**Alguns Testes de Linearidade para
Séries Temporais nos Domínios do
Tempo e da Frequência**

Alessandra Montini Ventura

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Estatística

Orientadora: Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Tolo

São Paulo, março de 2000.

Alguns Testes de Linearidade para Séries Temporais nos Domínios do Tempo e da Frequência

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Alessandra Montini Ventura e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 31 de março de 2000.

Banca examinadora:

Professora Dra. Clélia Maria de Castro Toloi (Orientadora) - IME - USP

Professor Dr. Pedro Alberto Morettin - IME - USP

Professor Dr. Afrânio R. Mesquita - IO - USP

Para minhas sobrinhas Elisa e Sabrina que são
as fontes de alegria da minha vida.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força e coragem.

Aos meus pais, pelo carinho e amor despendidos por mim nestes anos, meu eterno obrigada.

Ao meu marido Gilberto pela paciência, companheirismo e amor, obrigada.

Às minhas tias Mirta e Miriam e a minha avó D.Benta pela ajuda e apoio nos momentos difíceis.

Sou grata em especial ao Prof. Canton pela amizade, confiança, incentivo e por sempre acreditar em mim, muito obrigada.

Agradeço também minhas grandes amigas Carine e Maria Paula pelos bons momentos em que vivemos e pelos momentos difíceis que passamos juntas nesta grande caminhada.

Agradeço também à minha orientadora Clélia pela amizade e orientação.

Resumo

Um problema prático, encontrado ao ajustar um modelo a uma série temporal, é decidir se devemos utilizar, ou não, um modelo linear. Os testes de linearidade podem ser utilizados para decidir quando devemos usar a classe dos modelos lineares cuja identificação, estimação e previsão está amplamente desenvolvida e implementada nos programas computacionais. Este trabalho tem como objetivo descrever e aplicar a algumas séries reais os testes de linearidade e normalidade de Subba Rao e Gabr (1980), Hinich (1982), McLeod e Li (1983), Tsay (1986), Poggi e Portier (1997) e Brillinger e Irizarry (1998).

Abstract

A practical problem, found when fitting a model to a time series, is to decide if we must use, or not, a linear model. The linearity tests can be used to decide when we must use the class of the linear models whose identification, estimation and forecast are widely developed and implemented in the computational programs. This work has as objective to describe and to apply to some series the tests of linearity and normality of Subba Rao and Gabr (1980), Hinich (1982), McLeod and Li (1983), Tsay (1986), Poggi and Portier (1997) and Brillinger and Irizarry (1998).

Conteúdo

Capítulo 1 Introdução.....	1
Capítulo 2 Definições e alguns resultados	3
Capítulo 3 Modelos lineares em séries temporais	13
3.1 Introdução.....	13
3.2 Modelo auto-regressivo de médias móveis	15
3.3 Extensões do modelo auto-regressivo de médias móveis	16
3.4 Modelo linear e estacionariedade.....	17
Capítulo 4 Alguns modelos não-lineares em séries temporais	19
4.1 Introdução.....	19
4.2 Algumas características importantes de sistemas não-lineares	20
4.3 Alguns modelos não-lineares.....	25
Capítulo 5 Testes de linearidade e normalidade no domínio de frequências	43
5.1 Testes de Subba Rao e Gabr	44
5.2 Testes de Hinich.....	57
5.3 Testes de Brillinger e Irizarry	63

Capítulo 6 Testes de linearidade no domínio do tempo.....	68
6.1 Teste de MacLeod e Li.....	68
6.2 Teste de Tsay	70
6.3 Teste de Poggi e Portier	73
6.4 Outros testes de linearidade.....	78
Capítulo 7 Aplicações	79
7.1 Introdução.....	79
7.2 Total de óbitos por causas respiratórias	82
7.3 Total de óbitos para crianças de 1 a 11 meses.....	91
7.4 Média da concentração do agente poluidor PM10.....	100
7.5 Temperatura mínima	109
7.6 Considerações finais.....	118
Bibliografia.....	119
Apêndice A Dados	122
Apêndice B Programas.....	131

Capítulo 1

Introdução

Muitos fenômenos físicos e o comportamentos de muitas séries financeiras não podem ser representados adequadamente pelos modelos lineares e por esta razão, surge a necessidade do estudo dos modelos não-lineares e dos espectros de altas ordens que fornecem informações importantes sobre as séries não-lineares. Quando a série é linear o espectro de segunda ordem contém toda a informação presente na série e, quando a série é não-linear, o espectro de segunda ordem não capta as características de não linearidade e, desta forma, surge a necessidade do estudo dos espectros de altas ordens para detectar as características de linearidade e não normalidade. O tipo mais simples de análise espectral de alta ordem é a análise bi-espectral, cuja literatura está amplamente desenvolvida e é a base para os testes de linearidade e normalidade no domínio da frequências que serão desenvolvidos neste trabalho.

Neste trabalho abordamos os testes de linearidade baseados no domínio do tempo de McLeod e Li (1983), Tsay (1986) e Poggi e Portier (1997) e os testes de linearidade e normalidade baseados no domínio de frequências de Subba Rao e Gabr (1980), Hinich (1982) e Brillinger e Irizarry (1998).

No Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados que serão utilizados e citados nos capítulos posteriores.

No Capítulo 3 abordamos os modelos lineares, enquanto que no Capítulo 4 abordamos alguns modelos não-lineares e algumas das características importantes destes modelos.

No Capítulo 5 descrevemos alguns testes de linearidade e normalidade no domínio de frequências e no Capítulo 6 apresentamos alguns testes de linearidade no domínio do tempo.

Por fim, no Capítulo 7 fazemos uma aplicação dos testes citados anteriormente às séries de concentração de poeira, temperatura e óbitos da cidade de São Paulo.

Capítulo 2

Definições e alguns resultados

Definição 2.1: Um *processo estocástico* $X = \{ X_{t,\theta} ; t \in T, \theta \in \Omega \}$ é um conjunto de variáveis aleatórias definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e indexadas pelos elementos do conjunto de parâmetros T . O conjunto T é usualmente o conjunto dos números inteiros ou o conjunto dos números reais. Para cada $\theta \in \Omega$ fixado temos uma *série temporal* $X_{t,\theta}$. Visando a simplificação da notação, a partir desse momento, a série temporal $X_{t,\theta}$ será denotada por X_t .

Definição 2.2: As distribuições *finito-dimensionais* de uma série temporal X_t são dadas por

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \quad (2.1)$$

em que $n \geq 1$; $t_1, \dots, t_n \in T$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3: As funções *média*, *variância*, *autocovariância* e *autocorrelação* de uma série temporal são dadas por

$$E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X dF(x; t) = \mu_t; \quad (2.2)$$

$$\text{Var}(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_t)^2 dF(x; t) = \gamma_x(t, t); \quad (2.3)$$

$$\text{Cov}(X_j, X_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k) dF(x_j, x_k; j, k) = \gamma_x(j, k); \quad (2.4)$$

$$\rho_x(j, k) = \frac{\gamma_x(j, k)}{\sqrt{\gamma_x(j, j)} \sqrt{\gamma_x(k, k)}}. \quad (2.5)$$

Definição 2.4: Uma série temporal X_t , $t \in T$, é *estritamente estacionária* se todas as distribuições finito-dimensionais forem invariantes sob translações em t , ou seja,

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t), \quad (2.6)$$

para quaisquer $t_1, \dots, t_n, \Delta t \in T$.

Definição 2.5: Uma série temporal X_t , $t \in T$, é *fracamente estacionária* se e somente se

$$E(X_t) = \mu_t = \mu, \quad \forall t \in T; \quad (2.7)$$

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty, \quad \forall t \in T; \quad (2.8)$$

$$\gamma_x(j, k) = \gamma(|j - k|). \quad (2.9)$$

Isto quer dizer que $\gamma_x(j, k)$ depende apenas da defasagem entre j e k e, conseqüentemente, $\rho_x(j, k) = \rho(|j - k|)$.

Definição 2.6: Um processo estocástico X_t diz-se *gaussiano*, ou *normal*, se para qualquer conjunto $t_1, \dots, t_n \in T$, as variáveis aleatórias $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ possuem distribuição conjunta normal n-variada, isto é,

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\mathbf{C}|^{-1/2} \exp(-(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})/2), \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{X} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$, $\mathbf{C} = \{C(s, t), s, t = 0, 1, \dots, n-1\}$ é a matriz de covariâncias de $\mathbf{X}$ e $\boldsymbol{\mu}$ é o valor esperado do vetor $\mathbf{X}$.

Definição 2.7: Um processo de variáveis aleatórias independentes e_t , $t \in T$, é chamado de *ruído branco* se e somente se

$$E(e_t) = \mu \text{ e } \text{Var}(e_t) = \sigma_e^2. \quad (2.11)$$

Definição 2.8: Seja $\{X_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ uma série temporal estacionária até ordem k , satisfazendo $\sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{s_{k-1}=-\infty}^{+\infty} |C(s_1, \dots, s_{k-1})| < \infty$, em que $C(s_1, \dots, s_{k-1}) = E(X_t - \mu)(X_{t+s_1} - \mu) \dots (X_{t+s_{k-1}} - \mu)$. O *poliespectro de ordem k*, nas frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}$ é dado por

$$f_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{k-1} \sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{s_{k-1}=-\infty}^{+\infty} C(s_1, \dots, s_{k-1}) \exp(-i(\omega_1 s_1 + \dots + \omega_{k-1} s_{k-1})), \quad (2.12)$$

em que $-\pi \leq \omega_j \leq \pi$ e $j=1, \dots, k-1$. A quantidade $C(s_1, \dots, s_{k-1})$ é denominada *autocovariância* de k-ésima ordem.

Casos particulares:

i) No caso em que $k=2$, temos a *função densidade espectral*

$$f_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \gamma(s) \exp(-i\omega s), \quad (2.13)$$

em que $\gamma(s) = \text{Cov}(X_t, X_{t+s})$ e $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Se X_t for um processo linear e gaussiano então $f_x(\omega)$ irá conter toda a informação do processo.

ii) No caso em que $k=3$, temos a *função densidade bi-espectral*

$$f_x(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \right) \sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{+\infty} C(s_1, s_2) \exp(-i(s_1\omega_1 + s_2\omega_2)), \quad (2.14)$$

para $-\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi$.

As funções densidade bi-espectral e autocovariância de terceira ordem satisfazem a propriedade de simetria, isto é,

$$f_x(\omega_1, \omega_2) = f_x(\omega_2, \omega_1) = f_x(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = f_x(-\omega_1, -\omega_2)^* = f_x(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2)$$

e

$$C(s_1, s_2) = C(s_2, s_1) = C(-s_1, s_2 - s_1) = C(s_1 - s_2, s_2)$$

em que $*$ denota o conjugado .

A propriedade mais importante do poliespectro é que todo poliespectro de ordem maior ou igual a dois é igual a zero quando X_t é um processo gaussiano.

Definição 2.9: A *transformada discreta de Fourier*, de uma série temporal estacionária $\{X_t, t=0, 1, \dots, T-1\}$ é dada por

$$d^T(\omega_k) = \sum_{t=0}^{T-1} X_t \exp(-i\omega_k t) \quad k=0,1,\dots,T-1, \quad (2.15)$$

em que $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$.

Resultado

A transformada discreta de Fourier possui a seguinte distribuição assintótica

$$d^T(\omega_1) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} \begin{cases} N^c(0, 2\pi T f_x(\omega_1)) & \text{se } \omega_1 \neq (0 \bmod \pi) \\ N(TE(X_1), 2\pi T f_x(\omega_1)) & \text{se } \omega_1 = 0, \pm 2\pi, \dots \\ N(0, 2\pi T f_x(\omega_1)) & \text{se } \omega_1 = 0, \pm \pi, \pm 3\pi, \dots \end{cases} \quad (2.16)$$

Definição 2.10: Seja $\{X_t, t=0,1,\dots,T-1\}$ uma amostra de tamanho T de série temporal estacionária. O *periodograma*, estimador natural para a função densidade espectral, $f_x(\omega)$, é dado por

$$I^T(\omega_k) = \frac{|d^T(\omega_k)|^2}{2\pi T} \quad k = 0, \dots, T-1, \quad (2.17)$$

em que $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$.

Resultado

O periodograma, dado por (2.17), possui as seguintes propriedades

- $E(I^T(\omega_k)) = f_x(\omega_k) + O(T^{-1})$;

- $\text{Var}(I^T(\omega_k)) = f_x^2(\omega_k) + O(T^{-1});$
- $\frac{2I^T(\omega_k)}{f_x(\omega_k)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} \chi_2^2.$

Definição 2.11: Seja $\{X_t, t=0, 1, \dots, T-1\}$ uma série temporal estacionária. O *periodograma suavizado* é dado por

$$\hat{f}_x^s(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^T(\lambda - \omega_s) I^T(\omega_s), \quad -\infty < \lambda < \infty \quad (2.18)$$

em que $\omega_s = \frac{2\pi s}{T}$, $-\infty < \omega_s < \infty$, $W^T(\alpha)$, $-\infty < \alpha < \infty$, $T=1, 2, \dots$ é uma família de funções peso de período 2π definida de tal forma que a expressão (2.18) envolve uma ponderação de $(2m_T+1)$ ordenadas na vizinhança da frequência λ , m_T satisfaz as seguintes restrições: $m_T \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} \infty$ e $\frac{m_T}{T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} 0$.

Uma maneira conveniente de construir a função peso W^T é considerar a sequência de parâmetros B_T , $T=1, 2, \dots$, satisfazendo $B_T > 0$, $B_T \rightarrow 0$, $B_T T \rightarrow \infty$ quando $T \rightarrow \infty$ e considerando

$$W^T(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_T^{-1} W(B_T^{-1}(\alpha + 2\pi j)) \quad -\infty < \alpha < \infty,$$

em que $W(\beta)$, $-\infty < \beta < \infty$ é uma função peso que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} W(\beta) d\beta = 1;$

- $\int_{-\infty}^{\infty} |W(\beta)| d\beta < \infty.$

Definição 2.12: Seja $\{X_t, t=0,1,2,\dots,T-1\}$ uma série temporal estacionária, o *estimador suavizado de covariâncias* da função densidade espectral é dado por

$$\hat{f}_x(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda_M(s) \hat{\gamma}(s) \cos(s\omega_1), \quad (2.19)$$

em que $\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-s-1} (X_t - \bar{X})(X_{t+s} - \bar{X})$, $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X_t$ e $\lambda_M(\cdot)$ é uma função peso, denominada núcleo, que satisfaz as condições seguintes:

- $0 \leq \lambda_M(s) \leq \lambda_M(0) \leq 1$;
- $\lambda_M(-s) \leq \lambda_M(s)$, para todo s ;
- $\lambda_M(s) = 0$, para $|s| > M$.

Na Tabela 2.1 estão alguns exemplos de núcleos que podem ser utilizados no cálculo do estimador da função densidade espectral dado por (2.19), em que

$$\lambda_M(s) = k\left(\frac{s}{M}\right).$$

Tabela 2.1 - Geradores de "lag window"

Daniel	$k(u) = \frac{\text{sen}(u\pi)}{(u\pi)}$
Tukey-Hamming	$k(u) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(u\pi) & u \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$
Bartlett-Priestley	$k(u) = \frac{3}{(u\pi)^2} \left(\frac{\text{sen}(u\pi)}{u\pi} - \cos(u\pi) \right)$
Parzen	$k(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6 u ^3 & u \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - u)^3 & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Resultado

Pode-se demonstrar que, os estimadores periodograma suavizado, dado por (2.18), e suavizado de covariâncias, dado por (2.19), são assintoticamente equivalentes se

$$W^T(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} \exp(-i\alpha\tau) \lambda_M(\tau).$$

Propriedades

- $E(\hat{f}_x^s(\omega_k)) = f_x(\omega_k) + O(T^{-1})$;

$$\bullet \quad \text{Var}(\hat{f}_x^s(\omega_k)) = \begin{cases} f_x^2(\omega_k) \sum_{j=-m}^m W_j^2 + O(T^{-1}) & \text{para } \omega_k \equiv (0 \bmod \pi) \\ \frac{f_x^2(\omega_k) \sum_{j=1}^m W_j^2}{\left(\sum_{j=1}^m W_j\right)^2} & \text{para } \omega_k \equiv (0 \bmod \pi) \end{cases}$$

Definição 2.13: Seja $\{X_t, t=0,1,2,\dots,T-1\}$ uma série temporal estacionária, o *estimador suavizado de bi-covariâncias* da função densidade bi-espectral é dado por

$$\hat{f}_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{s_1=-(T-1)}^{(T-1)} \sum_{s_2=-(T-1)}^{(T-1)} \lambda\left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}\right) \hat{C}(s_1, s_2) \exp(-is_1\omega_1 - is_2\omega_2), \quad (2.20)$$

em que

$$\hat{C}(s_1, s_2) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1-\gamma} (X_t - \bar{X})(X_{t+s_1} - \bar{X})(X_{t+s_2} - \bar{X}) \quad \text{para } s_1, s_2 \geq 0, \quad \gamma = \max(0, s_1, s_2),$$

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X_t \quad \text{e } \lambda(.,.) \text{ é uma função peso, com dois argumentos, denominada núcleo}$$

que satisfaz as seguintes condições

$$\bullet \quad \lambda(t,s) = \lambda(s,t) = \lambda(-t,s-t) = \lambda(s-t,-t); \quad (2.21)$$

$$\bullet \quad \lambda(t,s) = \lambda_M(t) \lambda_M(s) \lambda_M(t-s). \quad (2.22)$$

Definição 2.14: Seja $\{X_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ uma série temporal estacionária. A *bi-coerência* nas frequências (ω_1, ω_2) é dada por

$$\gamma^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|f_x(\omega_1, \omega_2)|^2}{f_x(\omega_1)f_x(\omega_2)f_x(\omega_1 + \omega_2)}, \quad (2.23)$$

para $0 \leq \omega_2 \leq \omega_1$ e $\omega_1 + \frac{\omega_2}{2} \leq \pi$.

Definição 2.15: Seja $\{X_t, t=0,1,2,\dots,T-1\}$ uma série temporal estacionária, um *estimador da bi-coerência* é dado por

$$\hat{\gamma}^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|\hat{f}_x(\omega_1, \omega_2)|^2}{\hat{f}_x(\omega_1)\hat{f}_x(\omega_2)\hat{f}_x(\omega_1 + \omega_2)}, \quad (2.24)$$

para $0 \leq \omega_2 \leq \omega_1$ e $\omega_1 + \frac{\omega_2}{2} \leq \pi$, em que $\hat{f}_x(\omega_1)$ e $\hat{f}_x(\omega_1, \omega_2)$ são dados pelas expressões (2.19) e (2.20), respectivamente.

Definição 2.16: O processo X_t será uma *diferença martingala* quando satisfizer as condições

i) $E|X_t| < \infty$ para todo t ;

ii) $E(X_t / f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)) = 0$ para todo t .

Todas as diferenças martingalas possuem média zero e são serialmente não-correlacionadas. Uma diferença martingala impõe uma condição mais forte do que não-autocorrelação. Uma sequência serialmente não-correlacionada não pode ser prevista com base em uma função linear de seus valores passados. No caso de uma diferença martingala, nenhuma sequência de valores passados, linear ou não-linear, pode prevê-la.

Capítulo 3

Modelos Lineares em Séries Temporais

3.1 Introdução

Quando modelamos uma série temporal X_t $\{t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ queremos obter uma relação entre $\dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots$ que resulte em um processo ruído branco e_t . Desta forma um modelo geral para X_t pode ser dado por

$$h(\dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots) = e_t. \quad (3.1)$$

Quando a função $h(\cdot)$ é linear temos um modelo linear para X_t e a expressão (3.1) pode ser reescrita como

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} h_u X_{t-u} = e_t, \quad (3.2)$$

em que $\{h_u\}$ é uma sequência de constantes.

A expressão (3.2) mostra a forma geral de um modelo linear para a série X_t , levando em conta que X_t depende de valores passados, presente e futuros. Considerando que X_t dependa somente de valores passados temos que

$$\sum_{u=0}^{\infty} h_u X_{t-u} = e_t \quad (3.3)$$

Podemos reescrever a expressão (3.3) na seguinte forma

$$H(B)X_t = e_t, \quad (3.4)$$

em que $H(B) = \sum_{u=0}^{\infty} h_u B^u$ e $B^m X_t = X_{t-m}$.

Se as raízes de $H(B)=0$ forem, em módulo, maiores que um podemos inverter a expressão (3.4) e obter

$$X_t = H^{-1}(B)e_t = G(B)e_t, \quad (3.5)$$

em que $G(B) = g_0 + g_1 B + g_2 B^2 + \dots$

Desta forma a série X_t pode ser representada pela expressão

$$X_t = \sum_{u=0}^{\infty} g_u e_{t-u} \quad (3.6)$$

Se considerarmos e_t um processo de entrada e X_t um processo de saída, a função $G(B)$ é chamada de função de transferência do modelo.

3.2 Modelo auto-regressivo de médias móveis

Definição 3.1: Uma série temporal X_t $\{t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ segue um modelo *auto-regressivo de médias móveis* de ordem p, q , ARMA(p, q), se satisfizer a equação

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}, \quad (3.7)$$

em que

e_t é um processo ruído branco com média zero e variância σ_e^2 constante;

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ são os parâmetros do modelo.

A expressão (3.7) pode ser reescrita na forma reduzida

$$\phi(B)X_t = \theta(B)e_t, \quad (3.8)$$

em que

$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$ é o operador auto-regressivo de ordem p ;

$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$ é o operador de médias móveis de ordem q ;

$B^m X_t = X_{t-m}$.

O modelo (3.8) será estacionário se a série $\theta(B)$ convergir para $|B| \leq 1$ e será invertível se $\phi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$, ou seja, o modelo será estacionário se as raízes de $\phi(B)=0$ forem, em módulo, maiores que um e será invertível se as raízes de $\theta(B)=0$ forem, em módulo, maiores que um. Para maiores detalhes, ver Box, Jenkins e Reinsel (1994).

Se na expressão (3.7), $\phi_j=0$ para $j > p$ e $\theta_q=0$ para todo q , obteremos o *modelo auto-regressivo de ordem p* , que denotaremos por AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t \quad (3.9)$$

ou

$$\phi(B)X_t = e_t. \quad (3.10)$$

O modelo (3.10) será estacionário se a série $\phi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$ e será sempre invertível, ou seja, o modelo será estacionário e invertível se as raízes de $\phi(B)=0$ forem em módulo maiores que um.

Se na expressão (3.7), $\theta_j=0$ para $j>q$ e $\phi_p=0$ para todo p , obteremos o *modelo de médias móveis de ordem q*, que denotaremos por MA(q)

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (3.11)$$

ou

$$X_t = \theta(B)e_t. \quad (3.12)$$

O modelo (3.12) será sempre estacionário e será invertível se a série $\theta(B)$ convergir para $|B| \leq 1$, ou seja, o modelo será estacionário e invertível se as raízes de $\theta(B)=0$ forem em módulo maiores que um.

3.3 Extensões do modelo auto-regressivo de médias móveis

Existem alguns tipos de séries temporais que são não estacionárias mas tornam-se estacionárias ao aplicarmos sucessivas diferenças à série original. Esta é uma característica do *modelo auto-regressivo integrado de médias móveis*. Algumas séries temporais apresentam componentes periódicas que se repetem com período S e esta característica é incorporada pelo *modelo sazonal auto-regressivo de médias móveis*. O modelo que incorpora as características de não estacionariedade e sazonalidade de uma série temporal é chamado de *modelo auto-*

regressivo integrado médias móveis sazonal, que denotaremos por $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ e é dado por

$$\Phi_P(B^S)\phi(B)\Delta_s^D\Delta^dX_t=\Theta_Q(B^S)\theta(B)\epsilon_t, \quad (3.13)$$

em que

$\Phi_P(B^S)=(1-\phi_1B^S-\phi_2B^{2S}-\dots-\phi_PB^{PS})$ é o operador auto-regressivo sazonal de ordem P ;
 $\Theta_Q(B^S)=(1-\theta_1B^S-\theta_2B^{2S}-\dots-\theta_QB^{QS})$ é o operador de médias móveis sazonal de ordem Q ;

$\phi(B)=(1-\phi_1B-\phi_2B^2-\dots-\phi_pB^p)$ é o operador auto-regressivo de ordem p ;

$\theta(B)=(1-\theta_1B-\theta_2B^2-\dots-\theta_qB^q)$ é o operador de médias móveis de ordem q ;

$\Delta^d=(1-B)^d$ e $\Delta_s^D=(1-B^S)^D$.

3.4 Modelo linear e estacionariedade

Segundo Priestley (1988), uma representação linear de uma série temporal estacionária X_t pode sempre ser construída, desde que X_t tenha espectro contínuo com função densidade espectral $f_x(\omega)$. Neste caso a série X_t pode ser escrita na forma

$$X_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} h_u \epsilon_{t-u}, \quad (3.14)$$

em que ϵ_t é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas.

Se $f_x(\omega)$ satisfizer $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f_x(\omega))d\omega > -\infty$, podemos substituir a expressão

(3.14) pela expressão

$$X_t = \sum_{u=0}^{\infty} h_u \varepsilon_{t-u} . \quad (3.15)$$

Devemos notar que a representação linear obtida na expressão (3.15) é diferente da representação dada pela expressão (3.6) porque na expressão (3.6), e_t é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e o processo ε_t da expressão (3.15), é uma seqüência de variáveis aleatórias não correlacionadas. Quando X_t é um processo gaussiano então ε_t é gaussiano e, por ser não correlacionado, é independente. Neste caso especial a distinção entre ε_t e e_t desaparece e a série X_t pode ser escrita como

$$X_t = \sum_{u=0}^{\infty} h_u e_{t-u} . \quad (3.16)$$

Capítulo 4

Alguns Modelos Não-Lineares em Séries Temporais

4.1 Introdução

No Capítulo 3 foi apresentada a forma geral dos modelos lineares de séries temporais. Quando X_t depende apenas dos valores passados temos que

$$h(X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = e_t. \quad (4.1)$$

Vamos supor que $h(\cdot)$ é tal que o modelo dado pela expressão (4.1) é invertível. Desta forma podemos escrever a expressão (4.1) como

$$X_t = h^{-1}(e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots). \quad (4.2)$$

Assumindo que $h^{-1}(\cdot)$ seja uma função suficientemente bem comportada e que pode ser expandida em uma série de Taylor sobre o ponto $O=(0,0,0,\dots)$, então podemos expandir o lado direito de (4.2) e escrever

$$X_t = \mu + \sum_{u=0}^{\infty} g_u e_{t-u} + \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} e_{t-u} e_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} e_{t-u} e_{t-v} e_{t-w} + \dots \quad (4.3)$$

em que $\mu=h'(0)$, $g_u=\left(\frac{\partial h}{\partial e_{t-u}}\right)_0$, $g_{uv}=\left(\frac{\partial^2 h}{\partial e_{t-u} \partial e_{t-v}}\right)_0$ e $g_{uvw}=\left(\frac{\partial^3 h}{\partial e_{t-u} \partial e_{t-v} \partial e_{t-w}}\right)_0$.

