathcal{P} : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Lambda$ a projeção nas duas primeiras coordenadas. Seja $\mathcal{H}^2 := \{H_x^2 : x \in \Lambda\}$ uma coleção de conjuntos aleatórios tal que $x \in H_x^2$ e, além disso, os conjuntos $H_x^2 - x$, $x \in \Lambda$, sejam i.i.d.. Analogamente ao que fizemos para $\mathcal{H}^d$, define-se um processo de percolação orientada para a coleção $\mathcal{H}^2$.

Lema 2.5. *Se existe um acoplamento entre H_0^d e H_0^2 tal que*

$$\mathcal{P}(H_0^d) \supset H_0^2, \quad (2.8)$$

então

$$\mathbf{P}[\mathcal{H}^d \text{ sobrevive}] \geq \mathbf{P}[\mathcal{H}^2 \text{ sobrevive}].$$

Demonstração. Lembramos, inicialmente, que o processo $\mathcal{H}^d$ sobrevive se, e somente se, existir uma seqüência infinita de sítios distintos

$$0 = x_0, x_1, x_2, \dots$$

tal que, qualquer que seja j ,

$$x_{j+1} \in H_{x_j}^d.$$

Pode-se fazer uma construção semelhante para o processo $\mathcal{H}^2$.

Suponhamos que o processo $\mathcal{H}^2$ sobreviva, ou seja, suponhamos que exista uma seqüência infinita de sítios distintos de Λ ,

$$0 = y_0, y_1, y_2, \dots$$

tal que, qualquer que seja j ,

$$y_{j+1} \in H_{y_j}^2.$$

Temos que, qualquer que seja j , existe $x_j \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\mathcal{P}(x_j) = y_j$ e, além disso,

$$x_{j+1} \in H_{x_j}^d.$$

Note-se que, como os sítios $0 = y_0, y_1, y_2, \dots$ são distintos, com certeza os sítios $0 = x_0, x_1, x_2, \dots$ também são distintos. Portanto, sempre que o processo $\mathcal{H}^2$ sobrevive, o mesmo ocorre com o processo $\mathcal{H}^d$, o que conclui a demonstração.

Λ

O teorema 2.7 é consequência do seguinte lema.

Lema 2.6. *Seja*

$$K := \{x \in Z^d : \max_{1 \leq i \leq d} |x^{(i)}| \leq 1\},$$

e considere-se o modelo $RC(Z^d, p, \eta)$ com $p > (1 + \mathbf{E}\eta)^{-1}$ restrito a K (o que significa que quando uma partícula salta fora de K , ela é apagada).

Existem constantes $d_0, a > 0$ e $\mu > 1$ tais que, se $d \geq d_0$, então, com probabilidade maior que a , no tempo $\sqrt{d}$, temos mais que $\mu^{\sqrt{d}}$ partículas ativas em K .

Demonstração. Observe-se que é suficiente demonstrar o lema para o modelo de reação em cadeia $RC(Z^d, p, \eta^{(s)})$ com $\eta^{(s)}$ definida por (2.7), sendo s escolhido de modo que tenhamos $p > (1 + \mathbf{E}\eta^{(s)})^{-1}$. Sejam os conjuntos S_k definidos por

$$S_k := \left\{x \in K : \sum_{i=1}^d |x_i| = k\right\},$$

$k = 0, \dots, d$. Definimos ξ_k como sendo o conjunto de partículas ativas que pertencem a S_k no instante k . Como na prova do teorema 2.6, a idéia é mostrar que até o tempo $\sqrt{d}$ o processo ξ_k domina um processo de ramificação supercrítico a ser definido posteriormente.

