APERFEIÇOAMENTO DE ESTATÍSTICAS

TESTES EM MODELOS ARMA

Bernardo Moisés Lagos Alvarez

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

Este trabalho foi financiado pelo CNPq

-São Paulo, Janeiro de 2000-

Aperfeiçoamento de Estatística Testes em Modelos Arma

Este exemplar corresponde à redação
Final da tese devidamente corrigida
defendida por Bernardo Moisés Lagos Alvarez
e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, janeiro de 2000.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin (Presidente)(IME-USP)
Profª. Dra. Elisete da Conceição Quintaneiro Aubin (IME-USP)
Profª. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio (ESALQ-USP)
Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro (UFPE)
Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos(UFPE)

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Pedro A. Morettin, pela disposição e seriedade com que me dirigiu para poder contribuir ao conhecimento dos modelos ARMA.

À Professora Elisete C. Q. Aubin pelo, interesse e sugestões feitas no decorrer do trabalho.

Ao Professor Gauss M. Cordeiro, por ter contribuído na formulação do problema desta tese.

Por último, agradeço o apoio do CNPq, sem o qual não teria sido possível concluir este trabalho.

*À Valeria,
Natalia
e Dario.*

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos as correções de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança, e tipo-Bartlett para a estatística escore, para testar hipóteses sobre os parâmetros de um modelo autoregressivo e de média móveis de ordem (p, q) , gaussiano, estacionário e invertível. São consideradas alternativas compostas com e sem parâmetros de incômodo, generalizando o procedimento de Taniguchi (1991) para corrigir a estatística da razão de verossimilhança quando não há parâmetros de incômodo. Generaliza-se, também, a correção tipo-Bartlett para o caso de observações dependentes, na forma de uma série temporal. As fórmulas das correções são escritas em termos matriciais e têm vantagens no sentido da fácil implementação por meio de alguma linguagem simbólica ou numérica matricial, como Ox (Doornik, 1996). São obtidas correções nos casos especiais dos modelos autoregressivo de ordem 1, de médias móveis de ordem 1 e misto de ordem $(1,1)$. É também feito um estudo de simulação para verificar o desempenho das correções nos dois primeiros casos citados acima.

ABSTRACT

In this work we derive Bartlett corrections for the likelihood ratio statistic and Bartlett-type corrections for the score statistic, for testing hypotheses for the parameters of an autoregressive moving average model of order (p, q) . Alternative hypotheses with and without disturbance parameters are considered, generalizing the procedure of Taniguchi (1991), developed for correcting likelihood ratio statistics without disturbance parameters. This work also generalizes the case of Bartlett-type correction for dependent variables occurring in the form of a time series. The formulae are written in matrix form and are easily implemented in some symbolic or numeric computer language, as Ox (Doornik, 1996). In particular, corrections are developed for the special cases of an autoregressive model of order 1, a moving average of order 1 and a mixed model of order $(1,1)$. A simulation study is done in order to verify the performance of the corrections for the two first special cases mentioned above.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Revisão das estatísticas razão de verossimilhança e escore	1
1.2	Objetivo do trabalho	5
2	Correções de Bartlett	8
2.1	Introdução	8
2.2	Preliminares	9
2.2.1	O problema	9
2.2.2	As estatísticas testes	9
2.3	As correções de Bartlett	11
2.3.1	Correção de Bartlett para a estatística razão de verossimilhança . .	12
2.3.2	Correção tipo-Bartlett para a estatística escore	17
3	Modelos ARMA	20
3.1	Introdução	20
3.2	O modelo	21

3.3	Função de autocovariância	22
3.4	Estimação por máxima verossimilhança	25
3.4.1	Introdução	25
3.4.2	Função de verossimilhança	26
3.4.3	Verossimilhança exata	27
3.4.4	Outros procedimentos	28
3.5	Cálculo e maximização da verossimilhança	29
3.5.1	Cálculo das esperanças condicionais iniciais	29
3.5.2	Algoritmo de inovação	30
3.5.3	Outras observações	31
3.6	Vieses dos estimadores de máxima verossimilhança	32
3.7	Cálculo das estatísticas testes	34
3.7.1	Modelo auto-regressivo de ordem 1	35
3.7.2	Modelo de média móvel de ordem 1	39
3.7.3	Modelo auto-regressivo de média móvel de ordem (1, 1)	43
4	Correções de Testes para Modelos <i>ARMA</i>	47
4.1	Argumentação para as correções	47
4.2	Procedimento para o cálculo dos cumulantes para o modelo <i>ARMA</i>	49
4.2.1	Teoremas principais	49
4.2.2	Procedimento para calcular os cumulantes	51
4.3	Fator de correção de Bartlett na forma matricial	60

4.3.1	Elementos das matrizes	61
4.3.2	Um exemplo	65
4.4	Fator de correção tipo-Bartlett na forma matricial	67
4.4.1	Elementos das matrizes usando os cumulantes	68
4.4.2	Um exemplo	70
4.5	Aplicação	71
4.5.1	As estatísticas testes corrigidas	71
5	Um Estudo de Simulação	86
5.1	Introdução	86
5.2	A descrição do estudo	87
5.3	Resultados das simulações	88
5.3.1	Estatística da razão de verossimilhança	88
5.3.2	A estatística escore	92
6	Conclusões Gerais	107
	Apêndices	110
A		111
A.1	Resultados matriciais	111
A.2	Exemplo do cálculo dos κ 's	113
B		118

B.1	Forma matricial da estatística escore	118
C		123
C.1	Cumulantes no caso de um modelo $AR(1)$	123
C.2	Cumulantes no caso de um modelo $MA(1)$	125
C.3	Cumulantes no caso de um modelo $ARMA(1,1)$	125
Referências		129

Capítulo 1

Introdução

1.1 Revisão das estatísticas razão de verossimilhança e escore

Um dos procedimentos usuais para testar a especificação de um modelo estatístico identificado é propor uma hipótese nula que é testada contra uma hipótese alternativa conveniente, onde a hipótese nula é um caso especial. Os principais testes que foram construídos para o uso nos mais diferentes propósitos, nas mais diferentes áreas incluindo nosso problema, provêm do princípio da verossimilhança. Estes são três: o da razão de verossimilhança (RV) (Wilks, 1938), o de Wald (W) (Wald, 1943) e o escore (S), originalmente introduzido por Rao (1948) e posteriormente por Aitchison e Silvey (1958) e Silvey (1959), usando o procedimento do multiplicador de Lagrange. A importância dessas estatísticas de testes está fundamentada em seu princípio de inferência, fortemente relacionado à estatística paramétrica (Barndorff-Nielsen, 1988), transformando-se numa teoria, a teoria da verossimilhança (Cordeiro, 1992). Este é o enfoque considerado neste trabalho. Não é possível sugerir o uso de uma estatística específica, pois depende das suposições impostas aos dados e do problema a resolver, ou seja, do modelo proposto para os dados e das hipóteses a testar (Ferrari, 1991: Cap.1). O fato de ser difícil encontrar

a distribuição exata para estas estatísticas (mesmo se for encontrada em alguns casos particulares, sua expressão pode ser muito complicada), conduz ao uso dos métodos da teoria assintótica para poder encontrar uma distribuição aproximada, usando como ferramenta fundamental as expansões assintóticas da sua distribuição. Como alternativa, têm surgido na última década, as ferramentas baseadas no uso dos métodos computacionais intensivos, como o método bootstrap (Cox, 1988). É sabido que as estatísticas RV , S e W são equivalentes, no sentido de que têm a mesma distribuição limite sob a hipótese nula (até primeira ordem). Uma prova desse resultado é feita em Hamilton (1994, Cap.14), usando o método dos momentos generalizados. Dentre os critérios usados para selecionar uma estatística apropriada destacamos:

- uso da teoria assintótica, através da comparação de poderes até primeira ordem ou ordem superior;
- Simulação do desempenho (numérico) dos testes em amostras pequenas ou moderadas, usando o critério anterior;

Outro critério é baseado nas vantagens computacionais, por exemplo, supor que o modelo alternativo é muito geral, contendo mais parâmetros que o modelo nulo. Então, prefere-se testar as hipóteses usando o teste S , sob o qual não se precisa estimar o modelo alternativo (Hosking, 1980). Para o caso de se ter uma amostra aleatória, as pesquisas nos últimos anos têm contribuído muito para poder responder à pergunta: qual estatística teste a escolher? Ou como “melhorar” o teste? Sobre os poderes dos testes sob alternativas contíguas, a teoria tem sido desenvolvida sob dois enfoques diferentes. O primeiro leva em conta que, até primeira ordem, os três testes têm o mesmo poder e que, até segunda ordem, têm o mesmo tamanho. Mais informação sobre o poder pode ser obtida através expansão até segunda ordem e análise do coeficiente que acompanha o termo de ordem $n^{-1/2}$ (Cordeiro, Botter e Ferrari, 1994). Sob este enfoque o trabalho pioneiro é o de Peers (1971) que desenvolve expansões até ordem $n^{-1/2}$ para a função do poder dos três testes

anteriores, sob alternativas contíguas; no caso de hipótese nula simples versus hipótese alternativa composta, nenhum desses testes é uniformemente superior. Os trabalhos que se seguiram são extensões dos resultados de Peers à hipótese composta; Hayakawa (1975) trata dos testes RV e W , enquanto Harris e Peers (1980) tratam do teste S . De uma análise destes trabalhos, conclui-se que não é possível, em geral, a afirmação de que um dos testes é mais poderoso que outro. O segundo enfoque foi proposto por Chandra e Joshi (1983). A idéia é modificar convenientemente as regiões críticas dos testes S , W e RV para que os testes modificados venham a ter o mesmo tamanho que o teste baseado na RV .

Seguindo uma série de trabalhos, Chandra e Joshi (1983), Chandra e Mukerjee (1984, 1985) e Chandra e Samanta (1988) afirmam que para amostras de tamanho grande o teste S de “tamanho ajustado” (Chandra e Mukerjee, 1985: Introdução e condições (a), (b) e (c)) é localmente mais poderoso que os outros testes de tamanho ajustado, quando esses testes são calculados a um nível de significância comum, suficientemente pequenos. Extensões para o caso multiparamétrico são encontradas nos artigos de Mukerjee (1990 a, b). Para uma comparação entre o procedimento teórico e o numérico, Sutradhar e Bartlett (1993) fazem um estudo de simulação para testar hipótese simples, hipótese composta unidimensional e hipótese composta multidimensional, confirmando os resultados de Peers (1971). Entretanto, para testar hipótese composta multidimensional, a estatística teste escore de tamanho ajustado foi mais poderosa que as demais estatísticas. Também encontram um padrão para a superioridade de um teste em termo do espaço paramétrico alternativo, com o teste da razão de verossimilhança ocupando o segundo lugar. Ademais, o teste escore é mais poderoso no lado inferior do espaço alternativo, enquanto no lado superior o teste de Wald será superior e vice versa. Por exemplo consideremos, testar uma hipótese nula simples $H: \theta = \theta^{(0)}$, onde θ é o parâmetro de posição da distribuição de Poisson. Os resultados obtidos mostram que o teste escore é mais poderoso que os outros dois sob o espaço alternativo $\theta > \theta^{(0)}$. Entretanto, sob o espaço alternativo $\theta < \theta^{(0)}$, o teste de Wald e da razão de verossimilhança parecem ser igualmente poderosos, seguido

pelo escore. Também eles consideram o problema de testar $H: \theta_1 = \theta_1^{(0)}, \theta_2 = \theta_2^{(0)}$, onde θ_1 e θ_2 são os parâmetros de posição e escala respectivamente de uma distribuição normal, concluindo dos resultados numéricos que o teste escore é mais poderoso que o da razão de verossimilhança, seguido pelo teste de Wald sob o espaço alternativo $\theta_2 > \theta_2^{(0)}$. Entretanto, para o espaço alternativo $\theta_2 < \theta_2^{(0)}$, o desempenho inverte-se.

Em análise de séries temporais o primeiro estudo sistemático, utilizando desenvolvimento assintótico, de primeira ordem ou superior, foi tratado por Whittle (1951). Para um processo auto-regressivo ou de médias móveis, Whittle calculou a distribuição limite da estatística de um teste do tipo RV , e indicou um método para calcular a expansão de Edgeworth (Hall, 1992). Phillips (1977) calculou a expansão de Edgeworth da estatística de teste razão- t na estimação do coeficiente de um processo auto-regressivo de primeira ordem ($AR(1)$). Para um processo $AR(1)$, Tanaka (1982) encontrou a aproximação de segunda ordem para as distribuições dos testes RV , W e S , sob a hipótese nula e alternativa. Taniguchi (1984) encontrou a expansão de Edgeworth até ordem menor que $n^{-1/2}$ para o teste RV para hipótese nula composta multidimensional, sob uma seqüência de alternativas locais. Ele obteve esse resultado por um procedimento formal, sem provar a validade de sua expansão, paralelo ao feito por Hayakawa (1975). Taniguchi (1988) propôs uma classe de testes, digamos $\aleph$, sob a hipótese nula composta multidimensional e sob uma seqüência de alternativas locais, usando o resultado de Taniguchi (1987). As estatísticas que pertencem a classe $\aleph$ são as que podem ser escritas até ordem n como um polinômio de grau seis em variáveis que dependem da terceira derivada do logaritmo da função de verossimilhança, com coeficientes que dependem dos cumulantes conjuntos de quarta ordem das derivadas do logaritmo da função de verossimilhança. A classe $\aleph$ contém como casos especiais os testes RV , W , WM (Wald Modificada) e S . Em relação ao poder, Taniguchi (1991) faz uma comparação dos poderes locais dos testes RV , W , WM e S e conclui que nenhum dos testes é uniformemente superior. Também demonstrou a validade da expansão de Edgeworth para a distribuição das estatísticas da classe $\aleph$ sob uma seqüência de alternativas locais, encontrou uma transformação que produz

igualdade no poder até segunda ordem para $T \in \mathbb{N}$, mas até terceira ordem não existe um teste uniformemente mais poderoso em $\mathbb{N}$. Também demonstrou que, dado dois valores positivos envolvidos no termo de terceira ordem, a transformação anterior produz um teste assintoticamente mais poderoso até terceira ordem.

Existem diferentes procedimentos para construir estatísticas testes, além do mencionado acima (teste de tamanho ajustado), com bom desempenho em alguns dos critérios. O desempenho é fortemente dependente do problema a resolver e das suposições impostas ao modelo. Alguns deles são baseados em diferentes enfoques, como por exemplo, o bayesiano (Mukerjee e Ghosh, 1994). Os mais difundidos entre os não paramétricos são aqueles com o enfoque introduzido por Efron (1979), conhecido como bootstrap, baseado nos procedimentos computacionais intensivos, fornecendo boas propriedades assintóticas até uma certa ordem em amostras finitas (pequenas ou moderadas). Uma vasta literatura sobre este tema pode ser encontrada em Cribari-Neto (1997a). Entre os procedimentos paramétricos estão aqueles que usam os procedimentos chamados comumente de analíticos, fundamentados pela teoria assintótica de pequenas amostras (Field e Ronchetti, 1990 e Hampel, 1973) para corrigir estatísticas testes, produzindo convergência “mais rápida” para a distribuição de referência. Entre esses estão aqueles que modificam o valor crítico do teste a um nível de significância fixado (teste de tamanho ajustado), e os que modificam a própria estatística teste pela multiplicação por um fator, escalar no caso da estatística da razão de verossimilhança e um fator dependente da própria estatística no caso da estatística score.

1.2 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver o aperfeiçoamento das estatísticas da razão de verossimilhança e score para diferentes modelos auto-regressivos e de médias móveis de ordem p e q , comumente conhecido como modelo $ARMA(p, q)$, utilizando o trabalho de Taniguchi (1984) através do resultado de Lawley (1956) para a estatística da razão de

verossimilhança e de Harris (1985) e Cordeiro e Ferrari (1991) para a estatística escore.

A organização deste trabalho é feita em cinco capítulos. No Capítulo 2 fornecemos os resultados das correções de Bartlett para as estatísticas da razão de verossimilhança e escore, que são geralmente usadas em Estatística e Econometria, além de uma revisão da literatura enfatizando as propriedades do fator de correção de Bartlett e o uso do modelo autorregressivo e de médias móveis (*ARMA*) gaussianos.

O Capítulo 3 trata de algumas noções fundamentais para a análise de uma série temporal estacionária, concentrando-se nos procedimentos de estimação “exata” dos parâmetros de um modelo auto-regressivo e de médias móveis gaussiano identificado. O procedimento usado para estimação é devido a Brockwell e Davis (1991). Escrevemos para os modelos auto-regressivos de ordem 1 (*AR*(1)) expressões explícitas para as estatísticas da razão de verossimilhança e escore. Para os modelos de médias móveis de ordem 1 (*MA*(1)) e auto-regressivo e de médias móveis de ordem (1, 1) (*ARMA*(1, 1)), expressões explícitas para as estatísticas testes são difíceis de se obter e apresentamos expressões gerais em termos da matriz de autocovariância.

No Capítulo 4 damos uma argumentação do uso das correções de Bartlett nos modelos auto-regressivos e de médias móveis. Baseado em Taniguchi (1984), desenvolvemos o procedimento para calcular os cumulantes conjuntos até quarta ordem das derivadas do logaritmo da função de verossimilhança de um modelo *ARMA*. Usando esse procedimento e aquele de Cordeiro (1993) escrevemos o fator de correção de Bartlett, devido a Lawley (1956) e tipo-Bartlett, devido a Cordeiro e Ferrari (1991), na forma matricial. As expressões resultantes são atraentes do ponto de vista numérico e simbólico, pois requerem somente operações simples com matrizes. Particularmente, consideramos os modelos *AR*(1) e *MA*(1), nos quais as correções são obtidas para a estatística da razão de verossimilhança e escore para testar diferentes hipóteses nulas simples. Para o modelo *ARMA*(1, 1), obtemos a correção de Bartlett das estatísticas da razão de verossimilhança para testar hipóteses nulas com um parâmetro de interesse e dois parâmetros de incômodo e dois parâmetros de interesse e um parâmetro de incômodo. Também, obtemos a cor-

reção tipo-Batlett para testar a hipótese nula em que o parâmetro auto-regressivo é igual a um valor especificado, sendo os parâmetros de incômodo o parâmetro da componente de médias móveis e a variância do ruído.

Finalizando, no Capítulo 5, desenvolvemos um estudo numérico para algumas das correções obtidas no Capítulo 4 para comparar o desempenho entre a estatística original e a corrigida, usando como medida de comparação a taxa de rejeição a um nível nominal fixo.

Capítulo 2

Correções de Bartlett

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma revisão geral das correções de Bartlett tendo como objetivo principal mostrar os procedimentos de cálculo das correções que serão usadas no Capítulo 5. Na Seção 2.2 apresenta-se o problema, as estatísticas testes associadas e a notação. Na Seção 2.3 faz-se uma revisão das correções de Bartlett, primeiro para a estatística da razão de verossimilhança como um dos procedimentos de cálculo, de Lawley (1956), e uma revisão da literatura que usa essa correção no caso em que as observações provêm de um modelo $ARMA(p, q)$ ou de um modelo relacionado, como o $SARMA(p, q)$ ou $ARMA(p, q)$ com raiz unitária. Revisamos o procedimento de cálculo dado por Cordeiro e Ferrari (1991) para a correção da estatística escore. Revisões mais completas da literatura no caso de observações independentes e identicamente distribuídas, encontram-se em Aubin (1995: Cap. 1), Botter (1993: Cap. 1) e Uribe (1997: Cap. 1).

2.2 Preliminares

2.2.1 O problema

Considere identificado um modelo com o logaritmo da função de verossimilhança total, $l(\beta)$, dependente do vetor de parâmetros $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$ de dimensão $r \times 1$ e regular com respeito às derivadas em relação aos componentes de β até quarta ordem. O problema é testar as hipóteses

$$H : \beta_1 = \beta_1^{(0)} \quad vs \quad A : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)}, \quad (2.1)$$

onde $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$, $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_s)^\top$ é um vetor s -dimensional de parâmetros de interesse e $\beta_2 = (\beta_{s+1}, \dots, \beta_r)^\top$, um vetor de parâmetros de perturbação $(r - s)$ -dimensional sendo $\beta_1^{(0)}$ um vetor especificado. A partir de agora chamemos $l(\beta)$ simplesmente de “log-verossimilhança”.

2.2.2 As estatísticas testes

Considere $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ um vetor de n variáveis aleatórias independentes e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ o vetor de valores observados destas variáveis aleatórias. Admitimos que a função $l(\beta)$ é regular com respeito às derivadas em relação aos componentes do vetor β até quarta ordem. Uma discussão detalhada das condições de regularidade pode ser encontrada, por exemplo, em Jensen (1993) e Cox e Hinkley (1974: Cap. 9).

Sejam $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1^\top, \hat{\beta}_2^\top)^\top$ e $\tilde{\beta} = (\beta_1^{(0)\top}, \tilde{\beta}_2^\top)^\top$ as estimativas de máxima verossimilhança (EMV) irrestrita de β e restrita de β a H , respectivamente.

A estatística RV

A estatística da razão de verossimilhança RV para o teste da hipótese nula H de (2.1) é expressa por

$$RV = -2\log\lambda,$$

onde λ é o quociente entre os supremos das verossimilhanças condicional à hipótese nula H e incondicional. Equivalentemente, escrevemos

$$RV = 2[l(\hat{\beta}) - l(\tilde{\beta})]. \quad (2.2)$$

Em amostras grandes, satisfeitas as condições de regularidade, RV tem, assintoticamente, uma distribuição χ_s^2 sob H , onde s é o número de condições impostas pela hipótese nula.

A estatística S

Para o problema de testar H versus A em (2.1), seja

$$U(\beta) = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} = (U_1^\top(\beta_1, \beta_2), U_2^\top(\beta_1, \beta_2))^\top \quad (2.3)$$

a função escore total particionada da mesma forma que β . Supomos, também, que a matriz de informação total de Fisher, $\mathbf{K} = K(\beta) = E(U(\beta)U(\beta)^\top)$, e sua inversa $\mathbf{K}^{-1}$ estão particionadas segundo β , ou seja, a partição $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$ conduz às correspondentes partições

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

e supomos que a matriz $\mathbf{K}$ seja positiva definida. A estatística escore S é dada por

$$S = \tilde{U}_1^\top \tilde{\mathbf{K}}^{11} \tilde{U}_1, \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{K}^{11}$ é a matriz de covariância assintótica de $\hat{\beta}_1$, obtida de (2.4), e a notação $\sim$ é

utilizada para indicar funções avaliadas nas EMV segundo a hipótese nula, neste caso, em $\tilde{\beta} = (\beta_1^{(0)\top}, \tilde{\beta}_2^\top)^\top$. Em amostras grandes, satisfeitas as condições de regularidade, S tem, assintoticamente, uma distribuição χ_s^2 sob H .

2.3 As correções de Bartlett

A idéia do aperfeiçoamento de testes teve origem em Bartlett (1937) para a estatística do teste da razão de verossimilhança, que notou que, para o caso particular da hipótese de igualdade das variâncias de $k + 1$ populações normais, a distribuição χ_k^2 fornece melhor ajuste à distribuição de $\frac{kRV}{E(RV)}$ do que à de RV , onde $E(RV)$ é o valor esperado da estatística da razão de verossimilhança RV , avaliado até ordem n^{-1} . Lawley (1956), seguindo o trabalho de Box (1949), supondo condições de regularidade sobre a verossimilhança e suas derivadas, estabelece

$$P_H(\tilde{c}^{-1}RV \leq w) = P(\chi_k^2 \leq w) + O(n^{-2}),$$

onde $\tilde{c} = k^{-1}\tilde{E}(RV)$ é uma estimativa consistente de $c = k^{-1}E(RV)$, avaliada até termos de ordem n^{-1} , sob a hipótese nula. O fator c ficou conhecido como fator de correção de Bartlett. Uma contribuição analítica ao aperfeiçoamento do teste da RV foi dada por Hayakawa (1977), ao obter uma expansão assintótica para a função distribuição da estatística da RV , sob a hipótese nula composta multidimensional, até termos de ordem n^{-1} . Na expansão de Hayakawa foi encontrado um erro, detectado por Harris (1986), Cordeiro (1987) e o próprio Hayakawa (1977), que foi rigorosamente discutido por Chesher e Smith (1995). Assim sendo, em modelos regulares, a expansão assintótica até ordem n^{-1} para a função distribuição da estatística da razão de verossimilhança sob a hipótese nula, pode ser escrita como

$$F_{RV}(x) = G_s(x) + a_1\{G_{s+2}(x) - G_s(x)\} + O(n^{-2}), \quad (2.6)$$

onde a_1 é uma expressão de ordem n^{-1} envolvendo cumulantes das quatro primeiras derivadas da log-verossimilhança e G_s denota a função de distribuição acumulada de uma

variável aleatória com distribuição qui-quadrado com s graus de liberdade.

Uma das principais linhas de pesquisa nas correções de Bartlett é a busca de métodos para calcular as correções, evitando a pesada álgebra que envolvem os cálculos dos cumulantes das derivadas da log-verossimilhança e aplicar estes métodos a estatísticas testes, tais que tenham como termo de ordem $O(n^{-1})$ uma combinação linear de distribuições qui-quadrado e desde que a distribuição limite seja qui-quadrado.. Este trabalho objetiva encontrar formas fechadas das correções na classe dos modelos *ARMA*, usando os métodos encontrados até agora, dados nas Subseções 2.3.1 e 2.3.2.

2.3.1 Correção de Bartlett para a estatística razão de verossimilhança

Introdução

Existe um número grande de trabalhos fornecendo fórmulas fechadas e resultados numéricos, nos mais variados problemas e modelos, usando o procedimento direto (cálculo direto da esperança da RV), usando o procedimento de Lawley (1956) e o matricial, Cordeiro (1993). Inúmeras referências sobre correções de Bartlett são encontradas em Cribari-Neto e Cordeiro (1996), Aubin (1995) e Uribe (1997). Como há dificuldade (uso de muita álgebra) no cálculo do fator c , há métodos alternativos indiretos que visam a diminuir os cálculos para o fator c . São aqueles de Barndorff-Nielsen e Cox (1984), Barndorff-Nielsen e Blaesild (1986) e de McCullagh e Cox (1986). Mukerjee e Reid (1998) constroem um critério para comparar assintoticamente estatísticas testes. Eles consideram no caso unidimensional, a classe de estatísticas $\mathfrak{N}$, dada por Taniguchi (1991). O critério está baseado no comprimento esperado do intervalo gerado pela estatística de teste $T \in \mathfrak{N}$. Obtém-se uma propriedade de otimalidade da RV , somente se a condição necessária para que T seja ajustável segundo a correção de Bartlett (dada no Teorema 2 em Taniguchi, 1991) é satisfeita. Assim, nesse sentido, a correção de Bartlett de T tem influência sobre o comprimento esperado do intervalo de confiança associado. Barndorff-Nielsen e Cox

(1979) obtêm uma forma mais simples que a de Lawley (1956) para calcular o fator de correção de Bartlett, a partir da aproximação saddlepoint (Jensen, 1995). A partir dessas idéias surgem trabalhos mais gerais (condicionando numa estatística ancilar, Barndorff-Nielsen e Cox, 1984) mantendo-se o relacionamento um a um entre o fator de correção de Bartlett para a RV e a constante normalizadora da aproximação de “saddlepoint” para a distribuição do EMV do parâmetro canônico, havendo também, a concordância entre todos os cumulantes com os correspondentes de uma variável χ_k^2 até $O(n^{-\frac{3}{2}})$.

Takemura e Kuriki (1996) seguindo Lawley (1956) e Bickel e Ghosh (1990) consideram uma decomposição da estatística da razão de verossimilhança em componentes, baseada em hipóteses encaixadas de um grau de liberdade, isto é, para $\Theta \subset \mathbf{R}^p$, o espaço paramétrico, $\Theta_0 \subset \Theta_1 \subset \dots \subset \Theta$, $\dim \Theta_j = j$, é uma sequência de subespaços encaixados de Θ . Se λ_j é a estatística da razão de verossimilhança para testar as hipóteses H_{j-1} vs H_j com $H_j : \theta \in \Theta_j$, $j = 1, \dots, p$, então sob a hipótese nula, λ_j , $j = 1 \dots, p$ são independentemente distribuídas até ordem n^{-1} . Estas estatísticas são independentemente corrigidas segundo Bartlett e, também, as estatísticas da razão de verossimilhança para testar hipóteses compostas intermediárias H_k vs H_m , $k < m$, têm uma correção de Bartlett.

Monti (1997) considera estimadores de Whittle para os parâmetros de um processo linear (Whittle, 1951), que provem da verossimilhança aproximada, fazendo uso do periodograma para reduzir o problema da dependência nos dados, a um conjunto de dados independentes. Conseqüentemente, métodos não-paramétricos, verossimilhança empírica (Owen, 1988) podem ser aplicados para dados independentes. Monti (1997) formula a correção de Bartlett da estatística da razão de verossimilhança empírica usando o método bootstrap. Sutradhar (1993) considerou o melhoramento e estudo dos testes de hipóteses sobre o comportamento das variâncias de um grupo de séries temporais, de período s , particularmente o teste padrão da razão de verossimilhança proposto por Bartlett (1937) (RV_B^*), para testar a homogeneidade das variâncias de k populações normais e independentes. Sutradhar (1996) modelou k séries por um processo auto-regressivo e de médias

móveis sazonal de ordem $(p, q)(P, Q)$, propondo um teste da RV corrigido (RV^*) pelo fator de correção de Bartlett, além de estudos de simulação para comparar o desempenho entre o testes da RV padrão e o escore parcial de Neyman (1959) (S_N) usando os modelos $AR(1)$ e $MA(1)$. Ao nível do 5% os testes RV^* e S_N comportam-se melhor que o RV_B^* , sendo S_N um teste uniformemente mais poderoso que os outros dois.

Sutradhar e Dagum (1993) consideram o modelo $SARMA(p, q)(P, Q)$ para as nk observações, incorporando agora duas direções de correlação, entre as observações de mesma sazonalidade e entre as observações para sazonalidades sucessivas no mesmo ano. A partir do estudo de simulação, usando um $SARMA(0, 1)(0, 1)$ deduz-se que o teste RV^* tem um melhor desempenho que RV_B^* ao nível do 5%. Sutradhar e Dagum (1998) consideram N séries temporais ajustadas pela tendência, e em cada uma modelam k sazonalidades estocasticamente. Comparam o teste RV^* , corrigido segundo Bartlett(1937) e o teste- F de uma ANOVA padrão, implementado no pacote X-11 ARIMA, para testar um padrão de sazonalidade estável versus uma sazonalidade móvel, usando três séries de índices de produtos exportados do Canadá. Também há trabalhos para o teste da raiz unitária (Hatanaka, 1996) num modelo $AR(1)$. Mas sob a hipótese nula sobre o parâmetro autor-regressivo, ϕ , $H : \phi = 1$, a segunda derivada da função de verossimilhança com respeito a ϕ é de ordem n^{-2} , violando uma das condições de Lawley (Larsson, 1998a). Jensen e Wood (1997) provaram que no modelo $AR(1)$ com variância de inovação conhecida a correção de Bartlett não corrige a ordem de magnitude quando momentos de alta ordem são aproximados, embora os resultados numéricos, na prática, mostrem o contrário. Nielsen (1994) corrige o teste da razão de verossimilhança da cointegração (Hatanaka, 1996) num modelo auto-regressivo vetorial (generalizando o teste da raiz unitária num modelo auto-regressivo) e suas simulações indicam a utilidade prática da correção. Nielsen (1997) faz um estudo de simulação para a correção de Bartlett usando o segundo e terceiro termos na expansão do primeiro momento da estatística da razão de verossimilhança da raiz unitária de um $AR(1)$, concluindo que a correção possivelmente melhora qualitativamente a distribuição aproximada. Usando o modelo anterior, Larsson (1995) obtém analítica-

mente o primeiro momento da estatística da razão de verossimilhança da raiz unitária e testes assintoticamente equivalentes, concluindo com base nos resultados das simulações a utilidade de fazer correções para dois dos três testes considerados. Extensões a modelos auto-regressivos de alta ordem são discutidos em Larsson (1994, 1998b).

Procedimento de cálculo

A idéia de Bartlett (1937) é simples, mas obter fórmulas explícitas, fechadas e simples para $E(RV)$, torna-se difícil na medida em que os modelos e suposições são mais gerais. Dentre os procedimentos para obter o primeiro momento de RV sob H , os mais usados são:

- Lawley (1956),
- McCullagh e Cox (1986) e
- Cordeiro (1993).

O procedimento que utilizamos aqui é o de Lawley. E para escrever as correções de forma matricial usamos o resultado de Cordeiro.

Método de Lawley

Considere o problema da Seção 2.2.1 e a notação da Seção 2.2.2 para introduzir as notações adicionais adotadas nos desenvolvimentos algébricos da correção de Bartlett:

$$U_i = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_i}, \quad U_{ij} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \text{ etc,}$$

e para os cumulantes conjuntos de derivadas de $l(\beta)$: $\kappa_{ij} = E(U_{ij})$, $\kappa_{ijk} = E(U_{ijk})$, $\kappa_{ijkl} = E(U_{ijkl})$, $\kappa_{i,j} = E(U_i U_j)$, $\kappa_{i,jk} = E(U_i U_{jk})$, $\kappa_{i,jkl} = E(U_i U_{jkl})$, $\kappa_{ij,kl} = E(U_{ij} U_{kl}) - \kappa_{ij} \kappa_{kl}$, $\kappa_{i,j,kl} = E(U_i U_j U_{kl}) - \kappa_{i,j} \kappa_{kl}$, e $\kappa_{i,j,k,l} = E(U_i U_j U_k U_l) - \kappa_{i,j} \kappa_{k,l} - 3\kappa_{i,j,k} \kappa_{l} - 3\kappa_{i,j,l} \kappa_{k} - 3\kappa_{i,k,l} \kappa_{j} - 3\kappa_{i,l,k} \kappa_{j} - 3\kappa_{j,k,l} \kappa_{i} - 3\kappa_{j,l,k} \kappa_{i} - 3\kappa_{k,l,i} \kappa_{j} - 3\kappa_{k,i,l} \kappa_{j} - 3\kappa_{l,i,k} \kappa_{j} - 3\kappa_{l,k,i} \kappa_{j}$, onde $\kappa_{i,j} \kappa_{kl} [3] =$

$\kappa_{i,j}\kappa_{k,l} + \kappa_{i,k}\kappa_{j,l} + \kappa_{i,l}\kappa_{k,j}$. Para as derivadas dos cumulantes, usamos a notação

$$\kappa_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \beta_k}, \quad \kappa_{ij}^{(kl)} = \frac{\partial^2 \kappa_{ij}}{\partial \beta_k \partial \beta_l}, \quad \kappa_{ijk}^{(l)} = \frac{\partial \kappa_{ijk}}{\partial \beta_l}, \text{ etc.}$$

Todos os κ 's referem-se a um total sobre a amostra e são, em geral, de ordem n . Os sufixos na notação acima variam pelos inteiros $1, \dots, r$. A matriz de informação total de Fisher para β tem elementos $\kappa_{i,j} = -\kappa_{ij}$, e a correspondente inversa tem elementos $\kappa^{i,j} = -\kappa^{ij}$. Os cumulantes satisfazem certas relações (Lawley, 1956), denominadas identidades de Bartlett, que freqüentemente facilitam seus cálculos, tais como, $\kappa_{i,j} = -\kappa_{ij}$, $\kappa_{ij}^{(k)} + \kappa_{i,j,k} + \kappa_{i,jk} + \kappa_{j,ik} = 0$, $\kappa_{ijk}^{(l)} = \kappa_{ijkl} + \kappa_{l,ijk}$, $\kappa_{i,j,k} = -\kappa_{ijk} - \sum_{(3)} \kappa_{i,jk}$, $\kappa_{i,j,k,l} = -3\kappa_{ijkl} + 2 \sum_{(4)} \kappa_{ijk}^{(l)} - \sum_{(6)} \kappa_{ij}^{(kl)} + \sum_{(3)} \kappa_{ij,kl}$ e $\kappa_{i,j,kl} = \kappa_{ijkl} - 2\kappa_{ikl}^{(j)} + \kappa_{kl}^{(ij)} - \kappa_{ij,kl}$, onde $\sum_{(k)}$ é a soma sobre todas as k permutações dos índices. A estatística da razão de verossimilhança RV , em (2.2), pode ser escrita como

$$RV = 2\{[l(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) - l(\beta_1^{(0)}, \beta_2)] - [l(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2) - l(\beta_1^{(0)}, \beta_2)]\},$$

onde $(\beta_1^{(0)\top}, \beta_2^\top)$ é o vetor de parâmetros verdadeiros, segundo a hipótese nula H . Lawley (1956) mostrou que

$$2E\{l(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) - l(\beta_1^{(0)}, \beta_2)\} = r + \varepsilon_r + O(n^{-2}), \quad (2.7)$$

sendo o termo ε_r , de ordem n^{-1} , é obtido por

$$\varepsilon_r = \Sigma'(l_{ijkl} - l_{ijklmn}), \quad (2.8)$$

e Σ' é o somatório sobre todos os componentes do vetor β , isto é, os índices i, j, k, l, m e n variam sobre os r parâmetros, e os l 's têm as seguintes expressões:

$$l_{ijkl} = \kappa^{ij}\kappa^{kl}\{\kappa_{ijkl}/4 - \kappa_{ijk}^{(l)} + \kappa_{ij}^{(kl)}\},$$

$$l_{ijklmn} = \kappa^{ij}\kappa^{kl}\kappa^{mn}\{\kappa_{ikm}(\kappa_{jln}/6 - \kappa_{jn}^{(l)}) + \kappa_{ikl}(\kappa_{jmn}/4 - \kappa_{jn}^{(m)}) + \kappa_{ik}^{(m)}\kappa_{jn}^{(l)} + \kappa_{ik}^{(l)}\kappa_{jn}^{(m)}\}.$$

Segundo os resultados de Lawley (1956), o valor esperado de $2\{l(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2) - l(\beta_1^{(0)}, \beta_2)\}$ segue expressão análoga àquela em (2.7), isto é,

$$2E\{l(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2) - l(\beta_1^{(0)}, \beta_2)\} = r - s + \varepsilon_{r-s} + O(n^{-2}). \quad (2.9)$$

Logo, de (2.7) e (2.9), sob a hipótese nula H , segue que

$$E(RV) = s + \varepsilon_r - \varepsilon_{r-s} + O(n^{-2}),$$

com ε_r dado pela expressão (2.8) e

$$\varepsilon_{r-s} = \Sigma''(l_{ijkl} - l_{ijklmn})$$

onde Σ'' denota o somatório sobre todos os componentes do vetor de parâmetros de incômodo β_2 , isto é, sobre os $r - s$ parâmetros, $\beta_{s+1}, \dots, \beta_r$. A partir daí, a estatística da razão de verossimilhança corrigida RV^* é definida da seguinte forma:

$$RV^* = \mathbf{c}^{-1}RV, \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{c}$ é o fator de correção de Bartlett determinado por $\mathbf{c} = s^{-1}E(RV)$, com $E(RV)$ avaliado até ordem n^{-1} . Assim, a estatística RV^* tem distribuição χ_s^2 até ordem n^{-1} sob H , ou seja, $P_H(RV^* \leq w) = P(\chi_s^2 \leq w) + O(n^{-2})$ e o fator $\mathbf{c}$ é calculado por

$$\mathbf{c} = c(\beta) = 1 + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{r-s}}{s}. \quad (2.11)$$

A dificuldade do aperfeiçoamento reside no cálculo das quantidades ε_r e ε_{r-s} . Para ter uma estimativa do valor de $\mathbf{c}$, uma forma é calculá-la pelo valor $\tilde{\mathbf{c}} = c(\tilde{\beta})$, não modificando a ordem da aproximação, ou seja $P(\tilde{\mathbf{c}}^{-1}RV \leq w) = P(\chi_s^2 \leq w) + O(n^{-2})$ (Lawley, 1956).

Observação Se β_1 for ortogonal a β_2 ocorrem algumas simplificações tornando as expressões mais simples.

2.3.2 Correção tipo-Bartlet para a estatística escore

Introdução

Obter uma correção para a estatística escore de forma como foi conseguida para a estatística da razão de verossimilhança através da multiplicação por um fator escalar

não é possível (Harris, 1985, 1987; Cox, 1988; Barndorff-Nielsen, 1990). Um exemplo a mais da impossibilidade de encontrar um fator multiplicativo que corrige a estatística escore é encontrado em Taniguchi (1991). Pela dificuldade de achar uma correção de forma simples, Harris (1985) obtém uma transformação para o valor crítico obtido da distribuição de referência para um nível nominal fixado. Uma solução do problema de encontrar um fator de correção multiplicativo foi proposta por Cordeiro e Ferrari (1991), mostrando a existência de um fator de correção, chamado correção tipo-Bartlett de modo que a estatística corrigida, S^* , conseguida pela multiplicação de S pelo fator, tem distribuição χ_s^2 , até ordem n^{-1} sob a hipótese nula H dada em (2.1). Há muitas pesquisas sobre as correções dessa estatística e suas propriedades, cujas referências podem ser obtidas, por exemplo em Botter (1993), Aubin (1995) e Uribe (1997). Uma extensão da correção obtida por Cordeiro e Ferrari (1991) é dada por Kakizawa (1997). Uma das desvantagens desse tipo de correção é que ela não é monótona, isto é, se S cresce não implica que S^* cresce, o que tem motivado trabalhos que possam eliminar essa característica. Kakizawa (1996), supondo que, sob a hipótese nula, a função de distribuição da estatística escore S tenha uma expansão assintótica em termos da distribuição qui-quadrado, encontra uma transformação monótona $T(x)$ tal que $T(S)$ tem uma distribuição qui-quadrado até ordem n^{-k} , k sendo o número de termos considerados na expansão. Aplicou essa técnica a um caso especial da estatística T^2 de Hottelling e por meio de um estudo de simulação conclui que sua transformação funciona bem. O método de cálculo da correção para S a ser utilizado aqui é o proposto por Cordeiro e Ferrari (1991), que no Capítulo 4 será escrito de forma matricial.

Procedimento de cálculo

Consideremos o problema de testar as hipóteses dadas em (2.1), com as notações e condições de regularidades mencionadas na seção anterior. Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{-1} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{A}, \quad (2.12)$$

onde K_{22}^{-1} é a matriz de covariância assintótica de $\tilde{\beta}_2$. As expressões que determinam os coeficientes envolvidos na expansão de Edgeworth da distribuição nula da estatística escore, encontrada por Harris (1985), são dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 = & 3 \sum' (\kappa_{ijk} + 2\kappa_{i,jk})(\kappa_{rst} + 2\kappa_{r,s,t})a_{ij}a_{st}m_{rk} \\ & - 6 \sum' (\kappa_{ijk} + 2\kappa_{i,jk})\kappa_{r,s,t}a_{ij}a_{kr}m_{st} \\ & + 6 \sum' (\kappa_{i,jk} - \kappa_{i,j,k})(\kappa_{rst} + 2\kappa_{r,s,t})a_{js}a_{kt}m_{ir} \\ & - 6 \sum' (\kappa_{i,j,k,r} + \kappa_{i,j,kr})a_{kr}m_{ij}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & -3 \sum' \kappa_{i,j,k}\kappa_{r,s,t}a_{kr}m_{ij}m_{st} + 6 \sum' (\kappa_{ijk} + 2\kappa_{i,jk})\kappa_{r,s,t}a_{ij}m_{kr}m_{st} \\ & - 6 \sum' \kappa_{i,j,k}\kappa_{r,s,t}a_{kt}m_{ir}m_{js} + 3 \sum' \kappa_{i,j,k,r}m_{ij}m_{kr}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

e

$$A_3 = 3 \sum' \kappa_{i,j,k}\kappa_{r,s,t}m_{ij}m_{kr}m_{st} + 2 \sum' \kappa_{i,j,k}\kappa_{r,s,t}m_{ir}m_{js}m_{kt}, \quad (2.15)$$

onde a_{ij} e m_{ij} são os elementos (i, j) das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{M}$, respectivamente, dadas em (2.12). A estatística escore modificada encontrada por Cordeiro e Ferrari (1991) é calculada por

$$S^* = S\{1 - (c + bS + aS^2)\}, \quad (2.16)$$

onde o fator que multiplica S é um tipo de correção de Bartlett, como função da própria estatística e os coeficientes a, b , e c , de ordem n^{-1} , são dados por

$$\begin{aligned} a &= \frac{A_3}{12s(s+2)(s+4)}, \\ b &= \frac{A_2 - 2A_3}{12s(s+2)}, \\ c &= \frac{A_1 - A_2 + A_3}{12s}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Então, a estatística S^* é distribuída segundo uma χ_s^2 quando termos de ordem menor que n^{-1} são desprezados. No caso em que o cálculo dos A 's envolve parâmetros desconhecidos, estimativas são dadas por $\tilde{A} = A(\tilde{\beta})$, $\tilde{\beta}$ sendo o estimador de máxima verossimilhança de β sob H , sem que se afete a ordem da aproximação.