A expansão dada pela expressão (4.3) é conhecida como série de Volterra e é uma forma importante de representação para modelos não-lineares.

4.2 Algumas características importantes de sistemas não-lineares

Os sistemas não-lineares podem apresentar algumas das seguintes características:

1. Dependência amplitude-freqüência

Em alguns sistemas não-lineares a amplitude do processo é dependente da freqüência, por exemplo, a amplitude da série aumenta quando a freqüência aumenta. Este comportamento é chamado de *dependência amplitude-freqüência*. Na Figura 4.1 está representada uma série em que a amplitude é alta quando a freqüência é baixa e a amplitude é baixa quando a freqüência é alta. Na Figura 4.2

temos um exemplo de série em que a amplitude é alta quando a frequência é alta e a amplitude é baixa quando a frequência é baixa.

Figura 4.1 - Dependência amplitude-frequência.

Figura 4.2 - Dependência amplitude-frequência.

2. Fenômeno de salto

A amplitude de saída de um sistema não-linear, diferentemente de um sistema linear, pode ter "saltos" em diferentes frequências dependendo se a frequência de entrada, de amplitude constante, é monotonicamente crescente ou decrescente como mostram as Figuras 4.3 e 4.4. Este comportamento é chamado de *fenômeno de salto*. Na Figura 4.5 estão representadas a entrada e a saída de um modelo não-linear com amplitude de entrada constante, podemos notar que a amplitude de saída possui "saltos" em diferentes frequências dependendo da frequência de entrada.

Figura 4.3 – Frequência de entrada monotonicamente crescente.

Figura 4.4 - Frequência de entrada monotonicamente decrescente.

Figura 4.5 – Séries de entrada e saída de um sistema não-linear.

A amplitude de saída de um sistema linear pode também ter "saltos" em diferentes amplitudes dependendo se a amplitude de entrada, de frequência constante, é monotonicamente crescente ou decrescente. Na Figura 4.6 está representada a série de entrada, com amplitude menor e a saída, com amplitude maior, de um modelo não-linear com frequência de entrada constante.

Figura 4.6 – Séries de entrada e saída.

3. Ciclos limites

Este é um típico comportamento de séries que possuem periodicidades, o ciclo limite pode ser estável ou instável. Este comportamento pode ser detectado nos gráficos de $(X_t \times X_{t-1})$ quando ele existe. Nas Figuras 4.7 e 4.8 estão representados os ciclos limites estáveis e instáveis respectivamente.

Figura 4.7 - Ciclo limite estável.

Figura 4.8 - Ciclo limite instável.

4.3 Alguns modelos não-lineares

4.3.1 Modelo auto-regressivo com limiar (“Threshold”)

A idéia essencial da classe dos modelos auto-regressivos com limiar é a linearização por partes dos modelos não-lineares, por meio da introdução de limiares. Estes modelos são localmente lineares e foram introduzidos por Tong (1977).

Definição 4.1: Uma série temporal X_t $\{t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ segue um modelo auto-regressivo com limiar, SETAR($q, k_1, k_2, \dots, k_q$), se satisfizer a equação

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + e_t^{(j)}, \text{ se } X_{t-d} \in R_j \text{ para } j=1, 2, \dots, q, \quad (4.4)$$

em que

$e_t^{(j)}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero;

R_j é um intervalo da reta $\mathbb{R}$ tal que $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_q = \mathbb{R}$; $R_i = (r_{i-1}, r_i)$ para $-\infty < r_0 < \dots < r_q < +\infty$;

$r_0, \dots, r_{q-1}$ denotam os parâmetros de limiar;

k_j denota a ordem da j -ésima auto-regressão;

d é o parâmetro de retardo do processo;

$a_i^{(j)}$ são constantes;

q é o número de regimes do processo.

Podemos verificar que o modelo SETAR(1; k) é um modelo auto-regressivo de ordem k .

Nas Figuras 4.9 e 4.10 apresentamos 1000 observações geradas pelos modelos

$$(i) X_t = \begin{cases} 0,4 - 0,8X_{t-1} + 0,3X_{t-2} - 0,7X_{t-3} + e_t & \text{se } X_{t-1} < 2,8 \\ 0,2 + 0,9X_{t-1} + 0,4X_{t-2} - 0,6X_{t-3} + e_t & \text{se } X_{t-1} > 2,8 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$(ii) X_t = \begin{cases} 0,15 + 0,85X_{t-1} + 0,22X_{t-2} - 0,7X_{t-3} + e_t & \text{se } X_{t-1} < 1 \\ 0,30 - 0,90X_{t-1} + 0,30X_{t-2} - 0,7X_{t-3} + e_t & \text{se } X_{t-1} > 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

em que $e_t \sim N(0, (0,003)^2)$ independentes.

Figura 4.9 - Série gerada pelo modelo (4.5).

Figura 4.10 - Série gerada pelo modelo (4.6).

Segundo Priestley (1988) o modelo auto-regressivo com limiar possui as seguintes características:

- dependência amplitude-frequência;
- fenômeno de salto;
- ciclos limites.

4.3.2 Modelo bilinear

Os modelos bilineares foram introduzidos por Mohler (1973) e Ruberti et al (1972) e na literatura estatística foram introduzidos por Granger e Andersen (1978). Um estudo mais sistemático foi feito por Subba Rao (1981) e por Subba Rao e Gabr (1984).

Definição 4.2: Uma série temporal X_t $\{t=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ segue um modelo *bilinear*, $BL(p,r,m,k)$, se satisfizer a equação

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^r c_j e_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{t-i} e_{t-j}, \quad (4.7)$$

em que

$a_j, j=1,\dots,p, c_j, j=1,\dots,r, b_{ij}$ são constantes sendo $c_0=1$;

e_t é um processo ruído branco com média zero.

O modelo bilinear é uma extensão do modelo linear ARMA dado pela expressão (3.7), pois se $b_{ij}=0$ para todo i,j , então (4.7) se reduz a (3.7).

Nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 apresentamos 1000 observações geradas pelos modelos bilineares

$$(iii) X_t = 0,3X_{t-1} + 0,3X_{t-1}e_{t-1} + e_t \quad (4.8)$$

$$(iv) X_t = 0,3X_{t-1} + 0,8X_{t-1}e_{t-1} + e_t \quad (4.9)$$

$$(v) X_t = 0,8X_{t-1} - 0,3X_{t-2} + 0,5X_{t-1}e_{t-1} + 0,7X_{t-2}e_{t-1} + e_t \quad (4.10)$$

com $e_t \sim N(0,1)$ independentes.

Notamos pelas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 que a série gerada pelo modelo (4.8), que possui um pequeno coeficiente associado ao termo bilinear, possui uma forma razoavelmente convencional; a série dada pelo modelo (4.9), que possui um grande coeficiente associado ao termo bilinear, apresenta um número de explosões de grande amplitude e a série dada pelo modelo (4.10), que apresenta um adicional termo bilinear, apresenta uma extrema forma deste efeito. Estes comportamentos são características de certos dados sismológicos e particularmente de séries de terremotos e explosões subterrâneas.

Figura 4.11 – Série gerada pelo modelo (4.8).

Figura 4.12 – Série gerada pelo modelo (4.9).

Figura 4.13 – Série gerada pelo modelo (4.10).

Algumas propriedades do modelo bilinear

Para obtermos as condições de estacionariedade consideraremos o modelo bilinear $BL(p,0,p,1)$ dado por

$$X_t + \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} = e_t + \sum_{i=1}^p b_{ii} X_{t-i} e_{t-1}. \quad (4.11)$$

O modelo bilinear acima pode ser escrito na forma de espaço de estados com a seguinte representação

$$X_t = Hx_t$$

$$x_t = Ax_{t-1} + Bx_{t-1}e_{t-1} + Ce_t$$

em que

$$A_{p \times p} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{p \times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{p1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, C_{p \times 1} = (1, 0, \dots, 0)' \text{ e}$$

$$H_{1 \times p} = (1, 0, \dots, 0).$$

As condições para estacionariedade assintótica são obtidas por Subba Rao (1981) que assume que os e_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(0,1)$.

O processo é assintoticamente estacionário de primeira ordem se

$$\max |\lambda_i(A)| < 1,$$

em que $\{\lambda_i(A)\}$ é o conjunto dos autovalores da matriz A .

Segundo Subba Rao (1981) a média assintótica do processo é dada por

$$\mu = (I - A)^{-1}BC$$

e o processo é assintoticamente estacionário de segunda ordem se

$$\|A\|^2 + \|B\|^2 < 1,$$

sendo que $\|A\|^2$ denota o maior autovalor de AA' e $\|B\|^2$ denota o maior autovalor de BB' .

Assumindo que o processo X_t é estacionário de primeira e segunda ordem e que T é suficientemente grande temos que $C(s)=E(X_{t+s}-\mu)(X_t-\mu)'$ é dada por

$$C(0)=AC(0)A'+BC(0)B'+\Delta_2, \quad (4.12)$$

$$C(1)=AC(0)+\Delta_3, \quad (4.13)$$

e

$$C(s)=AC(s-1)=A^{s-1}C(1) \quad (s=2,3,\dots), \quad (4.14)$$

em que

$$\mu_t=\mu=E(x_t);$$

$$\Delta_2=B\mu\mu'B'+A'\mu\mu'A'+ASB'+BS'A'+2BCC'B'+CC'-\mu\mu';$$

$$\Delta_3=A\mu\mu'+BS-\mu\mu'.$$

Utilizando a expressão (4.14) temos que $\gamma(s)+a_1\gamma(s-1)+\dots+a_p\gamma(s-p)=0$, para $s>1$, em que $\gamma(s)=\text{Cov}(X_{t+s}, X_t)$. Estas equações são as mesmas equações de Yule-Walker para os modelos ARMA(p,1) e deste modo podemos mostrar que o modelo bilinear BL(p,0,p,1) apresenta a mesma estrutura de covariância assintótica do modelo ARMA(p,1).

O processo é invertível se $H'BE(x(s)x'(s))B'H < (H'C)^2$.

O modelo bilinear possui a característica de captar saltos na série como pode ser visto pelas Figuras 4.12 e 4.13.

4.3.3 Modelo auto-regressivo exponencial

Os modelos auto-regressivos exponenciais foram introduzidos por Ozaki (1978), Lawrance e Lewis (1980) e Haggan e Ozaki (1981).

Definição 4.3: Uma série temporal X_t $\{t=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ segue um modelo *auto-regressivo exponencial* de ordem k , EXPAR(k), se satisfizer a equação

$$X_t = (\phi_1 + \pi_1 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-1} + \dots + (\phi_k + \pi_k \exp(-\gamma X_{t-k}^2)) X_{t-k} + e_t, \quad (4.15)$$

em que

$\gamma, \pi_1, \dots, \pi_k, \phi_1, \dots, \phi_k$ são constantes sendo que $\gamma > 0$;

e_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância finita.

O modelo auto-regressivo exponencial de ordem 2 pode ser representado de forma similar ao modelo auto-regressivo com limiar por meio da seguinte forma

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + e_t, \quad (4.16)$$

em que $a_1 = \phi_1 + \pi_1 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)$ e $a_2 = \phi_2 + \pi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)$.

Para valores grandes de $|X_t|$ temos que $a_1 \sim \phi_1$ e $a_2 \sim \phi_2$ e para valores pequenos de $|X_t|$ temos que $a_1 \sim \phi_1 + \pi_1$ e $a_2 \sim \phi_2 + \pi_2$.

O modelo auto-regressivo exponencial de ordem 2 têm um comportamento semelhante ao modelo auto-regressivo com limiar mas os coeficientes mudam suavemente entre os dois extremos.

Segundo Priestley (1988) o modelo auto-regressivo exponencial possui as seguintes características:

- dependência amplitude-frequência;
- fenômeno de salto;
- ciclos limites.

4.3.4 Modelo auto-regressivo com coeficientes aleatórios

Andel (1976) verificou que quando modelamos séries hidrológicas, meteorológicas e biológicas os coeficientes do modelo considerado, resultam de um complicado processo que usualmente possui características aleatórias. Estas características fizeram com que Andel considerasse modelos auto-regressivos com coeficientes aleatórios.

Definição 4.4: Uma série temporal X_t $\{t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ segue um modelo *auto-regressivo com coeficientes aleatórios* de ordem k , RCA(k), se satisfizer a equação

$$X_t = \sum_{i=1}^k [\beta_i + B_i(t)] X_{t-i} + e_t, \quad (4.17)$$

em que

e_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância σ^2 ;

β_i , $i=1, \dots, k$ são constantes;

$B(t)=[B_1(t), \dots, B_k(t)]$ é uma sequência de vetores aleatórios independentes com média zero e $E[B^l(t)B(t)]=C$;

$B(t)$ é independente de e_t .

Notamos através de (4.17) que se os elementos de C forem pequenos comparados com os valores de β_i o modelo é semelhante ao modelo auto-regressivo dado por (3.9). Quando os valores de $B_i(t)$ forem grandes comparados com os valores de β_i a série X_t terá alguns valores grandes especialmente se vários elementos de C forem relativamente grandes. Este é um comportamento que geralmente está associado com a não estacionariedade, mas pode ser uma indicação de não linearidade do modelo RCA.

Nas Figuras 4.14 e 4.15 apresentamos 1000 observações geradas pelos modelos RCA(1)

$$(vi) X_t = (0,1 + B_1(t))X_{t-1} + e_t \quad (4.18)$$

$$(vii) X_t = (0,5 + B_1(t))X_{t-1} + e_t \quad (4.19)$$

com $e_t \sim N(0,1)$ independentes, $B_1(t) \sim N(0,1)$ independentes e e_t independente de $B_1(t)$.

Notamos pelas Figuras 4.14 e 4.15 que a série dada pelo modelo (4.18) apresenta um número de explosões de grande amplitude e que a série dada pelo modelo (4.19) apresenta uma forma extrema deste efeito.

Figura 4.14 – Série gerada pelo modelo (4.18).

Figura 4.15 – Série gerada pelo modelo (4.19).

As condições de estacionariedade do modelo RCA podem ser encontradas em Nicholls e Quinn (1982).

4.3.5 Modelo auto-regressivo com heterocedasticidade condicional - ARCH

Os modelos ARCH foram introduzidos por Engle (1982). Esses modelos foram criados com o objetivo de modelar de uma forma conveniente a variância condicional de uma série temporal. Os modelos para séries temporais convencionais e os modelos econométricos trabalham com a suposição de que a série temporal possui variância constante. Os modelos ARCH permitem que a variância condicional possa mudar com o tempo, como uma função dos erros passados, deixando uma variância não condicional constante. Estes modelos são muito utilizados em diferentes fenômenos econômicos.

Definição 4.5: Uma série temporal X_t $\{t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ segue um modelo *auto-regressivo com heterocedasticidade condicional*, ARCH(p), se satisfizer as equações

$$X_t = z_t' \beta + e_t, \quad (4.20)$$

$$e_t = \varepsilon_t \sigma_t, \quad (4.21)$$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-p}^2, \quad (4.22)$$

em que

$\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ $i=1, \dots, p$;

σ_t^2 é variância do processo no instante t condicional a $(X_1, \dots, X_{t-1})$;

ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal padrão;

z_t é um processo determinístico ou estocástico que representa a média condicional de X_t ;

β é um parâmetro desconhecido.

Algumas propriedades do modelo ARCH

Exploraremos algumas propriedades do modelo ARCH(1) com $\beta=0$ dado por

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (4.23)$$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2. \quad (4.24)$$

A série X_t dado seus valores passados $(X_1, \dots, X_{t-1})$, que denotaremos por $X_t/(X_1, \dots, X_{t-1})$, possui distribuição normal com média zero e variância σ_t^2 .

Os momentos não condicionais de X_t são dados por:

$$i) E(X_t) = E(\sigma_t \varepsilon_t) = E(\sigma_t) E(\varepsilon_t) = 0 \text{ se } E(|\sigma_t|) < \infty;$$

$$ii) E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \text{ para } \alpha_1 < 1;$$

$$iii) E(X_t^3) = E(\sigma_t^3 \varepsilon_t^3) = E(\sigma_t^3) E(\varepsilon_t^3) = 0;$$

iv) Todos os outros momentos de ordem ímpar, dado que o momento de ordem par superior seguinte exista, são iguais a zero;

$$v) E(X_t^4) = E(\sigma_t^4 \varepsilon_t^4) = 3E(\sigma_t^4) = 3 \frac{\alpha_0^2 (1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}, \text{ para } 3\alpha_1^2 < 1.$$

O r -ésimo momento de um processo ARCH(1) com $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1 \geq 0$ existe se e somente se $\alpha_1^r \prod_{j=1}^r (2j - 1) < 1$.

Com base nos momentos dados acima podemos concluir que:

i) X_t é um processo ruído branco se $0 \leq \alpha_1 < 1$;

ii) X_t^2 segue um processo auto-regressivo;

iii) X_t^2 é fracamente estacionário se $3\alpha_1^2 < 1$;

iv) Quando X_t^2 for um processo fracamente estacionário sua função de autocorrelação é dada por $\rho_{X_t^2}(s) = \alpha_1^s$;

v) A medida de curtose de X_t , quando $3\alpha_1^2 < 1$ é dada por $c = \frac{E(X_t^4)}{(E(X_t^2))^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$.

Devemos notar que quando $\alpha_1 \neq 0$ a medida de curtose é maior que 3, ou seja, X_t possui leptocurtose (caudas pesadas).

vi) X_t é uma diferença martingala se $E(|\sigma_t|) < \infty$.

Para obtermos as condições de estacionariedade de um modelo ARCH(p) vamos considerar a equação

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 \quad (4.25)$$

que pode ser escrita como

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B)e_t^2 \quad (4.26)$$

em que $\alpha(B) = \sum_{i=1}^p \alpha_i B^i$.

Um processo ARCH(p) com $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ é fracamente estacionário se e somente se as raízes da equação $1 - \alpha(B)$ estiverem fora do círculo unitário. A variância estacionária é dada por $E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j}$.

A função de autocorrelação de X_t^2 , quando o processo é estacionário, não reflete a baixa autocorrelação de primeira ordem e posterior queda muito lenta para zero encontradas empiricamente. Se α_1 for pequeno teremos baixa autocorrelação

de primeira ordem, mas o decaimento será muito rápido. Se α_1 for próximo de 1 o decaimento será mais lento, mas a autocorrelação de primeira ordem será alta, contradizendo os resultados empíricos. Devido a esta inadequação houve a necessidade da busca de outros modelos que capturassem melhor as características empíricas das funções de autocorrelação de X_t^2 .

4.3.6 Modelo auto-regressivo generalizado com heterocedasticidade condicional - GARCH

Os modelos GARCH foram introduzidos por Bollerslev (1986). Essa classe de modelos surgiu como uma generalização dos modelos ARCH descritos na sessão 4.3.5. Estes modelos permitem uma estrutura de defasagem mais flexível que a estrutura de defasagem dos modelos ARCH. A extensão do processo ARCH para o GARCH tem muita semelhança com a extensão do processo AR para o processo ARMA.

Definição 4.6: Uma série temporal X_t $\{t=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ segue um modelo *auto-regressivo generalizado com heterocedasticidade condicional*, GARCH(p,q), se satisfizer as equações

$$X_t = z_t' \beta + e_t, \quad (4.27)$$

$$e_t = \varepsilon_t \sigma_t, \quad (4.28)$$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i \sigma_{t-i}^2, \quad (4.29)$$

em que

$p > 0$, $q \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ $i=1,\dots,p$ e $\gamma_j \geq 0$, $j=1,\dots,q$;

ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal padrão;

z_t é um processo determinístico ou estocástico que representa a média condicional de X_t ;

β é um parâmetro desconhecido.

Quando $q=0$ o processo se reduz a um modelo ARCH(p). Nos modelos ARCH(p) a variância condicional é especificada como uma função linear somente das variâncias passadas, enquanto que nos modelos GARCH ela é especificada também como função linear das observações passadas da série temporal.

Propriedades do modelo GARCH

Exploraremos algumas propriedades do modelo GARCH mais simples e mais utilizado que é o modelo GARCH(1,1) com $\beta=0$ que é dado por

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t = e_t \quad (4.30)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (4.31)$$

ou

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (4.32)$$

em que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ e $\gamma_1 > 0$ e ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal padrão;

Em termos dos quadrados de X_t , a expressão (4.30) pode ser escritas como

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \gamma_1) X_{t-1}^2 - \gamma_1 v_{t-1} + v_t, \quad (4.33)$$

em que $v_t = \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)$.

Notamos pela expressão (4.33) que o processo GARCH(1,1) pode ser interpretado como um processo ARMA(1,1) em X_t^2 .

Para $\alpha_1 \neq 0$ a função de autocorrelação do processo X_t^2 é dada por

$$\rho_1 = \frac{(1 - \gamma_1(\alpha_1 + \gamma_1))\alpha_1}{1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1(\alpha_1 + \gamma_1)}$$

e

$$\rho_s = (\alpha_1 + \gamma_1)^{s-1} \rho_1 \text{ para } s > 1.$$

Vimos que para o processo ARCH(1) a função de autocorrelação de X_t^2 quando o processo é estacionário não reflete a baixa autocorrelação de primeira ordem e posterior queda muito lenta para zero encontradas empiricamente. A função de autocorrelação do processo GARCH(1,1) é capaz de suprir tal deficiência desde que α_1 seja pequeno e $\alpha_1 + \gamma_1$ grande.

Segundo Bollerslev (1986) a condição necessária e suficiente para que o momento de ordem $2r$ exista é que

$$\phi(\alpha_1, \gamma_1, r) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \alpha_j \alpha_1^j \gamma_1^{r-j} < 1,$$

em que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_j = \prod_{i=1}^j (2i - 1)$ $j=1, 2, \dots, r$.

Os momentos de ordem $(2r-1)$ são iguais a zero e os momentos de ordem $2r$ são dados por

$$E(X_t^{2r}) = \alpha_r \left(\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k^{-1} E(X_t^{2k}) \alpha_0^{r-k} \binom{r}{r-k} \phi(\alpha_1, \gamma_1, k) \right) (1 - \phi(\alpha_1, \gamma_1, r))^{-1}.$$

Um processo GARCH(p,q) é estacionário se os coeficientes α_i e γ_i forem não negativos e $\alpha(1)+\gamma(1)<1$.

Há um número muito grande de extensões dos modelos ARCH (ver Bollerslev, Chou e Kroner (1992)) como, por exemplo, o GARCH assimétrico (AGARCH), o GARCH exponencial (EGARCH), o GARCH integrado (IGARCH) e o ARCH em média (ARCH-M), que não abordaremos neste trabalho.

Capítulo 5

Testes de linearidade e normalidade no domínio de frequências

Um problema prático encontrado ao ajustar um modelo a uma série temporal é decidir se devemos utilizar um modelo não-linear. Os testes de linearidade podem ser utilizados para auxiliar nesta decisão.

Os testes de linearidade podem ser classificados em três tipos principais: paramétricos ou semi-paramétricos, não paramétricos baseados no domínio de frequências e não paramétricos baseados no domínio do tempo.

Abordaremos, neste capítulo os testes não paramétricos baseados no domínio de frequências, que foram originalmente desenvolvidos por Subba Rao e Gabr (1980) e, posteriormente, por Hinich (1982), Ashley et al. (1986), Brockett et al. (1988), Priestley (1988) e Brillinger e Irizarry (1998). O desenvolvimento desses testes baseia-se no fato de que quando um processo possui distribuição normal, todos os poliespectros de ordem maior do que dois são iguais a zero. Desta forma quando um processo possui um bi-espectro diferente de zero, ou seja $f_x(\omega_1, \omega_2) \neq 0$, temos uma das duas situações seguintes:

(1) O processo satisfaz um modelo linear da forma $\sum_{u=0}^{\infty} g_u e_{t-u}$ mas $\{e_t\}$ não tem distribuição normal

ou

(2) O processo satisfaz um modelo não-linear da forma

$$X_t = \mu + \sum_{u=0}^{\infty} g_u e_{t-u} + \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} e_{t-u} e_{t-v} + \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} e_{t-u} e_{t-v} e_{t-w} + \dots \quad (5.1)$$

em que $\{e_t\}$ pode ou não ter distribuição normal.

Assim, a análise bi-espectral é muito importante para detectar a normalidade e a linearidade de uma série temporal.

Os testes de normalidade e linearidade para o bi-espectro podem ser aplicados à série original ou ao resíduo ajustado de um modelo linear devido ao seguinte resultado de Ashley, Hinich and Patterson (1986):

Seja $\{X_t\}$ um processo estocástico discreto com média zero e estacionário de terceira ordem possuindo uma função de autocovariância de terceira ordem absolutamente somável. Se $\{Y_t\}$ é gerado por um processo $\{X_t\}$ por meio de um filtro linear com função resposta de impulso absolutamente somável, então $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ possuem idênticas funções de assimetria quadrática.

5.1 Testes de Subba Rao e Gabr

Subba Rao e Gabr (1980) inspirados em Brillinger (1965) desenvolveram testes com o objetivo de testar as seguintes hipóteses:

- H_{01} : o processo é gaussiano;
- H_{02} : o processo se comporta como um modelo linear.