Sejam $x \in S_k$ e $y \in S_{k+1}$ tais que $\|x - y\|_1 = 1$, onde $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x^{(i)}|$. Note-se que, se o sítio x contém uma partícula ativa no instante k , então esta partícula pode saltar sobre y no próximo instante de tempo. Com isso em mente, definimos, para cada $x \in S_k$

$$I_x := \{z \in S_k : \sum_{i=1}^d \mathbf{1}_{\{|x^{(i)} - z^{(i)}| \neq 0\}} = 2 \text{ e, além disso, } \|x - z\|_1 = 2\}$$

chamado o conjunto dos inimigos de x . Observe-se que, dados $x \in S_k$ e $z \in I_x$, existe um sítio $y \in S_{k+1}$ tal que $\|x - y\|_1 = \|z - y\|_1 = 1$, o que significa que se os sítios x e z possuem partículas ativas no instante k , então estas partículas podem saltar no mesmo sítio no próximo instante de tempo. Além disso, y é o único sítio de S_{k+1} com essa propriedade e existem exatamente $k + 1$ sítios em S_k cujas partículas podem saltar em y no instante $k + 1$. Daí, segue que $|I_x| = 2k(d - k)$.

Seja

$$D_x := \{y \in S_{k+1} : \|x - y\|_1 = 1\}$$

o conjunto dos descendentes de x . Pode-se verificar que $|D_x| = 2(d - k)$.

Finalmente, definimos, para cada $y \in S_{k+1}$,

$$A_y := \{x \in S_k : \|x - y\|_1 = 1\}.$$

denominado o conjunto dos ancestrais de y . Note-se que, se $x \in S_k$, temos que

$$I_x = \bigcup_{y \in D_x} (A_y \setminus \{x\}) \quad \text{é uma união disjunta.} \quad (2.9)$$

Observe-se que um único sítio $x \in S_k$ pode conter diversas partículas de ξ_k .

Como na prova do teorema 2.6, definiremos um processo $\tilde{\xi}_k \subset \xi_k$ do seguinte modo. A partícula do sítio 0 pertence a $\tilde{\xi}_0$. Se no instante k o conjunto $\tilde{\xi}_k \subset S_k$ já foi construído, então, no instante $k + 1$ o conjunto $\tilde{\xi}_{k+1} \subset S_{k+1}$ é construído do seguinte modo. Ordenamos as partículas de $\tilde{\xi}_k$ e permitimos que elas saltem obedecendo a ordem estabelecida. Caso uma partícula sobreviva, então

- se a partícula salta em algum sítio de S_{k+1} e não encontra aí qualquer partícula que já pertence a $\tilde{\xi}_{k+1}$ então, esta partícula assim como todas as partículas por ela recém ativadas farão parte de $\tilde{\xi}_{k+1}$;
- caso contrário, a partícula é apagada.

Dado $x \in S_k$ definimos $\mathcal{X}(x)$ como sendo o número de partículas de $\tilde{\xi}_k$ no sítio x . Note-se que, por construção, $0 \leq \mathcal{X}(x) \leq s + 1$ para todo x e todo k .

Se $x \in S_k$ e $y \in S_{k+1}$, denota-se por $(x \rightarrow y)$ o evento

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}(x) \geq 1 \text{ e, pelo menos uma partícula} \\ \text{de } \tilde{\xi}_k \text{ salta de } x \text{ para } y \text{ no tempo } k + 1 \end{array} \right\}$$

Dado $y \in D_x$ seja ζ_{xy}^k a função indicadora do evento

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{existe } z \in I_x \text{ tal que} \\ \mathcal{X}(z) \geq 1 \text{ e } (z \rightarrow y) \end{array} \right\}.$$

Tomando $k < \sqrt{d}$ tem-se que

$$\mathbf{P}[\zeta_{xy}^k = 1] \leq \mathbf{P}[\zeta_{xy}^k = 1 \mid \mathcal{X}(x') = s+1 \text{ para todo } x' \in I_x] \leq \frac{C_1 k}{d} \leq C_1 (\sqrt{d})^{-1}$$

para uma certa constante positiva C_1 . Logo, dado $\sigma > 0$ é possível escolher d tão grande que, definindo

$$\mathbf{P}^*[\cdot] := \mathbf{P}[\cdot \mid \mathcal{X}(z) = s + 1 \ \forall \ z \in \mathbf{l}_x],$$

segue que $\mathbf{P}^*[\zeta_{xy}^k = 1] < \sigma$ caso $k \leq \sqrt{d}$. Com esta escolha de d , se ζ_x^k é a função indicadora do evento

$$\{|\mathbf{D}_x \cap \{y \in \mathbf{S}_{k+1} : \text{ existe } z \in \mathbf{S}_k \text{ tal que } (z \rightarrow y)\}| > 2\sigma d\},$$

temos que

$$\mathbf{P}[\zeta_x^k = 1] = \mathbf{P}\left[\sum_{y \in \mathbf{D}_x} \zeta_{xy}^k > 2\sigma d\right].$$