Capítulo 3

Modelos ARMA

3.1 Introdução

Na modelagem de algum processo, que pode representar algum fenômeno físico, uma das restrições é a parcimônia (simplicidade, praticabilidade) do modelo proposto. O ideal é que o conceito de linearidade usado na formulação do modelo, condição nem sempre compartilhada com a outra restrição fundamental imposta na modelagem, a saber, a descrição mais “próxima possível” da realidade do processo a modelar, esteja sempre presente. Isso conduz a um importante conceito, o de regressão linear, que pode ser descrito como o relacionamento entre um “impulso” e uma “resposta” de maneira linear nos parâmetros. Fixando como índice o tempo cronológico, Yule (1921) e Slutsky (1927) introduziram o modelo de regressão linear para uma variável de interesse como função de valores passados do ruído, devido a muitos fatores desconhecidos, caracterizando os modelos de médias móveis (*MA*); Yule (1927) introduziu o modelo de regressão linear da variável de interesse como função de seus valores passados caracterizando os modelos auto-regressivos. Um modelo misto caracterizando os modelos auto-regressivos e de médias móveis, denominado modelo *ARMA*, foi introduzido por Walker (1950). Mais referências históricas dos avanços destas técnicas e aplicações encontram-se na Seção 1.6 de Choi

(1993). Uma referência importante destas técnicas é Box, Jenkins e Reinsel (1994), por ter conseguido sistematizar os procedimentos para modelar e analisar dados dependentes por uma estrutura de autocovariâncias e na forma da observação. A modelagem proposta é feita ciclicamente em três passos: identificação, estimação e diagnóstico do modelo. Para técnicas de identificação do modelo ver, por exemplo, Choi (1993). Neste trabalho estaremos interessados em estimar um modelo já identificado, ou seja, o número de termos auto-regressivos e de médias móveis p e q , respectivamente, são especificados.

3.2 O modelo

Considere um conjunto $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ de n observações que seguem um modelo $ARMA(p, q)$, isto é,

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)Y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)a_t, \quad (3.1)$$

onde $B^k Y_t = Y_{t-k}$ e os a_t 's são elementos de uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas de média zero e variância $\sigma^2 > 0$. A sequência $\{a_t\}$ é chamada ruído branco ou processo de inovação. Em geral, supõe-se que os a_t 's sejam independentes. Como neste trabalho consideramos o ruído branco distribuído normalmente, não correlação implica independência. Modelos onde a sequência é não-normal encontram-se na Seção 1.6 de Choi (1993) e um exemplo específico é dado em Tong (1990, pág. 13). Assumimos que o vetor de parâmetros $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2)^\top$, r -dimensional, onde $r = p + q + 1$, não tem uma forma funcional específica e é constante com o tempo t . Para a situação em que isto não ocorre, pode-se consultar Hallin (1984, 1986). Assumimos, também, que o modelo é estacionário e invertível, no sentido de Box, Jenkins e Reinsel (1994), isto é, os polinômios em $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \text{ e} \\ \theta(z) &= 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q \end{aligned} \quad (3.2)$$

têm suas raízes fora do círculo unitário ($|z| > 1$) e que os polinômios não têm raízes comuns. As condições de estacionariedade e invertibilidade do modelo implicam na apli-

cação da teoria assintótica (Brockwell e Davis, 1991: Seção 8.8), na unicidade do modelo (Box, Jenkins e Reinsel, 1994) e na estimação de funções dependentes dos parâmetros (Nelson, 1973: pág. 22). Dentre os resultados que têm fomentado o uso destes modelos é o encontrado por Doob (1953: págs. 498-506) obtendo uma relação entre um processo estacionário e um *ARMA*: um processo estacionário pode ser aproximado por um processo *ARMA* conveniente e o encontrado por Akaike (1974): uma série de tempo gaussiana tem uma representação num *ARMA* estacionário gaussiano. Sérias limitações nas aplicações práticas dos modelos de séries de tempo lineares gaussianos foram apresentadas por Akaike, Cox, Galbraith e Tunnicliff-Wilson nas discussões dos trabalhos de Campbell e Walker (1977) e Tong (1977).

3.3 Função de autocovariância

Uma das ferramentas importantes na análise de séries temporais lineares estacionárias é aquela que captura uma das características da distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias, a função de autocovariância. Denotaremos a série temporal que segue o processo *ARMA*(p, q) por Y_t . Apresentamos a seguir alguns resultados e definições que utilizaremos no decorrer deste e dos outros capítulos.

Definição 3.1 (A função de Autocovariância). Seja a série temporal Y_t , tal que $Var(Y_t) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, então a função de autocovariância, $\gamma(\cdot, \cdot)$ de Y_t é definida por

$$\gamma(r, s) = Cov(Y_r, Y_s) = E[(Y_r - EY_r)(Y_s - EY_s)], \quad r, s \in \mathbb{Z}.$$

Definição 3.2 (Estacionariedade). A série temporal Y_t se diz estacionária se

- (i) $E|Y_t^2| < \infty$ para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- (ii) EY_t é constante para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $\gamma(r, s) = \gamma(|r - s|)$ para todo $r, s \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.1 (Autocovariância de um $MA(1)$). A função de autocovariância do modelo $MA(1)$ dado por

$$Y_t = a_t - \theta a_{t-1}, \quad a_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.3)$$

com $|\theta| < 1$ (condição de invertibilidade), é dada por

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2, & \text{se } h = 0 \\ -\theta\sigma^2, & \text{se } h = \pm 1 \\ 0, & \text{se } |h| > 1 \end{cases}$$

Exemplo 3.2 (Autocovariância de um $AR(1)$). A função de autocovariância do modelo $AR(1)$ dado por

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = a_t, \quad a_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.4)$$

com $|\phi| < 1$ (condição de estacionariedade), é dada por

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2/(1 - \phi^2), & \text{se } h = 0 \\ \phi^h \sigma^2/(1 - \phi^2), & \text{se } |h| \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 3.3 (Autocovariância de um $ARMA(1,1)$). A função de autocovariância do modelo $ARMA(1,1)$ dado por

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}, \quad a_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.5)$$

com $|\phi| < 1$ (condição de estacionariedade), $|\theta| < 1$ (condição de invertibilidade), é dada por

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma^2, & \text{se } h = 0 \\ \frac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1-\phi^2}\sigma^2, & \text{se } h = \pm 1 \\ \phi\gamma(h-1), & \text{se } |h| > 1 \end{cases}$$

A demonstração e os detalhes dos resultados apresentados nos Exemplos 3.1-3.3 não apresentamos aqui, mas podem ser encontrados em Box, Jenkins e Reinsel (1994, Cap. 3) e Brockwell e Davis (1991, Seção. 3.3).

Teorema 3.1 Seja $\{Y_t\}$ um processo $ARMA(p, q)$, não necessariamente estacionário e invertível, definido pelo modelo (3.1). Então, $\{Y_t\}$ tem densidade espectral

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\sum_{j=0}^q \theta_j e^{ij\lambda}|^2}{2\pi |\sum_{j=0}^p \phi_j e^{ij\lambda}|^2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.6)$$

Prova: Veja Brockwell e Davis (1991, Teorema 4.4.2).

Exemplo 3.4 (Densidade espectral de um $MA(1)$). Um modelo $MA(1)$ tem espectro dado por

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - \theta e^{-i\lambda}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\theta \cos \lambda + \theta^2), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.7)$$

O gráfico da densidade espectral de um modelo $MA(1)$ com $\sigma^2 = 1$ e $\theta = 0,9$ é mostrado na Figura 1 e para $\theta = -0,9$ é mostrado na Figura 2.

Figura 1: Densidade espectral de um $MA(1)$ com $\sigma^2 = 1$ e $\theta = 0,9$

Figura 2: Densidade espectral de um $MA(1)$ com $\sigma^2 = 1$ e $\theta = -0,9$

Exemplo 3.5 (Densidade espectral de um $AR(1)$). Um modelo $AR(1)$ tem espectro dado por

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - \phi e^{-i\lambda}|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2)^{-1}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.8)$$

O gráfico da densidade espectral de um $AR(1)$ com $\sigma^2 = 4$ e $\phi = 0,3$ é mostrado na Figura 3 e para $\phi = -0,3$ é mostrado na Figura 4.

Figura 3: Densidade espectral de um $AR(1)$ com $\sigma^2 = 4$ e $\phi = 0,3$

Figura 4: Densidade espectral de um $AR(1)$ com $\sigma^2 = 4$ e $\phi = -0,3$

Exemplo 3.6 (Densidade espectral de um $ARMA(1,1)$). Um modelo $ARMA(1,1)$ tem espectro dado por

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2 |1 - \theta e^{-i\lambda}|^2}{2\pi |1 - \phi e^{-i\lambda}|^2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.9)$$

3.4 Estimação por máxima verossimilhança

3.4.1 Introdução

Como sabemos, o método de estimação por máxima verossimilhança tem boas propriedades: consistência, distribuição assintoticamente normal, invariância sob uma transformação linear e eficiência. Outros métodos também têm algumas dessas propriedades, como por exemplo, o método dos momentos, mas não a eficiência (Brokwell e Davis, 1991, Seç. 8.8-8.10). Uma prova rigorosa sobre a eficiência do estimador de máxima verossimilhança do parâmetro auto-regressivo de um modelo $AR(1)$ é dada em Mikulski e Monsour (1991). Os enfoques que se usam para obter estimadores de máxima verossimilhança “exatos” são, no domínio do tempo, os trabalhos de Newbold (1974), que é revisado na Seção 3.4.3 e o de Miller (1995). Entre os procedimentos numéricos mencionamos os de Brockwell e Davis (1991), os quais são usados nas simulações do Capítulo 5 e o de Shephard (1997). Para procedimento no domínio da frequência, veja, Nerlove et al. (1979)

e Pham (1987). Condições de regularidade para a função de verossimilhança $L(\beta)$ do modelo $ARMA(p, q)$, dado na expressão (3.1), de maneira a garantir a existência e unicidade das estimativas de máxima verossimilhança (EMV) de β são dadas em Anderson e Mentz (1980). Nesse trabalho são supostas as condições de regularidades necessárias para garantir existência e unicidade dos estimadores de máxima verossimilhança de β . O método de máxima verossimilhança geralmente fornece estimadores viesados, problema que se acentua mais quando o tamanho da amostra n é pequeno, que é o caso considerado neste trabalho. Usualmente, o viés é ignorado quando comparado com o erro padrão das estimativas e quando o tamanho da série n é muito grande. Resultados para os vieses dos estimadores são necessários quando n é pequeno, sendo apresentados na Seção 3.6 para os modelos $AR(1)$, $MA(1)$ e $AR(2)$; no caso de um modelo $ARMA(1, 1)$ estes são calculados e apresentados no Comentário 4.5.

3.4.2 Função de verossimilhança

A log-verossimilhança de β , dado o vetor de observação $\mathbf{Y}$ n -dimensional modelado por um $ARMA(p, q)$ de média nula é

$$l(\beta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(|\Sigma|) - \frac{1}{2}\mathbf{Y}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{Y}, \quad (3.10)$$

onde Σ é a matriz de autocovariâncias, não-singular, de $\mathbf{Y}$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)^\top$ é o vetor de parâmetros desconhecidos. Algumas considerações sobre a função $l(\beta)$ em (3.10) são necessárias com relação ao seu cálculo. Primeiro, lembremos que cada variável Y_t depende tanto dos Y 's anteriores até uma defasagem conveniente, como dos ruídos a_t 's, que não são observáveis, mas fundamentais na modelagem. Isso faz com que em geral a forma quadrática $\mathbf{Q} = \mathbf{Y}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{Y}$ e o determinante $|\Sigma|$ sejam funções muito complexas. Mesmo nos casos mais simples, a forma quadrática $\mathbf{Q}$ deixa de ser uma função quadrática dos parâmetros de interesse. Para maximizar $l(\beta)$, temos, em geral, que aplicar métodos de otimização numérica (Everitt, 1987). Em segundo lugar, também são importantes na obtenção do máximo de $l(\beta)$ por otimização numérica, os valores iniciais. Na literatura,

há duas maneiras de enfrentar essa dificuldade, para EMV razoavelmente próximas do verdadeiro valor do parâmetro β . Uma dessas maneiras é aproximar a log-verossimilhança “exata” $l(\beta)$ de tal forma que o procedimento iterativo de maximização utilizado seja um algoritmo flexível e computacionalmente possível. Trabalhos que usam esse procedimento são os de Box, Jenkins e Reinsel (1994, Cap. 7) e McLeod (1977), chegando à conclusão que essas aproximações não são apropriadas para modelos $ARMA$ com um número de parâmetros para a parte de médias móveis maior que zero e para séries curtas. McLeod (1977) deriva um procedimento de máxima verossimilhança aproximado, que é quase exato, chamando-o de algoritmo de somas de quadrados modificado. Além disso, fornece estimativas dos parâmetros que são muito próximas dos verdadeiros parâmetros, afirmando que nos casos de um modelo com parâmetros MA e séries curtas, sem considerar vizinhanças da região onde os parâmetros produzem um modelo não-estacionário ou não-invertível, esse enfoque produz um algoritmo computacionalmente eficiente.

3.4.3 Verossimilhança exata

Com vistas a não perder informação, um procedimento é escrever a log-verossimilhança exata $l(\beta)$ de maneira a obter algoritmos computacionalmente eficientes (de fato as estimativas serão melhores em comparação ao procedimento que usa uma aproximação da log-verossimilhança, independentemente da dificuldade para implementá-lo) para maximizar $l(\beta)$.

Procedimento de Newbold

Um dos procedimentos para atingir o objetivo acima é mostrar a forma exata de dependência dos parâmetros na forma quadrática $\mathbf{Q}$ e no determinante $|\Sigma|$. A partir das suposições impostas ao modelo, aplica-se um procedimento iterativo para conseguir a maximização. Newbold (1974), seguindo o trabalho de Box e Jenkins (1970) para um

$ARMA(p, q)$ consegue escrever $l(\beta)$, na forma geral

$$l(\phi, \theta, \sigma^2) = g_1(\phi, \theta, \sigma^2) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} S(\phi, \theta) \right\}, \quad (3.11)$$

e

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1-p-q}^n E^2(u_t | \mathbf{Y}), \quad (3.12)$$

com $E(u_t | \mathbf{Y}) = E(u_t | \mathbf{Y}, \phi, \theta, \sigma^2)$ e

$$u_t = \begin{cases} a_t, & t = 1, \dots, n \\ g_2(\mathbf{a}_*, \mathbf{Y}_*), & t \leq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

onde g_2 é uma função linear dos valores iniciais não observados $\mathbf{a}_* = (a_{1-q}, \dots, a_0)^\top$ e $\mathbf{Y}_* = (Y_{1-p}, \dots, Y_0)^\top$, necessários para cálculo da expressão (3.11). As funções g_1 e g_2 dependem do modelo adotado para representar os dados. Expressões explícitas de $l(\beta)$ para os modelos $AR(1)$, $MA(1)$ e $ARMA(1, 1)$ são desenvolvidas em Abraham e Ledolter (1983).

Procedimento de Brockwell e Davis

Um outro procedimento para conseguir escrever a função de verossimilhança $L(\beta)$ de maneira exata e que possa ser calculada na prática, é dado por Brockwell e Davis (1991, Seção. 8.6), usando as previsões a um passo de Y_t , $\hat{Y}_t$, seu erro quadrático médio, $E(Y_t - \hat{Y}_t)^2 = v_{t-1}$ e o algoritmo de inovação. A verossimilhança pode ser escrita como

$$L(\phi, \theta, \sigma^2 | \mathbf{Y}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} (v_0 \dots v_n)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{v_{j-1}} \right\}, \quad (3.14)$$

que será usada na estimação de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros β .

3.4.4 Outros procedimentos

Outros procedimentos para escrever a função de verossimilhança exata são os considerados por Ansley (1979), e o interessante enfoque que usa o Filtro de Kalmam (Mélard,

1984). Veja Choi (1993, Seção 1.6), para outras referências. Estritamente, a expressão (3.10) não é o logaritmo da função de verossimilhança para β do modelo (3.1) por ter ignorado as condições dos valores pré-amostrais da série $\{Y_t\}$ (Nerlove et al., 1979, pág. 123). Mas a expressão torna-se adequada para tratar a função de verossimilhança do modelo *ARMA* gaussiano como membro da família exponencial curvada (Efron, 1975), com o que é possível o estudo para esses modelos (Ravishanker et al., 1990 e van Garderen, 1999).

3.5 Cálculo e maximização da verossimilhança

Foi mencionado que o cálculo da verossimilhança é muito complicado, portanto a sua maximização também o é (Choi, 1993). Contribuições significativas para dar solução a esse problema surgiram a partir dos anos 80. Segundo o método de Newbold (1974), a complicação está no cálculo das esperanças iniciais envolvidas na expressão (3.12). Para Brockwell e Davis (1991) está no tedioso cálculo do determinante $|\Sigma|$ e da inversa da matriz de autocovariâncias Σ^{-1} , no procedimento iterativo da expressão (3.14). Podemos mencionar que devido ao grande avanço atual na área da ciência de computação, os problemas com o tempo consumido na maximização de uma função ficam solucionados, desde que a estrutura da covariância, Σ , seja conhecida e relativamente simples na dependência do vetor de parâmetros β . Os cálculos do Capítulo 5 foram feitos usando o procedimento de Brockwell e Davis.

3.5.1 Cálculo das esperanças condicionais iniciais

Existem dois métodos para calcular as esperanças condicionais $E(u_t|\mathbf{Y})$, $t \leq 0$: o método dos mínimos quadrados e o “backforecasting”. Prova-se que

$$E(\mathbf{U}_*|\mathbf{Y}) = \hat{\mathbf{U}}_*,$$

onde $\hat{\mathbf{U}}_*$ é o estimador de mínimos quadrados de $\mathbf{U}_*$ em

$$\mathbf{LY} = -\mathbf{ZU}_* + \mathbf{U},$$

onde $\mathbf{L}$ e $\mathbf{Z}$ são matrizes de formas conhecidas de ordem $(n + p + q) \times n$ e $(n + p + q) \times (p + q)$, respectivamente, dependentes dos parâmetros $\phi_1, \dots, \phi_p$ e $\theta_1, \dots, \theta_q$, $\mathbf{U}_* = (u_{1-p-q}, \dots, u_{-1}, u_0)^\top$ com os u 's dados em (3.13) e $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_*^\top | \mathbf{U}_n^\top)^\top$, com $\mathbf{U}_n = (u_1, \dots, u_n)^\top$. No caso dos modelos $AR(1)$, $MA(1)$ e $ARMA(1, 1)$ essas matrizes são dadas no Apêndice 5 de Abraham e Ledolter (1983). Com isso e dados os parâmetros $\phi_1, \dots, \phi_p$ e $\theta_1, \dots, \theta_q$ e a série observada $\mathbf{Y}$, um valor estimado para $\mathbf{U}_*$, $\hat{\mathbf{U}}_*$ é

$$\hat{\mathbf{U}}_* = \hat{E}(u_t | \mathbf{Y}) = -(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{LY}.$$

3.5.2 Algoritmo de inovação

Considere os elementos da matriz das autocovariâncias de $\mathbf{Y}$, denotados por $\kappa(i, j)$ (caso estacionário), $i, j = 1, \dots, n$, para os preditores a um passo, $\hat{Y}_t$, $t \geq 0$, e seu erro quadrático médio v_t , $t \geq 1$, dados por

$$\hat{Y}_{t+1} = \begin{cases} 0 & , t=0, \\ \sum_{j=1}^t \theta_{tj} (Y_{t+1-j} - \hat{Y}_{t+1-j}) & , t \geq 1, \end{cases}$$

com

$$\begin{aligned} v_0 &= \kappa(1, 1), \\ \theta_{t, t-k} &= v_k^{-1} \left(\kappa(t+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k, k-j} \theta_{t, t-j} v_j \right), k = 0, 1, \dots, t-1, \\ v_t &= \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{t-1} \theta_{t, t-j}^2 v_j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dessa maneira obtêm-se v_0 ; θ_{11} , v_1 ; θ_{22} , θ_{21} , v_2 ; θ_{33} , θ_{32} , θ_{31} , v_3 , etc. A prova desse procedimento encontra-se em Brockwell e Davis (1991, Seção 5.2). O algoritmo de inovação pode ser aplicado diretamente a um processo $ARMA(p, q)$, resultando:

$$\hat{Y}_{t+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^t \theta_{tj} (Y_{t+1-j} - \hat{Y}_{t+1-j}), & 1 \leq t \leq m \\ \phi_1 Y_1 + \dots + \phi_p Y_{t+1-p} + \sum_{j=1}^q \theta_{tj} (Y_{t+1-j} - \hat{Y}_{t+1-j}), & t \geq m \end{cases} \quad (3.16)$$

onde θ_{tj} e v_t estão dados em (3.15) e m é igual ao valor máximo dos elementos p e q . Se W_t for o processo transformado (Ansley, 1979) dado por

$$W_t = \begin{cases} \sigma^{-1}Y_t, & t = 1, \dots, m, \\ \sigma^{-1}\phi(B)Y_t, & t \geq m, \end{cases} \quad (3.17)$$

então definimos a função de autocovância $\gamma_W(i, j)$

$$\gamma_W(i-j) = \begin{cases} \sigma^{-2}\gamma_Y(i-j), & 1 \leq i, j \leq m \\ \sigma^{-2}[\gamma_Y(i-j) - \sum_{r=1}^p \phi_r \gamma_Y(r - |i-j|)], & \min(i, j) \leq m < \max(i, j) \leq 2m \\ \sum_{r=0}^q \theta_r \theta_{r+|i-j|}, & \min(i, j) > m \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.18)$$

3.5.3 Outras observações

As dificuldades na maximização da verossimilhança não só são conseqüências do que vimos acima, mas também são devidas aos métodos iterativos de otimização não-lineares usados, como, por exemplo, a forte dependência do valor inicial do algoritmo e a complicada implementação dos métodos de otimização com restrições gerais (Fletcher, 1987). No caso da $l(\beta)$ considerada, a maximização é sujeita a alguma restrição sobre β , do tipo β pertencer a um espaço paramétrico, Θ , com $\Theta \subset \mathbb{R}^r$, r a dimensão do vetor β , definido pelas condições que definem o modelo considerado. As condições nos parâmetros dos modelos considerados, dadas nos Exemplos 3.1, 3.2 e 3.3, definem uma transformação nos parâmetros, de maneira que em cada iteração seja garantida a estacionariedade e invertibilidade do modelo. Por exemplo, considerando-se o modelo $AR(1)$, isto significa, fazer uma reparametrização em $l(\beta)$, $\beta = (\phi, \sigma^2)^\top$, em termos de um outro vetor de parâmetros, $\zeta = (\psi, \xi)^\top$, tal que $\beta = h(\zeta)$, com

$$\phi = h_1(\psi) = \frac{\psi}{1 + |\psi|}, \quad \sigma^2 = h_2(\xi) = \xi^2.$$

A partir daí usamos os procedimentos usuais de otimização irrestritas para maximizar a função $l(h(\zeta))$. Obtidas as EMV de ζ , $\hat{\zeta}$, que maximizam $l(h(\zeta))$, a EMV de β é dada

por $\hat{\beta} = h(\hat{\zeta})$. Um dos procedimentos para obter o valor inicial, que é muito usado não só no nosso caso e que na maioria dos problemas funciona bem, é o método dos momentos.

3.6 Vieses dos estimadores de máxima verossimilhança

Sabe-se que estimativas de máxima verossimilhança são viesadas, acentuando-se ainda mais essa diferença quando o tamanho da amostra é pequeno, o modelo é não identificável ou quando a matriz de informação de Fisher é singular. O viés geralmente é desprezível quando comparado com o erro padrão da estimativa. De fato, o viés em geral é de ordem n^{-1} , enquanto que o desvio padrão assintótico é de ordem $n^{-1/2}$. Para alguns modelos os termos que compõem o viés podem ser consideravelmente maiores que os correspondentes termos do desvio padrão, o que leva a obter fórmulas para calcular vieses de segunda ordem dos estimadores usados. Diversos trabalhos nesta linha têm aparecido, dentre eles destacamos o de Tanaka (1984), que sugere uma técnica para obter a expansão assintótica associada com a *EMV* e o de Cordeiro e Klein (1994), que apresentam um procedimento geral para obter o viés de modelos *ARMA* baseado em Cox e Snell (1968). Os resultados são apresentados nesta seção. Ambos os procedimentos são de difícil implementação, entretanto o último pode ser implementado de maneira mais simples, numericamente, usando uma linguagem que suporte álgebra linear numérica, tal como GAUSS, APL, Splus e Ox. Para facilitar o trabalho algébrico, é útil, também, usar os procedimentos numéricos numa linguagem computacional algébrica (Merckens e Wansbeek, 1989) como REDUCE (Hearn, 1984), MATHEMATICA (Wolfram, 1991) ou MAPLE (Abell e Braselton, 1994). Nós usamos os procedimentos do Capítulo 4 e o resultado de Cox e Snell, coincidindo com os resultados no caso da média conhecida igual a zero, que é colocado numa observação do Capítulo 4. Aubin (1995: Cap. 3) usa um modelo não linear gaussiano com matriz de variância-covariância desconhecida, e obtém os mesmos resultados que os de Cordeiro e Klein (1994), apresentando um estudo do bom desempenho das

correções pelo viés através de estudos de simulações.

Cox e Snell (1968) mostram que para observações independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas, o viés b_s da EMV $\hat{\beta}_s$ de β_s é dado por

$$b_s = E(\hat{\beta}_s - \beta_s) = \Sigma' \kappa^{si} \kappa^{jl} \{\kappa_{ijl}/2 + \kappa_{ij,l}\} + O(n^{-2}), \text{ para } s = 1, \dots, r, \quad (3.19)$$

com Σ' sendo o somatório sobre os r parâmetros $\beta_1, \dots, \beta_r$, $-\kappa^{ij}$ representa um elemento típico da inversa da matriz de informação de Fisher $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\kappa_{ij} \end{pmatrix}$ e os κ_{ijl} 's e $\kappa_{ij,l}$'s são dados na Seção 2.3.1. Cordeiro e Klein (1994) usando (3.19) escrevem b_s até ordem n^{-1} como

$$b_s = \Sigma_i \kappa^{si} \Sigma_{j,l} \kappa^{jl} \{\kappa_{ij}^l - \kappa_{ijl}/2\}, \text{ para } s = 1, \dots, r, \quad (3.20)$$

e usam esta fórmula para escrever os vieses das EMV dos parâmetros nos modelos $ARMA$. Nas aplicações, eles encontram:

1. Para o modelo $AR(1)$ dado por (3.4) estacionário

(a) Média conhecida:

$$b_\phi = E(\hat{\phi} - \phi) = \frac{-2\phi}{n}, \quad b_{\sigma^2} = E(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{-\sigma^2}{n};$$

(b) Média desconhecida:

$$b_\phi^* = E(\hat{\phi} - \phi) = -\frac{1 + 3\phi}{n}, \quad b_{\sigma^2}^* = E(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{-2\sigma^2}{n}.$$

2. Modelo $MA(1)$ invertível dado por (3.3)

(a) Média conhecida:

$$b_\theta = E(\hat{\theta} - \theta) = \frac{\theta}{n}, \quad b_{\sigma^2} = E(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{-\sigma^2}{n};$$

(b) Média desconhecida:

$$b_\theta^* = E(\hat{\theta} - \theta) = \frac{1 + 2\theta}{n}, \quad b_{\sigma^2}^* = E(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{-2\sigma^2}{n}.$$

3. Modelo $AR(2)$ estacionário dado por

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = a_t, \quad a_t \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.21)$$

com a condição de estacionariedade dada por

$$|\phi_2| < 1, \quad \phi_1 + \phi_2 < 1 \quad \text{e} \quad \phi_2 - \phi_1 < 1,$$

(a) Média conhecida:

$$b_{\phi_1} = -\frac{\phi_1}{n}, \quad b_{\phi_2} = -\frac{3\phi_2 + 1}{n} \quad \text{e} \quad b_{\sigma^2} = \frac{-\sigma^2}{n};$$

(b) Média desconhecida:

$$b_{\phi_1}^* = -\frac{1 + \phi_1 + \phi_2}{n}, \quad b_{\phi_2}^* = -\frac{2(1 + 2\phi_2)}{n} \quad \text{e} \quad b_{\sigma^2}^* = \frac{-3\sigma^2}{n}.$$

O resultado dos casos dos modelos $AR(1)$ e $MA(1)$ com médias conhecidas e iguais a zero coincidem com o encontrado por Ravishanker, Melnick e Tsai (1990). No caso particular proporcionam a transformação nos parâmetros para a qual o viés assintótico desaparece. Mentz, Morettin e Toloi (1998) obtêm o viés assintótico do estimador da variância residual, σ^2 , num $AR(p)$, p finito, de média desconhecida, segundo o método dos momentos e de mínimos quadrados. Comparam estes procedimentos com os obtidos por Shaman (1983). Um estudo de simulação é feito para os modelos $AR(1)$ e $AR(2)$ de média zero, comparando-os também com os resultados do método de máxima verossimilhança encontrados por Cordeiro e Klein (1994), utilizando séries de tamanho 50, 100, 200 e 400. Uma das conclusões é que para raízes do polinômio característico, definido em (3.2), perto da unidade, os resultados são pobres e a estimativa do viés pode diferir consideravelmente do valor teórico para séries curtas.

3.7 Cálculo das estatísticas testes

Nesta seção apresentamos o procedimento para calcular as estatísticas de testes da razão de verossimilhança (RV) e escore (S), tendo um modelo completamente especificado.

A estatística RV é expressa em função das estimativas de máxima verossimilhança, que não têm forma fechada, de modo que a sua expressão é geral. No caso mais simples $AR(1)$ deixa-se especificada a expressão para a estatística S . Nos outros casos é muito complicado fornecer essa expressão, pela dificuldade de se ter uma forma fechada para a função escore e para a matriz de informação de Fisher do vetor de parâmetros β .

3.7.1 Modelo auto-regressivo de ordem 1

Lembremos que o modelo auto-regressivo de primeira ordem, $AR(1)$, é dado por

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = a_t,$$

onde $|\phi| < 1$ e $\{a_t\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias normais de média zero e variância σ^2 (> 0). A função de verossimilhança é dada por

$$L(\phi, \sigma^2 | \mathbf{Y}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} (1 - \phi^2)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(1 - \phi^2)Y_1^2 + \sum_{j=2}^n (Y_j - \phi Y_{j-1})^2 \right] \right\},$$

O problema considerado é o de testar

$$H_i : \beta_i = \beta_i^{(0)} \quad vs \quad A : \beta_i \neq \beta_i^{(0)},$$

para $i=1$ e 2 .

A log-verossimilhança para o modelo $AR(1)$ é dada por

$$l(\phi, \sigma^2 | \mathbf{Y}) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2} \log(1 - \phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \left[(1 - \phi^2)Y_1^2 + \sum_{j=2}^n (Y_j - \phi Y_{j-1})^2 \right]. \quad (3.22)$$

(i) Expressões para RV

Para calcular a RV as seguintes expressões são necessárias.

(a) Interesse em ϕ .

Se o interesse é testar $H_1 : \phi = \phi^{(0)}$, onde $\phi^{(0)}$ é um valor fixado, a log-verossimilhança

sob H_1 e irrestrita são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\tilde{l} = l(\phi^{(0)}, \tilde{\sigma}^2) &= -\frac{n}{2}[\log 2\pi + \log \tilde{\sigma}^2] + \frac{1}{2}\log(1 - \phi^{(0)2}) \\ &\quad - \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2}[(1 - \phi^{(0)2})y_1^2 + \sum_{j=2}^n (y_j - \phi^{(0)}y_{j-1})^2],\end{aligned}\quad (3.23)$$

e

$$\begin{aligned}\hat{l} = l(\hat{\phi}, \hat{\sigma}^2) &= -\frac{n}{2}[\log 2\pi + \log \hat{\sigma}^2] + \frac{1}{2}\log(1 - \hat{\phi}^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}[(1 - \hat{\phi}^2)y_1^2 + \sum_{j=2}^n (y_j - \hat{\phi}y_{j-1})^2].\end{aligned}\quad (3.24)$$

A estatística RV é, então, obtida substituindo-se (3.23) e (3.24) em (2.2)

$$\begin{aligned}RV &= -n\log(\hat{\sigma}^2/\tilde{\sigma}^2) + \log\left((1 - \hat{\phi}^2)/(1 - \phi^{(0)2})\right) - \left[\frac{(1 - \hat{\phi}^2)}{2\hat{\sigma}^2} - \frac{(1 - \phi^{(0)2})}{2\tilde{\sigma}^2}\right]y_1^2 \\ &\quad - \left[\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{j=2}^n (y_j - \hat{\phi}y_{j-1})^2 - \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \sum_{j=2}^n (y_j - \phi^{(0)}y_{j-1})^2\right],\end{aligned}$$

(b) Interesse em σ^2 .

Se o interesse está em testar $H_2 : \sigma^2 = \sigma^{(0)2}$, onde $\sigma^{(0)2}$ é um valor fixado, a log-verossimilhança sob a hipótese nula H_2 é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{l} = l(\tilde{\phi}, \sigma^{(0)2}) &= -\frac{n}{2}[\log 2\pi + \log \sigma^{(0)2}] + \frac{1}{2}\log(1 - \tilde{\phi}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^{(0)2}}[(1 - \tilde{\phi}^2)y_1^2 + \sum_{j=2}^n (y_j - \tilde{\phi}y_{j-1})^2].\end{aligned}\quad (3.25)$$

Da mesma maneira que no caso anterior substituímos as expressões (3.24) e (3.25) em (2.2) para obtermos a estatística RV dada por (2.2). Observamos que não se consegue uma expressão simplificada em termos das EMV .

(ii) Expressões para S

Considerando a função escore total $U(\beta)$, particionada da mesma form que β , temos

$$U(\phi, \sigma^2) = (U_1(\phi, \sigma^2), U_2(\phi, \sigma^2))^T,$$

com

$$U_1(\phi, \sigma^2) = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \phi} = -\frac{\phi}{1-\phi^2} + \frac{\phi}{\sigma^2} y_1^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n y_{j-1} (y_j - \phi y_{j-1}),$$

$$U_2(\phi, \sigma^2) = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1-\phi^2}{2\sigma^4} y_1^2 + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{j=2}^n (y_j - \phi y_{j-1})^2.$$

Para se obter a matriz de informação de Fisher, $\mathbf{K}$, precisamos da matriz Hessiana de $l(\beta)$ e de sua esperança, sob o verdadeiro parâmetro (desconhecido), β :

$$U_{11}(\phi, \sigma^2) = -\frac{1+\phi^2}{(1-\phi^2)^2} + \frac{1}{\sigma^2} (y_1^2 + \sum_{j=2}^n y_{j-1}^2),$$

$$U_{12}(\phi, \sigma^2) = -\frac{\phi}{\sigma^4} y_1^2 - \frac{1}{\sigma^4} \sum_{j=2}^n y_{j-1} (y_j - \phi y_{j-1}),$$

$$U_{22}(\phi, \sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1-\phi^2}{\sigma^6} y_1^2 - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{j=2}^n (y_j - \phi y_{j-1})^2.$$

Tomando o valor esperado das quantidades acima, temos a matriz de informação de Fisher para o parâmetro $\beta = (\phi, \sigma^2)^\top$, dada por

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\phi^2} \left(\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} + n - 2 \right) & \frac{\phi}{\sigma^2(1-\phi^2)} \\ \frac{\phi}{\sigma^2(1-\phi^2)} & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

e para a inversa da matriz $\mathbf{K}$ temos,

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \begin{pmatrix} \frac{n}{2\sigma^4} & -\frac{\phi}{\sigma^2(1-\phi^2)} \\ -\frac{\phi}{\sigma^2(1-\phi^2)} & \frac{1}{1-\phi^2} \left(\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} + n - 2 \right) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

onde o determinante de $\mathbf{K}$ é

$$|\mathbf{K}| = \frac{n(1+\phi^2)}{2\sigma^4(1-\phi^2)^2} + \frac{n(n-2)}{2\sigma^4(1-\phi^2)} - \frac{\phi^2}{\sigma^4(1-\phi^2)^2}.$$

Para o cálculo da estatística escore S em (2.5), necessitamos das matrizes $\mathbf{K}^{11}$, se o interesse é o parâmetro ϕ , avaliada em $\tilde{\beta} = (\phi^{(0)}, \tilde{\sigma}^2)$ e $\mathbf{K}^{22}$, se o interesse é o parâmetro σ^2 , calculada em $\tilde{\beta} = (\tilde{\phi}, \sigma^{(0)2})$, que resultam

$$\mathbf{K}^{11} = -\frac{n(1-\phi^2)^2}{n - n^2 + 2\phi^2 - 3n\phi^2 + n^2\phi^2},$$

e

$$\mathbf{K}^{22} = \frac{2\sigma^4(1 - 3\phi^2 - n + n\phi^2)}{n - n^2 + 2\phi^2 - 3n\phi^2 + n^2\phi^2}.$$

A expressão (3.27), para a matriz $\mathbf{K}^{-1}$, coincide com a de Aubin (1995: pág. 51). Observamos também que se o tamanho da amostra é pequeno ou moderado o termo $\frac{1}{2\sigma^2}(1 - \phi^2)y_1^2$ na log-verossimilhança (3.22), não pode ser desprezado, como acontece quando trabalhamos com amostra de tamanho suficientemente grande, fato que é assumido em geral na literatura. Essa aproximação tem a ver com que o termo

$$\frac{1}{2\sigma^2}[(1 - \phi^2)y_1^2 + \sum_{j=2}^n (y_j - \phi y_{j-1})^2]$$

em (3.22) seja aproximado por uma forma quadrática nos parâmetros, importante para aplicar os métodos mais conhecidos de otimização, que são usados para encontrar a *EMV*. Avaliando as matrizes $\mathbf{K}^{11}$ e $\mathbf{K}^{22}$ nas respectivas *EMV* restritas às hipóteses H_1 e H_2 , respectivamente, obtemos

$$\tilde{\mathbf{K}}^{11} = -\frac{n(1 - \phi^{(0)2})^2}{n - n^2 + 2\phi^{(0)2} - 3n\phi^{(0)2} + n^2\phi^{(0)2}},$$

e

$$\tilde{\mathbf{K}}^{22} = \frac{2\sigma^{(0)4}(1 - 3\tilde{\phi}^2 - n + n\tilde{\phi}^2)}{n - 3n\tilde{\phi}^2 - n^2 + n^2\tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\phi}^2}.$$

Para as funções escores, obtemos

$$\tilde{U}_1 = U_1(\phi^{(0)}, \tilde{\sigma}^2) = -\frac{\phi^{(0)}}{1 - \phi^{(0)2}} + \frac{\phi^{(0)}}{\tilde{\sigma}^2}y_1^2 + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \sum_{j=2}^n y_{j-1}(y_j - \phi^{(0)}y_{j-1}),$$

$$\tilde{U}_2 = U_2(\tilde{\phi}, \sigma^{(0)2}) = -\frac{n}{2\sigma^{(0)2}} + \frac{1 - \tilde{\phi}^2}{2\sigma^{(0)4}}y_1^2 + \frac{1}{2\sigma^{(0)4}} \sum_{j=2}^n (y_j - \tilde{\phi}y_{j-1})^2.$$

Temos, então, que:

(a) Se o interesse é testar $H_1 : \phi = \phi^{(0)}$, a estatística escore S dada por (2.5) resulta em

$$S = \frac{(\phi^{(0)}\tilde{\sigma}^2 - \phi^{(0)}y_1^2 + \phi^{(0)3}y_1^2 - K1 + K1\phi^{(0)2})^2n}{(n - n^2 + 2\phi^{(0)2} - 3n\phi^{(0)2} + n^2\phi^{(0)2})\tilde{\sigma}^4}.$$

onde $K1 = \sum_{j=2}^n y_{j-1}(y_j - \phi^{(0)}y_{j-1})$.

(b) Se o interesse é testar $H_2 : \sigma^2 = \sigma^{(0)2}$, temos que S em (2.5) resulta

$$S = \frac{1}{2} \frac{(n\sigma^{(0)2} - y_1^2 + y_1^2\tilde{\phi}^2 - K2)^2(1 - 3\tilde{\phi}^2 - n + n\tilde{\phi}^2)}{\sigma^{(0)4}(n - 3n\tilde{\phi}^2 - n^2 + n^2\tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\phi}^2)},$$

onde $K2 = \sum_{j=2}^n (y_j - \tilde{\phi}y_{j-1})^2$.

3.7.2 Modelo de média móvel de ordem 1

Para o modelo $MA(1)$,

$$Y_t = a_t - \theta a_{t-1}, \quad (3.28)$$

onde $|\theta| < 1$ e $\{a_t\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias normais independentes de média zero e variância $\sigma^2 > 0$, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\theta, \sigma^2 | \mathbf{Y}) = (2\theta\sigma^2)^{-n/2} \left[\frac{1 - \theta^2}{1 - \theta^{2(n+1)}} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^n E^2(a_t | \mathbf{Y}) \right\}. \quad (3.29)$$

No cálculo de L em (3.29) é necessário calcular $E(a_t | \mathbf{Y})$, $t = 0, \dots, n$, o que pode ser feito por recorrência, isto é, dado θ , $\mathbf{Y}$ e $E(a_0 | \mathbf{Y})$, calcula-se $E(a_t | \mathbf{Y})$ pela relação,

$$E(a_t | \mathbf{Y}) = \theta E(a_{t-1} | \mathbf{Y}) + Y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

Temos duas dificuldades para obter os estimadores de máxima verossimilhança: primeiro, calcular o valor inicial $E(a_0 | \mathbf{Y})$ e, segundo, a complicada forma de L (como função de θ). Uma outra maneira para se obter L é através da expressão (3.14), calculando o preditor e o erro de predição a um passo usando o algoritmo de inovação, dado pelas expressões de recorrência (3.16) e (3.18). No caso de um $MA(1)$ as simulações de Ansley e Newbold (1980) mostram uma considerável concentração do valor de $\hat{\theta}$ perto dos limites da condição de invertibilidade ± 1 . Cryer e Ledolter (1981) descobrem que o máximo global freqüentemente ocorre em ± 1 quando θ está próximo de ± 1 num tamanho da amostra moderado. Para $n = 2$ calculam exatamente a probabilidade de $\hat{\theta} = \pm 1$. Para um n geral resultados exatos são intratáveis, mas dão uma boa aproximação calculando numericamente para uma variedade de casos.

