Acoplamento, τ de Kendall e redução
da dimensão de um vetor aleatório

Verónica Andrea González-López

- *Trabalho de Tese de Doutorado*
- **Área de concentração** Estatística
- **Orientador** PhD Carlos Alberto de Bragança Pereira
- **Orgão financiador** CAPES

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Ano 1999

Capítulo 3

Medidas de Concordância e de Associação

<i>Seção 3.1: Medidas de Concordância</i>	78
<i>Seção 3.2: Medida Adequada de Associação</i>	86
<i>Seção 3.3: Existência do Acoplamento Associado</i>	92
<i>Seção 3.4: Comportamento da medida τ de Kendall</i>	120

Capítulo 4

Análise Exhaustiva da Medida τ -Kendall

<i>Seção 4.1: Máxima Associação Positiva (Negativa)</i>	134
<i>Seção 4.2: Medida τ-Kendall no Caso Discreto</i>	160

Capítulo 5

Associação e Predição

<i>Seção 5.1: Construção de um Preditor</i>	167
<i>Seção 5.2: Adequacidade</i>	183
<i>Seção 5.3: Predição Empírica</i>	197

Apêndice

<i>Seção A.1</i>	203
------------------	-----

- *Programa 1: Para o Cálculo de Acoplamentos e Medida τ -Kendall*
- *Programa 2: Simulação*

<i>Seção A.2: Condição $TP_2(RR_2)$ em pares, Distribuição Conjunta e Operação Bayesiana: Prior/Posterior</i>	204
--	-----

Referências

Pela Ordem Alfabética

221

Por Tópicos Principais

225

- *Tipos de Dependências*
- *Acoplamentos e Classes de Fréchet*

Índice de Tópicos

227

Índice de Siglas

240

Agradecimientos

Los caminos que podían ser escogidos para la definición de este trabajo eran muchos, en ese punto comienza el aporte de mi amigo y orientador, profesor Carlinhos, su intuición profunda dió valor a la investigación y estructuración de este “comienzo” el supo inducir mis pasos y motivar mi curiosidad para que optase libremente por cada una de las líneas estudiadas aquí.

Sé que aun estoy en deuda con muchos de los objetivos planteados en el inicio, mas la historia recién comienza...

Paso a paso, ante cada aspecto nuevo que fue necesario estudiar siempre existía un nexo con los trabajos “casi sociales”, que mi querido amigo y profesor Sergio recorría, con esa habilidad que solo él consigue, gracias a su aguda percepción del pensamiento humano e intensa adaptación de esas ideas a la formalización matemática. Fue de ese modo que este trabajo terminó adquiriendo forma. Inclusive, agradezco el haber tenido la oportunidad de trabajar junto a Sergio y Luis Gustavo, las discusiones, con ellos entabladas fueron de extrema importancia, mas aun con ellos aprendí a disfrutar de la investigación.

Imprescindibles fueron los aportes y sugerencias de los estimados profesores Jorge y Nelson, que con gran paciencia y dedicación atendieron mis dudas y descubrieron otros aspectos de los resultados aquí presentes. Muchas gracias!

Agradezco muy especialmente al querido profesor Julio, por su apoyo y excelente humor. Muchas gracias profesor!

Por la parte estética de este trabajo, tanto como sugerencias, me debo al buen censo de Maria Nazareth, Fabio, Marcelo y por supuesto a mi Orientador, quienes permitieron traducir las ideas y motivantes deste trabajo, a ellos, con todo mi afecto! y por su incansable capacidad y actitud ante el trabajo: Muchas gracias!

Entrego este trabajo en manos de “los míos”, por quienes vivo... a quienes debo toda la inquietud que me hizo entrar por este camino...

Agradezco, al Instituto de Matemática e Estatística de la Universidade de São Paulo y a CAPES, por brindarme esta oportunidad de desarrollo.

Resumo

Considerando um vetor aleatório n -variado, $n > 2$, com coordenadas *Negativamente Associadas (NA)*, *Positivamente Associadas (PA)* ou com ambas as condições nele presentes (por exemplo, algumas variáveis aleatórias *Associadas em pares* e outras variáveis *Negativamente Associadas em pares*), percorremos as conexões entre os diferentes conceitos. Analisamos e apresentamos opções que tornam uma estrutura “heterogênea” (estrutura mista: positiva e negativa) numa estrutura “homogênea”. Em seguida, adotamos uma medida de *associação*, logo depois de fazer uma análise dessas medidas. Imediatamente, apresentamos as propriedades de tal medida, surgindo, nesse ponto, sua conexão forte com *acoplamentos*. Essa medida de associação, em seus valores extremos, percorre uma série de considerações feitas por De Finetti (1953), numa proposta para o estudo de campos de coincidência de opiniões. Todos esses resultados, válidos para o caso contínuo, são revisados no caso discreto.

Retomando aquela medida de associação, apresentamos um estudo de uma possível “função preditora”, que é intuída a partir da medida e sua invariância ante transformações não decrescentes. A saber, encaramos a teoria de adequacidade, na procura de um ambiente, no qual seja possível fazer uma predição, de “certo modo” razoável, baseados nos dados que contenham toda a informação pertinente a ser usada, para a predição de uma quantidade não observável, em geral; ou, em qualquer forma, uma variável da qual temos informação passada. Nessa predição encontra-se implícita uma redução da dimensão dos dados, observáveis, que leva em conta a estrutura de associação entre seus componentes, através da função de distribuição

acumulada, do vetor considerado.

Neste trabalho apresentamos uma proposta de metodologia preditiva, baseada nas propriedades das estruturas associadas. Tal metodologia é fundamentada na função de distribuição acumulada obtida a partir do *banco de dados* ou registros, que possuem estruturas de associação. Para o desenvolvimento da metodologia, apresentamos os fundamentos teóricos das estruturas associadas, acrescentando novos resultados. Apresentamos ainda um método de validação da metodologia proposta, através de resultados que estabelecem uma relação entre as estruturas associadas e a medida τ de Kendall.

Abstract

This monography presents a new methodology for prediction based on the association structure of the random variables envolved. The methodology uses the empirical cumulated distibution function obtained in a previous observed data. The theory needed to develope the method is presented in details and some new results are obtained. To validate the method we present results relating the association structures with the Kendall τ measure of association.

Motivação

O pensamento motivador deste trabalho foi a *predição*. Os princípios que traçaram os tópicos percorridos baseavam-se na seguinte situação geral: suponhamos que temos acesso a um banco de dados, constituído por realizações de um vetor aleatório $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, onde parte dele é observada $(X_2, \dots, X_n)$, enquanto que X_1 é uma variável aleatória derivada a partir do conhecimento de $(X_2, \dots, X_n)$. Logo, o banco de dados à nossa disposição é : $\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})\}_{i=1}^{N-1}$. Suponhamos agora que um novo vetor, $(x_{N2}, \dots, x_{Nn})$, é observado; Qual seria uma predição *adequada* para x_{N1} ?. A saber, pretendemos dar um tratamento para aquele banco de dados, que seja induzido pelo conhecimento da estrutura de associação das variáveis envolvidas. Este problema, muito geral, levou-nos ao desenvolvimento de aspectos diversos, de maneira a dar definição e contexto para o tratamento do mesmo.

Foi preciso escolher uma linha de raciocínio, montar um esquema fornecedor do ambiente no qual pretendíamos enquadrar o problema. O Capítulo 1 discorre sobre conceitos ante os quais, “acreditamos”, nosso problema responde. Dentre as razões para essa escolha temos: como a variável X_1 é resultante a partir de $(X_2, \dots, X_n)$, admitimos então que existe uma *forte* dependência entre X_1 e cada uma das outras, tanto quanto X_1 depende do vetor $(X_2, \dots, X_n)$ como um todo. Nesse mesmo Capítulo fica evidente a dificuldade perante situações de estruturas aleatórias mistas (dependências positivas e negativas), pois tais estruturas correspondem a variáveis aleatórias concordantes e discordantes, respectivamente. No Capítulo 2 apresentamos soluções alternativas para estruturas mistas. Outro aporte feito nesse Capítulo refere-se à possibilidade de reconstruir alguns resultados já conhecidos para

o caso de positividade, na presença de negatividade.

A idéia que governou a construção do preditor - que assumimos unidimensional, pois a variável a predizer X_1 é unidimensional - orientou nossos passos ao estudo de medidas de associação, surgidas a partir das medidas de concordância. Intuitivamente, aquele preditor devia *potencializar* a associação entre X_1 e cada variável da *base observacional*, $(X_2, \dots, X_n)$. Mais tarde, essa intuição levou nosso estudo até a medida τ de Kendall e os acoplamentos associados (distribuições de marginais uniformes).

Continuando nessa linha, o Capítulo 4 trata especificamente os casos de máxima associação: por intermédio da medida τ -Kendall é possível enxergar a relação entre as variáveis medidas por τ . Foi implementado um programa para o cálculo da medida τ tanto quanto para o cálculo dos acoplamentos, em casos bivariados discretos - adicionado no apêndice do trabalho.

Finalmente, no Capítulo 5 fazemos um estudo analítico da estrutura do preditor de X_1 , colocando em evidência diversos aspectos que o caracterizam. Este preditor será gerado levando-se em conta a informação contida na distribuição acumulada do vetor $(X_2, \dots, X_n)$.

Nesta mesma direção, apresentamos os conceitos de adequacidade. Com base nos princípios que estruturam nosso preditor, apresentamos propostas para uma *predição adequada*.

A predição empírica, discutida ao final do Capítulo, analisa a manipulação do banco de dados, assim como o uso de toda a “informação” contida na amostra - informação esta embutida na distribuição acumulada empírica.

“*Este palacio es fabrica de los dioses*, pensé primeramente. Exploré los inhabitados recintos y corregí: *Los dioses que lo edificaron han muerto*. Noté sus peculiaridades y dije: *Los dioses que lo edificaron estaban locos*. Lo dije, bien lo sé, con una incomprensible reprobación que era casi un remordimiento...

Pensé que *Argos* y yo participábamos de universos distintos; pensé que nuestras percepciones eran iguales, pero que *Argos* las combinaba de otra manera y construía con ellas otros objetos; pensé que acaso no había objetos para él, sino un vertiginoso y continuo juego de impresiones brevísimas. Pensé en un mundo sin memoria, sin tiempo...”

Jorge Luis Borges (1974), *El inmortal-El Aleph*.

Capítulo 1

Conceitos de Dependência

- *Seção 1.1: Introdução e Contexto*
- *Seção 1.2: Definições*
- *Seção 1.3: Resultados Essenciais, que Caracterizam os Diferentes Tipos de Dependências e suas Conexões*
- *Seção 1.4: Exemplos*

1.1. Introdução e contexto

Nos trabalhos de Joag-Dev e Proschan (1983) são apresentados diversos exemplos de vetores aleatórios NA e com $f.d.p.$ $S-MRR_2$ (densidade “estritamente regra reversa de ordem 2”, como as distribuições (a): Multinomial, (b): Hipergeométrica Multivariada, (c): Dirichlet, (d): Dirichlet composta com a Multinomial e (e): Medidas invariantes por permutação. Outros enfoques são abordados por Block et al. (1982) apresentando (a), (b), (c), (d) e (f): Normal Multivariada com estrutura especial de covariância como exemplos de $f.d.p.$ RR_2 em pares (densidade regra reversa de ordem 2, em pares) e, conseqüentemente, $S-MRR_2$. No entanto, Karlin e Rinott (1980 b) exibiram provas elaboradas de (a), (b), (c), (f) e (g): distribuição Hahn Multivariada, como densidades $S-MRR_2$.

Karlin e Rinott (1980 a) também expõem numerosos exemplos de densidades MTP_2 (“multivariada totalmente positiva de ordem 2”) que envolvem as multinormais (por exemplo, $\underline{X} \sim N(\underline{0}, \Sigma)$, tal que os elementos fora da diagonal de $-\Sigma^{-1}$ sejam não negativos) e ainda provam que variáveis aleatórias independentes possuem $f.d.p.$ conjunta MTP_2 . Outros exemplos de funções de distribuição MTP_2 são, (i): Logística Multivariada, (ii): Gama Multivariada, (iii): F-Multivariada, (iv): Valor Absoluto Cauchy Multivariada, (v): Multinomial Negativa.

Em 1997, Joe fornece um resultado que mostra a conexão existente, no caso bivariado, entre $f.d.p.$ TP_2 (“totalmente positiva de ordem 2”, bivariada) e variáveis aleatórias PA ($f.d.p.$ TP_2 implica em variáveis PA). No entanto, Joag-Dev e Proschan (1983) já tinham provado para o caso bivariado que $f.d.p.$ RR_2 implica

em variáveis aleatórias *NA*.

Considerando um vetor aleatório n -variado, $n > 2$, com coordenadas *Negativamente Associadas*, *Positivamente Associadas* ou com ambas as condições presentes (por exemplo, algumas variáveis aleatórias *Associadas em pares* e outras variáveis *Negativamente Associadas em pares*) e um componente, que designaremos como *variável a prever*, enquanto que, as $n-1$ componentes restantes denotaremos como variáveis *base da predição*. Pretendemos mostrar que é conveniente utilizar para a criação de um preditor, fundamentado na base, “toda a informação” contida na distribuição acumulada que vincula todo o vetor aleatório (variáveis observáveis e variável a prever). Por exemplo, consideremos que $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ é o vetor aleatório, onde as variáveis envolvidas têm “marcada dependência entre si”. Suponhamos que U_2 e U_3 são resultados de análises clínicas e U_1 é o diagnóstico elaborado na base das outras duas. A associação existente entre U_1 e U_i , $i = 2, 3$ medida através da medida bivariada τ de Kendall, será “pronunciada” por um preditor, que condense a informação embutida na distribuição conjunta de $\underline{U}$.

A situação anterior exige um detalhado estudo das possíveis dependências entre variáveis aleatórias, suas relações e “história bibliográfica”. Neste ponto, apresentamos algumas humildes contribuições, que permitiram enxergar com maior detalhe o alcance e interpretação dos conceitos. Primeiramente, surgiu a preocupação por estruturas combinadas (algumas variáveis *positivamente associadas* e outras *negativamente associadas*). Diante disso, estabelecemos condições sobre o vetor que permitiram obter um novo vetor (transformação do anterior) de coordenadas *PA em pares* ou *NA em pares*, substituindo a estrutura de associação heterogênea por

uma estrutura de associação homogênea.

Perante aquela preocupação toda em relação à associação entre variáveis, fizemos uma moderada pesquisa entre as medidas de *concordância*, optando pela medida τ de Kendall, como a mais adaptada ao nosso contexto. No caminho, tentamos motivar a intuição com exemplos ilustrativos. Em seguida, estudamos o comportamento da medida bivariada τ de Kendall em casos contínuos e discretos.

Percorremos os valores extremos fornecidos pela medida τ na procura do caráter informativo, em sua relação com a distribuição conjunta e a relação “tipo funcional” existente entre as variáveis para as quais a medida é extrema.

1.2. Definições e Notações Gerais

Daremos, a seguir, as definições básicas que necessitaremos:

Se $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ e $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, denotamos por

$$\underline{X} \vee \underline{Y} := (\max\{X_1, Y_1\}, \dots, \max\{X_n, Y_n\}),$$

$$\underline{X} \wedge \underline{Y} := (\min\{X_1, Y_1\}, \dots, \min\{X_n, Y_n\}).$$

1.2.1 Definição

Dizemos que o vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ é

(i) *Negativamente Associado (NA)* [Proschan e Joag-Dev (1983)] se, para toda partição de $\underline{X}$ em $\underline{X}_1 = (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)})$ e $\underline{X}_2 = (X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(n)})$ e para todo par de funções crescentes f e g sobre R^k e R^{n-k} , respectivamente, temos

$$\text{Cov}(f(\underline{X}_1), g(\underline{X}_2)) \leq 0,$$

onde π é uma permutação arbitrária de $\{1, \dots, n\}$.

(ii) *Negativamente Associado (NA) em pares*, se a definição anterior se verifica para todo par de coordenadas do vetor $\underline{X}$.

1.2.2 Definição

Dizemos que o vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ é

(i) *Positivamente Associado* (PA ou A) [Joag-Dev (1983)] (ou as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ são PA) se, para todo par de funções crescentes (em cada coordenada) f e g sobre R^n , temos $Cov(f(\underline{X}), g(\underline{X})) \geq 0$.

(ii) *Positivamente Associado* (PA ou A) *em pares* se, a definição anterior se verifica para todo par de coordenadas do vetor $\underline{X}$.

1.2.3 Definição [Karlin e Rinott (1980) a, b]

Seja $f : R^n \rightarrow R$ uma função não negativa,

(i) dizemos que f é MTP_2 (Multivariate totally positive of order 2) se,

$$f(\underline{X} \vee \underline{Y})f(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \geq f(\underline{X})f(\underline{Y});$$

$\forall \underline{X}, \underline{Y}$ vetores em R^n .

(ii) Dizemos que f é MRR_2 (Multivariate reverse rule of order 2) se,

$$f(\underline{X} \vee \underline{Y})f(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \leq f(\underline{X})f(\underline{Y}),$$

$\forall \underline{X}, \underline{Y}$ vetores em R^n .

1.2.4 Definição [Karlin e Rinott (1980) a, Efron (1964)]

Uma função $\xi : R \rightarrow R$ não negativa é dita PF_2 (frequência polya de ordem 2) se a transformação $f : R^2 \rightarrow R$ definida por

$$f(x_1, y_1) := \xi(x_1 - y_1) \text{ é } TP_2,$$

onde, TP_2 (Totally positive of order 2) corresponde à definição de MTP_2 no caso bivariado.

Nota: análogamente denotamos por RR_2 (Reverse rule of order 2) quando, temos uma função bivariada MRR_2 .

1.2.5 Definição [Block, Savits, Shaked (1982)]

Seja $f : R^n \rightarrow R$ uma função não negativa.

(i) Dizemos que f é RR_2 em pares se f é RR_2 fixando-se $n - 2$ coordenadas arbitrárias.

(ii) Dizemos que f é TP_2 em pares se f é TP_2 fixando-se $n - 2$ coordenadas arbitrárias.

1.2.6 Definição [Karlin e Rinott (1980) b]

Uma função MRR_2 , $f : R^n \rightarrow R$ é fortemente MRR_2 , “ S - MRR_2 ” se para qualquer conjunto de n funções PF_2 , $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, e para cada $j \leq n$, a função:

$$g_{k-j}(x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_n}) := \int \cdots \int f(\underline{x}) \prod_{m=1}^j \xi_m(x_{i_m}) dx_{i_m}$$

é MRR_2 , sempre que a integral exista, onde, $\{i_1, \dots, i_n\}$ é qualquer permutação de $\{1, \dots, n\}$.

1.2.7 Definição [Karlin e Rinott (1980) a]

Sejam f_1 e f_2 duas funções de distribuições de probabilidade em R^n . Se para todo $\underline{x} \in R^n, \underline{y} \in R^n$,

$$f_2(\underline{x} \vee \underline{y}) f_1(\underline{x} \wedge \underline{y}) \geq f_1(\underline{x}) f_2(\underline{y}),$$

dizemos que, $f_2 >_{TP2} f_1$.

1.2.8 Definição [Karlin e Rinott (1980) a, b]

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com função de densidade $f_{\underline{X}}$.

Se $f_{\underline{X}}$ é $MTP_2(MRR_2)$ dizemos que $\underline{X}$ é $MTP_2(MRR_2)$ ou que $X_1, \dots, X_n$ são $MTP_2(MRR_2)$.

1.2.9 Definição [Proschan e Joag Dev (1983)]

Sejam J, K intervalos fechados à direita e abertos pela esquerda em R . Para variáveis aleatórias X e Y definimos

$$H(J, K) := P(X \in J, Y \in K),$$

dizemos que (X, Y) é $TP_2(RR_2)$ em intervalos se para $J_1 < J_2, K_1 < K_2$,

$$H(J_2, K_2)H(J_1, K_1) \geq (\leq) H(J_1, K_2)H(J_2, K_1),$$

onde $I_1 < I_2$ denota, $x \leq y \forall x \in I_1, \forall y \in I_2$, I_i , intervalo em R , $i = 1, 2$.

1.2.10 Definição [Lehmann (1966)]

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, dizemos que elas são NQD (PQD), i.e., Negative quadrant dependent (Positive quadrant dependent) se para todo par de valores reais (x, y) , verifica-se,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq (\geq) P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

1.2.11 Definição [Karlin e Rinott (1980) a, b]

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$, variáveis aleatórias. Dizemos que são $NUOD$ ($PUOD$) i.e., Negative upper orthant dependence (Positive upper orthant dependence), se para toda n -upla real $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos

$$P(X_i > x_i, i = 1, \dots, n) \leq (\geq) \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i).$$

E dizemos que são *NLOD* (*PLOD*), i.e., Negative lower orthant dependence (Positive lower orthant dependence), se para toda n -upla real $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, verifica-se,

$$P(X_i \leq x_i, i = 1, \dots, n) \leq (\geq) \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i).$$

1.2.12 Definição [Karlin e Rinott (1980) a, b]

(i) Dizemos que variáveis aleatórias são *NOD* (Negative orthant dependence) se são *NUOD* e *NLOD*.

(ii) Dizemos que variáveis aleatórias são *POD* (Positive orthant dependence) se são *PUOD* e *PLOD*.

Notemos que para $n = 2$,

$$NOD \Leftrightarrow NQD \text{ e } POD \Leftrightarrow PQD.$$

1.2.13 Definição [Joe (1997)]

Um vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, X_2)$ com função de distribuição acumulada F é “Estocasticamente decrescente (crescente)” em X_1 , ou a distribuição condicional $F_{2|1}$ é “Estocasticamente decrescente (crescente)”, se

$$P(X_2 > x_2 | X_1 = x_1) = 1 - F_{2|1}(x_2 | x_1) \downarrow (\uparrow) x_1 \quad \forall x_2,$$

i.e.,

$$F_{2|1}(x_2 | x_1) \uparrow (\downarrow) \text{ em } x_1 \quad \forall x_2$$

onde $F_{2|1}(x_2|x_1) = P(X_2 \leq x_2|X_1 = x_1)$. Usaremos a notação: $X_2 \text{ SD}(SI) X_1$.

Nota: excepto especificações prévias, é assumida a seguinte notação

Se $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ é um vetor aleatório, denotamos por $F_{\underline{X}}$ e $f_{\underline{X}}$ as respectivas *f.d.a.* (função de distribuição acumulada) e *f.d.p.* (função de densidade de probabilidade) conjuntas. Entanto que as marginais univariadas respectivas serão chamadas F_{X_i} e f_{X_i} , $i = 1, \dots, n$.

1.2.14 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* F . Dizemos que, $\underline{X}$ é “Positivamente dependente através da ordem estocástica” (*PDS*) se a distribuição condicional de $\{X_i : i \neq j\}$ dado $X_j = x$ é Estocasticamente crescente em x para todo $j = 1, \dots, n$.

1.2.15 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* F . Dizemos que, $\underline{X}$ é “Negativamente dependente através da ordem estocástica” (*NDS*) se a distribuição condicional de $\{X_i : i \neq j\}$ dado $X_j = x$ é Estocasticamente decrescente em x para todo $j = 1, \dots, n$.

1.2.16 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório. Dizemos que $\underline{X}$ é “Condicionamente decrescente (crescente) em sequência”, denotado por $CDS(CIS)$, se X_i é Estocasticamente decrescente (crescente) em $X_1, \dots, X_{i-1}$ para $i = 2, \dots, n$. i.e.,

$$P(X_i > x_i | X_j = x_j, j = 1, \dots, i-1) \downarrow (\uparrow) x_1, \dots, x_{i-1} \quad \forall x_i.$$

1.2.17 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, X_2)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* F e com marginais F_i , $i = 1, 2$. Dizemos que, X_2 é “Decrescente (Crescente) pela cauda direita em X_1 ”, se

$$P(X_2 > x_2 | X_1 > x_1) = \frac{\bar{F}(x_1, x_2)}{\bar{F}_1(x_1)} \downarrow (\uparrow) x_1 \quad \forall x_2,$$

onde $\bar{F}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$. Notação: $X_2 \text{ RTD } X_1$ ($X_2 \text{ RTI } X_1$).

1.2.18 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, X_2)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* F e com marginais F_i , $i = 1, 2$. Dizemos que, X_2 é “Crescente (Decrescente) pela cauda esquerda em X_1 ”, se

$$P(X_2 \leq x_2 | X_1 \leq x_1) = \frac{F(x_1, x_2)}{F_1(x_1)} \uparrow (\downarrow) x_1 \quad \forall x_2.$$

Notação: $X_2 \text{ LTI } X_1$ ($X_2 \text{ LTD } X_1$).

⁰NO desenvolvimento da tese - salvo especificação prévia - assumiremos como ordem em R^n , a ordem *parcial* usual, isto é: $\{X_k \leq x_k, k \in \{i_1, \dots, i_s\}\}$ expressa que para todo k $X_k \leq x_k, k \in \{i_1, \dots, i_s\}$.

1.2.19 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* F . X_i é *RTD* (*RTI*) em X_j , $i \in A^c$, $j \in A$, se

$$P(X_i > x_i, i \in A^c | X_j > x_j, j \in A) \downarrow (\uparrow) x_k, k \in A,$$

onde, A é um subconjunto não vazio de $\{1, \dots, n\}$.

1.2.20 Definição [Joe (1997)]

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* F . X_i é *LTI* (*LTD*) em X_j , $i \in A^c$, $j \in A$, se

$$P(X_i \leq x_i, i \in A^c | X_j \leq x_j, j \in A) \uparrow (\downarrow) x_k, k \in A,$$

onde, A é um subconjunto não vazio de $\{1, \dots, n\}$.

