**NOVAS QUOTAS INFERIORES
PARA A PROBABILIDADE CRÍTICA DO
PROCESSO DE PERCOLAÇÃO ORIENTADA
POR MEIO DE CADEIAS DE MARKOV
NUMA FAIXA DE MÚLTIPLAS VIAS**

Thomas Logan Ritchie

★

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Vladimir Belitsky** ☆

- São Paulo, dezembro de 2000 -

NOVAS QUOTAS INFERIORES
PARA A PROBABILIDADE CRÍTICA DO
PROCESSO DE PERCOLAÇÃO ORIENTADA
POR MEIO DE CADEIAS DE MARKOV
NUMA FAIXA DE MÚLTIPLAS VIAS

Este exemplar corresponde à versão final
da dissertação de mestrado de Thomas Logan Ritchie,
corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 16 de março de 2001.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vladimir Belitsky -IME-USP
- Prof. Dr. Mário José de Oliveira - IF-USP
- Prof^a. Dra. Nancy Garcia Lopes - IMECC-UNICAMP

Agradecimentos

Ao CNPQ pelo apoio financeiro e ao Professor Mikhail Menshikov por sua contribuição à formulação deste trabalho.

Resumo:

Apresentamos uma seqüência decrescente de passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$, que domina a *margem direita* do processo de percolação orientada. Através do conceito de *cadeia de Markov numa faixa*, descrevemos um algoritmo que gera uma seqüência crescente de quotas inferiores que converge para a probabilidade crítica do processo de percolação orientada em duas dimensões. Calculando numericamente os dez primeiros termos dessa seqüência, obtivemos uma nova quota inferior para a probabilidade crítica deste processo: $p_c \geq 0,63328$.

Abstract:

We present a coupled decreasing sequence of random walks on $\mathbb{Z}$ that dominates the edge process of oriented-bond percolation in two dimensions. Using the concept of *Markov chain in a strip*, we construct an algorithm that generates an increasing sequence of lower bounds that converges to the critical probability of oriented-bond percolation. Numerical calculations of the first ten lower bounds thereby generated lead to an improved, ie higher, lower bound to this critical probability, viz. $p_c \geq 0.63328$.

Sumário

1	Introdução	1
2	Definições e Construções	2
2.1	O Ambiente	2
2.2	O Espaço de Probabilidade	3
2.3	Os Processos	3
2.3.1	O Processo de Contato Fortalecido em Tempo Discreto (PCFTD)	3
2.3.2	O Processo da Margem Direita (PMD)	4
2.3.3	As Cadeias de Markov Induzidas	5
2.4	Probabilidades Críticas	7
3	O Teorema de Convergência e Resultados Preliminares	8
4	Determinação das Probabilidades Críticas	12
4.1	Determinação Algébrica das Probabilidades Críticas	12
4.1.1	A Probabilidade Crítica de Ordem Zero, $p_c^{(0)}$	13
4.1.2	A Probabilidade Crítica de Primeira Ordem, $p_c^{(1)}$	13
4.1.3	A Probabilidade Crítica de Segunda Ordem, $p_c^{(2)}$	14
4.2	Determinação Numérica das Probabilidades Críticas	14
5	Simulações	17
5.1	Obtenção de Quotas Inferiores via Simulação	17
5.1.1	Determinação de $p_c^{(5)}$	18
5.1.2	Determinação de $p_c^{(9)}$	20
5.1.3	Determinação de $p_c^{(20)}$	22
5.1.4	Determinação de $p_c^{(40)}$	24
5.1.5	Determinação de $p_c^{(100)}$	26
5.1.6	Determinação de $p_c^{(200)}$	28
5.1.7	Determinação de $p_c^{(1000)}$	30
5.2	Ilustração dos Acoplamentos via Simulação	32
A	Programa I	35
B	Programa II	46

Lista de Tabelas

1	Probabilidades críticas obtidas numericamente.	16
2	Probabilidades críticas obtidas por simulação.	17

Lista de Figuras

1	O grafo $\mathcal{G}$, onde os processos estudados serão definidos na Secção 2.3	2
2	Uma realização ω do PCFTD ${}_pX_\bullet^{(2)}$. Os vetores em traço contínuo estão abertos, enquanto os vetores pontilhados estão fechados à propagação da infecção . Os sítios negros estão infectados, os brancos estão saudáveis, enquanto os hachureados foram infectados à <i>força</i>	5
3	(Refere-se ao lema 3.8) Não pode haver infecção à <i>força</i> dentro do paralelograma tracejado. Os processos ${}_pX_\bullet^{(4)}$ e ${}_pX_\bullet^{(\infty)}$ são indistinguíveis nesta região.	10
4	Realizações não acopladas dos processos $.626\overline{X}_n^{(5)}/n$ e $.627\overline{X}_n^{(5)}/n$	18
5	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 4.	19
6	Realizações não acopladas dos processos $.6332\overline{X}_n^{(9)}/n$ e $.6333\overline{X}_n^{(9)}/n$	20
7	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 6.	21
8	Realizações não acopladas dos processos $.638\overline{X}_n^{(20)}/n$ e $.639\overline{X}_n^{(20)}/n$	22
9	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 8.	23
10	Realizações não acopladas dos processos $.641\overline{X}_n^{(40)}/n$ e $.642\overline{X}_n^{(40)}/n$	24
11	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 10.	25
12	Realizações não acopladas dos processos $.643\overline{X}_n^{(100)}/n$ e $.644\overline{X}_n^{(100)}/n$	26
13	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 12.	27
14	Realizações não acopladas dos processos $.6438\overline{X}_n^{(200)}/n$ e $.6439\overline{X}_n^{(200)}/n$	28
15	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 14.	29
16	Realizações não acopladas dos processos $.64450\overline{X}_n^{(1000)}/n$ e $.64452\overline{X}_n^{(1000)}/n$	30
17	Ampliação e detalhe do gráfico na figura 16.	31
18	Realizações acopladas de $.627\overline{X}_n^{(3)}/n$, $.627\overline{X}_n^{(5)}/n$, e $.627\overline{X}_n^{(7)}/n$	32
19	Realizações acopladas de $.629\overline{X}_n^{(6)}/n$, $.630\overline{X}_n^{(6)}/n$, e $.631\overline{X}_n^{(6)}/n$	33
20	Realizações acopladas de $\frac{\sigma_0}{p_c^{(2)}}\overline{X}_n^{(2)}/n$ e $\frac{\sigma_3}{p_c^{(2)}}\overline{X}_n^{(2)}/n$	34

1 Introdução

Percolação orientada em duas dimensões, ou processo de contacto em tempo discreto em $\mathbb{Z}$, é uma família uniparamétrica de processos estocásticos com valores em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$; onde o parâmetro p , a probabilidade de propagação local de infecção, assume valores em $[0, 1]$. Sabe-se que esta família apresenta uma transição de fase, quando o valor de p varia de 0 a 1: se $p < p_c$ ¹, o processo se extingue quase certamente; enquanto que, se $p > p_c$, o processo sobrevive com probabilidade positiva (veja [1] por exemplo).

Como é comum na teoria de fenômenos críticos, não se conhece uma expressão analítica para p_c . Desta forma o seu valor tem sido estimado tanto na literatura física, como na literatura matemática. [1, Sec.6]

Até o presente momento, as melhores estimativas rigorosas² inferior e superior para p_c são respectivamente 0,6298 e 2/3. [2]

Neste trabalho apresentamos um *algoritmo* que gera uma sequência crescente de quotas inferiores que converge para a probabilidade crítica do processo de percolação orientada em duas dimensões. Calculando os dez primeiros termos desta sequência, pudemos estabelecer o valor de 0,63328 como quota inferior para p_c , o qual representa uma melhora em relação ao valor de 0,6298.

Mais especificamente:

1. Construiu-se uma sequência numérica de quotas inferiores para p_c , $\{p_c^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$, nos seguintes passos:
 - (a) a partir de uma sequência decrescente³ (em i) de passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$, $\{\bar{X}_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que dominam o *processo da margem direita* da percolação orientada, construiu-se uma sequência (em i) de cadeias de Markov finitas $\{Y_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, cujas probabilidades de transição são expressas em termos de “ p ”⁴, a probabilidade de propagação local de infecção e
 - (b) calculou-se a esperança matemática da variável aleatória $\mathbb{E}(\bar{X}_1^{(i)} - \bar{X}_0^{(i)} | Y_0^{(i)})$, “o salto médio na configuração Y ”, com respeito a $\pi^{(i)}$, a medida estacionária de $Y_\bullet^{(i)}$.
 - (c) $p_c^{(i)}$ foi então definida como o único valor de p que anula a esperança matemática acima. Em outras palavras, quando $p = p_c^{(i)}$, o passeio aleatório $\{\bar{X}_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ não apresenta viés.
2. Mostrou-se que a sequência numérica $\{p_c^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge de modo não decrescente para p_c , ie $p_c^{(i)} \nearrow p_c$. Além disso,
3. as dez primeiras quotas inferiores ($p_c^{(0)}, p_c^{(1)}, \dots, p_c^{(9)}$) foram calculadas numericamente; o que possibilitou aumentar o valor de 0,6298 para 0,63328, como melhor quota inferior para p_c , a probabilidade crítica para o *processo de percolação orientada em duas dimensões*.

¹ “ p_c ” é conhecida como probabilidade crítica do processo de percolação orientada.

² obtidas por métodos matemáticos exatos.

³ o significado exato de “decrescente” ficará claro em termos de acoplamento. (Secção 2)

⁴ polinômios em p , mais precisamente.

2 Definições e Construções

2.1 O Ambiente

Seja $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ o grafo orientado, tendo $\mathcal{V} = \{(n, m) : n \in \mathbb{N} \text{ e } (n + m) \text{ seja par}\}$ como conjunto de vértices, e $\mathcal{E} = \{e_{nm}^l, e_{nm}^r : (n, m) \in \mathcal{V}\}$ como conjunto de elos.

O elo $e_{n,m}^l$ aponta do sítio (n, m) para o sítio $(n + 1, m - 1)$, enquanto o elo $e_{n,m}^r$ aponta do sítio (n, m) para o sítio $(n + 1, m + 1)$ (Figura 1 abaixo). Algumas vezes, faremos a associação *natural* : “ $l \leftrightarrow -1$ / $r \leftrightarrow +1$ ” ao longo deste texto.

É útil interpretar “ n ” como sendo uma coordenada temporal e “ m ” como uma coordenada espacial do grafo $\mathcal{G}$.

$\mathcal{V}_n$ denotará a $n^{\text{ésima}}$ fatia de $\mathcal{V}$, ie $\mathcal{V}_n = \{(n, m) \in \mathcal{V} : n \text{ esteja fixo}\}$, enquanto $\mathbb{Z}_n$ o conjunto dos números inteiros m tais que $(m + n)$ seja par; ie $\mathbb{Z}_n$ é o conjunto dos inteiros de mesma paridade de n .