Inicialmente deve ser testada a hipótese H_{01} ; caso esta hipótese não seja rejeitada, isto é, se o processo for gaussiano e, além disso, o processo for estacionário, com espectro absolutamente contínuo, ele poderá ser representado por um modelo linear e a hipótese H_{02} não precisa ser testada. Quando a hipótese H_{01} for rejeitada, ou seja quando o processo não for gaussiano, é necessário testar a hipótese H_{02} .

Para testar se o processo é gaussiano, devemos testar a hipótese de que o bi-espectro é zero para todo conjunto de frequências (ω_1, ω_2) , isto é,

$$H_{01}: f_x(\omega_1, \omega_2) \equiv 0, \quad \forall (\omega_1, \omega_2).$$

A estatística deste teste é construída utilizando estimativas do bi-espectro sobre uma grade adequada de frequências.

Sob a hipótese de que o modelo é linear temos que

$$X_t = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u e_{t-u}, \quad (5.2)$$

$$\text{com } \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u^2 < \infty.$$

Como e_t é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(e_t)=0$, $E(e_t^2)=\sigma_e^2$ e $E(e_t^3)=\beta$, temos que

$$f_x(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} |H(\omega)|^2 \quad (5.3)$$

e

$$f_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{\beta}{(2\pi)^2} H(-\omega_1 - \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2), \quad (5.4)$$

$$\text{em que } H(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_u e^{-i\omega u}.$$

Das expressões (5.3) e (5.4) temos que a bi-coerência é dada por

$$\gamma^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|f_x(\omega_1, \omega_2)|^2}{f_x(\omega_1) f_x(\omega_2) f_x(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\beta^2}{2\pi\sigma_e^2} \quad (5.5)$$

e é constante para todo (ω_1, ω_2) .

A expressão (5.5) mostra que se $\beta=0$ então a função densidade bi-espectral $f_x(\omega_1, \omega_2)=0$, para todo par (ω_1, ω_2) . Quando as variáveis aleatórias e_t possuem distribuição normal então $\beta=0$ e $f_x(\omega_1, \omega_2)=0$. Sob condições adequadas da sequência g_u pode ser mostrado que a normalidade de e_t implica na normalidade X_t . Então podemos concluir que se X_t é um processo gaussiano então $f_x(\omega_1, \omega_2)=0$ para todo par (ω_1, ω_2) . Entretanto, o processo X_t pode ser linear mas não necessariamente gaussiano. Subba Rao e Gabr observaram que nesta situação a bi-coerência dada pela expressão (5.5) é constante para todo (ω_1, ω_2) . Desta forma a constância da bi-coerência é um teste para a adequação da linearidade do processo (Brillinger, 1965).

Logo, para testar se o processo se comporta como um modelo linear, devemos testar a hipótese de que a bi-coerência é constante para todo conjunto de frequências (ω_1, ω_2) , isto é

$$H_{02}: \gamma^2(\omega_1, \omega_2) = \text{constante}, \forall (\omega_1, \omega_2).$$

O teste para linearidade é baseado na substituição de $f_x(\omega_1, \omega_2)$ e $f_x(\omega)$ por seus respectivos estimadores.

Veremos a seguir, com detalhes, a construção dos testes citados anteriormente.

5.1.1 Teste de normalidade

O objetivo deste teste é testar a hipótese

$$H_{01}: f_x(\omega_i, \omega_j) \equiv 0, \forall (\omega_i, \omega_j).$$

O teste proposto é feito em dois estágios:

i) Estágio 1

Neste estágio testamos a hipótese

$$H_{01}: f_x(\omega_i, \omega_j) \equiv 0, \text{ para } 0 < \omega_i < \frac{2\pi}{3} \text{ e } \omega_i < \omega_j < \pi - \frac{\omega_i}{2}.$$

Nesta região o bi-espectro estimado possui distribuição normal complexa e a estatística utilizada é a análoga complexa da estatística T^2 de Hotelling, ver Giri (1965) e Khatri (1965).

Para testar H_{01} dividiremos o intervalo $[0, \pi]$ em K subintervalos e selecionaremos um conjunto de frequências (ω_i, ω_j) , em que

$$\omega_i = \frac{\pi i}{K}, \omega_j = \frac{\pi j}{K} \text{ para } i = 1, 2, \dots, L \text{ e } j = i + 1, i + 2, \dots, M(i), \quad (5.6)$$

com $L = \left\lceil \frac{2K}{3} \right\rceil$, $M(i) = K - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 1$, $K \ll T$ e T é o número de observações utilizadas no cálculo das estimativas bi-espectrais.

Nas colunas de (1) a (4) da Tabela 5.1 estão os pares de frequências (ω_i, ω_j) para $K=4$ e 6 .

Tabela 5.1 - Pares de frequências (ω_i, ω_j) , definidas por (5.6)

K=4		K=6		K=6
ω_i	ω_j	ω_i	ω_j	$f_x(\omega_i, \omega_j)$
$\pi/4$	$2\pi/4$	$\pi/6$	$2\pi/6$	$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\right) = \xi_1$
$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/6$	$3\pi/6$	$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}\right) = \xi_2$
		$\pi/6$	$4\pi/6$	$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right) = \xi_3$
		$\pi/6$	$5\pi/6$	$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = \xi_4$
		$2\pi/6$	$3\pi/6$	$f_x\left(\frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}\right) = \xi_5$
		$2\pi/6$	$4\pi/6$	$f_x\left(\frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right) = \xi_6$
		$3\pi/6$	$4\pi/6$	$f_x\left(\frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right) = \xi_7$

Seja ξ_i o bi-espectro calculado no i -ésimo par de frequências dado por (5.6) e η' o vetor formado por estes bi-espectros, isto é,

$$\eta' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_P), \quad (5.7)$$

em que $P = \sum_{i=1}^L (M(i) - i)$.

Para obtermos um conjunto de estimativas aproximadamente não correlacionadas para cada ξ_i precisamos construir uma grade de frequências em torno de cada ponto (ω_i, ω_j) . Desta forma para cada (ω_i, ω_j) temos

$$\omega_{ip} = \omega_i + \frac{pd\pi}{T} \quad p = -r, -(r-1), \dots, 0, 1, \dots, r \quad (5.8)$$

e

$$\omega_{jq} = \omega_j + \frac{qd\pi}{T} \quad q = -r, -(r-1), \dots, -1, 1, \dots, r \quad (q \neq 0), \quad (5.9)$$

em que a distância d é escolhida tal que as estimativas bi-espectrais nos pontos vizinhos desta grade são aproximadamente não correlacionadas. Desta forma, $\frac{d\pi}{T}$ deve ser maior que a largura de faixa da janela espectral, correspondente à janela $\lambda(s_1, s_2)$ utilizada na estimação do bi-espectro.

Na Figura 5.1 está representada a grade de frequências em torno de cada par de frequências da Tabela 5.1, para $K=6$ e $r=2$.

Figura 5.1 - Grade de frequências em torno das frequências (ω_i, ω_j) das colunas (3) e (4) da Tabela 5.1.

A função densidade bi-espectral nas frequências (ω_i, ω_j) é estimada por meio de (2.20) e de um gerador de "lag window" da Tabela 2.1.

Assumindo que a verdadeira função densidade bi-espectral é suficientemente suavizada e aproximadamente constante na grade de frequências dada por (5.8) e (5.9), temos que

$$E[\hat{f}(\omega_{ip}, \omega_{jq})] \approx f_x(\omega_i, \omega_j), \quad \forall p, q. \quad (5.10)$$

Vamos considerar o conjunto, $\{\hat{f}(\omega_{ip}, \omega_{iq})\}$, de $n_1=4r+1$ estimadores aproximadamente não correlacionados e não viciados de $f_x(\omega_i, \omega_j)$ dado por

$$\left\{ \hat{f}\left(\omega_i - \frac{rd\pi}{T}, \omega_j\right), \hat{f}\left(\omega_i - \frac{(r-1)d\pi}{T}, \omega_j\right), \dots, \hat{f}(\omega_i, \omega_j), \dots, \hat{f}\left(\omega_i + \frac{rd\pi}{T}, \omega_j\right), \right. \\ \left. \hat{f}\left(\omega_i, \omega_j - \frac{rd\pi}{T}\right), \hat{f}\left(\omega_i, \omega_j - \frac{(r-1)d\pi}{T}\right), \dots, \hat{f}\left(\omega_i, \omega_j + \frac{rd\pi}{T}\right) \right\}. \quad (5.11)$$

Para cada elemento do vetor η' dado pela expressão (5.7) é necessário obter um vetor de n_1 estimadores dado pela expressão (5.11). O conjunto de todos os estimadores da função densidade bi-espectral é representado na matriz $\hat{D}$ dada por

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_{11} & \hat{\zeta}_{12} & \dots & \hat{\zeta}_{1n_1} \\ \hat{\zeta}_{21} & \hat{\zeta}_{22} & \dots & \hat{\zeta}_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\zeta}_{p1} & \hat{\zeta}_{p2} & \dots & \hat{\zeta}_{pn_1} \end{bmatrix} = [\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_{n_1}]. \quad (5.12)$$

Para valores grandes de T , cada $\hat{\zeta}_i$ possui distribuição normal complexa com média η e matriz de covariância Σ_ζ . Os estimadores de máxima verossimilhança de η e Σ_ζ são dados por

$$\hat{\eta} = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \zeta_k \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma}_\zeta = A/n_1, \quad (5.13)$$

em que $A = \sum_{k=1}^{n_1} (\zeta_k - \hat{\eta})(\zeta_k - \hat{\eta})^*$ com o símbolo $*$ denotando o transposto do complexo conjugado.

O teste da razão de verossimilhança para testar

$$H_0: \eta=0$$

$$H_1: \eta^* \Sigma_\zeta^{-1} \eta > 0$$

leva à rejeição da hipótese nula se a estatística do teste

$$T^2 = n_1 \hat{\eta}^* A^{-1} \hat{\eta}, \quad (5.14)$$

for maior do que λ , em que λ é determinado pelo nível de significância α .

Sob H_0 , a estatística

$$\mathfrak{T}_1 = \left[\frac{2(n_1 - P)}{2P} \right] T^2, \quad (5.15)$$

possui distribuição $F(2P, 2(n_1 - P))$. Se a hipótese nula não for rejeitada devemos ir para o segundo estágio do teste.

ii) Estágio 2

Neste estágio testamos a hipótese

$$H_{01}: f_x(\omega_i, \omega_j) \equiv 0$$

para ω_i, ω_j na vizinhança de $0 < \omega_i < \frac{2\pi}{3}$ e $\omega_i < \omega_j < \pi - \frac{\omega_i}{2}$ e na origem.

Neste caso a estatística do teste é a T^2 de Hotelling para o caso real, ver Anderson (1958).

Para maior detalhes ver Subba Rao e Gabr (1980).

5.1.2 Teste de linearidade

O teste de linearidade descrito a seguir é baseado na propriedade de que se o modelo for linear a bi-coerência, dada por (5.5), é constante para todo (ω_i, ω_j) .

Seja $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_P)'$ um vetor coluna de ordem $P \times 1$ em que para cada $l = 1, \dots, P$, $Y_l = \gamma^2(\omega_i, \omega_j)$, ou seja, Y_l é a bi-coerência calculada em algum par de frequências tal que $0 < \omega_i < \frac{2\pi}{3}$ e $\omega_i < \omega_j < \pi - \frac{\omega_i}{2}$. Neste teste utilizaremos os pares de frequência (ω_i, ω_j) das colunas (3) e (4) da Tabela 5.1.

Para obtermos um conjunto de n_1 estimativas de cada Y_l utilizaremos o estimador da bi-coerência dado pela expressão (2.24), calculado na grade de

frequências dada por (5.8) e (5.9). Estes estimadores possuem distribuição assintoticamente normal (ver Brillinger,1965). Desta forma obteremos uma amostra aleatória de n_1 estimadores de $\mathbf{Y}$, que podem ser representados pela matriz $\hat{\mathbf{D}}_1$ dada por

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} & \dots & \hat{Y}_{1n_1} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \dots & \hat{Y}_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Y}_{P1} & \hat{Y}_{P2} & \dots & \hat{Y}_{Pn_1} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{Y}}_{n_1} \quad (5.16)$$

em que $\hat{Y}_{lm}, l=1, \dots, P$ e $m=1, \dots, n_1$, é o m -ésimo estimador do l -ésimo elemento do vetor $\mathbf{Y}$.

Sob a hipótese,

H_{02} : o processo é linear

o vetor média de $\{\hat{\mathbf{Y}}_i\}$ contém elementos idênticos. O teste de linearidade baseado em $\gamma^2(\omega_i, \omega_j)$ corresponde ao teste clássico de simetria em análise multivariada, ver Anderson (1958), descrito a seguir.

$$\text{Sejam } \bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\mathbf{Y}}_i, \hat{\mathbf{S}}_y = \sum_{i=1}^{n_1} (\hat{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}})(\hat{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}})' \text{ e } \hat{\Sigma}_y = \hat{\mathbf{S}}_y / n_1.$$

Vamos definir o vetor coluna β^1 de ordem $Q \times 1$, em que $Q=P-1$, tal que $\beta^1 = \mathbf{B}\mathbf{Y}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz de ordem $(Q \times P)$ da seguinte forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Sob H_{02} , β^1 possui distribuição assintoticamente normal com vetor média zero e matriz de covariâncias dada por $\mathbf{B}\Sigma_Y\mathbf{B}'$. O teste da razão de verossimilhança leva à rejeição da hipótese se

$$T^2 = n_1 \bar{\beta}^1 \hat{S}^{-1} \bar{\beta}^1 > \lambda_0 \quad (5.18)$$

em que $\bar{\beta}^1 = \mathbf{B}\bar{Y}$, $\hat{S} = \mathbf{B}\hat{S}_Y\mathbf{B}'$ e λ_0 é determinado pelo nível de significância α .

Sob H_{02} , a estatística

$$\mathfrak{T}_2 = \left[\frac{(n_1 - Q)}{Q} \right] T^2 \quad (5.19)$$

possui distribuição $F(Q, n_1 - Q)$. A estatística T^2 é invariante e independe da escolha de $\mathbf{B}$ (Anderson, 1958).

Escolha dos parâmetros

Inicialmente devemos escolher K pontos igualmente espaçados no intervalo $(0, \pi)$ e formar uma grade de pontos, sendo que K deve ser menor que T (número de observações da série), para fornecer intervalos em torno de cada par de frequências (ω_i, ω_j) e desta forma permitir a construção de estimativas espectrais e bi-espectrais nos pontos vizinhos $(\omega_{ip}, \omega_{jq})$ da grade. O número total de pontos em cada grade é $n_1 = 4r + 1$ e visto que há $K^2/3$ grades, é necessário que

$$\frac{n_1 K^2}{3} < T. \quad (5.20)$$

Para garantir que as estimativas espectrais e bi-espectrais nos diferentes pontos da grade sejam não correlacionadas é necessário que d seja escolhido tal que

$$\frac{\pi d}{T} > J, \quad (5.21)$$

em que J é a largura de faixa da janela espectral utilizada no procedimento de estimação.

Para que $f_x(\omega_1, \omega_2)$ e $f_x(\omega)$ sejam aproximadamente constantes sobre todos os pontos em cada grade é necessário que r seja escolhido tal que

$$\frac{2\pi r}{T} < J, \quad (5.22)$$

em que J é a largura de faixa da janela espectral utilizada no procedimento de estimação.

Para garantir que os pontos em diferentes grades não sobreponham-se é necessário que

$$\frac{T}{(K(r+1))} > d. \quad (5.23)$$

Para implementar as restrições acima devemos ter informações a priori sobre a largura de faixa do espectro e do bi-espectro. Na prática esta informação raramente pode ser disponível e a escolha dos parâmetros é feita utilizando informações obtidas por meio da suavização do espectro e bi-espectro estimados.

Na Tabela 5.2 estão alguns típicos valores de K, L, P, r e n_1 sugeridos por Subba Rao e Gabr (1980) para serem utilizados em aplicações.

Tabela 5.2 – Valores de (K, L, P, r, n_1) sugeridos por Subba Rao e Gabr (1980)

K: n ^o de subintervalos do intervalo $[0, \pi]$	$L = \left\lceil \frac{2K}{3} \right\rceil$	P: n ^o de pontos em que o bi-espectro deve ser calculado	r	$n_1 = 4r + 1$
4	2	2	≥ 1	≥ 5
5	3	4	≥ 1	≥ 5
6	4	7	≥ 2	≥ 9
7	4	10	≥ 3	≥ 13
8	5	14	≥ 4	≥ 17

Os procedimentos descritos acima não fornecem testes completos para normalidade e linearidade. Existe a possibilidade de que um processo não normal tenha um bi-espectro igual a zero e um teste exaustivo deveria testar todos os espectros de altas ordens. Notamos pela expressão (5.4) que o bi-espectro $f_x(\omega_1, \omega_2)$ pode desaparecer para um modelo linear desde que $\beta = 0$. De forma similar, a constância de $\gamma^2(\omega_1, \omega_2)$ não necessariamente implica que o processo segue um modelo linear. Entretanto, em situações práticas, desvios da normalidade ou linearidade podem aparecer no bi-espectro e esta é a base do teste acima.

5.2 Testes de Hinich

Segundo Hinich (1982), o teste de linearidade de Subba Rao e Gabr (1980) descrito na Seção 5.1 é muito sensível à presença de outliers quando os valores do espectro são muito pequenos. Além disso, a conclusão depende da escolha da janela espectral e da construção da grade de frequências. Neste teste, Hinich sugere o uso da matriz de covariâncias assintóticas do bi-espectro amostral ao invés da matriz amostral de segundos momentos. O uso da matriz de covariâncias é razoável quando o tamanho amostral é grande.

Seja $(X_0, \dots, X_{T-1})$ uma amostra aleatória de uma série temporal gerada por um processo estacionário de média zero. Vamos definir o seguinte estimador preliminar do bi-espectro para cada par de inteiros (j, k)

$$F(j, k) = \frac{1}{T} d^T(\omega_j) d^T(\omega_k) (d^T(\omega_{j+k}))^*, \quad (5.24)$$

em que $d^T(\omega_j) = \sum_{t=0}^{T-1} X_t \exp(-i\omega_j t)$, $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$ para $j=0, 1, \dots, T-1$ e o símbolo $*$ denotando o complexo conjugado.

Como $d^T(\omega_{j+T}) = d^T(\omega_j)$ e $d^T(\omega_{T-j}) = (d^T(\omega_j))^*$ o domínio principal de $F(j, k)$ é a grade triangular dada por

$$P = \left\{ 0 < j \leq \frac{T}{2}, \quad 0 < k \leq j, \quad 2j + k \leq T \right\}, \text{ para } T \text{ par.} \quad (5.25)$$

Existem muitas maneiras de calcular uma média de $F(j, k)$ em um subconjunto do conjunto P e obter um estimador consistente para o bi-espectro. Uma

maneira simples é calcular a média de $F(j,k)$ em M^2 pontos centrados em $\left((2m-1)\frac{M}{2}, (2n-1)\frac{M}{2}\right)$.

Quando todos os pontos (j,k) utilizados para obter um estimador consistente para o bi-espectro estiverem no conjunto P , Hinich (1982) sugere para cada par (m^*, n^*) o seguinte estimador consistente para o bi-espectro

$$\hat{f}_H(m^*, n^*) = \frac{1}{M^2} \sum_{j=(m-1)M}^{mM-1} \sum_{k=(n-1)M}^{nM-1} F(j, k), \quad (5.26)$$

em que $m^* = \frac{2\pi(2m-1)M}{2T}$, $n^* = \frac{2\pi(2n-1)M}{2T}$ e $M = T^c$ para $\frac{1}{2} < c < 1$.

O parâmetro c tem como objetivo controlar o equilíbrio entre o vício e a variância do estimador $\hat{f}_H(m^*, n^*)$.

As estatísticas utilizadas nos teste de linearidade e normalidade, que serão descritos a seguir, devem ser calculadas nos pares de frequências definidos pelo seguinte sub-conjunto do conjunto P

$$L = \left\{ \left((2m-1)\frac{M}{2}, (2n-1)\frac{M}{2} \right) \text{ para } m = 1, \dots, n \text{ e } m \leq \frac{T}{2M} - \frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right\}. \quad (5.27)$$

Na Tabela 5.3 estão os pares de frequências definidos pelo conjunto L para $T=100$, $c=0,6$ e $M=16$.

Tabela 5.3 - Pares de frequências definidos pelo conjunto L para T=100, c=0,6 e M=16

m	n	m*	n*
1	1	0,503	0,503
1	2	0,503	1,508
1	3	0,503	2,513
1	4	0,503	3,519
1	5	0,503	4,524
1	6	0,503	5,529
2	2	1,508	1,508
2	3	1,508	2,513
2	4	1,508	3,519

Hinich (1982) sugere como estimador do espectro o seguinte estimador suavizado de periodogramas

$$\hat{f}_H(\omega_k) = \frac{1}{2d+1} \sum_{j=-d}^d \hat{f}(\omega_{k+j}), \quad (5.28)$$

$$\text{em que } \hat{f}(\omega_k) = \frac{1}{4\pi} I_n(\omega_k) \text{ e } I_n(\omega_k) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T X_t X_s \exp(i\omega_k(t-s)).$$

5.2.1 Teste de normalidade

Este teste é baseado na seguinte ponderação da raiz quadrada da bi-coerência

$$\hat{\gamma}_{m^*,n^*} = \frac{\hat{f}_H(m^*, n^*)}{(T^{1-4c} Q_{m^*,n^*})^{0,5} [\hat{f}_H(m^*) \hat{f}_H(n^*) \hat{f}_H(m^* + n^*)]} \quad (5.29)$$

em que $\hat{f}_H(m^*, n^*)$ é o estimador da função densidade bi-espectral, dado por (5.26), $\hat{f}_H(m^*)$ é o estimador da função densidade espectral, dado por (5.28) e

Q_{m^*,n^*} é o número de pares (j,k) que estão no conjunto P e estão fora das bordas $(j=k \text{ e } 2j+k=T)$ mais duas vezes o número de pares nas bordas.

Propriedades do estimador $\hat{\gamma}_{m^*,n^*}$

i) $\hat{\gamma}_{m^*,n^*} \xrightarrow{D} N^c(\mu, 1)$, em que $\mu = \sqrt{\lambda_{m^*,n^*}}$ e $\lambda_{m^*,n^*} = 2(T^{1-4c} Q_{m^*,n^*})^{-1} \gamma^2(m^*, n^*)$;

ii) $2|\hat{\gamma}_{m^*,n^*}|^2 \xrightarrow{D} \chi_2^2(\lambda_{m^*,n^*})$;

iii) $\lambda_{m^*,n^*} \geq 2T^{2c-1} \gamma^2(m^*, n^*)$;

iv) $2 \sum_{(m^*,n^*) \in L} |\hat{\gamma}_{m^*,n^*}|^2 \xrightarrow{D} \chi_{2P1}^2(\lambda)$, em que $\lambda = \sum_{(m^*,n^*) \in L} \lambda_{m^*,n^*}$ e $P1$ é o número de pares

(m^*,n^*) no conjunto L , que é aproximadamente $\frac{T^2}{12M^2}$;

v) Quando $f_x(\omega_1, \omega_2) \equiv 0$ a estatística S dada por

$$S = 2 \sum_{m^*} \sum_{n^*} |\gamma_{m^*,n^*}|^2, \text{ para } (m^*, n^*) \in L,$$

possui distribuição assintótica χ_{2P1}^2 ;

vi) $E(|\hat{\gamma}_{m^*,n^*}|^2) = 1 + \lambda_{m^*,n^*}/2$;

vii) $\chi_2^2(\hat{\lambda}_0) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} \chi_2^2(\lambda_0)$, em que $\hat{\lambda}_0 = 2(P1M^2)^{-1} \sum_{(m^*,n^*) \in L} Q_{m^*,n^*} (|\hat{\gamma}_{m^*,n^*}|^2 - 1)$ e

$\lambda_0 = 2(T^{2c-1}) \gamma^2(m^*, n^*)$.

Para mais detalhes, ver Hinich (1982).

Para testar a hipótese

$$H_0: f_x(\omega_1, \omega_2) \equiv 0,$$

Hinich sugeriu a estatística

$$\hat{S} = 2 \sum_{m^*} \sum_{n^*} |\hat{\gamma}_{m^*, n^*}|^2 \quad \text{para } m^*, n^* \in L \quad (5.30)$$

A hipótese de normalidade é rejeitada se $\hat{S} > t_\alpha$ em que $\alpha = P(\chi_{2Pl}^2 > t_\alpha)$.

Quando a hipótese nula não for rejeitada o processo poderá não possuir distribuição normal mas os dados serão consistentes com um bi-espectro identicamente igual a zero.

5.2.2 Teste de linearidade

Hinich propôs um teste de linearidade não paramétrico baseado no intervalo interquartil, que é uma medida robusta de dispersão, pois o teste F pode ser sensível a outliers em $\hat{\gamma}_{m^*, n^*}$, dado por (5.29), para pequenas estimativas do espectro em certas frequências. O teste proposto usa o intervalo interquartil, de um sub-conjunto de $\{2|\hat{\gamma}_{m^*, n^*}|^2\}$, que é robusto para outliers.

Seja R a amplitude interquartil amostral de $2|\hat{\gamma}_{m^*, n^*}|^2$ para pares em P (quando $Q_{m^*, n^*} = M^2$).

Rejeitamos a hipótese de linearidade se R for significativamente maior ou menor que a amplitude interquartil de $\chi_2^2(\hat{\lambda}_0)$ em que $\hat{\lambda}_0$ é um estimador consistente de $\lambda_0 = 2T^{2c-1}\gamma_{m^*, n^*}$.