1.2.21 Fórmula da Composição [Karlin e Rinott(1968)]

Consideremos uma função $K : R^2 \rightarrow R$, definamos o operador $K^* : R^{2m} \rightarrow R$

$$K^* \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) \cdots K(x_1, y_m) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) \cdots K(x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots \\ K(x_m, y_1) & K(x_m, y_2) \cdots K(x_m, y_m) \end{vmatrix},$$

onde $x_i \leq x_{i+1}$, $y_i \leq y_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$.

Uma função K é “*Sinal-Regular de ordem r* ” (SR_r) se existir uma seqüência de números $\{\epsilon_m\}_m$, onde ϵ_m pode ser $+1$ ou -1 , tal que

$$\epsilon_m K^* \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq m \leq r.$$

O símbolo $\epsilon_m(K) = \epsilon_m$ denota o sinal (constante) do determinante da m -ésima ordem.

Se $\epsilon_m = (-1)^{m(m-1)/2}$, dizemos que K é “*Sinal-regra reversa de ordem r* ” (RR_r).

Sejam K, L, M funções borel-mensuráveis de duas variáveis satisfazendo,

$$M(\xi, \eta) = \int_Y K(\xi, \zeta) L(\zeta, \eta) d\sigma(\zeta) \quad \xi \in X, \eta \in Z.$$

Assumindo que a integral é absolutamente convergente; X, Y, Z subconjuntos de R , $d\sigma(\zeta)$ uma medida σ -finita definida sobre Y .

$M^* \begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_m \\ \eta_1, \dots, \eta_m \end{pmatrix}$ é dado pela seguinte

$$= \frac{1}{m!} \int \dots \int_{\zeta_1 < \dots < \zeta_m, \zeta_i \in Y} K^* \begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_m \\ \zeta_1, \dots, \zeta_m \end{pmatrix} L^* \begin{pmatrix} \zeta_1, \dots, \zeta_m \\ \eta_1, \dots, \eta_m \end{pmatrix} d\sigma(\zeta_1) \dots d\sigma(\zeta_m)$$

Vide [Karlin(1968)pp.99] Lema 1.1.

(a) Se $K(\xi, \zeta)$ é SR_r e $L(\zeta, \eta)$ é SR_s , então, $M(\xi, \eta)$ é $SR_{\min\{r,s\}}$ e $\epsilon_p(M) = \epsilon_p(K)\epsilon_p(L)$, $p = 1, \dots, \min\{r, s\}$.

1.2.22 Definição *Acoplamento* [Sklar (1959), Joe(1997)]

Acoplamento é uma distribuição multivariada com todas suas marginais $U(0, 1)$.

Para um vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ com *f.d.a.* $F_{\underline{X}}$ e com marginais $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$. Um *acoplamento associado* a $F_{\underline{X}}$ é uma função de distribuição acumulada $C_{\underline{X}} : I^n \rightarrow I$, $I = [0, 1]$, de marginais uniformes em $(0, 1)$ e que satisfaz,

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = C_{\underline{X}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)), \quad \forall \underline{x} \in R^n, \quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

1.2.23 Definição *Medida τ de Kendall* [Nelsen (1992), Joe (1997)]

Sejam (X'_1, X'_2) e (X''_1, X''_2) dois pares de vetores aleatórios, ambos com *f.d.a.* F_{X_1, X_2} . Os pares são realizações do vetor (X_1, X_2) . Definimos a medida τ_{X_1, X_2} (τ de Kendall), entre as variáveis X_1 e X_2 por

$$\tau_{X_1, X_2} := P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\} - P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) < 0\}.$$

⁰Os resultados indicados com * são propostas e interpretações próprias deste trabalho. Alguns deles são variações de resultados já existentes na literatura que são devidamente especificados, quando for o caso.

1.3. Resultados essenciais, que caracterizam diferentes tipos de dependências e suas conexões

Apresentamos a seguir um compêndio de resultados que caracterizam os diferentes tipos de dependências. Todos eles estão direcionados, basicamente, para o estudo dos conceitos de variáveis positivamente (negativamente) associadas e MTP_2 (MRR_2).

A partir desta síntese é possível compreender que os conceitos de positividade e negatividade (nos termos expostos até agora) em geral, não são opostos. Além disso a diversidade das “boas” propriedades da positividade, nem sempre é preservada na sua versão negativa.

Os resultados aqui citados são demonstrados de maneira detalhada nos artigos referenciados.

Positividade

1.3.1 Teorema [Teorema 2.1., Karlin e Rinott(1980a)] Sejam f_1, f_2, f_3, f_4 , funções não negativas sobre R^n , satisfazendo,

$$f_1(\underline{x})f_2(\underline{y}) \leq f_3(\underline{x} \vee \underline{y})f_4(\underline{x} \wedge \underline{y}),$$

para todo $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$. Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\underline{x})d\underline{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\underline{x})d\underline{x} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(\underline{x})d\underline{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_4(\underline{x})d\underline{x}.$$

O Teorema anterior possibilita a manipulação dos tipos de dependência TP_2 tanto como a ordem $>_{TP_2}$.

1.3.2 Teorema [Corolário 4.15., Barlow e Proschan(1981)] Se $(X_1, \dots, X_n)$ tem *f.d.p.* TP_2 em pares, então, $\{X_1, \dots, X_n\}$ são *PA*.

Caracterizando a classe das funções MTP_2

1.3.3 Proposição [Proposição 2.1., Karlin e Rinott(1980a)] Seja $f(\underline{x})$ TP_2 em pares para todo $\underline{x} \in R^n$, e suponha que $f(\underline{x})f(\underline{y}) \neq 0$ implica $f(\underline{u})f(\underline{v}) \neq 0 \forall \underline{x}, \underline{y} \in R^n, \underline{x} \wedge \underline{y} \leq \underline{u}, \underline{v} \leq \underline{x} \vee \underline{y}$. Então,

$$f(\underline{x})f(\underline{y}) \leq f(\underline{x} \vee \underline{y})f(\underline{x} \wedge \underline{y}), \forall \underline{x}, \underline{y} \in R^n.$$

1.3.4 Proposição [Proposição 3.6., Karlin e Rinott(1980a)] Se $f(\underline{x})$ é MTP_2 , $\underline{x} \in R^n$ e $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ é uma sequência de funções monótonas concordantes, sobre R . Então

$$\psi(\underline{x}) := f(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n))$$

é MTP_2 em R^n .

1.3.5 Proposição [Proposição 3.3., Karlin e Rinott(1980a)] Se f e g são funções MTP_2 . Então, fg é MTP_2 .

1.3.6 Proposição [Proposição 3.5., Karlin e Rinott(1980a)] Variáveis aleatórias independentes têm densidade conjunta MTP_2 .

1.3.5 implica 1.3.6.

1.3.7 Proposição [Proposição 3.1., Karlin e Rinott(1980a)] Sejam f_1, f_2, f_3, f_4 , funções não negativas sobre R^n , satisfazendo,

$$f_1(\underline{x})f_2(\underline{y}) \leq f_3(\underline{x} \vee \underline{y})f_4(\underline{x} \wedge \underline{y}),$$

para todo $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$. Então $\forall \underline{x}, \underline{y} \in R^k$, tem-se,

$$\varphi_1(\underline{x})\varphi_2(\underline{y}) \leq \varphi_3(\underline{x} \vee \underline{y})\varphi_4(\underline{x} \wedge \underline{y}),$$

onde,

$$\varphi_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) := \int_R \dots \int_R f_i(\underline{x}) dx_{j_{k+1}} \dots dx_{j_n}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

onde $j_1 \leq \dots \leq j_k$, $k < n$, e o conjunto de índices complementares de $\{j_1, \dots, j_k\}$ (respeito de $\{1, \dots, n\}$) é: $\{j_{k+1}, \dots, j_n\}$

1.3.1 implica 1.3.7

1.3.8 Proposição [Proposição 3.2., Karlin e Rinott(1980a)] Seja f uma função MTP_2 sobre R^n . Então, a função marginal φ definida sobre R^k por

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) := \int_R \dots \int_R f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n,$$

é MTP_2 .

1.3.7 implica 1.3.8.

1.3.9 Proposição [Proposição 3.7., Karlin e Rinott(1980a)] Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório de componentes independentes, com densidades marginais f_X, PF_2 . Seja $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ um vetor aleatório com densidade conjunta MTP_2 sobre R^n , e suponha que $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ são independentes. Então, $\underline{X} + \underline{Y}$ tem densidade MTP_2 .

1.3.8 implica 1.3.9.

1.3.10 Proposição [Proposição 3.11., Karlin e Rinott (1980) a] Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias *i.i.d.* cada uma dela com densidade f . Então, a densidade conjunta das estatísticas de ordem $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ é MTP_2 .

Negatividade

Caracterizando a classe das funções MRR_2

1.3.11 Proposição [Proposição, Karlin e Rinott(1980b)] Seja $f(\underline{x})$ RR_2 em pares para todo $\underline{x} \in R^n$, e suponha que $f(\underline{u})f(\underline{v}) \neq 0$ implica em $f(\underline{x}) \neq 0 \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^n, \underline{u} \leq \underline{x} \leq \underline{v}$. Então,

$$f(\underline{x})f(\underline{y}) \geq f(\underline{x} \vee \underline{y})f(\underline{x} \wedge \underline{y}), \forall \underline{x}, \underline{y} \in R^n.$$

1.3.12 Proposição [Proposição, Karlin e Rinott(1980b)] Se $f(\underline{x})$ é MRR_2 , $\underline{x} \in R^n$ e $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ é uma sequência de funções monótonas concordantes, sobre R . Então,

$$\psi(\underline{x}) := f(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n))$$

é MRR_2 em R^n .

1.3.13 Proposição [Proposição, Karlin e Rinott(1980b)] Se f e g são funções MRR_2 . Então, fg é MRR_2 .

1.3.14 Observações

O1 Se f é MRR_2 , $f \neq 0$. Então, $\frac{1}{f}$ é MTP_2 .

O2 Consideremos as aplicações $f : R^n \rightarrow R$, $MRR_2(MTP_2)$ e $g : R \rightarrow R$ tal que $g(xy) = g(x)g(y) \forall x, y \in R$.

(i) Se g é não decrescente. Então, $g \circ f$ é $MRR_2(MTP_2)$.

(ii) Se g é não crescente. Então, $g \circ f$ é $MTP_2(MRR_2)$.

Caracterizando a classe das funções $S-MRR_2$

1.3.15 **Proposição** [Proposição 2.6., Karlin e Rinott(1980b)] Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^m \underline{Z}^{(j)}$ onde $\underline{Z}^{(j)} = (Z_1^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, m$, são vetores independentes; cada um deles com distribuição $S-MRR_2$ em relação à medida de Lebesgue ou à medida de contagem sobre os inteiros. Suponhamos também que as marginais dos $Z_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, são PF_2 . Então, para todo conjunto de funções concordantes e PF_2 , $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$,

$$E\left\{\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)\right\} \leq \prod_{i=1}^n E\{\varphi_i(X_i)\}.$$

1.3.16 Proposição [Proposição 3.1., Karlin e Rinott(1980b)] Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ S - MRR_2 e sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$, onde $X_i = b_i(Y_i)$, $i = 1, \dots, n$, com funções b_i todas crescentes (decrecentes) e côncavas (convexas). Então, para toda seqüência $\{\varphi_\nu\}$ de funções crescentes (decrecentes) e PF_2 , a função h é MRR_2 . Onde

$$h(x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_k}) := \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \prod_{s=1}^{n-k} \varphi_s(x_{j_s}) dx_{j_1} \dots dx_{j_{n-k}},$$

$\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ e $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ são conjuntos complementares, no total de índices $\{1, \dots, n\}$.

Resultado: Uma função ψ não negativa e diferenciável é PF_2 se, e somente se, $\psi\psi'' - (\psi')^2 \geq 0$.

O resultado anterior aplicado a cada $\psi_i = \varphi_i \circ b_{j_i}$ implica 1.3.16, onde φ_i e b_{j_i} são como na hipóteses de 1.3.15 e 1.3.16, respectivamente.

1.3.17 Perda da “mágica ” de 1.3.1 [Karlin e Rinott(1980 a)]:

A condição MRR_2 nem sempre é preservada pela marginalização.

Seja $f(x_1, x_2, x_3) = \exp[-x_3(x_1 + x_2)]$, então f é MRR_2 no domínio $x_i > 0, i = 1, 2, 3$. Mas a marginal

$$\int_0^\infty f(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \frac{1}{(x_1 + x_2)},$$

não é RR_2 [Karlin e Rinott(1980 b)].

1.3.18 Propriedades [Proschan (1983)]

(P1) Toda subcoleção de duas ou mais variáveis aleatórias NA resulta NA .

(P2) Variáveis aleatórias independentes são NA .

(P3) Funções crescentes definidas sobre subcoleções disjuntas de um coleção de variáveis NA , são NA .

(P4) Junção de vetores independentes de variáveis aleatórias NA é NA . Isto é: dados $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ NA e $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ NA , $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ vetores aleatórios independentes. Então, o vetor aleatório $(\underline{X}, \underline{Y})$ é NA .

1.4. Exemplos

O nosso objetivo procurado na apresentação dos seguintes exemplos é o de conhecer as técnicas usadas para determinar negatividade ou positividade, em relação aos conceitos apresentados. Mais ainda, pode-se dizer que em outros exemplos encontrados na literatura, as técnicas empregadas para testar esses tipos de dependências são as mesmas.

Positividade

1.4.1 Exemplo

Normal Multivariada

Seja $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ com distribuição $N_n(\underline{\mu}, \Sigma_1)$,

$$\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \Sigma_1^{-1} = S = (r_{ij})_{i,j=1}^n, \quad -\infty < t_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto, a densidade de $\underline{T}$ é

$$f_{\underline{T}}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n r_{ij}(t_i - \mu_i)(t_j - \mu_j)\right\}.$$

Afirmação

$$f_{\underline{T}} \text{ é } TP_2 \text{ em pares} \Leftrightarrow r_{ij} < 0, \quad i \neq j \Rightarrow \underline{T} \text{ é } PA \text{ e } f_{\underline{T}} \text{ é } MTP_2.$$

Primeiramente verifiquemos que,

$$f_{\underline{T}} \text{ é } TP_2 \text{ em pares} \Leftrightarrow r_{ij} < 0, \forall i \neq j.$$

Prova

$f_{\underline{T}}(\underline{t}) = C_1(\underline{t})C_2(\underline{t})e^{-r_{ij}t_it_j}$. Se fixarmos $t_s, s \neq i, s \neq j (i \neq j)$, podemos obter, C_1 e C_2 independentes de t_i e t_j respectivamente. Como $e^{-r_{ij}t_it_j}$ é TP_2 nas variáveis T_i, T_j se, e somente se, $r_{ij} < 0$. [Barlow e Proschan(1981)]. Logo, temos provada a equivalência.

Por 1.3.2 e 1.3.3,

decorre que o vetor $\underline{T}$ é PA e possui $f.d.p.$ $MT P_2$, respectivamente.

Negatividade

1.4.2 Exemplo

Distribuição Multinomial $M(m, p_1, \dots, p_n)$

$$f(k_1, \dots, k_n)$$

$$= \begin{cases} \binom{m}{k_1, \dots, k_n} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} & \text{se } \sum_{i=1}^n k_i = m \quad 0 \leq k_i, \text{ inteiro} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

A função de densidade de probabilidade da Multinomial é uma função $S-MRR_2$ [Karlin e Rinott(1980 b)].

Prova: a prova da afirmação prévia decorre das seguintes três **Proposições** e do **Teorema**, apresentados seguidamente.

Proposição : Para $n = 2$, $f(k_1, k_2)$ é RR_2 .

Dada f como no exemplo (MRR_2); veremos, como funções PF_2 dão lugar a uma função RR_2 em pares e depois como seqüências de funções PF_2 dão lugar a uma função MRR_2 , resultando f , $S - MRR_2$.

Proposição : Seja a_k , $k \geq 0$, uma seqüência de funções PF_2 nos subíndices k . Então,

$$g(k_2, \dots, k_n) := \sum_{\nu=0}^m a_{\nu} f(\nu, k_2, \dots, k_n)$$

é RR_2 em cada par k_i, k_j , $2 \leq i < j \leq n$, quando as outras variáveis ficam fixas.

A **Proposição** é provada notando que para toda $(n-1)$ -upla fixa, $(k_2, \dots, k_n)$,

$$g(k_2, \dots, k_n) = a_{k_1} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}, \quad k_1 = m - k_2 - \dots - k_n$$

e tendo presente que a condição RR_2 é preservada pelo produto.

Proposição : Seja d_k , $k \geq 0$, uma seqüência de funções PF_2 . Então,

$$g^*(k_3, \dots, k_n) := \sum_{\nu=0}^m d_{\nu} g(\nu, k_3, \dots, k_n)$$

é RR_2 em cada par k_i, k_j , $3 \leq i < j \leq n$, quando as outras variáveis ficam fixas; com g como na **Proposição** anterior.

Isso é provado usando a fórmula da composição [Karlin e Rinott(1963)], citada na

Seção 2.

Teorema: Sejam $\{a_k^{(1)}\}, \dots, \{a_k^{(n-2)}\}, k \geq 0$, seqüências PF_2 . Seja,

$$g(k_{\mu+1}, \dots, k_n) := \sum_{k_\mu} \dots \sum_{k_1} \prod_{j=1}^{\mu} a_{k_j}^{(j)} f(k_1, \dots, k_n) \quad 1 \leq \mu \leq n-2.$$

Onde f é a multinomial. Então, $g(k_{\mu+1}, \dots, k_n)$ é MRR_2 e assim $f(k_1, \dots, k_n)$ resulta $S-MRR_2$.

As primeiras duas **Proposições** são usadas para o caso $\mu = 1$. No entanto, os passos seguidos na prova da **Proposição** anterior completam esta prova.

Afirmção

O vetor aleatório $(K_1, \dots, K_n)$ com distribuição de probabilidade dada pela Multinomial é um vetor NA [Proschan(1983)].

Prova da **Afirmção**:

Considere $\underline{K} = (K_1, \dots, K_n)$ vetor aleatório de um único experimento com distribuição multinomial (i.e. existe um único i tal que $K_i = 1$). Logo,

$$f_{\underline{K}}(k_1, \dots, k_n) = \begin{cases} \frac{p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} & \text{se } \sum_{i=1}^n k_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad 0 \leq k_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Sejam A_1 e A_2 partições disjuntas de $\{1, \dots, n\}$, f_1 e f_2 duas funções crescentes atuando sobre cada conjunto de variáveis aleatórias induzido pelas partições anteriores.

$$Cov\{f_1(k_i, i \in A_1), f_2(k_j, j \in A_2)\} = L_1 + L_2$$

$$L_1 := \text{Cov}\{E(f_1(k_i, i \in A_1)|I), E(f_2(k_j, j \in A_2)|I)\}$$

$$L_2 := E\{\text{Cov}(f_1(k_i, i \in A_1), f_2(k_j, j \in A_2)|I)\},$$

onde I é a variável aleatória indicadora da posição do 1.

Para o caso $n = 2$, é possível usar a equivalência: NA se, e somente se, NOD (cuja prova apresentaremos mais em frente).

Assumamos que, para $n-1$, $\text{Cov}\{f_1(k_i, i \in A_1), f_2(k_j, j \in A_2)\} \leq 0$; logo, a partir do conhecimento da variável I , $L_2 \leq 0$, por hipóteses indutiva. Vamos supor que o valor 1 é admitido em $\{k_i, i \in A_1\}$; então, $E(f_1(k_i, i \in A_1)|I)$ pode tomar, no máximo, $|A_1| < n$ valores diferentes. No entanto, $E(f_2(k_j, j \in A_2)|I) = E(f_2(\mathbb{Q}))$ e como f_1 é crescente, $E(f_1(k_i, i \in A_1)|I)$ e $E(f_2(k_j, j \in A_2)|I)$ tomarão valores discordantes, e aplicando hipóteses indutiva, $L_1 \leq 0$.

Agora, a Multinomial de parâmetros $(m, p_1, \dots, p_n)$, $m > 1$ poderia ser vista como a convolução de m diferentes e independentes Multinomiais de parâmetro $(1, p_1, \dots, p_n)$. Então, a partir de 1.3.18, (P4) [Proschan(1983)] citada previamente,

$$M(m, p_1, \dots, p_n) \text{ é } NA.$$

1.4.3 Exemplo - Processo de Poisson: Um número fixo de bactérias são colocadas numa placa contendo nutrientes que permitem a multiplicação das bactérias. Após alguns dias, onde tínhamos cada bactéria há uma colônia delas. A localização de cada colônia e o número total de bactérias na placa é agora aleatório. A localização das colônias pode ser vista como um subconjunto aleatório de pontos na placa.

Chamemos de K o número total de partículas na placa S e para cada B em S , K_B denota o número de partículas presentes em B . Consistente com isso, $K = K_S$.

Seja m o número fixo, original de partículas, com localização aleatória em S . Se as m partículas são independentes e uniformemente distribuídas sobre um conjunto S de volume finito $|S|$, então, cada partícula tem probabilidade $p = \frac{|B|}{|S|}$ de ficar em B ; conseqüentemente, o número de partículas K_B que estão em B tem distribuição Binomial de parâmetros m e p .

Formalizando, se $\{B_i\}_{i=1}^n$ são subconjuntos disjuntos de S , $S = \bigcup_{i=1}^n B_i$ e $p_i = \frac{|B_i|}{|S|}$, logo $(K_{B_1}, \dots, K_{B_n})$ tem distribuição $M(m, p_1, \dots, p_n)$ e quando $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $\sum_{i=1}^n k_{B_i} = m$

$$P(K_{B_1} = k_{B_1}, \dots, K_{B_n} = k_{B_n}) = \frac{m! p_1^{k_{B_1}} \dots p_n^{k_{B_n}}}{k_{B_1}! \dots k_{B_n}!} = \frac{m!}{|S|^m} \prod_{i=1}^n \frac{|B_i|^{k_{B_i}}}{k_{B_i}!}$$

Vamos supor, agora, que K é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda|S|$ e suponhamos que dado $K = m$, as partículas são independentes e uniformemente distribuídas sobre a placa S . Assim,

$$P(K_{B_1} = k_{B_1}, \dots, K_{B_n} = k_{B_n} | K = m) = \frac{m!}{|S|^m} \prod_{i=1}^n \frac{|B_i|^{k_{B_i}}}{k_{B_i}!}, \text{ indep.}$$

$$\begin{aligned} P(K_{B_1} = k_{B_1}, \dots, K_{B_n} = k_{B_n}, K = m) &= P(K = m) \frac{m!}{|S|^m} \prod_{i=1}^n \frac{|B_i|^{k_{B_i}}}{k_{B_i}!} \\ &= \frac{\lambda^m |S|^m}{m!} e^{-\lambda|S|} \frac{m!}{|S|^m} \prod_{i=1}^n \frac{|B_i|^{k_{B_i}}}{k_{B_i}!} \\ &= \lambda^m e^{-\lambda|S|} \prod_{i=1}^n \frac{|B_i|^{k_{B_i}}}{k_{B_i}!}, \end{aligned}$$

e como $|S| = \sum_{i=1}^n |B_i|$ e $m = \sum_{i=1}^n k_{B_i}$,

$$P(K_{B_1} = k_{B_1}, \dots, K_{B_n} = k_{B_n}) = \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda|B_i|]^{k_{B_i}}}{k_{B_i}!} e^{-\lambda|B_i|},$$

$$\text{se } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n k_{B_i} = m.$$

A partir desse panorama, $K_{B_1}, \dots, K_{B_n}$ são independentes com distribuição Poisson de Parâmetros $\lambda|B_i|$ respectivamente. E ainda, consideremos cada Poisson de parâmetro $\lambda|B_i|$ como função de k_{B_i} e $|B_i|$, assim, cada uma delas, é TP_2 . Logo, as densidades $\text{Poisson}(\lambda|B_i|)$ são densidades PF_2 [Barlow e Proschan(1981) pp.92]. Então, pelo Teorema 2.8 [Proschan(1983)]

$$K_{B_1}, \dots, K_{B_n} \mid \sum_{i=1}^n k_{B_i} = m \text{ são } NA.$$

1.4.4 Exemplo

Normal Multivariada

Seja $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_t)$ com distribuição $N_t(\underline{0}, \Sigma_2)$, onde $\Sigma_2 = \Lambda - \|\alpha_i \alpha_j\|_{i,j=1}^t$ e

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_t), \lambda_i > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, t.$$

Logo,

$$\Sigma_2^{-1} = \Lambda^{-1} + \gamma \|\beta_i \beta_j\|_{i,j=1}^t \text{ com } \gamma = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^t \lambda_i^{-1} \alpha_i^2}.$$

Se

$$\gamma > 0 \text{ ou equivalentemente } \sum_{i=1}^t \lambda_i^{-1} \alpha_i^2 < 1, \text{ a distribuição é } S-MRR_2.$$

Roteiro da prova: Primeiramente, o resultado é provado para o caso $t = 2$, usando para isso a fórmula da composição 1.2.21. Em seguida, os passos propostos para a prova da Multinomial como densidade $S-MRR_2$ [Karlin e Rinott (1980b); Fahmy, Pereira et al.(1982)].

A seguir, apresentamos outros exemplos de aplicações RR_2

1.4.5 Formas Quadráticas Homogêneas :

Exemplo A

$$Q_1 : R^2 \rightarrow R, \quad Q_1(x, y) := x^2 + y^2$$

Parabolóide Positivo Definido ($Q_1(x, y) > 0$ exceto quando $(x, y) = (0, 0)$). Resulta RR_2 quando $x \in [0, +\infty), y \in [0, +\infty)$ ou (excludente), a forma é RR_2 se $x \in (-\infty, 0], y \in (-\infty, 0]$.