Note-se que, por (2.9) as variáveis aleatórias $\{\zeta_{xy}^k : y \in \mathbf{D}_x\}$ são independentes com respeito a $\mathbf{P}^*$. Portanto, utilizando-se o princípio dos grandes desvios ([22], pag. 68), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\zeta_x^k = 1] &\leq \mathbf{P}^*\left[\sum_{y \in \mathbf{D}_x} \zeta_{xy}^k > 2\sigma d\right] \\ &= \mathbf{P}^*\left[\frac{\sum_{y \in \mathbf{D}_x} \zeta_{xy}^k}{2(d-k)} > \frac{2d\sigma}{2(d-k)}\right] \\ &\leq \mathbf{P}^*\left[\frac{\sum_{y \in \mathbf{D}_x} \zeta_{xy}^k}{2(d-k)} > \sigma\right] \\ &\leq \exp\{-2C_2(d-k)\} \\ &\leq \exp\{-C_3d\}, \end{aligned}$$

para certas constantes positivas C_2, C_3 , que dependem apenas de σ . Seja B o evento definido por

$$B := \bigcup_{k=1}^{\sqrt{d}} \bigcup_{x \in \mathbf{S}_k} \{\zeta_x^k = 1\}.$$

Como $\eta^{(s)} \leq s$ temos que $|\tilde{\xi}_k| \leq (s+1)^{k+1}$. Logo,

$$\mathbf{P}[B] \leq \sqrt{d} \times (s+1)^{\sqrt{d}} \exp\{-C_3 d\},$$

e, portanto, $\mathbf{P}[B]$ pode ser feita arbitrariamente pequena se σ for suficientemente pequeno e d , suficientemente grande.

Suponhamos que o evento B^c ocorra. Neste caso, uma vez que cada sítio de K pode ser ocupado por, no máximo, $(s+1)^{k+1}$ partículas de $\tilde{\xi}_k$, para cada $x \in S$ temos, pelo menos, $2(d - \sqrt{d}) - 2\sigma d$ *sítios disponíveis* (ou seja, sítios que não contém partículas de $\tilde{\xi}_k$) em S_{k+1} para onde uma partícula de $\tilde{\xi}_k$, que esteja no sítio x , pode saltar. Portanto, segue que, até o instante $\sqrt{d}$, o processo $\tilde{\xi}_k$ domina um processo de ramificação cujo número médio de descendentes por indivíduo é maior ou igual a

$$\frac{(2(d - \sqrt{d}) - 2\sigma d - s)(\mathbf{E}\eta^{(s)} + 1)p}{2d}. \quad (2.10)$$

Se σ é suficientemente pequeno e d , suficientemente grande de modo que (2.10) seja maior que 1, o processo $\tilde{\xi}_k$ domina um processo de ramificação supercrítico até o instante $\sqrt{d}$. O lema segue uma vez que, com probabilidade positiva, a população de um processo de ramificação supercrítico cresce exponencialmente (cf. [5], pag. 213). Λ

Teorema 2.7

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_c(Z^d, \eta) = \frac{1}{1 + \mathbf{E}\eta}.$$

Demonstração. Seja $Z^d = \Lambda \times Z^{d-2}$ onde Λ é uma cópia de Z^2 imersa em Z^d dada por

$$\Lambda := \{x \in Z^d : x^{(i)} = 0 \text{ para } i \geq 3\}.$$

Para cada $M \in \mathbb{N}$, definimos o quadrado lado M , $\Lambda_M \subset \Lambda$, por

$$\Lambda_M := \{x \in \Lambda : \max(|x^{(1)}|, |x^{(2)}|) \leq M\}.$$

Dado $x \in \Lambda_M$, definimos a reta $\ell_x \subset Z^d$, ortogonal a Λ , passando por x , como