(i) Expressões para RV

Para calcular a estatística RV usamos dois procedimentos: um é escrevendo $l(\beta)$ em termos da matriz de autocovariância como dada na expressão (3.10):

$$l(\beta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\log(|\mathbf{V}|) - \frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{Y}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}, \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{V} = V(\beta)$ é uma matriz tal que $\Sigma = \sigma^2\mathbf{V}$. O outro procedimento é escrever $l(\beta)$ de acordo com os erros de predição a um passo, na forma dada na expressão (3.14). A matriz das autocovariâncias Σ do vetor $\mathbf{Y}$ seguindo um modelo $MA(1)$ é uma matriz definida positiva tipo Toeplitz, dada por

$$\Sigma = \sigma^2\mathbf{V}, \text{ onde } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 + \theta^2 & -\theta & 0 & \dots & 0 \\ -\theta & 1 + \theta^2 & -\theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \theta^2 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

e $\Sigma^{-1} = \sigma^{-2}\mathbf{V}^{-1}$, onde $\mathbf{V}^{-1}$ possui um elemento típico calculado por (veja Galbraith e Galbraith, 1974)

$$v^{r,s} = \frac{1}{(1 - \theta^2)(1 - \theta^{2(n+1)})} \theta^{|s-r|} (1 - \theta^{2r})(1 - \theta^{2(n+1-s)}).$$

(ii) Expressões para S

Para escrever uma expressão apropriada para a estatística escore, escrevemos o vetor escore e a matriz de informação de Fisher, em forma matricial. Para a primeira derivada da matriz das autocovariâncias Σ , temos

$$\Sigma_\theta = \sigma^2\mathbf{V}_\theta, \text{ onde } \mathbf{V}_\theta = \begin{pmatrix} 2\theta & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2\theta & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\theta \end{pmatrix} \text{ e } \Sigma_{\sigma^2} = \mathbf{V}. \quad (3.33)$$

Com a finalidade de simplificar os cálculos, definimos as seguintes matrizes:

$$\bar{\Sigma}_\theta = \Sigma_\theta \Sigma^{-1}, \bar{\Sigma}_{\sigma^2} = \Sigma_{\sigma^2} \Sigma^{-1}, \bar{V}_\theta = V_\theta V^{-1}, \Sigma^{-1} \bar{\Sigma}_\theta = \frac{1}{\sigma^2} V^{-1} \bar{V}_\theta, \Sigma^{-1} \bar{\Sigma}_{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} V^{-1}, \Sigma^{-1} \Sigma_{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}_n. \text{ O vetor escore tem elementos}$$

$$U_1(\theta, \sigma^2) = \frac{1}{2} [\mathbf{Y}^\top \Sigma^{-1} \bar{\Sigma}_\theta \mathbf{Y} - \text{tr}(\Sigma^{-1} \Sigma_\theta)]$$

e

$$U_2(\theta, \sigma^2) = \frac{1}{2} [\mathbf{Y}^\top \Sigma^{-1} \bar{\Sigma}_{\sigma^2} \mathbf{Y} - \text{tr}(\Sigma^{-1} \Sigma_{\sigma^2})],$$

que ainda podemos escrever como

$$U_1(\theta, \sigma^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{Y}^\top V^{-1} \bar{V}_\theta \mathbf{Y} - \text{tr}(\bar{V}_\theta) \right],$$

$$U_2(\theta, \sigma^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^4} \mathbf{Y}^\top V^{-1} \mathbf{Y} - \frac{n}{\sigma^2} \right].$$

Para obter a matriz de informação, $\mathbf{K}$, usamos a proposição A.3 dada no Apêndice A que diz respeito ao primeiro momento da segunda derivada da $l(\theta, \sigma^2)$. Temos

$$\begin{aligned} E(U_{ij}) &= \frac{1}{2} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Sigma \right) - \text{tr}(\mathbf{C}_{ij}^i) \right] \\ &= \frac{1}{2} [-(m^{j,i} + m^{i,j} - m^{ij}) - (m^{ij} - m^{i,j})] \\ &= -\frac{1}{2} m^{j,i} = -\frac{1}{2} m^{i,j}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}_{ij}^i = \bar{\Sigma}_{ij} - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j$, $m^{i,j} = m^{j,i} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j)$, $m^{ij} = m^{ji} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_{ij})$, $\bar{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{ij} \Sigma^{-1}$ e $\Sigma_{ij} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$, para $i, j = 1, 2$.

Lembremos que o elemento (i, j) -ésimo, $k_{i,j}$, da matriz de informação, $\mathbf{K}$, é $k_{i,j} = -E(U_{ij}) = \frac{1}{2} m^{i,j}$, para $i, j = 1, 2$. Para a matriz de informação de Fisher temos

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m^{\theta,\theta} & m^{\theta,\sigma^2} \\ m^{\theta,\sigma^2} & m^{\sigma^2,\sigma^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m^{\theta,\theta} & \frac{1}{\sigma^2} \bar{m}^\theta \\ \frac{1}{\sigma^2} \bar{m}^\theta & \frac{n}{\sigma^4} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

onde $m^\theta = \text{tr}(\bar{\Sigma}_\theta)$, $m^{\theta,\theta} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_\theta \bar{\Sigma}_\theta)$, $m^{\theta,\sigma^2} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_\theta \bar{\Sigma}_{\sigma^2})$, $m^{\sigma^2,\sigma^2} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_{\sigma^2} \bar{\Sigma}_{\sigma^2})$ e $\bar{m}^\theta = \text{tr}(\bar{V}_\theta)$. A partir de (3.34) temos que a inversa da matriz de informação de Fisher, $\mathbf{K}^{-1}$, é dada por:

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{2}{|\mathbf{K}|} \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^4} & -\frac{1}{\sigma^2} \bar{m}^\theta \\ -\frac{1}{\sigma^2} \bar{m}^\theta & m^{\theta,\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

com $|\mathbf{K}| = \frac{1}{2\sigma^4}[nm^{\theta,\theta} - (\overline{m}^\theta)^2]$.

(a) Interesse em θ .

Se o interesse é o parâmetro θ , temos um parâmetro de incômodo σ^2 e o bloco da matriz matriz $\mathbf{K}^{-1}$ a ser utilizado é

$$\mathbf{K}^{11} = \frac{4n}{nm^{\theta,\theta} - (\overline{m}^\theta)^2},$$

que não dependem de σ^2 , o que de alguma maneira facilita seu cálculo.

(b) Interesse em σ^2 .

Para o caso onde o parâmetro de interesse é σ^2 , temos

$$\mathbf{K}^{22} = \frac{4m^{\theta,\theta}\sigma^4}{nm^{\theta,\theta} - (\overline{m}^\theta)^2}.$$

Desta maneira, podemos calcular sob H as estatísticas RV e S , para ambos os casos.

Vamos calcular as EMV usando o procedimento de Brockwell e Davis (1991, Seção 3.5.2).

Fixamos, quando for o caso, $\sigma^2 = 1$.

Algoritmo de Inovação

Particulariza-se o algoritmo de inovação dado na Seção 3.5.2 para o caso de um modelo $MA(1)$ dado no Exemplo 3.1. Definindo uma normalização nos erros de predição por $r_t = v_t\sigma^{-2}$ para $t \geq 0$, onde v_t está definido em (3.15), então temos

$$\theta_{tj} = 0, \quad 2 \leq j \leq t$$

$$\theta_{t1} = \theta/r_t$$

$$r_0 = 1 + \theta^2 \quad e$$

$$r_t = 1 + \theta^2 - \theta^2/r_t$$

e para os preditores a um passo

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{\theta(Y_t - \hat{Y}_t)}{r_{t-1}}$$

para $t \geq 1$. De maneira que só é necessário implementar o algoritmo com os elementos r_0, r_t e $\hat{Y}_{t+1}$, com o número de $\hat{Y}$'s limitado por n , onde n é o tamanho da série.

3.7.3 Modelo auto-regressivo de média móvel de ordem (1,1)

Para o modelo $ARMA(1,1)$ dado por (3.5), a log-verossimilhança em termos da matriz $\mathbf{V}$ ($\Sigma = \sigma^2 \mathbf{V}$) é como em (3.31), sendo que na função de autocovariância do modelo $ARMA(1,1)$ a matriz $\mathbf{V}$ é dada por

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1 - \phi^2} \mathbf{G},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 - 2\phi\theta - \theta^2 & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta) & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi & \dots & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{n-1} \\ (1 - \phi\theta)(\phi - \theta) & 1 - 2\phi\theta - \theta^2 & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta) & \dots & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{n-2} \\ (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta) & 1 - 2\phi\theta - \theta^2 & \dots & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{n-1} & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{n-2} & (1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{n-3} & \dots & 1 - 2\phi\theta - \theta^2 \end{pmatrix},$$

com a matriz inversa de $\mathbf{V}$ dada em Galbraith e Galbraith (1974). Podemos escrever a log-verossimilhança por

$$l(\beta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2(1 - \phi^2)) - \log(|\mathbf{G}|) - \frac{(1 - \phi^2)}{2\sigma^2} \mathbf{Y}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y}. \quad (3.36)$$

A primeira derivada da matriz $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$ em relação a ϕ , é definida pelo elemento típico,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \phi} = \begin{cases} -2\theta, & i = j \\ (1 - \phi\theta) - \theta(\phi - \theta), & |i - j| = 1 \\ (1 - \phi\theta)\phi^{|i-j|-1} - \theta(\phi - \theta)\phi^{|i-j|-1} \\ + (|i - j| - 1)(1 - \phi\theta)(\phi - \theta)\phi^{|i-j|-2}, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

e em relação a θ ,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta} = \begin{cases} -2(\phi + \theta), & i = j \\ -\phi^{|i-j|-1} \{\phi(\phi - \theta) + (1 - \phi\theta)\}, & |i - j| \geq 1. \end{cases}$$

Os elementos do vetor escore são dados por

$$U_\phi = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{n(1 - \phi^2)^{n-1}}{(1 - \phi^2)^{2n}} \log(|\mathbf{G}|) + \frac{1}{(1 - \phi^2)^n} \text{tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_\phi) - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{Y}^\top \left[2\phi \mathbf{G}^{-1} - (1 - \phi^2) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_\phi \mathbf{G}^{-1} \right] \mathbf{Y} \right\}, \quad (3.37)$$

$$U_\theta = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1-\phi^2)^n} \text{tr}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_\theta) - \frac{(1-\phi^2)}{\sigma^2} \mathbf{Y}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_\theta \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y} \right\}, \quad (3.38)$$

$$U_{\sigma^2} = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{n}{\sigma^2} - \frac{(1-\phi^2)}{\sigma^2} \mathbf{Y}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y} \right\}. \quad (3.39)$$

Para a matriz de informação total de Fisher, temos

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m^{\phi,\phi} & m^{\phi,\theta} & m^{\phi,\sigma^2} \\ m^{\theta,\phi} & m^{\theta,\theta} & m^{\theta,\sigma^2} \\ m^{\sigma^2,\phi} & m^{\sigma^2,\theta} & m^{\sigma^2,\sigma^2} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{2}{|\mathbf{K}|} \begin{pmatrix} m^{\theta,\theta} m^{\sigma^2,\sigma^2} - (m^{\theta,\sigma^2})^2 & m^{\phi,\sigma^2} m^{\sigma^2,\theta} - m^{\phi,\theta} m^{\sigma^2,\sigma^2} & m^{\phi,\theta} m^{\theta,\sigma^2} - m^{\phi,\sigma^2} m^{\theta,\theta} \\ m^{\theta,\sigma^2} m^{\sigma^2,\phi} - m^{\theta,\phi} m^{\sigma^2,\sigma^2} & m^{\phi,\phi} m^{\sigma^2,\sigma^2} - (m^{\phi,\sigma^2})^2 & m^{\phi,\sigma^2} m^{\theta,\phi} - m^{\phi,\phi} m^{\theta,\sigma^2} \\ m^{\sigma^2,\phi} m^{\sigma^2,\theta} - m^{\theta,\theta} m^{\sigma^2,\phi} & m^{\phi,\theta} m^{\sigma^2,\phi} - m^{\phi,\phi} m^{\sigma^2,\theta} & m^{\phi,\phi} m^{\theta,\theta} - (m^{\phi,\theta})^2 \end{pmatrix},$$

onde $|\mathbf{K}|$ está dado por

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}| &= m^{\phi,\phi} (m^{\theta,\theta} m^{\sigma^2,\sigma^2} - (m^{\theta,\sigma^2})^2) + m^{\theta,\phi} (m^{\phi,\sigma^2} m^{\sigma^2,\theta} - m^{\phi,\theta} m^{\sigma^2,\sigma^2}) \\ &\quad + m^{\sigma^2,\phi} (m^{\phi,\theta} m^{\theta,\sigma^2} - m^{\phi,\sigma^2} m^{\theta,\theta}) \end{aligned}$$

e os m 's denotam os traços das formas quadráticas. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} m^{\phi,\phi} &= \text{tr}(\overline{\mathbf{V}}_{\phi,\phi}) = 4n\phi^2(1-\phi^2)^2 - 4\phi(1-\phi^2)\text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_\phi) + \text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_{\phi,\phi}), \\ m^{\phi,\theta} &= \text{tr}(\overline{\mathbf{V}}_{\phi,\theta}) = -2\phi(1-\phi^2)\text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_\theta) + \text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_{\phi,\theta}) \\ m^{\phi,\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \text{tr}(\overline{\mathbf{V}}_\phi) = -2\phi(1-\phi^2)\text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_\phi), \\ m^{\theta,\theta} &= \text{tr}(\overline{\mathbf{V}}_{\theta,\theta}) = \text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_{\theta,\theta}) \\ m^{\theta,\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \text{tr}(\overline{\mathbf{V}}_\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \text{tr}(\overline{\mathbf{G}}_\theta), \\ m^{\sigma^2,\sigma^2} &= \frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{G}_\theta = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \theta}$, $\mathbf{G}_\phi = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \phi}$, $\overline{\mathbf{G}}_\theta = \mathbf{G}_\theta \mathbf{G}^{-1}$, $\overline{\mathbf{G}}_\phi = \mathbf{G}_\phi \mathbf{G}^{-1}$, $\overline{\mathbf{G}}_{\theta,\theta} = \mathbf{G}_\theta \mathbf{G}_\theta \mathbf{G}^{-1}$, $\overline{\mathbf{G}}_{\theta,\phi} = \mathbf{G}_\theta \mathbf{G}_\phi \mathbf{G}^{-1}$, etc.

Se o interesse é o vetor de parâmetros $\beta_1 = (\phi, \theta)^\top$, então, a estatística escore S é dada por

$$S = (\tilde{U}_\phi, \tilde{U}_\theta) \tilde{\mathbf{K}}^{11} (\tilde{U}_\phi, \tilde{U}_\theta)^\top$$

com

$$\tilde{\mathbf{K}}^{11} = \frac{2}{|\mathbf{K}|} \begin{pmatrix} m^{\theta,\theta} m^{\sigma^2,\sigma^2} - (m^{\theta,\sigma^2})^2 & m^{\phi,\sigma^2} m^{\sigma^2,\theta} - m^{\phi,\theta} m^{\sigma^2,\sigma^2} \\ m^{\theta,\sigma^2} m^{\sigma^2,\phi} - m^{\theta,\phi} m^{\sigma^2,\sigma^2} & m^{\phi,\phi} m^{\sigma^2,\sigma^2} - (m^{\phi,\sigma^2})^2 \end{pmatrix}_{\phi=\phi^{(0)}, \theta=\theta^{(0)}, \sigma^2=\bar{\sigma}^2},$$

e os $\tilde{U}_\phi$, $\tilde{U}_\theta$ são calculados por (3.37) e (3.38), respectivamente, substituindo os parâmetros desconhecidos pelas correspondentes estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula.

Algoritmo de Inovação

Para obter as *EMV* usamos o procedimento dado por Brockwell e Davis (1991) e o algoritmo de inovação, dado na Seção 3.5.2 para calcular o preditor e o erro de predição a um passo, $\hat{Y}_{t+1}$ e $v_t = E(Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1})^2$, respectivamente. Para este caso da equação (3.16) para $\hat{Y}_{t+1}$ temos

$$\hat{Y}_{t+1} = \phi Y_t + \theta_{t1}(Y_t - \hat{Y}_t), \quad t \geq 1.$$

Para calcular os θ_{t1} e os v_t (ou $r_t = v_t \sigma^{-2}$) substitui-se a função de autocovariância do processo *ARMA*(1, 1), dado no exemplo 3.3 da Seção 3.3 por $\gamma_W(i - j)$ dada em (3.18):

$$\gamma_W(i - j) = \begin{cases} (1 + 2\theta\phi + \theta^2)/(1 - \phi^2), & i = j = 1 \\ 1 + \theta^2, & i = j \geq 2 \\ \theta, & |i - j| = 1, \quad i \geq 1 \\ 0, & \text{outro caso} \end{cases}$$

Assim, as quantidades necessárias para implementação do algoritmo para calcular $l(\phi, \theta, \sigma^2)$ são dadas por

$$r_0 = (1 + 2\theta\phi + \theta^2)/(1 - \phi^2),$$

$$\theta_{t1} = \theta/r_{t-1} \quad \text{e}$$

$$r_t = 1 + \theta^2 - \theta^2/r_{t-1}.$$

Também usamos os resultados a) e b), dados no Exercício 5.13 de Brockwell e Davis (1991), para escrever r_t e θ_{t1} como

$$r_t = -\frac{\bar{r}_t}{1 - \bar{r}_t}, \quad \bar{r}_t = \theta^{-2t} \frac{r_0}{1 - r_0} + \sum_{j=1}^t \theta^{-2(j-1)} \quad \text{e} \quad \theta_{t1} = \frac{\theta}{r_{t-1}}.$$

Capítulo 4

Correções de Testes para Modelos *ARMA*

4.1 Argumentação para as correções

O objetivo aqui é sistematizar os procedimentos para corrigir estatísticas testes cujas distribuições têm uma expansão assintótica até uma ordem conveniente. No que se refere a essa expansão, primeiro deve ser válida sob as suposições de modelagem e distribucionais, o que significa impor condições para que o erro de aproximação seja uniformemente “aceitável” num domínio de valores possíveis da estatística. Em segundo lugar, deve-se conseguir escrever de maneira explícita a expansão, onde os termos possam ser isolados numa variável de interesse, c_n (n tamanho da amostra), e com coeficientes que independentem do tamanho da amostra e tais que o comportamento dos coeficientes seja “suave” em relação ao vetor de parâmetros. O trabalho de Chandra (1985) demonstra que, sob condições gerais de regularidade (ver, também, Chandra e Ghosh, 1979), qualquer estatística teste T , cuja distribuição assintótica é χ_r^2 , tem uma expansão assintótica até ordem $n^{-3/2}$

dada por

$$F_T(x) = P(T \leq x) = G_r(x) + \sum_{i=0}^k a_i G_{r+2i}(x), \quad (4.1)$$

onde G_s denota a função distribuição acumulada de uma variável com distribuição qui-quadrado com s graus de liberdade e os a_i são funções complicadas dos cumulantes conjuntos da log-verossimilhança e de suas derivadas no caso $k \geq 2$, com $\sum_{i=1}^k a_i = 0$. Para o caso em que T é a estatística da razão de verossimilhança (RV), $k = 1$ (veja expressão (2.6)) e quando T é a estatística score (S) ou Wald (W), $k = 3$ (Harris, 1985). Para o modelo $ARMA(p, q)$, Taniguchi (1984), de forma paralela ao trabalho formal de Hayakawa (1975), desenvolve explicitamente a expansão de Edgeworth até ordem $n^{-1/2}$ da distribuição da estatística da razão de verossimilhança para uma hipótese composta sob uma sequência de alternativas $A_n : \beta_1 = \beta_1^{(0)} + \varepsilon n^{-1/2}$ onde, $\varepsilon = (\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_r)^\top$, obtendo uma expansão semelhante à de Hayakawa. Também, consegue uma expansão assintótica até ordem $n^{-1/2}$ para uma classe de testes $\aleph$, que inclui a a estatística RV , S , W e WM , sob uma hipótese nula simples $H : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$, dada por

$$F_T(x) = P(T \leq x) = G_1(x) + n^{-1} \sum_{i=0}^3 a_i G_{1+2i}(x) + o(n^{-1}),$$

onde os a_i são funções dos coeficientes definidos no Lema 1 de Taniguchi (1988). Os trabalhos de Taniguchi nos induzem a supor que é possível obter uma expansão para a estatística RV sob uma hipótese nula simples $H : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ de maneira paralela a Hayakawa (1977) com a correspondente revisão feita por Chesher e Smith (1995). Sob as suposições de Taniguchi (1984), é possível obter uma expansão assintótica para a distribuição nula da estatística score, de modo similar a Harris (1985), pois Harris segue o trabalho de Hayakawa (1977). Por outro lado, Ravishanker et al. (1990), caracterizando os modelos $ARMA$ como elementos da família exponencial curvada (Amari, 1982, 1985), desenvolvem a inferência de maneira geral baseada na geometria diferencial. Usam as propriedades geométricas dos modelos $ARMA$ para conseguir transformações nos parâmetros que satisfazem determinadas propriedades. Em particular, é ilustrado o efeito sobre o viés assintótico da EMV , sendo a matriz de informação de Fisher independente dos parâmetros,

e é discutido o teste de hipótese para os parâmetros através da estatística RV modificada segundo a correção de Bartlett. Estes trabalhos nos direcionam para aplicar as correções das estatísticas RV e S no modelo $ARMA(p, q)$, dadas por Lawley(1956) e Cordeiro e Ferrari (1991), respectivamente.

4.2 Procedimento para o cálculo dos cumulantes para o modelo ARMA

4.2.1 Teoremas principais

Nesta seção apresentamos o desenvolvimento para o cálculo dos cumulantes das derivadas conjuntas da log-verossimilhança do modelo $ARMA(p, q)$, estacionário e invertível, definido na expressão (3.1).

Consideramos os seguintes espaços de funções:

$$\mathbf{D}_1 = \left\{ f : f(\lambda) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u) \exp(-iu\lambda), a(u) = a(-u), \sum_{u=-\infty}^{\infty} |u||a(u)| \leq \infty \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ARMA} = & \left\{ f : f(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\sum_{j=0}^q a_j e^{ij\lambda}|^2}{2\pi |\sum_{j=0}^p b_j e^{ij\lambda}|^2}, \sigma^2 > 0 \text{ } (p, q) \text{ a ordem do modelo.} \right. \\ & \text{com } A(z) = \sum_{j=0}^q a_j z^j \text{ e } B(z) = \sum_{j=0}^p b_j z^j \text{ diferentes de zero,} \\ & \left. \text{para } |z| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Teorema 4.1 Suponha que $f_1(\lambda), \dots, f_s(\lambda) \in \mathbf{D}_1, g_1(\lambda), \dots, g_s(\lambda) \in \mathbf{D}_{ARMA}$. Definimos as matrizes Toeplitz de ordens $n \times n$ $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s, \Lambda_1, \dots, \Lambda_s$, por

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1-m_2)\lambda} f_j(\lambda) d\lambda \right) \\ \Lambda_j &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1-m_2)\lambda} g_j(\lambda) d\lambda \right), \end{aligned}$$

$m_1, m_2 = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s$. Então,

$$\frac{1}{n} \text{tr}(\Gamma_1 \Lambda_1^{-1} \dots \Gamma_s \Lambda_s^{-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) \dots f_s(\lambda) g_1(\lambda)^{-1} \dots g_s(\lambda)^{-1} d(\lambda) + O(n^{-1}).$$

Não apresentamos a demonstração deste resultado aqui, o qual pode ser visto em Taniguchi (1991: Teorema 2.2.1).

O seguinte resultado é devido a Magnus (1978).

Teorema 4.2 Sejam um vetor aleatório $\mathbf{Y}$, n -dimensional, com distribuição normal multivariada com vetor de médias $\mathbf{0}$ e matriz de covariâncias Σ , e as matrizes reais positivas-definidas, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ e $\mathbf{C}_4$. Então, os primeiros momentos de produtos das formas quadráticas definidas pelas matrizes $\mathbf{C}$'s, digamos $Q_i = \mathbf{Y} \mathbf{C}_i \mathbf{Y}^\top$ para $i = 1, 2, 3, 4$, são dados por:

$$\begin{aligned} E\{Q_i Q_j\} &= \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) + 2 \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j), \\ E\{Q_i Q_j Q_k\} &= \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) + 2[\text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_k) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j)] + \\ &\quad + 8 \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k), \\ E\{Q_i Q_j Q_k Q_l\} &= \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_l) + 8[\text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k \Sigma \mathbf{C}_l) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_k \Sigma \mathbf{C}_l) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_l) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_l) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k)] + 4[\text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k \Sigma \mathbf{C}_l) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_l) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_l) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k)] + \\ &\quad + 2[\text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k \Sigma \mathbf{C}_l) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_l) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_l) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_l) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_j) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_l) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_k) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_k) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_l) \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j)] + \\ &\quad + 16[\text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_k \Sigma \mathbf{C}_l) + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_l \Sigma \mathbf{C}_k) + \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma \mathbf{C}_i \Sigma \mathbf{C}_k \Sigma \mathbf{C}_j \Sigma \mathbf{C}_l)]. \end{aligned}$$

4.2.2 Procedimento para calcular os cumulantes

Introduzimos, a seguir, uma notação que permite obter expressões mais simples para os cálculos correspondentes. Seja $\mathbf{D}_2$ o conjunto de funções em $[-2\pi, 2\pi]$, com valores complexos e deriváveis até quarta ordem (com relação a um vetor de parâmetros β) e com integral finita em $[-2\pi, 2\pi]$, isto é,

$$\mathbf{D}_2 = \left\{ \mathcal{U}_\beta \in C^4, \int_{-2\pi}^{2\pi} \mathcal{U}_\beta(\lambda) d\lambda < \infty \right\}.$$

Supomos, também, que para duas funções $\mathcal{U}_\beta$ e $\mathcal{V}_\beta$ em $\mathbf{D}_2$, o produto $\mathcal{U}_\beta \mathcal{V}_\beta$ está em $\mathbf{D}_2$.

Denotamos a integral de $\mathcal{U}_\beta \in \mathbf{D}_2$ sobre o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ por

$$\mathbf{I} = \int_{-2\pi}^{2\pi} \mathcal{U}_\beta(\lambda) d\lambda = \mathbf{I}(\mathcal{U}_\beta),$$

e a integral de $f_\beta \in \mathbf{D}_{ARMA}$ sobre o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ por

$$\mathcal{I} = \int_{-2\pi}^{2\pi} f_\beta(\lambda) d\lambda = \mathcal{I}(f_\beta).$$

Considere, também,

$$\begin{aligned} f_\beta^{i_1 \dots i_m}(\lambda) &= \frac{\partial^m f_\beta(\lambda)}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_m}}, \quad h_{i_1 \dots i_m} = f_\beta^{i_1 \dots i_m}(\lambda) f_\beta^{-1}(\lambda), \\ \mathcal{U}_{i_1 \dots i_m} &= \frac{\partial^m \log f_\beta(\lambda)}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_m}}, \quad i_j \in \{1, \dots, m\} \text{ e } m \in \{1, \dots, 4\}, \\ h_{i,j} &= h_i h_j, \quad h_{i,j,k} = h_i h_{j,k}, \quad \text{etc}, \\ \mathcal{U}_{i,j} &= \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j, \quad \mathcal{U}_{i,j,k} = \mathcal{U}_i \mathcal{U}_{j,k}, \quad \text{etc}. \end{aligned}$$

Para operar com as integrais $\mathbf{I}$ e $\mathcal{I}$ nas funções $\mathcal{U}$'s e h 's, respectivamente, usaremos a notação:

$$\mathbf{I}_{i,j} = \mathbf{I}(\mathcal{U}_{i,j}), \quad \mathbf{I}_{ij} = \mathbf{I}(\mathcal{U}_{ij}), \quad \mathbf{I}_{i,j,k} = \mathbf{I}(\mathcal{U}_{i,j,k}), \quad \mathbf{I}_{i,jk} = \mathbf{I}(\mathcal{U}_{i,jk}), \quad \mathbf{I}_{ijk} = \mathbf{I}(\mathcal{U}_{ijk}), \quad \text{etc}.$$

$$\mathcal{I}_{i,j} = \mathcal{I}(h_{i,j}), \quad \mathcal{I}_{ij} = \mathcal{I}(h_{ij}), \quad \mathcal{I}_{i,j,k} = \mathcal{I}(h_{i,j,k}), \quad \mathcal{I}_{i,jk} = \mathcal{I}(h_{i,jk}), \quad \mathcal{I}_{ijk} = \mathcal{I}(h_{ijk}),$$

$$\mathcal{I}_{ijk} = \mathcal{I}(h_{ijk}), \quad \text{etc}.$$

Proposição 4.1 A d -ésima derivada parcial da função de log-verossimilhança, dada pela expressão (3.10), em relação $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_d}$ é expressa como

$$U_i = -\frac{1}{2} \mathbf{Y}^\top \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \beta_i} \mathbf{Y} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}^i), \quad d = 1,$$

$$U_{i_1 \dots i_d} = -\frac{1}{2} \mathbf{Y}^\top \frac{\partial^d \Sigma^{-1}}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_d}} \mathbf{Y} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}_{i_2 \dots i_d}^{i_1}), \quad d > 1,$$

onde $\mathbf{C}_{i_2 \dots i_d}^{i_1}$ é a $(d-1)$ -ésima derivada parcial de $\mathbf{C}^{i_1} = \Sigma^{-1} \Sigma_{i_1}$ em relação a $\beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_d}$, Σ_{i_1} é a derivada de Σ em relação a β_{i_1} e $\frac{\partial^d \Sigma^{-1}}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_d}}$, para $d > 1$, são dadas na proposição A.2 no Apêndice A.

O resultado a seguir segue dos teoremas principais e da Proposição 4.1 (Taniguchi, 1991: Lema 2.3.1).

Teorema 4.3 Sob as suposições do Teorema 4.1, tem-se:

$$E\{n^{-1}U_{ij}\} = -I_{ij} + O(n^{-1}), \quad (4.2)$$

$$E\{n^{-1}U_i U_j\} = I_{ij} + O(n^{-1}), \quad (4.3)$$

$$E\{n^{-1}U_i U_{jk}\} = J_{ijk} + O(n^{-1}), \quad (4.4)$$

$$E\{n^{-1}U_i U_j U_k\} = K_{ijk} + O(n^{-1}), \quad (4.5)$$

$$E\{n^{-1}U_i U_{jkl}\} = L_{ijkl} + O(n^{-1}), \quad (4.6)$$

$$E\{n^{-1}U_{ij} U_{kl}\} = M_{ijkl} + O(n^{-1}), \quad (4.7)$$

$$E\{n^{-1}U_i U_j U_{kl}\} = N_{ijkl} + O(n^{-1}), \quad (4.8)$$

$$n^{-1} \text{cum}\{U_i, U_j, U_k, U_l\} = H_{ijkl} + O(n^{-1}), \quad (4.9)$$

onde os U 's foram definidos na Proposição 4.1, $\text{cum}\{\cdot\}$ é o cumulante de ordem superior definido em Leonov e Shiryaev (1959) e

$$I_{ij} = \mathcal{I}_{i,j}, J_{ijk} = \mathcal{I}_{i,j,k}, K_{ijk} = \mathcal{I}_{i,j,k},$$

$$L_{ijkl} = \frac{3}{2\pi} \mathcal{I}_{i,j,k,l} - \frac{1}{2\pi} (\mathcal{I}_{i,j,k,l} + \mathcal{I}_{i,k,l,j} + \mathcal{I}_{i,j,l,k}) + \frac{1}{4\pi} \mathcal{I}_{i,j,k,l},$$

$$M_{ijkl} = \frac{1}{\pi} \mathcal{I}_{i,j,k,l} - \frac{1}{2\pi} (\mathcal{I}_{i,j,k,l} + \mathcal{I}_{k,l,i,j}) + \frac{1}{4\pi} \mathcal{I}_{i,j,k,l},$$

$$N_{ijkl} = -\frac{1}{\pi}\mathcal{I}_{i,j,k,l} + \frac{1}{2\pi}\mathcal{I}_{i,j,kl}, \quad H_{ijkl} = \frac{3}{2\pi}\mathcal{I}_{i,j,k,l}.$$

As expressões para os cumulantes no Teorema 4.3 em termos da densidade espectral f_β são dadas no Apêndice A.

Para obter expressões análogas às anteriores para κ_{ijk} e κ_{ijkl} , repete-se o mesmo argumento usado por Taniguchi (1984), como foi usado para obter as expressões do Teorema 4.3, que apresentamos aqui com outra notação. Apresentamos, a seguir, o teorema do resíduo, usado para calcular as integrais dadas acima (Churchill, 1975: pág. 147).

Teorema 4.4 Suponha que $F(z)$ seja um holomorfismo dentro e sobre o “caminho” Ω , a menos de um número finito de singularidades isoladas, $a_1, \dots, a_r$, nenhuma sobre Ω . Então,

$$\int_{\Omega} F(z)dz = 2\pi \sum_{j=1}^r \text{Res}(j),$$

onde $\text{Res}(j)$ é o resíduo de $F(z)$ em a_j . Se a_j é um polo de ordem s , então o resíduo é dado por

$$\text{Res}(j) = \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z - a_j)^s F(z) \right\}_{z=a_j}.$$

Proposição 4.2 Sob as condições de regularidade para definir $\mathbf{D}_2$ e $\mathbf{D}_{ARMA}$, os primeiros momentos de $n^{-1}U_{ijk}$ e $n^{-1}U_{ijkl}$, em termos das integrais $\mathcal{I}$'s até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$, são dados por

$$E(n^{-1}U_{ijk}) = R_{ijk} + O(n^{-1}),$$

com

$$R_{ijk} = \frac{1}{\pi} \{ \mathcal{I}_{i,j,k} - \frac{1}{4}(\mathcal{I}_{i,jk} + \mathcal{I}_{j,ik} + \mathcal{I}_{k,ij}) \}, \quad (4.10)$$

e

$$E(n^{-1}U_{ijkl}) = P_{ijkl} + O(n^{-1}),$$

com

$$\begin{aligned} P_{ijkl} = & \frac{1}{4\pi} \{ 4[\mathcal{I}_{k,ij,l} + \mathcal{I}_{kl,i,j} + \mathcal{I}_{k,i,j,l} + \mathcal{I}_{il,k,j} + \mathcal{I}_{i,jk,l} + \mathcal{I}_{ik,j,l}] - 18\mathcal{I}_{i,j,k,l} \\ & - \mathcal{I}_{i,jkl} - \mathcal{I}_{j,ikl} - \mathcal{I}_{k,ijl} - \mathcal{I}_{l,ijk} - \mathcal{I}_{ij,kl} - \mathcal{I}_{jk,il} - \mathcal{I}_{ik,jl} \}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observamos que estas expressões coincidem com o caso unidimensional dado em Taniguchi (1991: fórmulas (2.3.22) e (2.3.23)). Guardando a respectiva notação para o caso em que β é unidimensional, obtemos,

$$\begin{aligned} R_{\beta\beta\beta} &= \frac{1}{\pi} \mathcal{I}_{\beta,\beta,\beta} - \frac{3}{4\pi} \mathcal{I}_{\beta,\beta\beta} \text{ e} \\ P_{\beta\beta\beta\beta} &= \frac{6}{\pi} \mathcal{I}_{\beta,\beta\beta,\beta} - \frac{9}{2\pi} \mathcal{I}_{\beta,\beta,\beta\beta} - \frac{1}{\pi} \mathcal{I}_{\beta,\beta\beta\beta} - \frac{3}{4\pi} \mathcal{I}_{\beta\beta,\beta\beta}. \end{aligned}$$

Para efeito de cálculo das integrais $\mathcal{I}$'s por meio de programas na linguagem do MAPLE (Abell e Braselton, 1994), baseado no Teorema 4.4, se faz a conversão das integrais $\mathcal{I}$'s para as $\mathbf{I}$'s, ou equivalentemente, escrevendo os integrandos envolvidos em $\mathcal{I}$'s, função dos h 's, em termos dos integrandos de $\mathbf{I}$'s, função dos $\mathcal{U}$'s.

Proposição 4.3 Sob as condições de regularidade, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} h_i &= \mathcal{U}_i, \\ h_{ij} &= \mathcal{U}_{ij} + \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j, \\ h_{ijk} &= \mathcal{U}_{ijk} + \mathcal{U}_i \mathcal{U}_{jk} + \mathcal{U}_j \mathcal{U}_{ik} + \mathcal{U}_k \mathcal{U}_{ij} + \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k. \end{aligned}$$

Uma outra relação útil é

$$\mathcal{U}_{ijk} = h_{ijk} + h_{ij,k} - h_{jk,i} + h_{ik,j} - 2h_{k,ij} + 2h_{k,j,i}.$$

Logo, podemos escrever os integrandos das expressões do Teorema 4.3 e as expressões (4.10) e (4.11) da Proposição 4.2 em termos das funções $\mathcal{U}$'s da seguinte maneira:

para I_{ij} , $h_{i,j} = \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j$;

para J_{ijk} , $\frac{1}{2}h_{i,jk} - h_{i,j,k} = \mathcal{U}_i \mathcal{U}_{jk} - \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k$;

para R_{ijk} , $\frac{1}{2}(h_{i,j,k} + h_{j,i,k}) - \frac{1}{4}(h_{ij,k} + h_{jk,i} + h_{ik,j}) = \frac{1}{4}(\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k - \mathcal{U}_{ij} \mathcal{U}_k - \mathcal{U}_{ik} \mathcal{U}_j - \mathcal{U}_{jk} \mathcal{U}_i)$;

para K_{ijk} , $h_{i,j,k} = \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k$;

para L_{ijkl} , $h_i[3h_{j,k,l} - (h_{j,kl} + h_{k,jl} + h_{l,jk}) + \frac{1}{2}h_{jkl}] = \mathcal{U}_i[\frac{1}{2}\mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \mathcal{U}_l - \frac{1}{2}(\mathcal{U}_j \mathcal{U}_{kl} + \mathcal{U}_k \mathcal{U}_{jl} + \mathcal{U}_l \mathcal{U}_{jk}) + \frac{1}{2}\mathcal{U}_{jkl}]$;

para M_{ijkl} , $h_{i,j,k,l} - \frac{1}{2}(h_{i,j,kl} + h_{k,l,ij}) + \frac{1}{4}h_{ij,kl} = \frac{1}{4}[\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \mathcal{U}_l - (\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_{kl} + \mathcal{U}_k \mathcal{U}_l \mathcal{U}_{ij}) + \mathcal{U}_{ij} \mathcal{U}_{kl}]$;

para N_{ijkl} , $\frac{1}{2}h_{i,j,kl} - h_{i,j,k,l} = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_i\mathcal{U}_j\mathcal{U}_{kl} - \mathcal{U}_i\mathcal{U}_j\mathcal{U}_k\mathcal{U}_l)$;

para H_{ijkl} , $h_{i,j,k,l} = \mathcal{U}_i\mathcal{U}_j\mathcal{U}_k\mathcal{U}_l$;

para P_{ijkl} , $\frac{1}{2}[4(h_{k,l,ij} + h_{kl,i,j} + h_{i,k,jl} + h_{j,k,il} + h_{i,l,jk} + h_{j,l,ik} - h_{i,jkl} - h_{j,ikl} - h_{k,ijl} - h_{ijk,l} - h_{ij,kl} - h_{jk,il}) - h_{jl,ik}] = \frac{1}{2}[\mathcal{U}_k\mathcal{U}_l\mathcal{U}_{ij} + \mathcal{U}_{kl}\mathcal{U}_i\mathcal{U}_j + \mathcal{U}_k\mathcal{U}_i\mathcal{U}_{jl} + \mathcal{U}_{il}\mathcal{U}_k\mathcal{U}_j + \mathcal{U}_i\mathcal{U}_l\mathcal{U}_{jk} + \mathcal{U}_j\mathcal{U}_l\mathcal{U}_{ik} - \mathcal{U}_{jkl}\mathcal{U}_i - \mathcal{U}_{ikl}\mathcal{U}_j - \mathcal{U}_{ijl}\mathcal{U}_k - \mathcal{U}_{ijk}\mathcal{U}_l - \mathcal{U}_{kl}\mathcal{U}_{ij} - \mathcal{U}_{jk}\mathcal{U}_{il} - \mathcal{U}_{jl}\mathcal{U}_{ik} - \mathcal{U}_i\mathcal{U}_j\mathcal{U}_k\mathcal{U}_l]$.

E, também,

$$\mathbf{I}_{ijk} = \mathcal{I}_{ijk} - \mathcal{I}_{jk,i} + \mathcal{I}_{ik,j} - \mathcal{I}_{k,ij} + 2\mathcal{I}_{k,j,i},$$

A prova dos resultados acima é algebricamente tediosa e, portanto, não a apresentamos aqui. Com esses resultados temos a proposição a seguir.

Proposição 4.4 Sob as condições de regularidades e notações que definem os espaços $\mathbf{D}$'s, temos:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{I}_{i,j}, \\ J_{ijk} &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{I}_{i,jk} - \mathbf{I}_{i,j,k}), \\ K_{ijk} &= \frac{1}{2\pi}\mathbf{I}_{i,j,k}, \\ L_{ijkl} &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{I}_{i,j,k,l} + \mathbf{I}_{i,jkl} - \mathbf{I}_{i,j,kl} - \mathbf{I}_{i,l,jk} - \mathbf{I}_{i,k,jl}), \\ M_{ijkl} &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{I}_{ij,kl} + \mathbf{I}_{i,j,k,l} - \mathbf{I}_{i,j,kl} - \mathbf{I}_{k,l,ij}), \\ N_{ijkl} &= \frac{1}{2\pi}(\mathbf{I}_{i,j,kl} - \mathbf{I}_{i,j,k,l}), \\ R_{ijk} &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{I}_{i,j,k} - \mathbf{I}_{i,jk} - \mathbf{I}_{j,ik} - \mathbf{I}_{k,ij}), \\ P_{ijkl} &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{I}_{k,l,ij} + \mathbf{I}_{i,j,kl} + \mathbf{I}_{i,k,jl} + \mathbf{I}_{j,k,il} + \mathbf{I}_{i,l,jk} + \mathbf{I}_{j,l,ik} - \mathbf{I}_{i,jkl} \\ &\quad - \mathbf{I}_{j,ikl} - \mathbf{I}_{k,ijl} - \mathbf{I}_{l,ijk} - \mathbf{I}_{ij,kl} - \mathbf{I}_{il,jk} - \mathbf{I}_{ik,jl} - \mathbf{I}_{i,j,k,l}). \end{aligned}$$

A prova desta proposição é feita usando a proposição anterior.

Proposição 4.5 A primeira derivada de $\frac{1}{n}\kappa_{ij}$, até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$, é dada por

$$\frac{1}{n}\kappa_{ij}^{(k)} = -\frac{1}{4\pi}\{\mathbf{I}_{j,ik} + \mathbf{I}_{i,jk}\}.$$

A primeira derivada de $\frac{1}{n}\kappa_{ijk}$, até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$, é dada em termos das integrais $\mathbf{I}$'s por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\kappa_{ijk}^{(l)} &= \frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{I}_{j,k,il} + 3(\mathbf{I}_{i,j,kl} + \mathbf{I}_{i,k,jl}) - \mathbf{I}_{j,ikl} \\ &\quad - \mathbf{I}_{k,ijl} - \mathbf{I}_{i,jkl} - \mathbf{I}_{ij,kl} - \mathbf{I}_{ik,jl} - \mathbf{I}_{jk,il} \}. \end{aligned}$$

A segunda derivada de $\frac{1}{n}\kappa_{ij}$, é dada por:

$$\frac{1}{n}\kappa_{ij}^{(kl)} = -\frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{I}_{j,ikl} + \mathbf{I}_{i,jkl} - \mathbf{I}_{i,j,kl} - \mathbf{I}_{i,k,jl} + \mathbf{I}_{ik,jl} + \mathbf{I}_{il,jk} \}$$

Prova: A prova está apresentada no Apêndice A.

Por último, consideremos algumas notações adicionais. Seja a matriz quadrada $\mathbf{D}^{(ij)}$, de ordem r (a dimensão do vetor de parâmetros), cujo (k, l) -ésimo elemento típico, $d_{k,l}^{(ij)}$, é dado por:

$$\begin{aligned} d_{k,l}^{(ij)} &= \frac{1}{6\pi} \{ \mathbf{I}_{k,l,ij} + \mathbf{I}_{i,l,jk} + \mathbf{I}_{j,l,ik} - \mathbf{I}_{i,j,kl} - 3(\mathbf{I}_{j,l,ik} + \mathbf{I}_{k,i,jl} + \mathbf{I}_{k,j,il}) - \mathbf{I}_{i,jkl} \\ &\quad + 3\mathbf{I}_{j,ikl} - \mathbf{I}_{k,ijl} - \mathbf{I}_{l,ijk} - \mathbf{I}_{ij,kl} + 3\mathbf{I}_{ik,jl} - \mathbf{I}_{il,jk} \}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

para $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$. Lembremos, também, que a inversa da matriz de informação de Fisher está definida pelo (i, j) -ésimo elemento típico $\kappa^{i,j} = -\kappa_{i,j}$, onde $\kappa^{i,j}$ é o (i, j) -ésimo elemento típico da inversa da matriz formada pelos elementos $\kappa_{i,j}$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Observe que esta matriz é simétrica e é diagonal quando o vetor de parâmetros β é formado por $\beta = (\beta_1, \sigma^2)^\top$, β_1 vetor de dimensão um e σ^2 é a variância da sequência a_t definida no modelo (3.1).