Segundo Hinich (1982), das propriedades (iii) e (vi) e das propriedades assintóticas de $\hat{\gamma}_{m^*,n^*}$ temos que

$$\hat{\lambda}_0 = 2(P1M^2)^{-1} \sum_{(m^*,n^*) \in L} Q_{m^*,n^*} \left(|\hat{\gamma}_{m^*,n^*}|^2 - 1 \right). \quad (5.31)$$

O verdadeiro intervalo interquartil da densidade $\chi_2^2(\lambda_0)$ é $\xi_3 - \xi_1$ em que ξ_1 e ξ_3 são respectivamente o 1º e o 3º quartil da densidade $\chi_2^2(\lambda_0)$, isto é, $P(\chi_2^2(\lambda_0) < \xi_1) = P(\chi_2^2(\lambda_0) > \xi_3) = 0,25$.

Seja P_2 o número total de pares em P . Quando $P_2 \rightarrow \infty$, R possui distribuição aproximadamente $N(\xi_3 - \xi_1, \sigma_0^2)$, em que $\sigma_0^2 = (16P_2)^{-1} [3(\xi_1)^2 - 2(\xi_1)(\xi_3) + 3(\xi_3)^2]$.

Na prática o estimador $\hat{\lambda}_0$ dado por (5.31) é utilizado no cálculo dos valores de ξ_1 , ξ_3 , $f(\xi_1)$ e $f(\xi_3)$ para determinar a região crítica para R .

Ashley, Hinich and Patterson (1986) e Chan e Tong (1986) estudaram diferentes simulações para determinar o tamanho amostral e o poder dos testes de linearidade e normalidade e chegaram às seguintes conclusões:

- Para amostras com tamanho inferiores a 256 observações os testes não são consistentes;
- O poder do teste aumenta com o tamanho amostral;
- O valor ótimo para o ponto de truncamento M é aproximadamente igual a $0,7\sqrt{T}$, em que T é o número de observações da série;
- O teste de linearidade deve ser aplicado como um teste para adequação de um modelo linear para uma série empírica;

- Para um processo não estacionário, a hipótese nula de linearidade pode não ser rejeitada indevidamente (o argumento oposto não é verdadeiro). Porém esta não estacionariedade não permite a detecção de ciclos de baixa frequência para um estudo gráfico.

5.3 Testes de Brillinger e Irizarry

Brillinger e Irizarry (1998) também propuseram testes, para detectar a linearidade e a normalidade de uma série temporal, baseados no bi-espectro.

Descreveremos a seguir o procedimento utilizado por Brillinger e Irizarry para estimar o espectro, o bi-espectro e a bi-coerência de uma série temporal estacionária com média zero.

Inicialmente a série temporal com T pontos é particionada em L trechos contendo V observações cada um, de tal forma que $T=LV$. Após a partição, aplicamos um filtro ("taper") e, então, calculamos a transformada de Fourier da série transformada e o periodograma de terceira ordem dados por

$$d^v(\omega_1; \ell) = \sum_{v=0}^{V-1} h\left(\frac{v+1}{V+1}\right) X_{\ell V+v} \exp(-iv\omega_1) \quad (5.32)$$

e

$$I^v(\omega_1, \omega_2; \ell) = \frac{1}{(2\pi)^2 h_3} d^v(\omega_1; \ell) d^v(\omega_2; \ell) \left(d^v(\omega_1 + \omega_2; \ell) \right)^* \quad (5.33)$$

respectivamente, em que $h(u) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi u))$, $h_3 = \int h(u)^3 du$ e o símbolo $*$ denotando o complexo conjugado.

O estimador do bi-espectro é um estimador suavizado de periodogramas de terceira ordem, dado por

$$\hat{f}_B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} I^V(\omega_1, \omega_2; \ell). \quad (5.34)$$

Um estimador da função densidade espectral da série temporal estacionária, é obtido pelo mesmo procedimento utilizado para obter a estimativa do bi-espectro, isto é,

$$\hat{f}_B(\omega_1) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} I^V(\omega_1; \ell) \quad (5.35)$$

em que

$$I^V(\omega_1; \ell) = \frac{1}{2\pi h_2} |d^V(\omega_1, \ell)|^2 \quad (5.36)$$

$$\text{e } h_2 = \int h(u)^2 du.$$

Brillinger e Irizarry sugerem o seguinte estimador para a bi-coerência

$$\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|\hat{f}_B(\omega_1, \omega_2)|^2}{\hat{f}_B(\omega_1)\hat{f}_B(\omega_2)\hat{f}_B(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (5.37)$$

Propriedades do estimador do bi-espectro e da bi-coerência

i) Fora das bordas do domínio fundamental, ou seja, para $0 < \omega_2 \leq \omega_1$, e

$\omega_1 + \frac{\omega_2}{2} < \pi$, $\hat{f}_B(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{D} N^c(f_x(\omega_1, \omega_2), V_1)$ quando $L \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ e $\frac{V}{L} \rightarrow 0$,

em que $V_1 = \frac{h_6}{h_3^2} \frac{1}{2\pi} f_x(\omega_1) f_x(\omega_2) f_x(\omega_1 + \omega_2) \frac{V}{L}$ e $h_k = \int h(u)^k du$;

ii) Estimadores em frequências distintas são assintoticamente independentes;

iii) Sob a hipótese de que $f_x(\omega_1, \omega_2) = 0$, temos que $|\hat{f}_B(\omega_1, \omega_2)|^2 \xrightarrow{D} a \frac{\chi_2^2}{2}$, em que

$a = \frac{h_6}{h_3^2} \frac{1}{2\pi} f_x(\omega_1) f_x(\omega_2) f_x(\omega_1 + \omega_2) \frac{V}{L}$ e $h_k = \int h(u)^k du$;

iv) Se $f_x(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ temos que $|\hat{f}_B(\omega_1, \omega_2)|^2 \xrightarrow{D} N(|f_x(\omega_1, \omega_2)|^2, V_2)$, em que $V_2 =$

$2 \frac{h_6}{h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi} f_x(\omega_1) f_x(\omega_2) f_x(\omega_1 + \omega_2) |f_x(\omega_1, \omega_2)|^2$ e $h_k = \int h(u)^k du$;

v) Se $f_x(\omega_1, \omega_2) = 0$ temos que $\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{D} \exp(\lambda)$, em que $\exp(\lambda)$ é uma

variável aleatória com distribuição exponencial de média $\left(\frac{h_6}{h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi} \right)$;

vi) Se $f_x(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ temos que $\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{D} N(\gamma^2(\omega_1, \omega_2), V_3)$, em que

$V_3 = 2 \frac{h_6}{h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi} \frac{|f_x(\omega_1, \omega_2)|^2}{f_x(\omega_1) f_x(\omega_2) f_x(\omega_1 + \omega_2)}$ e $h_k = \int h(u)^k du$;

vii) O estimador $\hat{\gamma}_B(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{D} N(\gamma(\omega_1, \omega_2), V_4)$, em que $V_4 = \frac{1}{2} \frac{h_6}{h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi}$ e

$h_k = \int h(u)^k du$;

viii) Quando o processo X_t é reversível, ou seja, quando as propriedades de X_t e X_{-t} são as mesmas, a parte imaginária do bi-espectro é identicamente nula, ver Brillinger e Rosenblatt (1967).

Para mais detalhes, ver Brillinger e Irizarry (1998).

5.3.1 Teste de normalidade

No teste de normalidade em que o objetivo é testar a hipótese

$$H_{01}: f_x(\omega_1, \omega_2) = 0,$$

Brillinger e Irizarry utilizam o estimador da bi-coerência dado por (5.37), calculado nos pares de frequência (ω_1, ω_2) que satisfazem

$$0 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \text{ e } \omega_1 + \frac{\omega_2}{2} \leq \pi. \quad (5.38)$$

Pela propriedade v) temos que, sob H_{01} ,

$$\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{D} \exp(\lambda),$$

em que $\exp(\lambda)$ é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média

$$\left(\frac{h_6}{h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi} \right).$$

Desta forma rejeitamos a hipótese de normalidade se o nível descritivo associado a $\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2)$ for menor do que 5% para mais do que 5% dos pares de frequência (ω_1, ω_2) que satisfizerem (5.38).

5.3.2 Teste de linearidade

Para o teste de linearidade, em que o objetivo é testar a hipótese,

$$H_{02}: \gamma^2(\omega_1, \omega_2) = \text{constante},$$

calcularemos para os pares de frequências (ω_i, ω_j) , que satisfizerem (5.38), a estatística

$$X^*(\omega_i, \omega_j) = \left(\frac{\hat{\gamma}_B(\omega_i, \omega_j) - \bar{\gamma}_B(\omega_i, \omega_j)}{\sigma_{X^*}} \right)^2, \quad (5.39)$$

em que $\bar{\gamma}_B(\omega_i, \omega_j) = \frac{\sum_i \sum_j \hat{\gamma}_B(\omega_i, \omega_j)}{n}$, n é o número de frequências que satisfazem (5.38) e $\sigma_{X^*} = \sqrt{\frac{h_6}{h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi} + \frac{h_6}{n h_3^2} \frac{V}{L} \frac{1}{2\pi}}$.

Pela propriedade vii) temos que

$$X^*(\omega_i, \omega_j) \xrightarrow{D} \chi_1^2.$$

Desta forma rejeitamos a hipótese de linearidade se o nível descritivo associado a $X^*(\omega_i, \omega_j)$ for menor do que 5% para mais do que 5% dos pares de frequência que satisfizerem (5.38).

Capítulo 6

Testes de linearidade no domínio do tempo

Abordaremos, neste capítulo os testes paramétricos ou semi-paramétricos de McLeod e Li (1983) e Tsay (1986) e o teste não paramétrico de Poggi e Portier (1997).

6.1 Teste de McLeod e Li

O teste descrito nesta seção foi motivado pelo fato de que se X_t é uma série temporal estacionária e gaussiana então

$$\rho_{X_t^2}(j) = \left(\rho_{X_t}(j)\right)^2, \text{ para } \forall j.$$

Segundo Granger e Andersen (1978) a não validade deste resultado tende a indicar possibilidade de não linearidade. Maravall (1983) considerou o uso de

$\rho_{\hat{e}_t^2}(j)$, em que $\hat{e}_t$ são os resíduos de um modelo ajustado. McLeod e Li (1983) propuseram um teste do tipo “Portmanteau” baseado na autocorrelação amostral do quadrado dos resíduos, de uma série temporal estacionária e gaussiana, para testar a hipótese de linearidade.

A hipótese a ser testada é

H_0 : a série é linear.

Sejam $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_T)$ os resíduos ajustados de um modelo ARMA e $\hat{\rho}_e$ a autocorrelação amostral do quadrado dos resíduos dada por

$$\hat{\rho}_e(k) = \frac{\sum_{j=1}^{T-k} (\hat{e}_j^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{e}_{j+k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{j=1}^n (\hat{e}_j^2 - \hat{\sigma}^2)^2},$$

$$\text{em que } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^T \hat{e}_j^2}{T}.$$

Para detectar um modelo ARMA mal especificado McLeod e Li propuseram a seguinte estatística

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_e^2(k)}{T-k}. \quad (6.1)$$

A estatística (6.1) pode expressar a possibilidade de detectar não linearidade de um modelo na direção de bilinearidade e sob a hipótese de que o

modelo é linear, possui distribuição χ_m^2 se as verdadeiras inovações forem independentes.

A hipótese H_0 deve ser rejeitada quando $Q > q$, em que q é o $(1-\alpha)$ -ésimo percentil da distribuição χ_m^2 .

Segundo Tong (1990), não é claro se este teste distingue entre um modelo não-linear e um modelo ARMA mal ajustado, quando obtemos um resultado significativo. Segundo Davies e Petrucci (1985) e Luukkonen et al. (1988) este teste é adequado para testar a hipótese de que o modelo é linear contra a hipótese de que o modelo é não-linear do tipo ARCH.

6.2 Teste de Tsay

Tsay (1986) propôs um teste de linearidade, para séries temporais estacionárias, aprimorando o teste de Keenan (1985) que é similar ao teste de Tukey para não aditividade (Tukey, 1949).

A hipótese de interesse é

$$H_0: (X_t - \mu) = \sum_{j=1}^m a_j (X_{t-j} - \mu) + e_t, \quad (6.2)$$

em que e_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância σ^2 .

Sejam $X_1, \dots, X_T$ observações de uma série temporal. O teste de Tsay é constituído dos seguintes passos:

i) Ajustar uma regressão linear de X_t sobre $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$ em que m é um número inteiro positivo fixado, isto é,

$$X_t = W_t \phi + e_t \quad (6.3)$$

em que $W_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$ e $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_m)'$, $\phi_0 = 1$.

ii) Calcular os resíduos ajustados $\hat{e} = (\hat{e}_{m+1}, \dots, \hat{e}_T)'$.

iii) Considere Z_t o vetor linha $r = \frac{m(m+1)}{2}$ -dimensional, que é dado pelo vech $(U'U)$, ou seja, Z_t é obtido por meio dos elementos situados sobre e abaixo da diagonal principal da matriz $U'U$ em que $U = (X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$. Temos que $U'U$ e Z_t são dados por

$$U'U = \begin{bmatrix} X_{t-1}^2 & X_{t-1}X_{t-2} & \cdots & X_{t-1}X_{t-m} \\ X_{t-2}X_{t-1} & X_{t-2}^2 & \cdots & X_{t-2}X_{t-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{t-m}X_{t-1} & X_{t-m}X_{t-2} & \cdots & X_{t-m}^2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

e

$$Z_t = [X_{t-1}^2, X_{t-2}X_{t-1}, \dots, X_{t-m}X_{t-1}, X_{t-2}^2, X_{t-3}X_{t-2}, \dots, X_{t-m}X_{t-2}, \dots, X_{t-m}^2]. \quad (6.5)$$

iv) Fazer uma regressão múltipla do vetor Z_t sobre $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$, isto é,

$$Z_t = W_t H + \xi_t, \quad (6.6)$$

em que $W_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$ e $H = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m,1} & \cdots & h_{m,r} \end{pmatrix},$

denotando o vetor de resíduos por

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{m+1,1} & \cdots & \hat{\xi}_{m+1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\xi}_{T,1} & \cdots & \hat{\xi}_{T,r} \end{pmatrix} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_r).$$

v) Fazer uma regressão de $\hat{e}$ sobre $\hat{\xi}$ e obter os resíduos do modelo que serão denotados por $\hat{a} = (\hat{a}_{m+1}, \dots, \hat{a}_T)'$.

A estatística do teste é dada por

$$F = \frac{(\sum_{t=m+1}^T \hat{e}_t \hat{\xi}_t)(\sum_{t=m+1}^T \hat{\xi}_t \hat{\xi}_t)^{-1}(\sum_{t=m+1}^T \hat{\xi}_t \hat{e}_t)(T - m - r - 1)}{r \sum_{t=m+1}^T \hat{a}_t^2} \quad (6.7)$$

ou, pela forma matricial,

$$J = \frac{(\hat{e}' \hat{\xi})(\hat{\xi}' \hat{\xi})^{-1}(\hat{\xi}' \hat{e})}{r \hat{a}' \hat{a}} (T - m - r - 1). \quad (6.8)$$

Tsay (1986) provou que, sob a hipótese (6.2), a estatística (6.8) possui distribuição assintótica $F\left(\frac{m(m+1)}{2}, T - \frac{m(m+3)}{2} - 1\right)$.

O teste de linearidade proposto por Tsay possui a vantagem de ser de fácil implementação envolvendo pequena escolha subjetiva dos parâmetros, m sendo único. Este teste possui as seguintes desvantagens:

a) Provavelmente menos potente para detectar expansões da forma

$$H_1: X_t = \sum a_j e_{t-j} + \sum \sum \sum a_{jkl} e_{t-j} e_{t-k} e_{t-l}, \dots$$

pois o caminho é implícito em testar H_0 , dada por (6.2), na direção de

$$H_1: X_t = \sum a_j e_{t-j} + \sum \sum a_{jk} e_{t-j} e_{t-k}.$$

b) Possui um questionável resultado quando o verdadeiro modelo não-linear necessita de lags muito grandes no poder de expansão para alguns moderados graus de acurácia, por exemplo um modelo SETAR.

6.3 Teste de Poggi e Portier

Poggi e Portier (1997) propuseram um teste de linearidade não paramétrico no domínio do tempo que descreveremos a seguir.

Vamos considerar o seguinte modelo auto-regressivo funcional, assintoticamente estacionário de ordem p , dado por

$$X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + e_t \quad t \in \mathbb{N}, \quad (6.9)$$

em que e_t é um processo ruído branco com média zero e matriz de covariância Γ , f é uma função desconhecida de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e p é a ordem conhecida do modelo.

Seja $X_t^{(p)} = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})$ um vetor de dimensão $\mathbb{R}^p$. Vamos supor que o estado inicial $X_0^{(p)}$ é dado e é independente de e_t . Segundo o resultado de Duflo (1990), o processo $X^{(p)} = (X_t^{(p)})_{t \geq 0}$ é assintoticamente estacionário e possui distribuição invariante μ , com momento de ordem m e função densidade de probabilidade h .

Para estimar a função f será utilizada uma estimativa de mínimos quadrados e uma estimativa não paramétrica baseada no "método kernel" (Rosenblatt, 1956). A estimativa de mínimos quadrados é adequada quando a função f é linear da forma $f(x) = Ax$ e é dada pela solução da equação

$$\left(\sum_{k=0}^{T-1} X_k^{(p)'} X_k^{(p)} \right) \hat{A}_n = \sum_{k=0}^{T-1} X_k^{(p)'} X_{k+1} \quad (6.10)$$

ou seja,

$$\hat{A}_n = \left(\sum_{k=0}^{T-1} X_k^{(p)'} X_k^{(p)} \right)^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} X_k^{(p)'} X_{k+1} \quad (6.11)$$

Quando a matriz $\left(\sum_{k=0}^{T-1} X_k^{(p)'} X_k^{(p)} \right)$ não for invertível podemos obter a estimativa de mínimos quadrados por meio da solução das equações:

$$\hat{A}_{n+1} = \hat{A}_n + S_n^{-1} X_n^{(p)'} (X_{n+1} - \hat{A}_n' X_n^{(p)}) \quad \text{com } \hat{A}_0 = 0 \quad (6.12)$$

e

$$S_n = S_{n-1} + X_n^{(p)'} X_n^{(p)} \quad \text{com } S_{-1} \geq \lambda I_p \text{ e } \lambda > 0. \quad (6.13)$$

em que I_p é uma matriz identidade de ordem p e λ uma constante.

De acordo com Poggi e Portier (1997) a estimativa "kernel regression" da função f e da função densidade de probabilidade h , para cada $x \in \mathbb{R}^p$, são dadas por

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{T-1} i^{ap} K(i^a (X_i^{(p)} - x)) X_{i+1}}{\sum_{i=0}^{T-1} i^{ap} K(i^a (X_i^{(p)} - x))} \quad (6.14)$$

e

$$\hat{h}_n(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} i^{ap} K(i^a (X_i^{(p)} - x)), \quad (6.15)$$

em que a é uma constante que assume o valor $\frac{1}{p+1}$ para quando $p > 1$ e $\frac{2}{5}$ quando $p=1$ e $K(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade. A função densidade de probabilidade K satisfaz as condições $\int K(y)dy = 1$ e $\int \|y\| K(y)dy < \infty$. Temos que $\hat{f}_n(x)=0$ quando $\hat{h}_n(x)=0$.

Dados $x_1, \dots, x_q$ distintos pontos do suporte da distribuição estacionária μ , a estatística de não linearidade é definida por

$$s_q(n) = \sum_{i=1}^q \hat{h}_n(x_i) \left\| \hat{f}_n(x_i) - \hat{A}_n' x_i \right\|_{(\Gamma)^{-1}}^2, \quad (6.16)$$

em que $\|y\|_{(\Gamma)^{-1}}^2 = y'(\Gamma)^{-1}y$.

Quando a distribuição estacionária h for gaussiana e tivermos $p=1$, os q pontos do suporte, $x_1, \dots, x_q$, podem ser escolhidos de forma equidistante no intervalo $[-1,25\hat{\sigma}_x; 1,25\hat{\sigma}_x]$ com $|x_{i+1} - x_i| = 3\hat{\sigma}_x b_n$ em que $\hat{\sigma}_x$ é o desvio padrão das observações da série X_t e $b_n = T^{-a}$. Uma segunda opção é escolher $x_1, \dots, x_q$ por meio do histograma. Para $p > 1$ devem ser escolhidos os pontos, $x_1, \dots, x_q$, em $\mathbb{R}^p$ tal que a função densidade h em cada ponto deve ser alta e a função

$$D(x_i, x_j) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T-1} b_k^{-1} K(b_k^{-1} (X_k^p - x_i)) K(b_k^{-1} (X_k^p - x_j)), \quad (6.17)$$

deve convergir para zero para $x_i \neq x_j$.

Existem duas idéias por trás da escolha da estatística de não linearidade, dada pela expressão (6.16). A primeira é comparar as duas estimativas da função f , a “kernel regression” $\hat{f}_n(x)$ que é adequada para qualquer função f e a estimativa de mínimos quadrados $\hat{A}x$ que é adequada quando o modelo for linear. A segunda é baseada na escolha de q distintos pontos do suporte de μ , nos quais calculamos o desvio quadrado entre as estimativas, ponderado pela densidade estimada $\hat{h}_n(x)$ nestes pontos. A soma destes desvios fornece um índice de não linearidade da função f , dada pela expressão (6.14).

Quando a variância do processo ruído branco, e_t , for desconhecida usaremos o seguinte estimador para Γ

$$\hat{\Gamma}_n = \frac{1}{T} \left(\sum_{k=0}^{T-1} \left(X_{k+1} - \hat{A}_{n-1}' X_k^p \right) \left(X_{k+1} - \hat{A}_{n-1}' X_k^p \right)' + \lambda \right), \quad (6.18)$$

com $\lambda > 0$. O termo λ/T assegura a invertibilidade da matriz $\hat{\Gamma}_n$.

Com o objetivo de testar a hipótese

$$H_0: f(X) = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p}$$

$$H_1: f \text{ é não-linear}$$

utilizamos a estatística

$$T_q(n) = \sum_{i=1}^q Z_n^2(x_i), \quad (6.19)$$

em que

$$Z_n(x) = \left(\frac{Tb_n^p(1+ap)}{\hat{\Gamma}_n \|K\|_2^2} \right)^{1/2} \left(\hat{h}_n(x) \right)^{1/2} \left(\hat{f}_n(x) - \hat{A}_n' x \right) \quad (6.20)$$

com $b_n = T^{-a}$ e $K(x) = \frac{1}{((2\pi)^{1/2} \sigma_x)^p} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma_x^2}\right)$ para $x \in \mathbb{R}^p$.

Sob H_0 , a estatística $T_q(n)$ possui distribuição assintótica $\chi^2(q)$.

O teste de linearidade de Poggi e Portier (1997) pode ser generalizado para o caso em que $d > 1$.

A estimativa “kernel regression” da função f e da função densidade de probabilidade h , para cada $x \in \mathbb{R}^p$, quando $d > 1$ são dadas por

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{T-1} i^{apd} K(i^a (X_i^{(p)} - x)) X_{i+1}}{\sum_{i=0}^{T-1} i^{apd} K(i^a (X_i^{(p)} - x))} \quad (6.21)$$

e

$$\hat{h}_n(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} i^{apd} K(i^a (X_i^{(p)} - x)), \quad (6.22)$$

respectivamente.

Quando a variância do processo ruído branco for desconhecida usaremos o seguinte estimador para Γ

$$\hat{\Gamma}_n = \frac{1}{T} \left(\sum_{k=0}^{T-1} (X_{k+1} - \hat{A}_{n-1}' X_k^p) (X_{k+1} - \hat{A}_{n-1}' X_k^p)' + \lambda I_d \right) \quad (6.23)$$

com $\lambda > 0$. O termo $(\lambda/T)I_d$ assegura a invertibilidade da matriz $\hat{\Gamma}_n$.

A estatística do teste é dada por

$$T_q(n) = T^{1-\text{adp}} \frac{1 + \text{adp}}{\|K\|_2^2} s_q(n), \quad (6.24)$$

com $s_q(n)$ dado por (6.16).

Sob H_0 , a estatística $T_q(n)$ possui distribuição assintótica $\chi^2(dq)$.

6.4 Outros testes de linearidade

Podemos encontrar muitos outros testes de linearidade na literatura especializada. Dunis e Zhou (1998) sugerem um teste de linearidade não paramétrico no domínio da frequência baseado no procedimento “bootstrap” e sugerem, também, um teste de linearidade paramétrico contra a hipótese de um modelo auto-regressivo exponencial. Para testar a linearidade contra a hipótese de um modelo bilinear pode ser utilizado o teste paramétrico de Keenan's (1985).

Capítulo 7

Aplicações

7.1 Introdução

Neste Capítulo serão aplicados alguns dos testes de linearidade e normalidade descritos nos Capítulos 5 e 6 nas séries de poluição, temperatura e óbitos da cidade de São Paulo, ver Apêndice A. Os programas foram desenvolvidos em S-plus e em turbo pascal e podem ser encontrados no Apêndice B.

As séries utilizadas neste capítulo são descritas a seguir:

- i) Total de óbitos por causas respiratórias para crianças de 1 a 11 meses (**RESP**) fornecido pelo Programa de Aprimoramento das Informações de Mortalidade no Município de São Paulo (PROAIM);
- ii) Total de óbitos para crianças de 1 a 11 meses (**TOT**) fornecido pelo Programa de Aprimoramento das Informações de Mortalidade no Município de São Paulo (PROAIM);

- iii) Temperatura mínima (°C) (**TEMP**) fornecida pelas estações da Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (CETESB) situadas no Parque D. Pedro e no Parque do Estado na Água Funda;
- iv) Média da concentração do agente poluidor PM10 (**PM10**), material particulado, isto é, poeira composta de partículas menores do que 10 micra, calculada por meio das concentrações fornecidas por 11 estações da Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (CETESB) espalhadas pela cidade de São Paulo.

As séries descritas foram medidas diariamente no período de 1 de janeiro de 1996 a 31 de dezembro de 1997 com $T=731$ observações. A série de média da concentração de PM10 foi observada no período 18 de abril de 1996 a 31 de dezembro de 1997 com $T=623$ observações diárias.