$$\ell_x := \{y \in Z^d : y^{(1)} = x^{(1)}, y^{(2)} = x^{(2)}\}.$$

Pelo lema 2.6, caso $d \geq d_0$, no instante $\sqrt{d}$, temos mais que $\mu^{\sqrt{d}}$ partículas ativas ($\mu > 1$) em $K = \{x \in Z^d : \max_{1 \leq i \leq d} |x^{(i)}| \leq 1\}$ com probabilidade maior que $a > 0$. Logo, para cada sítio x de Λ_M , a probabilidade de que pelo menos uma dentre $\mu^{\sqrt{d}}$ partículas atinja ℓ_{x_i} após, no máximo, $2M + 2$ passos é maior que

$$1 - \left(1 - \left(\frac{p}{2d}\right)^{2M+2}\right)^{\mu^{\sqrt{d}}}.$$

Assim, definindo

$$a' := \mathbf{P}[\ell_x \text{ é atingida por alguma partícula partindo de } K, \text{ para todo } x \in \Lambda_M, \\ |K \text{ contém mais que } \mu^{\sqrt{d}} \text{ partículas ativas}],$$

obtemos que, para M fixado,

$$a' \geq 1 - (2M + 1)^2 \left(1 - \left(\frac{p}{2d}\right)^{2M+2}\right)^{\mu^{\sqrt{d}}}$$

Assim, a' fica arbitrariamente próximo de 1 se escolhermos d convenientemente. Portanto, temos que, com probabilidade no mínimo $aa'\mathbf{P}[\eta \geq 1]$ a projeção das trajetórias das partículas de K enchem o quadrado Λ_M , onde M pode ser escolhido arbitrariamente grande.

Observe-se que a construção acima pode ser feita para todos os sítios z de 3Λ e, caso $x, y \in 3\Lambda$, $x \neq y$, as construções começando de x e de y são independentes, uma vez que $(K + x) \cap (K + y) = \emptyset$. Construamos, então, o seguinte modelo de percolação: dado $x \in 3\Lambda$, todos os sítios do quadrado $x + \Lambda_M$ são selecionados com probabilidade $aa'\mathbf{P}[\eta \geq 1]$. Do mesmo modo que na demonstração do teorema 2.3, pode-se provar que o modelo em Λ percola com probabilidade positiva caso M seja suficientemente grande. Usando o lema 2.5 obtemos que o modelo original (em Z^d) sobrevive com probabilidade positiva, obtendo, portanto, o resultado. Λ

3 Apêndice

3.1 Teoria ergódica

Dentro do contexto deste trabalho, os sistemas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \sigma)$, objetos de estudo da teoria ergódica, podem ser descritos do seguinte modo. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório formam o *espaço de estados* do sistema, denotado por $\Omega = \{\omega = (\omega_k) : k \in \mathbb{I}\}$, onde $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{I} = \mathbb{N}$. A σ -álgebra $\mathcal{F}$ é a gerada pelos eventos cilíndricos. A probabilidade $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é definida inicialmente para os eventos cilíndricos e, posteriormente, estendida a todo o conjunto $\mathcal{F}$ através do teorema de extensão de Kolmogorov (cf. [22], pag. 161). A evolução do sistema é dada pela função mensurável $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ que atua do seguinte modo: $(\sigma\omega)_k = \omega_{k+1}$. A lei do sistema não muda com o passar do tempo, ou seja, a função σ preserva medida:

$$\text{para todo } A \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{P}[\sigma^{-1}A] = \mathbf{P}[A].$$

O evento A é *invariante* (para o sistema $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \sigma)$) caso $\mathbf{P}[\sigma^{-1}A \Delta A] = 0$. O sistema é *ergódico* se todo evento invariante possuir medida zero ou um.

Teorema 3.1. ([22], pag. 381). *Se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \sigma)$ é ergódico e X é uma variável aleatória tal que $\mathbf{E}|X| < \infty$, então, quase certamente*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} X(\sigma^k \omega) = \mathbf{E}X$$

Prova-se que um sistema é ergódico se, e somente se, dados $A, B \in \mathcal{F}$, tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}[\sigma^{-k} A \cap B] = \mathbf{P}[A]\mathbf{P}[B]. \quad (3.1)$$

Para a demonstração veja-se, por exemplo, [22], pag. 384.