O procedimento de cálculo dos $\mathbf{I}$'s, que fundamentalmente consiste em usar o Teorema 4.4, tem a particularidade de ser necessário encontrar as singularidades r 's dos integrandos $\mathcal{U}$'s. Por exemplo, para o modelo $AR(1)$ dado em (3.4), com densidade espectral dada em (3.8), a singularidade “fundamental” (sem multiplicidade), para qualquer integrando $\mathcal{U}$, que está no interior do círculo unitário é $r_1^{-1} = \phi$, facilmente identificada por ser ϕ^{-1} a raiz do polinômio característico do modelo (3.4). Equivalentemente, temos para um modelo $MA(1)$, $r_1^{-1} = \theta$ e para um modelo $ARMA(1, 1)$ as singularidades são $r_1^{-1} = \phi$

e $r_2^{-1} = \theta$. Assim, os cumulantes definidos nas Proposições 4.4 e 4.5 ficam em função dos parâmetros do modelo. Uma situação que em geral não se apresenta é o caso de um modelo contendo um número de parâmetros p e/ou q maior que um, por exemplo, num modelo $AR(2)$ estacionário, definido por

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = a_t, \quad (4.13)$$

com a condição de estacionariedade dada por

$$|\phi_2| < 1, \quad \phi_1 + \phi_2 < 1 \quad \text{e} \quad \phi_2 - \phi_1 < 1. \quad (4.14)$$

A densidade espectral, $f(\lambda)$, é dada por

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - \phi_1 e^{i\lambda} - \phi_2 e^{i2\lambda}|^{-2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (4.15)$$

Neste caso, o modelo deixa de ter uma forma simples no sentido de poder detectar facilmente as singularidades das $\mathcal{U}$'s, mesmo se foram impostas condições sob os parâmetros para escrever os polinômios característicos $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ dados na expressão (3.2) da forma

$$\prod_{j=1}^p (1 - r_j^{-1} B) Y_t = \prod_{j=1}^q (1 - b_j^{-1} B) a_t, \quad (4.16)$$

onde os r 's e os b 's são as raízes reais dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$, respectivamente, tais que $|r_j| > 1$, $1 \leq j \leq p$ e $|b_j| > 1$, $1 \leq j \leq q$. Escrevendo (4.13) da forma (4.16), temos

$$(1 - r_1^{-1} B)(1 - r_2^{-1} B) Y_t = a_t, \quad \text{com } |r_1|, |r_2| > 1, r_1 \neq r_2, \quad (4.17)$$

onde podemos escrever os ϕ 's em função dos r 's, isto é,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1(r_1, r_2) = r_1^{-1} + r_2^{-1}, \\ \phi_2 &= \phi_2(r_1, r_2) = -r_1^{-1} r_2^{-1}. \end{aligned}$$

A densidade espectral fica

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - r_1^{-1} e^{i\lambda}|^{-2} |1 - r_2^{-1} e^{i\lambda}|^{-2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (4.18)$$

Ao aplicar os procedimentos, temos para alguns cumulantes de quarta ordem

$$\kappa_{r_1^{-1}, r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_1^{-1}} = \frac{-6(7r_1^{-4} r_2^{-2} - 9r_1^{-3} r_2^{-1} - 2r_1^{-2} r_2^{-2} + 3r_1^{-2} - 3r_1^{-1} r_2^{-1} + r_2^{-2} + 3)}{(r_1^{-2} - 1)^2 (r_1^{-1} r_2^{-1} - 1)^3},$$

$$\kappa_{r_1^{-1}, r_1^{-1} r_2^{-1} r_1^{-1}} = \frac{-2(2r_1^{-3} r_2^{-1} - r_1^{-2} - 1)}{(r_1^{-1} r_2^{-1} - 1)^2 (r_1^{-2} - 1)^3}.$$

Por outro lado, podemos escrever os r 's em termos dos ϕ 's como

$$\begin{aligned} r_1^{-1} &= r_1^{-1}(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 - (\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})/2\phi_2 \text{ e} \\ r_2^{-1} &= r_2^{-1}(\phi_1, \phi_2) = (\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})/2\phi_2 \end{aligned}$$

implicando na não unicidade dos κ 's como função dos ϕ 's, obrigando primeiro a estimar os ϕ 's para depois analisar as restrições dos r 's e, por último, escrever os κ 's como função dos ϕ 's.

A seguir são feitos alguns comentários referentes aos cumulantes obtidos das expressões do Teorema 4.3 e Proposição 4.2 em relação aos cumulantes conjuntos de derivadas de $l(\beta)$, definidos no Capítulo 2 e as derivadas dos cumulantes,

$$\kappa_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \beta_k}, \quad \kappa_{ij}^{(kl)} = \frac{\partial^2 \kappa_{ij}}{\partial \beta_k \partial \beta_l}, \quad \kappa_{ijk}^{(l)} = \frac{\partial \kappa_{ijk}}{\partial \beta_l}, \text{ etc.}$$

Comentário 4.1 Do Teorema 4.3, da Proposição 4.2 e das definições dos cumulantes dados acima, temos:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= -nI_{ij} + O(1), \\ \kappa_{i,j} &= nI_{ij} + O(1), \\ \kappa_{i,jk} &= nJ_{ijk} + O(1), \\ \kappa_{i,j,k} &= nK_{ijk} + O(1), \\ \kappa_{i,jkl} &= nL_{ijkl} + O(1), \\ \kappa_{ij,kl} &= -n^2 I_{ij} I_{kl} + nM_{ijkl} - n(I_{ij} + I_{kl}) + O(1), \\ \kappa_{i,j,kl} &= n^2 I_{ij} I_{kl} + nN_{ijkl} + nI_{ij} W + O(1), \end{aligned}$$

com o coeficiente W sendo de $O(1)$

Comentário 4.2 Usando o resultado de Leonov e Shiryaev (1959) para uma definição do cumulante de quarta ordem de um vetor aleatório e lembrando que $E(U_i) = 0$, vem

$$\text{cum}\{U_i, U_j, U_k, U_l\} = E(U_i U_j U_k U_l) - \frac{1}{2} \sum_{(3)} E(U_i U_j) E(U_k U_l)$$

$$E(U_i U_j U_k U_l) = n H_{ijkl} + \frac{1}{2} \sum_{(3)} \kappa_{i,j} \kappa_{k,l} + O(1).$$

Em termos dos coeficientes da primeira e última identidade do Teorema 4.3, temos

$$E(U_i U_j U_k U_l) = \frac{n^2}{2} \sum_{(3)} I_{ij} I_{kl} + n H_{ijkl} + \frac{nW}{2} \sum_{(3)} (I_{ij} + I_{kl}) + O(1),$$

onde $\sum_{(3)} I_{ij} I_{kl} = I_{ij} I_{kl} + I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}$, $\sum_{(3)} (I_{ij} + I_{kl}) = I_{ij} + I_{kl} + I_{ik} + I_{jl} + I_{il} + I_{jk}$ e $W = O(1)$ é um coeficiente que aparece na multiplicação, que pode ser diferente quando o par de índices é diferente. Com isto podemos escrever $\kappa_{i,j,k,l}$ em termos dos coeficientes das expressões dadas no Comentário 4.1,

$$\kappa_{i,j,k,l} = -\frac{n^2}{2} \sum_{(3)} I_{ij} I_{kl} + n H_{ijkl} - \frac{nW}{2} \sum_{(3)} (I_{ij} + I_{kl}) + O(1).$$

Comentário 4.3 Para calcular as expressões necessárias nas correções procedemos ao cálculo dos κ 's definidos acima da seguinte maneira. Primeiro usamos a Proposição 4.1 para obter a j -ésima derivada da log-verossimilhança $U_{i_1 \dots i_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$ em relação aos componentes β_q , $q = 1, \dots, r$ do vetor de prâmetros β , que tem como único termo aleatório uma forma quadrática em $\mathbf{Y}$. Depois, usa-se o Teorema 4.2 para calcular o primeiro momento de produtos de formas quadráticas, que surgem ao fazer o produto dos U 's. Isto resulta em obter o traço de um produto de matrizes dependentes da matriz de autocovariâncias Σ . A seguir usamos o Teorema 4.1 para calcular os traços, melhor dizendo, n^{-1} traços. Por último, usamos só o termo $W_1 = O(1)$ e fazemos com que o traço seja igual a W_1 .

Até agora temos que usar os seguintes termos:

$$\kappa_{ij} = -I_{ij}, \tag{4.19}$$

$$\kappa_{i,j} = I_{ij}, \tag{4.20}$$

$$\kappa_{ijk} = R_{ijk}, \tag{4.21}$$

$$\kappa_{i,jk} = J_{ijk}, \tag{4.22}$$

$$\kappa_{i,j,k} = K_{ijk}, \quad (4.23)$$

$$\kappa_{ijkl} = P_{ijkl}, \quad (4.24)$$

$$\kappa_{i,jkl} = L_{ijkl}, \quad (4.25)$$

$$\kappa_{ij,kl} = M_{ijkl}, \quad (4.26)$$

$$\kappa_{i,j,kl} = N_{ijkl}, \quad (4.27)$$

$$\kappa_{i,j,k,l} = H_{ijkl}. \quad (4.28)$$

O procedimento descrito para calcular os cumulantes é semelhante ao usado por Ravishanker, Melnick e Tsai (1990) para calcular as funções usadas em geometria diferencial.

4.3 Fator de correção de Bartlett na forma matricial

Esta seção dedica-se a expressar o fator de correção de Bartlett de uma maneira tal que em futuros trabalhos possa ser implementada, quando for considerado um modelo $ARMA(p, q)$. Isso é feito usando notação matricial, seguindo os resultados de Cordeiro (1993) e Aubin (1995: Cap. 2). Os elementos das matrizes são definidos em função das integrais I 's dadas na seção anterior.

Lembremos que o problema geral é testar as hipóteses sobre os parâmetros do modelo considerado, ou sobre subconjunto do vetor de parâmetros β , tal como foi definido na Seção 2.2.1 por

$$H : \beta_1 = \beta_1^{(0)} \quad vs \quad A : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)}, \quad (4.29)$$

onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_s)^\top$ é um parâmetro de interesse s -dimensional, $\beta_2 = (\beta_{s+1}, \dots, \beta_r)^\top$ um parâmetro $(r - s)$ -dimensional de perturbação e $\beta_1^{(0)}$ é um vetor especificado.

4.3.1 Elementos das matrizes

O fator de correção de Bartlett $\mathbf{c}$, dado pela expressão (2.11), envolve os termos denotados por ε , dados pela expressão

$$\varepsilon_r = \Sigma'(l_{ijkl} - l_{ijklmn}) \text{ e } \varepsilon_{r-s} = \Sigma''(l_{ijkl} - l_{ijklmn}),$$

onde Σ' é o somatório sobre todas as componentes do vetor β , isto é, os índices i, j, k, l, m e n variam sobre os r parâmetros, Σ'' denota o somatório sobre todas as componentes do vetor de parâmetros de incômodo β_2 , isto é, sobre os $r - s$ parâmetros, $\beta_{s+1}, \dots, \beta_r$ e l 's são dados por

$$l_{ijkl} = \kappa^{ij} \kappa^{kl} \{ \kappa_{ijkl}/4 - \kappa_{ijk}^{(l)} + \kappa_{ij}^{(kl)} \},$$

$$l_{ijklmn} = \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \{ \kappa_{ikm}(\kappa_{jln}/6 - \kappa_{jn}^{(l)}) + \kappa_{ikl}(\kappa_{jmn}/4 - \kappa_{jn}^{(m)}) + \kappa_{ik}^{(m)} \kappa_{jn}^{(l)} + \kappa_{ik}^{(l)} \kappa_{jn}^{(m)} \}.$$

Dados os termos P_{ijkl} da Proposição 4.4, Proposição 4.5 e expressão (4.12) podemos escrever para o termo envolvido em l_{ijkl} ,

$$\frac{1}{n} \left(\kappa_{ijkl}/4 - \kappa_{ijk}^{(l)} + \kappa_{ij}^{(kl)} \right) = d_{k,l}^{(ij)} + O(n^{-1}). \quad (4.30)$$

Definimos a matriz $\mathbf{T}$, quadrada de ordem r , cujo (i, j) -ésimo elemento típico $t_{i,j}$ é dado por $t_{i,j} = \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D}^{(ij)})$, para $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Assim, desprezando-se termos de ordem n^{-1} podemos escrever $\Sigma' l_{ijkl}$ como

$$\begin{aligned} \Sigma' l_{ijkl} &= \Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \{ \kappa_{ijkl}/4 - \kappa_{ijk}^{(l)} + \kappa_{ij}^{(kl)} \} = \Sigma_{ij} \kappa^{ij} \Sigma_{kl} \kappa^{kl} d_{k,l}^{(ij)} \\ &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} (-\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D}^{(ij)})) = \Sigma_{ij} \kappa^{ij} (-t_{i,j}) = \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Seja o seguinte elemento:

$$s_{jln} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{I}_{j,l,n} - \mathbf{I}_{l,jn} \right\} = s_{nlj}. \quad (4.32)$$

Usando a primeira expressão dada na Proposição (4.5) e o elemento R_{jln} da Proposição (4.4) temos que

$$\kappa_{ijk} = s_{ijk} + \kappa_{ik}^{(j)}.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} & \kappa_{ikm}(\kappa_{jln}/6 - \kappa_{jn}^{(l)}) + \kappa_{ikl}(\kappa_{jmn}/4 - \kappa_{jn}^{(m)}) + \kappa_{ik}^{(m)}\kappa_{jn}^{(l)} + \kappa_{ik}^{(l)}\kappa_{jn}^{(m)} = \\ & \frac{1}{6}\left\{s_{ikm}s_{jln} + \kappa_{im}^{(k)}s_{jln} - 5s_{ikm}\kappa_{jn}^{(l)} - 5\kappa_{im}^{(k)}\kappa_{jn}^{(l)}\right\} + \frac{1}{4}\left\{s_{ikl}s_{jmn} + \kappa_{il}^{(k)}s_{jmn} - \right. \\ & \left. 3s_{ikl}\kappa_{jn}^{(m)} - 3\kappa_{il}^{(k)}\kappa_{jn}^{(m)}\right\} + \kappa_{ik}^{(m)}\kappa_{jn}^{(l)} + \kappa_{ik}^{(l)}\kappa_{jn}^{(m)}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $\Sigma' l_{ijklmn}$ como

$$\begin{aligned} \Sigma' l_{ijklmn} = & \Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \left\{ \frac{1}{6}(s_{ikm}s_{jln} + \kappa_{im}^{(k)}s_{jln} - 5s_{ikm}\kappa_{jn}^{(l)} - 5\kappa_{im}^{(k)}\kappa_{jn}^{(l)}) + \right. \\ & \frac{1}{4}(s_{ikl}s_{jmn} + \kappa_{il}^{(k)}s_{jmn} - 3s_{ikl}\kappa_{jn}^{(m)} - 3\kappa_{il}^{(k)}\kappa_{jn}^{(m)}) + \kappa_{ik}^{(m)}\kappa_{jn}^{(l)} + \\ & \left. \kappa_{ik}^{(l)}\kappa_{jn}^{(m)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Definimos agora $2r+1$ matrizes quadradas de ordem r , que nos possibilitam escrever o primeiro termo, $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikm}s_{jln}$, da expressão (4.33). Seja a matriz $\mathbf{S}^{(i)}$, cujo (n, l) -ésimo elemento típico, $s_{nl}^{(i)}$ é dado por s_{nli} e a matriz $\mathbf{S1}^{(i)}$, cujo (n, l) -ésimo elemento típico, $s1_{nl}^{(i)}$, é dado por $s1_{nl}^{(i)} = \Sigma_j k^{ij} s_{jln}$, para $i, l, n \in \{1, 2, \dots, r\}$ e seja a matriz $\mathbf{\Gamma 1}$, cujo (i, l) -ésimo elemento típico, $\gamma 1_{il}$, é dado por $\gamma 1_{il} = tr(\mathbf{S1}^{(i)} \mathbf{S1}^{(l)})$, para $i, l \in \{1, 2, \dots, r\}$. Com estas notações, escrevemos o primeiro termo na soma (4.33) da seguinte forma:

$$\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{jln} s_{ikm} = \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \Sigma_{il} (\Sigma_j k^{ij} s_{jln}) (\Sigma_k \kappa^{kl} s_{ikm}) \quad (4.34)$$

$$= \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \Sigma_{il} s1_{nl}^{(i)} s1_{nl}^{(i)} \quad (4.35)$$

$$= \Sigma_{mn} \kappa^{mn} tr(\mathbf{S1}^{(m)} \mathbf{S1}^{(n)}) = -tr(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{\Gamma 1}). \quad (4.36)$$

Para o segundo termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{im}^{(k)} s_{jln}$, definimos agora $2r+1$ matrizes quadradas de ordem r . Sejam $\mathbf{K}^{(i)}$, a matriz cujo (k, l) -ésimo elemento típico, $K_{kl}^{(i)}$, é dado por $K_{kl}^{(i)} = \kappa_{li}^{(k)}$, para $i, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\mathbf{K1}^{(j)} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(j)}$, $\mathbf{\Gamma 2}$, a matriz cujo (i, j) -ésimo elemento típico é $\gamma 2_{ij} = tr(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(j)}) = tr(\mathbf{S1}^{(i)} \mathbf{K1}^{(j)})$. Com estas notações, podemos escrever o segundo termo na soma em (4.33) da seguinte forma:

$$\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{im}^{(k)} s_{jln} = \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \Sigma_{il} (\Sigma_j k^{ij} s_{jln}) (\Sigma_k \kappa^{kl} \kappa_{im}^{(k)})$$

$$\begin{aligned}
&= \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}^{(n)} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{K}^{(m) \top}) \\
&= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 2).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Analogamente, para obter o terceiro termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikm} \kappa_{jn}^{(l)}$, temos

$$\begin{aligned}
\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikm} \kappa_{jn}^{(l)} &= \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \Sigma_{jk} (\Sigma_i \kappa^{ji} s_{ikm}) (\Sigma_l \kappa^{lk} \kappa_{jn}^{(l)}) \\
&= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 2).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Para obter o quarto termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{im}^{(k)} \kappa_{jn}^{(l)}$, seja a matriz $\Gamma 3$, cujo (m, n) -ésimo elemento típico é dado por $\gamma 3_{mn} = \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(m) \top} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(n)}) = \text{tr}(\mathbf{K} 1^{(m) \top} \mathbf{K} 1^{(n)})$. Com estas notações, podemos escrever o quarto termo na soma (4.33) da seguinte forma;

$$\begin{aligned}
\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{im}^{(k)} \kappa_{jn}^{(l)} &= \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \Sigma_{jk} (\Sigma_i \kappa^{ji} \kappa_{im}^{(k)}) (\Sigma_l \kappa^{kl} \kappa_{jn}^{(l)}) \\
&= \Sigma_{mn} \kappa^{mn} \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(m) \top} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(n)}) \\
&= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 3).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Para o quinto termo da soma dada na expressão (4.33), seja a matriz $\Gamma 4$, cujo (i, j) -ésimo elemento típico $\gamma 4_{mn} = \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}^{(m)}) \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}^{(n)}) = \text{tr}(\mathbf{S} 1^{(m)}) \text{tr}(\mathbf{S} 1^{(n)})$. Com estas notações, podemos escrever $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikl} s_{jmn}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikl} s_{jmn} &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} (\Sigma_{kl} \kappa^{kl} s_{ikl}) (\Sigma_{mn} \kappa^{mn} s_{jmn}) \\
&= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}^{(i)}) \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}^{(j)}) \\
&= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 4).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Para o sexto termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{il}^{(k)} s_{jmn}$, usamos as 2r matrizes definidas em (4.34) e (4.37). Seja $\Gamma 5$ a matriz, cujo (i, l) -ésimo elemento típico é dado por $\gamma 5_{ij} = \text{tr}(\mathbf{K}^{(i)} \mathbf{K}^{-1}) \text{tr}(\mathbf{S}^{(j)} \mathbf{K}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{K} 1^{(i)}) \text{tr}(\mathbf{S} 1^{(j)})$. Usando a identidade dada na expressão (4.32), temos para o sexto termo da soma (4.33)

$$\begin{aligned}
\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{il}^{(k)} s_{jmn} &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} (\Sigma_{kl} \kappa^{kl} \kappa_{il}^{(k)}) (\Sigma_{mn} \kappa^{mn} s_{jmn}) \\
&= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} \text{tr}(\mathbf{K}^{(i)} \mathbf{K}^{-1}) \text{tr}(\mathbf{S}^{(j)} \mathbf{K}^{-1}) \\
&= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 5).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Analogamente, para o sétimo termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikl} \kappa_{jn}^{(m)}$, temos

$$\begin{aligned} \Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} s_{ikl} \kappa_{jn}^{(m)} &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} (\Sigma_{kl} \kappa^{kl} s_{ikl}) (\Sigma_{im} \kappa^{mn} \kappa_{jn}^{(m)}) \\ &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} \text{tr}(\mathbf{S}^{(i)} \mathbf{K}^{-1}) \text{tr}(\mathbf{K}^{(j)} \mathbf{K}^{-1}) \\ &= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 5). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para o oitavo termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{il}^{(k)} \kappa_{jn}^{(m)}$, usamos as notações das expressões (4.34), (4.37) e a definição de $\Gamma 6$, matriz cujo (i, j) éximo elemento típico é $\gamma_{6ij} = \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(i)}) \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(j)})$. Assim o oitavo termo na soma (4.33) reduz-se a

$$\begin{aligned} \Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{il}^{(k)} \kappa_{jn}^{(m)} &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} \Sigma_{kl} \kappa^{kl} \kappa_{il}^{(k)} (\Sigma_{mn} \kappa^{mn} \kappa_{jn}^{(m)}) \\ &= \Sigma_{ij} \kappa^{ij} \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(i)}) \text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{(j)}) \\ &= -\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \Gamma 6). \end{aligned} \quad (4.43)$$

O nono termo da soma dada na expressão (4.33), $\Sigma' \kappa^{ij} \kappa^{kl} \kappa^{mn} \kappa_{ik}^{(m)} \kappa_{jn}^{(l)}$, é equivalente ao quarto termo. E o décimo termo é equivalente ao oitavo termo.

Com os resultados acima podemos escrever (4.33) por:

$$\begin{aligned} \Sigma' l_{ijklmn} &= -\text{tr} \left\{ \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{1}{6} \left\{ \Gamma 1 - 4\Gamma 2 - 5\Gamma 3 \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \Gamma 4 - 2\Gamma 5 - 3\Gamma 6 \right\} + \Gamma 3 + \Gamma 6 \right) \right\} \\ &= -\text{tr} \left\{ \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{1}{6} \left\{ \Gamma 1 - 4\Gamma 2 + \Gamma 3 \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \Gamma 4 - 2\Gamma 5 + \Gamma 6 \right\} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde as matrizes Γ 's estão dadas nas expressões (4.34)-(4.43). Assim, temos

$$\varepsilon_r = \text{tr} \left(\mathbf{K}^{-1} (\mathbf{T} + \mathbf{R}) \right), \quad (4.45)$$

onde $\mathbf{R} = \frac{1}{6} \left\{ \Gamma 1 - 4\Gamma 2 + \Gamma 3 \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \Gamma 4 - 2\Gamma 5 + \Gamma 6 \right\}$ e $\mathbf{T}$ está definida na expressão (4.31).

Comentário 4.4 Antes mencionamos que a estatística da razão de verossimilhança corrigida é obtida por $RV^* = \mathbf{c}^{-1} RV$ onde $\mathbf{c} = 1 + (\varepsilon_r - \varepsilon_{r-s})/s$. Levando em conta o

Comentário 4.3, em que usamos somente o termo $W_1 = O(1)$, podemos considerar

$$\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{r-s}}{sn} = n^{-1}h(\beta).$$

Mais explicitamente, $h(\beta)$ é igual a $(\varepsilon_r - \varepsilon_{r-s})/s$, onde os ε 's são calculados usando os cumulantes aproximado como foi detalhado no Comentário 4.3. Desta maneira, se $n^{-1}h(\beta) = \mathbf{h}(\beta, n)$ é tal que $|\mathbf{h}(\beta, n)| < 1$ e $\left| \frac{\partial}{\partial \beta_i} \mathbf{h}(\beta, n) \right| < k$, para todo β , $i = 1, \dots, r$, onde k é uma constante, então

$$\sum_{j \geq 0} \left\{ -\mathbf{h}(\beta, n) \right\}^j \text{ converge.}$$

Logo podemos usar o resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{c}} &= \frac{1}{1 - \left\{ -\mathbf{h}(\beta, n) \right\}} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left\{ -\mathbf{h}(\beta, n) \right\}^j. \end{aligned}$$

Considerando termos até ordem n^{-1} obtemos para $\mathbf{c}^{-1}$

$$\mathbf{c}^{-1} = 1 - \frac{h(\beta)}{n}. \quad (4.46)$$

4.3.2 Um exemplo

Consideremos o modelo $AR(1)$, dado por (3.4), para mostrar um exemplo do uso da forma matricial (4.45) para calcular o fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança, quando se quer testar as hipóteses $H_2 : \phi = \phi^{(0)}$ vs $A : \phi \neq \phi^{(0)}$, quando σ^2 é considerado fixo e $H_1 : \sigma^2 = \sigma^{(0)2}$ vs $A : \sigma^2 \neq \sigma^{(0)2}$, quando ϕ é considerado de incômodo. Daremos as matrizes necessárias para os cálculos, construídas a partir dos cumulantes dados no Apêndice C.

Considerando a soma sobre todos os índices dos parâmetros do vetor $\beta = (\sigma^2, \phi)^\top$, sejam as matrizes

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\phi^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\sigma^4 & 0 \\ 0 & 1-\phi^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma^8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)} \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)} & -2 \frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{(2,1)},$$

$$\mathbf{D}^{(2,2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)} & -\frac{2\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2} \\ 0 & \frac{2(+3\phi^2)}{(\phi^2-1)^3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \left(\text{tr}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D}^{(ij)}) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^4} & \frac{2\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ \frac{2\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} & -\frac{7\phi^2+1}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Usando (4.31), temos para $\Sigma' l_{ijkl}$

$$\Sigma' l_{ijkl} = \frac{9\phi^2 - 1}{\phi^2 - 1}.$$

Ainda,

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} \\ -\frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 2 \frac{\phi}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\phi}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sigma^4} & -\frac{2\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ -\frac{2\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} & \frac{4}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sigma^4} & \frac{2\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ 0 & -\frac{4\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sigma^4} & 0 \\ 0 & \frac{4\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}4 = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sigma^4} & -\frac{6\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ -\frac{6\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} & \frac{4\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}5 = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sigma^4} & \frac{6\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ -\frac{4\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} & -\frac{4\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}6 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sigma^4} & 4 \frac{\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ 4 \frac{\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} & 4 \frac{\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} \frac{1}{\sigma^4} & -\frac{31}{6} \frac{\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} \\ \frac{7}{6} \frac{\phi}{(\phi^2-1)\sigma^2} & \frac{2}{3} \frac{1}{(\phi^2-1)^2} + \frac{22}{3} \frac{\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Usando (4.44) e (4.45), temos para $\Sigma' l_{ijklmn}$ e ε_2 , respectivamente,

$$\Sigma' l_{ijklmn} = \frac{55\phi^2 - 7}{6(\phi^2 - 1)} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{6}.$$

Para o caso em que σ^2 é considerado fixo e conhecido, no problema de testar as hipóteses $H_2 : \phi = \phi^{(0)}$ vs $A : \phi \neq \phi^{(0)}$, os termos $\Sigma' l_{ijkl}$ e $\Sigma' l_{ijklmn}$ são iguais aos termos

$\Sigma''l_{ijkl}$ e $\Sigma''l_{ijklmn}$ se é considerado o problema de testar as hipóteses $H_1 : \sigma^2 = \sigma^{2(0)}$ vs $A : \sigma^2 \neq \sigma^{2(0)}$, quando ϕ é um parâmetro de incômodo. As matrizes usadas estão definidas como o bloco correspondente ao ϕ nas matrizes acima. Dessa forma, temos

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi^2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sigma^4(\phi^2-1)} \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} -2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{(2,1)},$$

$$\mathbf{D}^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2\frac{1+3\phi^2}{(\phi^2-1)^3} \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{2(1+3\phi^2)}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Usando (4.31), temos

$$\Sigma' l_{ijkl} = \frac{2(1+3\phi^2)}{\phi^2-1}$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} \end{pmatrix}, \mathbf{S}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2\phi}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}, \mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)}$$

$$\Gamma 1 = \begin{pmatrix} 4\frac{\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix} = \Gamma 3 = \Gamma 4 = \Gamma 6, \Gamma 2 = \begin{pmatrix} -\frac{4\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix} = \Gamma 5, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{8\phi^2}{(\phi^2-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Usando (4.44) e (4.45), temos

$$\Sigma'' l_{ijklmn} = \frac{8\phi^2}{\phi^2-1} \text{ e } \varepsilon_1 = -2.$$

Assim, obtemos o fator de correção de Bartlett, $\mathbf{c}$, dado em (2.11) e usando o Comentário 4.4 seguem-se as correspondentes estatísticas da razão de verossimilhança corrigidas, RV^* , que estão dadas por:

Para testar H_1 ,

$$\mathbf{c} = 1 + \frac{11}{6n}, \quad RV^* = \left(1 - \frac{11}{6n}\right) RV.$$

Para testar H_2 ,

$$\mathbf{c} = 1 - \frac{2}{n}, \quad RV^* = \left(1 + \frac{2}{n}\right) RV.$$

4.4 Fator de correção tipo-Bartlett na forma matricial

Considerando um modelo com a log-verossimilhança regular $l((\beta_1, \beta_2))$, o problema geral é testar as hipóteses nos parâmetros do modelo considerado que estão definindo a $l(\beta)$,

isto é,

$$H : \beta_1 = \beta_1^{(0)} \quad vs \quad A : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)}, \quad (4.47)$$

onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_s)^\top$ é um parâmetro de interesse s -dimensional e, $\beta_2 = (\beta_{s+1}, \dots, \beta_r)^\top$, um parâmetro $(r-s)$ -dimensional de perturbação; $\beta_1^{(0)}$ é um vetor especificado. Esta seção é dedicada a escrever o fator de correção tipo-Bartlett, dado na expressão (2.16), na forma matricial usando os resultados descritos na Seção 4.2. Esta correção precisa do cálculo dos coeficientes do polinômio em S , a , b e c dados em função dos coeficientes A_1, A_2 e A_3 , expressões (2.13)-(2.15), respectivamente, o que implica em escrever os A 's na forma matricial. Primeiro, escreve-se uma forma matricial usando os cumulantes κ 's "exatos", embora nos modelos particulares usamos os aproximados dados na Seção 4.2. Depois, escrevemos as matrizes usando novos elementos, definidos em termos das integrais I 's dadas na Seção 4.2.

4.4.1 Elementos das matrizes usando os cumulantes

Fazendo uso das matrizes definidas em (2.12) e das notações e definições dadas no Apêndice B, escrevemos os coeficientes A_1, A_2 e A_3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= tr \left(M \left\{ 3 \left[\text{Tr}_1^{11} + 2\text{Tr}_2^{11} + 2\text{Tr}_3^{11} + 4\text{Tr}_4^{11} \right] - 6 \left[\text{Tr}_1^{14} + \text{Tr}_2^{14} \right] \right\} \right) \\ &\quad + tr \left(A \left\{ 6 \left[\text{Tr}_1^{13} - \text{Tr}_2^{13} + 2\text{Tr}_3^{13} - 2\text{Tr}_4^{13} \right] - 6 \left[M \left\{ \text{Tr}_1^{14} + \text{Tr}_2^{14} \right\} \right] \right\} \right) \\ &= tr \left(3M \left\{ \left[\text{Tr}_1^{11} + 2\text{Tr}_2^{11} + 2\text{Tr}_3^{11} + 4\text{Tr}_4^{11} \right] - 2 \left[\text{Tr}_1^{14} + \text{Tr}_2^{14} \right] \right\} \right) \\ &\quad + 6A \left\{ \text{Tr}_1^{13} - \text{Tr}_2^{13} + 2\text{Tr}_3^{13} - 2\text{Tr}_4^{13} - \left[\text{Tr}_1^{14} + \text{Tr}_2^{14} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= tr \left(A \left\{ -3\text{Tr}^{21} - 6\text{Tr}^{23} \right\} \right) + tr \left(M \left\{ 6\text{Tr}_1^{22} + 12\text{Tr}_2^{22} + 3\text{Tr}^{24} \right\} \right) \\ &= -3tr \left(A \left\{ \text{Tr}^{21} + 2\text{Tr}^{23} \right\} \right) - M \left\{ 2\text{Tr}_1^{22} + 4\text{Tr}_2^{22} + \text{Tr}^{24} \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

e

$$A_3 = 3tr \left(M\text{Tr}^{31} \right) + 2tr \left(M\text{Tr}^{32} \right) = tr \left(M \left\{ 3\text{Tr}^{31} + 2\text{Tr}^{32} \right\} \right). \quad (4.50)$$

Os detalhes são dados no Apêndice B.

Uma forma mais eficiente

Para podermos escrever de forma mais eficiente os coeficientes A_1 e A_2 , primeiro damos algumas funções dos cumulantes em termos das integrais definidas na Seção 4.2.2 e usamos as expressões (4.21), (4.22) e a Proposição 4.4. Temos para $\kappa_{ijk} + 2\kappa_{i,jk}$

$$\kappa_{ijk} + 2\kappa_{i,jk} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{I}_{i,jk} - \mathbf{I}_{i,j,k} - \mathbf{I}_{j,ik} - \mathbf{I}_{k,ij} \right) = \delta_{ijk}. \quad (4.51)$$

Usando as expressões (4.22), (4.23) e a Proposição 4.4 temos para $\kappa_{i,jk} - \kappa_{i,j,k}$

$$\kappa_{i,jk} - \kappa_{i,j,k} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{I}_{i,jk} - 3\mathbf{I}_{i,j,k} \right) = \xi_{ijk}. \quad (4.52)$$

Usando as expressões (4.28), (4.27) e a Proposição 4.4 temos para $\kappa_{i,j,k,l} - \kappa_{i,j,kl}$

$$\kappa_{i,j,k,l} - \kappa_{i,j,kl} = \frac{1}{2\pi} \left(2\mathbf{I}_{i,jk} + \mathbf{I}_{i,j,k} \right) = \omega_{ijkl}. \quad (4.53)$$

Com estas podemos escrever os coeficientes A_1 e A_2 da forma dada nas expressões (B.20) e (B.21) no Apêndice B, respectivamente, onde os coeficientes A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{14} e A_{22} agora são da seguinte forma:

$$A_{11} = 3\Sigma' \delta_{ijk} \delta_{kst} a_{ij} a_{st} m_{kr}, \quad A_{12} = -6\Sigma' \delta_{ijk} \kappa_{r,s,t} a_{ij} a_{kr} m_{st}, \quad (4.54)$$

$$A_{13} = 6\Sigma' \xi_{ijk} \delta_{rst} a_{js} a_{kt} m_{ir}, \quad A_{14} = -6\Sigma' \omega_{ijk} a_{kr} m_{ij}, \quad (4.55)$$

$$A_{22} = 6\Sigma' \delta_{ijk} \kappa_{r,s,t} a_{ij} m_{ir} m_{st}. \quad (4.56)$$

Procedemos de maneira análoga ao feito nas expressões (4.48), (4.49) e (4.50). Antes definamos as matrizes correspondentes. Sejam estas

$$\begin{aligned} \Delta^{(k)} &= (\delta_{ijk}), \quad \overline{\Delta}^{(i)} = (\delta_{ijk}), \quad \Xi^{(k)} = (\xi_{ijk}), \quad \Omega^{(ij)} = (\omega_{ijk}), \quad \mathbf{N}^{(r)} = (\kappa_{r,s,t}), \\ \text{Tr}^{11} &= \left(\text{tr}(\mathbf{A} \Delta^{(k)}) \text{tr}(\mathbf{A} \overline{\Delta}^{(r)}) \right), \quad \text{Tr}^{12} = \left(\text{tr}(\mathbf{A} \Delta^{(k)}) \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{N}^{(r)}) \right), \\ \text{Tr}^{13} &= \left(\text{tr}(\mathbf{A} \Xi^{(k)}) \text{tr}(\mathbf{M} \Delta^{(t)}) \right), \quad \text{Tr}^{14} = \left(\text{tr}(\mathbf{A} \Omega^{(ij)}) \right) \text{ e } \text{Tr}^{22} = \left(\text{tr}(\mathbf{A} \Delta^{(k)}) \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{N}^{(r)}) \right). \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever os coeficientes como segue:

$$A_{11} = 3\text{tr}(\mathbf{M} \text{Tr}^{11}), \quad A_{12} = -6\text{tr}(\mathbf{A} \text{Tr}^{12}), \quad (4.57)$$

$$A_{13} = 6\text{tr}(\mathbf{A} \text{Tr}^{13}), \quad A_{14} = -6\text{tr}(\mathbf{M} \text{Tr}^{14}), \quad (4.58)$$

$$A_{22} = 6\text{tr}(\mathbf{M} \text{Tr}^{22}). \quad (4.59)$$

Para os coeficientes A_1 e A_2 , temos

$$\begin{aligned} A_1 &= 3tr(\mathbf{M}\mathbf{Tr}^{11}) - 6tr(\mathbf{A}\mathbf{Tr}^{12}) + 6tr(\mathbf{A}\mathbf{Tr}^{13}) - 6tr(\mathbf{M}\mathbf{Tr}^{14}) \\ &= 3tr(\mathbf{M}[\mathbf{Tr}^{11} - 2\mathbf{Tr}^{14}]) - 6tr(\mathbf{A}[\mathbf{Tr}^{12} - \mathbf{Tr}^{13}]), \end{aligned} \quad (4.60)$$

e usando (4.49) e fazendo $\mathbf{Tr}^{22} = \mathbf{Tr}_1^{22} + 2\mathbf{Tr}_2^{22}$, temos

$$A_2 = -3tr(\mathbf{A}\{\mathbf{Tr}^{21} + 2\mathbf{Tr}^{23}\} - \mathbf{M}\{2\mathbf{Tr}^{22} + \mathbf{Tr}^{24}\}). \quad (4.61)$$

4.4.2 Um exemplo

Consideremos o modelo $AR(1)$, dado em (3.4), para mostrar um exemplo do uso da forma matricial encontrada em (4.50), (4.60) e (4.61) para calcular o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística escore, quando se quer testar as hipóteses $H_1 : \phi = \phi^{(0)}$ vs $A : \phi \neq \phi^{(0)}$, quando σ^2 é considerado parâmetro de incômodo. Daremos as matrizes necessárias para os cálculos, construídas a partir dos cumulantes dados no Apêndice C. Note que o vetor de parâmetros considerado é $\beta = (\phi, \sigma^2)^\top$. Sejam as matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\phi^2-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\phi^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1-\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-4\phi}{(\phi^2-1)^2} & \frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} \\ \frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Xi^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{-8\phi}{(\phi^2-1)^2} & \frac{3}{\sigma^2(\phi^2-1)} \\ \frac{3}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sigma^6} \end{pmatrix}, \\ \Omega^{(1,1)} &= \begin{pmatrix} \frac{-2(7+17\phi^2)}{(\phi^2-1)^3} & \frac{12\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2} \\ \frac{12\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2} & \frac{-2}{\sigma^4(\phi^2-1)} \end{pmatrix}, \quad \Omega^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{14\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2} & \frac{-4}{\sigma^2(\phi^2-1)} \\ \frac{-4}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \end{pmatrix} = \Omega^{(2,1)}, \\ \Omega^{(2,2)} &= \begin{pmatrix} \frac{-4}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^8} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{6\phi}{(\phi^2-1)^2} & \frac{-2}{\sigma^2(\phi^2-1)} \\ \frac{-2}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sigma^2(\phi^2-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com estas matrizes obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}^{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Tr}^{12} = \mathbf{Tr}^{22}, \quad \mathbf{Tr}^{13} = \begin{pmatrix} \frac{6}{1-\phi^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Tr}^{14} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1-\phi^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^4} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Tr}^{21} &= \begin{pmatrix} \frac{36\phi^2}{(\phi^2-1)^2} & \frac{12\phi}{(1-\phi^2)\sigma^2} \\ \frac{12\phi}{(1-\phi^2)\sigma^2} & \frac{4}{\sigma^4} \end{pmatrix} = \mathbf{Tr}^{23} = \mathbf{Tr}^{31} = \mathbf{Tr}^{32} \text{ e} \\ \mathbf{Tr}^{24} &= \begin{pmatrix} \frac{6(3+7\phi^2)}{(\phi^2-1)^2} & \frac{18\phi}{(1-\phi^2)\sigma^2} \\ \frac{18\phi}{(1-\phi^2)\sigma^2} & \frac{6}{\sigma^4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, temos para os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 dados nas expressões (4.60), (4.61) e (4.50), respectivamente,

$$A_1 = \underbrace{-24}, \quad A_2 = \underbrace{-18} \frac{1-11\phi^2}{1-\phi^2} \text{ e } A_3 = \underbrace{180} \frac{\phi^2}{1-\phi^2}.$$

E, para os coeficientes a , b e c dados na expressão (2.17), com um parâmetro de incômodo, $s = 1$, obtemos

$$a = \frac{\phi^2}{1-\phi^2}, \quad b = \frac{1}{2} \frac{1+9\phi^2}{-1+\phi^2}, \quad c = \frac{-1}{2}.$$

Com esses coeficientes, a estatística escore corrigida fica da seguinte forma:

$$S^* = S \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1+9\phi^2}{2(\phi^2-1)} S + \frac{\phi^2}{1-\phi^2} S^2 \right) \right\}, \quad (4.62)$$

e observa-se que a correção não depende de σ^2 , logo avalia-se S^* em $\phi = \phi^{(0)}$.

4.5 Aplicação

4.5.1 As estatísticas testes corrigidas

A seguir calculamos as correções de Bartlett e tipo-Bartlett para as estatísticas testes razão de verossimilhança e escore usando as formas matriciais das Seções 4.3 e 4.4. Os

cumulantes aproximados das derivadas da log-verossimilhança, seguindo as expressões das Proposições 4.4 e 4.5 para os tres modelos considerados, são colocados no Apêndice C.

Usando estes resultados, podemos obter o fator de correção de Bartlett que corrige a estatística RV , usando a expressão (2.11) e o fator de correção tipo-Bartlett para corrigir a estatística escore S , segundo a expressão (2.16).

Comentário 4.5 Para o cálculo da correção da estatística RV e S consideramos o Comentário 4.4, isto é, as quantidades calculadas, ε 's para o fator de correção de Bartlett e a , b e c para o fator de correção tipo-Bartlett, são independente do n . Depois fazemos com que as correções sejam de ordem n^{-1} , multiplicando issas quantidades por n^{-1} .

Modelo auto-regressivo de ordem 1

1. Correções para a estatística RV

(a) Um parâmetro fixo

Neste caso $r = 1$ e, então, precisamos calcular ε_1 , onde $s = 1$ refere-se ao correspondente parâmetro unidimensional de interesse e nenhum parâmetro de incômodo, $r - s = 0$.

(i) Parâmetro de interesse ϕ , com σ^2 conhecido

$$\Sigma'(l_{ijkl}) = 2 \frac{1 + 3\phi^2}{\phi^2 - 1}, \quad \Sigma'(l_{ijklmn}) = 8 \frac{\phi^2}{\phi^2 - 1}, \quad \text{e } \varepsilon_1 = -2$$

e usando Comentário 4.4 temos para RV^*

$$c = 1 - \frac{2}{n}, \quad RV^* = \left\{ 1 + \frac{2}{n} \right\} RV, \quad (4.63)$$

coincidindo com o resultado encontrado por Ravishanker et al. (1990).

(ii) Parâmetro de interesse σ^2 , com ϕ conhecido

$$\Sigma' l_{ijkl} = 3, \quad \Sigma' l_{ijklmn} = \frac{8}{3}, \quad \text{e } \varepsilon_1 = \frac{1}{3}$$

$$c = 1 + \frac{1}{3n}, \quad RV^* = \left\{ 1 - \frac{1}{3n} \right\} RV. \quad (4.64)$$

Estas correções coincidem com as obtidas por Taniguchi (1991: pág. 109).

(b) Um parâmetro de interesse e um de incômodo.

Neste caso $r = 2$ e $s = 1$ e devemos calcular ε_2 e ε_1 , com $r = 2$ (dois parâmetros do modelo) e $r - s = 1$ (um parâmetro de incômodo usado para o cálculo do somatório Σ'').