Exemplo B

$$Q_2 : R^2 \rightarrow R, \quad Q_2(x, y) := y^2 - x^2$$

Polinômio não Positivo Definido. Resulta RR_2 se $x \in [0, +\infty), y \in (-\infty, 0]$ ou (excludente), a forma é RR_2 se $x \in (-\infty, 0], y \in [0, +\infty)$.

Exemplo C

Se,

$$Q(x, y) := (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + (b + c)xy + dy^2$$

satisfaz a condição C_i , então Q é RR_2 em D_i , domínio em R^2 .

C1: $\text{senal}(ad) = \text{senal}(a(b+c)) = \text{senal}(d(b+c)) = +$. $D_1 = [0, \infty) \times [0, \infty)$.

C2: $\text{senal}(ad) = +$, $\text{senal}(a(b+c)) = \text{senal}(d(b+c)) = -$. $D_2 = (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$.

C3: $\text{senal}(ad) = +$; $b+c=0$. $D_3 = [0, \infty) \times [0, \infty)$.

C4: $\text{senal}(ad) = +$; $b+c=0$. $D_4 = (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$.

C5: $\text{senal}(ad) = -$; $b+c=0$. $D_5 = [0, \infty) \times (-\infty, 0]$.

C6: $\text{senal}(ad) = -$; $b+c=0$. $D_6 = (-\infty, 0] \times [0, \infty)$.

A verificação disto decorre da seguinte afirmação.

Se,

$$ad(y^2 - y'^2)(x'^2 - x^2) \geq 0, \quad a(b+c)(y-y')x'x(x'-x) \geq 0, \quad d(b+c)(x'-x)yy'(y-y') \geq 0,$$

então, Q é RR_2 num domínio de R^2 .

Assim, os **Exemplos A e B** são consequência das condições C_3, C_4 e C_5, C_6 , respectivamente.

Capítulo 2

Propriedades das Dependências Positivas e Negativas

- Seção 2.1: *Conexões entre alguns dos Conceitos de Positividade (Negatividade)*
- Seção 2.2: *Critérios para Examinar um Vetor Aleatório com Respeito à Estrutura de Associação entre suas Variáveis*
- Seção 2.3: *Mistura de Associações: Vetores Aleatórios contendo os dois Tipos de Associações*
- Seção 2.4: *Complementos das Seções 2 e 3*
- Seção 2.5: *Herança da condição PA*

2.1. Conexões entre alguns dos conceitos de positividade (negatividade).

Objetivo

Conhecidas algumas das “conexões” entre os diversos tipos de conceitos de positividade, estabelecer, quando for possível as “conexões” equivalentes entre os conceitos de negatividade.

Positividade

2.1.1 Teorema [Teorema 2.3, Joe(1997)]

$$(a) f.d.p.TP_2 \Rightarrow SI \Rightarrow LTD, RTI;$$

$$(b) LTD \text{ ou } RTI \Rightarrow PA \Rightarrow PQD;$$

$$(c) f.d.p.TP_2 \Rightarrow f.d.a.TP_2 \text{ e função de sobrevivência } TP_2;$$

$$(d) f.d.a.TP_2 \Rightarrow LTD, \text{ e função de sobrevivência } TP_2 \Rightarrow RTI.$$

É possível assegurar as mesmas relações, no caso da dependência negativa?.

Negatividade

A noção de SD representa uma condição de dependência negativa, pois X_2 é menos provável à medida que X_1 cresce, assumindo valores “grandes”.

No entanto, os conceitos de NDS e CDS tentam generalizar o conceito de SD .

RTD e LTI , podem ser enquadrados dentro da dependência negativa. No primeiro conceito, X_2 é menos provável à medida que X_1 atinge valores grandes, ou seja X_2 não poderá atingir valores grandes. O segundo conceito apresenta X_2 como mais provável à medida que X_1 cresce, mas X_2 só pode atingir um certo valor x_2 .

No seguinte Teorema procuramos estabelecer condições equivalentes às presentes no Teorema anterior, dentro do contexto de negatividade.

2.1.2 Teorema*

(a) $f.d.p. RR_2 \Rightarrow SD$;

(b) $NA \Leftrightarrow NQD$;

(c) $f.d.p. RR_2 \Rightarrow f.d.a. RR_2$ e função de sobrevivência RR_2 ;

(d) $f.d.a. RR_2 \Rightarrow LTI$, e função de sobrevivência $RR_2 \Rightarrow RTD$.

Prova de 2.1.2

(a): dados $x < x'$, verificar $P(X_2 > y | X_1 = x) \geq P(X_2 > y | X_1 = x')$ é equivalente a provar que,

$$\int_y^\infty f(x, z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', w) dw \geq \int_y^\infty f(x', z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, w) dw$$

ou

$$\int_y^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, z)f(x', w) - f(x', z)f(x, w)] dw dz \geq 0,$$

onde f é *f.d.p.* conjunta. Agora, sabemos que, se $w \leq z$,

$$f(x, z)f(x', w) - f(x', z)f(x, w) \geq 0,$$

portanto, é válido que,

$$f(x, z)f(x', w) - f(x', z)f(x, w) \geq 0, \quad \forall (z, w) \in (y, \infty] \times (-\infty, y],$$

logo,

$$\int_y^\infty \int_{-\infty}^y [f(x, z)f(x', w) - f(x', z)f(x, w)] dw dz \geq 0.$$

Notemos que

$$\int_y^\infty \int_y^{+\infty} [f(x, z)f(x', w) - f(x', z)f(x, w)] dw dz \geq 0.$$

(b): $\Rightarrow$ direta, desde as definições respectivas.

$\Leftarrow$: provemos a afirmação para funções indicadoras: sejam A e B conjuntos borelianos da reta. Sempre que as funções $I_A(x)$ e $I_B(y)$ sejam concordantes, como X e Y são *NQD*, temos

$$E \{I_A(X)I_B(Y)\} \leq E \{I_A(X)\} E \{I_B(Y)\},$$

como consequência direta, dadas duas coleções de valores não negativos $\{x_i\}_{i=1}^m$, $\{y_j\}_{j=1}^k$ e borelianos da reta $\{A_i\}_{i=1}^m$, $\{B_j\}_{j=1}^k$, respectivamente,

$$E \left\{ \sum_{i=1}^m x_i I_{A_i}(X) \sum_{j=1}^k y_j I_{B_j}(Y) \right\} \leq E \left\{ \sum_{i=1}^m x_i I_{A_i}(X) \right\} E \left\{ \sum_{j=1}^k y_j I_{B_j}(Y) \right\}.$$

Ou seja, a afirmação é válida para o espaço das funções simples.

Consideremos agora duas funções Borel-mensuráveis, monótonas crescentes, não negativas, f e g . Então, existem duas seqüências de funções simples $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$, não negativas, que convergem crescentemente para f e g respectivamente [Teorema 1.5.5. Ash(1972) pp.38]. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona aplicado a f_n , f ; g_n , g ; $f_n g_n$; $f g$, respectivamente, torna válida a afirmação.

Consideremos, por último, duas funções Borel-mensuráveis, monótonas crescentes, f e g . Como $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$ onde f^+ , f^- , g^+ , g^- são funções Borel-mensuráveis, monótonas, não negativas, notar que

$$E \{ f^+(X) g^+(Y) \} \leq E \{ f^+(X) \} E \{ g^+(Y) \},$$

$$E \{ f^-(X) g^-(Y) \} \leq E \{ f^-(X) \} E \{ g^-(Y) \},$$

pois as funções envolvidas são concordantes, $f^+ = f \vee 0$, $g^+ = g \vee 0$,

$$E \{ f^+(X) g^-(Y) \} \geq E \{ f^+(X) \} E \{ g^-(Y) \},$$

$$E \{ f^-(X) g^+(Y) \} \geq E \{ f^-(X) \} E \{ g^+(Y) \},$$

pois as funções envolvidas são discordantes, $f^- = (-f) \vee 0$, $g^- = (-g) \vee 0$. A partir disso se conclui,

$$E \{ f(X) g(Y) \} \leq E \{ f(X) \} E \{ g(Y) \}.$$

Notemos que em geral, $NUOD$ e/ou $NLOD$ não implica em NA [Proschan(1983) pp.289].

(c): Consideremos previamente a seguinte equivalência

$x_1 < y_1, x_2 < y_2$; F , $f.d.a.$ é RR_2 se, e somente se,

$$F(x_1, x_2)F(y_1, y_2) - F(x_1, y_2)F(y_1, x_2) \leq 0$$

se, e somente se,

$$F(x_1, x_2)[F(y_1, y_2) - F(y_1, x_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, x_2)]$$

$$- [F(x_1, y_2) - F(x_1, x_2)][F(y_1, x_2) - F(x_1, x_2)] \leq 0.$$

Agora, por hipótese, temos que,

$$f(s_1, s_2)f(t_1, t_2) - f(s_1, t_2)f(t_1, s_2) \leq 0, \quad s_2 < t_2, s_1 < t_1; f, f.d.p.$$

Dados $x_1 < y_1, x_2 < y_2$.

e considerando, $-\infty \leq s_2 < x_2 < t_2 \leq y_2$ e $-\infty \leq s_1 < x_1 < t_1 \leq y_1$, verifica-se

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{x_1}^{y_1} \int_{x_2}^{y_2} [f(s_1, s_2)f(t_1, t_2) - f(s_1, t_2)f(t_1, s_2)] dt_2 dt_1 ds_2 ds_1 \leq 0,$$

equivalentemente,

$$F(x_1, x_2)[F(y_1, y_2) - F(y_1, x_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, x_2)]$$

$$\leq [F(x_1, y_2) - F(x_1, x_2)][F(y_1, x_2) - F(x_1, x_2)],$$

finalmente, F é RR_2 .

(d):f.d.a. $RR_2 \Rightarrow LTI$:

$$F \text{ é } RR_2, \text{ se, e somente se, } \frac{F(x_1, x_2)}{F(x_1, y_2)} \leq \frac{F(y_1, x_2)}{F(y_1, y_2)}, x_1 < y_1, x_2 < y_2,$$

se consideramos $y_2 \rightarrow +\infty$ a desigualdade anterior fica

$$\frac{F(x_1, x_2)}{F_1(x_1)} \leq \frac{F(y_1, x_2)}{F_1(y_1)},$$

logo, $\frac{F(\cdot, x_2)}{F_1(\cdot)}$ é crescente.

Positividade

2.1.3 Teorema [Teorema 2.4, Joe(1997)pp.27]

(a) Todo subvetor de um vetor aleatório PA é PA ;

(b) $PA \Rightarrow PUOD$ e $PLOD$;

(c) $PDS \Rightarrow PUOD$ e $PLOD$;

(d) $CIS \Rightarrow PA$.

Negatividade

2.1.4 Teorema*

(a) Todo subvetor de um vetor aleatório NA é NA [Joag-Dev e Proschan(1983)pp.288; Kim(1995)pp.852];

(b) $NA \Rightarrow NUOD$ e $NLOD$ [Joag-Dev e Proschan (1983)pp.288];

(c) $NDS \Rightarrow NUOD$ e $NLOD$;

(d) NA não implica em CDS [Joag-Dev e Proschan (1983)pp.291];

(e) $f.d.p \ S-MRR_2 \Rightarrow NUOD$ e $NLOD$ [Karlin e Rinott(1980 b)pp.505].

Prova de 2.1.4:

(c). $NDS \Rightarrow NUOD$:

Dados x_j, x'_j , tal que $x_j > x'_j$, por hipótese temos que

$$P(X_i > x_i, i \neq j | X_j = x_j) \leq P(X_i > x_i, i \neq j | X_j = x'_j),$$

conseqüentemente,

$$\frac{\int_{x_j}^{\infty} P(X_i > x_i, i \neq j | X_j = x) dF_j(x)}{\int_{x_j}^{\infty} dF_j(x)} \leq \frac{\int_{x'_j}^{\infty} P(X_i > x_i, i \neq j | X_j = x) dF_j(x)}{\int_{x'_j}^{\infty} dF_j(x)}.$$

Consideremos $j = 1$ e $x'_j \rightarrow -\infty$, então, a desigualdade anterior fica,

$$P(X_i > x_i, i = 1, \dots, n) \leq P(X_1 > x_1)P(X_i > x_i, i = 2, \dots, n).$$

Em particular, $(X_2, \dots, X_n)$ é *NDS* e podemos aplicar a mesma argumentação, i.e.,

$$P(X_i > x_i, i = 2, \dots, n) \leq P(X_2 > x_2)P(X_i > x_i, i = 3, \dots, n).$$

Assim, progressivamente obtemos *NUOD*.

Um procedimento semelhante prova $NDS \Rightarrow NLOD$.

(e) *f.d.p. S-MRR₂ ⇒ NUOD e NLOD* : para a prova enunciamos e provamos o seguinte Teorema,

2.1.5 Teorema: Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, vetor aleatório tomando valores em R^n , com densidade de probabilidade f , com relação à medida produto $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$, e suponha f , *S-MRR₂*. Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, funções concordantes e *PF₂*, então, para qualquer k tal que $1 \leq k \leq n$,

$$E\left[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)\right] \leq E\left[\prod_{i=1}^k \varphi_i(X_i)\right] E\left[\prod_{i=k+1}^n \varphi_i(X_i)\right],$$

sempre que as esperanças existam.

Prova de 2.1.5:

Considerando o seguinte Lema, desenvolvemos a prova para o caso $n = 2$ ($f(x_1, x_2)$ *RR₂*); conseqüentemente, procedemos por indução em n .

Notação : $dx_i = d\sigma_i(x_i)$.

2.1.6 Lema: Se $f(x_1, x_2)$ é RR_2 e h_1, h_2 são crescentes (ou decrescentes) e absolutamente integráveis com respeito a f , então

$$\int \int h_1(x_1)h_2(x_2)f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \leq \int h_1(x_1)f_1(x_1)dx_1 \int h_2(x_2)f_2(x_2)dx_2$$

onde $f_i(x_i), i = 1, 2$, são as densidades marginais da f .

Prova de 2.1.6:

Fato 1: Se

$$g(x_1, x_2) \text{ é } RR_2 \text{ e } \int g(x_1, x_2)dx_2 \equiv 1,$$

então para qualquer função h , crescente (ou decrescente) a transformada

$$\int h(x_2)g(x_1, x_2)dx_2$$

é decrescente (ou crescente) em x_1 . [Karlin (1968)-pp 22-Proposição 3.1]

Fato 2: Se $t(x)$ é densidade, $s(x)$, transformação crescente, $u(x)$, transformação decrescente em $x \in R$. Então, pela desigualdade de Tchebycheff,

$$\int s(x)u(x)t(x)dx \leq \int s(x)t(x)dx \int u(x)t(x)dx.$$

Seja.

$$u(x_1) := \int h_2(x_2)(f(x_1, x_2)/f_1(x_1))dx_2.$$

A integral do segundo termo é decrescente (ou crescente) em x_1 ; pelo Fato 1.

u é decrescente (ou crescente) em x_1 .

h_1 é crescente (ou decrescente) em x_1 (faz o papel de s no Fato 2).

f_1 , *f.d.p.* (faz o papel de t no Fato 2).

Assim, provamos 2.1.6.

Retomamos a prova de 2.1.5: consideremos a densidade

$$f_2^{*n}(x_2, \dots, x_n) := \int \varphi_1(x_1) f_1^n(x_1, \dots, x_n) dx_1 / \int \varphi_1(x_1) f_1(x_1) dx_1,$$

onde

$$f_i^j(x_i, \dots, x_j) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{j+1} \dots dx_n,$$

para $1 \leq i \leq j \leq n$.

Definamos,

$$E_{f_1}[\varphi_1(X_1)] := \int \varphi_1(x_1) f_1(x_1) dx_1.$$

Aceitemos 2.1.5 válido para o caso $n - 1$. Em seguida, provaremos 2.1.5 para o caso n , usando a hipótese na densidade definida por $f_2^{*n}(x_2, \dots, x_n)$.

Como,

$$E_{f_1^n}[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)] = E_{f_2^{*n}}[\prod_{i=2}^n \varphi_i(X_i)] E_{f_1}[\varphi_1(X_1)],$$

e, por hipótese indutiva, para $2 \leq k \leq n$,

$$E_{f_2^{*n}}[\prod_{i=2}^n \varphi_i(X_i)] \leq E_{f_2^{*n}}[\prod_{i=2}^k \varphi_i(X_i)] E_{f_2^{*n}}[\prod_{i=k+1}^n \varphi_i(X_i)].$$

Logo,

$$E_{f_2^{*n}}[\prod_{i=2}^k \varphi_i(X_i)] = \frac{1}{E_{f_1}[\varphi_1(X_1)]} E_{f_1^n}[\prod_{i=1}^k \varphi_i(X_i)]$$

$$E_{f_2^{*n}}[\prod_{i=k+1}^n \varphi_i(X_i)] = E_{f_1^n}[\prod_{i=k+1}^n \varphi_i(X_i)].$$

Logo,

$$E_{f_1^n}[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)] \leq E_{f_1^n}[\prod_{i=1}^k \varphi_i(X_i)] E_{f_1^n}[\prod_{i=k+1}^n \varphi_i(X_i)]$$

Finalizando com isto a prova de 2.1.5.

2.1.7 Corolário: Sob as condições de 2.1.5 (i.e., φ_i concordantes.)

$$E[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)] \leq \prod_{i=1}^n E[\varphi_i(X_i)].$$

2.1.8 Teorema: Seja $\underline{X}$ $S-MRR_2$, com respeito às funções PF_2 . Sejam φ_i^* funções PF_2 , não necessariamente monótonas, $i = 1, \dots, k$ e sejam φ_i funções PF_2 concordantes, para algum k , tal que $1 \leq k \leq n$. Então, para qualquer $l \geq 1$, tal que $k + l \leq n$,

$$\begin{aligned} & E[\prod_{i=1}^k \varphi_i^*(X_i) \prod_{i=k+1}^n \varphi_i(X_i)] E[\prod_{i=1}^k \varphi_i^*(X_i)] \\ & \leq E[\prod_{i=1}^k \varphi_i^*(X_i) \prod_{i=k+1}^{k+l} \varphi_i(X_i)] E[\prod_{i=1}^k \varphi_i^*(X_i) \prod_{i=k+l+1}^n \varphi_i(X_i)]. \end{aligned}$$

Prova de 2.1.8:

aplicando-se diretamente 2.1.5 à densidade

$$\varphi(x_{k+1}, \dots, x_n) := C^{-1} \int \dots \int \varphi_1^*(x_1) \dots \varphi_k^*(x_k) f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k,$$

onde $C := E[\varphi_1^*(X_1) \dots \varphi_k^*(X_k)]$ [Karlin e Rinott(1980 b),pp505]. Finalizando a prova de 2.1.8.

Assim, a partir de 2.1.5 chegamos na validade de 2.1.8, mas nosso objetivo é provar (e): $f.d.p \ S-MRR_2 \Rightarrow NUOD \text{ e } NLOD$.

Notemos que, como as funções indicadoras de conjuntos na reta, são PF_2 , podemos aplicar 2.1.8. Consideremos,

$$\begin{aligned}\varphi_i^*(X_i) &:= I_{[a_i, b_i]} \quad i = 1, \dots, k, \\ \varphi_j(X_j) &:= I_{(-\infty, b_j]} \quad j = k+1, \dots, k+l, \\ \varphi_s(X_s) &:= I_{(-\infty, b_s]} \quad s = k+l+1, \dots, n.\end{aligned}$$

Logo, por 2.1.8,

$$\begin{aligned}P(a_i \leq X_i \leq b_i, i \in I; X_\nu \geq b_\nu, \nu \in J \cup K)P(a_i \leq X_i \leq b_i, i \in I) \\ \leq P(a_i \leq X_i \leq b_i, i \in I; X_\nu \geq b_\nu, \nu \in J)P(a_i \leq X_i \leq b_i, i \in I; X_\nu \geq b_\nu, \nu \in K).\end{aligned}$$

Na desigualdade anterior pode-se substituir $X_\nu \geq b_\nu$ por $X_\nu \leq b_\nu$, para $\nu \in J \cup K$.

Onde $I = \{1, \dots, k\}$, $J = \{k+1, \dots, k+l\}$, $K = \{k+l+1, \dots, n\}$.

Como consequência, se $a_i = -\infty$, $b_i = +\infty$, $i \in I$,

$$P(X_\nu \geq b_\nu, \nu \in J \cup K) \leq P(X_\nu \geq b_\nu, \nu \in J)P(X_\nu \geq b_\nu, \nu \in K),$$

e progressivamente pode-se concluir que, se $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ tem densidade $S-MRR_2$, então $\underline{X}$ é NOD ($\underline{X}$ é $NUOD$ e $\underline{X}$ é $NLOD$).

$$\begin{aligned}NUOD \quad P(X_i \geq b_i, i = 1, \dots, n) &\leq \prod_{i=1}^n P(X_i \geq b_i) \\ NLOD \quad P(X_i \leq a_i, i = 1, \dots, n) &\leq \prod_{i=1}^n P(X_i \leq a_i)\end{aligned}$$

Concluindo-se finalmente com a prova de (e).

2.1.9 Corolário*

X_1, X_2 têm *f.d.p.* conjunta $RR_2 \Rightarrow X_1$ e X_2 são *NQD* $\Leftrightarrow X_1$ e X_2 são *NA*.

Prova de 2.1.9:

notemos que no caso bivariado temos a equivalência entre os dois conceitos anteriores *NUOD* e *NLOD*, usualmente designado por *NQD*. E *NQD* é equivalente a *NA*, [Joag-Dev, Proschan(1982)] ou ponto (b) de 2.1.2.

Além disso, pelo ponto (e) de 2.1.4 ou por [Karlin e Rinott(1980 b)pp.505], concluímos que *f.d.p.* RR_2 implica *NQD*. Concluindo com a prova de 2.1.9.

Embora no caso bivariado os conceitos de *NUOD* e *NLOD* sejam equivalentes, isso pode não ser verificado quando a dimensão é maior [exemplo em Ebrahimi-Ghosh (1981)].

2.2. Critérios para examinar $(x_1, \dots, x_k)$ com respeito à estrutura de associação entre suas variáveis

Objetivo

Pesquisar em que condições é possível transformar uma estrutura de associação mista (PA e NA em pares) numa estrutura homogênea PA ou (excludente) NA .

Para realizar nosso objetivo, temos presente os seguintes fatos:

♠ Se (X_1, X_2) tem *f.d.p.* f_{X_1, X_2} , TP_2 . Então, X_1 e X_2 são PA [Joe(1997)].

♠ Se (X_1, X_2) tem *f.d.p.* f_{X_1, X_2} , RR_2 . Então, X_1 e X_2 são NA [Karlin e Rinott (1980 b); Proschan(1983)] ou 2.1.9.

Previamente enunciamos resultados e analisamos diversas situações. Em seguida Seção 4 - apresentamos as provas dos mesmos.

2.2.1 Teorema*

Sejam $\underline{X} = (X_1, X_2)$ com *f.d.p.* $f_{\underline{X}}$, RR_2 e $\underline{Y} = \eta(\underline{X})$, onde $\eta(x_1, x_2) = (\eta_1(x_1), \eta_2(x_2))$, com coordenadas η_1, η_2 diferenciáveis inversíveis e discordantes (ou seja, quando uma coordenada cresce a outra decresce). Então, a *f.d.p.* de $\underline{Y}$, $f_{\underline{Y}}$, é TP_2 . Conseqüentemente, $\underline{Y}$ é PA .

2.2.2 Examinemos $(X_1, \dots, X_k)$ com variáveis satisfazendo a condição de *PA* ou *NA em pares*, quando ambas as condições decorrem dos dois primeiros fatos destacados previamente.

Afirmção

Caso 1: Se X_1 é a variável a predizer a partir de $(X_2, \dots, X_k)$ e

$$X_1, X_s \text{ PA}, s \neq j_0, s = 2, \dots, k; \quad X_1, X_{j_0} \text{ NA},$$

podemos construir uma variável $\eta_{j_0}(X_{j_0})$, tal que,

$$X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0}) \text{ PA}, 1 \leq s < j_0; \quad \eta_{j_0}(X_{j_0}), X_s \text{ PA}, j_0 + 1 \leq s \leq k.$$

De modo semelhante,

Caso 2: Se X_{j_0} é a variável a predizer a partir de $(X_1, \dots, X_{j_0-1}, X_{j_0+1}, X_k)$ e

$$X_s, X_{j_0} \text{ NA}, s = 1, \dots, j_0 - 1;$$

$$X_{j_0}, X_t \text{ NA}, t = j_0 + 1, \dots, k;$$

$$X_i, X_j \text{ PA}, i \neq j_0 \neq j, i \neq j,$$

podemos construir $k - 1$ variáveis $\eta_i(X_i)$, $i \neq j_0$, tais que

$$\eta_i(X_i), \eta_j(X_j) \text{ PA}, \forall i, j \neq j_0;$$

$$\eta_i(X_i), X_{j_0} \text{ PA}, i = 1, \dots, j_0 - 1;$$

$$X_{j_0}, \eta_j(X_j) \text{ PA}, j = j_0 + 1, \dots, k.$$

Em ambos casos, X_{j_0} é a variável “responsável” pela negatividade no vetor aleatório.

Notemos que o objetivo, na afirmação prévia é obter uma estrutura *positiva* - esta

estrutura foi mais pesquisada e oferece certas vantagens em relação à estrutura negativa.

Em $(X_1, \dots, X_k)$, X_1 é a variável a predizer

2.2.3 Teorema*

Seja $(X_1, \dots, X_{j_0}, \dots, X_k)$ um vetor aleatório, tal que as densidades marginais $f_{i,j}$ são $TP_2 \forall j \neq j_0, j = 1, \dots, k$; e f_{1,j_0} é RR_2 .