Nas definições abaixo identificaremos $\mathcal{V}_n$ com $\mathbb{Z}_n$, e $\{0, 1\}^{\mathcal{V}_n}$ com $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}_n}$. Desta forma, o ligeiro abuso de notação : “ $\eta_n(m) \equiv \eta_n(n, m)$, $\eta_n \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}_n}$ ”, deverá ser levado em conta.

Figura 1: O grafo $\mathcal{G}$, onde os processos estudados serão definidos na Secção 2.3 .

2.2 O Espaço de Probabilidade

Seja $\{\xi_{nm}^j : (n, m) \in \mathcal{V}, j \in \{l, r\}\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 1]$, definidas no mesmo espaço de probabilidade abstrato Ω . A partir desta família enumerável e indexada por três índices, construímos, no mesmo espaço Ω , a família (não-enumerável e indexada por quatro índices) de variáveis aleatórias de Bernoulli *iids* (para p fixo):

$$\{p\xi_{n,m}^j : (n, m) \in \mathcal{V}, j \in \{l, r\}, p \in [0, 1]\} \quad (1)$$

tais que

$$p\xi_{n,m}^j = \mathbf{1}_{\{\xi_{nm}^j \leq p\}} \quad (2)$$

Segue diretamente de (2) que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(p\xi_{nm}^j = 1) = p & (a) \\ \mathbb{P}(p\xi_{nm}^j = 0) = 1 - p := q & (b) \end{cases} \quad (3)$$

, assim como o **Acoplamento Fundamental**:

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow p_1\xi_{nm}^j(\omega) \leq p_2\xi_{nm}^j(\omega), \forall \omega \in \Omega, (n, m) \in \mathcal{V}, j \in \{l, r\} \quad (4)$$

Observamos que $p\xi_{nm}^l = 1$, pode ser interpretado como um canal aberto à propagação de uma infecção do sítio (n, m) ao sítio $(n+1, m-1)$; $p\xi_{nm}^r = 0$, como um canal obstruído à propagação da infecção do sítio (n, m) ao $(n+1, m+1)$; e assim em diante...

2.3 Os Processos

2.3.1 O Processo de Contato Fortalecido em Tempo Discreto (PCFTD)

A configuração $\eta_n \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}_n}$, é interpretada como o estado de uma *infecção* na fatia $\mathcal{V}_n$:

$$\begin{cases} \eta_n(m) = 1: \text{ o sítio } m \text{ está infectado no instante } n \\ \eta_n(m) = 0; \text{ o sítio } m \text{ está saudável no instante } n \end{cases} \quad (5)$$

Particularmente, $\eta_0 \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}_0}$ denotará um estado inicial da infecção sobre $\mathcal{V}_0$; o conjunto dos números inteiros pares, de acordo com a secção 2.1 acima.

Neste ponto, chamamos atenção para a seguinte notação, que será utilizada no decorrer deste texto: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Agora, para cada $i \in \overline{\mathbb{N}}$, definimos, por indução sobre n , a sequência de variáveis aleatórias $\{pX_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, assumindo valores em $\{0, 1\}^{\mathcal{V}_n}$, pela

Definição 2.1

- (a) $pX_0^{(i)} := \eta_0$, de modo que $pX_0^{(i)}(m) = \eta_0(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}_0$
- (b) $pX_{n+1}^{(i)}(m) = \sup \left\{ pX_n^{(i)}(m-1) \cdot p\xi_{n,m-1}^r; pX_n^{(i)}(m+1) \cdot p\xi_{n,m+1}^l; \mathbf{1}_{\{p\overline{X}_{n+1}^{(i)} - m > 2i\}} \right\}$,
onde $p\overline{X}_{n+1}^{(i)} = \sup_{m \in \mathbb{Z}_n, j \in \{-1, +1\}} \left\{ (m+j) : pX_n^{(i)}(m) \cdot \xi_{nm}^j = 1 \right\}$

O papel da função indicadora na definição 2.1(b) acima é infectar à *força* todos os sítios à esquerda e a uma distância superior a $2i$ unidades de ${}_p\overline{X}_{n+1}^{(i)}$, o sítio infectado mais à direita no instante $n+1$. É natural, portanto, denominar o processo estocástico $\{{}_pX_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, definido acima, como **Processo de Contacto Fortalecido em Tempo Discreto (PCFTD)** (de i ésima ordem e parâmetro de infecção p). Segue diretamente da definição 2.1 que

(a) quando $i = \infty$, a função indicadora não atua mais, e recupera-se o **Processo de Contacto em Tempo Discreto** habitual, também conhecido como **Percolação Orientada em Duas Dimensões**, como descrito em [1, Secção 2]. De agora em diante, nos referiremos a este processo como $\{{}_pX_n^{(\infty)}\}_{n \in \mathbb{N}}$;

(b) a sequência de PCFTDs $\{{}_pX_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente em i , no seguinte sentido:

$$i \leq j; i, j \in \overline{\mathbb{N}} \Rightarrow {}_pX_n^{(i)}(m)[\omega] \geq {}_pX_n^{(j)}(m)[\omega], \forall \omega \in \Omega, (n, m) \in \mathcal{V}, p \in [0, 1] \quad (6)$$

Em particular, o *Processo de Percolação Orientada* é o mais fraco de todos eles.

Denominaremos a desigualdade 6 acima como **Acoplamento de Primeira Ordem** ou **Acoplamento em i** .

(c) a família de PCFTDs $\{{}_pX_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente em p , no seguinte sentido:

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow {}_{p_1}X_n^{(i)}(m)[\omega] \leq {}_{p_2}X_n^{(i)}(m)[\omega], \forall \omega \in \Omega, (n, m) \in \mathcal{V}, i \in \overline{\mathbb{N}} \quad (7)$$

Denominaremos a desigualdade 7 acima como **Acoplamento de Segunda Ordem** ou **Acoplamento em p** .

Salvo menção em contrário, assumiremos η_0 , o estado inicial de infecção, como sendo a configuração $\mathbf{1}_{\bullet \leq 0} \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}_0}$, dada por

$$\mathbf{1}_{\bullet \leq 0}(m) = \begin{cases} 1, m \leq 0 \\ 0, m > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Quando for o caso, escreveremos $\{\eta X_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ para enfatizar que $\eta_0 = \eta$, onde η representa alguma configuração em $\{0, 1\}^{\mathcal{V}_0}$ (provavelmente distinta de $\mathbf{1}_{\bullet \leq 0}$). Desta forma, todos os símbolos $\{{}_pX_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\mathbf{1}_{\bullet \leq 0} {}_pX_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{1}_{\bullet \leq 0} {}_pX_{\bullet}^{(i)}$, ${}_pX_{\bullet}^{(i)}$ assumem o mesmo significado e, por simplicidade, optaremos sempre pelo último, desde que não incorramos em ambigüidades .

Como é usual em Sistemas de Partículas Interagentes, escreveremos $\eta_n \geq \theta_n$, quando $\eta_n(m) \geq \theta_n(m)$, para todo $m \in \mathbb{Z}_n$.

Também segue da definição 2.1 que, para $\eta, \theta \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}_0}$

$$\eta \geq \theta \Rightarrow \eta X_n^{(i)}(m)[\omega] \geq \theta X_n^{(i)}(m)[\omega], \forall p \in [0, 1], (n, m) \in \mathcal{V}, \omega \in \Omega, i \in \overline{\mathbb{N}} \quad (9)$$

Denominaremos a desigualdade 9 acima como **Acoplamento de Terceira Ordem** ou **Acoplamento na Condição Inicial**.

2.3.2 O Processo da Margem Direita (PMD)

Para um particular PCFTD ${}_pX_{\bullet}^{(i)}$ e assumindo que ${}_p\overline{X}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, a segunda linha da definição 2.1(b) acima define um processo não markoviano em $\mathbb{Z}$ que representaremos por $\{{}_p\overline{X}_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (ou por ${}_p\overline{X}_{\bullet}^{(i)}$ em

Figura 2: Uma realização ω do PCFTD ${}_pX_\bullet^{(2)}$. Os vetores em traço contínuo estão abertos, enquanto os vetores pontilhados estão fechados à propagação da infecção. Os sítios negros estão infectados, os brancos estão saudáveis, enquanto os hachureados foram infectados à força.

forma abreviada).

Na figura 2 abaixo ${}_p\bar{X}_0^{(2)} = 0$, ${}_p\bar{X}_1^{(2)} = -3$, ${}_p\bar{X}_2^{(2)} = -2$, ${}_p\bar{X}_3^{(2)} = -3$, ${}_p\bar{X}_4^{(2)} = -2, \dots$

Novamente, quando $i = \infty$, o *Processo da Margem Direita da Percolação Orientada* descrito em [1] é recuperado. Ao longo deste texto, o termo “*Processo da Margem Direita*” será utilizado *lato sensu*, ie para $i \in \mathbb{N}$.

É interessante interpretar o PMD ${}_p\bar{X}_\bullet^{(i)}$ como um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$.

2.3.3 As Cadeias de Markov Induzidas

Definição 2.2 A cadeia de Markov $\{{}_pY_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ com espaço de estados $\mathcal{S}^{(i)} = \{0, 1\}^{\{2, 4, \dots, 2i\}}$ definida por

$${}_pY_n^{(i)}(2j) = {}_pX_n^{(i)}\left({}_p\bar{X}_n^{(i)} - 2j\right), 1 \leq j \leq i$$

chama-se *Cadeia de Markov Induzida (CMI)* pelo PCFTD ${}_pX_\bullet^{(i)}$.

No que segue, uma configuração genérica $\sigma \in \mathcal{S}^{(i)}$, será indexada por $n \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\}$ de acordo com a equação

$$\sigma = \sigma_n \Leftrightarrow n = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} \sigma(2j) \quad (10)$$

Desta forma, na figura 2 acima ${}_pY_0^{(2)} = \sigma_3$, ${}_pY_1^{(2)} = \sigma_2$, ${}_pY_2^{(2)} = \sigma_3$, ${}_pY_3^{(2)} = \sigma_3$, ${}_pY_4^{(2)} = \sigma_1, \dots$

As probabilidades de transição para a CMI ${}_pY_{\bullet}^{(i)}$

$$q_{lm}^{(i)} = \mathbb{P} \left[{}_pY_{n+1}^{(i)} = \sigma_m \mid {}_pY_n^{(i)} = \sigma_l \right], 0 \leq l, m \leq 2^i - 1 \quad (11)$$

são funções polinomiais em p estritamente positivas no intervalo $(0, 1)$. Logo $\pi^{(i)}$, sua medida estacionária em $\mathcal{S}^{(i)}$, está bem definida.