Para a aplicação dos testes de normalidade e linearidade de Brillinger e Irizarry (1998) devemos particionar a série de interesse em L subséries de tamanho V tal que $V=T^\alpha$ e $L=T^{1-\alpha}$, para $\alpha < 0,5$. Desta forma as séries (1-B)TEMP, (1-B)RESP e (1-B)TOT, que possuem 730 observações, foram particionadas em 46 subséries de tamanho 16 ($\alpha=0,421$) e a série PM10 foi particionada em 38 subséries de tamanho 16 ($\alpha=0,431$). O "taper" utilizado na obtenção do periodograma e do bi-espectro estimado é $\lambda(u)=\frac{1}{2}(1-\cos(2\pi u))$.

Para a realização do teste de linearidade de Tsay (1986) é necessário a obtenção do parâmetro m , que indica a quantidade de variáveis independentes da primeira regressão, para isto foram ajustados modelos auto-regressivos às séries e como valor de m tomamos a ordem de modelo auto-regressivo que melhor se ajustou aos dados; para esta escolha foram utilizados os seguintes critérios:

- Critério de informação de Akaike

Segundo este critério o melhor modelo auto-regressivo para a série é aquele que possui o menor valor de $AIC(k)$, sendo que

$$AIC(k) = \ln \hat{\sigma}^2(k) + \frac{2k}{T},$$

em que k é o número de parâmetros do modelo, T é o número de observação da série e $\hat{\sigma}^2(k)$ é a variância residual estimada do modelo auto-regressivo de ordem k .

- Critério de informação de Schwartz

Segundo este critério o melhor modelo auto-regressivo para a série é aquele que possui o menor valor de SBC , sendo que

$$SBC(k) = \ln \hat{\sigma}^2(k) + \frac{k \ln(T)}{T},$$

em que k é o número de parâmetros do modelo, T é o número de observação da série e $\hat{\sigma}^2(k)$ é a variância residual estimada do modelo auto-regressivo de ordem k .

Para a realização do teste de linearidade de Poggi e Portier é necessário fazer a escolha de q pontos, com alta densidade, do suporte da distribuição h . Quando esta distribuição for aproximadamente gaussiana os q pontos do suporte, que são da forma $(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})$, devem ser escolhidos tal que $-1,25 \hat{\sigma}_x^2 < X_t$, $X_t < 1,25 \hat{\sigma}_x^2$, para $i=0,1,\dots,p-1$, e $\hat{\sigma}_x^2$ é a variância de X_t . Após esta seleção devemos calcular nestes pontos a função distribuição h e devem ser selecionados q

pontos tais que $D(x_i, x_j)$, dado por (6.17), é aproximadamente zero, para $x_i \neq x_j$. Na prática $q=3$ ou 4 é suficiente.

Nos testes de normalidade e linearidade de Subba Rao e Gabr (1980) foi utilizada para a estimação do espectro, bi-espectro e bi-coerência a janela espectral de Parzen (ver Tabela 2.1), cuja largura de faixa é $\frac{\sqrt{6}}{M}$. As frequências principais selecionadas para o teste estão apresentadas nas colunas (3) e (4) da Tabela 5.1. Para as séries TEMP, RESP e TOT foram utilizados os seguintes parâmetros: $K=6$, $d=10$, $r=5$ e $M=56$ e para a série PM10 foi utilizado $K=6$, $d=10$, $r=5$ e $M=48$. Estes parâmetros satisfazem as condições estabelecidas nas equações de (5.20) a (5.23).

7.2 Total de óbitos por causas respiratórias (RESP)

7.2.1 Análise descritiva e transformação

A série RESP é apresentada na Figura 7.1 e as médias mensais da série são apresentadas na Tabela 7.1; podemos notar que a série apresenta uma não estacionariedade homogênea, uma vez que o total de óbitos por causas respiratórias e os totais médios por causas respiratórias cresceram no inverno, ou seja, entre os meses de junho e agosto e decresceram nos meses subsequentes. Para eliminar esta não estacionariedade foi aplicada à série uma diferença de ordem 1. A série transformada está apresentada na Figura 7.2. Podemos verificar que a transformação estabilizou a média da série.

Figura 7.1 - Série RESP.**Tabela 7.1** - Média e desvio padrão mensais calculados a partir dos dados diários da série RESP

Mês	Média	Desvio Padrão	Mês	Média	Desvio Padrão
Jan/96	16,4	5,1	Jan/97	13,7	2,9
Fev/96	15,2	4,6	Fev/97	14,8	3,8
Mar/96	16,9	3,9	Mar/97	15,4	3,6
Abr/96	17,5	4,1	Abr/97	15,5	3,3
Mai/96	20,1	4,8	Mai/97	18,1	5,0
Jun/96	24,7	5,6	Jun/97	30,9	5,7
Jul/96	28,2	7,0	Jul/97	21,5	5,8
Ago/96	25,3	5,8	Ago/97	19,4	4,2
Set/96	20,3	4,9	Set/97	17,7	4,1
Out/96	14,8	4,0	Out/97	15,9	4,7
Nov/96	15,6	3,7	Nov/97	16,0	3,2
Dez/96	15,1	3,5	Dez/97	17,3	5,5

Figura 7.2 - Série (1-B)RESP.

Podemos notar pela Figura 7.3, em que as 730 observações da série transformada foram divididas em 52 subséries de 14 elementos cada e foram calculadas as médias e os desvios padrões de cada segmento, que a diferença aplicada à série RESP parece ser suficiente.

Figura 7.3 - Gráfico do desvio padrão x média de cada uma das 52 subséries da série (1-B)RESP.

Analisando a Figura 7.4, que contém as funções de autocorrelação amostral das séries RESP e (1-B)RESP, notamos que transformação foi adequada e parece ter tornado a série estacionária.

Figura 7.4 - Funções de autocorrelação amostral para as séries RESP e (1-B)RESP.

7.2.2 Aplicação dos testes de linearidade e normalidade

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção foram aplicados à diferença de ordem 1 da série total de óbitos por causas respiratórias, que passaremos a denotar por $(1-B)RESP$.

Para a realização do teste de linearidade do tipo de McLeod e Li, foi ajustado um modelo $MA(1)$ à série com uma diferença, isto é,

$$(1-B)RESP_t = -0,83e_{t-1} + e_t. \quad (7.1)$$

As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo dado pela expressão (7.1) estão apresentadas na Figura 7.5. O resultado da aplicação do teste, está apresentado na Tabela 7.5.

Figura 7.5 - Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo (7.1).

Com relação ao teste de linearidade de Tsay os valores de AIC e SBC obtidos a partir dos modelos auto-regressivos ajustados estão na Tabela 7.2.

Notamos que o modelo que se ajustou bem à série (1-B)RESP foi um AR(7), entretanto, esta escolha acarretaria no ajuste de uma regressão multivariada de ordem 28 no terceiro passo do teste, desta forma foi escolhido como um bom modelo o AR(3). O nível descritivo associado ao teste está na Tabela 7.5.

Tabela 7.2 - Valores de AIC e SBC para a série (1-B)RESP

AR	AIC	SBC
1	4549	4554
2	4440	4449
3	4401	4414
4	4380	4398
5	4370	4393
6	4361	4388
7	4349	4381
8	4348	4385
9	4343	4384
10	4339	4385
11	4340	4390
12	4342	4397
13	4342	4401
14	4343	4408
15	4345	4414

No teste de linearidade de Poggi e Portier devemos escolher a ordem do modelo auto-regressivo que melhor se ajustou à série e para isto foi utilizado o mesmo critério do teste de Tsay, ou seja, um AR(3). Para a realização do teste é necessário fazer a escolha de q pontos do suporte da distribuição h . Na Figura 7.6 está representado o histograma de (1-B)RESP; como esta distribuição é aproximadamente gaussiana, a função h foi calculada nos pontos (X_t, X_{t-1}, X_{t-2}) tal que $]-7,69 < X_{t-i} < 7,69[$ para $i=0, 1, 2$. A Tabela 7.3 apresenta os pontos que foram selecionados para o teste e o tempo em que a observação ocorreu (T^*). Estes pontos, que possuem alta densidade, foram selecionados utilizando o histograma da função h que está apresentado na Figura 7.7. A Tabela 7.4 apresenta o valor da

função h para cada ponto selecionado e a distância entre estes pontos; como esta distância é aproximadamente zero, os pontos foram selecionados adequadamente. O resultado da aplicação do teste, está apresentado na Tabela 7.5.

Figura 7.6 - Histograma de $(1-B)RESP$.

Figura 7.7 - Histograma da função h para $(1-B)RESP$.

Tabela 7.3 - Pontos selecionados para o teste de Poggi e Portier

T*	X _t	X _{t-1}	X _{t-2}
460	-4	-4	7
422	-6	0	-2
67	3	-1	-1
410	1	2	3

Tabela 7.4 - Função h e distância entre os pontos selecionados (D)

T*	h	Pontos	D
460	0,00016	(460,422)	$1,50 \times 10^{-11}$
422	0,00020	(460,067)	$1,28 \times 10^{-11}$
067	0,00024	(460,410)	$2,25 \times 10^{-11}$
410	0,00028	(422,067)	$1,85 \times 10^{-11}$
		(422,410)	$3,12 \times 10^{-11}$
		(067,410)	$1,46 \times 10^{-11}$

Os testes de linearidade e normalidade de Subba Rao e Gabr foram aplicados nas 7 frequências principais dadas pelas colunas (3) e (4) da Tabela 5.1, sendo que em torno de cada frequências principal foi selecionada uma amostra de 21 frequências satisfazendo (5.8) e (5.9) com $r=5$. Os resultados das aplicações dos testes estão nas Tabelas 7.5 e 7.6.

Nos testes de normalidade e linearidade de Brillinger e Irizarry em que a série foi particionada em 46 subséries de tamanho 16 obtivemos 29 frequências em que o espectro e o bi-espectro foram calculados. Os níveis descritivos associados aos testes estão nas Tabelas 7.5 e 7.6. Nas Figuras 7.8 e 7.9 estão apresentados os níveis descritivos associados aos testes de linearidade e normalidade. Com relação ao teste de linearidade, 31,03 % dos níveis descritivos associados ao teste são menores do que 0,05 e 89,65 % dos níveis descritivos, associados ao teste de normalidade, são menores do que 0,05.

Figura 7.8 - Níveis descritivos associados ao teste de linearidade.

Figura 7.9 - Níveis descritivos associados ao teste de normalidade.

Conclusão

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção, cujos resultados estão nas Tabelas 7.5 e 7.6, indicam que a série (1-B)RESP não possui um comportamento linear nem gaussiano.

Tabela 7.5 - Testes de linearidade para a série (1-B)RESP

	Teste	Estatística	Estimativa	p	percentual de $p < 0,05$
Domínio do tempo	McLeod e Li	Q	112,72	0,0000	-
	Tsay	F	2,94	0,0076	-
	Poggi e Portier	$T_q(n)$	1097,13	0,000	-
Domínio da frequência	Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_2$	5,79	0,0026	-
	Brillinger e Irizarry	$X^*(\omega_i, \omega_j)$	-	-	31,03

p: nível descritivo associado ao teste.

Tabela 7.6 - Testes de normalidade no domínio da frequência para a série (1-B)RESP

Teste	Estatística	Estimativa	p	percentual de $p < 0,05$
Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_1$	80,55	0,0000	-
Brillinger e Irizarry	$\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2)$	-	-	89,65

p: nível descritivo associado ao teste.

7.3 Total de óbitos para crianças de 1 a 11 meses (TOT)

7.3.1 Análise descritiva e transformação

A série TOT é apresentada na Figura 7.10 e as médias mensais desta série são apresentadas na Tabela 7.7. Podemos notar um comportamento não estacionário homogêneo da série, uma vez que o total de óbitos e os valores médios mensais, cresceram entre junho e agosto e decresceram nos meses subsequentes. Para eliminar esta não estacionariedade foi aplicada à série uma diferença de ordem 1. A série transformada está apresentada na Figura 7.11. Podemos verificar que a transformação estabilizou a média da série.

Figura 7.10 - Série TOT.

Tabela 7.7 - Média e desvio padrão mensais calculados a partir dos dados diários da série TOT

Mês	Média	Desvio Padrão	Mês	Média	Desvio Padrão
Jan/96	140,2	15,9	Jan/97	137,1	13,6
Fev/96	142,0	12,2	Fev/97	138,0	12,1
Mar/96	147,8	15,0	Mar/97	137,0	15,1
Abr/96	148,5	13,1	Abr/97	147,2	13,3
Mai/96	157,9	15,0	Mai/97	152,5	13,7
Jun/96	177,4	11,6	Jun/97	193,0	18,3
Jul/96	188,3	16,5	Jul/97	162,7	13,7
Ago/96	176,7	16,1	Ago/97	160,3	13,3
Set/96	152,1	13,5	Set/97	148,4	14,7
Out/96	139,8	14,4	Out/97	148,8	14,3
Nov/96	137,5	11,6	Nov/97	143,6	15,4
Dez/96	143,3	13,3	Dez/97	152,1	21,2

Figura 7.11 - Série (1-B)TOT.

Podemos notar pela Figura 7.12, em que as 730 observações da série transformada foram divididas em 52 subséries de 14 elementos cada e foram calculadas as médias e os desvios padrões de cada segmento, que a diferença aplicada à série TOT parece ser suficiente.

Figura 7.12 - Gráfico do desvio padrão x média de cada uma das 52 subséries da série (1-B)TOT.

Analisando a Figura 7.13, em que estão representadas as funções de autocorrelação amostral das séries TOT e (1-B)TOT, notamos que a transformação foi adequada e parece ter tornado a série estacionária.

Figura 7.13 - Funções de autocorrelação amostral para as séries TOT e (1-B)TOT.

7.3.2 Aplicação dos testes de linearidade e normalidade

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção foram aplicados à diferença de ordem 1 da série total de óbitos para crianças de 1 a 11 meses, que passaremos a denotar por $(1-B)TOT$.

Para a realização do teste de linearidade de McLeod e Li, foi ajustado um modelo $MA(1)$ à série com uma diferença, isto é,

$$(1-B)TOT_t = -0,80e_{t-1} + e_t. \quad (7.2)$$

As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo dado pela expressão (7.2) estão apresentadas na Figura 7.14. Na Tabela 7.11 está apresentado o resultado da aplicação do teste.

Figura 7.14 - Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo (7.2).

Com relação ao teste de linearidade de Tsay os valores de AIC e SBC, obtidos a partir dos modelos auto-regressivos ajustados, estão na Tabela 7.8.

Notamos que o modelo que se ajustou bem à série (1-B)TOT foi um AR(7), entretanto, esta escolha acarretaria no ajuste de uma regressão multivariada de ordem 28 no terceiro passo do teste, desta forma foi escolhido como um bom modelo o AR(3). O nível descritivo associado ao teste está na Tabela 7.11.

Tabela 7.8 - Valores de AIC e SBC para a série (1-B)TOT

1	6189	6194
2	6120	6129
3	6072	6085
4	6065	6083
5	6060	6083
6	6036	6064
7	6026	6059
8	6025	6062
9	6022	6063
10	6022	6068
11	6023	6074
12	6025	6080
13	6027	6087
14	6029	6094
15	6031	6100

Para a realização do teste de linearidade de Poggi e Portier devemos escolher a ordem do modelo auto-regressivo que melhor se ajustou à série e para isto foi utilizado o mesmo critério do teste de Tsay, ou seja, um AR(3). Para a realização do teste é necessário fazer a escolha de q pontos do suporte da distribuição h . O histograma de (1-B)TOT está representado na Figura 7.15; como esta distribuição é aproximadamente gaussiana, a função h foi calculada nos pontos (X_i, X_{i-1}, X_{i-2}) tal que $-23,0 < X_{i-1} < 23,0$, para $i=0, 1, 2$. A Tabela 7.9 apresenta os pontos selecionados para o teste e o tempo em que a observação ocorreu (T^*). Estes pontos, que possuem alta densidade, foram selecionados pelo histograma da função h que está apresentado na Figura 7.16. A Tabela 7.10 apresenta o valor da função h para cada ponto selecionado e a distância entre estes

pontos. Como esta distância é aproximadamente zero, os pontos foram selecionados adequadamente. O resultado da aplicação do teste, está apresentado na Tabela 7.11.

Figura 7.15 - Histograma de (1-B)TOT.

Figura 7.16 - Histograma da função h para (1-B)TOT.

Tabela 7.9 - Pontos selecionados para o teste de Poggi e Portier

T*	X _t	X _{t-1}	X _{t-2}
080	16	12	-11
028	-2	8	14
223	10	13	-9
635	7	-3	-17

Tabela 7.10 - Função h e distância entre os pontos selecionados (D)

T*	h	Pares	D
080	$4,3 \times 10^{-6}$	(080,028)	$3,6 \times 10^{-14}$
028	$5,1 \times 10^{-6}$	(080,223)	$8,6 \times 10^{-13}$
223	$6,0 \times 10^{-6}$	(080,635)	$1,2 \times 10^{-13}$
635	$8,0 \times 10^{-6}$	(028,223)	$6,6 \times 10^{-14}$
		(028,635)	$2,5 \times 10^{-14}$
		(223,635)	$1,6 \times 10^{-13}$

Os testes de linearidade e normalidade de Subba Rao e Gabr foram aplicados nas 7 frequências principais dadas pelas colunas (3) e (4) da Tabela 5.1, sendo que em torno de cada frequências principal foi selecionada uma amostra de 21 frequências satisfazendo (5.8) e (5.9) com $r=5$. Os resultados das aplicações dos testes estão nas Tabelas 7.11 e 7.12.

Nos testes de normalidade e linearidade de Brillinger e Irizarry a série foi particionada em 46 subséries de tamanho 16, desta forma, obtivemos 29 frequências em que o espectro e o bi-espectro foram calculados. Os níveis descritivos associados aos testes estão nas Tabelas 7.11 e 7.12. Os níveis descritivos associados aos testes de linearidade e normalidade estão apresentados nas Figuras 7.17 e 7.18. Com relação ao teste de linearidade, 37,93 % dos níveis descritivos são menores do que 0,05 e 62,08 % dos níveis descritivos, associados ao teste de normalidade, são menores do que 0,05.

Figura 7.17 - Níveis descritivos associados ao teste de linearidade.

Figura 7.18 - Níveis descritivos associados ao teste de normalidade.

Conclusão

Os resultados dos testes de linearidade e normalidade realizados na série (1-B)TOT, estão nas Tabelas 7.11 e 7.12. Notamos que a série não apresenta um comportamento linear nem gaussiano. Os testes de linearidade de McLeod e Li e de Tsay indicam que a série possui um comportamento linear.

Tabela 7.11 - Testes de linearidade para a série (1-B)TOT

	Teste	Estatística	Estimativa	p	percentual de $p < 0,05$
Domínio do tempo	McLeod e Li	Q	60,10	0,4718	-
	Tsay	F	1,53	0,1650	-
	Poggi e Portier	$T_q(n)$	43093,0	0,0000	-
Domínio da frequência	Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_2$	10,51	0,0001	-
	Brillinger e Irizarry	$X^*(\omega_i, \omega_j)$	-	-	37,93

p: nível descritivo associado ao teste

Tabela 7.12 - Testes de normalidade no domínio da frequência para a série (1-B)TOT

Teste	Estatística	Estimativa	p	% $p < 0,05$
Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_1$	16,47	0,0000	-
Brillinger e Irizarry	$\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2)$	-	-	62,08

p: nível descritivo associado ao teste

7.4 Média da concentração do agente poluidor PM10 (PM10)

7.4.1 Análise descritiva e transformação

A série PM10 é apresentada na Figura 7.19; podemos perceber que a média e a variância da série não são constantes em relação ao tempo indicando uma não estacionariedade da série. Pela Tabela 7.13, dos dados mensais do agente poluidor PM10, notamos que entre janeiro e abril de 96 e entre março e maio de 97 ocorreram os maiores valores médios e desvios padrões da série.

Figura 7.19 - Série PM10.

Tabela 7.13 - Média e desvio padrão mensais calculados a partir dos dados diários da série PM10

Mês	Média	Desvio Padrão	Mês	Média	Desvio Padrão
Jan/96	89,8	29,5	Jan/97	67,5	18,8
Fev/96	73,7	23,4	Fev/97	57,5	23,5
Mar/96	79,7	30,5	Mar/97	78,5	28,4
Abr/96	90,5	47,1	Abr/97	80,0	36,8
Mai/96	68,7	31,2	Mai/97	85,1	35,0
Jun/96	58,7	19,3	Jun/97	52,0	15,8
Jul/96	58,3	16,5	Jul/97	54,5	18,5
Ago/96	51,6	10,7	Ago/97	47,5	9,8
Set/96	44,7	9,8	Set/97	43,9	6,6
Out/96	48,8	14,2			
Nov/96	51,5	11,8			
Dez/96	57,0	15,2			

A necessidade de uma transformação na série pode ser percebida pela Figura 7.20, em que as 623 observações da série foram divididas em 44 subséries de 14 elementos cada e foram calculadas as médias e os desvios padrões de cada segmento. Com base nesta figura, podemos verificar o aumento da variância dos dados com o aumento da média das subséries. Sendo assim, aplicamos o logaritmo nos valores da série PM10. A série transformada está apresentada na Figura 7.21, podemos notar que a transformação parece estabilizar a variabilidade da série.

Figura 7.20 - Gráfico do desvio padrão x média de cada uma das 44 subséries da série PM10.

Figura 7.21 - Logarítmo da série PM10.

Analisando a Figura 7.22, que contém as funções de autocorrelação amostral da série PM10 e do logarítmo da série PM10, verificamos que as duas funções de autocorrelação amostral apresentam um comportamento semelhante e parecem indicar uma periodicidade na série.

Figura 7.22 - Funções de autocorrelação amostral para as séries PM10 e LPM10.

7.4.2 Aplicação dos testes de linearidade e normalidade

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção foram aplicados ao logaritmo da série média da concentração do agente poluidor PM10, que passaremos a denotar por LPM10.

Para a realização do teste de linearidade de McLeod e Li, foi ajustado um modelo auto-regressivo à série, isto é,

$$\text{LPM10}_{t-4}=0,86\text{LPM10}_{t-1}-0,35\text{LPM10}_{t-2}+0,17\text{LPM10}_{t-3}+0,08\text{LPM10}_{t-12}+e_t. \quad (7.3)$$

As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais do resíduo do modelo dado pela expressão (7.3) estão apresentadas na Figura 7.23. O resultado da aplicação do teste, está apresentado na Tabela 7.17.

Figura 7.23 - Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo (7.3).

Com relação ao teste de linearidade de Tsay os valores de AIC e SBC obtidos a partir dos modelos auto-regressivos ajustados estão na Tabela 7.14, notamos que o modelo que se ajustou bem à série LPM10 foi um AR(13), entretanto, esta escolha acarretaria no ajuste de uma regressão multivariada de ordem 91 no terceiro passo do teste, desta forma foi escolhido como um bom modelo o AR(3). O nível descritivo associado ao teste está na Tabela 7.17.

Tabela 7.14 - Valores de AIC e SBC para a série LPM10

AR	AIC	SBC
1	303	308
2	305	314
3	234	248
4	217	235
5	213	236
6	192	219
7	189	220
8	189	224
9	184	224
10	178	223
11	175	224
12	166	219
13	145	202
14	141	203
15	141	207

No teste de linearidade de Poggi e Portier devemos escolher a ordem do modelo auto-regressivo que melhor se ajustou à série e para isto foi utilizado o mesmo critério do teste de Tsay, ou seja, um AR(3). Para a realização do teste é necessário fazer a escolha de q pontos do suporte da distribuição h . Na Figura 7.24 está representado o histograma de LPM10. A função h foi calculada nos pontos (X_t, X_{t-1}, X_{t-2}) tal que $]3,75 < X_{t-i} < 4,25[$, para $i=0, 1, 2$. A Tabela 7.15 apresenta os pontos que foram selecionados para o teste e o tempo em que a observação ocorreu (T^*). Estes pontos, que possuem alta densidade, foram selecionados utilizando o

histograma da função h que está apresentado na Figura 7.25. A Tabela 7.16 apresenta o valor da função h para cada ponto selecionado e a distância entre estes pontos; como esta distância é aproximadamente zero, os pontos foram selecionados adequadamente. O resultado da aplicação do teste, está apresentado na Tabela 7.17.

Figura 7.24 - Histograma de LPM10.

Figura 7.25 - Histograma da função h para LPM10.

Tabela 7.15 - Pontos selecionados para o teste de Poggi e Portier

T*	X_t	X_{t-1}	X_{t-2}
341	3,83	3,95	4,35
359	4,18	4,43	4,40
328	4,43	4,37	4,23
557	4,24	3,97	3,77

Tabela 7.16 - Função h e distância entre os pontos selecionados (D)

T*	h	Pontos	D
341	0,65	(341,359)	0,0006
359	0,85	(341,328)	0,0004
328	1,11	(341,557)	0,0001
557	1,20	(359,328)	0,0059
		(359,557)	0,0003
		(328,557)	0,0007

Os testes de linearidade e normalidade de Subba Rao e Gabr foram aplicados nas 7 frequências principais dadas pelas colunas (3) e (4) da Tabela 5.1, sendo que em torno de cada frequências principal foi selecionada uma amostra de 21 frequências satisfazendo (5.8) e (5.9) com $r=5$. Os resultados das aplicações dos testes estão nas Tabelas 7.17 e 7.18.

Nos testes de normalidade e linearidade de Brillinger e Irizarry em que a série foi particionada em 46 subséries de tamanho 16 obtivemos 29 frequências em que o espectro e o bi-espectro foram calculados. Os níveis descritivos associados aos testes estão nas Tabelas 7.17 e 7.18. Nas Figuras 7.26 e 7.27 estão apresentados os níveis descritivos associados aos testes de normalidade e linearidade. Com relação ao teste de linearidade, 27,58 % dos níveis descritivos associados ao teste são menores do que 0,05 e 86,20 % dos níveis descritivos, associados ao teste de normalidade, são menores do que 0,05.

Figura 7.26 - Níveis descritivos associados ao teste de normalidade.