Suponhamos ainda que para $2 \leq s < j_0, j_0 + 1 \leq t \leq k$, as marginais f_{1,s,j_0} e $f_{1,j_0,t}$ verificam:

$$(i) f_{1,s,j_0}(x_1, x_s, x_{j_0}) f_{1,s,j_0}(x'_1, x'_s, x'_{j_0}) \\ \leq f_{1,s,j_0}(x_1 \vee x'_1, x_s \vee x'_s, x_{j_0} \wedge x'_{j_0}) f_{1,s,j_0}(x_1 \wedge x'_1, x_s \wedge x'_s, x_{j_0} \vee x'_{j_0}),$$

$$(ii) f_{1,j_0,t}(x_1, x_{j_0}, x_t) f_{1,j_0,t}(x'_1, x'_{j_0}, x'_t) \\ \leq f_{1,j_0,t}(x_1 \vee x'_1, x_{j_0} \wedge x'_{j_0}, x_t \vee x'_t) f_{1,j_0,t}(x_1 \wedge x'_1, x_{j_0} \vee x'_{j_0}, x_t \wedge x'_t),$$

respectivamente. Nessas condições, se $\eta_{j_0} : R \rightarrow R$ é decrescente, inversível e diferenciável, então

$$(a) (X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})) \text{ tem f.d.p. } f_{X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})}, TP_2, \quad 1 \leq s < j_0$$

$$(b) (\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_t) \text{ tem f.d.p. } f_{\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_t}, TP_2, \quad j_0 + 1 \leq t \leq k$$

Notação:

$$f_{i,j,k}(x_1, x_j, x_k) := f_{X_i, X_j, X_k}(x_1, x_j, x_k), \quad f_{i,j}(x_1, x_j) = f_{X_i, X_j}(x_1, x_j).$$

2.2.4 Corolário* Seja $(X_1, \dots, X_{j_0}, \dots, X_k)$ um vetor aleatório, tal que as densidades marginais $f_{i,j}$ satisfazem,

$$f_{s,j_0} RR_2, \forall 1 \leq s < j_0. \quad f_{j_0,t} RR_2, \forall j_0 < t \leq k, \quad f_{1,j} TP_2, \forall j \neq j_0, j = 1, \dots, k.$$

Nessas condições, se $\eta_{j_0} : R \rightarrow R$ é decrescente, inversível e diferenciável, então

$$(a) (X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})) \text{ tem f.d.p. } f_{X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})}, TP_2, \quad 1 \leq s < j_0$$

$$(b) (\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_t) \text{ tem f.d.p. } f_{\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_t}, TP_2, \quad j_0 + 1 \leq t \leq k.$$

2.2.5 Teorema*

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_{j_0}, \dots, X_k)$ com f.d.p.

$$f_{X_1, \dots, X_{j_0}, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_{j_0}, \dots, x_k) = h(x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_k) K(x_1, x_{j_0}),$$

onde K é RR_2 , e h satisfaz a seguinte condição:

$$(iii) \int h(u, x_{(2)}^{(s-1)}, v, x_{(s+1)}^{(k)}) d(x_{(2)}^{(s-1)}, x_{(s+1)}^{(k)}) \quad \text{é } TP_2 \text{ nas v.a. } X_1, X_s,$$

$$\forall \quad 3 \leq s < j_0 \quad \text{ou} \quad j_0 + 1 \leq s < k - 1$$

$$\int h(u, x_{(2)}^{(k-1)}, v) d(x_{(2)}^{(k-1)}) \quad \text{é } TP_2 \text{ nas v.a. } X_1, X_k.$$

Então,

$$f_{X_1, X_s} \text{ é } TP_2, \quad \forall s \neq j_0, s = 2, \dots, k \text{ e } f_{X_1, X_{j_0}} \text{ é } RR_2.$$

Nesse contexto, se $\eta_{j_0} : R \rightarrow R$ é decrescente, inversível e diferenciável; então,

$$(a) (X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})) \text{ tem f.d.p. } f_{X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})}, TP_2, \quad 1 \leq s < j_0,$$

$$(b) (\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_s) \text{ tem f.d.p. } f_{\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_s}, TP_2, \quad j_0 + 1 \leq s \leq k.$$

Onde $x_{(i)}^{(j)} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$.

2.3. Mistura de associações: Vetores Aleatórios contendo os dois Tipos de Associações

2.3.1 Exemplo

Se (X_1, X_2, X_3, X_4) tem distribuição $N_4(\underline{0}, \Sigma)$, onde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.26 & -0.05 & 0.42 \\ & 3.16 & 0.00 & 1.63 \\ & & 1.58 & 0.00 \\ & & & 2.74 \end{pmatrix},$$

a distribuição de $\underline{X}$ pode ser expressa como produto de uma $N_3(\underline{0}, \Sigma_1^*)$ com uma $N_2(\underline{0}, \Sigma_2^*)$,

$$\text{onde } \Sigma_1^* = \begin{pmatrix} 1.50 & 0.50 & 0.80 \\ & 1.50 & 0.90 \\ & & 1.50 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2^* = \begin{pmatrix} 1.00 & -0.05 \\ & 1.24 \end{pmatrix}$$

e

(X_1, X_2, X_4) tem distribuição $N_3(\underline{0}, \Sigma_1^*)$, MTP_2

(X_1, X_3) tem distribuição $N_2(\underline{0}, \Sigma_2^*)$, RR_2 .

O exemplo anterior motivou a seguinte proposição.

2.3.2 Proposição*

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_{j_0}, \dots, X_k)$ com $f.d.p.$

$$f_{X_1, \dots, X_{j_0}, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_{j_0}, \dots, x_k) = h(x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_k)K(x_1, x_{j_0}),$$

onde K é RR_2 e h é MTP_2 ; então,

$$f_{X_1, X_s} \text{ é } TP_2, \forall s \neq j_0, s = 1, \dots, k \text{ e } f_{X_1, X_{j_0}} \text{ é } RR_2.$$

Nesse contexto, se $\eta_{j_0} : R \rightarrow R$ é decrescente, inversível e diferenciável, então,

$$(a)(X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})) \text{ tem } f.d.p. \quad f_{X_s, \eta_{j_0}(X_{j_0})}, \quad TP_2, \quad 1 \leq s < j_0$$

$$(b)(\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_s) \text{ tem } f.d.p. \quad f_{\eta_{j_0}(X_{j_0}), X_s}, \quad TP_2, \quad j_0 + 1 \leq s \leq k.$$

2.4. Complementos das Seções 2 e 3

A seguir, apresentamos as provas dos resultados anteriores e outros complementares.

2.4.1 Prova: de 2.2.1.

Consideremos $y'_1 \leq y_1$, $y_2 \leq y'_2$. Precisamos verificar

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) f_{\underline{Y}}(y'_1, y'_2) \leq f_{\underline{Y}}(y'_1, y_2) f_{\underline{Y}}(y_1, y'_2)$$

e sendo $y_i = \eta_i(x_i)$, $y'_i = \eta_i(x'_i)$, $i = 1, 2$. A desigualdade a verificar é equivalente a

$$f_{\underline{X}}(\eta_1^{-1}(y_1), \eta_2^{-1}(y'_2)) f_{\underline{X}}(\eta_1^{-1}(y'_1), \eta_2^{-1}(y_2)) \geq f_{\underline{X}}(\eta_1^{-1}(y_1), \eta_2^{-1}(y_2)) f_{\underline{X}}(\eta_1^{-1}(y'_1), \eta_2^{-1}(y'_2))$$

Suponhamos sem perda da generalidade que η_1 é monótona decrescente, inversível e portanto com inversa monótona decrescente; η_2 monótona crescente, inversível e portanto com inversa monótona crescente. Assim, como $y'_1 \leq y_1$ e $y_2 \leq y'_2$,

$$\eta_1^{-1}(y_1) \leq \eta_1^{-1}(y'_1),$$

$$\eta_2^{-1}(y_2) \leq \eta_2^{-1}(y'_2),$$

e, finalmente, como $f_{\underline{X}}$ é RR_2 , temos a desigualdade.

2.4.2 Proposição* Seja $\underline{Y}$ com *f.d.p.* $f_{\underline{Y}}$. $f_{\underline{Y}} MTP_2$ e $f_2 >_{TP_2} f_1$, f_1 monótona crescente não negativas, então, $Cov(f_1(\underline{Y}), f_2(\underline{Y})) \geq 0$.

Prova de 2.4.2:

$$(1) f_{\underline{Y}} MTP_2 \Leftrightarrow f_{\underline{Y}}(\underline{u})f_{\underline{Y}}(\underline{v}) \leq f_{\underline{Y}}(\underline{u} \vee \underline{v})f_{\underline{Y}}(\underline{u} \wedge \underline{v})$$

$$(2) f_2 >_{TP_2} f_1 \Leftrightarrow f_1(\underline{u})f_2(\underline{v}) \leq f_2(\underline{u} \vee \underline{v})f_1(\underline{u} \wedge \underline{v})$$

$$(3) f_1 \text{ monótona crescente} \Rightarrow f_1(\underline{u} \wedge \underline{v}) \leq f_1(\underline{u} \vee \underline{v})$$

a partir de (1)(2) e (3),

$$f_1(\underline{u})f_{\underline{Y}}(\underline{u})f_2(\underline{v})f_{\underline{Y}}(\underline{v}) \leq f_1(\underline{u} \vee \underline{v})f_2(\underline{u} \vee \underline{v})f_{\underline{Y}}(\underline{u} \vee \underline{v})f_{\underline{Y}}(\underline{u} \wedge \underline{v}).$$

Definamos,

$$g_i(\cdot) := f_i(\cdot)f_{\underline{Y}}(\cdot) \quad i = 1, 2,$$

$$g_3(\cdot) := f_{\underline{Y}}(\cdot),$$

$$g_4(\cdot) := f_1(\cdot)f_2(\cdot)f_{\underline{Y}}(\cdot).$$

Temos que,

$$g_1(\underline{u})g_2(\underline{v}) \leq g_3(\underline{u} \wedge \underline{v})g_4(\underline{u} \vee \underline{v}),$$

então, [Karlim e Rinott(1980 a)]permitem garantir a seguinte desigualdade,

$$\int g_1(\underline{y})d\underline{y} \int g_2(\underline{y})d\underline{y} \leq \int g_3(\underline{y})d\underline{y} \int g_4(\underline{y})d\underline{y},$$

equivalentemente,

$$E_{\underline{Y}}(f_1)E_{\underline{Y}}(f_2) \leq E_{\underline{Y}}(f_1f_2),$$

i.e.,

$$Cov(f_1(\underline{Y}), f_2(\underline{Y})) \geq 0.$$

2.4.3 Teorema*

Consideremos $(X_1, \dots, X_4)$ tais que as densidades marginais f_{X_1, X_2} e f_{X_1, X_4} são TP_2 , enquanto que f_{X_1, X_3} é RR_2 .

Se $\eta_3 : R \rightarrow R$ é decrescente, inversível, diferenciável e f_{X_1, X_2, X_3} , f_{X_1, X_3, X_4} verificam.

$$\begin{aligned}
 (i) & f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) f_{X_1, X_2, X_3}(x'_1, x'_2, x'_3) \\
 & \leq f_{X_1, X_2, X_3}(x_1 \vee x'_1, x_2 \vee x'_2, x_3 \wedge x'_3) f_{X_1, X_2, X_3}(x_1 \wedge x'_1, x_2 \wedge x'_2, x_3 \vee x'_3), \\
 (ii) & f_{X_1, X_3, X_4}(x_1, x_3, x_4) f_{X_1, X_3, X_4}(x'_1, x'_3, x'_4) \\
 & \leq f_{X_1, X_3, X_4}(x_1 \vee x'_1, x_3 \wedge x'_3, x_4 \vee x'_4) f_{X_1, X_3, X_4}(x_1 \wedge x'_1, x_3 \vee x'_3, x_4 \wedge x'_4),
 \end{aligned}$$

respectivamente, então,

$$\begin{aligned}
 (a) & (X_1, \eta_3(X_3)) \text{ tem } f.d.p. \quad f_{X_1, \eta_3(X_3)}, TP_2, \\
 (b) & (X_2, \eta_3(X_3)) \text{ tem } f.d.p. \quad f_{X_2, \eta_3(X_3)}, TP_2, \\
 (c) & (\eta_3(X_3), X_4) \text{ tem } f.d.p. \quad f_{\eta_3(X_3), X_4}, TP_2.
 \end{aligned}$$

Prova de 2.4.3:

a prova de (a) decorre de 2.2.1. Como as provas de (b) e (c) são análogas, então provemos

(b) : $f_{X_2, \eta_3(X_3)}$ é TP_2 se, e somente se,

$$\begin{aligned} & f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x_2, \eta_3(x_3)) f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x'_2, \eta_3(x'_3)) \\ & \leq f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x_2 \vee x'_2, \eta_3(x_3) \vee \eta_3(x'_3)) f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x_2 \wedge x'_2, \eta_3(x_3) \wedge \eta_3(x'_3)). \end{aligned}$$

O caso de interesse é quando $x_2 \leq x'_2$, $\eta_3(x'_3) \leq \eta_3(x_3)$ (i.e. $x_3 \leq x'_3$) a desigualdade a verificar fica,

$$f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x_2, \eta_3(x_3)) f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x'_2, \eta_3(x'_3)) \leq f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x'_2, \eta_3(x_3)) f_{X_2, \eta_3(X_3)}(x_2, \eta_3(x'_3)),$$

equivalentemente,

$$f_{X_2, X_3}(x_2, x_3) f_{X_2, X_3}(x'_2, x'_3) \leq f_{X_2, X_3}(x'_2, x_3) f_{X_2, X_3}(x_2, x'_3)$$

ou

$$\begin{aligned} & \int f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 \int f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x'_2, x'_3) dx_1 \\ & \leq \int f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x'_2, x_3) dx_1 \int f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x'_3) dx_1, \end{aligned}$$

e por hipótese,

$$\begin{aligned} (i) & f_{X_1, X_2, X_3}(u, x_2, x_3) f_{X_1, X_2, X_3}(v, x'_2, x'_3) \\ & \leq f_{X_1, X_2, X_3}(u \vee v, x_2 \vee x'_2, x_3 \wedge x'_3) f_{X_1, X_2, X_3}(u \wedge v, x_2 \wedge x'_2, x_3 \vee x'_3), \end{aligned}$$

ou analogamente,

$$f_{X_1, X_2, X_3}(u, x_2, x_3) f_{X_1, X_2, X_3}(v, x'_2, x'_3) \leq f_{X_1, X_2, X_3}(u \vee v, x'_2, x_3) f_{X_1, X_2, X_3}(u \wedge v, x_2, x'_3).$$

Logo, por 1.3.1 vale a desigualdade que envolve as integrais. Assim, resulta (b) :

$$f_{X_2, \eta_3(X_3)} TP_2.$$

Comentário

É possível verificar que as condições (i) e (ii) são compatíveis com as condições seguintes,

$$(X_1, X_2) \text{ com } f.d.p. \ f_{X_1, X_2}, \ TP_2,$$

$$(X_1, X_4) \text{ com } f.d.p. \ f_{X_1, X_4}, \ TP_2,$$

$$(X_1, X_3) \text{ com } f.d.p. \ f_{X_1, X_3}, \ RR_2.$$

2.4.4 Corolário*

Consideremos $(X_1, \dots, X_4)$ tais que f_{X_s, X_3} é RR_2 para $s = 1, 2$, f_{X_3, X_4} é RR_2 , enquanto f_{X_1, X_i} é TP_2 para $i = 2, 4$.

Se $\eta_3 : R \rightarrow R$ é decrescente, inversível e diferenciável, então ,

$$(a)(X_1, \eta_3(X_3)) \text{ tem } f.d.p. \ f_{X_1, \eta_3(X_3)}, \ TP_2,$$

$$(b)(X_2, \eta_3(X_3)) \text{ tem } f.d.p. \ f_{X_2, \eta_3(X_3)}, \ TP_2,$$

$$(c)(\eta_3(X_3), X_4) \text{ tem } f.d.p. \ f_{\eta_3(X_3), X_4}, \ TP_2.$$

Conseqüentemente, vale 2.2.3 e 2.2.4.

Comentário: Podemos dizer que o causante da negatividade no vetor aleatório é a variável $X_3(X_{j_0})$. Assim, ante uma única variável responsável pela megatividade no vetor, podemos obter un vetor aleatório, de estrutura positiva, “equivalente” ao dado inicialmente.

2.4.5 Prova: de 2.2.5.

Precisamos ver que a distribuição verifica as condições (i) e (ii) de 2.2.3, e que f_{X_1, X_s} é $TP_2 \forall s \neq j_0, s = 1, \dots, k$; enquanto que $f_{X_1, X_{j_0}}$ é RR_2 .

Para a última questão, é só lembrar que passo a passo devemos fixar as $k - 2$ variáveis restantes, e que h independe de X_{j_0} .

A partir daí, e tendo presente que η_{j_0} é decrescente, inversível e diferenciável, pode-se concluir a validade de (a). Análogo procedimento para provar (b).

Para provar a validade da condição (i) de 2.2.3, notemos que,

$$f_{X_1, X_s, X_{j_0}}(x_1, x_s, x_{j_0}) = K(x_1, x_{j_0}) \int h(x_1, x_{(2)}^{(s-1)}, x_s, x_{(s+1)}^{(k)}) d(x_{(2)}^{(s-1)}, x_{(s+1)}^{(k)}).$$

Como K é RR_2 ,

$$K(x_1, x_{j_0})K(x'_1, x'_{j_0}) \leq K(x'_1, x_{j_0})K(x_1, x'_{j_0}), \text{ qdo } x_1 \leq x'_1, x_{j_0} \leq x'_{j_0}.$$

Equivalentemente,

$$(1) K(x_1, x_{j_0})K(x'_1, x'_{j_0}) \leq K(x_1 \vee x'_1, x_{j_0} \wedge x'_{j_0})K(x_1 \wedge x'_1, x_{j_0} \vee x'_{j_0}).$$

A hipótese (iii) permite concluir a prova, pois,

$$\begin{aligned} (2) \int h(x_1, x_{(2)}^{(s-1)}, x_s, x_{(s+1)}^{(k)}) d(x_{(2)}^{(s-1)}, x_{(s+1)}^{(k)}) & \int h(x'_1, x_{(2)}^{(s-1)}, x'_s, x_{(s+1)}^{(k)}) d(x_{(2)}^{(s-1)}, x_{(s+1)}^{(k)}) \\ & \leq \int h(x_1 \vee x'_1, x_{(2)}^{(s-1)}, x_s \vee x'_s, x_{(s+1)}^{(k)}) d(x_{(2)}^{(s-1)}, x_{(s+1)}^{(k)}) \\ & \int h(x_1 \wedge x'_1, x_{(2)}^{(s-1)}, x_s \wedge x'_s, x_{(s+1)}^{(k)}) d(x_{(2)}^{(s-1)}, x_{(s+1)}^{(k)}). \end{aligned}$$

Fazendo o produto de (1) e (2) temos que $f_{X_1, X_s, X_{j_0}}$ verifica a condição (i) de 2.2.3, i.e.,

$$\begin{aligned} (i) & f_{X_1, X_s, X_{j_0}}(x_1, x_s, x_{j_0}) f_{X_1, X_s, X_{j_0}}(x'_1, x'_s, x'_{j_0}) \\ & \leq f_{X_1, X_s, X_{j_0}}(x_1 \vee x'_1, x_s \vee x'_s, x_{j_0} \wedge x'_{j_0}) f_{X_1, X_s, X_{j_0}}(x_1 \wedge x'_1, x_s \wedge x'_s, x_{j_0} \vee x'_{j_0}). \end{aligned}$$

Isso completa a prova para $2 \leq s < j_0$, e, com um procedimento análogo tomando $j_0 + 1 \leq t \leq k$, pode-se verificar que f_{X_1, X_{j_0}, X_t} cumpre a condição (ii), de 2.2.3.

Para a prova de 2.3.2 é suficiente notar que como h é MTP_2 , então, verifica-se a condição (iii) de 2.2.5.

As técnicas percorridas, tanto quanto o uso de resultados da natureza de [Karlin e Rinott (1980 a)], são novamente explorados, na seção 2 do apêndice.

2.5. Herança da condição PA

Afirmação

Se temos $(X_1, \dots, X_k)$, $k \geq 3$, vetor aleatório PA , $f : R^{k-1} \rightarrow R$, crescente, então, X_1 e $f(X_2, \dots, X_k)$ são variáveis aleatórias PA .

Apresentamos e provamos alguns resultados presentes em [Barlow e Proschan, Statistical Theory of Reliability and Life Testing (1981)pp.30].

2.5.1 Proposição

$\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ é PA (onde cada variável aleatória não é necessariamente binária) se, e somente se, para todo par de funções binárias e crescentes Γ e Δ ,

$$Cov\{\Gamma(\underline{T}), \Delta(\underline{T})\} \geq 0.$$

A propriedade anterior é verificada a partir dos seguintes exercícios.

2.5.2 Exercício : Sejam S e T variáveis aleatórias com $E(S)$, $E(T)$, $E(ST)$ finitas. Dados s e t valores arbitrários na imagem das variáveis S e T respectivamente, consideremos $X_S(s) := I_{\{S > s\}}$ e $X_T(t) := I_{\{T > t\}}$ como as respectivas funções indicadoras dos conjuntos $\{S > s\}$ e $\{T > t\}$. Então,

$$Cov\{S, T\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Cov\{X_S(s), X_T(t)\} ds dt.$$

2.5.3 Exercício : Se $\underline{T}$ é PA e f, g são funções crescentes, então

$$Cov\{f(\underline{T}), g(\underline{T})\} \geq 0$$

assumindo que a covariância existe.

Prova de 2.5.1

$\Rightarrow$: evidente.

$\Leftarrow$: Notemos que se f e g são funções crescentes arbitrárias, $f(\underline{T})$ e $g(\underline{T})$ são variáveis aleatórias, cujas imagens podem estar em todo R ou num subconjunto dele. Se consideramos as funções $X_{f(\underline{T})}(s)$ e $X_{g(\underline{T})}(t)$, elas são funções crescentes binárias de $\underline{T}$. Definindo,

$$S := f(\underline{T}), \quad T := g(\underline{T}), \quad \Gamma_s(\underline{T}) := X_{f(\underline{T})}(s), \quad \Delta_t(\underline{T}) := X_{g(\underline{T})}(t),$$

como, para cada par de valores fixos s e t as funções Γ_s e Δ_t são funções crescentes e binárias, então,

$$Cov\{\Gamma_s(\underline{T}), \Delta_t(\underline{T})\} \geq 0,$$

por hipótese. Finalmente, pelo Exercício 5.2 resulta

$$Cov\{f(\underline{T}), g(\underline{T})\} \geq 0,$$

para f e g funções crescentes e arbitrárias. Imediatamente - por definição - $\underline{T}$ é PA .

2.5.4 Proposição: Funções crescentes de variáveis aleatórias PA são PA .

Prova: Consideremos $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ um vetor PA , e uma seqüência de m funções crescentes $f_i : R^n \rightarrow R, i = 1, \dots, m$ com $m \neq n$ em geral. Definamos as variáveis aleatórias $S_i := f_i(\underline{T})$, o vetor $\underline{S} := (S_1, \dots, S_m)$ tem coordenadas que em geral são combinação de todas as variáveis aleatórias PA , $\{T_i\}_{i=1}^n$. Sejam $\Gamma, \Delta : R^m \rightarrow R$ funções crescentes, binárias e arbitrárias. Logo,

$$\Gamma(f(\underline{T})) := \Gamma(f_1(\underline{T}), \dots, f_m(\underline{T})) \text{ e}$$

$$\Delta(f(\underline{T})) := \Delta(f_1(\underline{T}), \dots, f_m(\underline{T}))$$

são funções crescentes binárias, como funções de $\underline{T}$. Assim,

$$Cov_{\underline{S}}\{\Gamma(\underline{S}), \Delta(\underline{S})\} = Cov_{\underline{T}}\{\Gamma(f(\underline{T})), \Delta(f(\underline{T}))\} \geq 0,$$

pois, $\underline{T}$ é PA e $\Gamma \circ f, \Delta \circ f$ são crescentes binárias. Portanto, pela arbitrariedade das funções Γ e Δ e a afirmação precedente, temos, $\underline{S}$ PA .

2.5.5 Aplicação

Se (X_1, X_2, X_3) é PA , $f_i : R^3 \rightarrow R, i = 1, 2$, onde $f_1(u, v, w) = u$, $f_2(u, v, w)$ é função crescente de v e w e não depende de u , (com abuso da notação $f_2(u, v, w) = f_2(v, w)$).

Definamos,

$$\underline{S} := (S_1, S_2) = (f_1(X_1, X_2, X_3), f_2(X_1, X_2, X_3)) = (X_1, f_2(X_2, X_3))$$

$\underline{S}$ é PA .

2.5.6 Definição Seja $h : R^2 \rightarrow R$ crescente que envia o par (u, v) num numero real z . Suponhamos que, cada vez que fixamos a primeira coordenada, seja possível definir a aplicação inversa. assim, $h_u^{-1} : R \rightarrow R$ é a aplicação que para cada $z \in R$, $h_u^{-1}(z) = v$, onde $h(u, v) = z$. Suponhamos que exista $\frac{\partial h}{\partial v}$.

2.5.7 Proposição*

Seja $h : R^2 \rightarrow R$ crescente, satisfazendo 2.5.6 . Consideremos o vetor aleatório (X_1, X_2, X_3) tal que (X_1, X_3) é PA ; se

$$f_{X_1, X_3}(x_1, h_{(\cdot)}^{-1}(z)) >_{TP_2(\cdot)} \frac{\partial h}{\partial v}(\cdot, h_{(\cdot)}^{-1}(z)),$$

para todo x_1 na imagem de X_1 e $(\cdot)$ na imagem de X_2 , $z \in R$. Então X_1 e $h(X_2, X_3)$ são PA .