A notação abreviada

$$\pi_l^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{(i)}(\sigma_l), l = 0, 1, \dots, 2^i - 1$$

será empregada nas definições que seguem.

Neste ponto, de acordo com [3, Sec.3.1], estabelecemos as seguintes definições :

Definição 2.3

$$P_{(l,m,k)}^{(i)}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P} \left[{}_p\overline{X}_{n+1}^{(i)} = {}_p\overline{X}_n^{(i)} + (1 - 2k), {}_pY_{n+1}^{(i)} = \sigma_m \mid {}_pY_n^{(i)} = \sigma_l \right], k \in \mathbb{N}, 0 \leq l, m \leq 2^i - 1$$

as probabilidades de transição do estado σ_l para o estado σ_m com um salto de magnitude $(1 - 2k)$.

Definição 2.4

$$M_l^{(i)}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2^i-1} (1 - 2k) \cdot P_{(l,m,k)}^{(i)}(p), \quad 0 \leq l \leq 2^i - 1$$

o salto médio do PMD ${}_p\overline{X}_{\bullet}^{(i)}$ na configuração σ_l .

Definição 2.5

$$M^{(i)}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{2^i-1} M_l^{(i)}(p) \cdot \pi_l^{(i)}$$

o salto médio ou “mean drift” do PMD ${}_p\overline{X}_{\bullet}^{(i)}$.

$M^{(i)}(p)$ também será chamado de *velocidade (média) da margem direita* de acordo com a secção 2.4 abaixo. Como logo se fará claro, a Definição 2.5 é de importância fundamental neste trabalho.

À luz destas definições, os PCFTDs ${}_pX_{\bullet}^{(i)}$, descritos acima, podem ser vistos, quando $i \in \mathbb{N}$, como *Cadeias de Markov numa faixa de 2^i vias*:

$${}_pX_n^{(i)} = {}_pX_n^{(i)} \left({}_p\overline{X}_n^{(i)}, {}_pY_n^{(i)} \right) \quad (12)$$

uma idéia ligeiramente diferente do conceito de *Cadeias de Markov numa Meia Faixa*, apresentado em [3, Sec.3.1].

2.4 Probabilidades Críticas

Na secção 3, mostraremos que para $i \in \mathbb{N}$ e $p \in (0, 1]$:

- (i) $M^{(i)}(p)$ é uma função estritamente crescente em p ;
- (ii) $M^{(i)}(p)$ tem uma única raiz real no intervalo $(0, 1]$;
- (iii) $\frac{p \overline{X}_n^{(i)}}{n} \xrightarrow{(n)} M^{(i)}(p)$ q.s.

Quando $i = \infty$, “ $\alpha(p)$ ”, a *velocidade da margem direita* do processo de percolação orientada, exerce exatamente o mesmo papel de $M^{(i)}(p)$ no caso finito descrito acima⁵. (Para maiores detalhes, veja [1], por exemplo). Portanto a notação

$$M^{(\infty)}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(p)$$

torna-se natural e com ela estabelecemos a seguinte

Definição 2.6 A probabilidade crítica $p_c^{(i)}$ para a família de PCFTDs $pX_\bullet^{(i)}, i \in \overline{\mathbb{N}}$, é a única raiz real de $M^{(i)}(p)$ no intervalo $(0, 1]$. Portanto

$$M^{(i)}(p_c^{(i)}) = 0, \forall i \in \overline{\mathbb{N}}.$$

A interpretação heurística da definição 2.6 é a seguinte:

- (i) quando $p < p_c^{(i)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p \overline{X}_n^{(i)} = -\infty$ q.s, ie a infecção desaparece com probabilidade um;
- (ii) quando $p > p_c^{(i)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p \overline{X}_n^{(i)} = +\infty$ q.s, ie a infecção se espalha por todo “eixo” $\mathbb{Z}$.

Na próxima secção provaremos um importante resultado que relaciona as probabilidades críticas $p_c^{(i)}$ s, $i \in \overline{\mathbb{N}}$, que acabamos de definir, qual seja “ $p_c^{(i)} \nearrow_i p_c^{(\infty)}$ ”⁶.

Esta convergência em forma não decrescente para a probabilidade crítica do *processo de percolação orientada*, o *Teorema de Convergência*, juntamente com a possibilidade de calcular as $p_c^{(i)}$ s ($i \in \mathbb{N}$) por meios algébricos (Secção 4), é o ponto central deste trabalho.

⁵ $\alpha(p) = -\infty$, quando $p < p_c$; de modo que o comportamento estritamente crescente de $M^{(i)}(p)$ não se aplica precisamente a $\alpha(p)$.

⁶ $p_c^{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} p_c$, conciliando as notações das secções 1 e 2.

3 O Teorema de Convergência e Resultados Preliminares

Lema 3.1 $\frac{p\overline{X}_n^{(i)}}{n} \xrightarrow{(n)} M^{(i)}(p) \quad q.s., \forall i \in \overline{\mathbb{N}}, p \in (0, 1]$

Prova:

Primeiro caso ($i \in \mathbb{N}$): Seja $n_l^{(i)}$ o número (aleatório) de visitas que a CMI $pY_\bullet^{(i)}$ faz ao estado σ_l até o instante n (de tal sorte que $\sum_{l=0}^{2^i-1} n_l^{(i)} = n$) e $J_{l,k}^{(i)}$ a magnitude do $k^{\text{ésimo}}$ salto do PMD $p\overline{X}_\bullet^{(i)}$ na configuração σ_l .

A propriedade markoviana do PCFTD $pX_\bullet^{(i)}$ faz com que os $J_{l,k}^{(i)}, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ sejam *v.a.s iid* com $\mathbb{E}[J_{l,k}^{(i)}] = M_l^{(i)}$.

Agora,

$$\frac{p\overline{X}_n^{(i)}}{n} = \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{k=1}^{n_l^{(i)}} \frac{J_{l,k}^{(i)}}{n} = \sum_{l=0}^{2^i-1} \sum_{k=1}^{n_l^{(i)}} \frac{J_{l,k}^{(i)}}{n_l^{(i)}} \cdot \frac{n_l^{(i)}}{n} = \sum_{l=0}^{2^i-1} \frac{n_l^{(i)}}{n} \sum_{k=1}^{n_l^{(i)}} \frac{J_{l,k}^{(i)}}{n_l^{(i)}},$$

$$\frac{n_l^{(i)}}{n} \xrightarrow{(n)} \pi_l^{(i)} \quad q.s. \quad [4, \text{pag.67}] \quad \text{e, pela}$$

$$\text{Lei Forte de Kolmogorov:} \quad \sum_{k=1}^{n_l^{(i)}} \frac{J_{l,k}^{(i)}}{n_l^{(i)}} \xrightarrow{n_l^{(i)}} M_l^{(i)}(p) \quad q.s. \quad [5, \text{pag.212}]$$

Tomando-se o limite, para $n \rightarrow \infty$, e considerando a definição 2.5, obtemos o resultado desejado.

Segundo caso ($i = \infty$): Veja [1, pag.1004].

Lema 3.2 Para $i \in \mathbb{N}$, cada função $M^{(i)} : (0, 1] \rightarrow (-\infty, 1]$ é estritamente crescente (em p). Ademais,
 $p \mapsto M^{(i)}(p)$

$M^{(i)}$ é uma sobrejeção de $(0, 1]$ em $(-\infty, 1]$.

Prova:

O comportamento não decrescente de $M^{(i)}(p)$ segue do *Acoplamento de Segunda Ordem* (desigualdade 7 acima), bem como do lema 3.1, que acabamos de provar. As definições 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 fazem com que $M^{(i)}(p)$ seja uma função racional de p , tal que $M^{(i)}(0_+) = -\infty$ e $M^{(i)}(1) = (1)$; portanto $M^{(i)}(p)$ não pode ser constante em nenhum intervalo $[p_1, p_2] \subset (0, 1]$, o que acarreta o comportamento estritamente crescente de $M^{(i)}(p)$.

Comentário sobre o lema 3.2 :

Neste ponto, é conveniente ressaltar que a função $\alpha(p) \stackrel{\text{def}}{=} M^{(\infty)}(p)$ é não decrescente e estritamente positiva, quando $p > p_c$; igual a zero, quando $p = p_c$ e infinitamente negativa, quando $p < p_c$. Novamente, a referência é [1]. O lema 3.2 conduz ao

Corolário 3.3 Para cada $i \in \overline{\mathbb{N}}$, $M^{(i)}$ tem apenas uma raiz real no intervalo $(0, 1]$, que denotamos por $p_c^{(i)}$, de acordo com a Secção 2.4.

Lema 3.4 A seqüência de funções $\{M^{(i)}(p)\}_{i \in \mathbb{N}}$, é não crescente,

ie $i \leq j$; $i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow M^{(i)}(p) \geq M^{(j)}(p)$, $\forall p \in (0, 1]$. Em particular $\alpha(p) \leq M^{(i)}(p)$; $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall p \in (0, 1]$.

Prova:

O comportamento não crescente (em i) de $\{M^{(i)}(p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ segue do *Acoplamento de Primeira Ordem* (desigualdade 6 acima) e novamente do lema 3.1.

O lema 3.4 conduz ao

Corolário 3.5 A seqüência numérica $\{p_c^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ é não decrescente. Desta forma $\lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)}$ está bem definido e $p_c^{(i)} \nearrow \lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)}$. Ademais $p_c \stackrel{\text{def}}{=} p_c^{(\infty)} \geq p_c^{(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

e ao

Corolário 3.6 $p_c^{(\infty)} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)}$.

Agora, voltamos a atenção para a desigualdade reversa, qual seja “ $p_c \leq \lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)}$ ”. Para tal, considerem-se os seguintes espaços de probabilidade:

- $(\Omega, \mathbb{P})$: o espaço de probabilidade abstrato, onde as v.a.s iid ξ_{nm}^j foram definidas;
- $(\mathcal{S}^{(i)}, \pi^{(i)})$: o espaço de probabilidade finito das CMI's $Y_\bullet^{(i)}$, dotado de sua medida estacionária $\pi^{(i)}$;
- $(\Omega \times \mathcal{S}^{(i)}, \mathbb{P} \times \pi^{(i)})$: o espaço produto.

No espaço produto, definimos os seguintes processos estocásticos:

- $\{ {}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)} \}_{n \in \mathbb{N}}$, por ${}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}((\omega, \sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} {}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}(\omega)$, $\forall (\omega, \sigma) \in \Omega \times \mathcal{S}^{(i)}$
 - $\{ {}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)} \}_{n \in \mathbb{N}}$, por ${}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}((\omega, \sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} {}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}(\omega)$, $\forall (\omega, \sigma) \in \Omega \times \mathcal{S}^{(i)}$,
- onde $\eta_\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{V}_0}$ é tal que $\eta_\sigma(2m) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & , \quad m > 0 \\ \sigma(-2m) & , \quad -1 \leq m \leq -i \\ 1 & , \quad m < -i \end{cases}$; de tal sorte que a CMI ${}_{\pi^{(i)}} Y_\bullet^{(i)}$ começa na configuração $\sigma \in \mathcal{S}^{(i)}$.