Figura 7.27 - Níveis descritivos associados ao teste de linearidade.

Conclusão

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção, cujos resultados estão nas Tabela 7.17 e 7.18, indicam que a série LPM10 não possui um comportamento linear nem gaussiano.

Tabela 7.17 - Testes de linearidade para a série LPM10

	Teste	Estatística	Estimativa	p	percentual de $p < 0,05$
Domínio do tempo	McLeod e Li	Q	171,4	0,0000	-
	Tsay	F	3,80	0,0009	-
	Poggi e Portier	$T_q(n)$	$2,18 \times 10^{134}$	0,0000	-
Domínio da frequência	Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_2$	24,73	0,0000	-
	Brillinger e Irizarry	$X^*(\omega_i, \omega_j)$	-	-	27,58

p: nível descritivo associado ao teste

Tabela 7.18 - Testes de normalidade no domínio da frequência para a série LPM10

Teste	Estatística	Estimativa	p	% $p < 0,05$
Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_1$	47,97	0,0000	-
Brillinger e Irizarry	$\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2)$	-	-	86,20

p: nível descritivo associado ao teste

7.5 Temperatura mínima (TEMP)

7.5.1 Análise descritiva e transformação

A série TEMP é apresentada na Figura 7.28, podemos notar uma não estacionário homogênea da série, uma vez que as temperaturas mínimas, em geral, decresceram de março a julho. Pela Tabela 7.19, dos dados mensais da série TEMP, notamos que nos meses de janeiro, fevereiro e dezembro ocorreram as maiores médias das temperaturas mínimas para os anos de 1996 e 1997. Para eliminar este comportamento foi aplicada à série uma diferença de ordem 1. A série transformada está apresentada na Figura 7.29. Podemos verificar que a transformação estabilizou a média da série.

Figura 7.28 - Série TEMP.

Tabela 7.19 - Média e desvio padrão mensais calculados a partir dos dados diários da série TEMP

Mês	Média	Desvio Padrão	Mês	Média	Desvio Padrão
Jan/96	19,2	1,1	Jan/97	18,8	1,1
Fev/96	19,0	1,2	Fev/97	18,5	1,0
Mar/96	18,5	1,4	Mar/97	16,8	1,7
Abr/96	16,3	3,3	Abr/97	15,1	1,8
Mai/96	12,9	1,8	Mai/97	13,1	1,5
Jun/96	12,0	2,2	Jun/97	11,8	2,7
Jul/96	9,7	2,9	Jul/97	12,5	1,6
Ago/96	10,2	3,1	Ago/97	11,5	2,1
Set/96	13,2	1,8	Set/97	13,9	1,7
Out/96	15,0	1,7	Out/97	15,9	1,9
Nov/96	15,8	2,4	Nov/97	18,0	1,7
Dez/96	18,2	1,6	Dez/97	18,6	1,9

Figura 7.29 - Gráfico da série (1-B)TEMP.

Podemos notar pela Figura 7.30, em que as 730 observações da série transformada foram divididas em 52 subséries de 14 elementos cada e foram calculadas as médias e os desvios padrões de cada segmento, que a diferença aplicada à série TEMP parece ser suficiente.

Figura 7.30 - Gráfico do desvio padrão x média de cada uma das 52 subséries para a série (1-B)TEMP.

Analisando a Figura 7.31, em que estão representadas as funções de autocorrelação amostral das séries TEMP e (1-B)TEMP, notamos que a transformação foi adequada e parece ter tornado a série estacionária.

Figura 7.31 - Funções de autocorrelação amostral para as séries TEMP e (1-B)TEMP.

7.5.2 Aplicação dos testes de linearidade e normalidade

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção foram aplicados à diferença de ordem 1 da série de temperatura mínima, que passaremos a denotar por $(1-B)TEMP$.

Para a realização do teste de linearidade de McLeod e Li, foi ajustado um modelo ARMA à série com uma diferença, isto é,

$$(1-0,63B)(1-B)TEMP_t = (1-0,89B)(1-0,11B^3)(1+0,10B^{14})(1-0,10B^{25})e_t. \quad (7.4)$$

As funções de autocorrelação parcial e autocorrelação amostral do resíduo do modelo dado pela expressão (7.4) estão apresentadas na Figura 7.32. Na Tabela 7.23 está apresentado o resultado da aplicação do teste.

Figura 7.32 - Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostral do resíduo do modelo (7.4).

Com relação ao teste de linearidade de Tsay os valores de AIC e SBC obtidos a partir dos modelos auto-regressivos ajustados estão na Tabela 7.20,

notamos que o modelo que se ajustou bem à série $(1-B)TEMP$ foi um $AR(4)$, entretanto, esta escolha acarretaria no ajuste de uma regressão multivariada de ordem 10 no terceiro passo do teste, desta forma foi escolhido como um bom modelo o $AR(3)$. O nível descritivo associado ao teste está na Tabela 7.23.

Tabela 7.20 - Valores de AIC e SBC para a série $(1-B)TEMP$

AR	AIC	SBC
1	2757	2762
2	2742	2751
3	2711	2725
4	2703	2721
5	2698	2721
6	2697	2724
7	2698	2730
8	2697	2734
9	2695	2737
10	2694	2740
11	2691	2742
12	2681	2736
13	2679	2738
14	2681	2745
15	2682	2751

Para a realização do teste de linearidade de Poggi e Portier devemos escolher a ordem do modelo auto-regressivo que melhor se ajustou à série e para isto foi utilizado o mesmo critério do teste de Tsay, ou seja, um $AR(3)$. Para a realização do teste é necessário fazer a escolha de q pontos do suporte da distribuição h . O histograma de $(1-B)TEMP$ está representado na Figura 7.33, como esta distribuição é aproximadamente gaussiana, a função h foi calculada nos pontos (X_i, X_{i-1}, X_{i-2}) tal que $-23,0 < X_{i-i} < 23,0$, para $i=0, 1, 2$. A Tabela 7.21 apresenta os pontos selecionados para o teste e o tempo em que a observação ocorreu (T^*). Estes pontos, que possuem alta densidade, foram selecionados pelo

histograma da função h que está apresentado na Figura 7.34. A Tabela 7.22 apresenta o valor da função h para cada ponto selecionado e a distância entre estes pontos; como esta distância é aproximadamente zero os pontos foram selecionados adequadamente. O resultado da aplicação do teste, está apresentado na Tabela 7.23.

Figura 7.33 - Histograma de $(1-B)TEMP$.

Figura 7.34 - Histograma da função h para $(1-B)TEMP$.

Tabela 7.21 - Pontos selecionados para o teste de Poggi e Portier

T*	X _t	X _{t-1}	X _{t-2}
650	1,2	1,0	-1,9
343	1,8	-0,8	-0,5
666	0,1	2,0	1,0
262	0,3	1,0	0,6

Tabela 7.22 - Função h e distância entre os pontos selecionados (D)

T*	h	Pares	D
650	0,00605	(650,343)	$2,13 \times 10^{-11}$
343	0,00787	(650,666)	$9,62 \times 10^{-11}$
666	0,00906	(650,262)	$2,92 \times 10^{-11}$
262	0,01109	(343,666)	$1,33 \times 10^{-11}$
		(343,262)	$4,50 \times 10^{-11}$
		(666,262)	$9,30 \times 10^{-11}$

Os testes de linearidade e normalidade de Subba Rao e Gabr foram aplicados nas 7 frequências principais dadas pelas colunas (3) e (4) da Tabela 5.1, sendo que em torno de cada frequências principal foi selecionada uma amostra de 21 frequências satisfazendo (5.8) e (5.9) com $r=5$. Os resultados das aplicações dos testes estão nas Tabelas 7.23 e 7.24.

Nos testes de normalidade e linearidade de Brillinger e Irizarry a série foi particionada em 46 subséries de tamanho 16, desta forma, obtivemos 29 frequências em que o espectro e o bi-espectro foram calculados. Os níveis descritivos associados aos testes estão nas Tabelas 7.23 e 7.24. Os níveis descritivos associados aos testes de normalidade e linearidade estão apresentados nas Figuras 7.35 e 7.36. Com relação ao teste de linearidade 24,13 % dos níveis descritivos são menores do que 0,05 e 41,37 % dos níveis descritivos associados ao teste de normalidade são menores do que 0,05.

Figura 7.35 - Níveis descritivos associados ao teste de normalidade.

Figura 7.36 - Níveis descritivos associados ao teste de linearidade.

Conclusão

Os testes de linearidade e normalidade descritos nesta seção, cujos resultados estão nas Tabelas 7.23 e 7.24, indicam que a série não possui um comportamento linear nem gaussiano.

Tabela 7.23 - Testes de linearidade para a série (1-B)TEMP

	Teste	Estatística	Estimativa	p	percentual de $p < 0,05$
Domínio do tempo	McLeod e Li	Q	81,73	0,032	-
	Tsay	F	2,28	0,0345	-
	Poggi e Portier	$T_q(n)$	12,63	0,0132	-
Domínio da frequência	Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_2$	9,11	0,0002	-
	Brillinger e Irizarry	$X^*(\omega_i, \omega_j)$	-	-	24,13

p: nível descritivo associado ao teste

Tabela 7.24 - Testes de normalidade no domínio da frequência para a série (1-B) TEMP

Teste	Estatística	Estimativa	p	% $p < 0,05$
Subba Rao e Gabr	$\mathfrak{I}_1$	26,39	0,0000	-
Brillinger e Irizarry	$\hat{\gamma}_B^2(\omega_1, \omega_2)$	-	-	41,37

p: nível descritivo associado ao teste

7.6 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo descrever e aplicar a algumas séries reais alguns testes de linearidade e normalidade. Descreveremos a seguir algumas das vantagens e desvantagens de cada um dos testes descritos nos Capítulos 5 e 6 e aplicados nas série reais de poluição, temperatura e óbitos da cidade de São Paulo:

- i) Os testes de linearidade no domínio do tempo de McLeod e Li e de Tsay têm a vantagem de possuírem uma aplicação fácil mas a desvantagem de serem paramétricos, ou seja, requer o ajustamento de um modelo a série analisada;
- ii) O teste de linearidade no domínio do tempo de Poggi e Portier possui a vantagem de ser não paramétrico, entretanto, possui a desvantagem de ter uma aplicação trabalhosa, pois necessita da escolha de pontos do suporte da distribuição do processo e esta escolha não é trivial;
- iii) Os testes de linearidade e normalidade no domínio da frequência de Subba Rao e Gabr possuem as vantagens de serem não paramétricos e de fácil aplicação; entretanto, possuem a desvantagem de levar um tempo computacional muito grande no cálculo do bi-espectro para uma grande quantidade de frequências, por este motivo o programa foi desenvolvido em Turbo Pascal;
- iv) Os testes de linearidade e normalidade no domínio da frequência de Brillinger e Irizarry possuem as vantagens de ter uma aplicação fácil e são executados rapidamente pelo S-plus.

Bibliografia

- Anderson, T. W. (1958). *An Introduction to Multivariate Analysis*. Wiley, New York.
- Andel, J. (1976). Autoregressive series with random parameters. *Math. Operationsforsch. u. Statist.*, 7, 735-741.
- Ashley, R. A., Patterson, D. M. e Hinich, M. J. (1986). A diagnostic test for nonlinearity serial dependence in time series fitting errors. *Journal of Time Series Analysis*. 7(3), 165-178.
- Bollerslev, T. (1986). Generalised autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 51, 307-327.
- Bollerslev, T, Chou, R.Y. e Kroner, K.F. (1992). Arch modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. e Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.
- Brillinger, D.R. (1965). An introduction to polyspectra. *Ann. Math. Statist.*, 36, 1351-1374.
- Brillinger, D.R. e Irizarry, R.A. (1998). An investigation of the second and higher-order spectra of music. *Signal Processing* 65, 161-179.
- Brillinger, D.R. e Rosenblatt, M. (1967). Computation and interpretation of k-th order spectra. *Spectral Analysis of Time Series*. John Wiley, 189-232.
- Brockett, P. L., Hinich, M. J. e Patterson, D.M. (1988). Bispectral based tests for the detection of gaussianity and linearity in time series. *Journal of the American Statistical Association*. 83, 657-664.
- Chan, W.S. e Tong, H. (1986). On tests for nonlinearity in time series analysis. *Journal of Forecasting*, 5, 217-228.
- Davies, N. e Petrucci, J. D. (1985). *Experience with Detecting Non-linearity in Time Series: Identification and Diagnostic Checking*. Res. Rep., MSOR/8/85, Trent Polytechnic, Nottingham.
- Duflo, M. (1990). *Méthodes récursives aléatoires*. Paris: Masson.

- Dunis, C. e Zhou, B. (1998). *Nonlinear Modelling of High Frequency Financial Time Series*. John Wiley & Sons.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kindom inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- Giri, N.(1965). On the complex analogues of T^2 and R^2 tests. *Ann. Math. Statist.*, 36, 664-670.
- Granger, C. W. J. e Andersen, A. P. (1978). *An Introduction to Bilinear Time Series Models*. Vandenhock and Ruprecht, Göttingen.
- Haggan, V. e Ozaki, T. (1981). Modelling non-linear randon vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrika*, 68, 189-196.
- Hinich, M. J. (1982). Testing for gaussianity and linearity of stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*. 3, 169-76.
- Keenan, D.M. (1985). A Tukey non-additivity-type test for time series nonlinearity. *Biometrika*, 72, 39-44.
- Khatri, C.G.(1965). Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.*, 36, 98-107.
- Lawrance, A. J. and Lewis, P. A. W. (1980). The exponencial autoregressive moving average EARMA(p,q) process, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 42, 150-161.
- Luukkonen, R., Saikkonen,P., e Teräsvirta, T. (1988). Testing linearity in univariate time series models. *Scand. J. Stat.*, 15,161-175.
- Maravall, A. (1983). An application of nonlinear time series forecasting. *J. Bus. Econ. Stat.*, 1,66-74.
- McLeod, A. I. and Li,W.K. (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 269-273.
- Mohler, R.R. (1973). *Bilinear Control Processes*, Academic Press, New York and London.
- Nicholls, D.F. e Quinn, B.G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin.

- Ozaki, T. (1978). Non-linear models for non-linear random vibrations . *Technical Report* no. 92, Department of Mathematics, University of Manchester Institute of Science and Technology, UK.
- Poggi, J. e Portier, B. (1997). A test of linearity for functional autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, 18, 616-639.
- Priestley, M. B. (1988). *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*. Academic Press.
- Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametrics estimates of a density function. *Ann. Math. Stat.* 1, 4-27.
- Ruberti, A., Isidori, A. e d'Allessandro, P.(1972). *Theory of Bilinear Dynamical Systems*, Sringer Verlag, Berlim.
- Subba Rao, T. e Gabr,M.M. (1980). A test for linearity of stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 145-158.
- Subba Rao, T. (1981). On the theory of bilinear models. *Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B*,43,244-255.
- Subba Rao, T. e Gabr, M. M. (1984). *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models*. Springer-Verlag, Berlin.
- Tong, H. (1977). Discussion of a paper by A. J. Lawrance e N. T. Kottegoda, *Journal of the Royal Statistical Society, A*, 140, 34-35.
- Tong, H (1990). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach*. Oxford Science Publications.
- Tukey, J.W. (1949). One degree of freedom for non additivity. *Biometrics* 5, 232-42.
- Tsay, R. S. (1986). Nonlinearity tests for time series. *Biometrika*,73,461-466.

APÊNDICE A

DADOS

Tabela A.1 - Dados de temperatura da cidade de São Paulo (*)

14,60	19,30	18,20	13,00	11,70	12,00	12,00	12,60	14,90	13,90
18,70	20,40	18,00	11,10	11,20	12,00	11,40	11,00	14,60	15,80
18,90	20,90	17,80	11,70	11,20	13,00	12,40	10,80	14,70	14,40
18,90	19,30	18,70	12,60	11,60	13,00	13,60	11,40	17,80	16,00
19,80	19,80	19,60	14,20	12,50	13,50	13,10	12,40	16,20	16,60
19,00	17,20	19,00	15,30	11,80	14,80	7,00	12,70	13,90	18,20
18,40	16,00	19,10	14,90	10,00	13,90	5,80	13,80	13,40	17,30
19,10	16,40	19,00	14,50	11,90	9,00	9,80	14,20	14,20	19,90
18,70	19,20	18,30	15,00	10,60	4,90	8,30	15,70	13,80	20,20
19,20	18,00	18,30	13,60	11,70	5,40	9,20	16,00	16,60	16,90
20,00	18,60	20,20	15,00	10,90	6,30	8,40	15,40	15,70	16,40
20,50	18,80	18,60	14,60	8,20	11,20	9,20	15,40	17,60	15,60
20,00	18,30	19,30	13,50	11,80	11,10	11,00	14,60	14,60	17,40
19,90	19,00	18,20	13,40	11,00	11,00	11,00	15,30	12,80	17,90
20,00	19,00	18,60	13,80	10,40	6,00	10,60	14,10	12,80	19,20
18,20	18,60	21,20	14,40	8,70	5,40	12,70	13,20	15,60	17,30
20,70	17,40	20,70	13,80	10,30	8,00	11,40	13,60	17,20	16,50
20,30	19,20	18,50	12,70	10,80	7,20	13,60	14,60	16,30	17,40
19,60	20,44	20,90	14,60	11,70	6,20	14,80	12,60	17,00	18,60
18,90	19,50	19,80	14,00	11,10	7,80	13,80	15,50	16,50	18,20
18,30	18,60	18,80	12,50	14,20	7,20	14,60	16,50	16,40	17,10
19,20	19,30	20,40	9,80	15,60	8,40	15,40	13,40	19,30	20,20
20,50	19,30	19,40	10,40	14,70	9,00	13,00	13,90	20,40	19,30
19,40	20,30	18,40	13,70	15,80	12,40	9,50	14,30	19,40	19,00
19,30	18,20	19,70	14,00	14,60	11,00	14,40	16,20	19,80	18,30
19,70	18,40	19,20	14,50	14,40	10,00	14,40	17,50	18,90	19,00
19,30	17,60	19,20	14,10	13,80	9,60	14,20	18,30	16,80	17,70
18,50	18,70	18,50	13,70	14,70	7,20	11,70	18,10	16,80	18,20
19,40	17,20	18,10	12,60	14,70	5,90	11,50	14,60	16,50	19,80
18,50	19,60	18,20	13,40	13,60	4,00	13,60	12,70	15,30	20,80
18,90	19,70	18,30	14,60	12,60	5,60	13,60	12,40	14,40	20,10
18,80	17,70	18,20	15,60	9,70	8,30	10,30	13,50	11,80	20,70
20,00	16,80	19,30	15,10	8,60	7,10	10,40	16,20	10,40	20,00
20,10	13,90	14,30	12,10	8,80	6,40	12,30	18,00	14,30	18,40
19,90	17,60	10,90	11,20	7,10	7,00	13,70	17,10	14,80	17,40
20,20	16,50	9,80	9,80	11,90	10,00	14,80	14,70	13,00	17,10
20,40	18,40	12,30	8,80	14,00	11,30	13,90	14,80	13,60	16,60

(*) ler por colunas

Tabela A.2 - Dados de temperatura da cidade de São Paulo (continuação)

15,80	17,40	17,30	14,60	6,50	13,20	10,60	15,00	16,90	17,40
18,50	18,00	16,90	13,30	8,20	12,20	11,60	13,60	18,90	16,20
17,30	17,00	14,00	15,80	12,40	11,50	11,00	13,20	19,00	16,60
18,70	18,10	14,40	11,80	14,40	12,80	11,40	14,80	18,80	18,80
19,60	19,00	15,60	14,30	14,10	13,90	12,60	14,50	18,20	18,50
19,10	18,60	16,90	14,40	11,50	12,00	12,40	14,30	18,20	16,20
18,90	17,20	17,20	14,40	5,60	10,40	9,50	14,00	19,60	15,40
19,60	19,20	16,10	14,40	7,20	11,80	14,80	15,50	18,00	16,00
19,50	18,30	13,60	16,80	9,50	13,40	15,50	13,90	18,90	18,20
19,70	21,10	14,60	15,40	7,90	12,60	14,30	17,00	19,00	19,70
20,80	19,10	13,00	13,80	14,50	14,80	11,80	17,90	19,70	19,40
19,50	20,10	16,30	11,20	11,60	12,60	11,20	14,00	18,70	20,00
18,50	19,00	17,60	14,60	14,40	12,80	12,40	12,40	16,90	16,20
18,60	19,30	18,00	13,30	14,50	11,80	10,40	12,50	18,10	16,20
17,80	19,00	18,10	14,80	12,00	12,80	11,00	15,60	20,10	16,50
19,50	17,30	17,60	14,00	10,90	13,00	11,60	14,80	20,20	17,90
19,40	18,40	14,80	13,70	10,20	12,50	12,20	14,50	20,80	18,60
19,70	17,30	14,90	12,60	13,20	10,20	10,60	15,10	16,30	20,10
19,40	17,10	14,40	13,00	12,40	11,60	11,30	15,60	16,10	19,10
18,90	15,40	14,20	12,60	13,10	8,60	12,20	16,40	17,20	21,10
18,90	17,40	15,00	12,30	14,60	9,30	14,40	18,00	19,00	21,10
19,00	16,10	11,80	13,10	13,80	10,00	16,80	16,10	16,20	20,80
18,60	18,20	12,20	13,00	14,70	13,20	13,90	17,10	16,10	20,70
18,80	18,20	14,30	13,50	12,70	11,50	14,50	18,30	15,80	21,20
19,60	18,90	13,20	12,80	14,70	11,60	13,40	18,10	18,00	20,30
19,50	18,00	14,40	13,30	13,30	13,40	15,90	15,10	19,00	19,20
19,50	19,30	13,30	15,00	12,60	15,10	14,00	13,40	19,80	21,60
20,00	17,80	14,40	11,80	13,50	11,90	12,30	13,00	18,70	19,80
19,40	18,80	17,60	13,80	12,10	12,80	10,80	13,40	18,60	
18,90	18,30	17,00	11,20	11,80	14,20	14,20	15,40	18,40	
18,20	18,40	16,00	10,60	13,00	10,40	18,20	15,80	20,10	
19,00	18,40	16,20	11,40	15,40	9,40	13,60	15,20	15,10	
17,30	18,30	16,30	12,30	14,60	6,60	12,80	15,70	13,50	
18,70	17,50	16,40	11,00	12,00	8,30	13,20	16,30	16,10	
18,10	16,80	15,20	10,60	13,20	7,80	11,80	16,90	17,70	
18,50	15,60	15,70	10,80	14,90	9,60	13,50	15,90	18,00	
17,10	16,00	14,30	8,60	14,80	11,00	15,00	15,90	16,60	

(*) ler por colunas

Tabela A.3 - Dados de óbitos por causas respiratórias da cidade de São Paulo (*)

13	7	19	18	29	23	25	15	12	16
11	11	11	26	23	17	39	20	12	16
15	19	24	19	21	19	27	22	14	12
13	17	19	13	25	23	26	15	22	22
20	15	12	11	17	34	30	12	16	17
27	7	19	21	28	26	28	20	16	11
8	14	19	22	22	38	20	23	12	17
13	18	13	14	23	24	28	20	13	11
12	9	22	16	27	32	23	19	12	16
17	18	19	24	25	30	24	12	12	16
19	13	17	19	20	25	18	16	19	16
27	10	24	15	26	30	31	22	19	11
9	14	23	17	26	20	22	13	17	13
11	14	15	16	30	27	20	13	19	16
22	24	15	27	27	32	19	24	17	10
16	19	17	18	25	22	24	21	20	22
16	20	19	14	28	21	20	22	17	15
17	16	19	22	27	26	20	19	17	10
13	26	14	25	11	35	27	9	18	16
23	15	15	15	21	29	25	11	12	19
17	15	14	17	25	32	21	20	19	15
18	9	20	24	20	28	21	9	14	17
16	19	14	14	27	36	31	13	16	21
9	20	16	15	32	33	25	19	21	16
21	13	21	26	18	50	23	12	8	18
23	14	22	15	23	37	24	16	11	9
13	11	25	20	27	28	23	15	14	17
17	23	18	17	32	24	26	15	7	12
17	11	14	20	19	33	16	8	16	13
12	16	14	25	19	22	22	18	12	19
22	15	10	12	28	37	27	10	12	13
16	14	16	23	25	26	23	12	21	15
18	17	17	18	23	25	26	16	17	12
18	19	13	17	41	38	16	14	16	14
11	12	21	21	28	25	16	21	15	10
17	18	18	22	16	25	23	12	10	16
13	14	21	31	28	15	21	17	19	13

(*) ler por columnas

Tabela A.4 - Dados de óbitos por causas respiratórias da cidade de São Paulo (continuação)

15	21	12	11	22	13	25	14	9	8
13	23	14	17	29	22	14	11	18	10
15	11	16	13	25	23	25	11	22	12
16	14	15	20	25	25	11	19	18	13
15	16	16	20	20	23	11	15	13	17
13	17	11	10	34	30	27	12	9	12
11	8	11	23	38	24	18	18	13	15
11	14	15	19	31	21	23	17	19	17
13	18	11	20	30	22	18	24	15	18
15	13	16	23	38	19	21	20	16	21
13	21	12	16	39	18	23	25	19	15
17	18	16	13	43	19	21	20	17	14
10	14	17	7	34	21	12	10	16	13
18	12	14	19	38	25	22	13	14	11
15	17	14	19	32	18	17	23	15	15
21	15	11	21	27	16	15	15	20	15
6	15	18	14	31	13	15	15	20	14
13	9	14	23	39	21	21	17	17	25
17	16	10	16	28	17	18	9	19	21
14	16	11	9	31	19	21	17	13	16
12	23	16	17	34	17	16	27	14	16
14	13	14	10	28	20	18	10	13	17
15	15	13	22	34	16	20	18	16	19
9	20	21	17	31	21	24	15	14	24
14	20	14	17	32	23	14	22	14	32
13	13	9	19	28	23	27	14	16	26
15	14	20	20	20	21	19	16	16	26
12	16	16	25	32	18	13	9	14	22
13	16	18	13	30	20	17	17	22	
10	17	14	21	22	17	18	11	14	
15	11	17	15	19	17	16	14	22	
10	12	18	22	29	18	13	13	21	
15	15	19	23	24	22	15	14	11	
15	26	18	22	27	19	20	16	19	
22	19	14	17	30	25	20	17	12	
13	12	14	29	41	20	16	10	20	
14	19	20	24	14	20	25	19	21	