O sistema $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \sigma)$ é (fortemente) *misturador* caso, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{F}$, tivermos *mixing.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}[\sigma^{-n} A \cap B] = \mathbf{P}[A]\mathbf{P}[B], \quad (3.2)$$

ou seja, um sistema é misturador caso eventos distantes no tempo possuam pequena correlação, conforme (3.2). Note-se que, de (3.1) e (3.2) segue que todo sistema misturador é ergódico. Para que um sistema seja misturador basta que (3.2) valha em uma álgebra geradora de $\mathcal{F}$ (cf. [19], pag. 58).

Seja (ξ_n) uma seqüência estacionária de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. Sejam Ω o espaço de todas as realizações possíveis de (ξ_n) , $\mathcal{F}$ a σ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos de Ω e $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ a probabilidade induzida pela seqüência (ξ_n) (cf. [22], pag 384). Seja $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ definida por $(\sigma\omega)_k = \omega_{k+1}$. Dizemos que a seqüência (ξ_n) é ergódica (resp. misturadora) caso o sistema $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \sigma)$ for ergódico (resp. misturador).

Proposição 3.1. *A seqüência (ξ_n) definida na demonstração do teorema 2.1 é misturadora.*

Demonstração. Sejam

$$A := \{\xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \dots, \xi_k = a_k\},$$

$$B(l) := \{\xi_{k+l} = b_0, \xi_{k+l+1} = b_1, \dots, \xi_{k+l+r} = b_r\}.$$

Temos que verificar que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}[B(l)|A] = \mathbf{P}[B(0)]. \quad (3.3)$$

Lema 3.1. *Na verificação de (3.3) basta considerar o caso em que todos os a_i 's e b_j 's são iguais a um.*

Demonstração do lema 3.1. Suponhamos que 3.3 se cumpra no caso particular do lema 3.1. Seja $B(l) = \{\xi_{k+l} = 0\}$. Temos que

$$\mathbf{P}[B(l)|A] = 1 - \mathbf{P}[\xi_{l+k}|A] \rightarrow$$

$$1 - (1 - \mathbf{P}[B(0)]) = \mathbf{P}[B(0)]$$

quando $l \rightarrow \infty$.

Para $B(l) = \{\xi_{l+k} = 0, \xi_{l+k+1} = 1\}$, temos que

$$\mathbf{P}[B(l)|A] = \mathbf{P}[\xi_{k+l+1} = 1|A] - \mathbf{P}[\xi_{k+l+1} = 1, \xi_{k+l} = 1|A] \rightarrow$$

$$\mathbf{P}[\xi_2 = 1] - \mathbf{P}[\xi_2 = 1, \xi_1 = 1] = \mathbf{P}[B(0)]$$

quando $l \rightarrow \infty$.

A demonstração do caso geral é semelhante e será, portanto, omitida.

Λ

Verificação de (3.3) no caso $a_i = b_j = 1$.

Temos que

$$\mathbf{P}[B(0)] = \left(\prod_{y \geq l} (1 - \mathbf{P}[y \in R_0]) \right) \mathbf{P}[B(l)|A].$$

Logo, como

$$\prod_{y \geq 0} (1 - \mathbf{P}[y \in R_0]) > 0,$$

segue que

$$\prod_{y \geq l} (1 - \mathbf{P}[y \in R_0]) \rightarrow 1$$

quando $l \rightarrow \infty$, o que conclui a prova da proposição 3.1.

Λ

3.2 Percolação

O modelo de percolação por arestas no grafo $G = (V, A)$ é definido do seguinte modo: cada aresta $a \in A$ é *aberta* com probabilidade p e *fechada* com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais arestas de G . Associamos o valor 0 a uma aresta fechada e o valor 1 a uma aresta aberta. Para cada p fixado, define-se, no espaço $\Omega; = \{\omega = (\omega(a)) : a \in A\}$, formado

pelas listas de zeros e uns indexadas pelos elementos de A , a medida produto dada por $\mathbf{P}_p[\omega(a) = 1] = p$, onde a é uma aresta qualquer de G . Um caminho aberto (na configuração ω) ligando os sítios x e y é uma seqüência de vértices adjacentes $x = v_0, v_1, \dots, v_n = y$ tais que, para todo i , $\omega(\{v_i, v_{i+1}\}) = 1$. O aglomerado do sítio x (relativamente à configuração ω) é o conjunto aleatório $C(x)$ formado pelos sítios y tais que existe um caminho aberto (na configuração ω) ligando x até y .