Agora, estabelecemos o

Lema 3.7 $\mathbb{E} \left[\frac{{}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}}{n} \right] \geq M^{(i)}(p)$; $\forall n, i \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1]$.

Prova:

O *Acoplamento de Terceira Ordem* (desigualdade 9 acima) implica que

$$\forall (\omega, \sigma) \in \Omega \times \mathcal{S}^{(i)}, {}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}((\omega, \sigma)) = {}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}(\omega) \geq {}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}(\omega) = {}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)}((\omega, \sigma)).$$

Integrando os dois lados da desigualdade acima (com respeito a $\mathbb{P} \times \pi^{(i)}$), obtemos:

$$\mathbb{E} \left[{}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)} \right] = \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[{}_p \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)} \right] \right) \geq \mathbb{E} \left[{}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)} \right] \left(= n M^{(i)}(p) \right),$$

onde a última igualdade acima segue do fato de o processo $\{ {}_{\pi^{(i)}} \overline{\mathcal{X}}_n^{(i)} \}_{n \in \mathbb{N}}$ possuir incrementos estacionários de média $M^{(i)}(p)$.

Figura 3: (Refere-se ao lema 3.8) Não pode haver infecção à força dentro do paralelograma tracejado. Os processos ${}_pX_{\bullet}^{(4)}$ e ${}_pX_{\bullet}^{(\infty)}$ são indistinguíveis nesta região.

Lema 3.8 $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E} [{}_p\overline{X}_n^{(i)}] = \mathbb{E} [{}_p\overline{X}_n^{(\infty)}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (fixo) e $p \in (0, 1]$.

Prova :

Como os saltos à direita são limitados por “+1”, segue que $\forall \omega \in \Omega$, ${}_p\overline{X}_n^{(i)} \leq n \implies {}_p\overline{X}_n^{(i)} - m \leq n - m$. Entretanto, para que o sítio (n, m) seja infectado à força, devemos ter ${}_p\overline{X}_n^{(i)} - m > 2i$ (Def. 2.1(b) acima). Portanto, se $n - m \leq 2i$, então ${}_p\overline{X}_n^{(i)} - m \leq 2i, \forall \omega \in \Omega$ e o sítio (n, m) não será infectado à força, para nenhuma realização $\omega \in \Omega$. Desta forma, podemos mostrar por indução sobre n que “ $n - m \leq 2i \implies X_n^{(\infty)}(m)[\omega] = X_n^{(i)}(m)[\omega], \forall \omega \in \Omega$ ”, ie todos os sítios (n, m) tais que $n - m \leq 2i$ têm o mesmo estado de infecção em relação aos processos ${}_pX_{\bullet}^{(\infty)}$ e ${}_pX_{\bullet}^{(i)}$. (Veja a figura 3 acima para o caso: $i = 4$).

Portanto, para cada instante n (fixo),

$${}_p\overline{X}_n^{(\infty)} < {}_p\overline{X}_n^{(i)} \implies {}_pX_n^{(\infty)}(m) = 0, \forall m \geq n - 2i \quad (13)$$

O raciocínio que conduz a (13) é o seguinte:

$${}_p\overline{X}_n^{(i)} \geq n - 2i \implies {}_pX_n^{(\infty)}({}_p\overline{X}_n^{(i)}) = {}_pX_n^{(i)}({}_p\overline{X}_n^{(i)}) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \stackrel{(6)}{\implies}$$

$${}_p\overline{X}_n^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{m \in \mathbb{Z}_n : {}_pX_n^{(i)}(m) = 1\} = \sup\{m \in \mathbb{Z}_n : {}_pX_n^{(\infty)}(m) = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} {}_p\overline{X}_n^{(\infty)} \implies$$

$$\{{}_p\overline{X}_n^{(i)} \geq n - 2i\} \subset \{{}_p\overline{X}_n^{(i)} = {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}\} \implies \{{}_p\overline{X}_n^{(i)} \neq {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}\} \subset \{{}_p\overline{X}_n^{(i)} < n - 2i\} \subset \{{}_p\overline{X}_n^{(\infty)} < n - 2i\}$$

Assim, (13) segue ao identificarmos $\{{}_p\overline{X}_n^{(i)} \neq {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}\}$ com $\{{}_p\overline{X}_n^{(i)} > {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}\}$ e $\{{}_p\overline{X}_n^{(\infty)} < n - 2i\}$ com $\{{}_pX_n^{(\infty)}(m) = 0, \forall m \geq n - 2i\}$.

Agora, observe que, se a infecção não está presente na região $\{(n, m) \in \mathcal{V}_n : m \geq n - 2i\}$ da fatia $\mathcal{V}_n$, todos os caminhos que ligam os seus sítios à fatia $\mathcal{V}_0$ devem estar interrompidos em algum lugar. Em particular, as $(i + 1)$ retas que ligam o sítio $(0, -2j)$ ao sítio $(n, n - 2j)$, para $0 \leq j \leq i$, devem estar obstruídas em algum ponto (Figura 3 acima). Como estas retas são constituídas de elos diferentes (portanto independentes, por construção), a probabilidade deste evento será dada por $(1 - p^n)^{i+1}$, e então teremos:

$$\mathbb{P} \left({}_p\overline{X}_n^{(i)} \neq {}_p\overline{X}_n^{(\infty)} \right) \leq \mathbb{P} \left({}_pX_n^{(\infty)}(m) = 0, \forall m \geq n - 2i \right) \leq (1 - p^n)^{i+1}$$

De sorte que ${}_p\overline{X}_n^{(i)} \xrightarrow{i} {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}$ em probabilidade, e existirá uma sub-sequência $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que ${}_p\overline{X}_n^{(i_k)} \xrightarrow{k} {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}$ q.s. [6, Teorema 7.6]. Como toda a sequência $\left\{ {}_p\overline{X}_n^{(i)} \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ é não-crescente (em i), devemos ter ${}_p\overline{X}_n^{(i)} \xrightarrow{i} {}_p\overline{X}_n^{(\infty)}$ q.s. da mesma forma, e podemos invocar o *Teorema da Convergência Monótona* para concluir que $\mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_n^{(i)} \right] \searrow^i \mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_n^{(\infty)} \right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

♣

Finalmente, estamos em condições de provar o **Teorema de Convergência**:

Teorema 3.9 $p_c^{(i)} \nearrow_i p_c$

Prova : Suponha que $\lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)} < p_c$, de modo que se possa escolher p tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)} < p < p_c$. Neste caso o lema 3.2 e o corolário 3.5 nos asseguram que $\forall i \in \mathbb{N}$, $M^{(i)}(p) > M^{(i)}(p_c^{(i)}) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ e o lema 3.7 que $\mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_n^{(i)} \right] \geq nM^{(i)}(p) > 0, \forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Desta forma

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_n^{(i)} \right] \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad (14)$$

, onde a desigualdade 6 nos assegura que o limite acima está bem definido.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} p < p_c &\implies \frac{{}_p\overline{X}_n^{(\infty)}}{n} \xrightarrow{(n)} -\infty \text{ q.s. } \text{ lema 3.1 e comentário sobre o lema 3.2} \\ &\implies \mathbb{E} \left[\frac{{}_p\overline{X}_n^{(\infty)}}{n} \right] \xrightarrow{(n)} -\infty \text{ Lema de Fatou} \\ &\implies \exists \bar{n} : \mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_{\bar{n}}^{\infty} \right] < 0 \end{aligned}$$

Aplicando o lema 3.8 para $\bar{n}$ (fixo), obtemos:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_{\bar{n}}^{(i)} \right] = \mathbb{E} \left[{}_p\overline{X}_{\bar{n}}^{\infty} \right] < 0$$

o que contradiz a desigualdade 14 acima. Portanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} p_c^{(i)} \geq p_c$ e o teorema segue do corolário 3.6.

♣

4 Determinação das Probabilidades Críticas

4.1 Determinação Algébrica das Probabilidades Críticas

O teorema 3.9 (*O Teorema de Convergência*) possui interesse teórico *per se*. Sem embargo, resultados mais fracos como os corolários 3.5 e 3.6 já nos mostram que cada $p_c^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, é uma quota inferior (refinada em relação às suas predecessoras) para a probabilidade crítica do *Processo de Percolação Orientada*.

Apesar de já estar implícito nas secções 2.3.3 e 2.4 acima, apresentamos a seguir o algoritmo que conduz ao cálculo exato das *probabilidades críticas* $p_c^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$.

De acordo com as definições 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6, as *probabilidades críticas* $p_c^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, podem ser determinadas nos seguintes passos:

(i) **Determinação das Probabilidades** $P_{(l,m,k)}^{(i)}$ (Def. 2.3) **em Função de** $q \stackrel{\text{def}}{=} 1 - p$:

um cálculo combinatório elementar mostra que as probabilidades $P_{(l,m,k)}^{(i)}$, $0 \leq l, m \leq 2^i - 1$, $k \in \mathbb{N}$, podem ser expressas como funções polinomiais de q , ie

$$P_{(l,m,k)}^{(i)} = P_{(l,m,k)}^{(i)}(q) : \text{polinômio em } q \quad (15)$$

(ii) **Determinação da Matriz de Transição** $\left(q_{lm}^{(i)}\right)_{0 \leq l, m \leq 2^i - 1}$ **da CMI** ${}_p Y_\bullet^{(i)}$:

as probabilidades de transição definidas em 11 podem ser expressas como

$$q_{lm}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{(l,m,k)}^{(i)}(q). \quad (16)$$

Como a sequência numérica $\left(P_{(l,m,k)}^{(i)}(q)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ forma uma *progressão geométrica* (de razão q^2) a partir do $(i+2)$ ésimo termo, as probabilidades de transição $q_{lm}^{(i)}$ podem ser expressas como funções racionais de q . Em verdade, estas probabilidades serão sempre polinômios em q :

$$q_{lm}^{(i)} = q_{lm}^{(i)}(q) : \text{polinômio em } q$$

(iii) **Determinação da Medida Estacionária** (π^i) **da CMI** ${}_p Y_\bullet^{(i)}$:

o cálculo combinatório que conduziu à equação 15 nos mostra que as *probabilidades de transição* $q_{lm}^{(i)}(q)$, $0 \leq l, m \leq 2^i - 1$, são estritamente positivas, para $q \in (0, 1)$, de sorte que a *matriz de transição* $\left(q_{lm}^{(i)}\right)$ é irredutível e aperiódica. Portanto π^i é uma medida de probabilidade bem definida em $\mathcal{S}^i$ e pode ser determinada algebricamente a partir de $\left(q_{lm}^{(i)}\right)$. Como consequência temos que:

$$\pi_l^{(i)}(q) : \text{função racional estritamente positiva de } q, q \in (0, 1), 0 \leq l \leq 2^i - 1$$

(iv) **Determinação de** $M_l^{(i)}$, **o Salto Médio do PCFTD** ${}_p X_\bullet^{(i)}$ **na Configuração** σ_l :

A definição 2.4 e o fato de a sequência $\left(P_{lmk}^{(i)}(q)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ser essencialmente uma *progressão geométrica* acarretam que

$$M_l^{(i)}(q) : \text{função racional de } q, 0 \leq l \leq 2^i - 1$$

(v) **Determinação de $M^{(i)}$, o Salto Médio do PCFTD ${}_pX_\bullet^{(i)}$:**

A definição 2.5 e os passos (iii) e (iv) acima asseguram que

$$M^{(i)}(q) : \text{função racional de } q$$

(vi) **Determinação da Probabilidade Crítica $p_c^{(i)}$:**

De acordo com o corolário 3.3 e a definição 2.6, $p_c^{(i)}$ é a única raiz real de $M^{(i)}(p)$ no intervalo $(0, 1)$; e, portanto, a única raiz real do polinômio numerador de $M^{(i)}(p)$. Desta forma, a sua determinação se obtém numericamente.