Prova de 2.5.7:

sejam U_1 e U_2 variáveis aleatórias e $\underline{Z}$ vetor aleatório,

$$Cov\{U_1, U_2\} = E\{Cov(U_1, U_2|\underline{Z})\} + Cov\{E(U_1|\underline{Z}), E(U_2|\underline{Z})\} \quad (P_1).$$

lembramos que.

$$Cov\{\psi_1(X), \psi_2(X)\} \geq 0 \quad (P_2)$$

onde X representa qualquer $v.a.$ e ψ_i , $i = 1, 2$ são duas funções monótonas concordantes.

Consideremos $\Gamma, \Delta : R^2 \rightarrow R$ funções crescentes, binárias. Precisamos verificar que,

$$Cov\{\Gamma(X_1, h(X_2, X_3)), \Delta(X_1, h(X_2, X_3))\} \geq 0.$$

e usando 2.5.1 (Barlow et al. (1981)), teríamos X_1 e $h(X_2, X_3)$ PA.

Consideremos em (P_1)

$$U_1 := \Gamma(X_1, h(X_2, X_3)), \quad U_2 := \Delta(X_1, h(X_2, X_3)), \quad \underline{Z} := X_2.$$

Notemos que, para cada $X_2 = x_2$ fixo, as funções

$$\Gamma(X_1, h(x_2, X_3)) \text{ e } \Delta(X_1, h(x_2, X_3))$$

são funções crescentes e binárias de X_1 e X_3 , pois a função h é crescente e Γ, Δ são binárias crescentes. Como (X_1, X_3) é PA, então,

$$Cov\{\Gamma(X_1, h(x_2, X_3)), \Delta(X_1, h(x_2, X_3))\} \geq 0, \quad \forall x_2 \in R \quad (\mathbf{A}).$$

Como por hipótese.

$$f_{X_1, X_3}(x_1, h_{(\cdot)}^{-1}(z)) >_{TP_2(\cdot)} \frac{\partial h}{\partial v}(\cdot, h_{(\cdot)}^{-1}(z)),$$

sejam x_2 e x'_2 na imagem de X_2 tais que $x_2 < x'_2$ temos,

$$f_{X_1, X_3}(x_1, h_{x_2}^{-1}(u)) \frac{\partial h}{\partial x_3}(x'_2, h_{x'_2}^{-1}(u)) \leq f_{X_1, X_3}(x_1, h_{x'_2}^{-1}(u)) \frac{\partial h}{\partial x_3}(x_2, h_{x_2}^{-1}(u))$$

por outra parte. para cada x_2 fixo,

$$\begin{aligned} E(\Gamma(X_1, h(x_2, X_3))) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_1, h(x_2, x_3)) f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) dx_3 dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_1, u) f_{X_1, X_3}(x_1, h_{x_2}^{-1}(u)) \frac{du}{\frac{\partial h(x_2, h_{x_2}^{-1}(u))}{\partial x_3}} dx_1 \end{aligned}$$

onde $u = h(x_2, x_3)$, portanto, $x_3 = h_{x_2}^{-1}(u)$ e $dx_3 = \frac{du}{\frac{\partial h(x_2, h_{x_2}^{-1}(u))}{\partial x_3}}$; pela desigualdade que notamos antes, é possível verificar

$$E(\Gamma(X_1, h(x_2, X_3))) \leq E(\Gamma(X_1, h(x'_2, X_3))) \quad x_2 < x'_2$$

Logo, $E(\Gamma(X_1, h(\cdot, X_3)))$ é uma função crescente na imagem de X_2 . De modo semelhante, $E(\Delta(X_1, h(\cdot, X_3)))$ é uma função crescente na imagem de X_2 . Finalmente, pela propriedade (P_2) , temos,

$$\text{Cov}\{E(\Gamma(X_1, h(X_2, X_3))|X_2), E(\Delta(X_1, h(X_2, X_3))|X_2)\} \geq 0 \quad q.c. \text{ (B)}.$$

Agora, a partir de (A) e (B) conclui-se

$$\text{Cov}\{\Gamma(X_1, h(X_2, X_3)), \Delta(X_1, h(X_2, X_3))\} \geq 0.$$

2.5.8 Exemplo : Seja o vetor (X_1, X_2, X_3) com valores em $[a, b]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ respectivamente, por simplicidade assumimos $a > 0$ e $b > 0$. Onde cada um dos anteriores são intervalos da reta real. Suponhamos que a *f.d.p.* de (X_1, X_3) é dada por $f_{X_1, X_3}(u, v) = cve^{uv}$, se $u \in [a, b]$ e $v \in [2, 3]$, e definida como 0 no caso contrário.

Logo, consideremos $h : R_{>0}^2 \rightarrow R^+$, como $h(x_2, x_3) := x_2^2 + x_3^2$. Notemos que

$$\frac{\partial h}{\partial x_3}(x_2, x_3) = 2x_3; \quad h_{x_2}^{-1}(z) = (z - x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x_2 \text{ fixo.}$$

Além disso, f_{X_1, X_3} é TP_2 e

$$\frac{f_{X_1, X_3}(x, (z - (x'_2)^2)^{\frac{1}{2}})}{(z - (x'_2)^2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{f_{X_1, X_3}(x, (z - x_2^2)^{\frac{1}{2}})}{(z - x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall x_1, \quad x_2 < x'_2$$

equivalentemente

$$f_{X_1, X_3}(x, h_{(\cdot)}^{-1}(z)) >_{TP_2(\cdot)} \frac{\partial h}{\partial x_3}(\cdot, h_{(\cdot)}^{-1}(z)).$$

Capítulo 3

Medidas de Concordância e de Associação

- Seção 3.1: *Medidas de Concordância*
- Seção 3.2: *Medida Adequada de Associação*
- Seção 3.3: *Existência do Acoplamento Associado*
- Seção 3.4: *Comportamento da medida τ de Kendall*

3.1. Medidas de Concordância

Objetivo

Estudo e origem de medidas de concordância bivariada, exemplos e propriedades.

3.1.1 Medidas de Concordância: previamente, apresentamos ideias gerais a respeito de medidas de associação entre duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 . Denotamos por P a probabilidade vinculando X_1 e X_2 .

As medidas da associação são baseadas nas quantidades

$$P\{(X_1 > x_{1,0}, X_2 > x_{2,0})\}, \quad P\{(X_1 \leq x_{1,0}, X_2 \leq x_{2,0})\}$$

[Kruskal, W. (1958)].

As quantidades anteriores podem ser expressas em termos de

$$P\{(X_1 - x_{1,0})(X_2 - x_{2,0}) \geq 0\}.$$

A prévia quantidade é simplesmente a probabilidade de que o desvio de X_1 e X_2 a partir de $x_{1,0}$ e $x_{2,0}$, respectivamente, tenha o mesmo sinal; isto é, que (X_1, X_2) esteja no primeiro e terceiro quadrantes determinados a partir do ponto $(x_{1,0}; x_{2,0}) \in R^2$.

Por exemplo, poderíamos considerar $x_{i,0} := \text{Med}(X_i)$, mediana de X_i , $i = 1, 2$.

Logo definimos

$$\sigma_c := P\{(X_1 - \text{Med}(X_1))(X_2 - \text{Med}(X_2)) \geq 0\}$$

como sendo a probabilidade de que os desvios de X_1 e X_2 a partir de suas respectivas medianas tenham o mesmo sinal. A probabilidade de concordância, de sinal, σ_c toma valores entre 0 e 1 inclusive. Ela é 1 se, e somente se, $X_1 - \text{Med}(X_1)$ e $X_2 - \text{Med}(X_2)$ são ambas não negativas ou ambas negativas com probabilidade 1. As duas condições são mutuamente excludentes. E ela é 0 se, e somente se, $X_1 - \text{Med}(X_1)$ e $X_2 - \text{Med}(X_2)$ têm diferente sinal com probabilidade 1. Se X_1 e X_2 são independentes, $\sigma_c = \frac{1}{2}$, mas a recíproca não é válida, em geral. Consideremos a seguir,

$$\sigma_d := P\{(X_1 - \text{Med}(X_1))(X_2 - \text{Med}(X_2)) < 0\},$$

ou a probabilidade de que o vetor (X_1, X_2) esteja no segundo e quarto quadrantes do sistema de coordenadas de origem em $(\text{Med}(X_1), \text{Med}(X_2))$. Equivalentemente σ_d é a probabilidade de que $X_1 - \text{Med}(X_1)$ e $X_2 - \text{Med}(X_2)$ tenham sinais diferentes. Evidentemente $\sigma_c + \sigma_d = 1$.

Com essas duas probabilidades, é definida uma quantidade natural.

$$\tau_{X_1, X_2}^{\text{Med}(X_1), \text{Med}(X_2)} := \sigma_c - \sigma_d = 2\sigma_c - 1.$$

Notemos que $\tau_{X_1, X_2}^{\text{Med}(X_1), \text{Med}(X_2)} = 1$ se, e somente se, X_1 e X_2 desviam na mesma direção a partir das respectivas medianas. $\tau_{X_1, X_2}^{\text{Med}(X_1), \text{Med}(X_2)} = -1$ se, e somente se, X_1 e X_2 desviam em direções opostas a partir das respectivas medianas. Se X_1 e X_2 são independentes, então, $\tau_{X_1, X_2}^{\text{Med}(X_1), \text{Med}(X_2)} = 0$; mas a recíproca não é sempre válida. Assim, $\tau_{X_1, X_2}^{\text{Med}(X_1), \text{Med}(X_2)}$ define uma medida de concordância cuja imagem é $[-1, 1]$, adquirindo o valor 0 no caso de independência.

O significado da medida anterior talvez possa ser esclarecido com o seguinte exemplo:

Suponhamos que é de nosso interesse estudar a associação entre dois testes de inteligência, quando se submete uma mesma população a ambos os testes. A pontuação nos dois testes corresponde às variáveis aleatórias X_1 e X_2 respectivamente. $\tau_{X_1, X_2}^{Med(X_1), Med(X_2)}$ é uma mensuração de que as pontuações tiradas pela população como resposta aos testes de inteligência tenham um desvio

$$\frac{\tau_{X_1, X_2}^{Med(X_1), Med(X_2)} + 1}{2},$$

na mesma direção, com relação às medianas.

Se agora considerássemos todas as probabilidades possíveis, calculadas para valores arbitrários $(x_{1,0}; x_{2,0})$, isto é $P((X_1 - x_{1,0})(X_2 - x_{2,0}) \geq 0) \forall (x_{1,0}; x_{2,0})$, podemos fabricar outra quantidade, globalmente mais representativa.

$$\pi_c := P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0)$$

e, de forma equivalente,

$$\pi_d := P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0),$$

onde (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) são tomados como dois vetores aleatórios independentes com a mesma distribuição. A saber, π_c é a probabilidade de que duas observações hipotéticas bivariadas, sobre a distribuição bivariada de interesse, sejam *concordantes*. π_d tem um significado semelhante, mas para *discordância*.

É preciso notar que π_c para as variáveis (X_1, X_2) é igual a calcular σ_c para $(X_1 - X'_1, X_2 - X'_2)$, onde, naturalmente, (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) são independentes com a mesma distribuição, e $Med(X_1 - X'_1) = Med(X_2 - X'_2) = 0$.

Assim, a medida de associação baseada nas quantidades π_c e π_d é a medida τ de Kendall. A mesma é definida para o par de variáveis aleatórias X_1, X_2 , como segue,

$$\tau_{X_1, X_2} := \pi_c - \pi_d.$$

Notemos que $\tau_{X_1, X_2} = \tau_{V_1, V_2}^{Med(V_1), Med(V_2)}$, onde $V_1 := X_1 - X'_1$ e $V_2 := X_2 - X'_2$, descritos anteriormente, ou também podemos interpretar o τ_{X_1, X_2} como o coeficiente de correlação entre o $signal(X_1 - X'_1)$ e o $signal(X_2 - X'_2)$. É por isso que muitas vezes o τ de Kendall é chamado “correlação sinal diferença”. Hoeffding chama-o de “covariância sinal diferença” (pois $Var[signal(X_1 - X'_1)] = Var[signal(X_2 - X'_2)]$).

Interpretemos τ como a esperança de ganhar “um dólar”. Suponhamos que as observações (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) estão disponíveis, mas primeiro são revelados os valores de X_1 e X_2 , por algum recurso mecânico. Suponhamos que participamos de um jogo onde predizemos $X_2 < X'_2$ quando $X_1 < X'_1$ e $X_2 > X'_2$ quando $X_1 > X'_1$. Se nossa predição for correta, ganhamos um dólar, caso contrário, perdemos um dólar. Uma vez comunicada a predição, o recurso mecânico revela X_2 e X'_2 , concluindo-se o jogo. Assim, a esperança de ganhar um dólar é τ_{X_1, X_2} .

No exemplo dos testes de inteligência, suponhamos que estamos interessados em conhecer a associação entre ambos os testes de inteligência, para uma população específica. Tomemos aleatoriamente dois indivíduos da população de interesse e

comparemos os resultados dos testes para ambos os indivíduos. π_c é a probabilidade de que o mais inteligente, de acordo com um dos testes, seja também o mais inteligente de acordo com o outro teste. π_d é a probabilidade de que essas ordens difiram. E τ é justamente a diferença entre essas probabilidades.

Outras propriedades [Kruskal, W.(1958); Genest, Ch. e MacKay, J.(1986); Joe, H.(1997)]

$$\spadesuit \quad \tau_{X_1, X_2} = \tau_{X_1 - X'_1, X_2 - X'_2}^{Med(X_1 - X'_1), Med(X_2 - X'_2)}, \quad Med(X_i - X'_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

$\spadesuit \quad \tau_{X_1, X_2} = \rho_{\text{sinal}(X_1 - X'_1), \text{sinal}(X_2 - X'_2)}$ onde (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) são independentes e ambos possuem a mesma *f.d.a.* F_{X_1, X_2} ,

$$\text{var}[\text{sinal}(X_1 - X'_1)] = \text{var}[\text{sinal}(X_2 - X'_2)] = 1.$$

$\spadesuit$ A relação existente entre a medida τ_{X_1, X_2} e o coeficiente de correlação ρ_{U_1, U_2} onde $U_i := F_{X_i}(X_i)$ e F_{X_i} é a *f.d.a.* da variável X_i , contínua, $i = 1, 2$, é a seguinte

$$-1 \leq 3\tau_{X_1, X_2} - 2\rho_{U_1, U_2} \leq 1.$$

$$\spadesuit \quad -1 \leq \tau_{X_1, X_2} \leq 1.$$

3.1.2 Proposição

Sejam (X'_1, X'_2) , (X''_1, X''_2) dois vetores independentes, realizações da mesma distribuição, de marginais acumuladas F_{X_1} e F_{X_2} , contínuas. Então,

(i)

$$\tau_{X_1, X_2} = 2P((X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0) - 1.$$

(ii) Sejam f_1 e f_2 duas aplicações, não decrescentes; $T_i := f_i(X_i)$, $i = 1, 2$;

$$\tau_{T_1, T_2} = \tau_{X_1, X_2}.$$

(iii) $\tau_{X_1, X_2} = -\tau_{X_1, -X_2}$.

(iv) Sejam g_1 e g_2 duas aplicações monótonas discordantes (i.e., uma delas não decrescente e a outra não crescente). $S_i := g_i(X_i)$, $i = 1, 2$;

$$\tau_{X_1, X_2} = -\tau_{S_1, S_2}.$$

Prova de 3.1.2:

(i) : É claro que

$$P((X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0) + P((X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) < 0) = 1,$$

onde (X'_1, X'_2) e (X''_1, X''_2) são dois pares de vetores aleatórios independentes, ambos com *f.d.a.* F_{X_1, X_2} . Logo,

$$\tau_{X_1, X_2} = 2P((X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0) - 1$$

Notemos que em geral, ante a ausência da hipótese das marginais contínuas, a medida τ terá a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\tau_{X_1, X_2} &= 2P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) - P(X'_1 \leq X''_1) \\ &\quad - P(X'_2 \leq X''_2) + 1 + P(X'_1 = X''_1, X'_2 > X''_2) \\ &\quad + P(X'_1 > X''_1, X'_2 = X''_2) \\ &\quad - P(X'_1 > X''_1, X'_2 < X''_2) - P(X'_1 < X''_1, X'_2 > X''_2)\end{aligned}$$

A expressão prévia serve para a implementação do cálculo computacional da medida τ , no caso discreto.

(ii): Definamos

$$\eta_{1,2} := P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\},$$

como as marginais F_{X_i} , $i = 1, 2$ são contínuas,

$$\eta_{1,2} = P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) + P(X'_1 > X''_1, X'_2 > X''_2).$$

Notemos que, como f_1 e f_2 são não decrescentes temos para $i = 1, 2$,

$$\{X'_i \leq X''_i\} \subseteq \{f_i(X'_i) \leq f_i(X''_i)\}, \quad \{f_i(X'_i) < f_i(X''_i)\} \subseteq \{X'_i < X''_i\},$$

$$\{X'_i \geq X''_i\} \subseteq \{f_i(X'_i) \geq f_i(X''_i)\}, \quad \{f_i(X'_i) > f_i(X''_i)\} \subseteq \{X'_i > X''_i\}.$$

Por outro lado pela continuidade das marginais F_{X_1} e F_{X_2} , temos

$$\begin{aligned}P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) &\leq P(f_1(X'_1) \leq f_1(X''_1), f_2(X'_2) \leq f_2(X''_2)) \\ &= P(f_1(X'_1) < f_1(X''_1), f_2(X'_2) < f_2(X''_2)) \\ &\leq P(X'_1 < X''_1, X'_2 < X''_2),\end{aligned}$$

assim,

$$P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) = P(f_1(X'_1) \leq f_1(X''_1), f_2(X'_2) \leq f_2(X''_2)),$$

e similarmente

$$P(X'_1 > X''_1, X'_2 > X''_2) = P(f_1(X'_1) > f_1(X''_1), f_2(X'_2) > f_2(X''_2)),$$

segue que

$$\tau_{X_1, X_2} = \tau_{T_1, T_2}.$$

(iii) : Notemos que

$$\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\} = \{(X'_1 - x''_1)(-X'_2 + X''_2) \leq 0\},$$

como F_{X_1} e F_{X_2} são contínuas, temos

$$P\{(X'_1 - x''_1)(-X'_2 + X''_2) \leq 0\} = P\{(X'_1 - x''_1)(-X'_2 + X''_2) < 0\},$$

assim

$$\tau_{X_1, X_2} = -\tau_{X_1, -X_2}.$$

(iv) : Resulta como consequência de (ii) e (iii).

3.2. Medida Adequada de Associação

Objetivos

- Considerando a medida de concordância τ_{X_1, X_2} de Kendall para o par (X_1, X_2) , dar sua expressão no caso de densidades marginais contínuas e no caso discreto.
- Determinar “quando” a medida de concordância τ de Kendall constitui uma medida de associação, tanto positiva como negativa.
- Fornecer exemplos das diversas situações.

Nesta seção, procuramos uma medida que interprete a condição MTP_2 (MRR_2), no caso bivariado, pois estamos interessados em variáveis aleatórias PA (NA), no caso em que as densidades bivariadas são TP_2 (RR_2); ou seja, densidades conjuntas TP_2 (RR_2) em pares.

A seguir, apresentamos alguns tópicos que permitiram estabelecer as propriedades da medida τ de Kendall, na sua relação com o conceito de associação (positiva ou negativa) e sua conexão com as densidades de marginais contínuas.

O seguinte teorema será de extrema utilidade para o desenvolvimento dinâmico da seção. Encontra-se provado detalhadamente em [Mikusinski et al. (1991)].

3.2.1 Teorema [Fréchet (1951), Mikusinski (1991), Joe (1997) pp.58]

Seja $(X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com função de distribuição acumulada conjunta $F_{X_1, \dots, X_n}$ de marginais univariadas acumuladas, $\{F_{X_i}\}_{i=1}^n$. Então,

$$\max\{0, \sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) - (n-1)\} \leq F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \leq \min\{F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\},$$

$\forall$ n -upla $(x_1, \dots, x_n)$ na imagem do vetor aleatório $(X_1, \dots, X_n)$.

Notemos que, quando as marginais univariadas são uniformes em $(0, 1)$ 3.2.1 fornece limitantes para todos os acoplamentos possíveis. Por exemplo, se $n = 2$

$$\max\{0, x_1 + x_2 - 1\} \leq C_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \leq \min\{x_1, x_2\}, \quad \forall x_i \in [0, 1], i = 1, 2.$$

Vide [Nelsen (1995) e Figura 3.2.2]

Comentário: Notemos que a *f.d.a.* dada pelo $\min\{x_1, x_2\}$ em $[0, 1]^2$ é uma função TP_2 enquanto que a *f.d.a.* dada por $\max\{0, x_1 + x_2 - 1\}$ em $[0, 1]^2$ é RR_2 , e entre essas duas funções encontram-se todas as distribuições em R^2 , cujas marginais são $U(0, 1)$. Que *informação* pode ser tirada respeito das variáveis aleatórias que possuem uma u outra distribuição *extrema*?. Que pode ser dito respeito da medida de associação τ de Kendall?. Todas essas questões serão respondidas no Capítulo 4.

O ponto 3.2.3 apresentado a seguir, terá uma seção (3 deste Capítulo) dedicada ao desenvolvimento da prova.

3.2.3 Teorema [Sklar (1959)]

Seja $(X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com função de distribuição acumulada conjunta $F_{X_1, \dots, X_n}$ de marginais univariadas acumuladas $\{F_{X_i}\}_{i=1}^n$. Então, existe algum acoplamento $C_{X_1, \dots, X_n}$ (*f.d.a.* de marginais univariadas $U(0, 1)$), associado à *f.d.a.* $F_{X_1, \dots, X_n}$.

As duas proposições seguintes são conseqüências das definições envolvidas nelas.

3.2.4 Proposição*

Seja o vetor aleatório (X_1, X_2) com *f.d.a.* conjunta F_{X_1, X_2} e acoplamento associado C_{X_1, X_2} . Então, se C_{X_1, X_2} é $TP_2(RR_2)$ em intervalos, F_{X_1, X_2} é $TP_2(RR_2)$ em intervalos.

3.2.5 Proposição [Joe (1997)]

Seja o vetor aleatório (X_1, X_2) com função de densidade da probabilidade conjunta f_{X_1, X_2} $TP_2(RR_2)$. Então, a função acumulada conjunta F_{X_1, X_2} é $TP_2(RR_2)$, conseqüentemente, F_{X_1, X_2} é $TP_2(RR_2)$ em intervalos.

A seguir, apresentamos 3.2.6 e 3.2.8, que serão provados oportunamente.

figura 3.2.2: Acoplamentos Extremos e Acoplamento de Independência

3.2.6 Proposição Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório, F_{X_1, X_2} sua *f.d.a.* conjunta.

(i) Se as marginais acumuladas univariadas F_{X_1} e F_{X_2} são contínuas, então,

$$\tau_{X_1, X_2} = 4 \int F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - 1.$$

(ii) Se F_{X_1, X_2} for absolutamente contínua, com *f.d.p.* conjunta f_{X_1, X_2} e acoplamento associado C_{X_1, X_2} . Então,

$$\tau_{X_1, X_2} = 4 \int_{[0,1]^2} C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) dC_{X_1, X_2}(u_1, u_2) - 1.$$

Onde, em ambos os casos, τ_{X_1, X_2} denota a medida τ de Kendall para as variáveis X_1 e X_2 .

3.2.7 Definição

Dizemos que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 são $PA(TP_2)$ se a *f.d.p.* conjunta for TP_2 .

Dizemos que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 são $NA(RR_2)$ se a *f.d.p.* conjunta for RR_2 .

3.2.8 Teorema [Nelsen (1992)]

(i) Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias com *f.d.a.* conjunta F_{X_1, X_2} , absolutamente contínua e *f.d.p.* conjunta f_{X_1, X_2} .

Seja T_{X_1, X_2} a média das medidas “locais” da condição $TP_2(RR_2)$, definida por

$$T_{X_1, X_2} := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x'_2} \int_{-\infty}^{x'_1} [f_{X_1, X_2}(x'_1, x'_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - f_{X_1, X_2}(x_1, x'_2) f_{X_1, X_2}(x'_1, x_2)] dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2$$

(implicitamente $-\infty < x_1 < x'_1 < \infty$ e $-\infty < x_2 < x'_2 < \infty$). Então,

$$T_{X_1, X_2} = \frac{\tau_{X_1, X_2}}{2}.$$

Nessas condições, se a *f.d.p.*, f_{X_1, X_2} é $TP_2(RR_2)$, então τ_{X_1, X_2} é uma “medida de associação” $TP_2(RR_2)$, pois τ_{X_1, X_2} é uma média ponderada das medidas “locais” da condição $TP_2(RR_2)$.

(ii) Se a *f.d.a.* F_{X_1, X_2} é $TP_2(RR_2)$ em intervalos, C_{X_1, X_2} é o acoplamento associado à *f.d.a.*. Sejam $\{u_p\}_{p=0}^n$, $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n$ e $\{v_q\}_{q=0}^m$, $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_m$ partições de $I = [0, 1]$, definindo $J_p = [u_{p-1}, u_p]$ e $K_q = [v_{q-1}, v_q]$ temos uma partição de I^2, P , em mn retângulos $J_p \times K_q$. Denotamos por $\|P\|$ a norma de P - norma do ínfimo.