Seja $\theta(p)$ a função definida por

$$\theta(p) := \mathbf{P}_p[|C(0)| = \infty].$$

Define-se o parâmetro crítico do modelo de percolação por arestas no grafo G do seguinte modo:

$$p_c := \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

Dizemos que o modelo de percolação por arestas no grafo G apresenta *transição de fase* caso

$$0 < p_c < 1.$$

O modelo de percolação por sítios no grafo G é definido de modo análogo.

Prova-se que os modelos de percolação por arestas e percolação por sítios nos grafos Z^d , $d \geq 2$, apresentam transição de fase. As demonstrações podem ser encontradas em [9].

No artigo [3], Durrett prova um resultado que é utilizado na demonstração do teorema 1.2. A fim de enunciar o resultado contido em [3], necessitamos de algumas definições que serão dadas a seguir.

Seja $\vec{G} = (V, \vec{A})$ o grafo *orientado* tal que

$$V = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + n \text{ é par e } n \geq 0\}.$$

Definimos $\vec{A}$ pondo, para cada sítio (m, n) de V , uma aresta *orientada* ligando (m, n) a $(m + 1, n + 1)$ e a $(m - 1, n - 1)$.

Figura 12: o grafo $\vec{G}$

Cada uma das arestas orientadas do grafo assim construído é *aberta* com probabilidade p e *fechada* com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais. Fixado o parâmetro p e dada uma realização ω do modelo, dizemos que o caminho

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

é *aberto* (no nível p , relativamente a ω) caso as arestas (v_i, v_{i+1}) sejam todas

abertas.

Dados $x, y \in V$, denota-se por $x \rightarrow y$ o evento

$$\{\text{existe um caminho aberto ligando os sítios } x \text{ e } y\}$$

e define-se o *aglomerado* do sítio $\mathbf{0}$ no nível p como sendo o conjunto aleatório

$$C(p) := \{x \in V : \mathbf{0} \rightarrow x\}.$$

É de extremo interesse o estudo dos eventos

$$\{|C(p)| = \infty\}$$

quando se faz variar o parâmetro p . Definimos o *parâmetro crítico* do modelo como

$$\vec{p}_c := \sup\{p : \mathbf{P}[|C(p)| = \infty] = 0\}.$$

Prova-se que $0 < \vec{p}_c < 1$ (cf. [3]).

Seja

$$\xi_n(p) := \{x : (x, n) \in C(p)\}$$

o conjunto aleatório formado pelos sítios que se ligam ao sítio $\mathbf{0}$ e que, além disso, pertencem à reta $\{(x, y) \in Z^2 : y = n\}$.

Definimos

- $r_n := \sup \xi_n, \sup \emptyset = -\infty,$

- $\ell_n := \inf \xi_n$, $\inf \emptyset = \infty$,

ou seja, r_n e ℓ_n são os extremos direito e esquerdo de ξ_n^0 , respectivamente.

Sejam

- $\bar{\xi}_n := \{x : (x, y) \in V \text{ e existe } y \leq 0 \text{ tal que } (y, 0) \rightarrow (x, n)\}$,
- $\bar{r}_n := \sup \bar{\xi}_n$,
- $\alpha := \inf_{n \geq 1} \mathbf{E} \bar{r}_n / n$.

Com as definições dadas acima, podemos agora enunciar o resultado contido em [3] que é utilizado na prova do teorema 1.2.

Teorema 3.2. *Se o evento $\{|C(p)| = \infty\}$ ocorre, temos que*

$$\begin{aligned} \frac{r_n}{n} &\rightarrow \alpha, \\ \frac{\ell_n}{n} &\rightarrow -\alpha, \end{aligned}$$

quase certamente. Além disso,

$$\vec{p}_c = \inf\{p : \alpha(p) > 0\}.$$

3.3 Grandes desvios

A fim de demonstrar o lema 1.3, necessitamos do seguinte resultado devido a Nagaev (teorema 1.1, pag. 784 de [18]):

Teorema 3.3. *Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes; $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto de números positivos e*

$$A(t; 0, Y) := \sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} |u|^t dF_i(u)$$

onde $F_i(u) = \mathbf{P}[X_i < u]$ e $0 < t \leq 1$.