No que segue, empregaremos o algoritmo descrito acima para calcular algebricamente as primeiras *probabilidades críticas*:

4.1.1 A Probabilidade Crítica de Ordem Zero, $p_c^{(0)}$:

Neste caso $|\mathcal{S}^{(i)}| = 1$, de modo que a CMI ${}_pY_\bullet^{(i)}$ é trivial:

$$\begin{aligned} M^{(0)}(q) &= M_0^{(0)}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-2k) \cdot P_{0,0,k}^{(0)}(q) = 1 \cdot p - 1 \cdot q(1-q^2) - 3 \cdot q^3(1-q^2) - 5 \cdot q^5(1-q^2) - \dots \\ &= (1-q) - q(1-q^2) \cdot [1 + 3q^2 + 5q^4 + 7q^6 + \dots] = (1-q) - q(1-q^2) \frac{1+q^2}{(1-q^2)^2} = \\ &= (1-q) - \frac{q+q^3}{1-q^2} = \frac{1-2q-q^2}{1-q^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$M^{(0)}(q) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2q - q^2 = 0 \Rightarrow p_c^{(0)} = 2 - \sqrt{2} = 0.58579 \dots$$

4.1.2 A Probabilidade Crítica de Primeira Ordem, $p_c^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \left(q_{lm}^{(1)}\right)(q) &= \begin{bmatrix} q - q^3 + q^4 & 1 - q + q^3 - q^4 \\ q^2 & 1 - q^2 \end{bmatrix}, \quad \pi_l^{(1)}(q) = \frac{(q^2, 1 - q + q^3 - q^4)}{1 - q + q^2 + q^3 - q^4} \\ M_0^{(1)}(q) &= \frac{1 - 2q - 3q^2 + 2q^4}{1 - q^2}, \quad M_1^{(1)}(q) = \frac{1 - 2q - q^2}{1 - q^2} \\ M^{(1)}(q) &= \frac{1 - 3q + 2q^2 - 6q^4 + q^5 + 3q^6}{1 - q + 2q^3 - 2q^4 - q^5 + q^6} \end{aligned}$$

Portanto,

$$M^{(1)}(q) = 0 \Rightarrow p_c^{(1)} = 0.604233 \dots$$

4.1.3 A Probabilidade Crítica de Segunda Ordem, $p_c^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 (q_{lm}^{(2)}(q)) &= \begin{bmatrix} \frac{q - q^3 + q^6}{2q^3 - q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + q^8} & \frac{q - 2q^2 + q^3 + q^4 - q^6}{2q^2 - 3q^3 + q^4 + q^7 - q^8} & \frac{1 - 2q + q^2 + q^4 - q^6}{q - 2q^2 + 2q^3 - q^4 + q^5 - q^6} & \frac{q^2 - 2q^4 + q^6}{1 - 2q + 2q^2 - q^3 - q^5 + q^6} \\ \frac{q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6}{q^4} & \frac{q - q^2 + q^5 - q^6}{q^2 - q^4} & \frac{q - 2q^2 + 2q^3 - q^4 + q^5 - q^6}{q^2 - q^4} & \frac{1 - 2q + 2q^2 - q^3 - q^5 + q^6}{1 - 2q^2 + q^4} \end{bmatrix} \\
 \pi_0^{(2)}(q) &= \frac{-2q^4 + 2q^5 - 4q^6 + 9q^7 - 14q^8 + 15q^9 - 9q^{10} + 2q^{11}}{-1 + 3q - 6q^2 + 8q^3 - 17q^4 + 30q^5 - 44q^6 + 46q^7 - 20q^8 - 17q^9 + 38q^{10} - 32q^{11} + 13q^{12} - 2q^{13}} \\
 \pi_1^{(2)}(q) &= \frac{-q^2 + 2q^3 - 2q^4 + q^5 - 4q^6 + 9q^7 - 5q^8 - 6q^9 + 12q^{10} - 8q^{11} + 2q^{12}}{-1 + 3q - 6q^2 + 8q^3 - 17q^4 + 30q^5 - 44q^6 + 46q^7 - 20q^8 - 17q^9 + 38q^{10} - 32q^{11} + 13q^{12} - 2q^{13}} \\
 \pi_2^{(2)}(q) &= \frac{-q^2 + q^3 + 2q^5 - 9q^6 + 15q^7 - 14q^8 + 8q^9 - 2q^{10}}{-1 + 3q - 6q^2 + 8q^3 - 17q^4 + 30q^5 - 44q^6 + 46q^7 - 20q^8 - 17q^9 + 38q^{10} - 32q^{11} + 13q^{12} - 2q^{13}} \\
 \pi_3^{(2)}(q) &= \frac{-1 + 3q - 4q^2 + 5q^3 - 13q^4 + 25q^5 - 27q^6 + 13q^7 + 13q^8 - 34q^9 + 37q^{10} - 26q^{11} + 11q^{12} - 2q^{13}}{-1 + 3q - 6q^2 + 8q^3 - 17q^4 + 30q^5 - 44q^6 + 46q^7 - 20q^8 - 17q^9 + 38q^{10} - 32q^{11} + 13q^{12} - 2q^{13}} \\
 M_l^{(2)} &= \frac{1}{1 - q^2} (1 - 2q - 5q^2 + 4q^4, 1 - 2q - 3q^2 + 2q^4, 1 - 2q - q^2 - 2q^4 + 2q^6, 1 - 2q - q^2) \\
 M^{(2)}(q) &= \frac{-1 + 5q - 11q^2 + 17q^3 - 25q^4 + 52q^5 - 75q^6 + 96q^7 - 58q^8 - 69q^9 + 152q^{10} - 111q^{11} - 5q^{12} + 74q^{13} - 49q^{14} + 10q^{15}}{(1 - q^2)(-1 + 3q - 6q^2 + 8q^3 - 17q^4 + 30q^5 - 44q^6 + 46q^7 - 20q^8 - 17q^9 + 38q^{10} - 32q^{11} + 13q^{12} - 2q^{13})}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$M^{(2)}(q) = 0 \Rightarrow p_c^{(2)} = 0.614187$$

4.2 Determinação Numérica das Probabilidades Críticas:

Os cálculos combinatórios que levaram à *matriz de transição* $(q^{(i)})_{lm}$ e ao vetor de “*mean-drifts*” $M^{(i)}_l$, descritos na secção 4.1 ; apesar de longos e fastidiosos para seres humanos, são prontamente executáveis por um computador digital: enquanto levamos toda uma tarde para calcular a *matriz de transição* $(q^{(2)})_{lm}$ algebricamente (16 entradas polinomiais), o programa em FORTRAN 77 apresentado no Apêndice A, executado a uma frequência de 600 MHz, calculou a *matriz de transição* $(q^{(9)})_{lm}$ (4⁹ entradas polinomiais) em menos de um minuto!

O maior problema na codificação do algoritmo descrito na secção 4.1 numa linguagem computacional encontra-se precisamente no passo (iii), ou seja na determinação algébrica da medida estacionária $\pi^{(i)}$, a partir da *matriz de transição* $(q^{(i)})_{lm}(q)$. Embora isto possa ser feito diretamente, tratando os polinômios como se fossem entradas numéricas; se não levarmos em consideração as possíveis e prováveis simplificações algébricas que possam ocorrer, o grau dos polinômios resultantes logo se torna computacionalmente intratável. Infelizmente, encontrar estas simplificações está longe de ser um problema trivial.

Desta forma, adotamos uma abordagem diferente:

- (i) Uma vez obtida algebricamente a *matriz de transição* $(q^{(i)})_{lm}(q)$ e o vetor de “*mean-drifts*” $M^{(i)}_l(q)$, o programa gerou uma *matriz de transição* numérica e um vetor de “*mean-drifts*” numérico para uma seqüência decrescente de valores de q .
- (ii) A partir de cada *matriz de transição* numérica, obteve-se numericamente a correspondente medida estacionária, resolvendo-se um sistema de equações lineares. Nesta etapa, a técnica de *condensação pivotal* (“*partial pivoting*”, como descrita em [7]) foi de fundamental importância no controle dos erros numéricos.

- (iii) O valor numérico de $M^{(i)}(q)$ foi então obtido, executando-se o produto escalar da definição 2.5.
- (iv) De acordo com a definição 2.6 $q_c^{(i)} (\stackrel{\text{def}}{=} 1 - p_c^{(i)})$ estará entre o último valor de q para o qual $M^{(i)}(q)$ foi negativo e o primeiro valor de q para o qual $M^{(i)}(q)$ foi positivo.

Esta abordagem tem o ônus de introduzir erros numéricos (basicamente na etapa ii acima), dos quais a abordagem puramente algébrica da secção 4.1 esteve isenta. Portanto, para obtermos resultados numéricos confiáveis para as *probabilidades críticas*, limites superiores rigorosos para os erros numéricos devem ser fornecidos. Para tal, seguimos o procedimento conhecido como “*forward analysis*” descrito em [7], o qual consiste basicamente em obter quotas superiores parciais para os erros numéricos envolvidos em cada operação aritmética executada na sequência lógica de cálculos que conduziu ao valor numérico de $M^{(i)}(q)$. Este procedimento, apesar de aparentemente primitivo, tem a vantagem de fornecer uma limitação segura e rigorosa para o erro numérico envolvido a partir da etapa (ii) acima.