(i) Parâmetro de interesse ϕ , e σ^2 é o parâmetro de incômodo

$$\begin{aligned} \Sigma' l_{ijkl} &= \frac{9\phi^2 - 1}{\phi^2 - 1}, \quad \Sigma' l_{ijklmn} = \frac{55\phi^2 - 7}{6(\phi^2 - 1)}, \\ \Sigma'' l_{ijkl} &= 3, \quad \Sigma'' l_{ijklmn} = \frac{8}{3}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1}{6}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{3}, \quad c = 1 - \frac{1}{2n}, \quad RV^* = \left\{ 1 + \frac{1}{2n} \right\} RV. \end{aligned} \quad (4.65)$$

(ii) Parâmetro de interesse σ^2 , sendo ϕ o parâmetro de incômodo

ε_2 é equivalente ao anterior e ε_1 é equivalente ao caso (1.a.i); logo,

$$c = 1 + \frac{11}{6n}, \quad RV^* = \left\{ 1 - \frac{11}{6n} \right\} RV. \quad (4.66)$$

2. Correções para a estatística S

(a) Parâmetro de interesse ϕ , e parâmetro de incômodo σ^2

Os coeficientes A 's para calcular a, b e c , de ordem n^{-1} são dados por

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{24}{n}, \quad A_2 = \frac{18(1 - 11\phi^2)}{n(\phi^2 - 1)} \quad e \quad A_3 = -\frac{180\phi^2}{n(\phi^2 - 1)}, \\ a &= -\frac{\phi^2}{n(\phi^2 - 1)}, \quad b = \frac{1 + 9\phi^2}{n \cdot 2(\phi^2 - 1)} \quad e \quad c = \frac{-1}{2n}. \end{aligned}$$

Logo, a estatística corrigida S^* fica da seguinte forma:

$$S^* = S \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 + 9\phi^2}{\phi^2 - 1} S - \frac{\phi^2}{\phi^2 - 1} S^2 \right) \right\} \quad (4.67)$$

avaliada em $\phi = \phi^{(0)}$, $\phi^{(0)}$ valor especificado na hipótese nula.

(b) Parâmetro de interesse σ^2 , e de incômodo ϕ

Os coeficientes A 's e a, b e c são dados por:

$$A_1 = \frac{-6}{n}, \quad A_2 = \frac{12}{n}, \quad A_3 = \frac{40}{n}, \quad a = \frac{2}{9}, \quad b = \frac{-17}{9}, \quad e \quad c = \frac{11}{6}.$$

Assim, temos para a estatística corrigida S^* , a seguinte forma:

$$S^* = S \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{11}{6} - \frac{17}{9}S + \frac{2}{9}S^2 \right) \right\}. \quad (4.68)$$

Modelo de médias móveis de ordem 1

A seguir apresentamos as correções das estatísticas RV e S . Para isso calculam-se os cumulantes aproximados até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$ das derivadas da log verossimilhança para o modelo $MA(1)$, dado no Exemplo 3.1, seguindo as expressões da Proposição 4.4. Os cumulantes são dados no Apêndice C.

1. Correções para a estatística RV

(a) Um parâmetro fixo e conhecido

Para este caso a dimensão do vetor de parâmetros de interesse é $s = 1 = r$; logo, o somatório Σ' tem como índice o correspondente ao parâmetro de interesse e $\Sigma'' l_{ijkl} = \Sigma'' l_{ijklmn} = 0$.

(i) Parâmetro de interesse θ

$$\Sigma' l_{ijkl} = \frac{1 + 3\theta^2}{1 - \theta^2}, \quad \Sigma' l_{ijklmn} = \frac{\theta^2}{1 - \theta^2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + 2\theta^2}{1 - \theta^2}, \quad \text{assim } c = 1 + \frac{1 + 2\theta^2}{(1 - \theta^2)n}.$$

Usando o Comentário 4.4 com

$$c^{-1} = h(\theta, n) = \frac{1 + 2\theta^2}{(1 - \theta^2)n}$$

Figura 4.1: Fator c^{-1} para a estatística RV para testar $H:\theta = \theta^{(0)}$ vs $A:\theta \neq \theta^{(0)}$, num modelo $MA(1)$

temos que $\partial h / \partial \theta = 6\theta / n(1 - \theta^2)^2$ e $|h(\theta, n)|$ não é menor que 1 quando $|\theta|$ cresce para 1. Então temos para a estatística corrigida

$$RV^* = \left\{ 1 + \frac{1 + 2\theta^2}{(1 - \theta^2)n} \right\}^{-1} RV. \quad (4.69)$$

Observe que para n fixo a correção $c^{-1} \rightarrow 0$ quando $|\theta| \rightarrow 1$ com

$$\left| \frac{dc^{-1}}{d\theta} \right| = \frac{6n|\theta|}{(1 + n - n\theta^2 + 2\theta^2)^2} \rightarrow \infty \text{ para } (|\theta|, n) \rightarrow (1, \infty),$$

ou seja, o crescimento ou decrescimento de $|dc^{-1}/d\theta|$ é muito rápido quando $|\theta|$ e n crescem. O gráfico de c^{-1} para $n = 10$ e 70 quando θ varia de 0 a 1, é mostrado na Figura 4.1. O gráfico para os $\theta \in [-1; 0]$ é o mesmo por ser c^{-1} simétrico em relação a θ .

(ii) Parâmetro de interesse σ^2

Esta correção é equivalente à correção 1.(a).(ii) para o modelo $AR(1)$. E estas coincidem com as obtidas por Taniguchi (1991: pág. 109).

(b) Um parâmetro de interesse e um de incômodo

Aqui a dimensão do vetor completo de parâmetros é $r = 2$ e a do vetor de parâmetros de incômodo é $r - s = 1$.

(i) Parâmetro de interesse θ , incômodo σ^2

Aqui, temos que $\Sigma''l_{ijkl}$ e $\Sigma''l_{ijklmn}$ são iguais a $\Sigma'l_{ijkl}$ e $\Sigma'l_{ijklmn}$ do caso anterior, respectivamente e

$$\Sigma'l_{ijkl} = \frac{4}{1 - \theta^2}, \quad \Sigma'l_{ijklmn} = \frac{\theta^2 - 7}{6(\theta^2 - 1)},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{17 + \theta^2}{6(1 - \theta^2)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{c} = 1 + \frac{5 + \theta^2}{2(1 - \theta^2)n}.$$

Usando o Comentário 4.4 temos

$$RV^* = \left\{ 1 + \frac{5 + \theta^2}{2(1 - \theta^2)n} \right\}^{-1} RV. \quad (4.70)$$

(ii) Parâmetro de interesse σ^2 , incômodo θ

ε_2 é igual ao anterior e ε_1 é igual ao caso 1.(a).(i); logo,

$$\mathbf{c} = 1 + \frac{11}{6n}, \quad RV^* = \left\{ 1 - \frac{11}{6n} \right\} RV. \quad (4.71)$$

2. Correções para a estatística S

Os resultados obtidos são iguais ao caso do modelo $AR(1)$, isto é,

(a) Parâmetro de interesse θ , incômodo σ^2

$$S^* = S \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1 + 9\theta^2}{2(\theta^2 - 1)} S + \frac{\theta^2}{1 - \theta^2} S^2 \right) \right\}. \quad (4.72)$$

(b) Parâmetro de interesse σ^2 , incômodo θ

$$S^* = S \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{11}{6} - \frac{17}{9} S + \frac{2}{9} S^2 \right) \right\}. \quad (4.73)$$

Os resultados obtidos para as correções para o modelo $AR(1)$ e $MA(1)$, estão apresentados resumidamente nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Fator de correção de Bartlett.

Modelo	Parâmetro	$\Sigma' l's$	$\Sigma'' l's$	$\varepsilon's$	CB					
	interesse	incômodo	$\Sigma' l_{ijkl}$	$\Sigma' l_{ijklmn}$	$\Sigma'' l_{ijkl}$	$\Sigma'' l_{ijklmn}$	ε_r	$\varepsilon r - s$	c	RV^*
$AR(1)$	ϕ	nenhum	$\frac{2(1+3\phi^2)}{\phi^2-1}$	$\frac{8\phi^2}{\phi^2-1}$	0	0	$\varepsilon_1 = -2$	$\varepsilon_0 = 0$	$1 - \frac{2}{n}$	$(1 + \frac{2}{n})RV$
	σ^2	nenhum	3	$\frac{8}{3}$	0	0	$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$	$\varepsilon_0 = 0$	$1 + \frac{1}{3n}$	$(1 - \frac{1}{3n})RV$
	ϕ	σ^2	$\frac{9\phi^2-1}{\phi^2-1}$	$\frac{1}{6} \frac{55\phi^2-7}{\phi^2-1}$	3	$\frac{8}{3}$	$\varepsilon_2 = -\frac{1}{6}$	$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{1}{2n}$	$(1 + \frac{1}{2n})RV$
	σ^2	ϕ	$\frac{9\phi^2-1}{\phi^2-1}$	$\frac{1}{6} \frac{55\phi^2-7}{\phi^2-1}$	$\frac{2(1+3\phi^2)}{\phi^2-1}$	$\frac{8\phi^2}{\phi^2-1}$	$\varepsilon_2 = -\frac{1}{6}$	-2	$1 + \frac{11}{6n}$	$(1 - \frac{11}{6n})RV$
$MA(1)$	θ	nenhum	$\frac{1+3\theta^2}{1-\theta^2}$	$\frac{\theta^2}{1-\theta^2}$	0	0	$\varepsilon_1 = \frac{1+2\theta^2}{1-\theta^2}$	$\varepsilon_0 = 0$	$1 + \frac{1+2\theta^2}{(1-\theta^2)n}$	$(1 + \frac{1+2\theta^2}{(1-\theta^2)n})^{-1}RV$
	σ^2	nenhum	3	$\frac{8}{3}$	0	0	$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$	$\varepsilon_0 = 0$	$1 + \frac{1}{3n}$	$(1 - \frac{1}{3n})RV$
	θ	σ^2	$\frac{4}{1-\theta^2}$,	$\frac{\theta^2-7}{6(\theta^2-1)}$	3	$\frac{8}{3}$	$\varepsilon_2 = \frac{17+2\theta^2}{6(1-\theta^2)}$	$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$	$1 + \frac{5+\theta^2}{2(1-\theta^2)n}$	$(1 + \frac{5+\theta^2}{2(1-\theta^2)n})^{-1}RV$
	σ^2	θ	$\frac{4}{1-\theta^2}$,	$\frac{\theta^2-7}{6(\theta^2-1)}$	$\frac{1+3\theta^2}{1-\theta^2}$	$\frac{\theta^2}{1-\theta^2}$	$\varepsilon_2 = \frac{17+2\theta^2}{6(1-\theta^2)}$	$\varepsilon_1 = \frac{1+2\theta^2}{1-\theta^2}$	$1 + \frac{11}{6n}$	$(1 - \frac{11}{6n})RV$

Tabela 4.2: Fator de correção tipo-Bartlett.

Modelo	Parâmetro		A's				coeficientes do polinômio em S			
	interesse	incômodo	A_1	A_2	A_3	A_4	a	b	c	
$AR(1)$	ϕ	σ^2	-24	$\frac{18(11\phi^2-1)}{\phi^2-1}$	$\frac{-180\phi^2}{\phi^2-1}$	$-\frac{\phi^2}{\phi^2-1}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2} \frac{1+9\phi^2}{\phi^2-1}$	$\frac{-1}{2}$	
	σ^2	ϕ	-6	12	40		$\frac{-17}{9}$	$\frac{11}{6}$		

Modelo $ARMA(1, 1)$

Os cumulantes conjuntos de terceira ordem da log-verossimilhança de um modelo $ARMA(1, 1)$, usados para calcular as correções, são dados no Apêndice C, que podem também ser comparados com aqueles dados por Taniguchi (1984).

1. Correções para a estatística RV

Neste caso, temos que $r = 3$ e as somas associadas ao vetor completo são:

$$\begin{aligned} \Sigma' l_{ijkl} = & -\frac{1}{2}(-32\theta^6\phi^3 + 11\theta^6\phi + 5\theta^6\phi^5 - 3\theta^5\phi^6 - 3\theta^5 + 15\theta^5\phi^2 + 55\theta^5\phi^4 \\ & - \theta^4\phi^5 - 8\theta^4\phi^3 - 31\phi\theta^4 + 8\theta^3\phi^6 + 32\phi^2\theta^3 + 8\theta^3 - 48\phi^4\theta^3 + 63\phi^5\theta^2 \\ & + 24\phi^3\theta^2 - 7\phi\theta^2 - 13\phi^6\theta + 3\theta - 47\phi^4\theta - 7\phi^2\theta - 5\phi + 16\phi^3 + 5\phi^5)/ \\ & \left\{ (\theta^2 - 1)(-1 + \phi\theta)(\phi^2 - 1)(\theta - \phi)(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \Sigma' l_{ijklmn} = & -\frac{1}{3}(-44\phi^3\theta^5 + 6\phi^5\theta^5 + 14\phi\theta^5 + \phi^4\theta^4 - 2\theta^4 + 28\phi^2\theta^4 - 23\phi^5\theta^3 \\ & + 9\phi^3\theta^3 - 34\phi\theta^3 + 2\theta^2 - 47\phi^4\theta^2 - 3\phi^2\theta^2 + 11\phi\theta + 20\phi^5\theta + 41\phi^3\theta \\ & + 3 - 8\phi^4 - 19\phi^2)/\left\{ (\theta^2 - 1)(\theta - \phi)^2(\phi^2 - 1)(-1 + \phi\theta) \right\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = & -\frac{1}{6}(-5\theta^5 + 3\theta^5\phi^2 - 9\phi\theta^4 + 3\theta^4\phi^3 + 18\phi^2\theta^3 + 20\theta^3 - 36\phi\theta^2 - 22\phi^3\theta^2 \\ & + 3\theta + 33\phi^2\theta + \phi^3 - 9\phi)/\left\{ (-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)(\theta - \phi)(\theta^2 - 1) \right\}. \end{aligned}$$

(a) Dois parâmetros de interesse

Para o caso de termos um parâmetro de incômodo $r - s = 1$ devemos calcular ε_1 , onde $r - s = 1$ refere-se ao correspondente parâmetro unidimensional de incômodo.

(i) Parâmetros de interesse θ e σ^2 , e de incômodo ϕ

$$\Sigma'' l_{ijkl} = \frac{2(-1 + \phi\theta)^4(3\phi^2 + 1)}{(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2(\phi^2 - 1)},$$

$$\Sigma'' l_{ijklmn} = \frac{8(-1 + \phi\theta)^6 \phi^2}{(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^3(\phi^2 - 1)},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-2(-3\phi^2 + 4\phi^2\theta^2 - 2\phi\theta + \theta^2)(-1 + \phi\theta)^4}{(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^3}.$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = & \frac{1}{6}(-84\phi^6\theta^6 + 372\theta^6\phi^4 - 42\theta^7\phi^3 - 30\theta^8\phi^2 + 5\theta^8 - 6\theta^7\phi \\ & + 48\theta^8\phi^6 + 12\theta^8\phi^4 + 39\theta^4\phi^6 - 9\phi^4 + 706\phi^3\theta^3 - 129\phi^2\theta^4 \\ & + 84\phi^4\theta^2 - 114\phi^3\theta + 36\phi^2 - 190\phi^3\theta^5 - 60\phi^5\theta^3 + \phi^6 - 216\phi^5\theta^7 \\ & - 729\phi^4\theta^4 - 20\theta^6 + 48\phi\theta^5 - 22\phi^6\theta^2 + 9\theta^4 + 24\phi\theta - 216\phi^2\theta^2 \\ & - 12\theta^2 + 42\phi\theta^3 + 354\phi^5\theta^5 + 42\phi^2\theta^6 + 30\phi^5\theta)/((\theta^2 - 1) \\ & (\theta - \phi)^2(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2). \end{aligned}$$

(ii) Parâmetros de interesse ϕ e σ^2 , e de incômodo θ

$$\begin{aligned} \Sigma''(l_{ijkl}) &= -\frac{(-1 + \phi\theta)^4(1 + 3\theta^2)}{(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2(\theta^2 - 1)}, \\ \Sigma''(l_{ijklmn}) &= -\frac{(-1 + \phi\theta)^6\theta^2}{(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^3(\theta^2 - 1)}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{(-1 + \phi\theta)^4(2\phi\theta - \phi^2 + 4\phi\theta^3 - 3\phi^2\theta^2 - 3\theta^4 + \phi^2\theta^4)}{(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^3(\theta^2 - 1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = & -\frac{1}{6}(-5\theta^6 - 18\theta^6\phi^4 + 3\phi^2\theta^6 + 6\phi^6\theta^6 + 66\phi^3\theta^5 + 6\phi\theta^5 + 15\theta^4 \\ & - 75\phi^2\theta^4 - 12\theta^4\phi^6 - 78\phi^4\theta^4 + 88\phi^3\theta^3 - 18\phi\theta^3 + 90\phi^5\theta^3 \\ & - 105\phi^4\theta^2 + 36\phi^2\theta^2 - 21\phi^6\theta^2 + 30\phi^5\theta - 12\phi\theta + 6\phi^3\theta \\ & + 6\phi^2 + \phi^6 - 9\phi^4) / ((\theta - \phi)^2(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2). \end{aligned}$$

(iii) Parâmetros de interesse ϕ e θ , e de incômodo σ^2

$$\Sigma''(l_{ijkl}) = 3, \quad \Sigma''(l_{ijklmn}) = \frac{8}{3}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{3}$$

e, por último,

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = & -\frac{1}{2}(-\theta^5 + \theta^5\phi^2 - 5\phi\theta^4 + \theta^4\phi^3 + 8\phi^2\theta^3 + 6\theta^3 - 10\phi\theta^2 \\ & - 8\phi^3\theta^2 + \theta + 9\phi^2\theta + \phi^3 - 3\phi) / ((\theta^2 - 1)(\theta - \phi) \\ & (-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)).\end{aligned}$$

Assim, para os casos (a.i)-(a.ii), $\mathbf{c} = 1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)/2n$ e $RV^* = \mathbf{c}^{-1}RV$ tem distribuição χ_2^2 até ordem n^{-1} com $\mathbf{c}^{-1}$ avaliado nos EMV sob a hipótese nula.

(b) Um parâmetro de interesse

Nesta situação temos $r = 3$, $r - s = 2$ parâmetros de incômodo e $s = 1$ parâmetro de interesse.

(i) Parâmetro de interesse θ , sendo ϕ e σ^2 parâmetros de incômodo

$$\begin{aligned}\Sigma''(l_{ijkl}) = & (2 + 6\theta^2 - 8\phi\theta - 12\phi^3\theta + 6\phi^2\theta^2 + 54\phi^4\theta^2 - 20\phi^3\theta^3 - 24\phi^5\theta^3 \\ & + 2\phi^4\theta^4 + 6\phi^6\theta^4 - 12\phi^5\theta + 12\phi\theta^3 - 3\phi^4 + 3\phi^6 - 3\theta^4 \\ & + 3\phi^2\theta^4) / \left\{ (-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2(\theta^2 - 1) \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma''(l_{ijklmn}) = & \frac{1}{6}(-16\theta^6 + 57\phi^2 - 16\phi^6 + 16\phi^2\theta^6 - 9\phi^4 + 132\theta\phi^5 + 16\phi^8 \\ & - 96\phi^7\theta - 9\phi^8\theta^4 + 657\phi^6\theta^4 + 36\phi^7\theta^3 + 186\phi^6\theta^2 + 9\theta^6\phi^4 \\ & - 270\phi^7\theta^5 - 9\phi^6\theta^6 + 258\phi^4\theta^4 - 1208\phi^5\theta^3 + 63\phi^2\theta^2 - 18\phi\theta \\ & - 36\phi\theta^3 + 9\theta^4 - 306\phi^3\theta + 248\phi^3\theta^3 + 96\phi\theta^5 - 186\phi^2\theta^4 \\ & - 462\phi^4\theta^2 - 132\theta^5\phi^3 + 18\phi^5\theta^5 + 48\phi^8\theta^6) / (-2\phi\theta \\ & + \phi^2 + \theta^2)^3(\phi^2 - 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 = & -\frac{1}{6}(-45\phi^6\theta^4 - 2\phi^6 + 48\phi^6\theta^6 + 180\phi^5\theta^3 + 12\phi^5\theta - 198\phi^5\theta^5 \\ & + 3\theta^6\phi^4 - 300\phi^4\theta^2 + 312\phi^4\theta^4 - 12\phi^3\theta^5 - 188\phi^3\theta^3 \\ & + 180\phi^3\theta - 12\phi^2\theta^4 - 45\phi^2 + 72\phi^2\theta^2 - 6\phi\theta - 12\phi\theta^3 \\ & + 12\theta^5\phi + 3\theta^2 - 2\theta^6) / (-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 - \varepsilon_2 = & \frac{1}{2}(-6\theta^6 + 15\phi^2 + \phi^6 - 14\theta^6\phi^2 + 2\theta^7\phi - \theta^8\phi^2 - 2\theta^7\phi^3 \\ & - 3\phi^4 + \theta^8 + 6\phi^5\theta + 16\theta^4\phi^6 - 8\phi^6\theta^2 + 103\theta^6\phi^4 - 31\phi^6\theta^6 \\ & - 247\phi^4\theta^4 - 28\phi^5\theta^3 - 51\phi^2\theta^2 + 2\phi\theta + 8\phi\theta^3 - \theta^2 - 50\phi^3\theta \\ & - 66\phi^5\theta^7 + 198\phi^3\theta^3 + 24\theta^5\phi - 39\phi^2\theta^4 + 56\phi^4\theta^2 \\ & + \theta^8\phi^4 + 16\theta^8\phi^6 - 26\phi^3\theta^5 + 124\phi^5\theta^5) / ((-1 + \theta^2) \\ & (-\theta + \phi)^2(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2).\end{aligned}$$

Desta maneira temos, $\mathbf{c} = 1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)/n$ e $RV^* = \mathbf{c}^{-1}RV$ tem distribuição χ_1^2 até ordem n^{-1} com $\mathbf{c}^{-1}$ avaliado em $\tilde{\phi}$, $\theta^{(0)}$ e $\tilde{\sigma}^2$.

(ii) Parâmetro de interesse ϕ , sendo θ e σ^2 parâmetros de incômodo

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = & \frac{1}{6}(-2\theta^6 - 15\phi^2 - 2\phi^6 - 24\theta^6\phi^2 - 12\theta^7\phi + 36\theta^7\phi^3 \\ & + 2\theta^8 + 12\phi^5\theta - 15\theta^4\phi^6 + 2\phi^6\theta^2 + 3\theta^6\phi^4 - 9\phi^6\theta^6 - 144\phi^4\theta^4 \\ & + 48\phi^5\theta^3 - 129\phi^2\theta^2 + 30\phi\theta + 42\phi\theta^3 - 9\theta^2 - 9\theta^4 + 60\phi^3\theta \\ & - 18\phi^5\theta^7 + 256\phi^3\theta^3 + 48\theta^5\phi - 102\phi^2\theta^4 - 120\phi^4\theta^2 - 9\theta^8\phi^4 \\ & + 6\theta^8\phi^6 + 8\phi^3\theta^5 + 66\phi^5\theta^5) / ((-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^3(-1 + \theta^2)),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 - \varepsilon_2 = & \frac{1}{2}(-3\theta^6\phi^4 + 2\phi^6\theta^6 - \theta^6 + \theta^6\phi^2 - 6\phi^5\theta^5 + 10\phi^3\theta^5 - 2\theta^5\phi \\ & + 5\theta^4 - \theta^4\phi^6 - 2\phi^4\theta^4 + 3\phi^2\theta^4 + 18\phi^5\theta^3 - 20\phi^3\theta^3 - 18\phi\theta^3 \\ & + 36\phi^2\theta^2 - 7\phi^4\theta^2 + 3\theta^2 - 7\phi^6\theta^2 - 10\phi\theta - 10\phi^3\theta + 6\phi^5\theta \\ & + 5\phi^2 - 3\phi^4 + \phi^6) / \left\{ (-\theta + \phi)^2(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)^2 \right\}.\end{aligned}$$

Desta maneira temos, $\mathbf{c} = 1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)/n$ e $RV^* = \mathbf{c}^{-1}RV$ tem distribuição χ_1^2 até ordem n^{-1} com $\mathbf{c}^{-1}$ avaliado em $\phi^{(0)}$, $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\sigma}^2$.

2. Correções para a estatística S

Consideremos o problema de testar as hipóteses $H : \phi = \phi^{(0)}$ vs $A : \phi \neq \phi^{(0)}$, sendo

o vetor de parâmetros de incômodo $(\theta, \sigma^2)^\top$. Usando os resultados da Seção 4.4, obtemos para os coeficientes A 's, a , b e c :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{24(\phi^2\theta^2 - 2 + 2\phi\theta - \phi^2)}{(\phi\theta - 1)^2}, \\ A_2 &= \frac{18(1 + \phi^2 - 2\phi\theta + 22\phi^3\theta - 11\phi^2\theta^2 + \phi^4\theta^2 - 12\phi^4)}{(\phi^2 - 1)(\phi\theta - 1)^2}, \\ A_3 &= \frac{-180\phi^2(-2\phi\theta + 2\phi^2 + \theta^2)}{(\phi^2 - 1)(\phi\theta - 1)^2}, \\ a &= \frac{-\phi^2(-2\phi\theta + \phi^2 + \theta^2)}{(\phi^2 - 1)(\phi\theta - 1)^2}, \\ b &= \frac{1 + \phi^2 - 2\phi\theta - 18\phi^3\theta + 9\phi^2\theta^2 + \phi^4\theta^2 + 8\phi^4}{2(\phi^2 - 1)(\phi\theta - 1)^2}, \\ c &= \frac{\phi^2\theta^2 + 2\phi^2 + 2\phi\theta - 5}{2(\phi\theta - 1)^2}. \end{aligned}$$

Assim temos que $S^* = S\{1 - (c + bS + aS^2)\}$ tem distribuição χ_1^2 até ordem n^{-1} com a , b e c avaliados em $\phi^{(0)}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}^2$.

Comentário 4.6 Ligando o resultado mostrado na expressão (3.19) com os cumulantes encontrados aqui, podemos então encontrar os vieses das estimativas de máxima verossimilhança para os elementos do vetor de parâmetros $\beta = (\phi, \theta, \sigma^2)^\top$ usando o pacote computacional MAPLE V. Esses são dados por

$$\begin{aligned} b_\phi &= E(\hat{\phi} - \phi) = \frac{-2(\phi\theta - 1)^2\phi}{n(\phi - \theta)^2}, \\ b_\theta &= E(\hat{\theta} - \theta) = \frac{3\phi^2\theta - 2\phi^2\theta^3 - \phi\theta^2 - \phi + 2\theta^3 + \theta}{n(\phi - \theta)^2}, \\ b_{\sigma^2} &= E(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{-2\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Ravishanker et al. (1990) obtêm expressões assintóticas para a curvatura estatística de Efron (Efron, 1975) e outras quantidades geométricas em modelos *ARMA* gaussianos estacionários, e calculam as expressões até ordem n , segundo o mesmo método usado neste capítulo para calcular os cumulantes. Van Garderen (1999) usa geometria exata para os

modelos auto-regressivos, particularmente para um modelo $AR(1)$, obtendo expressões que coincidem com as encontrada por Ravishanker et al., quando σ^2 é conhecido. Para σ^2 desconhecido, os resultados são muito diferentes.

Capítulo 5

Um Estudo de Simulação

5.1 Introdução

Neste Capítulo fazemos um estudo numérico do desempenho das correções de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança, RV , e tipo-Bartlett para a estatística escore, S , obtidas no Capítulo 4, via simulação. São considerados dois tipos de modelos, $AR(1)$ e $MA(1)$ variando seus parâmetros de maneira a representar os espaços paramétricos que definem os modelos como estacionários e invertíveis. O desempenho das correções é medido usando a taxa de rejeição estimada da estatística teste, X , para um tamanho da amostra, n , e um nível de significância, α , fixos. Denotemos por $\tilde{P}_n(X > x_\alpha)$ a taxa de rejeição estimada, onde x_α é o $(1 - \alpha)$ -ésimo percentil da distribuição χ_η^2 e η é a diferença de dimensões do espaço paramétrico sem restrições e do espaço paramétrico sob a hipótese nula. A medida para comparar o desempenho da estatística teste é a aproximação da taxa de rejeição estimada com o verdadeiro nível de significância, isto é, se $\left| \alpha - \tilde{P}_n(X > x_\alpha) \right| > \left| \alpha - \tilde{P}_n(X^* > x_\alpha) \right|$, então X^* tem um melhor desempenho que X , caso contrário, X tem um melhor desempenho que X^* , onde X^* denota a estatística teste corrigida, e a taxa de rejeição estimada $\tilde{P}_n(X > x_\alpha)$ é calculada como a proporção de valores simulados de X que superam o ponto crítico x_α da distribuição χ_η^2 .

5.2 A descrição do estudo

Para obter os resultados numéricos que nos interessam, valores críticos e taxas de rejeição estimadas, usamos o pacote computacional `0x` (Doornik, 1996). Detalhes sobre sua comparação com outros programas para a análise de dados encontram-se em Cribari-Neto (1997b) e Küsters e Steffen (1996). Para obter esses resultados torna-se necessário, no caso da estatística RV , calcular o valor máximo da log-verossimilhança $l(\beta)$, sob a hipótese nula H , e sob a alternativa A , para os modelos considerados. Este cálculo é complicado, porque não temos formas fechadas para as estimativas de máxima verossimilhança (EMV), levando ao uso dos procedimentos iterativos de maximização de $l(\beta)$ com respeito a β . O procedimento iterativo de maximização de uma função qualquer usado é o método de maximização de BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, Fletcher, 1987), implementado na função `MaxBFGS`, que de modo resumido, consiste em maximizar o núcleo da função, digamos $f(\beta)$, considerando como equação de atualização para as estimativas dos parâmetros, $\beta_{i+1} = \beta_i + s_i \delta_i$, onde β_{i+1} é uma nova estimativa para β , dada uma estimativa β_i , s_i é um escalar e δ_i um vetor de busca direcional dependente do vetor de escore e da matriz Hessiana, dados numericamente ou analiticamente. Como vimos detalhado na Seção 3.7.1, a forma de $l(\beta)$, quando o modelo envolve a parte de médias móveis, é complicada, sendo que o procedimento para escrever $l(\beta)$ é aquele dado por Brockwell e Davis (1991), revisado na Seção 3.7.2. No caso da estatística S , é preciso calcular a derivada da $l(\beta)$ e a parte da inversa da matriz de informação de Fisher, $\mathbf{K}$, que corresponde à partição definida segundo o parâmetro de interesse, sob a hipótese nula. No modelo $AR(1)$, usa-se a forma exata da derivada de $l(\beta)$ e da matriz $\mathbf{K}$, calculadas explicitamente na Seção 3.7.1; nos modelos mais complicados é necessário outro procedimento para calcular a primeira e segunda derivada de $l(\beta)$, iterativo por exemplo, ou escrever as expressões em termo das derivadas das matriz de autocovariâncias, que foi o procedimento usado para o modelo $MA(1)$; calcularemos as derivadas de maneira exata em termos das traços de produtos de matrizes $\bar{\Sigma}_{i,j} = \Sigma_i \Sigma^{-1} \Sigma_j \Sigma^{-1}$, com Σ_i a derivada da matriz de autocovariâncias do vetor $\mathbf{Y}$ em relação ao parâmetro β_i . E para obter as

EMV escrevemos $l(\beta)$ em termos dos erros de predição a um passo. Para gerar as 10000 réplicas da série considerada que provêm de um modelo *ARMA* de tamanho n , usa-se o gerador de uma série de média zero `armagen()` do pacote computacional `0x`.

5.3 Resultados das simulações

5.3.1 Estatística da razão de verossimilhança

Nesta seção considera-se um estudo de simulação para a estatística RV e a estatística da razão de verossimilhança corrigida RV^* , dos diferentes modelos mencionados anteriormente, modificando a hipótese nula. Usamos os resultados do fator de correção de Bartlett c obtidos na Seção 4.3.

Modelo auto-regressivo de ordem 1

(a) Consideramos, primeiramente, o caso no qual não temos parâmetros de incômodo. Sendo ϕ o parâmetro de interesse, fixamos um valor para σ^2 , especificamente $\sigma^2 = 1$. O fator de correção é dado pela fórmula (4.63). Os resultados da discrepância entre os quantis estimados para a estatística RV^* com 10000 réplicas, $n = 10, 20, 30, 40$, $\phi^{(0)} = 0, 6$ e os de uma variável aleatória com distribuição χ_1^2 , são mostrados na Figura 5.1. Observa-se que os quantis estimados da variável RV^* estão mais próximos dos quantis de uma distribuição χ_1^2 do que RV , exceto para o tamanho da amostra $n = 30$. Um estudo foi feito para o caso onde o parâmetro $\phi^{(0)}$ varia de -0,9 a 0,9 com incremento igual a 0,3. Para cada valor de $\phi^{(0)}$ replicou-se a série 10000 vezes, de tamanho $n = 20, 30, 40, 100$. Para as taxas de rejeição foram considerados varios níveis nominais, $\alpha(\%) = 1, 0; 2, 5; 5, 0$ e 10,0. Estes resultados são dados na Tabela 5.2, mostrando que a estatística da razão de verossimilhança corrigida, RV^* é melhor aproximada por χ_1^2 que a não corrigida, RV , pois as taxas de rejeição de RV^* estão mais próximas dos correspondentes níveis nominais

Figura 5.1: QQ-plot para RV e RV^* $H : \phi = 0.6$ vs $A : \phi \neq 0.6, \sigma^2 = 1, n = 10, 20, 30, 40$

do que aquelas de RV . Também, esses resultados mostram que, quando ϕ está próximo da região de não-estacionariedade ($|\phi| \approx 1$), os valores de RV e RV^* superam em muito os valores de α . Para $n = 100$ a correção não melhora muito RV , o que é esperado porque para n grande a distribuição RV já está próxima do χ^2 . Mostramos as simulações feitas por Taniguchi (1991) para $n = 100$ na Tabela 5.1, onde observam-se diferenças entre as simulações feitas por ele, que pode ser devido ao número de réplicas (1000) ou ao procedimento de maximização que ele usa.

Tabela 5.1: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, com $\sigma^2 = 1$ e $n = 100$.

	$\alpha(\%) = 5,0$		$\alpha(\%) = 2,5$		$\alpha(\%) = 1,0$	
ϕ	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*
-0,9	5,100	5,100	2,100	2,400	0,600	0,800
-0,6	4,100	4,400	2,700	2,800	1,100	1,200
-0,3	3,700	4,200	2,000	2,100	0,900	0,900
0,0	3,900	4,200	1,700	1,800	0,800	0,900
0,3	3,700	4,000	2,100	2,100	0,700	0,700
0,6	4,300	4,800	2,200	2,200	1,300	1,400
0,9	5,700	6,000	2,900	3,200	0,800	1,100

Comparando os resultados corrigidos da Tabela 5.1 com os da Tabela 5.2 vemos que nossos resultados são melhores, exceto no caso extremo onde $\phi = \pm 0.9$.

(b) Consideramos, agora, o caso onde o parâmetro de interesse é σ^2 , com $\sigma^{(0)2} = 1, 2, 3$ e 4, enquanto ϕ é fixo e varia de -0,9 a 0,9 com incremento de 0,3. Pela Seção 4.4.1 o fator de correção de Bartlett c é dado pela fórmula (4.64). Os resultados estão nas Tabelas 5.3-5.6. Pode-se observar que, mesmo sendo constante o fator de correção, sempre melhora o teste, e que a melhoria é menor em comparação com os resultados obtidos no caso anterior. As correções só se aproximam dos níveis nominais fixados se $n = 40$ ou 50. Das expressões (3.22) e (3.25) e dos resultados numéricos podemos observar que o termo

$$-\frac{n}{2}[\log \hat{\sigma}^2 + \log \sigma^{(0)2}] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{\sigma^{(0)2}} \right] \left[(1 - \phi^2)y_1^2 + \sum_{j=2}^n (y_j - \phi y_{j-1})^2 \right],$$

na estatística RV , praticamente não depende do parâmetro fixado ϕ ou que o termo $\frac{1}{\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{\sigma^{(0)2}}$ é próximo de zero. Isto é mais notório quando n cresce.

(c) Consideramos, agora, o caso em que ϕ é um parâmetro de incômodo. Os valores simulados para as taxas de rejeição, para $\sigma^{2(0)} = 1$ sob variação do parâmetro ϕ como no caso anterior, são mostrados na Tabela 5.7. A fórmula da correção é dada pela expressão

(4.66). O que podemos observar é que o comportamento das simulações é semelhante ao caso (b), onde ϕ é fixado e que como neste caso ϕ é estimado, produz-se um erro de estimação que é observado na super estimação de RV , implicando num valor grande para a taxa de rejeição. Mesmo assim, os resultados mostram que para todo n , ϕ e α , há um melhor desempenho da estatística RV^* do que RV , pois em todos os casos simulados as taxas de rejeição estimadas de RV^* estão mais próximas dos níveis nominais do que as correspondentes de RV e a correção é mais necessária quando $|\phi| \approx 1$ e $n \leq 30$; para $n \geq 40$ as duas estatísticas RV e RV^* não tiveram bom desempenho. Também se observa que na prática a estatística RV não é sensível a ϕ se $\phi \in [-0,6; 0,6]$.

Modelo de médias móveis de ordem 1

Consideramos o caso onde não se tem parâmetro de incômodo, um é de interesse e o outro é fixo e conhecido. No caso de θ ser de interesse, fixa-se σ^2 , e o fator de correção é dado pela fórmula (4.69) da Seção 4.4.1, observando-se que $c^{-1} \rightarrow 0$, quando $|\theta| \rightarrow 1$, implicando que a correção é menos necessária para $|\theta|$ próximo de 1. Para obter os resultados numéricos, o parâmetro $\theta^{(0)}$ variou de -0,9 a 0,9 com incremento igual a 0,3. Para cada valor de $\theta^{(0)}$ replicou-se a série 10000 vezes para cada $n = 30, 40, 50, 60, 70$, e escrevemos $l(\beta)$ através dos erros de predição a um passo. As taxas de rejeição estimadas para as estatísticas RV e RV^* são mostradas na Tabela 5.8. Observa-se que a estatística RV^* não tem melhor desempenho que a RV quando $|\theta| = 0,9$, $|\theta| = 0,6$, $\alpha < 0,1$ e $n = 30$, para $\theta = 0,3$, $n = 50$ e $\alpha = 0,01$, $n = 60$, $\alpha < 0,1$, $n = 70$, $\alpha = 0,1; 0,025$. O fato da correção não produzir efeito para $|\theta| = 0,9$, pode ser explicado pelo comportamento explosivo na direção do 1 do fator de correção c^{-1} . Uma explicação do mau desempenho da estatística RV^* no caso do nível nominal α ser menor que 0,1 é a seguinte: as correções são funções dos coeficientes da expansão de Edgeworth até uma ordem adequada da distribuição da estatística RV e é sabido que tais expansões não descrevem de forma adequada o comportamento da distribuição da estatística RV nas caudas (Hall, 1992: pág. 323). E são resultados atípicos os valores de $\tilde{P}_{70}(RV^* > x_{0,1})$, com $\theta = 0,3$ e $\tilde{P}_{70}(RV^* > x_{0,05})$, com

$$\theta = 0, 0.$$

5.3.2 A estatística escore

Modelo auto-regressivo de ordem 1

Para o caso onde existe um parâmetro de incômodo, as fórmulas usadas para calcular a estatística escore S são dadas na Seção 4.5.

(a) Consideremos como parâmetro de incômodo σ^2 e, como parâmetro de interesse, ϕ . A fórmula da correção é dada na expressão (4.67) da Seção 4.4.1. Para efeito da simulação, o parâmetro σ^2 foi fixado no valor 1, e $\phi^{(0)}$ variou de -0,9 a 0,9 com incremento igual a 0,3. Consideramos o tamanho da série n variando de 10 a 50 com incremento igual a 10 e os níveis nominais α iguais a 0,10; 0,05; 0,025 e 0,01. Os valores simulados para as taxas de rejeição estimadas da estatística escore S e escore corrigida S^* são mostrados na Tabela 5.9. Em geral, observa-se um melhor desempenho da estatística S^* do que a não corrigida S , pois $|\alpha - \tilde{P}_n(S > x_\alpha)| > |\alpha - \tilde{P}_n(S^* > x_\alpha)|$ com exceção de $|\phi^{(0)}| = 0,9$ com $n = 30, 40$ e 50 e $\alpha = 0,01$, $|\phi^{(0)}| = 0,6$ e $\alpha = 0,01$. A explicação é que $\phi^{(0)}$ está próximo do valor 1, ou seja, da fronteira da região de estacionariedade do modelo, e por considerar valores estimados de S^* muito longe do valor médio, ou seja, valores nas caudas da distribuição de S^* ($\alpha = 0,01$). Podemos considerar resultados atípicos os valores das taxas de rejeição estimada $\tilde{P}_n(S^* > x_\alpha)$, para $\phi = -0,6$ com $n = 30, 40$ e 50 e $\alpha = 0,025$, embora isso ocorra com frequência nas caudas da distribuição de S^* .

(b) No caso onde ϕ é o parâmetro de incômodo, a fórmula a usar é dada na expressão (4.68), e os resultados para as taxas de rejeição são mostrados na Tabela 5.10. Desta observa-se o seguinte: em geral o desempenho da estatística S^* é melhor em relação à estatística S , com exceção dos casos em que os parâmetros encontram-se perto da região de não estacionariedade do modelo, isto é, $|\phi|$ perto do valor um, para o caso onde $n = 10$

e o nível nominal $\alpha = 0,01$, $\phi = 0,0; 0,3$, $n = 20$ e $\alpha = 0,01$ e $\phi = -0,6; 0,0$, $n = 30$ e $\alpha = 0,01$, que podem ser explicados por considerar valores estimados de S^* longe do valor médio. E os seguintes casos podem ser considerados como atípicos: $\phi = -0,6$, $n = 30$ e $\alpha = 0,1$, $\phi = -0,3$, $n = 40$ e $\alpha = 0,1$ e para o caso $\phi = -0,3$, $n = 50$ e $\alpha = 0,1$. Uma possível explicação para esperar um valor atípico para $\tilde{P}_n(S^* > x_\alpha)$ para os casos anteriores de ϕ , n e α , pode ser devido à variabilidade de S^* no procedimento de estimação usado ou na própria característica da correção de S , a não monotonicidade de S^* , pois os coeficientes que determinam a correção são constantes.

Modelo de médias móveis de ordem 1

O procedimento para obter os valores estimados das taxas de rejeição das estatísticas S e S^* é escrever $l(\beta)$ de maneira que dependa de β através da matriz de autocovariâncias do vetor $\mathbf{Y}$, Σ , cujas fórmulas são dadas na Seção 3.7.2. Para obter Σ^{-1} e o logaritmo do valor absoluto de $|\Sigma|$ usa-se a função `invert()`, construída a partir da função `determinant()` para calcular o determinante de Σ usando uma decomposição LU de uma matriz com a função `declu()`. As fórmulas da correção para a estatísticas score dadas na Seção 4.5, são equivalentes às respectivas correções das estatísticas score, de um modelo auto-regressivo de ordem 1. Os resultados são calculados variando o tamanho da série n de 10 até 50 com incremento de 10 e o nível nominal $\alpha = 0,1; 0,05; 0,025$ e 0,01.

(a) Consideremos o parâmetro θ de interesse e o de incômodo σ^2 (para efeito da simulação este é considerado igual a um). A fórmula da correção para S é dada na expressão (4.72). As taxas de rejeição estimadas da estatística score e score corrigida para $\theta = \theta^{(0)}$ variando de $-0,9$ até $0,9$ com incremento de $0,3$ são dadas na Tabela 5.11. Podemos observar que para $n = 10$ a correção não produz efeito para melhorar a aproximação da RV à χ^2 , podendo considerar a taxa de rejeição estimada da estatística score corrigida para $\theta = 0,6$ e $\alpha = 0,025$ como atípica, por ser o único valor onde se observa um melhor desempenho para S^* . E, à medida que n cresce, observa-se que o número de pontos (θ, α)

onde o desempenho é melhor na estatística S^* cresce, mas não para produzir uma melhoria considerável no comportamento do desempenho da estatística S^* . Por exemplo, no caso de $n = 20$, $\left| \alpha - \tilde{P}_{20}(S > x_\alpha) \right| > \left| \alpha - \tilde{P}_{20}(S^* > x_\alpha) \right|$ para $\theta = \pm 0,9$, $\alpha = 0,1$ e $0,01$ e para $\theta = \pm 0,6$, $\alpha = 0,025$ e $0,01$ e no caso de $n = 30$, $\left| \alpha - \tilde{P}_{30}(S > x_\alpha) \right| > \left| \alpha - \tilde{P}_{30}(S^* x_\alpha) \right|$ para $\theta = \pm 0,9$ e para $\theta = -0,6$, $\alpha = 0,1; 0,05$ e $0,025$. Com isto podemos concluir que neste caso não há uma melhoria substancial em S^* . Uma explicação possível poderia ser que, como o fator de correção de Bartlett depende do parâmetro de interesse θ , a correção tipo-Bartlett deveria incorporar essa dependência.