(*) ler por colunas

Tabela A.5 - Dados de óbitos da cidade de São Paulo (*)

133	128	142	150	183	163	167	142	123	140
125	137	135	162	182	188	158	156	123	151
135	157	137	171	162	158	171	150	113	158
148	144	172	168	145	165	181	189	154	139
140	143	149	171	159	183	189	143	142	152
167	134	161	159	165	184	185	135	150	127
120	146	150	148	187	176	175	168	151	150
131	143	162	146	175	189	203	163	140	158
118	144	178	145	163	192	193	147	143	161
110	144	138	170	196	162	186	144	150	135
165	136	158	155	166	184	180	162	139	130
161	139	160	155	181	203	191	142	116	135
136	147	158	156	154	192	159	143	126	145
109	123	133	149	189	174	161	132	143	142
153	155	136	152	177	195	180	130	137	137
168	143	164	156	181	185	159	138	139	137
141	135	154	154	189	206	180	154	151	144
150	132	158	148	198	190	195	140	136	163
133	173	143	175	164	205	149	127	143	136
146	151	164	140	172	187	160	150	145	154
145	128	135	135	185	204	153	126	131	151
132	122	133	173	174	195	148	135	132	144
152	173	131	142	179	216	157	110	142	161
135	174	139	164	177	201	156	153	142	114
156	136	161	164	171	228	170	159	138	135
151	151	142	146	185	200	148	160	114	142
123	138	153	145	183	160	155	155	149	154
127	167	136	154	178	200	147	136	108	141
141	120	144	156	156	192	135	120	136	146
149	122	141	180	188	174	140	127	126	162
147	147	143	147	190	170	144	129	133	141
147	128	144	143	172	191	144	145	154	143
133	134	120	166	176	192	157	155	142	106
141	144	143	139	192	203	169	162	150	121
135	141	137	154	182	166	161	152	148	144
150	152	140	186	192	200	167	128	122	147
135	142	157	190	177	168	167	134	141	134

(*) ler por colunas

Tabela A.6 - Dados de óbitos da cidade de São Paulo (continuação)

135	146	133	156	183	145	180	148	125	121
137	144	120	119	214	148	156	132	168	120
137	115	138	157	195	169	186	159	154	156
129	146	131	156	222	160	155	144	158	151
138	152	125	149	177	151	163	151	155	150
146	143	132	140	203	139	166	158	132	136
135	132	127	173	200	181	146	141	146	141
130	155	137	148	184	166	142	138	126	160
147	137	99	156	178	155	139	145	121	141
129	145	164	165	212	156	151	155	137	141
166	120	123	138	229	162	162	155	153	144
150	151	146	143	229	144	172	147	165	128
130	130	151	130	210	154	155	149	154	149
115	132	151	153	195	174	172	138	176	135
162	157	151	152	207	160	166	193	144	137
166	140	128	144	196	149	148	147	154	128
140	132	158	142	184	154	135	144	157	148
134	122	131	178	193	171	162	151	135	179
137	129	151	138	183	182	152	136	158	190
126	132	123	137	183	163	142	158	136	173
124	147	175	126	194	147	145	159	138	198
114	120	151	147	212	178	172	153	139	176
156	144	152	147	169	150	146	148	131	151
125	148	163	150	179	157	134	137	138	174
121	164	160	150	164	178	147	166	151	190
129	160	153	167	181	147	184	129	133	145
146	160	138	149	153	154	136	143	175	176
136	138	135	164	185	153	107	150	128	164
160	140	145	139	192	155	161	165	142	
126	133	158	151	161	154	154	149	152	
138	136	138	168	184	150	159	144	147	
127	125	118	169	183	187	145	122	131	
139	120	141	177	167	158	162	153	105	
133	160	154	157	170	171	141	129	150	
154	141	147	162	183	164	124	155	122	
133	125	153	168	186	172	145	135	141	
120	151	154	183	153	176	163	154	150	

(*) ler por colunas

Tabela A.7 - Dados da concentração do agente poluidor PM10 da cidade de São Paulo (*)

97,70	49,81	60,19	183,88	49,81	37,53	47,46	33,63	64,55	35,88
102,94	47,85	75,85	186,25	45,94	36,18	44,63	35,32	48,67	40,90
76,63	95,93	63,60	149,88	45,44	44,86	50,75	29,74	58,01	49,06
75,33	94,45	59,38	43,33	71,95	59,21	68,23	43,34	70,04	59,91
94,65	87,85	60,59	35,18	34,68	45,30	67,83	43,79	69,54	57,02
145,95	106,53	66,48	53,65	44,85	65,58	63,10	51,86	58,01	48,17
148,17	112,70	42,77	58,68	62,01	43,61	64,27	53,46	54,69	56,92
129,41	91,83	75,99	49,37	87,34	35,14	45,70	41,77	45,95	77,74
114,21	26,76	80,41	52,74	84,90	58,20	48,18	54,35	30,48	51,94
85,78	47,34	96,61	63,55	91,98	77,88	51,19	33,29	39,60	46,00
70,05	53,94	55,94	51,55	123,27	84,66	50,99	35,84	41,73	48,74
115,03	75,42	105,03	53,92	64,08	86,51	41,00	39,79	48,33	39,83
110,31	49,58	151,42	74,03	54,57	81,40	40,14	53,63	45,82	39,62
55,53	90,66	104,94	105,36	37,89	52,10	56,18	54,67	44,98	48,09
54,99	80,88	53,18	121,28	42,69	43,76	75,32	43,89	55,55	52,97
66,14	39,64	51,89	122,39	46,64	39,31	68,19	36,53	55,66	54,86
71,90	60,02	81,05	117,85	46,37	49,67	66,19	39,01	50,61	52,24
51,91	81,72	93,02	95,94	49,81	65,12	53,11	31,41	53,90	46,97
73,44	100,61	161,67	81,81	50,99	74,16	47,06	39,82	58,55	53,79
106,21	95,53	158,25	126,33	63,78	74,42	43,41	43,21	48,41	48,84
139,41	103,32	42,58	143,05	48,08	71,06	56,35	43,25	39,66	45,58
120,63	101,07	41,89	52,64	67,79	52,21	54,30	40,88	36,59	44,42
71,82	68,93	46,36	43,15	81,08	41,30	44,81	42,23	37,51	38,74
54,83	88,46	95,72	60,24	62,15	69,95	67,07	34,80	49,67	38,48
71,13	107,60	125,23	75,74	43,01	60,73	59,43	30,97	50,58	52,69
96,27	98,40	120,81	47,60	44,37	54,76	43,27	42,83	52,92	81,09
115,17	52,30	91,79	68,10	51,02	43,81	28,62	46,90	55,34	83,68
102,80	76,22	68,66	66,47	68,75	33,09	46,39	56,24	61,20	65,32
43,39	106,38	40,42	61,08	58,30	26,76	45,13	58,78	55,06	87,10
53,43	112,78	52,08	76,49	65,76	48,54	54,68	40,90	51,71	83,19
68,01	74,97	53,99	45,49	50,93	46,36	58,38	31,63	49,88	92,51
68,39	131,10	83,86	40,02	44,37	46,10	52,89	28,42	68,64	64,57
72,90	147,97	95,65	40,76	41,52	37,51	44,25	42,49	78,97	55,98
72,33	72,35	77,50	44,05	49,18	40,96	27,88	61,36	84,01	50,36
70,70	48,17	93,54	27,39	72,06	49,36	40,68	68,11	67,74	34,51
50,23	35,33	137,87	33,85	82,58	55,11	41,57	73,78	48,78	25,52
41,71	34,04	158,79	39,42	71,66	46,36	36,84	79,42	37,09	43,59

(*) ler por colunas

Tabela A.8 - Dados da concentração do agente poluidor PM10 da cidade de São Paulo (continuação)

43,61	30,14	60,57	91,81	50,92	73,36	52,26
66,26	40,35	88,02	86,09	58,82	43,22	40,95
86,66	36,70	75,88	84,43	49,92	53,00	53,83
54,76	55,65	90,04	111,23	26,59	69,32	61,69
56,45	94,48	123,75	121,73	31,23	81,59	65,24
59,22	76,79	102,71	123,31	51,68	51,60	64,92
80,29	50,12	69,53	99,50	65,75	61,69	46,22
94,72	49,44	64,48	97,83	63,89	63,13	48,57
77,62	40,00	105,81	102,02	30,82	42,50	58,28
99,10	39,09	147,41	95,11	31,64	51,65	51,66
94,35	70,49	141,65	92,10	43,71	37,53	59,87
47,82	93,60	129,64	52,44	50,60	47,74	67,46
49,20	100,32	66,74	29,45	42,96	67,96	47,41
67,93	62,30	74,96	40,44	50,02	63,31	32,59
75,64	98,21	97,18	52,88	38,52	43,65	35,63
82,64	51,82	59,06	77,11	31,63	50,56	49,99
86,51	26,65	57,24	95,22	53,43	99,13	35,43
66,24	39,22	56,50	107,66	60,81	98,23	44,78
61,25	66,67	46,96	110,96	47,04	72,94	45,60
83,83	78,97	51,33	90,65	33,33	79,68	41,56
86,79	73,34	53,97	108,55	36,52	48,87	37,01
52,83	61,89	82,36	120,76	64,08	26,88	52,24
58,89	61,95	132,24	132,79	91,94	37,92	50,73
75,81	52,48	145,89	152,98	63,47	50,93	54,31
72,28	66,56	121,79	97,19	73,38	37,67	40,71
68,51	68,87	103,95	45,96	74,88	32,05	46,51
89,02	104,53	147,26	59,14	60,33	43,32	38,00
97,53	84,06	148,15	103,65	74,83	54,37	32,87
83,65	68,88	106,49	150,49	51,41	47,94	37,89
57,40	48,42	59,16	50,49	39,62	46,67	52,08
46,01	37,82	26,88	34,41	33,38	40,37	40,81
40,83	36,31	49,60	70,96	39,52	38,90	
27,58	48,63	72,23	113,72	35,56	42,87	
57,06	73,09	30,16	49,66	48,20	45,47	
62,07	76,18	26,22	31,08	40,56	37,08	
56,92	77,47	32,48	49,36	34,54	43,87	
26,07	49,07	55,69	57,11	53,41	39,69	

(*) ler por colunas

APÊNDICE B

PROGRAMAS

B.1 Programa referente ao teste de linearidade de McLeod e Li (S-plus)

```
# Colocar o resíduo do modelo ajustado na variável et
```

```
# Colocar a quantidade de lag's em K
```

```
library(Matrix)
```

```
nt<-nrow(et)
```

```
et<-t(et)
```

```
et2<-0
```

```
K<-60
```

```
p<-Matrix(0,K,1)
```

```
for ( i in 1: nt)
```

```
{
```

```
et2[i]<-et[i]*et[i]
```

```
}
```

```
macf<-acf(et2, K, "correlation",plot=F)
```

```
attach(macf)
```

```
acf1<-acf
```

```
detach()
```

```
for ( i in 1:K)
```

```
{
```

```
p[i]<-((acf1[i+1])^2)/(nt-i)
```

```
}
```

```
QQ<-nt*(nt+2)*(sum(p))
```

```
QQ
```

```
1-pchisq(QQ, K, ncp=0)
```

B.2 Programa referente ao teste de linearidade de Tsay (S-plus)

```
# Colocar a ordem do modelo auto-regressivo ajustado na variável m

# As séries originais e com as respectivas defasagens foram colocadas no arquivo
# de entrada DADOS

# Série RESP

m<-3

e1<-0
e2<-0
e3<-0
e21<-0
e22<-0
e23<-0
e24<-0
e25<-0
e26<-0
ff<-0
ff1<-0

fit1<-lm(formula = RESP ~ RESP1 + RESP2 + RESP3, data = DADOS, na.action
= na.omit)
e1<-resid(fit1)

fit2<-manova(formula =
cbind(RESP1*RESP1,RESP2*RESP1,RESP3*RESP1,RESP2*RESP2,RESP3*R
ESP2,RESP3*RESP3) ~ RESP1 + RESP2+RESP3, data = DADOS,
na.action=na.omit)

e2<-resid(fit2)
n<- nrow(e2)
r<- ncol(e2)

e21<- resid(fit2)[,1]
e22<- resid(fit2)[,2]
e23<- resid(fit2)[,3]
e24<- resid(fit2)[,4]
e25<- resid(fit2)[,5]
e26<- resid(fit2)[,6]
```



```

fit3<-lm(e1 ~ e21+e22+e23+e24+e25+e26)
e3<-resid(fit3)
ff<-(t(e1)%*%e2) %*% (solve(t(e2)%*%e2)) %*% (t(e2)%*%e1)
ff1<-(ff/( r*(t(e3)%*%e3)))*(n-m-r-1)
ff1
1-pf(ff1, m*(m+1)/2, n-(m*(m+3)/2)-1, ncp=0)

```

Série PM10

```
m<-3
```

```

e1<-0
e2<-0
e3<-0
e21<-0
e22<-0
e23<-0
e24<-0
e25<-0
e26<-0
ff<-0
ff1<-0

```

```

fit1<-lm(formula = PM ~ PM1 + PM2 + PM3, data = DADOS, na.action =
na.omit)
e1<-resid(fit1)

```

```

fit2<-manova(formula =
cbind(PM1*PM1,PM2*PM1,PM3*PM1,PM2*PM2,PM3*PM2,PM3*PM3) ~
PM1 + PM2+PM3, data = DADOS, na.action=na.omit)

```

```

e2<-resid(fit2)
n<- nrow(e2)
r<- ncol(e2)

```

```

e21<- resid(fit2)[,1]
e22<- resid(fit2)[,2]
e23<- resid(fit2)[,3]
e24<- resid(fit2)[,4]
e25<- resid(fit2)[,5]
e26<- resid(fit2)[,6]

```

```
fit3<-lm(e1 ~ e21+e22+e23+e24+e25+e26)
```

```

e3<-resid(fit3)

ff<-(t(e1)%*%e2) %*% (solve(t(e2)%*%e2)) %*% (t(e2)%*%e1)
ff1<-(ff/( r*(t(e3)%*%e3)))*(n-m-r-1)
ff1
1-pf(ff1, m*(m+1)/2, n-(m*(m+3)/2)-1, ncp=0)

# Série TEMP

m<-3

e1<-0
e2<-0
e3<-0
e21<-0
e22<-0
e23<-0
e24<-0
e25<-0
e26<-0
ff<-0
ff1<-0


fit1<-lm(formula = TEMP ~ TEMP1 + TEMP2 + TEMP3, data = DADOS,
na.action = na.omit)
e1<-resid(fit1)


fit2<-manova(formula =
cbind(TEMP1*TEMP1,TEMP2*TEMP1,TEMP3*TEMP1,TEMP2*TEMP2,TEM
P3*TEMP2,TEMP3*TEMP3) ~ TEMP1 + TEMP2+TEMP3, data = DADOS,
na.action=na.omit)

e2<-resid(fit2)
n<- nrow(e2)
r<- ncol(e2)

e21<- resid(fit2)[,1]
e22<- resid(fit2)[,2]
e23<- resid(fit2)[,3]
e24<- resid(fit2)[,4]
e25<- resid(fit2)[,5]
e26<- resid(fit2)[,6]

```

```

fit3<-lm(e1 ~ e21+e22+e23+e24+e25+e26)
e3<-resid(fit3)

ff<-(t(e1)%*%e2) %*% (solve(t(e2)%*%e2)) %*% (t(e2)%*%e1)
ff1<-(ff/( r*(t(e3)%*%e3)))*(n-m-r-1)
ff1
1-pf(ff1, m*(m+1)/2, n-(m*(m+3)/2)-1, ncp=0)

# Série TOT

m<-3

e1<-0
e2<-0
e3<-0
e21<-0
e22<-0
e23<-0
e24<-0
e25<-0
e26<-0
ff<-0
ff1<-0

fit1<-lm(formula = TOT ~ TOT1 + TOT2 + TOT3, data = DADOS, na.action =
na.omit)
e1<-resid(fit1)

fit2<-manova(formula =
cbind(TOT1*TOT1,TOT2*TOT1,TOT3*TOT1,TOT2*TOT2,TOT3*TOT2,TOT3
*TOT3) ~ TOT1 + TOT2+TOT3, data = DADOS, na.action=na.omit)

e2<-resid(fit2)
n<- nrow(e2)
r<- ncol(e2)

e21<- resid(fit2)[,1]
e22<- resid(fit2)[,2]
e23<- resid(fit2)[,3]
e24<- resid(fit2)[,4]
e25<- resid(fit2)[,5]
e26<- resid(fit2)[,6]

fit3<-lm(e1 ~ e21+e22+e23+e24+e25+e26)
e3<-resid(fit3)

```

```

ff<-(t(e1)%*%e2) %*% (solve(t(e2)%*%e2)) %*% (t(e2)%*%e1)
ff1<-(ff/( r*(t(e3)%*%e3)))*(n-m-r-1)
ff1

1-pf(ff1, m*(m+1)/2, n-(m*(m+3)/2)-1, ncp=0)

```

B.3 Programa referente ao teste de linearidade de Poggi e Portier (S-plus)

```
# Programa elaborado para p=3

# As funções F,H e K são calculadas nos elementos de q

# As séries originais e com as respectivas defasagens foram colocadas no arquivo
# de entrada DADOS. A série PM10 com as respectivas defasagens foram
# colocadas no arquivo de entrada DPM10

# Vetores iniciais para a serie TEMP

y<-DADOS[,1]
x<-DADOS[,2]
x1<-DADOS[,3]
x2<-DADOS[,4]

# Vetores iniciais para a serie RESP

y<-DADOS[,5]
x<-DADOS[,6]
x1<-DADOS[,7]
x2<-DADOS[,8]

# Vetores iniciais para a serie TOT

y<-DADOS[,9]
x<-DADOS[,10]
x1<-DADOS[,11]
x2<-DADOS[,12]

# Vetores iniciais para a serie PM10

y<-DADPM10[,1]
x<-DADPM10[,2]
x1<-DADPM10[,3]
x2<-DADPM10[,4]

library(Matrix)

v<-0
n<-length(x)
sigma<-sqrt(var(x))
```

```

p<-3
k2<-(1/(sqrt(2*pi)*sigma))^p
k6<-2*(sigma^2)
a<-1/(p+1)
n3<-nrow(q)
L<-0.2
n1<-nrow(q)
xx<-Matrix(0,n-1,1)
xx1<-Matrix(0,n-1,1)
xx2<-Matrix(0,n-1,1)
yy<-Matrix(0,n-1,1)
sh<-Matrix(0,n,1)
h<-Matrix(0,n1,1)
HH<-Matrix(0,n,1)
FF<-Matrix(0,n,1)
f<-Matrix(0,n1,1)
k<-Matrix(0,n1,1)
kk<- Matrix(0,n,1)
kk2<- Matrix(0,n,1)
kkp<- Matrix(0,n,1)
X<-Matrix(0,n,p)
X1<-Matrix(0,n-1,p)
A<-Matrix(0,p,1)
A1<-Matrix(0,p,1)
XH1<-Matrix(0,n,1)
XXH1<-Matrix(0,n,1)
XXH2<-Matrix(0,n,1)
XXH3<-Matrix(0,n,1)
XH2<-Matrix(0,n,1)
XH3<-Matrix(0,n,1)
v1<-Matrix(0,n,1)
z2<-Matrix(0,n1,1)
z<-Matrix(0,n1,1)
nqq1<-0

```

```

qua<-function(x)
{
  xqua<-x^2
  xqua
}

```

```

## Cálculo h(x) e f(x) para cada q

for(i in 0:n-1)
{
kk[i+1]<-(i^a)
kkp[i+1]<-(i^(a*p))
}

kk2<-apply(kk,2,qua)

for(j in 1:n1)
{
XH1<-x-q[j,1]
XH1<-t(XH1)
XH2<-x1-q[j,2]
XH2<-t(XH2)
XH3<-x2-q[j,3]
XH3<-t(XH3)

XXH1<-apply(XH1,2,qua)
XXH2<-apply(XH2,2,qua)
XXH3<-apply(XH3,2,qua)

HH<-exp((XXH1+XXH2+XXH3)*(-1)*(kk2/(2*sigma^2)))*k2*kkp

for(j in 1:n)
{
FF[j]<-HH[j]*y[j]
}

f[j]<-sum(FF)/sum(HH)
h[j]<-sum(HH)/n
}

# Cálculo da constante A

X<-cbind(x,x1,x2)

A<-solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%y

```

```

# Cálculo da função k(x)

for(j in 1:n1)
{
k[j]<-k2*(exp(-(q[j,1]^2+q[j,2]^2+q[j,3]^2)/k6))
}

## Cálculo de An-1=A1

for(j in 1:n-1)
{
xx[j]<-x[j]
xx1[j]<-x1[j]
xx2[j]<-x2[j]
yy[j]<-y[j]
}

X1<-cbind(xx,xx1,xx2)
A1<-solve(t(X1)%*%X1)%*%t(X1)%*%yy

# Cálculo de sigma=v

v1<-y-(X%*%A1)
v<-((t(v1)%*%v1)+L)/n

# cálculo de z e t

k20<-(((n^(1-a*p))*(1+a*p))/(v*2*t(k)%*%k))^(1/2)

for(j in 1:n1)
{
z[j]<-k20*(h[j]^(1/2))*(f[j]-(q[j,1]*A[1]+q[j,2]*A[2]+q[j,3]*A[3]))
}

for(j in 1:n1)
{
z2[j]<-z[j]^2
}

t<-sum(z2)

pvalue<-1-pchisq(t,n1)
t

```



```

pvalue

# Simulação de h

for(j in 1:n1)
{
  XH1<-x-q[j,1]
  XH1<-t(XH1)
  XH2<-x1-q[j,2]
  XH2<-t(XH2)
  XH3<-x2-q[j,3]
  XH3<-t(XH3)

  XXH1<-apply(XH1,2,qua)
  XXH2<-apply(XH2,2,qua)
  XXH3<-apply(XH3,2,qua)

  HH<-exp((XXH1+XXH2+XXH3)*(-1)*(kk2/(2*sigma^2)))*k2*kkp

  h[j]<-sum(HH)/n
}

# Cálculo de K(x) para os 4 pontos escolhidos

qq1<-Matrix(0,6,3)
qq2<-Matrix(0,6,3)

qq1[1,]<-q[1,]
qq1[2,]<-q[1,]
qq1[3,]<-q[1,]
qq1[4,]<-q[2,]
qq1[5,]<-q[2,]
qq1[6,]<-q[3,]

qq2[1,]<-q[2,]
qq2[2,]<-q[3,]
qq2[3,]<-q[4,]
qq2[4,]<-q[3,]
qq2[5,]<-q[4,]
qq2[6,]<-q[4,]

nqq1<-nrow(qq1)

HH4<-Matrix(0,nqq1,1)

```

```

for(j in 1:nqq1)
{

XH1<-Matrix(0,n,1)
XH2<-Matrix(0,n,1)
XH3<-Matrix(0,n,1)
XXH1<-Matrix(0,n,1)
XXH2<-Matrix(0,n,1)
XXH3<-Matrix(0,n,1)
HH1<-Matrix(0,n,1)

XH1<-x-qq1[j,1]
XH1<-t(XH1)
XH2<-x1-qq1[j,2]
XH2<-t(XH2)
XH3<-x2-qq1[j,3]
XH3<-t(XH3)

XXH1<-apply(XH1,2,qua)
XXH2<-apply(XH2,2,qua)
XXH3<-apply(XH3,2,qua)

HH1<-k2*exp((- (XXH1+XXH2+XXH3)*(kk^2))/k6)

XH1<-Matrix(0,n,1)
XH2<-Matrix(0,n,1)
XH3<-Matrix(0,n,1)
XXH1<-Matrix(0,n,1)
XXH2<-Matrix(0,n,1)
XXH3<-Matrix(0,n,1)
HH2<-Matrix(0,n,1)

XH1<-x-qq2[j,1]
XH1<-t(XH1)
XH2<-x1-qq2[j,2]
XH2<-t(XH2)
XH3<-x2-qq2[j,3]
XH3<-t(XH3)

XXH1<-apply(XH1,2,qua)
XXH2<-apply(XH2,2,qua)
XXH3<-apply(XH3,2,qua)

HH2<-k2*exp((- (XXH1+XXH2+XXH3)*(kk^2))/k6)

```

```
HH3<-HH1*HH2*kk
```

```
HH4[j]<-sum(HH3)/n
```

```
}
```

B.4 Programa referente ao teste de linearidade de Brillinger e Irizarry (S-plus)

```
# Colocar a série em y

# Este programa particiona a série original em L séries de tamanho v, para isto
# precisamos colocar o valor do parâmetro v na variável v

# Função taper

taper <- function(x)
{
  v <- length(x)
  for(i in 1:v)
    x[i] <- x[i] * ((1 - cos(2 * pi * (i / (v + 1)))) / 2)
  x
}

# Parte a série em j sub-séries de tamanho v

record <- function(x,v)
{
  j <- length(x) %/% v
  m <- matrix(0,j,v)
  for(i in 1:j)
    m[i,] <- taper(x[(((i-1)*v)+1):(i * v)])
  m
}

h2 <- function(v)
{
  sum(taper(rep(1,v))^2)
}

h3 <- function(v)
{
  sum(taper(rep(1,v))^3)
}

BIESP<-function(i,j)
{
  freq1<-i+1
```

```

freq2<-j+1
freq3<-(i+1)+(j+1)-1

    for (k in 1:L)
    {
        m1[k,1]<-m[k,freq1]*ct*m[k,freq2]*Conj(m[k,freq3])
    }

c1<-sum(m1)/L
c1
}

ESP<-function(k)
{

freq1<-k+1

for (z in 1:L)
{
    m2[z,1]<-ct2*((Re(m[z,freq1]))^2+(Im(m[z,freq1]))^2)
}
c1<-sum(m2)/L
c1
}

library(Matrix)

v<-16

n<-length(y)

media<-mean(y)

x<-y-media

L<-n%%v

h<- h3(v)

hh2<- h2(v)

b1<-Matrix(0,(v/2)+1,(v/2)+1)

b2<-Matrix(0,(v/2)+1,(v/2)+1)