O programa computacional que implementou em linguagem FORTRAN 77 os passos descritos acima, bem como o procedimento “*forward analysis*” para controle de erros numéricos, encontra-se listado no Apêndice A. Apresentamos abaixo um resumo dos resultados numéricos por ele gerados⁷:

i=1			i=2			i=3		
p	$M_{Num}^{(1)}(p)$	$\Delta M^{(1)}(p)$	p	$M_{Num}^{(2)}(p)$	$\Delta M^{(2)}(p)$	p	$M_{Num}^{(3)}(p)$	$\Delta M^{(3)}(p)$
0.604231	-9.15E-6	6.2E-16	0.614185	-1.01E-5	6.1E-15	0.620203	-1.36E-5	2.5E-14
0.604232	-5.27E-6	6.2E-16	0.614186	-5.85E-6	6.2E-15	0.620204	-8.96E-6	2.5E-14
0.604233	-1.40E-6	6.2E-16	0.614187	-1.57E-6	6.1E-15	0.620205	-4.32E-6	2.6E-14
0.604234	+2.47E-6	6.2E-16	0.614188	+2.71E-6	6.2E-15	0.620206	+3.15E-7	2.6E-14

i=4			i=5			i=6		
p	$M_{Num}^{(4)}(p)$	$\Delta M^{(4)}(p)$	p	$M_{Num}^{(5)}(p)$	$\Delta M^{(5)}(p)$	p	$M_{Num}^{(6)}(p)$	$\Delta M^{(6)}(p)$
0.624210	-9.52E-6	8.0E-14	0.627064	-1.31E-5	1.9E-13	0.629201	-1.55E-5	3.8E-13
0.624211	-4.57E-6	8.0E-14	0.627065	-7.85E-6	1.9E-13	0.629202	-9.98E-6	3.8E-13
0.624212	+3.71E-7	8.0E-14	0.627066	-2.63E-6	1.9E-13	0.629203	-4.51E-6	3.9E-13
			0.627067	+2.60E-6	1.9E-13	0.629204	+9.66E-7	3.8E-13

i=7			i=8			i=9		
p	$M_{Num}^{(7)}(p)$	$\Delta M^{(7)}(p)$	p	$M_{Num}^{(8)}(p)$	$\Delta M^{(8)}(p)$	p	$M_{Num}^{(9)}(p)$	$\Delta M^{(9)}(p)$
0.630863	-1.01E-5	7.2E-13	0.632192	-8.53E-6	1.3E-12	0.63326	-1.29E-4	2.0E-12
0.630864	-4.41E-6	7.2E-13	0.632193	-2.60E-6	1.2E-12	0.63327	-6.79E-5	2.0E-12
0.630865	+1.30E-6	7.2E-13	0.632194	+3.32E-6	1.3E-12	0.63328	-6.68E-6	2.0E-12
						0.63329	+5.45E-5	2.0E-12

⁷os cálculos numéricos foram executados em dupla precisão.

⁸ $|M^{(i)}(p) - M_{Num}^{(i)}(p)| \leq \Delta M^{(i)}(p)$; onde $M_{Num}^{(i)}(p)$ denota o valor numérico obtido para o *mean-drift* de i ésima ordem.

A partir dos dados listados acima, as dez primeiras *probabilidades críticas* podem ser obtidas:

i	$p_c^{(i)}$
0	0,585787
1	0,604233
2	0,614187
3	0,620205
4	0,624211
5	0,627066
6	0,629203
7	0,630864
8	0,632193
9	0,63328

Tabela 1: Probabilidades críticas obtidas numericamente.

Desta forma, estamos em condições de estabelecer a desigualdade anunciada na Introdução , qual seja:

$$p_c \geq 0.63328$$

5 Simulações

5.1 Obtenção de Quotas Inferiores via Simulação

O programa em FORTRAN 77 apresentado no Apêndice B à página 46 realiza uma trajetória ω do PCTDF ${}_pX_{\bullet}^{(i)}$. A cada passo o valor de ${}_p\bar{X}_n^{(i)}/n$ é calculado. Como prevê o Lema 3.1, este valor tende assintoticamente para $M^{(i)}(p)$ à medida que n cresce. Desta forma, executando-se o programa para diferentes valores de p , pode-se estimar o valor de $p_c^{(i)}$ observando-se a altura do platô que se estabelece com o aumento de n :

(a) *altura do platô* $< 0 \Rightarrow p < p_c^{(i)}$,

(b) *altura do platô* $> 0 \Rightarrow p > p_c^{(i)}$.

A tabela abaixo sintetiza os resultados obtidos nas simulações que vem a seguir:⁹

i	$p_c^{(i)}$
5	0,627
6	0,629
9	0,6332
20	0,638
40	0,641
100	0,643
200	0,6438
1000	0,6445

Tabela 2: Probabilidades críticas obtidas por simulação .

É interessante comparar os dados da tabela 2 (obtidos por simulação) com os dados da tabela 1 (obtidos teoricamente).

⁹Veja o gráfico na figura 19 (pag. 33) para o caso $i = 6$.

5.1.1 Determinação de $p_c^{(5)}$

Figura 4: Realizações não acopladas dos processos $.626\overline{X}_n^{(5)}/n$ e $.627\overline{X}_n^{(5)}/n$.

Obs.: neste e nos demais gráficos, a escala horizontal é logarítmica de base 2.

Figura 5: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 4.

5.1.2 Determinação de $p_c^{(9)}$

Figura 6: Realizações não acopladas dos processos $.6332\overline{X}_n^{(9)}/n$ e $.6333\overline{X}_n^{(9)}/n$.

Figura 7: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 6.

5.1.3 Determinação de $p_c^{(20)}$

Figura 8: Realizações não acopladas dos processos $.638\overline{X}_n^{(20)}/n$ e $.639\overline{X}_n^{(20)}/n$.

Figura 9: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 8.

5.1.4 Determinação de $p_c^{(40)}$

Figura 10: Realizações não acopladas dos processos ${}_{.641}\overline{X}_n^{(40)}/n$ e ${}_{.642}\overline{X}_n^{(40)}/n$.

Figura 11: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 10.

5.1.5 Determinação de $p_c^{(100)}$

Figura 12: Realizações não acopladas dos processos $.643\bar{X}_n^{(100)}/n$ e $.644\bar{X}_n^{(100)}/n$.

Figura 13: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 12.

5.1.6 Determinação de $p_c^{(200)}$

Figura 14: Realizações não acopladas dos processos $.6438 \overline{X}_n^{(200)}/n$ e $.6439 \overline{X}_n^{(200)}/n$.

Figura 15: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 14.

5.1.7 Determinação de $p_c^{(1000)}$

Figura 16: Realizações não acopladas dos processos $.64450\overline{X}_n^{(1000)}/n$ e $.64452\overline{X}_n^{(1000)}/n$.

Figura 17: Ampliação e detalhe do gráfico na figura 16.

5.2 Ilustração dos Acoplamentos via Simulação

Os acoplamentos abaixo foram obtidos construindo-se trajetórias dos diferentes processos estocásticos com a mesma sequência de números aleatórios:

Figura 18: Realizações acopladas de $.627\overline{X}_n^{(3)}/n$, $.627\overline{X}_n^{(5)}/n$, e $.627\overline{X}_n^{(7)}/n$.

Figura 19: Realizações acopladas de $.629\overline{X}_n^{(6)}/n$, $.630\overline{X}_n^{(6)}/n$, e $.631\overline{X}_n^{(6)}/n$.

Figura 20: Realizações acopladas de $\frac{\sigma_0}{p_c^{(2)}} \overline{X}_n^{(2)} / n$ e $\frac{\sigma_3}{p_c^{(2)}} \overline{X}_n^{(2)} / n$.

Obs.: $\sigma_0 \equiv 00$, $\sigma_3 \equiv 11$ como na figura 2.

A Programa I

```

Program MatrizdeTransicao
Integer N
Real*8 P,dP
Parameter (N=9,P=0.63325,dP=0.00001)
Integer I,J,K,Confi,Conff,MT,Paux1,Paux2,Paux3,Paux
Integer P0,P1,P2,P3,P4,P5
Integer Delta,Cabeca,Grau
Integer MD,IND2
Dimension MD(0:2**N-1,0:4*N+6)
Dimension P0(0:4*N+6),P1(0:4*N+6),P2(0:4*N+6)
Dimension P3(0:4*N+6),P4(0:4*N+6),P5(0:4*N+6)
Dimension Confi( (-4) * N - 4 : +2 ),Conff( (-4) * N -3 : +1)
Dimension MT(0:2**N-1 , 0:2**N-1 , 0:4*N+6)
Dimension Paux1(0:4*N+6),Paux(0:4*N+6)
Dimension Paux2(0:4*N+6),Paux3(0:4*N+6)
Real*8 Q2,SL2,CSL2, MD2,MI2,MAXD,AUXD,X,dX,Y,dY,Z,dZ
Real*8 MDRIFT,EMDRIFT,NRes,NMD,EMD
Dimension SL2(0:2**N-1,0:2**N,1:2),CSL2(0:2**N-1,0:2**N-1)
Dimension MD2(0:2**N-1,1:2),MI2(0:2**N-1,1:2)
Do 01 I=0,4*N+6
P0(I)=0
P1(I)=0
P2(I)=0
P3(I)=0
P4(I)=0
P5(I)=0
01 Continue
P1(0)=1
P2(0)=1
P3(1)=1
P4(0)=1
P5(2)=1
P2(1)=-1
P4(2)=-1
Open(Unit = 1,File = 'Arq9E.dat')
Do 10 I=0,2**N-1
Call Bin0 (I,Confi,N)
Do 20 J=0,2**N-1
c Write (1,*) 'MT',I,',',J,'='
Call Bin1 (J,Conff,N)
Call ProbTotal (Confi,Conff,Paux1,N)
Do 22 K=0,4*N+6
MT(I,J,K)=Paux1(K)
c Write (1,*) MT(I,J,K)
22 Continue
c Write (1,*) ' '
20 Continue
10 Continue
c=====