(b) Agora, consideremos o parâmetro de interesse σ^2 e o de incômodo θ , a fórmula da correção é dada por (4.73). Neste caso, consideramos θ variando de $-0,85$ até $0,85$. Não foi considerado $|\theta| = 0,9$ porque o algoritmo usado na maximização do logaritmo da função de verossimilhança não convertiu. Os resultados das taxas de estimação das estatísticas S e S^* são dados na Tabela 5.12. Podemos observar que: onde não se produz melhoria no desempenho de S^* é para os θ 's e α 's esperados, isto é, $(|\theta|, \alpha) \rightarrow (1, 0)$. Mais explicitamente $\left| \alpha - \tilde{P}_n(S > x_\alpha) \right| < \left| \alpha - \tilde{P}_n(S^* x_\alpha) \right|$ para $n = 10$, $\theta = -0,85$ e $\alpha = 0,025$ e $0,01$, $\theta = -0,6$ e $\alpha = 0,025$ e $0,01$, $\theta = 0,6$ e $\alpha = 0,01$, $\theta = 0,85$ e $\alpha = 0,1; 0,025$ e $0,01$, para $n = 20$, $\alpha = 0,01$ e $\theta = -0,85; \pm 0,6; \pm 0,3$ e $0,0$, para $n = 30$, $\alpha = 0,01$ e $\theta = \pm 0,85; -0,3$ e $0,6$, para $n = 40$, $\alpha = 0,025; 0,01$, $\theta = -0,85; -0,3$ e $\alpha = 0,01$ e $\theta = 0,3$ e para $n = 50$, $\alpha = 0,01$, $\theta = -0,85; -0,3$ e $\alpha = 0,01$ e $\theta = 0,3$ $\theta = \pm 0,3$ e $0,0$. Uma explicação possível para esses resultados é pelo procedimento de construção da correção, usando os coeficientes da expansão de Edgeworth até uma ordem adequada da distribuição da estatística S e é sabido que tais expansões não descrevem de forma adequada o comportamento da distribuição da estatística S nas caudas e que nos valores de θ perto do 1 o modelo $MA(1)$ vai ficando muito sensível a esses valores. Valores atípicos para as taxas de rejeição estimadas são os valores quando $n = 40$, $\alpha = 0,1$ e $\theta = \pm 0,6$ e $\pm 0,3$ e para $n = 50$, $\alpha = 0,1; 0,05$ e $\theta = -0,6$. Estes podem ser explicados pela variabilidade do procedimento de construção dos valores de S e S^* . Assim, como no caso do fator de correção de Bartlett para a estatística RV , o fator de correção tipo-Bartlett

para a estatística S não depende do parâmetro de interesse σ^2 nem de θ mas, mesmo assim, em geral se produz um melhor desempenho da estatística S^* .

Tabela 5.2: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, interesse ϕ , $\sigma^2 = 1$ fixo.

$\phi^{(0)}$																							
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0			0,3			0,6			0,9			
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*
20	10	14,900	17,340	8,560	9,970	6,860	8,400	7,200	8,500	7,730	9,260	8,510	10,070	15,040	17,250								
	5,0	7,450	8,880	3,970	4,960	3,210	4,200	3,600	4,460	3,650	4,370	4,140	5,090	7,850	9,640								
	2,5	3,690	4,830	1,820	2,450	1,520	2,070	1,880	2,350	1,710	2,290	1,850	2,520	4,080	5,280								
	1,0	1,380	2,090	0,780	1,080	0,650	0,870	0,570	0,910	0,590	0,880	0,680	1,020	1,780	2,470								
30	10	13,360	14,660	9,470	10,640	9,030	10,080	8,630	9,540	8,610	9,810	9,440	10,630	14,300	15,830								
	5,0	6,660	7,700	4,750	5,390	4,380	5,070	4,110	4,760	4,210	4,860	4,470	5,250	7,300	8,610								
	2,5	3,320	4,140	2,230	2,780	2,030	2,380	1,960	2,500	2,060	2,520	2,240	2,640	3,570	4,300								
	1,0	1,280	1,600	0,860	1,140	0,780	0,970	0,610	0,850	0,790	0,980	0,880	1,170	1,450	1,870								
40	10	13,210	14,210	9,430	10,210	9,000	9,830	8,910	9,770	8,940	9,770	9,280	10,080	13,200	14,140								
	5,0	6,850	7,770	4,410	5,050	4,090	4,550	4,370	4,820	4,220	4,820	4,380	5,120	7,330	7,960								
	2,5	3,570	4,150	2,200	2,560	2,010	2,300	2,100	2,450	2,010	2,300	10	11,000	11,300	9,360								
	1,0	1,460	1,720	0,780	0,950	0,760	0,940	0,730	0,910	0,700	0,880	0,790	0,940	1,480	1,750								
50	10	12,240	12,890	9,720	10,290	9,390	10,190	9,030	9,550	9,080	9,770	9,770	10,520	12,460	13,300								
	5,0	6,720	7,200	4,830	5,370	4,460	4,900	4,000	4,390	4,410	4,890	5,010	5,500	6,520	7,050								
	2,5	3,600	3,980	2,390	2,670	2,090	2,440	2,170	2,500	2,550	2,910	3,540	3,900	1,970	2,220								
	1,0	1,470	1,630	0,920	0,970	0,760	0,950	0,780	0,930	1,100	1,250	1,270	1,490	0,680	0,780								
100	10	11,000	11,300	9,360	9,690	9,900	10,250	9,260	9,600	9,780	10,110	10,850	11,140	11,780	12,120								
	5,0	5,720	5,940	4,760	4,950	4,830	5,140	4,530	4,830	4,920	5,110	5,320	5,560	5,990	6,250								
	2,5	2,970	3,080	2,300	2,480	2,300	2,490	2,350	2,480	2,550	2,710	2,650	2,760	3,160	3,340								
	1,0	1,160	1,220	0,810	0,900	1,020	1,070	0,870	0,990	1,030	1,100	1,120	1,200	1,270	1,400								

Tabela 5.3: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, interesse σ^2 , $\sigma^{(0)2} = 1$, ϕ fixo.

		ϕ																				
		-0.9			-0.6			-0.3			0.0			0.3			0.6			0.9		
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	
10	10	17,500	16,540	17,350	16,670	17,860	17,000	17,260	16,590	17,140	16,460	15,390	14,710	13,300	12,700							
	5,0	10,340	9,760	10,590	9,930	10,940	10,240	10,410	9,760	10,270	9,850	8,660	8,090	7,230	6,880							
	2,5	6,330	5,970	6,360	6,000	6,560	6,140	6,160	5,710	5,980	5,680	5,070	4,630	4,290	3,930							
	1,0	3,300	2,940	3,290	2,980	3,230	2,990	2,950	2,720	2,840	2,680	2,390	2,120	1,960	1,730							
20	10	13,360	13,110	12,820	12,510	13,080	12,760	13,790	13,460	13,840	13,470	12,380	12,070	12,860	12,530							
	5,0	7,470	7,290	7,080	6,930	7,530	7,280	7,630	7,500	7,530	7,250	6,690	6,450	6,870	6,630							
	2,5	4,320	4,070	4,010	3,820	4,380	4,190	4,210	4,000	4,160	3,970	3,650	3,440	3,810	3,600							
	1,0	1,730	1,570	1,860	1,790	1,740	1,640	2,000	1,890	1,950	1,870	1,780	1,670	1,560	1,480							
30	10	12,530	12,350	12,540	12,370	12,680	12,430	12,700	12,440	12,280	12,010	12,200	11,990	11,770	11,610							
	5,0	6,450	6,290	7,000	6,830	6,850	6,700	6,520	6,360	6,300	6,140	6,700	6,470	6,250	6,060							
	2,5	3,390	3,280	3,880	3,760	3,890	3,790	3,630	3,530	3,220	3,100	3,660	3,610	3,380	3,290							
	1,0	1,420	1,380	1,760	1,700	1,660	1,620	1,540	1,500	1,290	1,240	1,790	1,720	1,460	1,420							
40	10	11,640	11,480	12,180	12,030	12,100	11,940	12,020	11,830	11,780	11,630	11,650	11,530	11,160	11,030							
	5,0	6,270	6,170	6,350	6,270	6,270	6,170	6,500	6,360	6,040	5,910	6,170	6,110	5,660	5,540							
	2,5	3,260	3,140	3,570	3,500	3,510	3,420	3,320	3,220	3,140	3,110	3,310	3,260	2,780	2,720							
	1,0	1,230	1,150	1,570	1,510	1,460	1,410	1,520	1,490	1,270	1,220	1,510	1,450	1,020	1,010							
50	10	11,100	10,980	11,280	11,220	11,760	11,630	11,360	11,190	11,040	10,980	11,880	11,750	11,130	11,010							
	5,0	5,560	5,480	6,010	5,970	6,020	5,950	5,840	5,770	6,070	5,970	5,940	5,870	5,640	5,590							
	2,5	2,760	2,710	3,070	3,000	3,180	3,120	2,900	2,840	3,020	2,980	3,250	3,210	2,880	2,850							
	1,0	1,110	1,100	1,260	1,240	1,260	1,230	1,120	1,090	1,380	1,370	1,290	1,260	1,260	1,230							

Tabela 5.4: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, interesse σ^2 , $\sigma^{(0)2} = 2$, ϕ fixo.

		ϕ																				
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0			0,3			0,6			0,9		
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	
10	10	17,770	17,060	17,960	17,270	17,480	16,590	17,680	16,760	17,020	16,110	15,730	14,930	14,410	13,700							
	5,0	10,540	9,870	10,780	10,270	10,100	9,540	10,540	9,930	10,040	9,510	9,260	8,650	8,430	7,920							
	2,5	6,100	5,610	6,600	6,180	5,870	5,490	6,180	5,690	6,180	5,720	5,410	5,030	4,730	4,370							
	1,0	2,930	2,630	3,350	3,030	3,080	2,860	2,890	2,640	2,910	2,650	2,510	2,360	2,230	1,960							
20	10	13,510	13,180	14,370	14,030	13,970	13,620	13,620	13,410	13,810	13,440	13,230	12,930	12,500	12,090							
	5,0	7,380	7,160	7,950	7,680	7,450	7,270	7,660	7,390	7,800	7,510	7,490	7,260	6,640	6,350							
	2,5	3,930	3,790	4,480	4,330	4,070	3,900	4,290	4,070	4,560	4,380	4,290	4,120	3,640	3,490							
	1,0	2,000	1,930	2,080	1,990	1,720	1,630	1,890	1,780	1,880	1,800	1,840	1,800	1,710	1,580							
30	10	12,720	12,520	12,020	11,750	11,940	11,760	12,320	12,170	12,360	12,130	12,340	12,220	11,740	11,510							
	5,0	6,710	6,510	6,380	6,230	6,470	6,270	6,850	6,720	6,620	6,470	6,960	6,850	6,310	6,170							
	2,5	3,550	3,460	3,500	3,380	3,460	3,390	3,860	3,740	3,580	3,480	3,830	3,780	3,390	3,290							
	1,0	1,600	1,530	1,440	1,390	1,440	1,390	1,600	1,510	1,700	1,660	1,810	1,730	1,400	1,350							
40	10	11,460	11,270	11,880	11,810	12,000	11,820	11,750	11,650	11,460	11,310	11,130	10,980	11,650	11,510							
	5,0	5,720	5,570	6,060	5,970	6,290	6,210	6,320	6,230	5,940	5,860	5,830	5,720	6,340	6,270							
	2,5	3,010	2,960	3,390	3,320	3,240	3,190	3,270	3,200	3,170	3,110	3,310	3,230	3,240	3,150							
	1,0	1,340	1,290	1,310	1,290	1,350	1,320	1,290	1,230	1,540	1,490	1,340	1,270	1,290	1,260							
50	10	11,700	11,620	11,460	11,400	11,150	10,970	11,260	11,130	11,390	11,270	11,090	11,040	11,500	11,430							
	5,0	6,140	6,010	6,080	6,020	6,220	6,130	6,010	5,940	5,950	5,820	5,870	5,800	5,900	5,820							
	2,5	3,130	3,040	2,950	2,900	3,090	3,050	3,300	3,240	2,930	2,890	3,140	3,100	3,030	3,000							
	1,0	1,300	1,260	1,270	1,250	1,180	1,160	1,390	1,370	1,350	1,320	1,390	1,350	1,350	1,310							

Tabela 5.5: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, interesse σ^2 , $\sigma^{(0)2} = 3$, ϕ fixo.

		ϕ																				
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0			0,3			0,6			0,9		
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	
10	10	17,830	17,100	18,300	17,580	17,800	17,070	17,970	17,260	17,140	16,410	16,010	15,240	13,260	12,610							
	5,0	10,770	10,210	11,080	10,600	10,870	10,180	10,820	10,110	10,050	9,620	9,480	8,920	7,480	6,990							
	2,5	6,490	6,080	6,620	6,150	6,370	5,990	6,500	5,920	5,900	5,510	5,320	4,970	4,040	3,640							
	1,0	3,180	2,890	3,320	3,140	3,170	2,880	3,150	2,830	2,830	2,560	2,710	2,400	1,690	1,580							
20	10	13,510	13,180	13,790	13,570	13,990	13,560	13,610	13,190	12,920	12,580	13,850	13,350	11,870	11,650							
	5,0	7,490	7,310	7,700	7,500	7,380	7,100	7,350	7,180	6,900	6,680	7,390	7,070	6,630	6,330							
	2,5	4,400	4,290	4,440	4,340	3,900	3,790	4,280	4,120	3,780	3,660	3,950	3,780	3,300	3,150							
	1,0	2,170	2,000	1,900	1,790	1,880	1,800	2,120	2,060	1,830	1,730	1,860	1,750	1,370	1,300							
30	10	11,960	11,740	12,530	12,340	12,760	12,550	12,600	12,330	12,640	12,450	12,010	11,780	12,050	11,820							
	5,0	6,510	6,350	6,830	6,640	6,880	6,650	6,700	6,440	6,930	6,780	6,340	6,230	6,330	6,180							
	2,5	3,360	3,280	3,540	3,380	3,650	3,540	3,430	3,390	3,680	3,590	3,420	3,270	3,430	3,360							
	1,0	1,430	1,380	1,650	1,580	1,600	1,540	1,500	1,440	1,730	1,670	1,440	1,360	1,600	1,550							
40	10	11,820	11,690	12,110	11,920	12,240	12,040	11,790	11,680	12,070	11,880	11,640	11,410	11,580	11,420							
	5,0	6,220	6,180	6,220	6,120	6,350	6,220	6,270	6,140	6,300	6,210	6,010	5,930	6,070	5,970							
	2,5	3,200	3,070	3,260	3,210	3,500	3,430	3,310	3,230	3,310	3,250	3,470	3,430	3,100	3,030							
	1,0	1,310	1,250	1,470	1,370	1,530	1,510	1,500	1,450	1,460	1,420	1,560	1,520	1,350	1,340							
50	10	11,280	11,130	11,930	11,800	11,460	11,370	11,600	11,500	11,900	11,800	12,110	11,990	10,910	10,730							
	5,0	5,800	5,690	6,240	6,150	5,960	5,920	6,260	6,150	6,320	6,230	6,230	6,120	5,380	5,280							
	2,5	2,970	2,940	3,280	3,270	3,090	3,050	3,420	3,380	3,130	3,110	3,170	3,120	2,830	2,810							
	1,0	1,240	1,210	1,590	1,550	1,350	1,350	1,260	1,250	1,190	1,190	1,300	1,270	1,140	1,110							

Tabela 5.6: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, interesse σ^2 , $\sigma^{(0)2} = 4$, ϕ fixo.

		ϕ																				
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0			0,3			0,6			0,9		
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	
10	10	16,820	15,970	18,570	17,800	17,120	16,350	17,270	16,520	16,550	15,900	15,900	15,110	13,930	13,220							
	5,0	10,250	9,610	10,910	10,340	9,760	9,160	10,500	9,720	9,830	9,310	9,300	8,680	8,120	7,650							
	2,5	6,250	5,720	6,560	6,200	5,690	5,310	6,110	5,770	5,780	5,230	5,490	5,100	4,690	4,320							
	1,0	3,140	2,890	3,370	2,980	2,780	2,500	3,100	2,770	2,620	2,450	2,550	2,420	2,070	1,950							
20	10	13,590	13,310	13,670	13,390	13,290	12,990	13,010	12,750	13,580	13,320	13,100	12,810	11,940	11,650							
	5,0	7,600	7,400	7,690	7,410	7,420	7,260	7,220	6,970	7,530	7,390	7,430	7,230	6,430	6,170							
	2,5	4,220	3,950	4,240	4,110	4,410	4,260	4,070	3,930	4,180	3,990	4,460	4,310	3,440	3,340							
	1,0	1,810	1,730	1,850	1,750	2,010	1,910	1,800	1,670	1,760	1,690	1,980	1,840	1,550	1,440							
30	10	11,840	11,620	12,380	12,180	13,060	12,760	12,240	12,030	12,100	11,890	12,170	11,920	11,770	11,540							
	5,0	6,400	6,280	6,660	6,480	7,000	6,810	6,840	6,710	6,490	6,320	6,510	6,380	6,340	6,150							
	2,5	3,550	3,490	3,550	3,450	3,870	3,760	3,680	3,600	3,500	3,430	3,480	3,340	3,340	3,270							
	1,0	1,400	1,340	1,710	1,630	1,810	1,710	1,640	1,600	1,540	1,490	1,420	1,390	1,300	1,270							
40	10	11,900	11,790	11,730	11,540	11,850	11,750	12,150	12,020	12,230	12,150	11,900	11,800	11,290	11,160							
	5,0	6,530	6,440	6,190	6,090	6,150	6,080	6,350	6,270	6,570	6,460	6,380	6,250	5,850	5,760							
	2,5	3,530	3,410	3,200	3,170	3,360	3,290	3,440	3,360	3,490	3,450	3,260	3,240	3,130	3,090							
	1,0	1,470	1,410	1,330	1,270	1,530	1,490	1,490	1,410	1,560	1,550	1,420	1,340	1,340	1,320							
50	10	11,340	11,190	11,670	11,560	11,120	10,950	11,860	11,720	11,510	11,400	11,220	11,090	10,920	10,870							
	5,0	6,220	6,160	6,310	6,160	5,960	5,820	6,110	6,030	5,940	5,920	5,740	5,710	5,670	5,570							
	2,5	3,160	3,120	3,080	3,040	2,940	2,910	3,150	3,080	3,100	3,040	2,980	2,950	2,980	2,890							
	1,0	1,510	1,470	1,290	1,260	1,390	1,370	1,310	1,270	1,380	1,340	1,210	1,200	1,330	1,310							

Tabela 5.7: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $AR(1)$, interesse σ^2 , $\sigma^{(0)2} = 1$, ϕ desconhecido.

		ϕ													
		-0,9		-0,6		-0,3		0,0		0,3		0,6		0,9	
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*
10	10	18,030	8,730	16,940	7,580	16,430	7,580	16,970	7,690	16,530	7,350	16,560	7,840	18,280	8,620
	5,0	10,940	3,770	10,020	3,210	9,400	3,420	10,070	3,420	9,350	3,190	10,070	3,240	10,830	4,060
	2,5	6,570	1,650	5,720	1,360	5,900	1,510	5,720	1,470	5,540	1,540	5,810	1,410	6,650	1,720
	1,0	3,260	0,560	2,620	0,390	2,800	0,430	2,810	0,420	2,790	0,490	2,700	0,340	3,440	0,570
20	10	13,800	9,560	12,890	9,180	13,750	9,710	13,840	10,180	13,520	9,860	13,470	9,710	13,280	9,660
	5,0	7,410	4,930	6,980	4,400	7,580	4,790	7,620	4,730	7,540	4,620	7,520	4,450	7,600	4,710
	2,5	4,420	2,430	3,940	2,170	4,230	2,330	4,180	2,560	4,050	2,260	3,900	2,210	4,110	2,400
	1,0	1,990	0,990	1,910	0,850	1,960	0,850	2,010	0,940	1,780	0,850	1,750	0,900	1,990	1,060
30	10	14,760	12,040	12,290	9,780	11,970	9,530	12,730	10,090	12,400	10,030	12,060	9,750	13,190	10,840
	5,0	8,260	6,300	6,490	4,830	6,090	4,690	6,840	4,840	6,520	4,630	6,520	4,880	7,400	5,490
	2,5	4,690	3,100	3,600	2,570	3,500	2,480	3,760	2,560	3,340	2,290	3,600	2,360	4,110	2,820
	1,0	2,240	1,440	1,660	1,010	1,560	1,000	1,620	1,010	1,540	0,960	1,540	0,940	1,810	1,140
40	10	16,400	14,180	11,580	9,830	12,260	10,590	11,740	10,110	11,230	9,460	11,860	10,020	15,600	13,560
	5,0	9,230	7,450	6,010	4,810	6,480	5,350	6,580	5,300	6,010	4,800	6,470	5,250	8,870	7,460
	2,5	5,110	3,900	3,160	2,340	3,380	2,530	3,420	2,500	3,230	2,430	3,520	2,660	5,200	3,890
	1,0	2,330	1,660	1,320	0,850	1,300	0,850	1,580	1,240	1,250	0,850	1,530	1,040	2,220	1,590
50	10	17,640	15,710	11,590	10,090	11,140	9,770	12,310	10,740	11,470	10,020	11,620	10,210	17,030	15,150
	5,0	9,940	8,560	6,140	5,160	5,920	4,990	6,540	5,590	6,050	5,050	5,990	4,890	9,780	8,290
	2,5	5,630	4,510	3,210	2,600	3,270	2,610	3,490	2,810	3,000	2,330	3,130	2,460	5,500	4,370
	1,0	2,860	1,830	1,340	1,020	1,400	0,970	1,460	1,100	1,310	0,960	1,160	0,840	2,490	1,980

Tabela 5.8: Taxa de rejeição estimada para RV e RV^* , no modelo $MA(1)$, interesse θ , $\sigma^2 = 1$ fixo.

		$\theta(^{\circ})$											
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0		
n	$\alpha(\%)$	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*	RV	RV^*
30	10	3,480	1,440	11,050	9,430	10,660	9,980	10,530	10,130	10,810	10,010	11,530	9,990
	5,0	1,500	0,590	5,330	4,170	5,410	4,930	5,760	5,300	5,440	5,030	5,390	4,220
2,5	0,770	0,170	2,390	1,710	2,930	2,930	2,700	3,110	2,930	2,950	2,640	2,420	1,780
1,0	0,280	0,040	0,920	0,630	1,110	0,930	1,300	1,190	1,190	1,310	1,070	0,830	0,540
40	10	3,810	1,860	11,710	10,370	10,640	10,060	10,580	10,230	10,410	9,970	11,430	10,380
	5,0	1,590	0,720	5,780	5,020	5,470	5,150	5,580	5,320	5,560	5,240	5,990	5,010
2,5	0,750	0,270	2,950	2,440	2,440	2,690	2,440	2,860	2,700	2,860	2,560	2,800	2,410
1,0	0,300	0,050	1,330	1,000	1,100	1,100	1,010	1,220	1,120	1,180	1,060	1,230	0,980
50	10	4,340	2,410	11,090	10,210	10,240	9,870	10,550	10,260	10,310	9,790	11,580	10,720
	5,0	1,900	0,810	5,830	5,200	5,310	5,060	5,480	5,280	5,280	4,980	6,130	5,390
2,5	0,760	0,310	3,300	2,790	2,790	2,780	2,610	2,990	2,840	2,630	2,410	3,250	2,780
1,0	0,300	0,120	1,430	1,170	1,170	1,250	1,160	1,170	1,120	1,030	0,920	1,360	1,180
60	10	6,210	3,230	10,530	9,770	10,360	9,950	10,670	10,350	10,290	9,870	11,010	10,280
	5,0	1,850	0,910	5,340	4,880	5,190	4,950	5,320	5,010	5,090	4,820	5,910	5,370
2,5	0,710	0,280	2,800	2,410	2,410	2,850	2,750	2,630	2,520	2,540	2,370	3,060	2,690
1,0	0,240	0,070	1,090	0,940	0,940	1,080	1,000	1,120	1,020	0,980	0,930	1,280	1,090
70	10	7,830	4,450	10,360	9,790	10,590	10,400	10,170	9,910	10,120	9,820	11,090	10,290
	5,0	2,580	1,320	5,500	5,030	5,240	5,050	5,000	4,910	5,160	4,910	5,700	5,280
2,5	0,970	0,490	2,930	2,580	2,580	2,700	2,570	2,690	2,630	2,490	2,390	3,050	2,730
1,0	0,380	0,200	1,380	1,150	1,140	1,140	1,050	1,070	1,020	1,120	1,030	1,320	1,180

Tabela 5.9: Taxa de rejeição estimada para S e S^* , no modelo $AR(1)$, interesse ϕ , σ^2 desconhecido.

$\phi^{(0)}$																							
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0			0,3			0,6			0,9			
n	$\alpha(\%)$	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*
10	10	0,170	3,670	3,710	7,580	6,800	10,230	7,410	10,160	6,170	9,870	3,770	8,510	0,440	4,440								
	5,0	0,020	1,250	2,290	3,610	2,690	5,010	2,700	5,000	2,030	4,530	2,040	3,930	0,140	1,720								
	2,5	0,000	0,900	1,350	2,090	1,300	2,570	0,770	2,240	0,750	1,920	1,130	2,180	0,040	1,260								
	1,0	0,000	0,610	0,800	0,000	0,530	1,280	0,090	0,700	0,280	0,710	0,610	0,000	0,000	0,860								
20	10	1,220	4,530	6,010	9,120	8,020	10,090	9,040	10,490	7,990	9,670	5,970	9,480	2,480	5,960								
	5,0	0,640	1,910	2,830	3,910	3,610	4,950	4,140	5,350	3,410	4,870	2,700	3,910	1,440	3,050								
	2,5	0,310	1,420	1,760	1,820	1,560	2,470	1,640	2,590	1,520	2,530	1,620	1,690	0,940	2,350								
	1,0	0,140	0,820	1,040	0,000	0,620	0,930	0,450	0,980	0,570	0,890	0,890	0,000	0,520	1,450								
30	10	2,080	5,590	7,470	9,930	8,760	10,320	9,480	10,490	9,080	10,070	7,050	9,430	3,140	6,240								
	5,0	1,200	2,510	3,390	4,400	4,130	5,080	4,350	5,390	4,150	5,340	3,140	4,370	2,120	2,790								
	2,5	0,640	1,610	1,980	1,820	2,270	2,730	1,850	2,490	1,960	2,560	1,800	1,970	1,350	1,990								
	1,0	0,340	0,000	1,240	0,000	0,790	1,160	0,590	0,960	0,750	1,070	0,930	0,000	0,890	0,000								
40	10	2,760	6,630	7,280	9,070	9,350	10,340	9,790	10,610	9,190	10,120	7,880	9,650	3,180	6,590								
	5,0	1,710	2,520	3,110	4,070	4,470	5,320	4,390	5,150	4,420	5,320	3,430	4,530	2,100	2,530								
	2,5	1,080	1,490	1,760	1,710	2,260	2,730	2,060	2,580	2,110	2,700	1,940	1,940	1,510	1,460								
	1,0	0,520	0,000	0,930	0,000	0,810	1,150	0,850	1,090	0,880	1,030	0,870	0,000	1,020	0,000								
50	10	3,590	7,150	8,310	9,560	9,060	9,880	9,180	9,730	9,630	10,470	8,310	9,680	3,710	6,700								
	5,0	2,290	2,700	3,990	4,820	4,620	5,230	4,690	5,170	4,470	5,140	4,060	4,730	2,530	2,500								
	2,5	1,520	1,360	2,230	2,140	2,350	2,820	2,230	2,610	2,200	2,570	2,090	2,160	1,870	1,250								
	1,0	0,960	0,000	1,180	0,000	0,910	1,130	0,750	1,050	0,830	1,010	1,150	0,000	1,270	0,000								

Tabela 5.10: Taxa de rejeição estimada para S e S^* , no modelo $AR(1)$, interesse σ^2 , $\sigma^{(0)2} = 1$, incômodo ϕ .

		ϕ																				
		-0,9			-0,6			-0,3			0,0			0,3			0,6			0,9		
n	$\alpha(\%)$	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	
10	10	6,350	9,550	7,010	10,060	6,800	9,560	6,410	9,060	6,650	9,260	6,870	9,660	6,400	9,380							
	5,0	1,560	3,200	2,230	3,620	1,950	3,300	1,870	3,410	1,980	3,710	2,170	3,560	1,690	3,440							
	2,5	0,760	1,050	1,210	1,690	1,200	1,270	1,060	1,300	1,070	1,390	1,240	1,480	0,960	1,170							
	1,0	0,440	0,480	0,660	0,560	0,620	0,620	0,610	0,500	0,560	0,520	0,860	0,570	0,570	0,490							
20	10	8,820	10,710	9,100	10,180	8,540	9,880	8,550	9,780	9,080	10,610	8,980	10,450	8,130	9,850							
	5,0	3,110	4,380	3,620	4,760	3,390	4,720	3,370	4,510	3,810	4,800	3,440	4,530	2,740	3,800							
	2,5	0,990	1,400	1,670	2,180	1,360	1,880	1,300	1,780	1,630	2,010	1,530	1,950	0,920	1,400							
	1,0	0,360	0,330	0,750	0,810	0,620	0,620	0,690	0,600	0,780	0,670	0,720	0,790	0,280	0,310							
30	10	10,110	11,240	9,700	10,700	9,040	9,970	9,090	9,890	9,540	10,440	9,250	10,030	10,030	11,190							
	5,0	3,880	4,650	4,300	5,000	3,940	4,880	4,250	4,870	4,200	4,950	3,880	4,650	3,820	4,650							
	2,5	1,370	1,950	1,930	2,300	1,750	2,060	1,850	2,170	1,870	2,370	1,790	2,110	1,130	1,580							
	1,0	0,260	0,290	0,700	0,670	0,720	0,730	0,750	0,720	0,770	0,790	0,850	0,940	0,200	0,280							
40	10	11,190	12,130	9,200	9,870	9,750	10,510	9,480	10,040	9,360	10,010	9,670	10,310	11,010	11,850							
	5,0	4,620	5,420	4,360	4,930	4,300	4,940	4,370	4,940	4,330	4,750	4,450	4,990	4,660	5,500							
	2,5	1,700	2,110	1,870	2,180	1,960	2,250	2,310	2,610	1,960	2,240	2,170	2,450	1,770	2,080							
	1,0	0,380	0,470	0,660	0,680	0,890	0,930	0,840	0,880	0,770	0,790	0,830	0,840	0,490	0,610							
50	10	12,910	13,670	9,480	10,000	9,840	10,260	9,410	9,960	9,440	10,070	9,300	9,800	12,750	13,640							
	5,0	5,600	6,440	4,220	4,700	4,660	5,090	4,390	4,820	4,390	4,930	4,190	4,640	5,460	6,250							
	2,5	2,340	2,740	2,120	2,370	2,240	2,600	2,090	2,360	2,030	2,370	2,110	2,360	2,150	2,600							
	1,0	0,630	0,720	0,810	0,850	0,920	1,000	0,810	0,860	0,820	0,860	0,880	0,880	0,430	0,500							

Tabela 5.11: Taxa de rejeição estimada para S e S^* , no modelo $MA(1)$, interesse θ , incômodo σ^2 .

		$\theta^{(0)}$																											
		-0,9				-0,6				-0,3				0,0				0,3				0,6				0,9			
n	$\alpha(\%)$	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*				
10	10	11,820	27,770	8,850	12,940	10,920	14,960	11,290	14,300	11,350	15,380	8,630	12,290	11,600	28,760														
	5,0	7,790	20,480	5,980	7,550	5,680	8,760	5,520	8,370	5,910	9,080	5,650	6,910	7,800	20,580														
	2,5	5,610	15,690	4,190	4,520	3,150	5,470	2,500	5,030	3,370	5,710	4,050	4,030	5,440	15,940														
	1,0	3,740	11,610	2,620	0,000	1,680	2,890	0,790	2,420	1,620	3,160	2,810	0,000	3,890	11,720														
20	10	6,580	9,640	8,890	11,360	9,910	11,920	10,060	11,720	9,740	11,790	8,110	10,300	6,740	10,100														
	5,0	4,890	6,330	5,240	6,080	4,640	6,450	4,740	6,060	4,630	6,260	4,760	5,560	4,970	6,650														
	2,5	3,710	4,560	3,400	3,220	2,250	3,400	2,090	3,220	2,230	3,270	3,190	2,820	3,820	4,480														
	1,0	2,740	2,560	2,010	0,000	0,990	1,450	0,730	1,280	1,150	1,610	1,920	0,000	2,760	2,590														
30	10	6,570	7,880	8,350	10,520	10,120	11,440	9,850	10,910	9,830	11,160	8,750	10,840	6,600	7,550														
	5,0	4,800	5,090	4,070	5,190	4,930	6,310	4,710	5,680	4,930	5,940	4,590	5,610	4,740	4,830														
	2,5	3,670	3,300	2,740	2,480	2,360	3,060	2,270	3,050	2,470	3,140	2,630	2,740	3,760	3,250														
	1,0	2,700	0,000	1,630	0,000	1,060	1,410	0,880	1,290	1,120	1,390	1,510	0,000	2,730	0,000														
40	10	6,580	7,170	9,120	10,680	9,770	10,700	10,400	11,220	9,600	10,780	9,010	10,890	6,810	7,400														
	5,0	5,010	4,480	4,700	5,660	4,650	5,450	5,250	6,060	4,750	5,380	4,510	5,240	4,860	4,740														
	2,5	3,830	2,310	2,770	2,700	2,280	2,740	2,530	3,120	2,200	2,770	2,580	2,520	3,580	2,750														
	1,0	2,720	0,000	1,520	0,000	0,960	1,280	0,880	1,240	1,020	1,270	1,520	0,000	2,530	0,000														
50	10	6,760	7,280	8,560	10,020	9,780	10,580	9,490	10,150	9,510	10,380	9,350	11,100	7,050	7,210														
	5,0	4,640	4,410	4,270	5,040	4,930	5,710	4,660	5,220	4,640	5,220	4,890	5,640	5,030	4,610														
	2,5	3,520	2,140	2,280	2,480	2,380	2,880	2,300	2,570	2,320	2,720	2,800	2,890	3,710	2,290														
	1,0	2,510	0,000	1,100	0,000	1,020	1,200	0,940	1,110	0,970	1,130	1,400	0,000	2,680	0,000														

Tabela 5.12: Taxa de rejeição estimada para S e S^* , no modelo $MA(1)$, interesse σ^2 , incômodo θ .

		θ																											
		-0,85				-0,6				-0,3				0,0				0,3				0,6				0,85			
n	$\alpha(\%)$	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*	S	S^*
10	10	3,310	4,820	3,660	5,520	5,380	7,240	5,720	7,690	5,450	7,220	4,210	5,980	10,110	12,050														
	5,0	1,320	1,710	1,290	1,810	2,180	2,880	2,370	3,120	2,250	3,070	1,320	2,020	5,450	6,350														
	2,5	0,830	0,740	0,820	0,810	1,390	1,590	1,550	1,700	1,420	1,640	0,780	0,960	3,600	3,740														
	1,0	0,620	0,350	0,430	0,330	0,770	0,580	0,910	0,590	0,880	0,600	0,490	0,410	2,360	1,480														
20	10	7,080	8,680	7,490	8,880	8,280	9,480	8,860	9,920	8,260	9,690	7,460	8,970	8,630	9,820														
	5,0	1,820	2,730	2,480	3,280	3,410	4,250	3,930	5,030	3,350	4,130	2,470	3,500	4,030	5,000														
	2,5	0,580	0,840	0,930	1,260	1,620	1,880	2,010	2,370	1,640	1,960	0,960	1,330	2,050	2,470														
	1,0	0,250	0,240	0,480	0,410	0,880	0,710	0,920	0,800	0,930	0,860	0,380	0,340	1,170	1,020														
30	10	6,590	7,240	9,390	10,430	9,220	10,030	9,450	10,490	8,940	9,600	6,920	7,500	9,090	9,860														
	5,0	2,950	3,370	3,810	4,590	4,320	4,990	4,360	5,050	3,880	4,620	3,220	3,620	4,190	4,920														
	2,5	1,710	1,840	1,440	1,900	2,020	2,440	2,150	2,470	1,790	2,100	1,880	2,020	2,070	2,320														
	1,0	0,920	0,870	0,690	0,710	0,960	0,920	0,960	0,980	0,860	0,860	0,870	0,860	0,940	0,870														
40	10	7,110	7,670	9,710	10,340	9,710	10,320	9,140	9,860	9,800	10,560	9,750	10,560	9,120	9,770														
	5,0	3,170	3,530	4,110	4,670	4,570	5,080	4,270	4,800	4,570	5,160	4,380	4,980	4,040	4,690														
	2,5	2,070	1,570	1,820	2,380	2,370	2,780	2,190	2,500	2,180	2,530	2,050	2,400	2,030	2,280														
	1,0	0,880	0,870	0,910	0,940	1,090	1,110	0,790	0,800	1,000	1,100	0,740	0,760	0,790	0,820														
50	10	8,630	9,010	10,630	11,160	9,650	10,220	9,430	9,890	9,250	9,690	7,630	8,130	9,610	10,000														
	5,0	3,570	3,920	4,930	5,430	4,690	5,130	4,670	5,020	4,540	4,870	3,610	4,030	4,430	4,890														
	2,5	1,600	1,760	2,330	2,580	2,350	2,510	2,270	2,530	2,200	2,380	1,820	1,920	2,090	2,440														
	1,0	0,760	0,780	0,890	0,940	1,110	1,130	1,070	1,150	1,030	1,060	0,890	0,960	0,780	0,820														

Capítulo 6

Conclusões Gerais

O objetivo desta tese foi aperfeiçoar duas estatísticas testes, razão de verossimilhança e escore, para modelos auto-regressivos e de médias móveis gaussianos estacionários e invertíveis. Os resultados obtidos podem ser resumido como segue: (i) obteve-se o fator de correção para a estatística teste da razão de verossimilhança em termos matriciais; (ii) obteve-se o fator de correção para a estatística teste escore em termos matriciais. As fórmulas encontradas resultaram ser bastante simples, no sentido de que podamos implementá-las num pacote computacional numérico matricial ou simbólico; (iii) finalmente, foi feito um estudo numérico do desempenho das estatísticas corrigidas via simulação. Fazemos, agora, uma discussão mais detalhada dos resultados.

1. Obtivemos correções para a estatística da razão de verossimilhança nos casos: (i) onde o modelo é auto-regressivo de ordem 1 e de médias móveis de ordem 1, para o problema de testar a hipótese nula simples com um parâmetro de interesse e um parâmetro fixo e um parâmetro de interesse e um parâmetro de incômodo; (ii) para o modelo auto-regressivo de médias móveis de ordem $(1, 1)$, para o problema de testar a hipótese nula simples com um parâmetro de interesse e dois parâmetros de incômodo e dois parâmetros de interesse e um parâmetro de incômodo.
2. Deduzimos fórmulas para a correção tipo-Bartlett para a estatística escore nos casos:

- (i) modelo auto-regressivo de ordem 1 e no modelo de médias móveis de ordem 1 para, o problema de testar a hipótese nula simples com um parâmetro de interesse e um parâmetro de incômodo; (ii) modelo auto-regressivo de médias móveis de ordem (1,1), para o problema de testar a hipótese nula simples sendo o parâmetro de interesse o parâmetro auto-regressivo e os outros dois parâmetros como parâmetros de incômodo.
3. Foram feitas as simulações para calcular os valores estimados das taxas de rejeição para a estatística da razão de verossimilhança e escore no caso de um modelo auto-regressivo de ordem 1 e no modelo de médias móveis de ordem 1, para alguns dos problemas especificados em 1 e 2.
- (a) Para a estatística da razão de verossimilhança
- (i) Caso de um modelo auto-regressivo de ordem 1. Um problema foi testar a hipótese nula simples sobre o parâmetro auto-regressivo, $H : \phi = \phi^{(0)}$ contra a alternativa composta $A : \phi \neq \phi^{(0)}$, para $\phi^{(0)} = -0,9 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e o parâmetro do ruído branco fixo e igual a um. Em geral o uso da correção tem sentido se o parâmetro auto-regressivo igual a $-0,6 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Também foi considerado o problema de testar a hipótese nula simples sobre o parâmetro do ruído branco, $H : \sigma^2 = \sigma^{(0)2}$, contra a alternativa composta, $A : \sigma^2 \neq \sigma^{(0)2}$, quando o parâmetro auto-regressivo é fixo e igual a $-0,9 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, para $\sigma^{(0)2} = 1, 2, 3, 4$. Em geral o uso da correção tem sentido. Por último foi testada a hipótese nula simples sobre o parâmetro do ruído branco, $H : \sigma^2 = 1$ contra a alternativa composta $H : \sigma^2 \neq 1$, quando o parâmetro auto-regressivo é desconhecido e igual a $-0,9 + 0,3k$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ como valor verdadeiro. Em geral o uso da correção tem sentido.
- (ii) Para o caso de um modelo de médias móveis de ordem 1 considerou-se o problema de testar a hipótese nula simples sobre o parâmetro de médias móveis, $H : \theta = \theta^{(0)}$, contra a alternativa composta $A : \theta \neq \theta^{(0)}$, quando o

parâmetro do ruído branco é fixo e igual a um, para $\theta^{(0)} = -0,9 + 0,3k$, com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Em geral o uso da correção melhora o desempenho da estatística da razão de verossimilhança, se o tamanho da série é $n > 20$ e o parâmetro de média móvel for igual a $-0,6 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Para a estatística score

- (i) Caso de um modelo auto-regressivo de ordem 1. Considerou-se o problema de testar a hipótese nula simples sobre o parâmetro auto-regressivo, $H : \phi = \phi^{(0)}$ contra a alternativa composta $A : \phi \neq \phi^{(0)}$, quando o parâmetro do ruído branco é desconhecido com valor verdadeiro igual a um, para $\phi^{(0)} = -0,9 + 0,3k$ com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. O desempenho da estatística score corrigida, em geral, melhora quando é considerado um nível nominal fixo maior que 0,025. Outro problema considerado é testar a hipótese nula sobre o parâmetro do ruído branco, $H: \sigma^2 = 1$, contra a alternativa, $A: \sigma^2 \neq 1$, quando o parâmetro auto-regressivo é desconhecido com valor verdadeiro $-0,9 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Em geral a correção melhora o desempenho da estatística score.
- (ii) Para o caso de um modelo de médias móveis de ordem 1. Considerou-se o problema de testar a hipótese nula $H: \theta = \theta^{(0)}$ contra a alternativa $A: \theta \neq \theta^{(0)}$ quando o parâmetro do ruído branco é fixo e igual a um, para $\theta^{(0)} = -0,9 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Em geral o uso da correção não melhora o desempenho da estatística score. Por último se considerou o problema de testar a hipótese nula simples sobre o parâmetro do ruído branco, $H: \sigma^2 = \sigma^{(0)2}$ contra a alternativa, $H: \sigma^2 \neq \sigma^{(0)2}$, quando o parâmetro de médias móveis é desconhecido com valor verdadeiro igual a $\pm 0,85, -0,6 + 0,3k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Em geral o uso da correção tem sentido.