```

```

b3<-Matrix(0,(v/2)+1,(v/2)+1)

b4<-Matrix(0,(v/2)+1,(v/2)+1)

BIC<-Matrix(0,3*v,1)

m1<-Matrix(0,L,1)

m2<-Matrix(0,L,1)

m<- matrix(0,L,v)

ct<-1/(((2*pi)^2)*h)

ct2<-1/(2*pi*hh2)

percent1<-0

percent2<-0

for(i in 1:L)
{
  m[i,] <- taper(x[(((i-1)*v)+1):(i * v)])
}

# Cálculo da trasformada de Fourier das séries

for(i in 1:L)
{
  m[i,] <- fft(m[i,])
}

# Cálculo do bi-espectro e da bi-coerencia

for(i in 0:(v/2))
{
  for(j in 0:(v/2))
  {
    W1<-(2*pi*i)/v
    W2<-(2*pi*j)/v
    if ( (W1>=W2) && (W1+(W2/2) <=pi) ) b1[i+1,j+1]<-BIESP(i,j)
    if ( (W1>=W2) && (W1+(W2/2) <=pi) ) b2[i+1,j+1]<-
ESP(i)*ESP(j)*ESP((i+1)+(j+1)-2)
    if ( (W1>=W2) && (W1+(W2/2) <=pi) ) b3[i+1,j+1]<-
(Re(b1[i+1,j+1]))^2+(Im(b1[i+1,j+1]))^2

```

```

        if ( (W1>=W2) && (W1+(W2/2) <=pi) ) b4[i+1,j+1]<-(b3[i+1,j+1])/(
b2[i+1,j+1])
    }
}

```

Cálculo dos níveis descritivos para o teste de normalidade

```
linha<-1
```

```

for(i in 0:(v/2))
{
    for(j in 0:(v/2))
    {
        W1<-(2*pi*i)/v
        W2<-(2*pi*j)/v
        if ( (W1>=W2) && (W1+(W2/2) <=pi) ) BIC[linha,1]<-b4[i+1,j+1]
        if ( (W1>=W2) && (W1+(W2/2) <=pi) ) linha<-linha+1
    }
}

```

```
n4<-linha-1
```

```
BICO<-Matrix(0,n4,1)
```

```

for(i in 1:n4)
{
    BICO[i]<-BIC[i]
}

```

```
BICO2<-Matrix(0,n4,1)
```

```
BICO2<-BICO
```

```
BICO<-Matrix(0,n4-1,1)
```

```

for(i in 1:n4-1)
{
    BICO[i]<-BICO2[i+1]
}

```

```
n4<-n4-1
```

```
PV<-Matrix(0,n4,1)
```

```
H3<-h3(v)
```

```

H6<-h6(v)

pa<-1/((H6*v)/((H3^2)*L*2*pi))

for(i in 1:(n4))
{
PV[i]<-1-pexp(BICO[i,1],rate=pa)
}

nn<-0

for(i in 1:(n4))
{
if (PV[i]<=0.05) nn<-nn+1
}

percent1<-(nn/n4)*100
percent1

RBICO<-Matrix(0,n4,1)
RBICO2<-Matrix(0,n4,1)

RBICO<-sqrt(BICO)

MEDIARBICO<-mean(RBICO)

VARI1<-((H6*v)/((H3^2)*L*2*pi))
VARI<-VARI1+(VARI1/n4)
DESVIO<-sqrt(VARI)

RBICO2<-(RBICO-MEDIARBICO)/DESVIO

BICO3<-RBICO2^2

# Cálculo dos níveis descritivos para o teste de linearidade

PV5<-Matrix(0,n4,1)

for(i in 1:n4)
{
PV5[i]<-1-pchisq(BICO3[i,1],1)
}

nn2<-0

```



```
for(i in 1:n4)
{
if (PV5[i]<=0.05) nn2<-nn2+1
}

percent2<-(nn2/n4)*100
percent2
```

Programa referente ao teste de linearidade e normalidade de Subba Rao e Gabr (Turbo Pascal)

```
{ 01/11/1999 }}

{$N+}

{ In the $N+ state, Turbo Pascal generates
  code to perform all real-type calculations
  using the 8087 numeric coprocessor. }

{ Este programa faz o teste com 21 frequências para cada frequência
  principal, ou seja, r=5.
  Entrar com os valores de M,D,r, com a série, com o tamanho da série e com
  as frequências principais freq1.txt e freq2.txt (estas variáveis estão em
  negrito no programa).
  O programa coloca o bi-espectro e a bi-coerencia no seguinte directorio
  c:\000\bietot.txt e c:\000\bicotot.txt
}

program matriz;
uses crt, Dos;
const PI = 3.14159265359;
      M=56;           { ver TAM_VET_LI tamanho do vetor LI abaixo }
      d=10;
      r=5;
      TAM_VET_FREQ2=147;      { ind_freq*(4*r+1) }
      CONST_F=147;           { Controla for do Biespectro, numero de
frequencias
                               em que o BIES sera' calculado }

      { DEFINICAO DOS NOMES DOS ARQUIVOS DE ENTRADA E SAIDA }
      ARQUIVO_X='c:\000\tot.txt';
      ARQUIVO_SAIDA_BIES='c:\000\bietot.txt';
      ARQUIVO_SAIDA_BICO='c:\000\bicotot.txt';

type
  VETORX = array [1..731] of EXTENDED;
  VETORFREQ = array [1..7] of extended;
  VETORFREQ1 = array [1..21] of extended; { Usado no procedure P_FREQ1
}
  VETORFREQ2 = array [1..TAM_VET_FREQ2] of extended;
  VETORBIES = array [1..CONST_F] of extended;
  COMPLEXO = record
      a:extended; {Parte extended do numero complexo }
      b:extended; {Parte Imaginaria }
  end;

var
  L,k,indx,indfreq1,indfreq2,linha_main,j: integer;
  temp,contador,TMP1,TMP2,VALOR_BICO:extended;
  h1, m1, s1, hund1 : Word;
  h2, m2, s2, hund2 : Word;
  X: VETORX;
  FREQ1, FREQ2: VETORFREQ;
  VTMP3,VTMP4:VETORFREQ1;
  FFREQ1,FFREQ2:VETORFREQ2;
  V_BIES_REAL,V_BIES_IMAG: VETORBIES;
```

```

    vetx,vetfreq1,vetfreq2 : text; { nome dos arquivos de entrada }
    ARQ_SAIDA: text;
    i:integer; soma,media:extended;
    SAIDA:COMPLEXO;

function LeadingZero(w : Word) : String;
var
    s : String;
begin
    Str(w:0,s);
    if Length(s) = 1 then
        s := '0' + s;
    LeadingZero := s;
end;

{ ***** }
{ CALCULA A COVARIANCIA DA SERIE }
function COV ( var vetcov1 : VETORX; s: integer ) : extended;
var
    i_cov,s1,T1: integer;
    XT: VETORX;
    soma_cov,media_cov: extended;

begin
    s1:= abs(s);
    T1:= indx - s1; { indx = N tamanho da serie }

    soma_cov:=0;

    { CALCULA MEDIA }
    for i_cov:= 1 to indx do
        soma_cov:=soma_cov+vetcov1[i_cov];
    media_cov:=soma_cov/indx;

    { Constroi XT }
    for i_cov:= 1 to T1 do
        XT[i_cov]:=(vetcov1[i_cov]-media_cov)*(vetcov1[i_cov+s1]-media_cov);

    soma_cov:=0;
    for i_cov:=1 to T1 do
        soma_cov:=soma_cov+XT[i_cov];

    { RESULTADO DA FUNCAO }

    COV:=soma_cov/indx;
end;

{ ***** }

{ ***** }
{ CALCULA A FUNCAO DE AUTOCOVARIANCIA DA SERIE }
function COV4 ( var vetcov4 : VETORX; c,s: integer ) : extended;
var
    i_cov4,s1,tempc1,c1,A,t1,t2,t3,T4,linha,coluna: integer;
    XT1: extended;
    soma_cov4,media_cov4: extended;
    decisao1,decisao2: array [1..3] of array [1..3] of integer;

begin

```

```

tempc1:=abs(c);
s1:=abs(s);

{ c1 recebe o maximo entre mod(s) e mod(c) }
if (tempc1 > s1)
then
  c1:=tempc1
else
  c1:=s1;

{ Decisao1 para T1
      Col1  S>0   Col2  S=0   Col3  S<-0
      L1  C>0    C      C      -S
      L2  C=0    C      C      -S
      L3  C<0   -C     -C      C1
}
decisao1[1,1]:=c; decisao1[1,2]:=c; decisao1[1,3]:=-s;
decisao1[2,1]:=c; decisao1[2,2]:=c; decisao1[2,3]:=-s;
decisao1[3,1]:=-c; decisao1[3,2]:=-c; decisao1[3,3]:=c1;

if c>0 then linha:=1
  else if c=0 then linha:=2
    else linha:=3; { c<0 }

if s>0 then coluna:=1
  else if s=0 then coluna:=2
    else coluna:=3; { s<0 }

t1:=decisao1[linha,coluna];

{ Decisao2
      C1 - S>0   C2 - S=0   C3 - S<-0
      L1 - C>0    S      S      (C-S)
      L2 - C=0    S      S      -S
      L3 - C<0   (S-C)   -C      (t3)
}
t3:=abs(abs(c)-abs(s));
decisao2[1,1]:=s; decisao2[1,2]:=s; decisao2[1,3]:=c-s;
decisao2[2,1]:=s; decisao2[2,2]:=s; decisao2[2,3]:=-s;
decisao2[3,1]:=(s-c); decisao2[3,2]:=-c; decisao2[3,3]:=t3;

if c>0 then linha:=1
  else if c=0 then linha:=2
    else linha:=3; { c<0 }

if s>0 then coluna:=1
  else if s=0 then coluna:=2
    else coluna:=3; { s<0 }

t2:=decisao2[linha,coluna];

{ write(ARQ_SAIDA,'T1= ',t1,' T2= ',t2,' '); }

{ A recebe o maximo entre 0,t1 e t2 }
if ((0 > t1) AND (0 > t2)) then A:=0
  else
    if t1>t2 then A:=t1
      else A:=t2;

T4:= indx - A; { indx = N tamanho da serie }

```

```

soma_cov4:=0;

{ CALCULA MEDIA }
for i_cov4:= 1 to indx do
    soma_cov4:=soma_cov4+vetcov4[i_cov4];
media_cov4:=soma_cov4/indx;

{ Constroi XT1 }
XT1:=0;
for i_cov4:= 1 to T4 do
    XT1:=XT1+(vetcov4[i_cov4]-media_cov4)*(vetcov4[i_cov4+t1]-
media_cov4)*(vetcov4[i_cov4+t2]-media_cov4);

{ RESULTADO DA FUNCAO }

COV4:=XT1/indx;

end;
{ ***** }

{ ***** }
{ CALCULA A FUNCAO JANELA }
function JANELA ( s_JAN: extended ) : extended;
var
    L: extended;

begin
    if (abs(s_JAN) <= 0.5) then L:=(1-
6*(s_JAN*s_JAN)+6*(abs(s_JAN)*abs(s_JAN)*abs(s_JAN)))
    else if (abs(s_JAN)>1) then L:=0
    else L:=2*(1-abs(s_JAN))*(1-abs(s_JAN))*(1-
abs(s_JAN));
    JANELA:= L;
end;
{ ***** }

{ ***** }
{ CALCULA O ESPECTRO DA SERIE }
function F1 ( var vetin_F1 : VETORX; W:extended ) : extended;
var
    a,s:integer;
    F11: extended;
    soma:extended;

begin
    a:=-M;
    F11:=0;
    for s:=a to M do
        F11:=F11+JANELA(s/M)*COV(vetin_F1,s)*cos(s*W) ;

    F1:=F11/(2*PI);
end;
{ ***** }

procedure SOMA_COMPLEXO(parcela1,parcela2: COMPLEXO; var resultado:
COMPLEXO);
begin
    resultado.a:=parcela1.a+parcela2.a;

```

```

    resultado.b:=parcela1.b+parcela2.b;
end;

{ ***** }

procedure IMP_COMPLEXO(parcela1: COMPLEXO);

begin
    writeln(ARQ_SAIDA, 'COMPLEXO => ', parcela1.a:0:4, ' + ', parcela1.b:0:4, '
i ');
end;

{ ***** }
{ PROCEDURE EXP_COMPLEXO }
{ RECEBE DOIS NUMEROS COMPLEXOS, PARCELA 1 E' O PARAMETRO E
RESULTADO E' PASSADO COMO VARIAVEL E RECEBE O VALOR DO EXPONENCIAL
DO NUMERO COMPLEXO }

procedure EXP_COMPLEXO(parametro:extended; var resultado:COMPLEXO);
begin
    resultado.a:=cos(parametro); { PARTE extended }
    resultado.b:=-sin(parametro); { PARTE IMAGINARIA }
end;
{ ***** }

{ ***** }
procedure BIES ( var vetcov : VETORX; W1,W2:extended; var resultado:
COMPLEXO) ;
var
    a,p,linha_bies,ii,jj:integer;
{ LI: array [1..TAM_VET_LI] of COMPLEXO; }
    SOMA_BIES,TMP_COMPLEXO:COMPLEXO;
    parte_real,parte_imaginaria:extended;

begin
    { writeln(ARQ_SAIDA, '=====');
    writeln(ARQ_SAIDA, ' PARAMETROS DE ENTRADA DO PROGRAMA BIES : ');
    writeln(ARQ_SAIDA, ' W1 = ', W1:0:5, ' W2 = ', W2:0:5);
    writeln(ARQ_SAIDA, '====='); }
    p:=2*M+1;
    a:=-M;

    SOMA_BIES.a:=0;
    SOMA_BIES.b:=0;

    linha_bies:=0;
    for ii:= a to M do
        for jj:= a to M do
            begin
                EXP_COMPLEXO((ii*W1+jj*W2), TMP_COMPLEXO);

                { DEBUG }

                { WRITELN(ARQ_SAIDA, ' ');
                WRITELN(ARQ_SAIDA, ' '); }
                { writeln(ARQ_SAIDA, 'CONSTANTES - r,d,N -indx- ', r, ' , ', d:0:2, '
, ', indx); }
                { WRITE(ARQ_SAIDA, 'ii= ', ii, ' jj= ', jj, ' M= ', M);
                WRITELN(ARQ_SAIDA, ' JANELA(ii/M) -> ', JANELA(ii/M):0:5);

```

```

WRITE (ARQ_SAIDA, 'JANELA (jj/M) -> ', JANELA (jj/M):0:5);
WRITELN (ARQ_SAIDA, ' JANELA ((ii-jj)/M) -> ', JANELA ((ii-
jj)/M):0:5);
WRITELN (ARQ_SAIDA, 'COV4 -> ', COV4 (vetcov, ii, jj):0:5);
IMP_COMPLEXO (TMP_COMPLEXO); }
{ WRITELN (ARQ_SAIDA, ' (BIES) ;Parte extended TMP ->
', TMP_COMPLEXO.a:0:5); }
{ FIM DO DEBUG }
parte_real:=JANELA (ii/M)*JANELA (jj/M)*JANELA ((ii-
jj)/M)*COV4 (vetcov, ii, jj)*TMP_COMPLEXO.a;
SOMA_BIES.a:=SOMA_BIES.a + parte_real;

parte_imaginaria:=JANELA (ii/M)*JANELA (jj/M)*JANELA ((ii-
jj)/M)*COV4 (vetcov, ii, jj)*TMP_COMPLEXO.b;
SOMA_BIES.b:=SOMA_BIES.b+parte_imaginaria;

{ ANTIGO LI[linha_bies].a:=JANELA (ii/M)*JANELA (jj/M)*JANELA ((ii-
jj)/M)*COV4 (vetcov, ii, jj)*TMP_COMPLEXO.a;
LI[linha_bies].b:=JANELA (ii/M)*JANELA (jj/M)*JANELA ((ii-
jj)/M)*COV4 (vetcov, ii, jj)*TMP_COMPLEXO.b;
SOMA.a:=SOMA.a+LI[linha_bies].a;
SOMA.b:=SOMA.b+LI[linha_bies].b; }

end;
resultado.a:=SOMA_BIES.a/((2*PI)*(2*PI));
resultado.b:=SOMA_BIES.b/((2*PI)*(2*PI));
end;
{ ***** }

{ ***** }
procedure P_FREQ1 ( W1,W2:extended; var vet_f1, vet_f2: VETORFREQ1 ) ;
begin
  vet_f1[1]:=W1-(5*d*PI/indx);
  vet_f1[2]:=W1-(4*d*PI/indx);
  vet_f1[3]:=W1-(3*d*PI/indx);
  vet_f1[4]:=W1-(2*d*PI/indx);
  vet_f1[5]:=W1-(d*PI/indx);
  vet_f1[6]:=W1;
  vet_f1[7]:=W1+(d*PI/indx);
  vet_f1[8]:=W1+(2*d*PI/indx);
  vet_f1[9]:=W1+(3*d*PI/indx);
  vet_f1[10]:=W1+(d*4*PI/indx);
  vet_f1[11]:=W1+(d*5*PI/indx);
  vet_f1[12]:=W1;
  vet_f1[13]:=W1;
  vet_f1[14]:=W1;
  vet_f1[15]:=W1;
  vet_f1[16]:=W1;
  vet_f1[17]:=W1;
  vet_f1[18]:=W1;
  vet_f1[19]:=W1;
  vet_f1[20]:=W1;
  vet_f1[21]:=W1;

  vet_f2[1]:=W2;
  vet_f2[2]:=W2;
  vet_f2[3]:=W2;
  vet_f2[4]:=W2;
  vet_f2[5]:=W2;
  vet_f2[6]:=W2;

```

```

    vet_f2[7]:=W2;
    vet_f2[8]:=W2;
    vet_f2[9]:=W2;
    vet_f2[10]:=W2;
    vet_f2[11]:=W2;
    vet_f2[12]:=W2-(5*d*PI/indx);
    vet_f2[13]:=W2-(4*d*PI/indx);
    vet_f2[14]:=W2-(3*d*PI/indx);
    vet_f2[15]:=W2-(2*d*PI/indx);
    vet_f2[16]:=W2-(d*PI/indx);
    vet_f2[17]:=W2+(d*PI/indx);
    vet_f2[18]:=W2+(2*d*PI/indx);
    vet_f2[19]:=W2+(3*d*PI/indx);
    vet_f2[20]:=W2+(4*d*PI/indx);
    vet_f2[21]:=W2+(5*d*PI/indx);
end;

{ ***** }

{ ===== }
{ ===== PROGRAMA PRINCIPAL ===== }
{ ===== }

begin

    clrscr; { Limpa tela }

    contador:=0; { Usada para contar o numero de iteracoes do programa }

    { ==== Leitura do Vetor X -> tamanho indx ====}
    indx:=0;

    assign (vetx,ARQUIVO_X);
    writeln('Arquivo do Vetor X : ',ARQUIVO_X);
    reset (vetx);

    while (NOT EOF(vetx)) do
    begin
        readln(vetx,temp);
        indx:=indx+1;
        X[indx]:=temp;
        { ** DEBUG ** } { writeln ('Posicao ',indx,' = ',X[indx]); }
    end;
    close (vetx);
    { ===== Fim da Leitura do Vetor X ===== }

    { ==== Leitura do Vetor FREQ1 -> tamanho indfreq1 ====}
    assign (vetfreq1,'c:\opt\tp6\freq1.txt');
    reset (vetfreq1);

    indfreq1:=0;
    while (NOT EOF(vetfreq1)) do
    begin
        readln(vetfreq1,temp);

```



```

        indfreq1:=indfreq1+1;
        FREQ1[indfreq1]:=temp;
        { ** DEBUG ** } { writeln ('Posicao ',indfreq1,' = ',X[indfreq1]); }
    end;
close (vetfreq1);
{ ===== Fim da Leitura do Vetor FREQ1 ===== }

{ ===== Leitura do Vetor FREQ2 -> tamanho indfreq2 =====}
assign (vetfreq2,'c:\opt\tp6\freq2.txt');
reset (vetfreq2);

indfreq2:=0;
while (NOT EOF(vetfreq2)) do
begin
    readln(vetfreq2,temp);
    indfreq2:=indfreq2+1;
    FREQ2[indfreq2]:=temp;
    { ** DEBUG ** } { writeln ('Posicao ',indfreq2,' = ',X[indfreq2]); }
end;
close (vetfreq2);
{ ===== Fim da Leitura do Vetor FREQ1 ===== }

{ Obtem horario de inicio do programa }
GetTime(h1,m1,s1,hund1);

{ MONTA UMA MATRIZ COM AS NOVE FREQUENCIAS PARA CADA
  FREQUENCIA PRINCIPAL }

linha_main:=0;
for k:=1 to indfreq1 do
begin
    TMP1:=FREQ1[k];          { FREQ1 = VETOR DE FREQ 1 }
    TMP2:=FREQ2[k];          { FREQ2 = VETOR DE FREQ 2 }

    { procedure P_FREQ1 ( W1,W2:extended; var vet_f1, vet_f2:
      VETORFREQ1) ; }
      P_FREQ1(TMP1,TMP2,VTMP3,VTMP4); { RECEBE TMP1 E TMP2 COMO
PARAMETRO
                                     E RETORNA VETORES VTMP3 E VTMP4 }
    linha_main:=(21*k)-20;      { linha_main contador de linha do
programa
                                principal (main) }

    for j:=1 to ((4*r)+1) do
    begin
        FFREQ1[linha_main]:=VTMP3[j];
        FFREQ2[linha_main]:=VTMP4[j];
        linha_main:=linha_main+1;
    end;
end;
{ ===== }
{ IMPRESSAO DOS VETORES FFREQ1 E FFREQ2 }
{ assign(ARQ_SAIDA,'c:\opt\tp6\OUT_FFREQ.txt');
  rewrite (ARQ_SAIDA);
  writeln(ARQ_SAIDA,'CONSTANTES - r,d,N -indx- ',r,' ',',d:0:2,',
',indx);
  for k:=1 to (linha_main-1) do
  begin

```

```

        writeln(ARQ_SAIDA,k:3,' ',FFREQ1[k]:0:3,' -----
',FFREQ2[k]:0:3);
    end;
    close (ARQ_SAIDA); }

{ ===== }

{ IMPRESSAO DA MEDIA DA SERIE X }
{   for i:= 1 to indx do
    soma:=soma+X[i];
    media:=soma/indx;
    writeln('MEDIA DA SERIE = ',media:0:3); }
{ FIM DO TESTE }

{ teste funcao janela }
{   WRITELN(janela(-4/5):0:4); }

{ procedure BIES ( vetcov : VETORX; W1,W2:extended; var resultado:
COMPLEXO) ; }

assign(ARQ_SAIDA,ARQUIVO_SAIDA_BIES);
{ Envia saida para Console }
{ assign (ARQ_SAIDA,''); }
writeln('SAIDA EM ', ARQUIVO_SAIDA_BIES);

rewrite (ARQ_SAIDA);

for L:= 1 to CONST_F do
begin
    BIES(X,FFREQ1[L],FFREQ2[L],SAIDA);
    { WRITELN('FIM DO TESTE - > RESULTADO = '); }
    write(L,' ');
    writeln(ARQ_SAIDA,SAIDA.a,' ',SAIDA.b);
    V_BIES_REAL[L]:=SAIDA.a;
    V_BIES_IMAG[L]:=SAIDA.b;
    { writeln(ARQ_SAIDA,' '); }
    writeln(ARQ_SAIDA,'RESULTADO COM PRECISAO extended (subarao2.PAS)
');
    IMP_COMPLEXO(SAIDA); }
end;

writeln;
{ Obtem horario de termino do programa }
GetTime(h2,m2,s2,hund2);
Writeln(ARQ_SAIDA,' ');
WriteLn(ARQ_SAIDA,'Hora de inicio: ',LeadingZero(h1),':',
LeadingZero(m1),':',LeadingZero(s1),
'.',LeadingZero(hund1));

WriteLn(ARQ_SAIDA,'Hora de Fim   : ',LeadingZero(h2),':',
LeadingZero(m2),':',LeadingZero(s2),
'.',LeadingZero(hund2));

close(ARQ_SAIDA); { FECHA ARQ_SAIDA DO BIESPECTRO }

writeln;
writeln;

{ ===== }
{   BICOERENCIA }

```

```

( ===== )
assign(ARQ_SAIDA,ARQUIVO_SAIDA_BICO);
{ Envia saída para Console }
{ assign (ARQ_SAIDA,''); }
writeln('SAIDA EM ', ARQUIVO_SAIDA_BICO);
rewrite (ARQ_SAIDA);

for L:= 1 to CONST_F do
begin
write('BICO ',L,' ');

VALOR_BICO:=(V_BIES_REAL[L]*V_BIES_REAL[L]+V_BIES_IMAG[L]*V_BIES_IMAG[L])
/

(F1(X,FFREQ1[L])*F1(X,FFREQ2[L])*F1(X,(FFREQ1[L]+FFREQ2[L])));
writeln(ARQ_SAIDA,VALOR_BICO);
end;

writeln;
{ Obtem horario de termino do programa }
{ GetTime(h2,m2,s2,hund2);
WriteLn(ARQ_SAIDA,' ');
WriteLn(ARQ_SAIDA,'Hora de inicio: ',LeadingZero(h1),':',
LeadingZero(m1),':',LeadingZero(s1),
'.',LeadingZero(hund1));

WriteLn(ARQ_SAIDA,'Hora de Fim : ',LeadingZero(h2),':',
LeadingZero(m2),':',LeadingZero(s2),
'.',LeadingZero(hund2)); }

close(ARQ_SAIDA); { FECHA ARQ_SAIDA DO BICO }

end.

```