```

```

c===== Determinacao Algebrica do Mean Drift =====
c=====
Do 30 I=0,2*N-1
Call Bin0 (I,Confi,N)
Call AtribVet (P0,Paux,N)
Do 40 J=1,-2*N-3,-2
Call AtribVet (P1,Paux1,N)
Do 50 K=1,J+2,-2
GO TO (51,52,53),Confi(K-1)+Confi(K+1)+1
51 GO TO 50
52 Call Produto (P3,Paux1,Paux2,N)
Call AtribVet (Paux2,Paux1,N)
GO TO 50
53 Call Produto (P5,Paux1,Paux2,N)
Call AtribVet (Paux2,Paux1,N)
50 Continue
IF( J.NE.(-2)*N-3 ) THEN
GO TO (54,55,56),Confi(J-1)+Confi(J+1)+1
54 Call AtribVet (P0,Paux1,N)
GO TO 57
55 Call Produto (P2,Paux1,Paux2,N)
Call AtribVet (Paux2,Paux1,N)
GO TO 57
56 Call Produto (P4,Paux1,Paux2,N)
Call AtribVet (Paux2,Paux1,N)
57 Continue
Do 60 K=0,Grau (Paux1,N)
Paux1(K)=Paux1(K)*J
60 Continue
Call Soma (Paux1,Paux,Paux2,N)
Call AtribVet (Paux2,Paux,N)
END IF
40 Continue
Call AtribVet (P4,Paux2,N)
Do 70 K=0,2
Paux2(K)=Paux2(K)*((-2)*N-1)
70 Continue
Paux2(0)=Paux2(0)-2
Call Produto (Paux1,Paux2,Paux3,N)
Call Produto (Paux,P4,Paux2,N)
Call Soma (Paux3,Paux2,Paux,N)
c Write (1,*) 'MD',I,'='
Do 80 K=0,4*N+6
MD(I,K)=Paux(K)
c Write (1,*) MD(I,K)
80 Continue
30 Continue
c=====
c===== Inicio do Calculo Numerico =====
c=====
Write (1,*) ' I=',N

```

```

Write (1,*) ' '
Q2= 1D0 - P
Write (1,*) ' p ', M(p) ', +/- dM1(p) ',
a '+/- dM2(p) '
Write (1,*) ' '
c=====
c=====Construcao das Matrices Numericas SL2 e MD2=====
c=====
90 Do 100 I=0,2**N-1
MD2(I,1)=0D0
Do 110 K=0,4*N+6
MD2(I,1)=MD2(I,1)+MD(I,K)*Q2**K
110 Continue
MD2(I,1)=MD2(I,1)/(1D0 - Q2**2)
Do 120 J=0,2**N-1
IF ( I .NE. (2**N - 1) ) THEN
SL2(I,J,1)=0D0
Do 130 K=0,4*N+6
SL2(I,J,1)=SL2(I,J,1) + MT(J,I,K)*Q2**K
130 Continue
SL2(I,J,1)=SL2(I,J,1) - DBLE( Delta(I,J) )
ELSE
SL2(I,J,1)=1D0
END IF
CSL2(I,J)=SL2(I,J,1)
120 Continue
100 Continue
Do 140 I=0,2**N-1
IF ( I .NE. 2**N-1 ) THEN
SL2(I,2**N,1)=0D0
ELSE
SL2(I,2**N,1)=1D0
END IF
140 Continue
c=====
c=====Inicializacao dos Erros Numericos =====
c=====
Do 141 I=0,2**N-1
MD2(I,2)= DABS( MD2(I,1) )*(1D-15)
141 Continue
Do 142 I=0,2**N-2
Do 143 J=0,2**N-1
SL2(I,J,2)= DABS( SL2(I,J,1) )*(1D-15)
143 Continue
142 Continue
Do 144 J=0,2**N
SL2(2**N-1,J,2)=0D0
144 Continue
Do 145 I=0,2**N-1
SL2(I,2**N,2)=0D0
145 Continue

```

```

=====
c=====Escalonamento do Sistema Linear (SL2)=====
=====

Do 150 I=0,2**N-2
c=====
c===== Determinacao da Linha Pivo =====
c=====
IND2=I
MAXD=0D0
Do 160 K=I,2**N-1
IF ( DABS( SL2(K,I,1) ) .GE. MAXD ) THEN
MAXD=DABS( SL2(K,I,1) )
IND2=K
END IF
160 Continue
c=====
c===== Troca da Linha I com a Linha IND2 =====
c=====

Do 170 K=0,2**N
X=SL2(I,K,1)
dX=SL2(I,K,2)
SL2(I,K,1)=SL2(IND2,K,1)
SL2(I,K,2)=SL2(IND2,K,2)
SL2(IND2,K,1)=X
SL2(IND2,K,2)=dX
170 Continue
c=====
Do 180 K=I+1,2**N-1
Call DNum(SL2(K,I,1),SL2(K,I,2),SL2(I,I,1),SL2(I,I,2),X,dX)
IF ( dX.LT.-5D-1 ) THEN
WRITE (1,*) 'Erro Numerico nao Controlavel'
GO TO 260
END IF
Do 190 J=I+1,2**N
Call MNum(SL2(I,J,1),SL2(I,J,2),X,dX,Y,dY)
Call SNum(SL2(K,J,1),SL2(K,J,2),-Y,dY,Z,dZ)
SL2(K,J,1)=Z
SL2(K,J,2)=dZ
190 Continue
180 Continue
150 Continue
c===== Fim do Escalonamento do Sist. Linear (SL2) =====
c=====
c===== Obtencao da Medida Invarinte ( MI2 ) =====
c=====

Do 200 I= 2**N-1,0,-1
MI2(I,1)=SL2(I,2**N,1)
MI2(I,2)=SL2(I,2**N,2)
Do 210 J=I+1,2**N-1

```

```

Call MNum(SL2(I,J,1),SL2(I,J,2),MI2(J,1),MI2(J,2),X,dX)
Call SNum(MI2(I,1),MI2(I,2),-X,dX,Y,dY)

```

```

MI2(I,1)=Y
MI2(I,2)=dY

```

```

210 Continue

```

```

Call DNum(MI2(I,1),MI2(I,2),SL2(I,I,1),SL2(I,I,2),X,dX)

```

```

IF ( dX.LT.-5D-1 ) THEN

```

```

WRITE (1,*) 'Erro Numerico nao Controlavel'

```

```

GO TO 260

```

```

END IF

```

```

MI2(I,1)=X

```

```

MI2(I,2)=dX

```

```

200 Continue

```

```

c=====

```

```

c===== Obtencao de M(p) - MDRIFT - =====

```

```

c=====

```

```

MDRIFT=0D0

```

```

EMDRIFT=0D0

```

```

Do 220 I=0,2**N-1

```

```

Call MNum(MI2(I,1),MI2(I,2),MD2(I,1),MD2(I,2),X,dX)

```

```

Call SNum(X,dX,MDRIFT,EMDRIFT,Y,dY)

```

```

MDRIFT=Y

```

```

EMDRIFT=dY

```

```

220 Continue

```

```

c=====

```

```

c== =Verificacao do Erro Numerico da Sol.(MI2) do Sist. Linear(SL2) ==

```

```

c=====

```

```

NRes=0D0

```

```

Do 230 I=0,2**N-1

```

```

AUXD=0D0

```

```

Do 240 J=0,2**N-1

```

```

AUXD=AUXD+CSL2(I,J)*MI2(J,1)

```

```

240 Continue

```

```

NRes=NRes+ ( DBLE( Delta(I,2**N-1) ) - AUXD )**2

```

```

230 Continue

```

```

NRes=DSQRT(NRes)

```

```

AUXD=0D0

```

```

Do 250 I=0,2**N-1

```

```

AUXD=AUXD+MD2(I,1)**2

```

```

250 Continue

```

```

NMD=DSQRT(AUXD)

```

```

EMD=NRes*NMD

```

```

c=====

```

```

Write (1,259) (1D0-Q2), (MDRIFT),(EMDRIFT),(EMD)

```

```

259 FORMAT (E12.6E2,E16.5E2,E13.5E2,E13.5E2)

```

```

Q2=Q2 - dP

```

```

IF ( MDRIFT .LE. 0D0 ) THEN

```

```

GO TO 90

```

```

END IF

```

```

260 Continue

```

```

Stop

```

```

End
c=====
Subroutine Soma (P1,P2,S,N)
Integer P1,P2,S,N
Dimension P1(0:4*N+6),P2(0:4*N+6),S(0:4*N+6)
Integer I
Do 100 I=0,4*N+6
S(I)=P1(I)+P2(I)
100 Continue
Return
End
c=====
Subroutine Produto (P1,P2,P,N)
External Grau
Integer P1,P2,P,N
Dimension P1(0:4*N+6),P2(0:4*N+6),P(0:4*N+6)
Integer I,J,Grau
Do 200 I=0,4*N+6
P(I)=0
200 Continue
Do 210 I=0,Grau(P1,N)
Do 220 J=0,Grau(P2,N)
P(I+J)=P(I+J)+P1(I)*P2(J)
220 Continue
210 Continue
Return
End
c=====
Integer Function Grau (P,N)
Integer P,N
Dimension P(0:4*N+6)
Integer I
I=4*N+6
300 IF (( P(I) .EQ. 0) .AND. (I .GT. 0)) THEN
I=I-1
GO TO 300
END IF
Grau = I
Return
End
c=====
Subroutine Bin0 (Num,Conf,N)
Integer Num,Conf,N
Dimension Conf(-4*N-4:+2)
Integer I,Nb
Nb=Num
Conf(2)=0
Conf(0)=1
DO 400 I=0,N-1
Conf(0+2*I-2*N)=MOD(Nb,2)
Nb=Nb/2

```

```

400 Continue
DO 410 I= (-2)*N -2,(-4)*N - 4,-2
Conf(I)=1
410 Continue
Return
End

```

```

c=====

```

```

Subroutine Bin1 (Num,Conf,N)
Integer Num,Conf,N
Dimension Conf(-4*N-3:+1)
Integer I,Nb
Nb=Num
Conf(1)=1
DO 500 I=0,N-1
Conf(1+2*I-2*N)=MOD(Nb,2)
Nb=Nb/2
500 Continue
DO 510 I=1-2*N-2,(-4)*N-3,-2
Conf(I)=1
510 Continue
Return
End

```

```

c=====

```

```

Subroutine AtribVet (P1,P2,N)
Integer P1,P2,N
Dimension P1(0:4*N+6),P2(0:4*N+6)
Integer I
DO 550 I=0,4*N+6
P2(I)=P1(I)
550 Continue
Return
End

```

```

c=====

```

```

Integer Function Cabeca (Conf,N)
Integer Conf,N
Dimension Conf(-4*N-3:+1)
Integer I
I=1
600 IF ( (Conf(I) .EQ. 0).AND.(I .GT. -4*N-3)) THEN
I=I-2
GO TO 600
END IF
Cabeca=I
Return
End

```

```

c=====

```

```

Subroutine Shift (Conf,N)
External Cabeca
Integer Conf,N
Dimension Conf(-4*N-3:+1)
Integer I,Head,Cabeca