Temos a seguinte desigualdade:

$$\mathbf{P}[X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq x] \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}[X_i > y_i] + \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log\left(\frac{xy^{t-1}}{A(t; 0, Y)} + 1\right)\right)$$

onde $y = \max_i y_i$.

Como consequência imediata, temos o seguinte resultado:

Lema 1.3 *Sejam $\{X_i, i \geq 1\}$ variáveis aleatórias i.i.d., positivas e assumindo valores inteiros, tais que existem $C_1 > 0$ e $0 < \alpha < 1$ satisfazendo*

$$\mathbf{P}[X_i \geq n] \leq C_1 \exp\{-n^\alpha\}. \quad (3.4)$$

Então, existem $a > 0$, $0 < \beta < 1$ e $C_2 > 0$ tais que, para todo n

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \geq an\right] \leq C_2 \exp\{-n^\beta\}.$$

Demonstração. Usando a notação do teorema 3.3, tomemos $y_i = \sqrt{n}$, $t = 1$ e $x = an$, onde a é escolhido tão grande que

$$\log \left(1 + \frac{an}{A(1; 0, Y)} \right) > 1.$$

Aplicando o teorema 3.3, obtém-se o resultado.

Λ

Referências

- [1] O.S.M. ALVES, F.P. MACHADO, S.YU. POPOV (2001) *The shape theorem for the frog model*. (submetido para publicação)
- [2] O.S.M. ALVES, F.P. MACHADO, S.YU. POPOV (2001) *Phase transition for the frog model*. (submetido para publicação)
- [3] R. DURRETT (1984) Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.* **12**, (4), 999–1040.
- [4] R. DURRETT (1988) *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*. Wadsworth.
- [5] R. DURRETT (1991) *Probability Theory and Examples*. Pacific Grove, California.
- [6] R. DURRETT (1980) On the growth of the one dimensional contact process. *Ann. Probab.* **8**, 890–907
- [7] R. DURRETT, T.M. LIGGETT (1981) The shape of the limit set in Richardson’s growth model. *Ann. Probab.* **9** (2), 186–193.
- [8] M. EDEN (1961) A two dimensional growth process. *Proc. 4th Berkeley Symp.* **vol. 4**.
- [9] G. GRIMMETT (1999) *Percolation*. (2nd. ed.) Springer, Berlin.
- [10] B.D. HUGHES (1995) *Random Walks and Random Environments*, *vol. 1*. Clarendon press, Oxford.

- [11] B.D. HUGHES (1995) *Random Walks and Random Environments*, vol. 2. Clarendon press, Oxford.
- [12] H. KESTEN (1982) *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhäuser, Boston.
- [13] J.F.C. KINGMAN (1976) Subadditive Processes. *Lecture Notes in Mathematics*. **539**, 167–223, Springer, Berlin.
- [14] G.F. LAWLER (1991) *Intersections of Random Walks*. Birkhäuser Boston.
- [15] T.M. LIGGETT (1985) An improved subadditive ergodic theorem. *Ann. prob.* **13**, 1279–1285
- [16] M.V. MENSNIKOV (1985) Estimates for percolation thresholds for lattices in $\mathbb{R}^d$. *Soviet Math. Dokl.* **32**, (2), 368–370.
- [17] M.V. MENSNIKOV (1987) Qualitative estimates and rigorous inequalities for critical points of a graph and its subgraphs. *Probab. Theory Appl.* **32**, 544–547.
- [18] S.V. NAGAEV (1979) Large deviations of sums of independent random variables. *Ann. Prob.* **7** (5), 745–789.
- [19] K.PETERSEN (1983) *Ergodic Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [20] S.YU. POPOV (2001) Frogs in random environment. *J. Statist. Phys.* **102** (1/2), 191–201.

- [21] D. RICHARDSON (1973) Random growth in a tessellation. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **74**, 515–528.
- [22] A. SHIRYAEV (1989) *Probability* (2nd. ed.). Springer, New York.
- [23] A. TELCS, N.C. WORMALD (1999) Branching and tree indexed random walks on fractals. *J. Appl. Prob.* **36**, (4), 999–1011.