Alguns pontos que poderão ser desenvolvidos como tópicos de pesquisa futura são:

- (a) Obter correções das estatísticas razão de verossimilhança e escore no caso de se ter um modelo auto-regressivo e de médias móveis de ordem (p, q) com p e/ou $q > 1$ e no caso de se ter um modelo linear com erros gaussianos auto-regressivos de ordem um.
- (b) Obter expansões assintóticas até ordem n^{-1} para a função de poder das estatísticas corrigidas, dadas no Capítulo 4, para testar uma hipótese nula $H : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra as alternativas $A_n : \beta_1 = \beta_1^{(0)} + \psi$, onde $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)^\top$ com $\psi_i = \beta_i - \beta_i^{(0)}$ suposto de ordem $n^{-1/2}$.
- (c) Obter por simulações as estimativas dos valores das taxas de rejeição das estatísticas razão de verossimilhança e escore corrigidas para o modelo auto-regressivo de médias móveis de ordem $(1, 1)$, dadas no Capítulo 4, que permita comparar o desempenho das estatística corrigidas com as originais.
- (d) Também estudar as correções alternativas para a estatística escore, isto é, correções que sejam monótonas.

Apêndice A

A.1 Resultados matriciais

O seguinte resultado é obtido de Mardia e Marshall (1984).

Proposição A.1 Seja uma matriz quadrada $\Sigma = \Sigma(\beta)$, com sua inversa dada por Σ^{-1} , então

$$\frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \beta_i} = -\Sigma^{-1} \Sigma_i \Sigma^{-1}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \log(|\Sigma|)}{\partial \beta_i} = \text{tr}(\Sigma^{-1} \Sigma_i). \quad (\text{A.2})$$

onde $\Sigma_i = \partial \Sigma / \partial \beta_i$.

A seguir escrevem-se notações para as matrizes e traços usados nos resultados dos Capítulos 3 e 4. Sejam

$$\mathbf{A}_{i_1, \dots, i_d} = \frac{\partial^d A(\beta)}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_d}}, \quad \bar{\Sigma} = \Sigma^{-1} \Sigma, \quad \mathbf{C}^i = \Sigma_i \Sigma^{-1} = \bar{\Sigma}_i, \quad \mathbf{D} = -\Sigma^{-1},$$

$$\bar{\Sigma}_{i_1, \dots, i_d} = \Sigma_{i_1, \dots, i_d} \Sigma, \quad \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j = \bar{\Sigma}_{i,j}, \quad \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jk} = \bar{\Sigma}_{i,jk}, \quad \text{etc},$$

$$m^{i,j} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j), \quad m^{ij,k} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k),$$

$$m^{i,j,k} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k), \quad m^{i,j,k,l} = \text{tr}(\bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l), \quad \text{etc}.$$

Proposição A.2 Seja uma matriz quadrada $\Sigma = \Sigma(\beta)$, com sua inversa dada por Σ^{-1} , então

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}_{i_1, \dots, i_{d-1}}}{\partial \beta_{i_d}} = \bar{\Sigma}_{i_1, \dots, i_d} - \bar{\Sigma}_{i_1, \dots, i_{d-1}} \bar{\Sigma}_{i_d}. \quad (\text{A.3})$$

Daqui temos:

$$\begin{aligned} C_j^i &= \bar{\Sigma}_{ij} - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j, \\ C_{jk}^i &= \bar{\Sigma}_{ijk} - \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k, \\ C_{jkl}^i &= \bar{\Sigma}_{ijkl} - \bar{\Sigma}_{ijk} \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_{ijl} \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_{ikl} \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jkl} - \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_{kl} - \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_{jl} - \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_{jk} \\ &\quad + \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l + \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l + \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_j \\ &\quad + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{jl} + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{jk} + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_l + \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jl} \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{kl} - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \\ &\quad - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{ll} \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l. \\ D_i &= \Sigma^{-1} \bar{\Sigma}_i, \\ D_{ijk} &= \Sigma^{-1} \left(\bar{\Sigma}_{ijk} - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{ij} - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jk} - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{ik} - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{ik} - \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k, \right. \\ &\quad \left. + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \right), \\ D_{ijkl} &= \Sigma^{-1} \left(\bar{\Sigma}_{ijkl} - \bar{\Sigma}_{ijk} \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_{ijl} \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_{ikl} \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{ikl} - \bar{\Sigma}_{jkl} \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jkl} - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{ijl} \right. \\ &\quad - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{ijk} - \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_{kl} - \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_{jl} - \bar{\Sigma}_{jl} \bar{\Sigma}_{ik} - \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_{il} - \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_{jk} - \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_{ij} + \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \\ &\quad + \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l + \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{ik} + \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l + \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_l \\ &\quad + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{jk} + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{kl} + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_{jl} \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{il} + \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_{jl} \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \\ &\quad + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{kl} + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jl} \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{jl} + \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{il} \\ &\quad + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{jl} \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jl} + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{il} \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_{kl} \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_{ll} + \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{ij} \\ &\quad + \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k + \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{ik} \bar{\Sigma}_j + \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_{ik} + \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_{jk} \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_{jk} + \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_{ij} - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \\ &\quad - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \\ &\quad - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \\ &\quad - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_l - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \\ &\quad - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_l \bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \Big). \end{aligned}$$

Prova: A prova desta proposição é feita usando as propriedades do operador derivada.

Proposição A.3 O primeiro momento das derivadas da log-verossimilhança, dada na Proposição 4.2, é dado por

$$\begin{aligned} E(U_{i_1}) &= 0, \quad d = 1 \\ E(U_{i_1 \dots i_d}) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\Sigma \partial^d \Sigma^{-1}}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_d}} \right) - \frac{1}{2} \text{tr} \left(C_{i_2 \dots i_d}^{i_1} \right), \quad d > 1, \end{aligned}$$

onde $C_{i_2 \dots i_d}^{i_1}$ é a $(d-1)$ -ésima derivada parcial de $C^{i_1} = \Sigma^{-1} \Sigma_{i_1}$ em relação a $\beta_{i_2} \dots \beta_{i_d}$, e $\frac{\partial^d \Sigma^{-1}}{\partial \beta_{i_1} \dots \partial \beta_{i_d}}$, para $d > 1$, estão dadas na Proposição A.2.

Prova: Usa-se o Teorema 4.2 e a Proposição 4.2.

A.2 Exemplo do cálculo dos κ 's

A seguir mostramos com um exemplo o procedimento de cálculo dos κ 's. Consideremos os κ_{ijk} :

$$\kappa_{ijk} = E(U_{ijk}) = \frac{1}{2} \left\{ m^{i,k,j} + m^{i,j,k} + m^{j,i,k} + m^{k,i,j} - m^{i,j,k} - m^{ik,j} - m^{ij,k} \right\}.$$

Primeiro, calculemos $n^{-1} m^{i,k,j}$ até $o(n^{-\frac{1}{2}})$ usando o Teorema 4.1. Sejam $s = 3$, $f_1(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_\beta(\lambda)$, $f_2(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_\beta(\lambda)$, $f_3(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_\beta(\lambda)$, $g_1(\lambda) = g_2(\lambda) = g_3(\lambda) = f_\beta(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \Gamma_q &= \Sigma_{p_q} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1 - m_2)\lambda} f_q(\lambda) d\lambda, \\ \Lambda_q &= \Sigma = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1 - m_2)\lambda} g_q(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

para $q = 1, 2, 3$, $p_1 = i$, $p_2 = j$, $p_3 = k$. Assim, temos,

$$\frac{1}{n} m^{i,j,k} = \frac{1}{n} \text{tr}(\bar{\Sigma}_i \bar{\Sigma}_j \bar{\Sigma}_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) f_2(\lambda) f_3(\lambda) f_\beta^{-3}(\lambda) d\lambda + O(n^{-1}).$$

Para $m^{ij,k}$, sejam $s = 2$, $f_1(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} f_\beta(\lambda)$, $f_2(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_\beta(\lambda)$, $g_1(\lambda) = g_2(\lambda) = f_\beta(\lambda)$.

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Sigma_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1-m_2)\lambda} f_1(\lambda) d\lambda, \\ \Gamma_2 &= \Sigma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1-m_2)\lambda} f_2(\lambda) d\lambda, \\ \Lambda_q &= \Sigma = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_1-m_2)\lambda} g_q(\lambda) d\lambda,\end{aligned}$$

para $q = 1, 2$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} m^{ij,k} &= \frac{1}{n} \text{tr}(\bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) f_2(\lambda) f_\beta^{-2}(\lambda) d\lambda + O(n^{-1}), \\ \frac{1}{n} \{m^{i,k,j} + m^{i,j,k} + m^{j,i,k} + m^{k,i,j}\} &= \frac{4}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) f_2(\lambda) f_3(\lambda) f_\beta^{-3}(\lambda) d\lambda + O(n^{-1}).\end{aligned}$$

E para

$$\frac{1}{n} \{m^{i,j,k} + m^{ik,j} + m^{ij,k}\} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{f_{ij}(\lambda) f_k(\lambda) + f_{jk}(\lambda) f_i + f_{ik}(\lambda) f_j(\lambda)\} f_\beta^{-2}(\lambda) d\lambda + O(n^{-1}).$$

Por último, temos para $n^{-1} \kappa_{ijk}$,

$$\begin{aligned}n^{-1} \kappa_{ijk} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) f_2(\lambda) f_3(\lambda) f_\beta^{-3}(\lambda) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \{f_{ij}(\lambda) f_k(\lambda) + f_{jk}(\lambda) f_i + f_{ik}(\lambda) f_j(\lambda)\} f_\beta^{-2}(\lambda) d\lambda + O(n^{-1}),\end{aligned}$$

coincidindo com a expressão (2.2.11) de Taniguchi (1991) para o caso unidimensional.

Para os casos onde precisa-se do produto das derivadas do escore U usa-se o Teorema 4.2.

Colocamos agora as expressões da Proposição 4.4 em termos da densidade espectral f_β :

$$\begin{aligned}I_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_\beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_\beta(\lambda) f_\beta(\lambda)^{-2} d\lambda, \\ J_{ijk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_\beta(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_k} f_\beta(\lambda) f_\beta(\lambda)^{-3} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_\beta(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_k} f_\beta(\lambda) f_\beta(\lambda)^{-2} d\lambda,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ijk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-3} d\lambda, \\
L_{ijkl} &= \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-4} d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) + \frac{\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) \right] f_{\beta}(\lambda)^{-3} d\lambda + \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial^3}{\partial \beta_j \partial \beta_k \partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-2} d\lambda, \\
M_{ijkl} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-4} d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \right] f_{\beta}(\lambda)^{-3} d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-2} d\lambda, \\
N_{ijkl} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-4} d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-3} d\lambda, \\
H_{ijkl} &= \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta_i} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_j} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f_{\beta}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \beta_l} f_{\beta}(\lambda) f_{\beta}(\lambda)^{-4} d\lambda.
\end{aligned}$$

Prova da Proposição 4.5. Usa-se a Proposição 4.1, (A.1), (A.2), (A.3) e as notações dadas acima para denotar os traços do produto de formas quadráticas. Assim, temos

$$\kappa_{ij}^{(k)} = -\frac{1}{2} \left\{ m^{ik,j} - m^{i,k,l} + m^{i,jk} - m^{i,j,k} \right\},$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{ij}^{(kl)} &= -\frac{1}{2} \left\{ m^{ikl,j} - m^{ik,l,j} + m^{ik,jl} - m^{ik,j,l} - m^{il,k,j} + m^{i,l,k,j} - m^{i,kl,j} + m^{i,k,l,j} - 2m^{i,k,jl} \right. \\
&\quad \left. + 2m^{i,k,j,l} + m^{il,jk} - m^{i,l,jk} + m^{i,jkl} - m^{i,jk,l} - m^{il,j,k} + m^{i,l,j,k} - m^{i,jl,k} + m^{i,j,l,k} - \right. \\
&\quad \left. 2m^{i,j,kl} + 2m^{i,j,k,l} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{ijk}^{(l)} = & \frac{1}{2} \left\{ 2m^{il,k,j} + 3m^{j,i,kl} + 3m^{i,k,jl} + 2m^{il,j,k} + 3m^{k,i,jl} + 3m^{i,j,kl} + m^{ik,l,j} + m^{ik,j,l} + m^{ij,l,k} \right. \\ & + m^{ij,k,l} + m^{jk,l,i} + m^{jk,i,l} - m^{ikl,j} - m^{ijl,k} - m^{jkl,i} - m^{ik,jl} - m^{ij,kl} + m^{jk,il} - 2m^{i,l,k,j} \\ & \left. - 3m^{i,k,j,l} - m^{i,k,l,j} - 2m^{i,l,j,k} - 3m^{i,j,k,l} - m^{i,j,l,k} - 2m^{j,i,k,l} - 2m^{k,i,j,l} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{ijkl} = & -\frac{1}{2} \left\{ 3(m^{l,k,i,j} + m^{l,k,j,i} + m^{l,i,j,k} + m^{k,i,l,j} + m^{l,j,i,k} + m^{i,k,j,l}) - 2(m^{k,l,i,j} + m^{k,i,j,l} + m^{kl,i,j} \right. \\ & + m^{k,i,jl} + m^{il,k,j} + m^{i,kl,j} + m^{i,k,jl} + m^{il,j,k} + m^{i,l,jk} + m^{i,jk,l} + m^{j,l,ik} + m^{j,ik,l}) + m^{jkl,i} \\ & \left. + m^{ikl,j} + m^{ijl,k} + m^{ijk,l} + m^{kl,ij} + m^{jk,il} + m^{jl,ik} \right\}.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 4.1, obtemos para $\frac{1}{n}\kappa_{ij}^{(kl)}$, $\frac{1}{n}\kappa_{ijk}^{(l)}$ e $\frac{1}{n}\kappa_{ijkl}$ até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\kappa_{ij}^{(k)} &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{I}_{j,ik} + \mathbf{I}_{i,jk} \right\}, \\ \frac{1}{n}\kappa_{ij}^{(kl)} &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{I}_{j,ikl} + \mathbf{I}_{i,jkl} - \mathbf{I}_{i,j,kl} - \mathbf{I}_{i,k,jl} + \mathbf{I}_{ik,jl} + \mathbf{I}_{il,jk} \right\}, \\ \frac{1}{n}\kappa_{ijk} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{I}_{i,j,k} - \mathbf{I}_{j,ik} - \mathbf{I}_{k,ij} - \mathbf{I}_{i,jk} \right\}, \\ \frac{1}{n}\kappa_{ijk}^{(l)} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{I}_{j,k,il} + 3\mathbf{I}_{i,j,kl} + 3\mathbf{I}_{i,k,jl} - \mathbf{I}_{j,ikl} - \mathbf{I}_{k,ijl} - \mathbf{I}_{i,jkl} - \mathbf{I}_{ij,kl} - \mathbf{I}_{ik,jl} - \mathbf{I}_{jk,il} \right\}, \\ \frac{1}{n}\kappa_{ijkl} &= P_{ijkl}.\end{aligned}$$

Daqui, temos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \left(\kappa_{ijkl}/4 - \kappa_{ijk}^{(l)} + \kappa_{ij}^{(kl)} \right) &= -\frac{1}{16\pi} \left\{ \mathbf{I}_{i,j,k,l} - \mathbf{I}_{k,l,ij} - \mathbf{I}_{l,i,jk} - \mathbf{I}_{j,l,ik} + \mathbf{I}_{l,ijk} + 7\mathbf{I}_{i,j,kl} + 7\mathbf{I}_{k,i,jl} \right. \\ &\quad \left. + 3\mathbf{I}_{k,j,il} + \mathbf{I}_{i,jkl} + \mathbf{I}_{j,ikl} + 3\mathbf{I}_{k,ijl} + 3\mathbf{I}_{ij,kl} + \mathbf{I}_{jk,il} + \mathbf{I}_{jl,ik} \right\}, \\ \frac{1}{n^2} \left(\kappa_{ik}^{(m)} \kappa_{jn}^{(l)} + \kappa_{ik}^{(l)} \kappa_{jn}^{(m)} \right) &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \mathbf{I}_{k,im} \mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{i,km} \mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{k,im} \mathbf{I}_{j,nl} + \mathbf{I}_{i,km} \mathbf{I}_{j,nl} + \mathbf{I}_{k,il} \mathbf{I}_{n,jm} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_{i,kl} \mathbf{I}_{n,jm} + \mathbf{I}_{k,il} \mathbf{I}_{j,nm} + \mathbf{I}_{i,kl} \mathbf{I}_{j,nm} \right\}, \\ \frac{1}{n} \left(\kappa_{jln}/6 - \kappa_{jn}^{(l)} \right) &= \frac{1}{24\pi} \left\{ \mathbf{I}_{j,l,n} - \mathbf{I}_{l,jn} - 7(\mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{j,ln}) \right\}, \\ \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4} \kappa_{jmn} - \kappa_{jn}^{(m)} \right) &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \mathbf{I}_{j,m,n} - \mathbf{I}_{m,jn} - 5(\mathbf{I}_{n,jm} + \mathbf{I}_{j,mn}) \right\}, \\ \frac{1}{n^2} \kappa_{ikm} \left(\kappa_{jln}/6 - \kappa_{jn}^{(l)} \right) &= \frac{1}{96\pi^2} \left\{ \mathbf{I}_{i,k,m} \mathbf{I}_{j,l,n} - \mathbf{I}_{k,im} \mathbf{I}_{j,l,n} - \mathbf{I}_{m,ik} \mathbf{I}_{j,l,n} - \mathbf{I}_{i,km} \mathbf{I}_{j,l,n} - \mathbf{I}_{i,k,m} \mathbf{I}_{l,jn} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_{k,im} \mathbf{I}_{l,jn} + \mathbf{I}_{m,ik} \mathbf{I}_{l,jn} + \mathbf{I}_{i,km} \mathbf{I}_{l,jn} + 7 \left(\mathbf{I}_{k,im} \mathbf{I}_{n,jl} - \mathbf{I}_{i,k,m} \mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{m,ik} \mathbf{I}_{n,jl} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{I}_{i,km} \mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{k,im} \mathbf{I}_{j,ln} - \mathbf{I}_{i,k,m} \mathbf{I}_{j,ln} + \mathbf{I}_{m,ik} \mathbf{I}_{j,ln} + \mathbf{I}_{i,km} \mathbf{I}_{j,ln} \right) \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \kappa_{ikl} \left(\kappa_{jmn}/4 - \kappa_{jn}^{(m)} \right) &= \frac{1}{64\pi^2} \left\{ \mathbf{I}_{i,k,l} \mathbf{I}_{j,m,n} - \mathbf{I}_{k,il} \mathbf{I}_{j,m,n} - \mathbf{I}_{l,ik} \mathbf{I}_{j,m,n} - \mathbf{I}_{i,kl} \mathbf{I}_{j,m,n} - \mathbf{I}_{i,k,l} \mathbf{I}_{m,jn} \right. \\ &\quad + \mathbf{I}_{k,il} \mathbf{I}_{m,jn} + \mathbf{I}_{l,ik} \mathbf{I}_{m,jn} + \mathbf{I}_{i,kl} \mathbf{I}_{m,jn} + 5 \left(\mathbf{I}_{k,il} \mathbf{I}_{n,jm} - \mathbf{I}_{i,k,l} \mathbf{I}_{n,jm} \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{I}_{l,ik} \mathbf{I}_{n,jm} + \mathbf{I}_{i,kl} \mathbf{I}_{n,jm} + \mathbf{I}_{k,il} \mathbf{I}_{j,mn} - \mathbf{I}_{i,k,l} \mathbf{I}_{j,mn} + \mathbf{I}_{l,ik} \mathbf{I}_{j,mn} + \mathbf{I}_{i,kl} \mathbf{I}_{j,mn} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Somando estas quatro últimas equações, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \left\{ \kappa_{ikm} \left(\kappa_{jln}/6 - \kappa_{jn}^{(l)} \right) + \kappa_{ikl} \left(\kappa_{jmn}/4 - \kappa_{jn}^{(m)} \right) + \kappa_{ik}^{(m)} \kappa_{jn}^{(l)} + \kappa_{ik}^{(l)} \kappa_{jn}^{(m)} \right\} &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{13}{6} \left(\mathbf{I}_{k,im} + \mathbf{I}_{i,km} \right) \right. \\ &\quad \left(\mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{j,nl} \right) + \frac{9}{4} \left(\mathbf{I}_{k,il} + \mathbf{I}_{i,kl} \right) \left(\mathbf{I}_{n,jm} + \mathbf{I}_{j,nm} \right) + \frac{1}{6} \left(\mathbf{I}_{i,k,m} - \mathbf{I}_{k,im} - \mathbf{I}_{m,ik} - \mathbf{I}_{i,km} \right) \left(\mathbf{I}_{j,l,n} + \mathbf{I}_{l,jn} \right) \\ &\quad + \frac{7}{6} \left(\mathbf{I}_{m,ik} - \mathbf{I}_{i,k,m} \right) \left(\mathbf{I}_{n,jl} + \mathbf{I}_{j,nl} \right) + \frac{1}{4} \left(\mathbf{I}_{i,k,l} - \mathbf{I}_{k,il} - \mathbf{I}_{l,ik} - \mathbf{I}_{i,kl} \right) \left(\mathbf{I}_{j,m,n} - \mathbf{I}_{m,jn} \right) + \frac{5}{4} \left(\mathbf{I}_{l,ik} - \mathbf{I}_{i,k,l} \right) \\ &\quad \left. \left(\mathbf{I}_{n,jm} + \mathbf{I}_{j,nm} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Apêndice B

B.1 Forma matricial da estatística escore

Neste Apêndice mostram-se os detalhes das fórmulas obtidas na Seção 4.4. As notações são daquela seção. Definamos algumas matrizes que são necessárias para poder escrever os coeficientes A_1, A_2 e A_3 na forma matricial. Sejam $\mathbf{P}^{(k)} = (\kappa_{ijk})$, $\bar{\mathbf{P}}^{(l)} = (\kappa_{lmn})$ e $\mathbf{Tr}_1^{11} = (tr(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(k)})tr(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(r)}))$. Assim, temos,

$$\begin{aligned} A_{111} = \sum' \kappa_{ijk} \kappa_{kst} a_{ij} a_{st} m_{kr} &= \sum_{kr} m_{kr} (\sum_{ij} a_{ij} \kappa_{ijk}) (\sum_{st} a_{st} \kappa_{kst}) \\ &= \sum_{kr} m_{kr} tr(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(k)}) tr(\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}}^{(r)}) \\ &= tr(\mathbf{M}\mathbf{Tr}_1^{11}), \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde os m 's e a 's são os elementos das matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{A}$ respectivamente, definidas em (2.12).

Sejam:

(i) $\mathbf{L}^{(k)} = (\kappa_{i,jk})$ e $\mathbf{Tr}_2^{11} = (tr(\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}}^{(r)})tr(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)}))$. Logo ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_{112} = \sum' \kappa_{i,jk} \kappa_{kst} a_{ij} a_{st} m_{kr} &= \sum_{kr} m_{kr} (\sum_{st} a_{st} \kappa_{rst}) (\sum_{ij} a_{ij} \kappa_{i,jk}) \\ &= \sum_{kr} m_{kr} tr(\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}}^{(r)}) tr(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)}) \\ &= tr(\mathbf{M}\mathbf{Tr}_2^{11}); \end{aligned} \tag{B.2}$$

(ii) $\bar{\mathbf{L}}^{(m)} = (\kappa_{l,mn})$ e $\text{Tr}_3^{11} = (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(k)})\text{tr}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}^{(r)}))$. Assim, temos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A_{113} &= \sum' \kappa_{ijk} \kappa_{rs,t} a_{ij} a_{st} m_{kr} = \sum_{kr} m_{kr} (\sum_{ij} a_{ij} \kappa_{ijk}) (\sum_{st} a_{st} \kappa_{irs,t}) \\ &= \sum_{kr} m_{kr} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(k)}) \text{tr}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}^{(r)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{M}\text{Tr}_3^{11});\end{aligned}\tag{B.3}$$

(iii) $\text{Tr}_4^{11} = (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)})\text{tr}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}^{(r)}))$, então,

$$\frac{1}{4}A_{114} = \sum' \kappa_{ijk} \kappa_{rs,t} a_{ij} a_{st} m_{kr} = \text{tr}(\mathbf{M}\text{Tr}_4^{11});\tag{B.4}$$

(iv) $\mathbf{N}^{(r)} = (\kappa_{r,s,t})$ e $\text{Tr}_1^{12} = (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(k)})\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{N}^{(r)}))$. Logo ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}A_{121} &= \sum' \kappa_{ijk} \kappa_{k,s,t} a_{ij} a_{kr} m_{st} = \sum_{kr} a_{kr} (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{(k)})\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{N}^{(r)})) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\text{Tr}_1^{12});\end{aligned}\tag{B.5}$$

(v) $\text{Tr}_2^{12} = (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)})\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{N}^{(r)}))$, então ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}A_{121} &= \sum' \kappa_{i,jk} \kappa_{k,s,t} a_{ij} a_{kr} m_{st} = \sum_{kr} a_{kr} (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)})\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{N}^{(r)})) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\text{Tr}_2^{12});\end{aligned}\tag{B.6}$$

(vi) $\text{Tr}_1^{13} = (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)}\mathbf{M}\mathbf{P}^{(t)}))$, então ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}A_{131} &= \sum' \kappa_{i,jk} \kappa_{rst} a_{js} a_{kt} m_{ir} = \sum_{kt} a_{kt} \sum_{js} m_{ir} \kappa_{i,jk} \kappa_{rst} \\ &= \sum_{kt} a_{kt} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{L}^{(k)}\mathbf{M}\mathbf{P}^{(t)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\text{Tr}_1^{13});\end{aligned}\tag{B.7}$$

(vii) $\text{Tr}_2^{13} = (\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{N}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{P}^{(t)}))$, então ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}A_{132} &= \sum' \kappa_{i,j,k} \kappa_{rs,t} a_{js} a_{kt} m_{ir} = \sum_{kt} a_{kt} \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{N}^{(k)}\mathbf{A}\mathbf{P}^{(t)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\text{Tr}_2^{13});\end{aligned}\tag{B.8}$$

(viii) $\text{Tr}_3^{13} = \left(\text{tr}(\text{ML}^{(j)} \text{AL}^{(s)\top}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_{133} = \sum' \kappa_{i,jk} \kappa_{rs,t} a_{js} a_{kt} m_{ir} &= \sum_{kt} a_{kt} \text{tr}(\text{ML}^{(k)} \text{AL}^{(s)\top}) \\ &= \text{tr}(\text{A Tr}_3^{13}); \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

(ix) $\text{Tr}_4^{13} = \left(\text{tr}(\text{AN}^{(j)} \text{ML}^{(s)}) \right)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_{134} = \sum' \kappa_{i,jk} \kappa_{rs,t} a_{js} a_{kt} m_{ir} &= \sum_{js} a_{js} \text{tr}(\text{AN}^{(k)} \text{ML}^{(s)}) \\ &= \text{tr}(\text{A Tr}_4^{13}); \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

(x) $\text{MK1}^{(ij)} = \left(\kappa_{i,j,k,r} \right)$ e $\text{Tr}_1^{14} = \left(\text{tr}(\text{AMK1}^{(ij)}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} A_{141} = \sum' \kappa_{i,j,k,r} a_{kr} m_{ij} &= \sum_{ij} m_{ij} \text{tr}(\text{AMK1}^{(ij)}) \\ &= \text{tr}(\text{M Tr}_1^{14}); \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

(xi) $\text{MK2}^{(ij)} = \left(\kappa_{i,j,kr} \right)$ e $\text{Tr}_2^{14} = \left(\text{tr}(\text{AMK2}^{(ij)}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} A_{142} = \sum' \kappa_{i,j,kr} a_{kr} m_{ij} &= \sum_{ij} m_{ij} \text{tr}(\text{AMK2}^{(ij)}) \\ &= \text{tr}(\text{M Tr}_2^{14}). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

(xii) $\text{Tr}^{21} = \left(\text{tr}(\text{MN}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} A_{21} = \sum' \kappa_{i,j,k} \kappa_{rs,t} a_{kr} m_{ij} m_{st} &= \sum_{kr} a_{kr} \text{tr}(\text{MN}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \\ &= \text{tr}(\text{A Tr}^{21}); \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

(xiii) $\text{Tr}_1^{22} = \left(\text{tr}(\text{AP}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} A_{221} = \sum' \kappa_{ijk} \kappa_{rst} a_{ij} m_{kr} m_{st} &= \sum_{kr} m_{kr} \text{tr}(\text{AP}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \\ &= \text{tr}(\text{M Tr}_1^{221}); \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

(xiv) $\text{MK3}^{(k)} = \left(\kappa_{i,jk} \right)$ e $\text{Tr}_2^{22} = \left(\text{tr}(\text{AMK3}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} A_{222} = \sum' \kappa_{i,jk} \kappa_{rs,t} a_{ij} m_{kr} m_{st} &= \sum_{kr} m_{kr} \text{tr}(\text{AMK3}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \\ &= \text{tr}(\text{M Tr}_2^{222}); \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

(xv) $\text{Tr}^{23} = \left(\text{tr}(\text{MN}^{(k)}\text{MN}^{(t)}) \right)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}A_{222} = \Sigma' \kappa_{i,j,k} \kappa_{r,s,t} a_{kt} m_{ir} m_{js} &= \Sigma_{kt} a_{kt} \text{tr}(\text{MN}^{(k)}\text{MN}^{(t)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A} \text{Tr}^{23}); \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

(xvi) $\text{Tr}^{24} = \left(\text{tr}(\text{MMK}1^{ij}) \right)$, então ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A_{24} = \Sigma' \kappa_{i,j,k,r} m_{ij} m_{kr} &= \Sigma_{ij} m_{ij} \text{tr}(\text{MMK}1^{ij}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{M} \text{Tr}^{24}); \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A_{31} = \Sigma' \kappa_{i,j,k} \kappa_{r,s,t} m_{ij} m_{kr} m_{st} &= \Sigma_{kr} m_{kr} \text{tr}(\text{MN}^{(k)}) \text{tr}(\text{MN}^{(r)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{M} \text{Tr}^{21}), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_{32} = \Sigma' \kappa_{i,j,k} \kappa_{r,s,t} m_{ir} m_{js} m_{kt} &= \Sigma_{kt} m_{kt} \text{tr}(\text{MN}^{(k)}\text{MN}^{(t)}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{M} \text{Tr}^{23}). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Com as definições anteriores podemos escrever os coeficientes A_1, A_2 e A_3 , dados nas expressões (2.13)-(2.15), da seguinte forma:

$$A_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}, \quad (\text{B.20})$$

onde $\frac{1}{3}A_{11} = A_{111} + A_{112} + A_{113} + A_{113}$, $A_{12} = A_{121} + A_{122}$, $A_{13} = A_{131} + A_{132} + A_{133} + A_{134}$ e $A_{14} = A_{141} + A_{142}$ e os A 's com três índices estão definidos nas expressões (B.1)-(B.12).

De maneira mais explicita temos para A_{11} , A_{12} , A_{13} e A_{14}

$$\begin{aligned} A_{11} &= 3\text{tr}\left(\mathbf{M}\left\{\text{Tr}_1^{11} + 2\text{Tr}_2^{11} + 2\text{Tr}_3^{11} + 4\text{Tr}_4^{11}\right\}\right), \\ A_{12} &= -6\text{tr}\left(\mathbf{A}\left\{\text{Tr}_1^{12} + 2\text{Tr}_2^{12}\right\}\right), \\ A_{13} &= 6\text{tr}\left(\mathbf{A}\left\{\text{Tr}_1^{13} - \text{Tr}_2^{13} + 2\text{Tr}_3^{13} - 2\text{Tr}_4^{13}\right\}\right), \\ A_{14} &= -6\text{tr}\left(\mathbf{M}\left\{\text{Tr}_1^{14} + \text{Tr}_2^{14}\right\}\right). \end{aligned}$$

Para o coeficiente A_2 usamos as expressões (B.13)-(B.17), podendo escrevê-lo da seguinte forma:

$$A_2 = A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}, \quad (\text{B.21})$$

$$\text{com } A_{22} = A_{221} + A_{222} = 6tr\left(\mathbf{M}\left\{\mathbf{Tr}_1^{22} + \mathbf{Tr}_2^{22}\right\}\right).$$

Apêndice C

C.1 Cumulantes no caso de um modelo $AR(1)$

Os cumulantes aproximados até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$ das derivadas da log-verossimilhança para o modelo $AR(1)$ dado no Exemplo 3.2, seguindo as expressões da Proposição 4.4 são apresentados aqui.

Os cumulantes de segunda ordem são dados por

$$\kappa_{\sigma^2, \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}, \quad \kappa_{\phi, \sigma^2} = 0 = \kappa_{\sigma^2, \phi}, \quad \kappa_{\phi, \phi} = -\frac{1}{\phi^2 - 1}.$$

As derivadas dos cumulantes de segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma^2, \sigma^2}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{\sigma^6}, & \kappa_{\sigma^2, \sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2, \phi}^{(\sigma^2)}, & \kappa_{\sigma^2, \phi}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\phi, \sigma^2}^{(\phi)}, & \kappa_{\phi, \phi}^{(\sigma^2)} &= 0, \\ \kappa_{\phi, \phi}^{(\phi)} &= 2\frac{\phi}{(\phi^2 - 1)^2}, & \kappa_{\sigma^2, \sigma^2}^{(\phi\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2, \phi}^{(\sigma^2\phi)}, & \kappa_{\phi, \phi}^{(\phi\phi)} &= -2\frac{1+3\phi^2}{(\phi^2 - 1)^3}, & \kappa_{\sigma^2, \sigma^2}^{(\phi\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\phi, \phi}^{(\sigma^2\sigma^2)}, \\ \kappa_{\sigma^2, \sigma^2}^{(\sigma^2\sigma^2)} &= \frac{3}{\sigma^8}, & \kappa_{\phi, \phi}^{(\phi\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2, \phi}^{(\phi\sigma^2)}, & \kappa_{\sigma^2, \phi}^{(\phi\phi)} &= 0 = \kappa_{\phi, \sigma^2}^{(\sigma^2\sigma^2)}, & \kappa_{\phi, \sigma^2}^{(\phi\phi)} &= 0 = \kappa_{\phi, \sigma^2}^{(\phi\phi)}. \end{aligned}$$

Os cumulantes de terceira ordem são dados por:

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma^2, \sigma^2, \sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^6}, & \kappa_{\sigma^2, \sigma^2, \phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2, \phi, \sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2, \phi, \phi} &= -\frac{2}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, \\ \kappa_{\phi, \sigma^2, \phi} &= -\frac{2}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \phi, \sigma^2} &= -\frac{2}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \phi, \phi} &= 6\frac{\phi}{(\phi^2 - 1)^2}, & \kappa_{\sigma^2, \sigma^2, \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^6}, \\ \kappa_{\sigma^2, \sigma^2, \phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2, \phi, \sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2, \phi, \phi} &= \frac{1}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \phi, \sigma^2} &= \frac{1}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, \\ \kappa_{\phi, \sigma^2, \sigma^2} &= 0, & \kappa_{\phi, \sigma^2, \phi} &= \frac{1}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \phi, \phi} &= -2\frac{\phi}{(\phi^2 - 1)^2}, & \kappa_{\sigma^2, \sigma^2, \sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^6}, \\ \kappa_{\sigma^2, \sigma^2, \phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2, \phi, \sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2, \phi, \phi} &= -\frac{1}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \sigma^2, \sigma^2} &= 0, \\ \kappa_{\phi, \sigma^2, \phi} &= -\frac{1}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \phi, \sigma^2} &= -\frac{1}{(\phi^2 - 1)\sigma^2}, & \kappa_{\phi, \phi, \phi} &= 0. \end{aligned}$$

As derivadas dos cumulantes de terceira ordem são dadas por:

$$\begin{aligned}\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= -\frac{6}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi}^{(\sigma^2)}, & \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2}^{(\phi)}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2}^{(\sigma^2)}, \\ \kappa_{\phi\phi\phi}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\phi\phi\phi}^{(\phi)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi}^{(\phi)} &= \frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi\sigma^2\phi}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\phi\sigma^2\phi}^{(\phi)} &= 2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2}^{(\phi)} &= \frac{2\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}.\end{aligned}$$

Finalmente, os cumulantes de quarta ordem são dados por:

$$\begin{aligned}\kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2} &= \frac{3}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2,\phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\phi,\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\phi,\phi} &= -\frac{6}{\sigma^4(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\sigma^2,\phi,\sigma^2,\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\phi,\sigma^2} &= -\frac{6}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\sigma^2,\phi} &= -\frac{6}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\phi,\phi} &= 18\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, \\ \kappa_{\phi,\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\phi,\sigma^2,\sigma^2,\phi} &= -\frac{6}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\sigma^2,\phi,\sigma^2} &= -\frac{6}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\sigma^2,\phi,\phi} &= 18\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, \\ \kappa_{\phi,\phi,\sigma^2,\sigma^2} &= -\frac{6}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\phi,\sigma^2,\phi} &= 18\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi,\phi,\sigma^2} &= 18\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi,\phi,\phi} &= -6\frac{3+7\phi^2}{(\phi^2-1)^3}, \\ \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{2}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2\phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\phi\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\phi\phi} &= -4\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\phi\phi} &= \frac{2}{\sigma^4\phi^2-1}, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\sigma^2\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\sigma^2\phi} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\phi\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\phi,\sigma^2,\sigma^2\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\phi,\sigma^2,\sigma^2\phi} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\sigma^2,\phi\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\sigma^2,\phi\phi} &= -4\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\phi,\phi,\sigma^2\sigma^2} &= \frac{4}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\phi,\sigma^2\phi} &= -6\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi,\phi\sigma^2} &= -6\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi,\phi\phi} &= 4\frac{1+2\phi^2}{(\phi^2-1)^3}, \\ \kappa_{\sigma^2,\sigma^2\sigma^2\sigma^2} &= \frac{3}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2\phi\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2\phi\phi} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\phi\phi\phi} &= 0, \\ \kappa_{\sigma^2,\phi\sigma^2\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\phi\sigma^2\phi} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\sigma^2\sigma^2\sigma^2} &= 0, \\ \kappa_{\phi,\sigma^2\phi\sigma^2} &= -\frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\sigma^2\phi\phi} &= 2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi,\phi\sigma^2\phi} &= 2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, \\ \kappa_{\phi,\phi\phi\sigma^2} &= 2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi\phi\phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2,\sigma^2\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2,\phi\sigma^2} &= 0, \\ \kappa_{\sigma^2\sigma^2,\phi\phi} &= -\frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2\phi,\sigma^2\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\sigma^2\phi,\sigma^2\phi} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2\phi,\phi\phi} &= 2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, \\ \kappa_{\phi\sigma^2,\sigma^2\sigma^2} &= 0, & \kappa_{\phi\sigma^2,\sigma^2\phi} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\sigma^2,\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\sigma^2,\phi\phi} &= 2\frac{\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, \\ \kappa_{\sigma^2\phi\phi\phi} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2\phi\phi}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2\phi} &= 0 = \kappa_{\phi\phi\phi\sigma^2}, & \kappa_{\phi\sigma^2,\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\phi\phi,\phi\phi} &= -2\frac{1+\phi^2}{(\phi^2-1)^3}, \\ \kappa_{\sigma^2,\phi\phi\phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2,\phi\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi\phi\phi} &= 0, & \kappa_{\phi,\sigma^2\sigma^2\phi} &= -\frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{9}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2\phi} &= 0, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi\phi} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi,\sigma^2\phi} &= 0, \\ \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2\sigma^2} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2\phi} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2\phi} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, \\ \kappa_{\phi\sigma^2\phi\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(\phi^2-1)}.\end{aligned}$$

C.2 Cumulantes no caso de um modelo $MA(1)$

Os cumulantes aproximados até ordem $n^{-\frac{1}{2}}$ das derivadas da log-verossimilhança para o modelo $MA(1)$, dado no Exemplo 3.1, seguindo as expressões da Proposição 4.4 são calculados aqui. Os cumulantes e suas derivadas são todos iguais ao caso de um modelo $AR(1)$, com exceção dos seguintes:

$$\begin{aligned}\kappa_{\theta,\theta,\theta} &= -6\frac{\theta}{(\theta^2-1)^2}, \kappa_{\theta,\theta\theta} = 4\frac{\theta}{(\theta^2-1)^2}, \kappa_{\theta\theta\theta} = -6\frac{\theta}{(\theta^2-1)^2}, \kappa_{\theta\theta\theta}^{(\theta)} = 6\frac{1+3\theta^2}{(\theta^2-1)^3}, \\ \kappa_{\sigma^2,\theta,\theta,\theta} &= -18\frac{\theta}{\sigma^2(\theta^2-1)^2} = \kappa_{\theta,\sigma^2,\theta,\theta} = \kappa_{\theta,\theta,\sigma^2,\theta} = \kappa_{\theta,\theta,\theta,\sigma^2}, \\ \kappa_{\sigma^2,\theta,\theta\theta} &= 8\frac{\theta}{\sigma^2(\theta^2-1)^2} = \kappa_{\sigma^2,\theta\theta\theta} = \kappa_{\theta,\sigma^2,\theta\theta}, \\ \kappa_{\theta,\theta,\sigma^2\theta} &= \frac{6\theta}{\sigma^2(\theta^2-1)^2} = \kappa_{\theta,\theta,\theta\sigma^2} = \kappa_{\theta\sigma^2\theta\theta} = \kappa_{\theta\theta\sigma^2\theta} = \kappa_{\theta\theta\theta\sigma^2}, \kappa_{\theta,\theta,\theta\theta} = \frac{4(2+5\theta^2)}{(\theta^2-1)^3}, \\ \kappa_{\theta,\sigma^2\theta\theta} &= -\frac{4\theta}{\sigma^2(\theta^2-1)^2} = \kappa_{\theta,\theta\sigma^2\theta} = \kappa_{\theta,\theta\theta\sigma^2} = \kappa_{\theta\sigma^2,\theta\theta} = \kappa_{\theta\theta,\sigma^2\theta} = \kappa_{\theta\theta,\theta\sigma^2}, \\ \kappa_{\theta,\theta\theta\theta} &= \frac{-6(1+3\theta^2)}{(\theta^2-1)^3}, \kappa_{\sigma^2\sigma^2,\theta\sigma^2} = 0, \kappa_{\theta\theta,\theta\theta} = \frac{-2(3+7\theta^2)}{(\theta^2-1)^3}, \\ \kappa_{\sigma^2\theta\theta\theta} &= \frac{6\theta}{\sigma^2(\theta^2-1)^2}, \kappa_{\theta\theta\theta\theta} = \frac{12(1+3\theta^2)}{(\theta^2-1)^3}.\end{aligned}$$

C.3 Cumulantes no caso de um modelo $ARMA(1,1)$

Aqui são colocados os cumulantes conjuntos da log-verossimilhança do modelo $ARMA(1,1)$, as derivadas primeira e segunda dos cumulantes de segunda ordem, a primeira derivada de terceira ordem e os cumulantes de quarta ordem. Estes também podem ser deduzidos e comparados com os dados por Taniguchi (1984) de maneira geral.

$$\kappa_{\phi,\phi} = -\frac{1}{-1+\phi^2}, \quad \kappa_{\phi,\theta} = \frac{1}{-1+\phi\theta}, \quad \kappa_{\phi,\sigma^2} = 0 = \kappa_{\theta,\sigma^2}, \quad \kappa_{\theta,\theta} = -\frac{1}{-1+\theta^2}, \quad \kappa_{\sigma^2,\sigma^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^4}.$$

As primeiras derivadas dos cumulantes de segunda ordem são dadas por:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\phi,\phi}^{(\phi)} &= \frac{2\phi}{(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi,\phi}^{(\theta)} &= 0, & \kappa_{\phi,\theta}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(\phi\theta-1)^2}, & \kappa_{\phi,\theta}^{(\sigma^2)} &= 0, \\
\kappa_{\phi,\theta}^{(\theta)} &= -\frac{\phi}{(\phi\theta-1)^2}, & \kappa_{\phi,\sigma^2}^{(\phi)} &= 0, & \kappa_{\phi,\sigma^2}^{(\theta)} &= 0 = \kappa_{\phi,\sigma^2}^{(\sigma^2)}, & \kappa_{\theta,\phi}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(-1+\phi\theta)^2}, \\
\kappa_{\theta,\phi}^{(\phi)} &= -\frac{\phi}{(-1+\phi\theta)^2}, & \kappa_{\theta,\phi}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta,\theta}^{(\phi)}, & \kappa_{\theta,\theta}^{(\theta)} &= 2\frac{\theta}{(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta,\theta}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta,\sigma^2}^{(\phi)}, \\
\kappa_{\theta,\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\theta,\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2,\phi}^{(\theta)}, & \kappa_{\sigma^2,\phi}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2,\theta}^{(\phi)}, & \kappa_{\sigma^2,\theta}^{(\theta)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2,\theta}^{(\sigma^2)}, \\
\kappa_{\sigma^2,\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2,\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\sigma^2,\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{\sigma^6}, & \kappa_{\theta,\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= 0.
\end{aligned}$$