Então, se $1 \leq r < p \leq n$ e $1 \leq s < q \leq m$,

$$C_{X_1, X_2}(J_p, K_q) C_{X_1, X_2}(J_r, K_s) - C_{X_1, X_2}(J_p, K_s) C_{X_1, X_2}(J_r, K_q)$$

representa uma medida “local” da condição $TP_2(RR_2)$ em intervalos. Onde

$$C([u_1, u_2], [v_1, v_2]) := C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1).$$

Se definimos

$$T_{X_1, X_2} := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{p=2}^n \sum_{q=2}^m \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{q-1} [C_{X_1, X_2}(J_p, K_q) C_{X_1, X_2}(J_r, K_s) - C_{X_1, X_2}(J_p, K_s) C_{X_1, X_2}(J_r, K_q)],$$

T_{X_1, X_2} existe e

$$T_{X_1, X_2} = \frac{\tau_{X_1, X_2}}{2},$$

sempre que F_{X_1, X_2} seja absolutamente contínua (para ter

$$\tau_{X_1, X_2} = 4 \int_{I^2} C_{X_1, X_2} dC_{X_1, X_2} - 1.)$$

3.2.9 Observações

(i) Nem sempre a medida de concordância τ representa uma medida de associação $TP_2(RR_2)$.

(ii) Se as marginais acumuladas são contínuas e a densidade (acumulada ou de probabilidade) for da classe $TP_2(RR_2)$, então, escolhemos a τ como medida de associação.

(iii) Se as marginais acumuladas não são contínuas, mas a densidade (acumulada ou de probabilidade), for da classe $TP_2(RR_2)$, então, a medida de associação, no sentido apresentado é a quantidade T , definida em 3.2.8.

Em seguida, desenvolvemos cada um dos tópicos, anteriormente mencionados.

3.3. Existência do Acoplamento Associado

3.3.1 Definição Seja $F_X : R \rightarrow [0, 1]$ a função de distribuição acumulada contínua, da variável aleatória X . Definamos, $\forall u \in (0, 1)$ F_X^{qi} (quase-inversa)

$$F_X^{qi} : (0, 1) \rightarrow R$$

$$u \rightarrow \inf\{x \in R : F_X(x) \geq u\}$$

Notemos que a função anterior está bem definida $\forall u \in (0, 1)$.

Tomemos qualquer valor $u \in (0, 1)$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ e F_X é contínua não decrescente, existe $z_1 \in R$ tal que $F_X(z_1) > u$. Assim, $\{x \in R : F_X(x) \geq u\}$ é não vazio. No entanto, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, existe $z_0 \in R$ tal que $F_X(z_0) < u$, logo, z_0 é limitante inferior de $\{x \in R : F_X(x) \geq u\}$.

Mais geralmente, o conjunto $L := \{x : F_X(x) < u\}$ é um conjunto de limitantes inferiores de $\{x : F_X(x) \geq u\}$. Suponhamos, pois, que exista algum $z \in L$ e algum elemento $x \in \{x : F_X(x) \geq u\}$, tal que $z > x$, então, $F_X(z) \geq F_X(x) \geq u$. Isso levaria a concluir que z não pertence ao L : absurdo.

Finalmente, pelo axioma da completitude de R , $\{x \in R : F_X(x) \geq u\}$ admite ínfimo, qualquer que seja $u \in (0, 1)$.

Por outro lado, $\{x : F_X(x) \geq u\} = F_X^{-1}([u, 1])$, i.e. a preimagem de um intervalo fechado na reta, por uma função contínua F_X . Logo, o ínfimo existente é um mínimo do conjunto.

Cabe destacar que, se F_X é estritamente crescente, a função acima definida F_X^{qi} coincide com a inversa usual.

3.3.2 Lema

Sejam $F_X : R \rightarrow [0, 1]$ uma função de distribuição acumulada contínua e F_X^{qi} a quase-inversa da F_X . Então, $\forall u \in (0, 1)$ e $\forall t \in R$

$$F_X^{qi}(u) \leq t \Leftrightarrow u \leq F_X(t)$$

Prova de 3.3.2:

Consideremos uma sequência não crescente $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq \{x \in R : F_X(x) \geq u\}$, com $x_n \downarrow F_X^{qi}(u)$. Como F_X é contínua à direita, temos $F_X(x_n) \downarrow F_X(F_X^{qi}(u))$; como $u \leq F_X(x_n)$ se conclui que $u \leq F_X(F_X^{qi}(u))$.

$(\Rightarrow)$: $F_X^{qi}(u) \leq t \Rightarrow F_X(F_X^{qi}(u)) \leq F_X(t)$, pois F_X é não decrescente. E, como $u \leq F_X(F_X^{qi}(u))$, temos que $u \leq F_X(t)$.

$(\Leftarrow)$: $u \leq F_X(t) \Rightarrow t \in \{x \in R : F_X(x) \geq u\} \Rightarrow t \geq F_X^{qi}(u)$.

De modo complementar, introduzimos a seguinte definição e o resultado correspondente.

3.3.3 Definição Seja $F_X : R \rightarrow [0, 1]$ a função de distribuição acumulada, da variável aleatória X . Definamos $\forall u \in (0, 1)$, a aplicação F_X^{qiG} (quase-inversa generalizada)

$$F_X^{qiG} : (0, 1) \rightarrow R$$

$$F_X^{qiG}(u) := \begin{cases} \xi_i & \text{se } u \in (F_X(\xi_i^-), F_X(\xi_i^+)] \\ \inf\{x \in R : F_X(x) \geq u\} & \text{se } \begin{cases} u \in (F_X(\xi_i^+), F_X(\xi_{i+1}^-)] \\ u > F_X(\xi_i^+), \forall i \\ u \leq F_X(\xi_i^-), \forall i \end{cases} \end{cases},$$

$\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ pontos de descontinuidade da F_X .

Notação

$$(F_X(\xi_i^+), F_X(\xi_{i+1}^-)] = F_X(\xi_{i+1}^-) \text{ se } F_X(\xi_i^+) = F_X(\xi_{i+1}^-)$$

Notemos que a função anterior está bem definida $\forall u \in (0, 1)$, pois ela coincide bloco a bloco com a quase-inversa da F_X (onde ela poderia ser assim definida, pela continuidade). O conjunto de pontos de descontinuidade da F_X , $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$, no máximo enumerável, determina, na imagem da F_X , intervalos semi-abertos $(F_X(\xi_i^-), F_X(\xi_i^+)]$. Nesses intervalos podemos definir F_X^{qiG} como ξ_i , já que o objetivo é reobter o valor, em R , que foi enviado pela F_X até $F_X(\xi_i)$.

Para esta nova definição da quase-inversa generalizada ainda continua valendo

3.3.2. Para isso, só é preciso provar

$$F_X^{qiG}(u) \leq t \Leftrightarrow u \leq F_X(t), \quad \forall u \in (F_X(\xi_i^-), F_X(\xi_i^+)].$$

Seja $u \in (F_X(\xi_i^-), F_X(\xi_i^+)]$,

$(\Rightarrow) : \xi_i = F_X^{qiG}(u) \leq t \Rightarrow F_X(\xi_i) \leq F_X(t)$, pois F_X é não decrescente; como F_X é contínua pela direita $F_X(\xi_i) = F_X(\xi_i^+)$ e $u \leq F_X(\xi_i^+)$, logo $u \leq F_X(t)$.

$$(\Leftarrow) : u \leq F_X(t) \Rightarrow \begin{cases} \text{se } F_X(t) \in (F_X(\xi_i^-), F_X(\xi_i^+)] & \Rightarrow t \geq \xi_i = F_X^{qiG}(u) \\ \text{se } F_X(t) \in (F_X(\xi_i^+), F_X(\xi_{i+1}^-)] & \Rightarrow (*) \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} t \in \{x \in R : F_X(x) \geq F_X(t)\} \\ \Rightarrow t \geq F_X^{qiG}(F_X(t)) > \xi_i (= F_X^{qiG}(u)) \end{cases}$$

Notemos que, se X é uma variável aleatória com *f.d.a.* F_X , e portanto admite uma quase-inversa generalizada F_X^{qiG} , então

$$P(X \in (F_X^{qiG}(F_X(x)), x]) = F_X(x) - F_X(F_X^{qiG}(F_X(x))) = 0, \forall x \in R,$$

3.3.4 Lema

Seja $F_X : R \rightarrow [0, 1]$ função de distribuição acumulada contínua, da variável aleatória X . Então, $F_X(F_X^{qi}(u)) = u, \forall u \in (0, 1)$ (a quase-inversa é uma inversa à direita).

Prova de 3.3.4:

tomemos $u \in (0, 1)$. Seja $A_{=u} := \{x \in R : F_X(x) = u\}$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e F_X é contínua, $A_{=u} \neq \emptyset$. Se $A_{=u}$ possuir apenas um elemento, digamos x_0 , então $F_X(F_X^{qi}(u)) = F_X(x_0) = u$. Se $A_{=u}$ possuir mais que um elemento, então, sendo F_X não decrescente, $A_{=u}$ será da forma $A_{=u} = [x_1, x_2]$, para

$x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$. Em consequência, $F_X(F_X^{qi}(u)) = F_X(x_1) = u$. Em qualquer um dos dois casos, $F_X(F_X^{qi}(u)) = u$.

Note que $F : R \rightarrow [0, 1]$ é uma função de distribuição acumulada e F^{qiG} , sua inversa generalizada. Então, $F(F^{qiG}(y)) \geq y, \forall y \in (0, 1)$. Na verdade, 3.3.4 é parcialmente válido, a saber, se $y \in (0, 1)$ pode ser expressado como $y = F(x)$ para algum $x \in R$, então $F(F^{qiG}(y)) = y$.

3.3.5 Lema

Seja $F_X : R \rightarrow [0, 1]$ função de distribuição acumulada contínua, da variável aleatória X . Então, a variável aleatória $F_X(X)$ é uniforme em $(0, 1)$.

Prova de 3.3.5:

tomemos $u \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
 P(F_X(X) \leq u) &= P(F_X(X) = u) + P(F_X(X) < u) \\
 &= P(F_X(X) < u) \text{ pois } F_X \text{ é contínua} \\
 &= P(X < F_X^{qi}(u)) \text{ por 3.3.2} \\
 &= F_X(F_X^{qi}(u)) = u \text{ por 3.3.4}
 \end{aligned}$$

Levando em conta 3.3.2 antes provado é possível demonstrar que:

(i) Dado $-M < 0$; supor que $\nexists M_0 \in R$ tal que $F_X(M_0) = 0$; logo, $F_X(-M) > 0$.

Defina $\varepsilon_{-M} := F_X(-M) > 0$. Se $u \leq \varepsilon_{-M} \Rightarrow F_X^{qi}(u) \leq -M$, pela aplicação de 3.3.2, i.e., é possível fazer a função F_X^{qi} arbitrariamente pequena.

Logo, $\lim_{u \rightarrow 0^+} F_X^{qi}(u) = -\infty$, pela arbitrariedade de M .

Defina,

$$F_X^{qi}(0) := -\infty.$$

(ii) Se existir $M_0 \in R$ tal que $F_X(M_0) = 0$. Então, $\forall M \leq M_0$, $F_X(M) = 0$.

Logo, $\{x : F_X(x) = 0\} \neq \emptyset$ e $\inf\{x : F_X(x) \geq 0\} = -\infty$. Mais tarde, podemos estender a definição de F_X^{qi} , designando

$$F_X^{qi}(0) := -\infty.$$

(iii) Dado $M > 0$; suponhamos que $\nexists M_1 \in R$ tal que $F_X(M_1) = 1$; logo, $F_X(M) < 1$ ou equivalentemente, $1 - F_X(M) > 0$.

Definamos $\varepsilon_M := 1 - F_X(M) > 0$. Se $1 - u < \varepsilon_M \Rightarrow F_X^{qi}(u) > M$, pela aplicação de 3.3.2, i.e., é possível fazer a função F_X^{qi} arbitrariamente grande.

Logo, $\lim_{u \rightarrow 1^-} F_X^{qi}(u) = +\infty$, pela arbitrariedade de M .

Definamos

$$F_X^{qi}(1) := +\infty.$$

(iv) Se existir $M_1 \in R$ tal que $F_X(M_1) = 1$. Então, $\{x : F_X(x) = 1\} \neq \emptyset$, e como $\{x : F_X(x) = 1\}$ é limitado inferiormente em R , pois F_X é contínua. Então, pelo axioma da completitude, existe $m := \inf\{x : F_X(x) = 1\}$. E $\forall x, x \geq m, F_X(x) = 1$, i.e., temos um patamar em $[m, +\infty)$.

Definamos

$$F_X^{qi}(1) := m = \inf\{x : F_X(x) = 1\}$$

3.3.6 Definição

$$\begin{aligned} F_X^{qi}(0) &= -\infty \\ F_X^{qi}(1) &= \begin{cases} \inf\{x : F_X(x) = 1\} & \text{se } \exists M : F_X(M) = 1 \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

notemos que F_X^{qi} pode ser estendida continuamente em 0. Mas nem sempre é possível sua extensão contínua em 1.

3.3.7 lema*

Seja F_X , *f.d.a.* contínua, da variável aleatória X . Então, F_X^{qi} é contínua à direita, $\forall u \in (0, 1)$.

Prova de 3.3.7:

sejam, $u \in (0, 1)$ e $\epsilon > 0$, arbitrários. Adotemos $\delta_{u,\epsilon} \leq F_X(\epsilon + F_X^{qi}(u)) - u$. Logo, $\forall v \in (0, 1)$ tal que $v - u < \delta$, então, $F_X^{qi}(v) - F_X^{qi}(u) \leq \epsilon$.

Pois, se $v - u < \delta \Rightarrow v \leq F_X(\epsilon + F_X^{qi}(u))$ se, e somente, se 3.3.2)

$$F_X^{qi}(v) \leq \epsilon + F_X^{qi}(u).$$

Logo, pela arbitrariedade de u e ϵ , temos a continuidade pela direita.

Prova de 3.2.3:

3.3.8 Teorema*

Dado um vetor aleatório n -dimensional $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ com *f.d.a.* $F_{\underline{X}}$ e funções de distribuições marginais contínuas F_{X_i} , a aplicação

$$C_{\underline{X}} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1],$$

definida por

$$C_{\underline{X}}(u_1, \dots, u_n) := F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{qi}(u_1), \dots, F_{X_n}^{qi}(u_n)), \quad (u_1, \dots, u_n) \in I^n, \quad I = [0, 1]$$

é *f.d.a.* de marginais univariadas, uniformes.

Prova de 3.3.8:

previamente é preciso notar que, como as aplicações $F_{X_i}^{qi}$ estão bem definidas, então $F_{\underline{X}}$ pode ser aplicada aos pontos de R^n , da forma $(F_{X_1}^{qi}(u_1), \dots, F_{X_n}^{qi}(u_n))$, onde $u_i \in I$, $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} C_{\underline{X}}(0, u_2, \dots, u_n) &= F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{qi}(0), F_{X_2}^{qi}(u_2), \dots, F_{X_n}^{qi}(u_n)) \\ &= F_{\underline{X}}(-\infty, F_{X_2}^{qi}(u_2), \dots, F_{X_n}^{qi}(u_n)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

enquanto que,

$$\begin{aligned} C_{\underline{X}}(1, \dots, 1) &= F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{qi}(1), \dots, F_{X_n}^{qi}(1)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Decorre das definições previas das $F_{X_i}^{qi}$ nos pontos 0 e 1.

Notemos que $F_{\underline{X}}$ é continua pela direita e as $\{F_{X_i}^{qi}\}_{i=1}^n$, são todas contínuas pela direita (por 3.3.7). Logo, $C_{\underline{X}}$ é contínua pela direita.

Por outro lado, como as $F_{X_i}^{qi}$ são não decrescentes, pois as F_{X_i} são não decrescentes, e como $F_{\underline{X}}$ é *f.d.a.* resulta $C_{\underline{X}}(\underline{X} \in (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) \geq 0$, $a_i \leq b_i$ $i = 1, \dots, n$.

Para demonstrar que as marginais univariadas de $C_{\underline{X}}$ são uniformes $(0, 1)$ precisamos notar que, como as marginais acumuladas univariadas são contínuas, resultam $F_{X_i}(X_i)$ variáveis aleatórias com distribuição $U(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$ (vide 3.3.5).

Nota 1: Como X_i tem *f.d.a.* F_{X_i} contínua, então $P(X_i = u) = 0, \forall u \in R$.

Nota 2: Como $F_{X_i}(X_i)$ é $U(0, 1)$, pois F_{X_i} é contínua, então $P(F_{X_i}(X_i) = u) = 0, \forall u \in (0, 1)$.

Sem perda da generalidade, provemos para $n = 2$, que $C_{\underline{X}}$ tem distribuições marginais uniformes,

$$\begin{aligned}
 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) &= F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{qi}(u_1), F_{X_2}^{qi}(u_2)) \\
 \lim_{u_2 \rightarrow 1} C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) &= \lim_{u_2 \rightarrow 1} F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{qi}(u_1), F_{X_2}^{qi}(u_2)) \\
 &= F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{qi}(u_1), +\infty) \\
 &= P(X_1 \leq F_{X_1}^{qi}(u_1)) \\
 &= u_1, \quad \text{por 3.3.4}
 \end{aligned}$$

A prova do caso $n > 2$ é obtida só com aplicações reiteradas da anterior.

Notemos que, na prova precedente, assumimos a possibilidade de estender $F_{X_i}^{qi}$ no valor 1, como sendo $+\infty$. Mas a prova é semelhante, quando não for o caso.

3.3.9 Proposição* *Identificando o acoplamento associado*

Consideremos a função de distribuição acumulada $C_{\underline{X}}$, definida por

$$C_{\underline{X}}(u_1, \dots, u_n) = F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{qi}(u_1), \dots, F_{X_n}^{qi}(u_n)), \quad (u_1, \dots, u_n) \in I^n;$$

onde $F_{\underline{X}}$ é a *f.d.a.* do vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de marginais acumuladas contínuas $\{F_{X_i}\}_{i=1}^n$. Então, $C_{\underline{X}}$ é a função de distribuição acumulada conjunta, das variáveis aleatórias $F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_n}(X_n)$, i. e.,

$$P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \dots, F_{X_n}(X_n) \leq u_n) = C_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n), \quad (u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n$$

Prova

novamente, resolvamos o caso bivariado, sem perda da generalidade.

$$\begin{aligned} & P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) \leq u_2) \\ &= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) < u_2) + P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) = u_2) \\ &= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) < u_2), \text{ pela Nota 2, } i = 2 \\ &= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, X_2 < F_{X_2}^{qi}(u_2)), \text{ desde 3.3.2 sobre } X_2 \\ &= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, X_2 \leq F_{X_2}^{qi}(u_2)), \text{ pela Nota 1, } i = 2 \\ &= P(X_1 \leq F_{X_1}^{qi}(u_1), X_2 \leq F_{X_2}^{qi}(u_2)), \text{ 3.3.2 e Nota 1,2, } i = 1 \\ &= F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{qi}(u_1), F_{X_2}^{qi}(u_2)) \\ &= C_{X_1, X_2}(u_1, u_2). \end{aligned}$$

3.3.10 Teorema*

Seja $F_{\underline{X}}$ a função de distribuição acumulada do vetor aleatório n -dimensional $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, e $\{F_{X_i}\}_{i=1}^n$ a sequência de distribuições acumuladas marginais, contínuas. Então, a função de distribuição acumulada, de marginais uniformes, $C_{\underline{X}} : I^n \rightarrow I$, $I = [0, 1]$, definida por

$$C_{\underline{X}}(u_1, \dots, u_n) = F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{qi}(u_1), \dots, F_{X_n}^{qi}(u_n)), \quad (u_1, \dots, u_n) \in I^n$$

é o único acoplamento associado a $F_{\underline{X}}$, onde cada $F_{X_i}^{qi}$ foi definida anteriormante.

Prova de 3.3.10:

como já verificamos anteriormente, $C_{\underline{X}}$ constitui uma *f.d.a.* de marginais uniformes $(0, 1)$. Precisamos demonstrar que $C_{\underline{X}}$ é um acoplamento associado. Provaremos isto para $n = 2$, sem perda da generalidade.

Nota 3: Se X é uma variável aleatória com *f.d.a.* contínua F_X , e portanto admite uma quase-inversa F_X^{qi} , verifica-se

$$\begin{aligned} P(X \in (F_X^{qi}(F_X(x)), x]) &= F_X(x) - F_X(F_X^{qi}(F_X(x))) \\ &= 0, \quad \forall x \in R, \end{aligned}$$

é direta consequência de 3.3.4. Percebamos que $F_X^{qi}(F_X(x)) \leq x$, $\forall x \in R$.

Consideremos x_1 e x_2 valores na imagem de X_1 e X_2 respectivamente.

$$C_{X_1..X_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

$$\begin{aligned}
&= F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{qi}(F_{X_1}(x_1)), F_{X_2}^{qi}(F_{X_2}(x_2))), \text{ por definição da } C_{X_1, X_2} \\
&= P(X_1 \leq t, X_2 \leq F_{X_2}^{qi}(F_{X_2}(x_2))), \quad t = F_{X_1}^{qi}(F_{X_1}(x_1)) \\
&= P(X_1 \leq t, X_2 \leq x_2) - P(X_1 \leq t, X_2 \in (F_{X_2}^{qi}(F_{X_2}(x_2)), x_2]) \\
&= P(X_1 \leq t, X_2 \leq x_2), \text{ pela Nota 3 aplicada a } X_2 \\
&= P(X_1 \leq F_{X_1}^{qi}(F_{X_1}(x_1)), X_2 \leq x_2) \\
&= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) - P(X_1 \in (F_{X_1}^{qi}(F_{X_1}(x_1)), x_1], X_2 \leq x_2) \\
&= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2), \text{ pela Nota 3 aplicada a } X_1 \\
&= F_{X_1, X_2}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

A seguir, demonstraremos a unicidade do acoplamento. Sejam $C_{\underline{X}}$ e $C_{\underline{X}}^*$ dois acoplamentos associados a $F_{\underline{X}}$ e consideremos $(u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n$.

Notemos que, como cada uma das F_{X_i} $i = 1, \dots, n$ é contínua, para todo $u_i \in (0, 1)$ existe algum $x_i \in R$ tal que $u_i = F_{X_i}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
C_{\underline{X}}(u_1, \dots, u_n) &= C_{\underline{X}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)), \text{ pois } F_{X_i} \text{ são contínuas} \\
&= F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n), \text{ pois } C_{\underline{X}} \text{ é um acoplamento associado a } F_{\underline{X}} \\
&= C_{\underline{X}}^*(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)), \text{ pois } C_{\underline{X}}^* \text{ é um acop. associado} \\
&= C_{\underline{X}}^*(u_1, \dots, u_n), \text{ pois } u_i = F_{X_i}(x_i).
\end{aligned}$$

3.3.11 Existência do acoplamento associado, caso puramente discreto. [Joe (1997)]

A seguir, apresentamos uma adaptação da prova presente em [Joe (1997)].

Consideremos as variáveis aleatórias discretas $X_1, \dots, X_n$ com valores em $D_1, \dots, D_n$ respectivamente, onde cada D_j é uma sequência consecutiva de inteiros (por simplicidade). Denotemos por i_j os elementos no conjunto D_j . Sejam $F_j(i_j)$ e $f_j(i_j)$ a *f.d.a.* e *f.d.p.* univariadas, respectivamente, para a j -ésima variável. Sejam $P(i_1, \dots, i_n)$ e $p(i_1, \dots, i_n)$ a *f.d.a.* e *f.d.p.* n -variadas, respectivamente. $C_{\underline{X}}$ associado com P precisa satisfazer

$$P(i_1, \dots, i_n) = C_{\underline{X}}(F_1(i_1), \dots, F_n(i_n)), \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in D_1 \times \dots \times D_n.$$

Definimos então, $C_{\underline{X}}$ uniforme no retângulo $\otimes_{1 \leq j \leq n} [F_j(i_j - 1), F_j(i_j)]$ isto é,

$$c_{\underline{X}}(u_1, \dots, u_n) := \begin{cases} \frac{p(i_1, \dots, i_n)}{\prod_{j=1}^n f_j(i_j)} & \text{se, } (u_1, \dots, u_n) \in \otimes_{1 \leq j \leq n} [F_j(i_j - 1), F_j(i_j)], \\ & \text{para algum } (i_1, \dots, i_n) \in D_1 \times \dots \times D_n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é a *f.d.p.* da distribuição acumulada $C_{\underline{X}}$.

A seguir, verificamos que $C_{\underline{X}}$ é um acoplamento associado com P .

Prova de 3.3.11:

provemos para $n = 2$, sem perda da generalidade,

$$P(i_1, i_2) = \sum_{s_1 \in T_{i_1}} \sum_{s_2 \in T_{i_2}} p(s_1, s_2), \quad T_{i_k} := D_k \cap (-\infty, i_k], \quad k = 1, 2$$

Por outro lado, definamos

$$M(u_k) := \{t_k : t_k \in [F_k(i_k - 1), F_k(i_k)], \forall i_k \in D_k, t_k \leq u_k\}, \forall u_k \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} C_{\underline{X}}(u_1, u_2) &= \sum_{t_1 \in M(u_1)} \sum_{t_2 \in M(u_2)} \frac{p(i_1, i_2)}{f_1(i_1)f_2(i_2)} \\ C_{\underline{X}}(F_1(i_1), F_2(i_2)) &= \sum_{t_1 \in M(F_1(i_1))} \sum_{t_2 \in M(F_2(i_2))} \frac{p(s_1, s_2)}{f_1(s_1)f_2(s_2)} \\ &= \sum_{s_1 \in T_{i_1}} f_1(s_1) \sum_{s_2 \in T_{i_2}} f_2(s_2) \frac{p(s_1, s_2)}{f_1(s_1)f_2(s_2)} \\ &= P(i_1, i_2). \end{aligned}$$

Notemos que, considerando a função de distribuição acumulada marginal, a partir do acoplamento, para a primeira variável, ela corresponde a uma $U(0, 1)$, pois,

$$\sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} \frac{p(i_1, \dots, i_n)}{\prod_{j=1}^n f_j(i_j)} f_2(i_2) \cdots f_n(i_n) = [f_1(i_1)]^{-1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) = 1.$$

Logo, generalizando, as marginais do acoplamento associado correspondem a uma $U(0, 1)$.