```

```

Head=Cabeca(Conf,N)
DO 700 I=0,N
Conf(Head -2*N -2 +2*I)=Conf(Head -2*N +2*I)
700 Continue
Conf(Head)=0
Return
End
c=====
Subroutine Prob (Pol,Conf,Conf,N)
External Produto,AtribVet,Cabeca
Integer Pol,Conf,Conf,N
Dimension Pol(0:4*N+6),Conf(-4*N-4:+2),Conf(-4*N-3:+1)
Integer I,Paux,Cabeca,P0,P1,P2,P3,P4,P5
Dimension Paux(0:4*N+6),P0(0:4*N+6),P1(0:4*N+6),P2(0:4*N+6)
Dimension P3(0:4*N+6),P4(0:4*N+6),P5(0:4*N+6)
Do 01 I=0,4*N+6
P0(I)=0
P1(I)=0
P2(I)=0
P3(I)=0
P4(I)=0
P5(I)=0
01 Continue
P1(0)=1
P2(0)=1
P3(1)=1
P4(0)=1
P5(2)=1
P2(1)=-1
P4(2)=-1
Pol(0)=1
DO 800 I=1,4*N+6
Pol(I)=0
800 Continue
DO 810 I=1,Cabeca(Conf,N) -2*N,-2
IF( Conf(I).EQ.0) THEN
GO TO (820,830,840), Conf(I+1)+Conf(I-1)+1
820 Call Produto(P1,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 880
830 Call Produto(P3,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 880
840 Call Produto(P5,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 880
ELSE
GO TO (850,860,870), Conf(I+1)+Conf(I-1)+1
850 Call Produto(P0,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 890

```



```

860 Call Produto(P2,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 880
870 Call Produto(P4,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 880
880 END IF
810 Continue
890 Return
End
c=====
Subroutine ProbPG (Pol,Confi,Conff,N)
External Produto,AtribVet,Cabeca
Integer Pol,Confi,Conff,N
Dimension Pol(0:4*N+6),Confi(-4*N-4:+2),Conff(-4*N-3:+1)
Integer I,Paux,Cabeca,P0,P1,P2,P3,P4,P5
Dimension Paux(0:4*N+6),P0(0:4*N+6),P1(0:4*N+6),P2(0:4*N+6)
Dimension P3(0:4*N+6),P4(0:4*N+6),P5(0:4*N+6)
Do 01 I=0,4*N+6
P0(I)=0
P1(I)=0
P2(I)=0
P3(I)=0
P4(I)=0
P5(I)=0
01 Continue
P1(0)=1
P2(0)=1
P3(1)=1
P4(0)=1
P5(2)=1
P2(1)=-1
P4(2)=-1
Pol(0)=1
DO 900 I=1,4*N+6
Pol(I)=0
900 Continue
DO 910 I=1,Cabeca(Conff,N)+2,-2
GO TO (920,930,940), Confi(I+1)+Confi(I-1)+1
920 Call Produto(P1,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 910
930 Call Produto(P3,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 910
940 Call Produto(P5,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
GO TO 910
910 Continue
DO 950 I=Cabeca(Conff,N)-2,Cabeca(Conff,N) -2*N,-2
IF ( Conff(I) .EQ.0 ) THEN

```

```

Call Produto(P5,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
ELSE
Call Produto(P4,Pol,Paux,N)
Call AtribVet(Paux,Pol,N)
END IF
950 Continue
Return
End

```

```

=====
Subroutine ProbTotal(Confi,Conff,Pol,N)
External Prob,Soma,AtribVet,Shift,ProbPG
Integer Confi,Conff,Pol,N
Dimension Confi(-4*N-4:+2),Conff(-4*N-3:+1),Pol(0:4*N+6)
Integer I,Paux1,Paux2
Dimension Paux1(0:4*N+6),Paux2(0:4*N+6)
COMMON/Area1/P0,P1,P2,P3,P4,P5
DO 1000 I=0,4*N+6
Pol(I)=0
1000 Continue
DO 1010 I=1,1-2*N-2,-2
Call Prob(Paux1,Confi,Conff,N)
Call Soma(Pol,Paux1,Paux2,N)
Call AtribVet(Paux2,Pol,N)
Call Shift(Conff,N)
1010 Continue
Call ProbPG(Paux1,Confi,Conff,N)
Call Soma(Pol,Paux1,Paux2,N)
Call AtribVet(Paux2,Pol,N)
Return
End

```

```

=====
Integer Function Delta (I,J)
Integer I,J
IF (I.EQ.J) THEN
Delta=1
ELSE
Delta=0
END IF
Return
End

```

```

=====
Subroutine SNum (X,dX,Y,dY,Z,dZ)
Real*8 X,dX,Y,dY,Z,dZ
Z=X+Y
dZ=dX+dY
Return
End

```

```

=====
Subroutine MNum (X,dX,Y,dY,Z,dZ)
Real*8 X,dX,Y,dY,Z,dZ

```

```

Real*8 Aux1,Aux2
Z=X*Y
Aux1= (DABS(X)+dX) * (DABS(Y)+dY)
IF ( (dX.LT.DABS(X)).AND.(dY.LT.DABS(Y)) ) THEN
Aux2= ( DABS(X)-dX )*( DABS(Y)-dY )
dZ= DMAX1( (DABS(Z)-Aux2),(Aux1-DABS(Z)) )
ELSE IF ( (dX.GE.DABS(X)).AND.(dY.GE.DABS(Y)) ) THEN
Aux2=DMAX1( (dX-DABS(X))*(DABS(Y)+dY) , (DABS(X)+dX)*(dY - aDABS(Y)) )
dZ= DMAX1( (Aux1-DABS(Z)) , (DABS(Z)+Aux2) )
ELSE IF (dX.LT.DABS(X)) THEN
Aux2= ( DABS(X)+dX )*( dY-DABS(Y) )
dZ= DMAX1 ( (Aux1-DABS(Z)) , (DABS(Z)+Aux2) )
ELSE IF (dY.LT.DABS(Y)) THEN
Aux2= (DABS(Y)+dY)*(dX-DABS(X))
dZ= DMAX1 ( (Aux1-DABS(Z)) , (DABS(Z)+Aux2) )
END IF
Return
End
c=====
Subroutine DNum (X,dX,Y,dY,Z,dZ)
Real*8 X,dX,Y,dY,Z,dZ
Real*8 Aux1,Aux2
Z=X/Y
IF ( dY.GE.DABS(Y) ) THEN
dZ= -1D0
ELSE IF ( dX .LT. DABS(X) ) THEN
Aux1= (DABS(X)+dX)/(DABS(Y)-dY)
Aux2= (DABS(X)-dX)/(DABS(Y)+dY)
dZ= DMAX1( (Aux1-DABS(Z)) , (DABS(Z)-Aux2) )
ELSE IF (dX.GE.DABS(X)) THEN
Aux1= (DABS(X)+dX)/(DABS(Y)-dY)
Aux2= (dX-DABS(X))/(DABS(Y)-dY)
dZ= DMAX1 ( (Aux1-DABS(Z)) , (DABS(Z)+Aux2) )
END IF
Return
End
c=====

```

B Programa II

```
program percolacao1
integer m,n,tempo
double precision p
parameter (m=32,n=9,p=0.6333,tempo=2**30)
logical v1,v2,a,b
integer i,j,k,marc,cont,posicao,ind,idum
real vmd,a1,a2
real ran2
EXTERNAL RAN2
dimension v1(0:m),v2(1:m+1),vmd(0:30)
OPEN(1,FILE='arqs9df.dat')
idum=41
a=.true.
v1(0)=.false.
v2(m+1)=.true.
posicao=0
marc=0
do i=1,m
v1(i)=.true.
end do
v1(3)=.false.
v1(2)=.false.
do cont=1,tempo
do j=1,m
a1=ran2(idum)
a2=ran2(idum)
v2(j)=v1(j-1).and.(a1.le.p).or.v1(j).and.(a2.le.p)
end do
do j=1,m+1
if (v2(j).eqv.a) then
go to 20
end if
end do
20 posicao=posicao+1-(j-1)*2
if (cont.eq.2**marc) then
vmd(marc)=real(posicao)/real(cont)
write (1,*)marc,vmd(marc)
write (*,*)marc,vmd(marc)
marc=marc+1
end if
do k=j,m
v1(k-j+1)=v2(k)
end do
do k=m-(j-1)+1,m
v1(k)=.true.
end do
do k=n+2,m
v1(k)=.true.
end do
end do
```

```

stop
end
c----- Função Geradora de Números Aleatórios [8] -----
REAL FUNCTION RAN2(IDUM)
INTEGER IDUM,IM1,IM2,IMM1,IA1,IA2,IQ1,IQ2,IR1,IR2,NTAB,NDIV
REAL AM,EPS,RNMX
PARAMETER(IM1=2147483563,IM2=2147483399,AM=1./IM1,IMM1=IM1-1)
PARAMETER(IA1=40014,IA2=40692,IQ1=53668,IQ2=52774,IR1=12211)
PARAMETER(IR2=3791,NTAB=32,NDIV=1+IMM1/NTAB,EPS=1.2E-7)
PARAMETER(RNMX=1.-EPS)
INTEGER IDUM2,J,K,IV(NTAB),IY
SAVE IV,IY,IDUM2
DATA IDUM2/123456789/,IV/NTAB*0/,IY/0/
IF(IDUM.LE.0)THEN
IDUM=MAX(-IDUM,1)
IDUM2=IDUM
DO J=NTAB+8,1,-1
K=IDUM/IQ1
IDUM=IA1*(IDUM-K*IQ1)-K*IR1
IF(IDUM.LT.0)IDUM=IDUM+IM1
IF(J.LE.NTAB)IV(J)=IDUM
ENDDO
IY=IV(1)
ENDIF
K=IDUM/IQ1
IDUM=IA1*(IDUM-K*IQ1)-K*IR1
IF(IDUM.LT.0)IDUM=IDUM+IM1
K=IDUM2/IQ2
IDUM2=IA2*(IDUM2-K*IQ2)-K*IR2
IF(IDUM2.LT.0)IDUM2=IDUM2+IM2
J=1+IY/NDIV
IY=IV(J)-IDUM2
IV(J)=IDUM
IF(IY.LT.1)IY=IY+IMM1
RAN2=MIN(AM*IY,RNMX)
RETURN
END

```

Referências

- [1] R. Durrett. (1984) *Oriented Percolation in Two Dimensions*. The Annals of Probability, 12(4), 999-1040.
- [2] G. Grimmett. (1999) *Percolation*. Springer Verlag.
- [3] G.Fayolle/V.A.Malyshev/M.V.Menshikov. (1995)
Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains. Cambridge University Press.
- [4] Hoel; Port; Stone. (1972) *Introduction to Stochastic Processes*. Houghton Mifflin Company.
- [5] B. R. James. (1996) *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Projeto Euclides.
- [6] R. G. Bartle. (1995) *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Willey & Sons Inc.
- [7] J. H. Wilkinson. (1963) *Rounding Errors in Algebraic Processes*. Her Majesty's Stationary Office.
- [8] W. H. Press. (1992)
Numerical Recipes in FORTRAN: the art of scientific computing. Cambridge University Press.