As segundas derivadas dos cumulantes de segunda ordem são dadas por:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\phi\phi}^{(\phi\phi)} &= \frac{-2(1+3\phi^2)}{(\phi^2-1)^3}, & \kappa_{\phi\phi}^{(\phi\theta)} &= \kappa_{\phi\phi}^{(\phi\sigma^2)} = 0, & \kappa_{\phi\phi}^{(\theta\phi)} &= \kappa_{\phi\phi}^{(\theta\theta)} = 0, & \kappa_{\phi\phi}^{(\theta\sigma^2)} &= \kappa_{\phi\phi}^{(\sigma^2\phi)} = 0, \\
\kappa_{\phi\phi}^{(\sigma^2\theta)} &= \kappa_{\phi\phi}^{(\sigma^2\sigma^2)} = 0, & \kappa_{\phi\theta}^{(\phi\phi)} &= \frac{2\theta^2}{(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\phi\theta}^{(\phi\theta)} &= \frac{\phi\theta+1}{(\phi\theta-1)^3}, & \kappa_{\phi\theta}^{(\phi\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\phi}^{(\phi\sigma^2)}, \\
\kappa_{\phi\theta}^{(\theta\phi)} &= \frac{\phi\theta+1}{(\phi\theta-1)^3}, & \kappa_{\phi\theta}^{(\theta\theta)} &= \frac{2\phi^2}{(\phi\theta-1)^3}, & \kappa_{\phi\theta}^{(\theta\sigma^2)} &= \kappa_{\phi\theta}^{(\sigma^2\phi)} = 0, & \kappa_{\phi\theta}^{(\sigma^2\theta)} &= \kappa_{\phi\theta}^{(\sigma^2\sigma^2)} = 0, \\
\kappa_{\phi\sigma^2}^{(\phi\phi)} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\phi\theta)}, & \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\phi\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\theta\phi)}, & \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\theta\theta)} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\theta\sigma^2)}, & \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\sigma^2\phi)} &= \kappa_{\phi\sigma^2}^{(\sigma^2\theta)} = 0, \\
\kappa_{\phi\sigma^2}^{(\sigma^2\sigma^2)} &= 0, & \kappa_{\theta\phi}^{(\phi\phi)} &= 2\frac{\theta^2}{(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\theta\phi}^{(\phi\theta)} &= \frac{\phi\theta+1}{(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\theta\phi}^{(\theta\phi)} &= \frac{\phi\theta+1}{(-1+\phi\theta)^3}, \\
\kappa_{\theta\phi}^{(\theta\theta)} &= \frac{2\phi^2}{(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\theta\phi}^{(\theta\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\phi}^{(\sigma^2\phi)}, & \kappa_{\theta\phi}^{(\sigma^2\theta)} &= \kappa_{\theta\phi}^{(\sigma^2\sigma^2)} = 0, & \kappa_{\theta\theta}^{(\phi\phi)} &= \kappa_{\theta\theta}^{(\phi\theta)} = 0, \\
\kappa_{\theta\theta}^{(\phi\sigma^2)} &= \kappa_{\theta\theta}^{(\theta\phi)} = 0, & \kappa_{\theta\theta}^{(\theta\theta)} &= \frac{-2(1+3\theta^2)}{(-1+\theta^2)^3}, & \kappa_{\theta\theta}^{(\theta\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\theta}^{(\sigma^2\phi)}, & \kappa_{\theta\theta}^{(\sigma^2\theta)} &= 0 = \kappa_{\theta\theta}^{(\sigma^2\sigma^2)}, \\
\kappa_{\theta\sigma^2}^{(\phi\phi)} &= 0 = \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\phi\theta)}, & \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\phi\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\theta\phi)}, & \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\theta\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\sigma^2\phi)}, & \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\sigma^2\theta)} &= 0 = \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\sigma^2\sigma^2)}, \\
\kappa_{\sigma^2\phi}^{(\phi\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\phi\theta)}, & \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\phi\sigma^2)} &= \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\theta\phi)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\theta\theta)} &= \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\theta\sigma^2)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\sigma^2\phi)} &= \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\sigma^2\theta)} = 0, \\
\kappa_{\sigma^2\phi}^{(\sigma^2\sigma^2)} &= \kappa_{\sigma^2\phi}^{(\phi\phi)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\phi\phi)} &= \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\phi\sigma^2)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\phi\theta)} &= \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\theta\theta)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\theta\sigma^2)} &= \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\sigma^2\phi)} = 0, \\
\kappa_{\sigma^2\theta}^{(\sigma^2\theta)} &= \kappa_{\sigma^2\theta}^{(\sigma^2\sigma^2)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\phi\phi)} &= \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\phi\theta)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\phi\sigma^2)} &= \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\theta\phi)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\theta\theta)} &= \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\theta\sigma^2)} = 0, \\
\kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2\phi)} &= \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2\theta)} = 0, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2\sigma^2)} &= \frac{3}{\sigma^8}, & \kappa_{\theta\sigma^2}^{(\phi\sigma^2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Os cumulantes de terceira ordem são dados por:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\phi\phi\phi} &= 0, & \kappa_{\phi,\phi\phi} &= -2\frac{\phi}{(-1+\phi^2)^2}, & \kappa_{\phi,\phi,\phi} &= \frac{6\phi}{(-1+\phi^2)^2}, \\
\kappa_{\phi\phi\theta} &= -2\frac{\phi}{(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)}, & \kappa_{\phi,\phi\theta} &= \frac{3\phi^2\theta-2\phi-\theta}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\phi^2)}, & \kappa_{\phi,\phi,\theta} &= \frac{-2(3\phi^2\theta-2\phi-\theta)}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\phi^2)}, \\
\kappa_{\phi\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{(-1+\phi^2)\sigma^2}, & \kappa_{\phi,\phi\sigma^2} &= \frac{1}{(-1+\phi^2)\sigma^2}, & \kappa_{\phi,\phi,\sigma^2} &= \frac{-2}{(-1+\phi^2)\sigma^2}, \\
\kappa_{\phi\theta\phi} &= -2\frac{\phi}{(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)}, & \kappa_{\phi,\theta\phi} &= \frac{3\phi^2\theta-2\phi-\theta}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\phi^2)}, & \kappa_{\phi,\theta,\phi} &= \frac{-2(3\phi^2\theta-2\phi-\theta)}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\phi^2)}, \\
\kappa_{\phi\theta\theta} &= \frac{2(-\phi+2\phi\theta^2-\theta)}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2}, & \kappa_{\phi,\theta\theta} &= -\kappa_{\theta\phi\theta}, & \kappa_{\phi,\theta,\theta} &= \frac{2(3\theta^2\phi-2\theta-\phi)}{(-1+\theta\phi)^2(-1+\theta^2)}, \\
\kappa_{\phi\theta\sigma^2} &= \frac{1}{(-1+\phi\theta)\sigma^2}, & \kappa_{\phi,\theta\sigma^2} &= -\kappa_{\theta\phi\sigma^2} = \kappa_{\theta,\phi\sigma^2}, & \kappa_{\phi,\theta,\sigma^2} &= 2\kappa_{\phi\theta\sigma^2}, \\
\kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2} &= 0 = \kappa_{\phi,\sigma^2\sigma^2} = \kappa_{\phi,\sigma^2,\sigma^2}, & \kappa_{\theta,\phi\phi} &= -\kappa_{\phi\phi\theta}, & \kappa_{\theta,\phi,\phi} &= -\frac{1}{2}\kappa_{\phi,\theta,\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\theta\theta\theta} &= -\frac{6\theta}{(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta,\theta\theta} &= \frac{4\theta}{(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta,\theta,\theta} &= -\frac{6\theta}{(-1+\theta^2)^2}, \\
\kappa_{\theta\theta\sigma^2} &= -\frac{1}{(-1+\theta^2)\sigma^2}, & \kappa_{\theta,\theta\sigma^2} &= \frac{1}{(-1+\theta^2)\sigma^2}, & \kappa_{\theta,\theta,\sigma^2} &= \frac{-2}{(-1+\theta^2)\sigma^2}, \\
\kappa_{\theta\sigma^2\sigma^2} &= 0 = \kappa_{\theta,\sigma^2\sigma^2} = \kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2,\phi\phi} &= \kappa_{\phi,\phi\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2,\phi\theta} &= \kappa_{\phi\theta\sigma^2}, \\
\kappa_{\sigma^2,\theta\theta} &= -\kappa_{\phi\theta\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2,\theta\sigma^2} &= 0 = \kappa_{\sigma^2,\sigma^2\phi} = \kappa_{\sigma^2,\sigma^2\theta}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^6}, \\
\kappa_{\sigma^2,\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{1}{2}\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2} = -\kappa_{\sigma^2,\sigma^2,\sigma^2}.
\end{aligned}$$

As primeiras derivadas dos cumulantes de terceira ordem são dadas por:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\phi\phi\phi}^{(\phi)} &= 0, & \kappa_{\phi\phi\phi}^{(\theta)} &= 0, & \kappa_{\phi\phi\phi}^{(\sigma^2)} &= 0, & \kappa_{\phi\phi\theta}^{(\phi)} &= \frac{2(2\phi^3\theta-\phi^2-1)}{(\phi\theta-1)^2(\phi^2-1)^2}, \\
\kappa_{\phi\phi\theta}^{(\theta)} &= \frac{2\phi^2}{(\phi^2-1)(\phi\theta-1)^2}, & \kappa_{\phi\phi\theta}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\phi\phi\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2}^{(\phi)} &= \frac{2\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, \\
\kappa_{\phi\theta\theta}^{(\phi)} &= \frac{2(2\phi^3\theta-\phi^2-1)}{(\phi\theta-1)^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi\theta\theta}^{(\theta)} &= \frac{2\phi^2}{(\phi^2-1)(\phi\theta-1)^2}, & \kappa_{\phi\theta\theta}^{(\sigma^2)} &= 0, & \kappa_{\phi\theta\theta}^{(\phi)} &= \frac{-2(2\theta^3\phi-1-\phi\theta)}{(\theta^2-1)(\phi\theta-1)^3}, \\
\kappa_{\phi\sigma^2\theta}^{(\theta)} &= -\frac{\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\phi\sigma^2\theta}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\theta\phi\sigma^2}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\phi\sigma^2}^{(\theta)} &= -\frac{\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\phi\theta\theta}^{(\sigma^2)} &= 0, & \kappa_{\phi\theta\sigma^2}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(\phi\theta-1)^2\sigma^2}, & \kappa_{\phi\theta\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= -\frac{\phi}{(\phi\theta-1)^2\sigma^2}, & \kappa_{\phi\theta\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{(\phi\theta-1)\sigma^4}, \\
\kappa_{\phi\sigma^2\phi}^{(\phi)} &= \frac{2\phi}{\sigma^2(\phi^2-1)^2}, & \kappa_{\phi\sigma^2\phi}^{(\theta)} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\phi\sigma^2\phi}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(\phi^2-1)}, & \kappa_{\phi\sigma^2\theta}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(\phi\theta-1)^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2)}, & \kappa_{\theta\phi\phi}^{(\phi)} &= \frac{2(2\phi^3\theta-\phi^2-1)}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\phi^2)^2}, & \kappa_{\theta\phi\phi}^{(\theta)} &= \frac{2\phi^2}{(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)^2}, & \kappa_{\theta\phi\phi}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\phi\theta}^{(\sigma^2)}, \\
\kappa_{\theta\phi\theta}^{(\phi)} &= \frac{-2(-1-\phi\theta+2\theta^3\phi)}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\theta\phi\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\theta\theta\theta}^{(\phi)} &= \frac{-2(-1-\phi\theta+2\theta^3\phi)}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= \frac{-6}{\sigma^8}, \\
\kappa_{\theta\phi\sigma^2}^{(\phi)} &= \frac{-\theta}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\phi\sigma^2}^{(\theta)} &= \frac{-\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\theta\sigma^2}^{(\theta)} &= \frac{2\theta}{(-1+\theta^2)^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\sigma^2\phi}^{(\theta)} &= \frac{-\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\theta\theta\theta}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\theta\theta}^{(\phi)}, & \kappa_{\theta\theta\theta}^{(\theta)} &= \frac{6(1+3\theta^2)}{(-1+\theta^2)^3}, & \kappa_{\theta\theta\theta}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\theta\theta\sigma^2}^{(\phi)}, & \kappa_{\theta\theta\theta}^{(\theta)} &= \frac{2\theta}{\sigma^2(-1+\theta^2)^2}, \\
\kappa_{\theta\theta\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta\sigma^2\phi}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\sigma^2\phi}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\theta\sigma^2\theta}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2}^{(\phi)}, \\
\kappa_{\theta\sigma^2\theta}^{(\theta)} &= \frac{2\theta}{\sigma^2(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta\sigma^2\theta}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(-1+\theta^2)}, & \kappa_{\theta\sigma^2\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\theta\sigma^2\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(-1+\phi^2)}, \\
\kappa_{\theta\sigma^2\phi}^{(\phi)} &= -\frac{\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi}^{(\phi)} &= \frac{2\phi}{\sigma^2(-1+\phi^2)^2}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi}^{(\theta)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\theta\theta}^{(\phi)}, & \kappa_{\sigma^2\theta\theta}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi}^{(\sigma^2)}, \\
\kappa_{\sigma^2\phi\theta}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\phi\theta}^{(\theta)} &= -\frac{\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\phi\theta}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\sigma^2\theta\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\sigma^2\theta}^{(\theta)}, \\
\kappa_{\sigma^2\theta\phi}^{(\phi)} &= -\frac{\theta}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\theta\phi}^{(\theta)} &= -\frac{\phi}{(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\theta\phi}^{(\sigma^2)} &= -\frac{1}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\theta}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}^{(\phi)}, \\
\kappa_{\sigma^2\theta\theta}^{(\theta)} &= 2\frac{\theta}{\sigma^2(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\sigma^2\theta\theta}^{(\sigma^2)} &= \frac{1}{\sigma^4(-1+\theta^2)}, & \kappa_{\sigma^2\theta\sigma^2}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\theta\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi}^{(\phi)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi}^{(\theta)}, \\
\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2}^{(\theta)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2}^{(\sigma^2)} &= 0 = \kappa_{\sigma^2\theta\theta}^{(\sigma^2)}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2}^{(\theta)} &= 0, \\
\kappa_{\phi\theta\theta}^{(\theta)} &= -2\frac{-\phi\theta-4\phi^2\theta^2-3\theta^3\phi+4\theta^4\phi^2+1+\theta^2+2\phi^2}{(\theta^2-1)^2(\phi\theta-1)^3}, & \kappa_{\theta\phi\theta}^{(\theta)} &= -2\frac{-\phi\theta-4\phi^2\theta^2-3\theta^3\phi+4\theta^4\phi^2+1+\theta^2+2\phi^2}{(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi}^{(\theta)} &= -2\frac{-\phi\theta-4\phi^2\theta^2-3\theta^3\phi+4\theta^4\phi^2+1+\theta^2+2\phi^2}{(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3},
\end{aligned}$$

Os cumulantes de quarta ordem são dados por;

$$\begin{aligned}
\kappa_{\phi\phi\phi\phi} &= 0 = \kappa_{\phi\phi\phi\theta} = \kappa_{\phi\phi\phi\sigma^2}, & \kappa_{\phi\phi\theta\theta} &= 2 \frac{-2\phi^2 + 3\phi^2\theta^2 - 1}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\theta^2)}, \\
\kappa_{\phi\phi\theta\sigma^2} &= 2 \frac{\phi}{\sigma^2(-1+\phi\theta)(-1+\phi^2)}, & \kappa_{\phi\phi\sigma^2\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^2(-1+\phi^2)}, \\
\kappa_{\phi\theta\theta\theta} &= \frac{-6(3\theta^4\phi^2 + \phi^2 - 2\phi^2\theta^2 - 3\theta^3\phi - \phi\theta + \theta^2 + 1)}{(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3}, & \kappa_{\phi\theta\theta\sigma^2} &= \frac{-2(-\phi + 2\phi\theta^2 - \theta)}{(\theta^2 - 1)(\phi\theta - 1)^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\phi\theta\sigma^2\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{5\phi^2\theta^4 - \phi^2\theta^2 - 2\theta^3\phi + 1 - 2\phi\theta - \theta^2}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\phi\theta^2\sigma^2}, & \kappa_{\phi\theta\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{2}{(\phi\theta - 1)\sigma^4}, \\
\kappa_{\phi\sigma^2\theta\sigma^2} &= \frac{1}{2} \frac{\phi\theta + 1}{(-1+\phi\theta)\phi\theta\sigma^2}, & \kappa_{\phi\sigma^2\theta\phi} &= \frac{2\phi}{\sigma^2(\phi^2 - 1)(-1+\phi\theta)} = -\kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2\phi}, \\
\kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2\theta} &= -\frac{2}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\phi\sigma^2\sigma^2\sigma^2} &= 0, \\
\kappa_{\theta\phi\phi\theta} &= 2 \frac{-2\phi^2 + 3\phi^2\theta^2 - 1}{(-1+\phi^2)(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2}, & \kappa_{\theta\phi\phi\sigma^2} &= 2 \frac{\phi}{\sigma^2(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)}, \\
\kappa_{\theta\phi\sigma^2\phi} &= \frac{1}{2} \frac{7\phi^4\theta^2 - 6\phi^3\theta - 3\phi^2\theta^2 - 1 + \phi^2 + 2\phi\theta}{(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)^2\phi^2\theta\sigma^2}, & \kappa_{\theta\theta\phi\theta} &= -6 \frac{\phi^2 + 3\phi^2\theta^4 - 2\phi^2\theta^2 - 3\theta^3\phi - \phi\theta + \theta^2 + 1}{(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi\phi} &= 2 \frac{-\phi^2 + 3\phi^2\theta^2 - \theta^2 - 1}{(-1+\phi\theta)^2(-1+\phi^2)(-1+\theta^2)} = \kappa_{\theta\theta\phi\phi}, & \kappa_{\theta\theta\phi\theta} &= -6 \frac{3\theta^4\phi^2 + \phi^2 - 2\phi^2\theta^2 - 3\theta^3\phi - \phi\theta + \theta^2 + 1}{(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{2} \frac{-\phi^2\theta^2 + 5\theta^4\phi^2 - 2\theta^3\phi + 1 - 2\phi\theta - \theta^2}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\phi\theta^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\phi\sigma^2\theta} &= -2 \frac{-\phi + 2\phi\theta^2 - \theta}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi\phi} &= \frac{(1 + 3\phi^4\theta^2 + 6\phi^2\theta^2 - \phi^2 - \theta^2 - 3\phi\theta + 3\theta^3\phi - \phi^5\theta^3 + 3\phi^3\theta - 10\phi^3\theta^3 - 7\phi^4\theta^4 - \theta^4\phi^2 + 3\theta^5\phi^3 + 5\phi^5\theta^5)}{2(-1+\theta^2)(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)^3\phi^2\theta^2}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi\theta} &= \frac{-3(5\theta^7\phi^3 + \phi^3\theta^3 - 2\theta^5\phi^3 - 8\theta^4\phi^2 - 3\phi^2\theta^6 + 8\theta^3\phi - \phi\theta^5 + 1 - 2\theta^2 + \theta^4 - 3\phi\theta + 3\phi^2\theta^2)}{2(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3\theta^3\phi}, \\
\kappa_{\theta\theta\theta\phi} &= \frac{29\theta^7\phi^3 + 9\phi^3\theta^3 - 18\theta^5\phi^3 - 16\theta^4\phi^2 - 27\phi^2\theta^6 + 16\theta^3\phi + 7\phi\theta^5 + 1 - 3\phi\theta + 3\phi^2\theta^2 - 2\theta^2 + \theta^4}{-2(-1+\theta^2)^2(-1+\phi\theta)^3\theta^3\phi}, \\
\kappa_{\theta\theta\sigma^2\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{-\phi^2\theta^2 + 5\theta^4\phi^2 - 2\theta^3\phi + 1 - 2\phi\theta - \theta^2}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\phi\theta^2\sigma^2}, & \kappa_{\theta\sigma^2\theta\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{-\phi^2\theta^2 + 5\theta^4\phi^2 - 2\theta^3\phi + 1 - 2\phi\theta - \theta^2}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\phi\theta^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\theta\theta\theta\theta} &= \frac{3(5\theta^4 + 5\theta^6 + 1 - 3\theta^2)}{\theta^4(-1+\theta^2)^3}, & \kappa_{\theta\theta\theta\sigma^2} &= \frac{9\theta^4 - 1 + 2\theta^2}{2\theta^3\sigma^2(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta\theta\sigma^2\theta} &= \frac{3}{2} \frac{\theta^4 - 1 + 2\theta^2}{\sigma^2(-1+\theta^2)^2\theta^3}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi\sigma^2} &= -\frac{2(-\phi + 2\phi\theta^2 - \theta)}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\sigma^2} = \kappa_{\theta\sigma^2\phi\theta}, & \kappa_{\theta\sigma^2\phi\sigma^2} &= -\frac{2}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\theta\sigma^2\theta\phi} &= \frac{-\phi + 3\phi\theta^2 - 2\theta}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, \\
\kappa_{\theta\sigma^2\theta\theta} &= 6 \frac{\theta}{\sigma^2(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\theta\sigma^2\sigma^2\phi} &= -\frac{2}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\theta\sigma^2\sigma^2\theta} &= \frac{2}{\sigma^2(-1+\theta^2)}, \\
\kappa_{\sigma^2\phi\phi\theta} &= 2 \frac{\phi}{\sigma^2(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\phi\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(-1+\phi^2)}, & \kappa_{\sigma^2\phi\theta\phi} &= 2 \frac{\phi}{\sigma^2(-1+\phi^2)(-1+\phi\theta)}, \\
\kappa_{\sigma^2\phi\theta\theta} &= -\kappa_{\sigma^2\phi,\theta\theta}, & \kappa_{\sigma^2\phi\theta\sigma^2} &= -\frac{2}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, & \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2\phi} &= \frac{1}{\sigma^4(-1+\phi^2)}, \\
\kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2\theta} &= \frac{\phi\theta + 1}{-2(-1+\phi\theta)\phi\theta\sigma^4}, & \kappa_{\sigma^2\theta\phi\theta} &= -2 \frac{-\phi + 2\phi\theta^2 - \theta}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\theta\phi\sigma^2} &= -\frac{2}{(-1+\phi\theta)\sigma^4}, \\
\kappa_{\sigma^2\theta\theta\phi} &= -2 \frac{-\phi + 2\phi\theta^2 - \theta}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\sigma^2}, & \kappa_{\sigma^2\theta\theta\theta} &= \frac{6\theta}{\sigma^2(-1+\theta^2)^2}, & \kappa_{\sigma^2\theta\theta\sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^4(-1+\theta^2)}, \\
\kappa_{\sigma^2\theta\sigma^2\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{\phi\theta + 1}{(-1+\phi\theta)\phi\theta\sigma^3}, & \kappa_{\sigma^2\theta\sigma^2\theta} &= \frac{1}{\theta^2\sigma^4(-1+\theta^2)}, & \kappa_{\sigma^2\theta\sigma^2\sigma^2} &= 0, \\
\kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi\phi} &= \frac{1}{2} \frac{1+\phi^2}{\phi^2\sigma^4(-1+\phi^2)}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\phi\theta + 1}{(-1+\phi\theta)\phi\theta\sigma^4}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\phi\sigma^2} &= \frac{3}{2} \frac{1}{\phi\sigma^6}, \\
\kappa_{\sigma^2\sigma^2\theta\theta} &= \frac{1}{2} \frac{1+\theta^2}{\theta^2\sigma^4(-1+\theta^2)}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\theta\sigma^2} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\theta\sigma^6}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2\phi} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\phi\sigma^6}, \\
\kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2\theta} &= \frac{-1}{2\theta\sigma^6}, & \kappa_{\sigma^2\sigma^2\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{9}{\sigma^8}, & \kappa_{\sigma^2\phi\sigma^2\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^8}, \\
\kappa_{\theta\theta\phi\sigma^2} &= -\frac{1}{2} \frac{-\phi^2\theta^2 + 5\theta^4\phi^2 - 2\theta^3\phi + 1 - 2\phi\theta - \theta^2}{(-1+\theta^2)(-1+\phi\theta)^2\phi\theta^2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Referências

Abell, M. L. e Braselton, J. P. (1994) *The MAPLE V Handbook*. New York: AP Professional.

Abraham, B. e Ledolter, J. (1983) *Statistical Methods for Forecasting*. New York: Wiley.

Aitchison, J. e Silvey, S. D. (1958) Maximum-likelihood estimation of parameters subject to restraints. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 813-828.

Akaike, H. (1974) Markovian representation of stochastic process and its application to the analysis of autoregressive moving average process. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **26**, 363-87.

Amari, S. (1982) Differential geometry of curved exponential families-curvatures and information loss. *Ann. Statist.*, **10**, 357-387.

Amari, S. (1985) *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lectures Notes in Statistics. New York: Springer Verlag.

Anderson, T. W. e Mentz R. P. (1980) On the structure of the likelihood function of autoregressive and moving average models. *Journal of Time Series Analysis*, **2**, 83-94.

Ansley, C. F. (1979) An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive-moving average process. *Biometrika*, **66**, 59-65.

Ansley, C. F. e Newbold, P. (1980) Finite samples properties for autoregressive moving average models. *J. Econometrics*, **13**, 159-183.

Aubin, E. da C. (1995) Aperfeiçoamento de testes da razão de verossimilhança em modelos especiais com algumas aplicações e extensões. Tese Doutorado, 232 p., IME-USP.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1988) *Parametric Statistical Models and Likelihood*. Lectures Notes in Statistics. Springer-Verlag.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1990) Likelihood theory. In: Hinkley, D. V., Reid, N. and Snell, E. J., eds., *Statistical theory and modelling: in honor to Sir David Cox*, FRS. London, Chapman and Hall, 232-264.

Barndorff-Nielsen, O. E. e Cox, D. R. (1979) Edgeworth and saddlepoint approximations with statistical applications (with discussion). *J. R. Statist. Soc.*, B, **41**, 279-312.

Barndorff-Nielsen, O. E. e Cox, D. R. (1984) Bartlett adjustment to the likelihood ratio statistics and the distribution of the maximum likelihood estimator. *J. R. Statist. Soc.*, B, **46**, 483-495.

Barndorff-Nielsen, O. E. e Blaesild, P. (1986) A note the calculation of Bartlett adjustments. *J. R. Statist. Soc.*, B, **46**, 483-495.

Bartlett, M. S. (1937) Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society*, A, **160**, 268-282.

Bickel, P. J. e Ghosh, J. K. (1990) A decomposition for the likelihood ratio statistics and the Bartlett correction-A Bayesian argument. *Ann. Statist.*, **18**, 1070-1090.

Botter, D. A. (1993) Correções de Bartlett e poderes de testes em algumas classes de modelos de regressão. Tese Doutorado, 207 p., IME-USP.

Box, G. E. P. (1949) A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika*, **36**, 317-346.

Box, G. E. P., Jenkins, G. (1970) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. e Reinsel, G. (1994) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3rd ed. San Francisco: Holden-Day.

Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1991) *Time Series: Theory and Methods*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag.

- Campbel, M. J. e Walker, A. M. (1977) A survey of statistical work on the McKenzie River series of annual Canadian lynx trapping for the years 1821-1934, and a new analysis. *J. R. Statist. Soc., A*, **140**, 411-431, (with discussion) 448-468.
- Chandra, T. K. (1985) Asymptotic expansion of perturbed chi-squared variables. *Sankhyā*, **47**, 100-110.
- Chandra, T. K. e Ghosh, J. K. (1979) Valid asymptotic expansions for the likelihood ratio statistics and other perturbed chi-squared variables. *Sankhyā*, **A**, **41**, 22-47.
- Chandra, T. K. e Joshi, S. N. (1983) Comparison of likelihood ratio, Rao's and Wald's tests and a conjecture of C. R. Rao. *Sankhyā*, **A**, **45**(2), 226-246.
- Chandra, T. K. e Mukerjee, R. (1984) Comparison of likelihood ratio, Wald's and Rao's tests. *J. Multivariate Anal.*, **36**(1), 103-112.
- Chandra, T. K. e Mukerjee, R. (1985) On the optimality of Rao's tests. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **13**(12), 1507-1515.
- Chandra, T. K. e Samanta, T. (1988) On the second order local comparison between perturbed maximum likelihood estimators and Rao's statistics as test statistics. *J. Multivariate Anal.*, **25**, 201-222.
- Chesher, A. e Smith, R. (1995) Bartlett corrections to likelihood ratio test. *Biometrika*, **82**, 433-436.
- Choi, B. (1993) *ARMA Model Identification*. New York: Springer-Verlag.
- Churchill, R. V. (1975) *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*. São Paulo: Editora McGraw-Hill.
- Cordeiro, G. M. (1987) On the corrections to the likelihood ratio statistics. *Biometrika*, **74**, 265-274.
- Cordeiro, G. M. (1992) *Introdução à teoria de verossimilhança*. Rio de Janeiro, UFRJ. 174p. Minicurso apresentado no 10o. Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística,

Rio de Janeiro, 1992.

Cordeiro, G. M. (1993) General matrix formulae for computing Bartlett corrections. *Statistics and Probability Letters*, **16**, 11-18.

Cordeiro, G. M. e Ferrari, S. L. P. (1991) A modified score statistic having chi-squared distribution to order n^{-1} . *Biometrika*, **78**, 573-582.

Cordeiro, G. M. e Klein, R. (1994) Bias correction in *ARMA* models. *Statistics and Probability Letters*, **19**, 169-176.

Cordeiro, G. M., Botter, D. A. e Ferrari, S. L. P. (1994) Nonnull asymptotic distributions of three classic criteria in generalised linear models. *Biometrika*, **81**, 709-720.

Cox, D. R. (1988) Some aspects of conditional and asymptotic inference: a review. *Sankhyā A*. **50**(3), 314-337.

Cox, D. R. e Snell, E. J. (1968) A general definition of residuals. *J. R. Statist. Soc, B*, **30**, 248-275

Cox, D. R. e Hinkley, D. V. (1974) *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.

Cribari-Neto, F. (1997a) Correção de Viés e de testes: os enfoques analítico e bootstrap. Tese submetida como requisito parcial para concurso para professor titular do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco.

Cribari-Neto, F. (1997b) Econometric programming environments: Gauss, Ox and S-Plus. *The Journal of Applied Econometrics* **12**(1), 77-89.

Cribari-Neto, F. e Cordeiro, G. M. (1996) On Bartlett and Bartlett-type Corrections. *Econometric Review*, **15**, 339-367.

Cryer, J. e Ledolter, J. (1981) Small-samples properties of the maximum likelihood estimator in the first-order moving average model. *Biometrika*, **68**(3), 691-694.

Dagum, E. B. (1980) *The X-11 ARIMA seasonal adjustment method*. Catalogue No. 12-564E. Statistics Canada, Ottawa.

Doob, J. L. (1953) *Stochastic Processes*. New York: Wiley.

Doornik, J. A. (1996) *Object-oriented matrix programming using Ox*. International Thomson Business Press. (<http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik/>).

Efron, B. (1975) Defining the curvature of statistical problem (with application to second order efficiency). *Ann. of Statist.*, **3**, 1189-1242 (with discussion).

Efron, B. (1979) Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Ann. Statist.*, **7**, 1-26.

Everitt, B. S. (1987) *Introduction to Optimization Methods and their Application in Statistics*. New York: Chapman and Hall.

Ferrari, S. L. P. (1991) Aperfeiçoamento de testes escore, aplicações e extensões. Tese Doutorado, 185p. IME-USP.

Field, C. e Ronchetti, E. (1990) Small sample asymptotics. *Lectures Notes Monograph Series*. Vol.13. Institute of Mathematical Statistics.

Fletcher, R. (1987) *Practical Methods of Optimization*. 2nd. ed. New York: Wiley.

Galbraith, R. F. e Galbraith, J. I. (1974) On the inverses of some patterned matrices arising in the theory of stationary time series. *Journal Applied Probability*, **11**, 63-71.

Grunwald, G.K., Hyndman, R. J., Tedesco, L. e Tweedie, R. L. (1997). An unified view of linear $AR(1)$ models. Relatório técnico. University of Colorado Health Sciences Center.

Hall, P. (1992) *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. New York: Springer Verlag.

Hallin, M. (1984) Spectral factorization of nonstationary moving average processes. *Ann. Statist.*, **12**, 172-192.

- Hallin, M. (1986) Non-stationary q-dependent processes and time-varying moving-average models: Invertibility properties and the forecasting problem. *Adv. Appl. Prob.*, **18**, 17-210.
- Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hampel, F. R. (1973) Some small-sample asymptotics. *Proceeding of the Prague Symposium on Asymptotic Statistics* (ed. Hajed, J.). Prague: Charles University, 109-126.
- Harris, P. (1985) An asymptotic expansion for the null distribution of the efficient score statistics. *Biometrika*, **72**(3), 653-659.
- Harris, P. (1986) A note on Bartlett adjustments to likelihood ratio tests. *Biometrika*, **73**, 735-737.
- Harris, P. (1987) Discussion of the paper by Professors Cox and Reid. *J. R. Statist. Soc., B*, **49**(1), 30.
- Harris, P. e Peers, H. W. (1980) The local power of the efficient score test statistics. *Biometrika*, **67**(3), 525-529.
- Hatanaka, M. (1996) *Time-Series-Based Econometrics, Unit roots and Cointegration*. Oxford University Press.
- Hayakawa, T. (1975) The likelihood ratio criterion for a composite hypothesis under a local alternative. *Biometrika*, **62**, 451-460.
- Hayakawa, T. (1977) The likelihood criterion and the asymptotic expansion of its distribution. *Ann. Inst. Stat. Math., A*, **29**, 359-378, and *Corrigenda in Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **37**, 95-108.
- Hearn. A. C. (ed.). (1984) *Reduce User's Manual*, version 3.1. The Rand Corporation.

- Hosking, J. R. M. (1980) Lagrange-multiplier-test of time-series models. *J. R. Statist. Soc., B*, **42**(2), 170-181.
- Jensen, J. L. (1993) A historical sketch and some new results on the improved likelihood ratio statistic. *Scandinavian Journal of Statistics*, **20**, 1-15.
- Jensen, J. L. (1995) *Saddlepoint Approximations*. Oxford Science Publications.
- Jensen, J. L. e Wood, A. T. A. (1997) On the non-existence of a Bartlett correction for unit root tests. *Stat. Probab. Lett.*, **35**, 181-187.
- Kakizawa, Y. (1996) Higher order monotone Bartlett-type adjustment for some multivariate test statistics. *Biometrika*, **83**, 4, 923-927.
- Kakizawa, Y. (1997) Higher-order Bartlett-type adjustment. *J. of Stat. Planning and Inference*, **65**, 269-289.
- Küsters U. e Steffen J. P. (1996) Matrix Programming Languages for Statistical Computing. A detailed Comparision of Gauss, Matlab, and OX. Relatório técnico No. 75. ISSN 0938-2712. Catholic University of Eichstätt. Department of Business Administration.
- Larsson, R. (1994) Bartlett correction for unit root statistics. Preprint 2, Institute of Mathematical Statistics, Copenhagen.
- Larsson, R. (1995) Small sample corrections for unit root test statistics. Preprint 13, Department of Mathematics, Uppsala.
- Larsson, R. (1998a) Bartlett corrections for unit root test statistics. *J. Time Series Anal.*, **19**(4), 425-438.
- Larsson, R. (1998b) The order of the error term for moments of the log likelihood ratio unit root test in an autoregressive process. *Ann. Inst. Stat. Math.*, in press.
- Lawley, D. N. (1956) A general method for approximating the distribution of the likelihood ratio criteria. *Biometrika*, **43**, 295-303.

- Leonov, V. P. e Shiryaev, A. N. (1959) On a method of calculation of semi-invariants. *Theory Probability and its Application*, **3**, 319-328.
- Lütkepohl, H. (1985) Comparison of criteria for estimating the order of a vector autoregressive process, *J. Time Series Anal.*, **6**, 32-52.
- Magnus, J. R. (1978) The moments of products of quadratic forms in normal variables. *Statist. Neerlandica*, **32**, 201-210.
- Mardia, K. V. e Marshall, R. J. (1984) Maximun likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, **71**, 135-402.
- McCullagh, P. e Cox, D. R. (1986) Invariants and the likelihood ratio statistic. *The Annals of Statistics*, **14**, 1419-1430.
- McLeod, A. I. (1977) Improved Box-Jenkins estimator. *Biometrika*, **64**, 531-534.
- Mélard, G. (1984) A fast algorithm for the exact likelihood of moving average models. *Applied Statistics*, **33**, 104-114.
- Mentz, R. P., Morettin, P. A. e Toloi, C. M. C. (1998) On residual variance estimation in autoregressive models. *J. Time Series Anal.*, **19**(2), 187-208.
- Merckens, A. e Wansbeek, T. (1989) Formula manipulation in statistics on the computer: Evaluating the expectation of higher-degree function of normally distributed matrices. *Computational Statistic & Data Analysis*, **8**, 189-200.
- Mikulski, P. e Monsour, M, J. (1991) Optimality of the maximun likelihood estimator in first-order autoregressive process. *J. Time Series Anal.*, **12**(3), 237-253.
- Miller, J. W. (1995) Exact maximum likelihood estimation in autoregressive process. *J. Time Series Anal.*, **16**(6), 607-615.
- Mukerjee, R. (1990a) Comparison of tests in the multiparameter case I: Second-order power. *J. Multivariate Anal.*, **33**(1), 17-30.

Mukerjee, R. (1990b) Comparison of tests in the multiparameter case II. *J. Multivariate Anal.*, **33**(1), 31-48.

Mukerjee, R. e Ghosh, J. K. (1994) Higher order comparison of test: A Bayesian route. *Essays on probability and statistics: Festschrift in honour of Professor Anil Kumar Bhattacharyya*. (Mukherjee, S. P.; Chaudhuri, Arijit; Basu, Sujit K., eds.) PresColStat: India.

Mukerjee, R. e Reid, N. (1998) Comparison of test statistic via expected lengths of associated confidence intervals. Relatorio Técnico, Indian Institute of Management, Calcutta, India.

Monti, A. C. (1997) Empirical likelihood confidence regions in time series models. *Biometrika*, **84**, 2, 395-405.

Nelson, C. R. (1973) *Applied Time Series Analysis-For Management Forecasting*. San Francisco: Holden-Day.

Nerlove, M., Grether, D. M. e Carvalho, J. L. (1979) *Analysis of Economic Time Series-A Synthesis*. New York: Academic Press.

Neyman, J. (1959) Optimal asymptotic test for composite hypotheses. *U. Grenander (Ed.), Probability and Statistics*, 213-234. New York: Wiley.

Newbold, P. (1974) The exact likelihood function for a mixed autoregressive moving average process, *Biometrika*, **61**, 423-426.

Nielsen, B. (1994) Bartlett correction in cointegration model. Preprint, Institute of Mathematical Statistics, Copenhagen.

Nielsen, B. (1997) Bartlett correction of the unit root in autoregressive models. *Biometrika*, **84**(2), 500-504.

Owen, A. B. (1988) Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional. *Biometrika*, **75**, 237-249.

Peers, H. W. (1971) Likelihood ratio and associated test criteria. *Biometrika*, **50**(3), 577-587.

Pham, D. T. (1987) Exact maximum likelihood estimate and Lagrange multiplier test statistic for *ARMA* models. *J. Time Series Anal.*, **8**(1), 61-78.

Phillips, P. C. B. (1977) Approximations to some finite sample distributions associated with a first-order stochastic difference equation. *Econometrica*, **45**, 463-485.

Rao, C. R. (1948) Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44**, 50-57.

Ravishanker, N., Melnick, E. L. e Tsai, C. (1990) Differential geometry of *ARMA* models. *J. Time Series Anal.*, **11**(3), 259-274.

Shaman, P. (1983) Properties of estimates of the mean square error of prediction in autoregressive models. *Studies in Econometrics, Time Series and Multivariate Statistics*. (eds. S. Karlin, T. Amemiya and L. A. Goodman). London: Academic Press, 331-342.

Sheppard, N. (1997) The relationship between the conditional sum of squares and the exact likelihood for autoregressive moving average models. Relatorio Técnico, Nuffield College, Oxford Univ., Oxford.

Silvey, S. D. (1959) The lagrangian multiplier test. *Ann. Math. Stat.*, **30**, 389-407.

Slutzky, E. (1927) The summation of random causes as the source of cyclic processes (Russian with an English summary), *Problems of Economic Conditions*, **3**, No. 1, The Conjecture Institute, Moscow. A revised English version (1937) appeared in *Econometrica*, **5**, 105-146.

Sutradhar, B. C. (1993) Score test versus Bartlett modified test for testing homogeneity of variances with autocorrelated errors. *Tech. rep. No.93-01*. Department of Mathematic and Statistics, Memorial University of Newfoundland.

- Sutradhar, B. C. (1996) Score test versus Bartlett type modified test for testing homogeneity of variances with autocorrelated errors. *Sankhyā, Ser. B*, **58**, 10-27.
- Sutradhar, B. C. e Bartlett, R. F. (1993) Monte Carlo comparison of Wald's likelihood ratio and Rao's tests. *J. Statist. Comput. Simul.*, **46**, 23-33.
- Sutradhar, B. C. e Dagum, E. B. (1993) Testing for homogeneous variations in periodic data. *The Statistician*, **42**, 97-106.
- Sutradhar, B. C. e Dagum, E. B. (1998) Bartlett-type modified test for moving seasonality with applications. *The Statistician*, **47**, Part 1, 191-206.
- Takemura, A. e Kuriki, S. (1996) A proof of independent Bartlett correctability of nested likelihood ratio tests. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **48**(4), 603-620.
- Tanaka, K. (1982) Chi-square approximations to the distributions of the Wald, likelihood ratio and Lagrange multiplier test statistics in time series regression. *Tech. Rep. 82*, Kanazawa Univ.
- Tanaka, K. (1984) An asymptotic expansion associated with the maximum likelihood estimator in *ARMA* models. *J. R. Statist. Soc., Ser. B*, **46**, 58-67.
- Taniguchi, M. (1984) An asymptotic expansion for the distribution of the likelihood ratio criterion for a Gaussian autoregressive moving average process under a local alternative. *Econometric Theory*, **1**, 73-84.
- Taniguchi, M. (1987) Validity of Edgeworth expansion of minimum contrast estimator for Gaussian *ARMA* process. *J. Multivariate Anal.*, **21**, 1-28.
- Taniguchi, M. (1988) Asymptotic expansion of the distributions of some test statistics for Gaussian *ARMA* process. *J. Multivariate Anal.*, **27**, 494-511.
- Taniguchi, M. (1991) *Higher Order Asymptotic Theory for Time Series Analysis*. Lectures Notes in Statistics. Springer-Verlag.

Tong, H. (1977) Some comments on the Canadian lynx data-with Discussion. *J. R. Statist. Soc., Ser. A*, **140**, 432-432, 448-468.

Tong, H. (1990) *Non-linear Time Series: Dynamical System Approach*. Oxford: Clarendon Press.

Uribe, M. (1997) Aperfeiçoamento de testes estatísticos em várias famílias de distribuições. Tese Doutorado, 215 p. IME-USP.

van Garderen, K. J. (1999) Exact geometry of autoregressive models. *J. Time Series Anal.*, **20**(1), 1-21.

Wald, A. (1943) Test of statistical hypotheses concerning several parameter when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**, 426-482.

Walker, A. M. (1950) Note on a generalization of the large sample goodness of fit test for linear autoregressive schemes, *J. R. Statist. Soc., Ser. B*, **12**, 102-107.

Whittle, P. (1951) *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. Uppsala.

Wilks, S. S. (1938) The large-sample distribution of likelihood ratio for testing composite hypotheses. *Ann. Math. Statist.*, **9**, 60-62.

Wolfram. S. (1991). *MATHEMATICA: a system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley.

Yule, G. U. (1921) On the time-correlation problem with special reference to the variate-difference correlation method *J. R. Statist. Soc., Ser. A*, **84**, 497-537.

Yule, G. U. (1927) On the method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A*, **226**, 267-298.