Os pontos 3.3.8, 3.3.10, 3.3.11 provaram 3.2.3.

A seguir, apresentamos exemplos de acoplamentos associados a uma certa função de distribuição acumulada.

3.3.12 Exemplo

$$F_{X,Y}(x, y) = \exp\{-[e^{-x} + e^{-y} - (e^{\delta x} + e^{\delta y})^{-\frac{1}{\delta}}]\}, \quad -\infty < x, y < +\infty, \delta > 0$$

$$F_X(x) = \exp\{-e^{-x}\}$$

$$F_Y(y) = \exp\{-e^{-y}\}$$

$$F_X^{-1}(u) = -\ln(-\ln(u)), \quad 0 < u < 1$$

$$F_Y^{-1}(v) = -\ln(-\ln(v)), \quad 0 < v < 1$$

logo

$$C_{X,Y}(u, v) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \quad 0 < u, v < 1$$

$$C_{X,Y}(u, v) = uv \exp\{[(-\ln(u))^{-\delta} + (-\ln(v))^{-\delta}]^{-\frac{1}{\delta}}\}$$

que verifica:

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y))$$

Generalizando:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \exp\{-[\sum_{i=1}^n e^{-x_i} - (\sum_{i=1}^n e^{\delta x_i})^{-\frac{1}{\delta}}]\}, \quad -\infty < x_i < +\infty, \delta > 0$$

$$F_{X_i}(x_i) = \exp\{-e^{-x_i}\}$$

$$F_{X_i}^{-1}(u_i) = -\ln(-\ln(u_i)), \quad 0 < u_i < 1$$

$$C_{\underline{X}}(\underline{u}) = \prod_{i=1}^n u_i \exp\{[\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^{-\delta}]^{-\frac{1}{\delta}}\}$$

que verifica:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = C_{\underline{X}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

3.3.13 Exemplo

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - [e^{-\delta x} + e^{-2\delta y} - e^{-\delta(x+2y)}]^{\frac{1}{\delta}}, \quad 0 \leq x, y, \quad 1 \leq \delta$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-x}$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-2y}$$

$$F_X^{-1}(u) = -\ln(1 - u), \quad 0 < u < 1$$

$$F_Y^{-1}(v) = -\frac{1}{2}\ln(1 - v), \quad 0 < v < 1$$

logo

$$C_{X,Y}(u, v) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \quad 0 < u, v < 1$$

$$C_{X,Y}(u, v) = 1 - [(1 - u)^\delta + (1 - v)^\delta - (1 - u)^\delta(1 - v)^\delta]^{\frac{1}{\delta}}$$

que verifica:

$$F_{X,Y}(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y))$$

3.3.14 Exemplo

$$F_{X,Y}(x, y) = \exp\{-(e^{-\delta x} + e^{-\delta y})^{\frac{1}{\delta}}\}, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 1 \leq \delta$$

$$F_X(x) = \exp\{-e^{-x}\}$$

$$F_Y(y) = \exp\{-e^{-y}\}$$

$$F_X^{-1}(u) = -\ln(-\ln(u)), \quad 0 < u < 1$$

$$F_Y^{-1}(v) = -\ln(-\ln(v)), \quad 0 < v < 1$$

logo

$$C_{X,Y}(u, v) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \quad 0 < u, v < 1$$

$$C_{X,Y}(u,v) = \exp\{-(\ln^\delta(\frac{1}{u}) + \ln^\delta(\frac{1}{v}))^{\frac{1}{\delta}}\}$$

que verifica:

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y))$$

Generalizando:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \exp\{-(\sum_{i=1}^n e^{-\delta x_i})^{\frac{1}{\delta}}\}, \quad -\infty < x_i < +\infty, \quad 1 \leq \delta$$

$$F_{X_i}(x_i) = \exp\{-e^{-x_i}\}$$

$$F_{X_i}^{-1}(u_i) = -\ln(-\ln(u_i)), \quad 0 < u_i < 1$$

$$C_{\underline{X}}(\underline{u}) = \exp\{-(\sum_{i=1}^n \ln^\delta(\frac{1}{u_i}))^{\frac{1}{\delta}}\}$$

que verifica:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = C_{\underline{X}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

3.3.15 Exemplo

$$F_{X,Y}(x,y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}, \quad -\infty < x, y < +\infty$$

$$F_X(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

$$F_Y(y) = (1 + e^{-y})^{-1}$$

$$F_X^{-1}(u) = -\ln(\frac{1}{u} - 1), \quad 0 < u < 1$$

$$F_Y^{-1}(v) = -\ln(\frac{1}{v} - 1), \quad 0 < v < 1$$

logo

$$C_{X,Y}(u,v) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \quad 0 < u, v < 1$$

$$C_{X,Y}(u,v) = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1\right)^{-1}$$

que verifica:

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y))$$

Generalizando:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^n e^{-x_i}\right)^{-1}, \quad -\infty < x_i < +\infty$$

$$F_{X_i}(x_i) = (1 + e^{-x_i})^{-1}$$

$$F_{X_i}^{-1}(u_i) = -\ln\left(\frac{1}{u_i} - 1\right), \quad 0 < u_i < 1$$

$$C_{\underline{X}}(\underline{u}) = \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}\right) - (n-1)\right)^{-1}$$

que verifica:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = C_{\underline{X}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

3.3.16 Exemplo

$$F_{X,Y}(x,y) = (1 + x^{-\eta} + y^{-\eta})^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \eta > 0, \theta > 0, 0 < x, y < +\infty$$

$$F_X(x) = (1 + x^{-\eta})^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$F_Y(y) = (1 + y^{-\eta})^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$F_X^{-1}(u) = (u^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\eta}}, \quad 0 < u < 1$$

$$F_Y^{-1}(v) = (v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\eta}}, \quad 0 < v < 1$$

$$C_{X,Y}(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

que satisfaz

$$F_{X,Y}(x,y) = C_{X,Y}(F_X(x), F_Y(y))$$

3.3.17 Exemplo (discreto)

Assumamos a notação dos acoplamentos no caso puramente discreto.

Suponhamos que $D_1 := \{0, 1\}$ e $D_2 := \{0, 1\}$ são os domínios respectivos das variáveis X e Y .

Tabela 1: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/4	1/8	3/8
1	3/8	1/4	5/8
$f_1(\cdot)$	5/8	3/8	1

As probabilidades pontuais fornecidas pela Tabela 1 correspondem a variáveis aleatórias X e Y não independentes (consideremos $x = 0$, $y = 1$).

Tabela 2: $P(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$F_2(\cdot)$
0	1/4	3/8	3/8
1	5/8	1	1
$F_1(\cdot)$	5/8	1	1

Tabela 3: $p(x, y)/(f_1(x)f_2(y))$

$Y \setminus X$	0	1
0	64/60	8/9
1	24/25	64/60

A seguir, fabricamos a densidade do acoplamento associado, na partição fornecida pela imagem da *f.d.a.* F_1 , para o eixo x ; pela imagem da *f.d.a.* F_2 , para o eixo y .
A saber,

$$F_1(-1) = F_2(-1) = 0$$

$$F_1(0) = 5/8$$

$$F_2(0) = 3/8$$

$$F_1(1) = F_2(1) = 1$$

A seguir, apresentamos a densidade c do acoplamento C

$$c(u, v) = \begin{cases} 64/60 & \text{se } u \in [0, 5/8), \quad v \in [0, 3/8) \\ 8/9 & \text{se } u \in [5/8, 1), \quad v \in [0, 3/8) \\ 24/25 & \text{se } u \in [0, 5/8), \quad v \in [3/8, 1) \\ 64/60 & \text{se } u \in [5/8, 1), \quad v \in [3/8, 1), \end{cases}$$

c é definida como 0 no caso contrário. Vemos que a anterior tem marginais uniformes.

Seja $k(x, y) = p(x, y)/(f_1(x)f_2(y))$,

se $u \in [F_1(-1), F_1(0))$,

$$k(0, 0)\frac{3}{8} + k(0, 1)\frac{5}{8} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1,$$

onde $Pr(v \in [F_2(-1), F_2(0))) = 3/8$; $Pr(v \in [F_2(0), F_2(1))) = 5/8$.

Se $u \in [F_1(0), F_1(1)]$,

$$k(1, 0) \frac{3}{8} + k(1, 1) \frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Logo, para a primeira variável,

$$C(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in [0, 1] \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$

O mesmo acontece com a segunda variável.

A partir da densidade prévia, podemos obter a *f.d.a.* C , acoplamento associado da P original.

$$C(u, v) = \begin{cases} \frac{16}{15}uv & \text{se } u \in [0, 5/8), v \in [0, 3/8) \\ \frac{1}{25}u + \frac{24}{25}uv & \text{se } u \in [5/8, 1), v \in [0, 3/8) \\ \frac{1}{9}v + \frac{8}{9}uv & \text{se } u \in [0, 5/8), v \in [3/8, 1) \\ \frac{1}{15}\{1 - u - v\} + \frac{64}{60}uv & \text{se } u \in [5/8, 1), v \in [3/8, 1) \end{cases}$$

Tabela 4: $C(F_1(x), F_2(y))$

Y \ X	0	1
0	1/4	3/8
1	5/8	1

Como as tabelas 2 e 4 são as mesmas, C é acoplamento associado a P .

3.3.18 Exemplo (discreto)

Suponhamos que $D_1 = \{0, 1, 2\}$ e $D_2 = \{0, 1\}$ são os domínios respectivos das variáveis X e Y .

Tabela 1: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	2	$f_2(\cdot)$
0	.15	.19	.15	.49
1	.12	.21	.18	.51
$f_1(\cdot)$	.27	.40	.33	1

Tabela 2: $P(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	2	$F_2(\cdot)$
0	.15	.34	.49	.49
1	.27	.67	1	1
$F_1(\cdot)$	.27	.67	1	1

Tabela 3: $p(x, y)/(f_1(x)f_2(y))$

Y \ X	0	1	2
0	1.13	.97	.93
1	.87	1.03	1.07

A seguir, fabricamos a densidade do acoplamento associado, na partição fornecida pela imagem da *f.d.a.* F_1 , para o eixo x ; pela imagem da *f.d.a.* F_2 , para o eixo y . A saber,

A seguir, apresentamos a densidade c do acoplamento C

$$c(u, v) = \begin{cases} 1.13 & \text{se } u \in [0, .27), \quad v \in [0, .49) \\ .87 & \text{se } u \in [0, .27), \quad v \in [.49, 1] \\ .97 & \text{se } u \in [.27, .67), \quad v \in [0, .49) \\ 1.03 & \text{se } u \in [.27, .67), \quad v \in [.49, 1] \\ .93 & \text{se } u \in [.67, 1], \quad v \in [0, .49) \\ 1.07 & \text{se } u \in [.67, 1], \quad v \in [.49, 1] \end{cases}$$

c é definida como 0 no caso contrário.

A partir da densidade prévia, podemos obter a *f.d.a.* C , acoplamento associado da P original.

$$C(u, v) = \begin{cases} 1.13uv & \text{se } u \in [0, .27), \quad v \in [0, .49) \\ -.13u + .87uv & \text{se } u \in [0, .27), \quad v \in [.49, 1] \\ .04v + .97uv & \text{se } u \in [.27, .67), \quad v \in [0, .49) \\ .04 - .03u - .04v + 1.03uv & \text{se } u \in [.27, .67), \quad v \in [.49, 1] \\ .07v + .93uv & \text{se } u \in [.67, 1], \quad v \in [0, .49) \\ .07 - .07u - .07v + 1.07uv & \text{se } u \in [.67, 1], \quad v \in [.49, 1] \end{cases}$$

Tabela 4: $C(F_1(x), F_2(y))$

Y \ X	0	1	2
0	.15	.34	.49
1	.27	.67	1

Como as tabelas 2 e 4 são iguais, C é acoplamento associado a P .

Densidade acumulada, seu acoplamento e a condição $TP_2(RR_2)$

É preciso fazer um comentário deste tópico, que consolida a importância do estudo dos Núcleos Positivos, que correspondem à generalização das transformações TP_2 ou RR_2 [Karlin (1968)].

3.3.19 Definição

Uma função $K : R^2 \rightarrow R$ é *Sinal-Regular de ordem r* (SR_r) se existe uma seqüência de números $\{\epsilon_m\}_m$, onde $\epsilon_m \in \{-1, +1\}$ tais que,

$$\epsilon_m K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq m \leq r;$$

dizemos que é *Sinal-Regular de Ordem r Estrita* (SSR_r) quando a desigualdade anterior é estrita.

Seja $\epsilon_m(K) := \epsilon_m$, sinal (constante) do determinante da m -ésima ordem, na desigualdade anterior.

No caso em que $\epsilon_m = (-1)^{m(m-1)/2}$, dizemos que K é *Sinal-Regra Reversa de Ordem r* (RR_r).

3.3.20 Teorema [Karlin(1968)]

Sejam $K : R^2 \rightarrow R$ uma aplicação SR_r sobre R^2 , φ, ψ duas aplicações de R em R , que preservam o mesmo sinal (constante) em R . Então,

$$(a) \quad L(x_1, x_2) := \varphi(x_1)\psi(x_2)K(x_1, x_2) \quad \text{é } SR_r.$$

$$(b) \quad \text{Se } \varphi^{-1} \text{ e } \psi^{-1} \text{ são aplicações estritamente crescentes,}$$

$$L(u, v) := K[\varphi(u), \psi(v)], \quad u \in R, v \in R,$$

é uma função SR_r e $\epsilon_m(K) = \epsilon_m(L)$ para $m = 1, \dots, r$.

Se φ é estritamente crescente e ψ estritamente decrescente, então

$$L(u, v) \text{ é } SR_r \text{ e } \epsilon_m(K) = (-1)^{m(m-1)/2} \epsilon_m(L) \text{ para } m = 1, \dots, r.$$

A seguir, apresentamos uma adaptação da prova de (b), presente em [Karlin(1968)].

$$\begin{aligned} \epsilon_m L \begin{pmatrix} u_1, u_2, \dots, u_m \\ v_1, v_2, \dots, v_m \end{pmatrix} &= \epsilon_m \begin{vmatrix} L(u_1, v_1) & L(u_1, v_2) \cdots L(u_1, v_m) \\ L(u_2, v_1) & L(u_2, v_2) \cdots L(u_2, v_m) \\ \vdots & \vdots \\ L(u_m, v_1) & L(u_m, v_2) \cdots L(u_m, v_m) \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_m \begin{vmatrix} K(\varphi(u_1), \psi(v_1)) & K(\varphi(u_1), \psi(v_2)) \cdots K(\varphi(u_1), \psi(v_m)) \\ K(\varphi(u_2), \psi(v_1)) & K(\varphi(u_2), \psi(v_2)) \cdots K(\varphi(u_2), \psi(v_m)) \\ \vdots & \vdots \\ K(\varphi(u_m), \psi(v_1)) & K(\varphi(u_m), \psi(v_2)) \cdots K(\varphi(u_m), \psi(v_m)) \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_m K \begin{pmatrix} \varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_m) \\ \psi(v_1), \psi(v_2), \dots, \psi(v_m) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \epsilon_m K \left(\begin{array}{c} p_1, p_2, \dots, p_m \\ q_1, q_2, \dots, q_m \end{array} \right) \geq 0$$

sempre que $p_i := \varphi(u_i)$ e $q_i := \psi(v_i)$, $i = 1, \dots, m$,

pois $u_1 < u_2 < \dots < u_m$, $v_1 < v_2 < \dots < v_m$ e φ^{-1} , ψ^{-1} são aplicações estritamente crescentes. Como K é SR_r conclui-se a última desigualdade.

3.3.21 Aplicação da existência do acoplamento

Seja $F_{\underline{X}}$ f.d.a. do vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, X_2)$ com marginais acumuladas F_{X_1} e F_{X_2} , e suponhamos que existem $F_{X_1}^{-1}$ e $F_{X_2}^{-1}$, respectivamente. Então, existe um único acoplamento associado $C_{\underline{X}}$ tal que,

$$F_{\underline{X}}(x_1, x_2) = C_{\underline{X}}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Logo, se $C_{\underline{X}}$ é SR_r então, $F_{\underline{X}}$ é SR_r .

Comentário: Se consideramos como mais simples a análise feita sobre distribuições em R^2 de marginais uniformes em $(0, 1)$, então, pela aplicação anterior resultará mais simples identificar a presença de propriedades vinculadas com TP_2 e RR_2 , desde os acoplamentos associados que a partir da própria distribuição considerada.

3.4. Comportamento da medida τ -Kendall

Nesta Seção vamos apresentar as provas de 3.2.6 e 3.2.8 [Nelsen (1992)].

Lembremos a seguir os resultados obtidos.

Sejam (X'_1, X'_2) e (X''_1, X''_2) dois pares de vetores aleatórios independentes, ambos com *f.d.a.* F_{X_1, X_2} .

Se as marginais acumuladas F_{X_1} e F_{X_2} são contínuas, então

$$\tau_{X_1, X_2} = 2P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\} - 1.$$

Em geral, ante a ausência da hipótese das marginais contínuas, a medida τ terá a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \tau_{X_1, X_2} = & 2P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) - P(X'_1 \leq X''_1) \\ & - P(X'_2 \leq X''_2) + 1 + P(X'_1 = X''_1, X'_2 > X''_2) \\ & + P(X'_1 > X''_1, X'_2 = X''_2) \\ & - P(X'_1 > X''_1, X'_2 < X''_2) - P(X'_1 < X''_1, X'_2 > X''_2), \end{aligned}$$

esta última expressão facilita o cálculo computacional da medida, no caso discreto.

3.4.1 Prova de 3.2.6:

(i) :

$$\begin{aligned} P(X'_1 > X''_1, X'_2 > X''_2) &= P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) \\ &\quad - P(X'_1 \leq X''_1) - P(X'_2 \leq X''_2) + 1, \end{aligned}$$

e como as F_{X_i} são contínuas

$$P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\} = P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) + P(X'_1 > X''_1, X'_2 > X''_2)$$

logo,

$$\begin{aligned} P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\} &= 2P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) \\ &\quad - P(X'_1 \leq X''_1) - P(X'_2 \leq X''_2) + 1, \end{aligned}$$

$$P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0 \mid X''_1 = x''_1, X''_2 = x''_2\} dF_{X_1, X_2}(x''_1, x''_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{2P(X'_1 \leq x''_1, X'_2 \leq x''_2) \\ &\quad - P(X'_1 \leq x''_1) - P(X'_2 \leq x''_2) + 1\} dF_{X_1, X_2}(x''_1, x''_2) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) + 1 \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1}(x_1) dF_{X_1}(x_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(x_2) dF_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

notemos que é possível substituir a integral pela somatória, se for pertinente. Agora, como F_{X_1, X_2} é contínua, as respectivas marginais F_{X_1} e F_{X_2} são contínuas, portanto

vale 3.3.5, para cada uma delas. Assim, como a variável aleatória $F_{X_i}(X_i)$ é $U(0, 1)$, para $i = 1, 2$; resulta,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_i}(x) dF_{X_i}(x) = \int_0^1 u du = 1/2, \quad i = 1, 2.$$

Então

$$P\{(X'_1 - X''_1)(X'_2 - X''_2) \geq 0\} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2),$$

e, conseqüentemente

$$\tau_{X_1, X_2} = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - 1.$$

(ii) : Considerando o acoplamento associado à $f.d.a.$, temos

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C_{X_1, X_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad \forall x_1, x_2.$$

Como F_{X_1, X_2} é absolutamente contínua, então c_{X_1, X_2} , verifica,

$$c_{X_1, X_2}(u, v) := \frac{\partial^2 C_{X_1, X_2}(u, v)}{\partial u \partial v} \quad \forall u, v \in [0, 1]$$

é a densidade do acoplamento associado à F_{X_1, X_2} e

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \quad \forall x_1, x_2;$$

onde f_{X_1} e f_{X_2} são as funções de distribuição de probabilidade marginais, para X_1 e X_2 respectivamente.

A partir da primeira parte da proposição, e fazendo as substituições,

$$u := F_{X_1}(x_1), \quad v := F_{X_2}(x_2); \quad du = f_{X_1}(x_1) dx_1, \quad dv = f_{X_2}(x_2) dx_2, \quad \text{respectivamente,}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{[0, 1]^2} C_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dC_{X_1, X_2}(x_1, x_2).$$

τ_{X_1, X_2} como medida de associação $TP_2(RR_2)$

O Teorema de Nelsen do ano de 1992, apresentado no tópico 3.2.8, esclarece a importância da medida τ de Kendall como uma medida de associação positiva (negativa), resultante da condição $TP_2(RR_2)$ sobre a função de densidade de probabilidade conjunta e/ou a própria função acumulada de distribuição conjunta.

O resultado oferece duas versões. A primeira delas exige que a *f.d.p.* do par de variáveis envolvidas seja $TP_2(RR_2)$, enquanto que a segunda impõe condições sobre a *f.d.a.* do par de variáveis.

3.4.2 Prova de 3.2.8:

para a prova de (i) é preciso recorrer à existência do acoplamento C_{X_1, X_2} e sua densidade c_{X_1, X_2} associadas a F_{X_1, X_2} , e lembrar que

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= C_{X_1, X_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ c_{X_1, X_2}(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{X_1, X_2}(u, v), \quad \text{densidade do acoplamento} \\ f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= c_{X_1, X_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

onde f_{X_i} é a *f.d.p.* marginal univariada da *v.a.* X_i , $i = 1, 2$.

Fazendo a troca de variáveis $u = F_{X_1}(x_1)$ e $v = F_{X_2}(x_2)$, temos

$$\begin{aligned} T_{X_1, X_2} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{v_2} \int_0^{u_2} [c_{X_1, X_2}(u_2, v_2) c_{X_1, X_2}(u_1, v_1) \\ &\quad - c_{X_1, X_2}(u_1, v_2) c_{X_1, X_2}(u_2, v_1)] du_1 dv_1 du_2 dv_2. \end{aligned}$$

Seja

$$T_{X_1, X_2}(u_2, v_2) := \int_0^{v_2} \int_0^{u_2} [c_{X_1, X_2}(u_2, v_2)c_{X_1, X_2}(u_1, v_1) - c_{X_1, X_2}(u_1, v_2)c_{X_1, X_2}(u_2, v_1)] du_1 dv_1.$$

Segue-se que,

$$\begin{aligned} T_{X_1, X_2}(u_2, v_2) \\ = C_{X_1, X_2}(u_2, v_2) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{X_1, X_2}(u_2, v_2) - \frac{\partial}{\partial u} C_{X_1, X_2}(u_2, v_2) \frac{\partial}{\partial v} C_{X_1, X_2}(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} T_{X_1, X_2} &= \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) du dv \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_{X_1, X_2}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) du dv. \end{aligned}$$

A primeira integral dupla é igual a $\frac{1}{4}(\tau_{X_1, X_2} + 1)$ entanto a segunda é $\frac{1}{4}(1 - \tau_{X_1, X_2})$, esta última verifica-se mediante integração por partes.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_{X_1, X_2}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) du \\ &= \frac{\partial}{\partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) C_{X_1, X_2}(u, v) \Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) du \\ &= \frac{\partial}{\partial v} C_{X_2}(v) C_{X_2}(v) - \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) du. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} C_{X_2}(v) C_{X_2}(v) dv &= \frac{1}{2}, \text{ acoplamento tem marginais } U(0, 1) \\ \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{X_1, X_2}(u, v) du dv &= \frac{1}{4} \{\tau_{X_1, X_2} + 1\}, \text{ por 3.2.6.} \end{aligned}$$

Finalmente, $T_{X_1, X_2} = \frac{\tau_{X_1, X_2}}{2}$.

Para provar (ii) notemos que se rearranjamos os termos em T_{X_1, X_2} ,

$$\begin{aligned} T_{X_1, X_2} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{p=2}^n \sum_{q=2}^m [C_{X_1, X_2}(u_p, v_q) C_{X_1, X_2}(u_{p-1}, v_{q-1}) \\ - C_{X_1, X_2}(u_{p-1}, v_q) C_{X_1, X_2}(u_p, v_{q-1})]. \end{aligned}$$

Consideremos a identidade $2(ad - bc) = (a + b + c + d)(a - b - c + d) - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)$ e denotemos $C_{p,q} := C_{X_1, X_2}(u_p, v_q)$,

conclui-se que

$$\begin{aligned} 2T_{X_1, X_2} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m [(C_{p,q} + C_{p-1,q} + C_{p,q-1} + C_{p-1,q-1})(C_{p,q} - C_{p-1,q} - \\ C_{p,q-1} + C_{p-1,q-1}) - (C_{p,q}^2 - C_{p-1,q}^2 - C_{p,q-1}^2 + C_{p-1,q-1}^2)], \end{aligned}$$

mas, C_{X_1, X_2} é contínua em cada retângulo $J_p \times K_q$ e pelo teorema do valor intermediário poderemos garantir que para cada $J_p \times K_q$ existe $(u_p^*, v_q^*) \in J_p \times K_q$ tal que

$$4C_{X_1, X_2}(u_p^*, v_q^*) = C_{p,q} + C_{p-1,q} + C_{p,q-1} + C_{p-1,q-1}.$$

Se $\Delta C_{p,q} := C_{p,q} - C_{p-1,q} - C_{p,q-1} + C_{p-1,q-1}$, representa a probabilidade atribuída a $J_p \times K_q$ pelo acoplamento C_{X_1, X_2} . Logo,

$$\begin{aligned} 2T_{X_1, X_2} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m 4C_{X_1, X_2}(u_p^*, v_q^*) \Delta C_{p,q} \right. \\ \left. - \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m [(C_{p,q}^2 - C_{p-1,q}^2 - C_{p,q-1}^2 + C_{p-1,q-1}^2)] \right\}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m [(C_{p,q}^2 - C_{p-1,q}^2 - C_{p,q-1}^2 + C_{p-1,q-1}^2)] = 1$, temos que $2T_{X_1, X_2}$ é o limite de uma soma de Riemann para

$$\tau_{X_1, X_2} = 4 \int_{I^2} C_{X_1, X_2}(u, v) dC_{X_1, X_2}(u, v) - 1.$$

Assim, provamos que $T_{X_1, X_2} = \frac{1}{2}\tau_{X_1, X_2}$; sempre que τ_{X_1, X_2} seja dado pela fórmula,

$$4 \int_{[0,1]^2} C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) dC_{X_1, X_2}(u_1, u_2) - 1,$$

i.e., no caso absolutamente contínuo.

3.4.3 Observação (i) Nem sempre a medida de concordância τ representa uma medida de associação $TP_2(RR_2)$.

Medida τ para variáveis aleatórias discretas,

$$\begin{aligned}\tau_{X_1, X_2} &= 2P(X'_1 \leq X''_1, X'_2 \leq X''_2) - P(X'_1 \leq X''_1) \\ &\quad - P(X'_2 \leq X''_2) + 1 + P(X'_1 = X''_1, X'_2 > X''_2) \\ &\quad + P(X'_1 > X''_1, X'_2 = X''_2) \\ &\quad - P(X'_1 > X''_1, X'_2 < X''_2) - P(X'_1 < X''_1, X'_2 > X''_2)\end{aligned}$$

Fixando os valores x''_1 e x''_2 , assumimos a notação discreta, $P(x, y)$, $p(x, y)$, *f.d.a.* e *f.d.p.* conjunta entre X_1 e X_2 . F_i e f_i , *f.d.a.* e *f.d.p.* marginal, para a variável X_i , $i = 1, 2$.

$$P(X'_1 > x''_1, X'_2 = x''_2) = \sum_{j=x''_1+1}^{+\infty} p(j, x''_2),$$

logo,

$$\begin{aligned}P(X'_1 > X''_1, X'_2 = X''_2) &= \sum_{x''_1} \sum_{x''_2} p(x''_1, x''_2) \sum_{j=x''_1+1}^{+\infty} p(j, x''_2) \\ P(X'_1 = X''_1, X'_2 > X''_2) &= \sum_{x''_1} \sum_{x''_2} p(x''_1, x''_2) \sum_{i=x''_2+1}^{+\infty} p(x''_1, i) \\ P(X'_1 > X''_1, X'_2 < X''_2) &= \sum_{x''_2} \sum_{x''_1} p(x''_1, x''_2) \left\{ \sum_{j>x''_1} \sum_{i<x''_2} p(j, i) \right\} \\ P(X'_1 < X''_1, X'_2 > X''_2) &= \sum_{x''_2} \sum_{x''_1} p(x''_1, x''_2) \left\{ \sum_{j<x''_1} \sum_{i>x''_2} p(j, i) \right\}\end{aligned}$$

Assumimos que os domínios D_1 e D_2 das variáveis X_1 e X_2 , respectivamente, são seqüências consecutivas de reais. Com estas considerações, a medida τ fica

$$\begin{aligned}
\tau_{X_1, X_2} = & 2 \sum_{i_1 \in D_1} \sum_{i_2 \in D_2} P(i_1, i_2) p(i_1, i_2) - \sum_{i_1 \in D_1} F_1(i_1) f_1(i_1) - \sum_{i_2 \in D_2} F_2(i_2) f_2(i_2) \\
& + \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} p(i_1, i_2) \left\{ \sum_{\substack{j \in D_1, \\ j > i_1}} p(j, i_2) \right\} \\
& + \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} p(i_1, i_2) \left\{ \sum_{\substack{i \in D_2, \\ i > i_2}} p(i_1, i) \right\} + 1 \\
& - \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} p(i_1, i_2) \left\{ \sum_{\substack{j \in D_1, \\ j > i_1}} \sum_{\substack{i \in D_2, \\ i < i_2}} p(j, i) \right\} \\
& - \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} p(i_1, i_2) \left\{ \sum_{\substack{j \in D_1, \\ j < i_1}} \sum_{\substack{i \in D_2, \\ i > i_2}} p(j, i) \right\}
\end{aligned}$$

Definamos entre as variáveis X_1 e X_2 a seguinte medida de associação, como fizemos para variáveis contínuas. Sejam $i_j, i'_j \in D_j$, $i_j \leq i'_j$, $j = 1, 2$.

$$T_{X_1, X_2} := \sum_{i'_2 \in D_2} \sum_{i'_1 \in D_1} \sum_{\substack{i_2 \in D_2, \\ i_2 \leq i'_2}} \sum_{\substack{i_1 \in D_1, \\ i_1 \leq i'_1}} \{p(i'_1, i'_2) p(i_1, i_2) - p(i_1, i'_2) p(i'_1, i_2)\}$$

$$T_{X_1, X_2} = \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} P(i_1, i_2) p(i_1, i_2) - \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} P(X_1 \leq i_1, X_2 = i_2) P(X_1 = i_1, X_2 \leq i_2)$$

Finalmente,

$$T_{X_1, X_2} = \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} P(i_1, i_2) p(i_1, i_2) - \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} \left\{ \sum_{\substack{j \in D_1, \\ j \leq i_1}} p(j, i_2) \right\} \left\{ \sum_{\substack{i \in D_2, \\ i \leq i_2}} p(i_1, i) \right\}$$

⁰As fórmulas aqui apresentadas, τ , T são implementadas num programa-*vide* Apêndice.

Nota 1:

Notemos que para cada termo da medida τ podemos achar uma expressão equivalente em função do acoplamento associado $C_{1,2}$ ou suas marginais acumuladas C_1 e C_2 . Por exemplo,

$$\sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} P(i_1, i_2) p(i_1, i_2) = \sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} C_{1,2}(F_1(i_1), F_2(i_2)) c_{1,2}(u_1, u_2) f_1(i_1) f_2(i_2),$$

onde $u_j \in [F_j(i_j - 1), F_j(i_j)]$, $j = 1, 2$, e $C_{1,2}$ é um acoplamento associado à *f.d.a.* P .

Considerando, $u_j = F_j(i_j)$, $\Delta u_j = f_j(i_j)$ $j = 1, 2$, temos,

$$\sum_{i_2 \in D_2} \sum_{i_1 \in D_1} P(i_1, i_2) p(i_1, i_2) = \sum_{u_2} \sum_{u_1} C_{1,2}(u_1, u_2) c_{1,2}(u_1, u_2) \Delta u_1 \Delta u_2.$$

Nota 2:

Notemos que, quando F_1 e F_2 são contínuas, retornamos a 3.2.6 e a 3.2.8 [Nelsen (1992)]. Assim, para o caso discreto, em geral, τ_{X_1, X_2} pode não constituir uma medida da associação $TP_2(RR_2)$.

3.4.4 Exemplo

Exemplo do uso da quantidade T como medida de associação.

Consideremos quatro variáveis aleatórias Y, X_1, X_2, X_3 com distribuição multinomial de parâmetros $n = 1$ e (p, p_1, p_2, p_3) , onde as variáveis X_i , $i = 1, 2, 3$ representam resultados de diferentes análises clínicas feitas em um paciente. A variável Y representa o diagnóstico do médico, em relação aos resultados X_1, X_2, X_3 . Assim,

$$P(Y = y, X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \begin{cases} \frac{p^y p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}}{y! x_1! x_2! x_3!} & \text{se } y + \sum_{i=1}^3 x_i = 1, \quad p + \sum_{i=1}^3 p_i = 1, p > 0, p_i > 0, \forall i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

consequentemente,

$$Y \sim \text{Bin}(1, p), \quad X_i \sim \text{Bin}(1, p_i) \quad i = 1, 2, 3;$$

$$P(Y = y, X_i = x_i) = \begin{cases} \frac{p^y p_i^{x_i} (1-p-p_i)^{1-y-x_i}}{(1-y-x_i)! y! x_i!} & \text{se } y + x_i \leq 1, \quad x_i, y \geq 0, \text{ inteiros} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$P(X_i = x_i, X_j = x_j) = \begin{cases} \frac{p_i^{x_i} p_j^{x_j} (1-p_i-p_j)^{1-x_i-x_j}}{(1-x_i-x_j)! x_i! x_j!} & \text{se } x_i + x_j \leq 1, \quad x_i, x_j \geq 0, \text{ inteiros} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$P(Y = y, X_i = x_i, X_j = x_j)$$

$$= \begin{cases} \frac{p^y p_i^{x_i} p_j^{x_j} (1-p-p_i-p_j)^{1-y-x_i-x_j}}{y! x_i! x_j! (1-y-x_i-x_j)!} & \text{se } y + x_i + x_j \leq 1, \quad y, x_i, x_j \geq 0, \text{ inteiros} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Estudo do tipo de associação entre os pares de variáveis consideradas.

Como (Y, X_1, X_2, X_3) tem distribuição multinomial de parâmetros 1 e (p, p_1, p_2, p_3) , então (Y, X_1, X_2, X_3) é RR_2 em pares. Conseqüentemente, o vetor (Y, X_1, X_2, X_3) tem suas variáveis NA em pares.

Consideremos, agora, uma combinação linear entre as variáveis X_1, X_2, X_3 ,

$$X_4 := aX_1 + bX_2 + cX_3, \quad 0 < a \leq b \leq c.$$

Por exemplo, $X_4 = X_1 + 2X_2 + 4X_3$. Temos,

$$P(Y = y, X_4 = x_4) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} P(Y = y, X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = \frac{x_4 - ax_1 - bx_2}{c}).$$

Mais especificamente,

$$P(Y = 0, X_4 = a) = P(Y = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = p_1$$

$$P(Y = 0, X_4 = b) = P(Y = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = p_2$$

$$P(Y = 0, X_4 = c) = P(Y = 0, X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = p_3$$

$$P(Y = 1, X_4 = 0) = P(Y = 1, X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = p.$$

Notemos que as quantidades T_{Y, X_i} (médias das medidas locais da condição $TP_2(RR_2)$).

verificam $T_{Y, X_4} \leq T_{Y, X_i}$, $i = 1, 2, 3$.

$$T_{Y, X_i} = -pp_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$T_{Y, X_4} = -p\{p_1 + p_2 + p_3\}.$$

Cabe destacar que neste exemplo não dá para extrair informação a partir das medidas τ_{Y,X_i} , com relação ao tipo de associação. No entanto, é possível fazer isso a partir das médias das medidas locais da condição $TP_2(RR_2)$, ou seja a partir das quantidades T_{Y,X_i} , pois, $p_i \leq p_1+p_2+p_3, \forall i = 1, 2, 3$, então $T_{Y,X_4} \leq T_{Y,X_i}, i = 1, 2, 3$. Logo, as variáveis Y e X_4 são mais negativamente associadas (desde o conceito de médias locais da condição $TP_2(RR_2)$) que Y e $X_i, i = 1, 2, 3$. Ou seja, a combinação de todas as $X_i, i = 1, 2, 3$, potencializaram a associação negativa que existia entre as variáveis originais $X_i, i = 1, 2, 3$ e a variável Y .

3.4.5 Exemplos: Em seguida apresentamos dois exemplos, fornecendo as medidas τ e T .

Retomando as tabelas dos exemplos discretos

Exemplo a: $p(x, y)$

Y \ X	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/4	1/8	3/8
1	3/8	1/4	5/8
$f_1(\cdot)$	5/8	3/8	1

$$\tau_{X,Y} = 0,81, T_{X,Y} = 0,02.$$

Exemplo b: $p(x, y)$

Y \ X	0	1	2	$f_2(\cdot)$
0	.15	.19	.15	.49
1	.12	.21	.18	.51
$f_1(\cdot)$	.27	.40	.33	1

$$\tau_{X,Y} = 0,71, T_{X,Y} = 0,02.$$

LA VUELTA DE MARTIN FIERRO

Viene uno como dormido
 Cuando vuelve del desierto -
 Veré si a explicarme acierto
 Entre gente tan bizarra,
 Y si al sentir la guitarra
 De mi sueño me despierto.

Siento que mi pecho tiembla,
 Que se turba mi razón.
 Y de la vigüela al son
 Imploro a la alma de un sabio
 Que venga a mover mi labio
 Y alentar mi corazón.

Mucho tiene que contar
 El que tuvo que sufrir,
 Y empezaré por pedir
 No duden de cuanto digo:
 Pues debe creerse al testigo
 Si no pagan por mentir.

Canta el pueblera... y es poeta,
 Canta el gaucha... y ¡ay Jesús!
 Lo miran como avestruz.
 Su inorancia los asombra;
 Mas siempre sirven las sombras
 Para distinguir la luz.

El campo es del inorante,
 El pueblo del hombre estruido -
 Yo que en el campo he nacido
 Digo que mis cantos son.
 Para los unos - sonidos,
 Y para otros - intención.

Yo he conocido cantores
 Que era un gusto el escuchar -
 Mas no quieren opinar
 Y se divierten cantando;
 Pero yo canto opinando
 Que es mi modo de cantar.

Y el que me quiera enmendar
 Mucho tiene que saber -
 Tiene mucho que aprender
 El que me sepa escuchar -
 Tiene mucho que rumiar
 El que me quiera entender.

Capítulo 4

Análise Exaustiva da Medida τ -Kendall

- *Seção 4.1: Máxima Associação Positiva (Negativa)*
- *Seção 4.2: Medida τ -Kendall no Caso Discreto*

4.1. Máxima Associação Positiva (Negativa)

Objetivo

Estudar os valores extremos da medida de concordância τ de Kendall, quando ela representa uma medida de associação, i.e., marginais, acumuladas, univariada contínuas.

Estudo da associação positiva (TP_2)

A importância da seguinte proposição reside em caracterizar as relações entre variáveis aleatórias com a ajuda dos valores assumidos pela medida τ , e suas implicações.

A partir de outro ponto de vista, a seguinte proposição é muito mais geral do que parece, se lembrarmos que sempre existe um acoplamento associado e que, por definição, ele possui marginais uniformes.

4.1.1 Proposição*

Suponhamos que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm distribuição conjunta F_{X_1, X_2} e marginais $U(0, 1)$. Então, as seguintes condições são equivalentes,

- (i) $\tau_{X_1, X_2} = 1$,
- (ii) $P(X_1 = X_2) = 1$,
- (iii) $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, $x_1, x_2 \in I = [0, 1]$,
- (iv) $X_2 = f(X_1)$ q.t.p. $[f_{X_1, X_2}]$ para alguma função f não decrescente.

Prova de 4.1.1:

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

propriedade: se F_{X_1, X_2} é uma distribuição bivariada com marginais uniformes, então, a função de sobrevivência conjunta de (X_1, X_2) tem a seguinte expressão

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - x_1 - x_2 + 1, \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1,$$

pois

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) - P(X_1 \leq x_1) - P(X_2 \leq x_2) + 1,$$

$$\forall x_1, x_2 : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.$$

Considerando que (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) são duas realizações independentes com igual função de distribuição acumulada F_{X_1, X_2} ,

$$\begin{aligned}
1 &= \tau_{X_1, X_2} \\
&= P\{(X'_1 - X_1)(X'_2 - X_2) \geq 0\} - P\{(X'_1 - X_1)(X'_2 - X_2) < 0\} \\
&= P\{(X'_1 - X_1)(X'_2 - X_2) \geq 0\},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{(X'_1 - X_1)(X'_2 - X_2) \geq 0 | X_1 = x_1, X_2 = x_2\} dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2).$$

A saber, condicionando sobre os possíveis valores de (X_1, X_2) , digamos, (x_1, x_2) , e usando a independência das observações (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) , temos as seguintes igualdades *q.t.p.*, integrando em ambos os membros na densidade conjunta.

$$\begin{aligned}
1 &= P\{(X'_1 - x_1)(X'_2 - x_2) \geq 0\} && [f_{X_1, X_2}] \\
&= P\{X'_1 > x_1, X'_2 > x_2\} + P\{X'_1 < x_1, X'_2 < x_2\} + \\
&\quad P\{X'_1 = x_1, X'_2 > x_2\} + P\{X'_1 = x_1, X'_2 < x_2\} + \\
&\quad P\{X'_1 > x_1, X'_2 = x_2\} + P\{X'_1 < x_1, X'_2 = x_2\} && [f_{X_1, X_2}] \\
&= P(X'_1 > x_1, X'_2 > x_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2), \quad (F_{X_1, X_2} \text{ contínua}) \\
&= 2F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - x_1 - x_2 + 1 && [f_{X_1, X_2}],
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da expressão da função de sobrevivência. Assim,

$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\forall 0 < x_1, x_2 < 1$, *q.t.p.*; e como

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \leq \min\{x_1, x_2\},$$

(pois F_{X_1, X_2} tem marginais uniformes, Sklar(1959)) segue-se que $x_1 = x_2$, *q.t.p.*.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_1 = X_2) \\ &= P(X_1 \leq \min\{x_1, x_2\}) \\ &= \min\{x_1, x_2\}, \end{aligned}$$

onde, a segunda igualdade é consequência de $P(X_1 = X_2) = 1$, enquanto que a última decorre da hipótese (marginais $U(0, 1)$).

(iii) $\Rightarrow$ (iv):

Definição: seja D subconjunto de R^2 . Dizemos que D é não decrescente, sempre que, para todo par de pontos $(x, y), (u, v)$ em D , $x < u \Rightarrow y \leq v$.

(iii) $\Rightarrow \exists D \subseteq R^2$ conjunto não decrescente , tal que $P((X_1, X_2) \in D) = 1$ [Mikusinski, Sherwood et al.(1991-1992)].

Consideremos

$$f(x_1) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I_D(x_1, x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2,$$

onde

$$I_D(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2) \in D \\ 0 & \text{cc} \end{cases}.$$

Logo,

$$E_{X_1, X_2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
 E_{X_1, X_2}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} I_D(x_1, x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 \right\} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_D(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{(X_1, X_2) \in D\} f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}, \text{ pois } X_2 \text{ é } U(0, 1).$$

Finalmente,

$$X_2 = f(X_1) \text{ q.t.p. } [f_{X_1, X_2}].$$

Resta verifica que f é não decrescente.

Consideremos $x_1 < x'_1$,

como D é não decrescente, dados $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)$ em D .

Então,

$$I_D(x_1, x_2) = 1 = I_D(x'_1, x'_2)$$

sempre que $x_1 < x'_1$ resulta $x_2 \leq x'_2$. Logo,

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \frac{1}{2} \int_0^1 I_D(x_1, x_2) dx_2 \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^1 I_D(x'_1, x'_2) I_{(x_2, 1]}(x'_2) dx_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 I_D(x'_1, x'_2) I_{[0, x'_2)}(x_2) dx'_2 \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^1 I_D(x'_1, x'_2) dx'_2 \\
&= f(x'_1).
\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) :

$$\tau_{X_1, X_2} = 2\eta_{X_1, X_2} - 1, \quad \eta_{X_1, X_2} = P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0),$$

onde (X_1, X_2) e (X'_1, X'_2) são realizações independentes com *f.d.a.* F_{X_1, X_2} .

Por outro lado,

$$1 = P(X_1 \geq x'_1) + P(X_1 < x'_1) \quad \forall x'_1 \in \text{Imagem de } X_1.$$

$$\begin{aligned}
1 &= P(X_1 \geq x'_1, f(X_1) \geq f(x'_1)) + P(X_1 \geq x'_1, f(X_1) < f(x'_1)) + \\
&\quad P(X_1 < x'_1, f(X_1) < f(x'_1)) + P(X_1 < x'_1, f(X_1) \geq f(x'_1)) \quad [f_{X_1, X_2}].
\end{aligned}$$

Logo, como f é não decrescente,

$$1 = P(X_1 \geq x'_1, X_2 \geq x'_2) + P(X_1 < x'_1, X_2 < x'_2) \quad [f_{X_1, X_2}]$$

onde $X_2 = f(X_1)$ e $x'_2 = f(x'_1)$

$$\eta_{X_1, X_2} = 1 \Rightarrow \tau_{X_1, X_2} = 1.$$

Como consequência,

4.1.2 Corolário *

Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias, $\varphi : R^2 \rightarrow R, X_1$ com distribuição $U(0, 1)$ e $\varphi(X_2, X_3)$ variável aleatória de distribuição $U(0, 1)$. Então, as seguintes condições são equivalentes

- (i) $\tau_{X_1, \varphi(X_2, X_3)} = 1$,
- (ii) $P(X_1 = \varphi(X_2, X_3)) = 1$,
- (iii) $F_{X_1, \varphi(X_2, X_3)}(x_1, x) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{\varphi(X_2, X_3)}(x)\}$, $x_1, x \in I$,
- (iv) $\varphi(X_2, X_3) = f(X_1)$ q.t.p. $[f_{X_1, \varphi(X_2, X_3)}]$ para alguma f não decrescente.

Notemos que 4.1.2 ganha força quando temos em mente o resultado de De Finetti de 1953 (em seguida, enunciamos o teorema), pois a partir da hipótese: X_2 e X_3 possuindo distribuição conjunta contínua, podemos achar uma função $\varphi : R^2 \rightarrow R$, tal que $\varphi(X_2, X_3)$ seja uma variável aleatória uniforme.

O seguinte Corolário fornece uma extensão de 4.1.1 natural, quando interpretamos tal proposição a partir da existência de um acoplamento associado.

4.1.3 Corolário*

Suponhamos que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm distribuição conjunta F_{X_1, X_2} e marginais acumuladas contínuas F_{X_1} e F_{X_2} respectivamente. Então, as seguintes condições são equivalentes

- (i) $\tau_{X_1, X_2} = 1$,
- (ii) $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\}$, $\forall x_i \in \text{Imagem de } X_i$ $i = 1, 2$,
- (iii) $F_{X_2}(X_2) = f \circ F_{X_1}(X_1)$ q.t.p. $[f_{X_1, X_2}]$ para alguma função f não decrescente.

Notemos que (iii) fica substituída por

$$X_2 = f(X_1) \text{ q.t.p. } [f_{X_1, X_2}],$$

para alguma função f não decrescente, quando F_{X_2} for inversível.

Prova de 4.1.3:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : pois τ é invariante perante transformações não decrescentes. Logo,

$$1 = \tau_{U_1, U_2} \text{ onde } U_i = F_{X_i}(X_i), \ i = 1, 2.$$

Nota: imediatamente, por 4.1.1 temos, $1 = P(U_1 = U_2)$.

Consideremos $x_i \in \text{Imagem de } X_i$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= C_{X_1, X_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad C_{X_1, X_2} \text{ acopl. associado a } F_{X_1, X_2} \\
&= F_{U_1, U_2}(u_1, u_2), \quad u_i = F_{X_i}(x_i), \quad i = 1, 2, \quad \text{por 3.3.9} \\
&= \min\{u_1, u_2\}, \quad \text{por 4.1.1} \\
&= \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\}.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

se $U_i = F_{X_i}(X_i)$, $i = 1, 2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) &= C_{X_1, X_2}(u_1, u_2), \quad \text{por 3.3.9} \\
&= C_{X_1, X_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad \exists x_i : F_{X_i}(x_i) = u_i, \quad i = 1, 2 \\
&= F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\
&= \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\} \\
&= \min\{u_1, u_2\}
\end{aligned}$$

logo, por 4.1.1 temos que $\exists f$ função não decrescente, tal que

$$U_2 = f(U_1) \quad q.t.p. \quad [f_{U_1, U_2}].$$

Finalmente,

$$F_{X_2}(X_2) = f \circ F_{X_1}(X_1) \quad q.t.p. \quad [f_{X_1, X_2}].$$

A seguir, enunciamos e referenciamos alguns resultados a serem usados logo.

Lembrar 3.3.5: Se X_1 possui função de distribuição F_{X_1} contínua, então $F_{X_1}(X_1)$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme $(0, 1)$.

4.1.4 Teorema (Esteves (1997)): Sejam X_1 e U variáveis aleatórias com função de distribuição contínua F_{X_1} e F_U , respectivamente. Então, existe $\phi : R \rightarrow R$ tal que as variáveis aleatórias $\phi(X_1)$ e $\phi(U)$ possuem, ambas, distribuição uniforme em $(0, 1)$.

4.1.5 Teorema (De Finetti (1953)): Sejam X_2 e X_3 com função de distribuição conjunta F_{X_2, X_3} contínua. Então, existe $\varphi_{2,3} : R^2 \rightarrow R$ tal que a variável aleatória $\varphi_{2,3}(X_2, X_3)$ possui distribuição uniforme em $(0, 1)$.

Esteves(1997) menciona uma generalização do resultado anterior, a saber:

se $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ e $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ são vetores aleatórios com funções de distribuição conjunta contínuas $F_{\underline{X}}$ e $F_{\underline{Y}}$, respectivamente, e H uma função de distribuição unidimensional qualquer, então existe uma função real $\phi : R^n \rightarrow R$ tal que as variáveis aleatórias $\phi(\underline{X})$ e $\phi(\underline{Y})$ têm ambas função de distribuição H .

Como consequência dos resultados anteriores e de 4.1.2, temos:

4.1.6 Proposição*

Sejam X_1 uma variável aleatória com função de distribuição contínua F_{X_1} e X_2, X_3 duas variáveis aleatórias que possuem função de distribuição conjunta contínua F_{X_2, X_3} . Então,

(a) existem $\varphi_1 : R \rightarrow R$ tal que $\varphi_1(X_1)$ é uma variável aleatória $U(0, 1)$ e $\varphi_{2,3} : R^2 \rightarrow R$ tal que $\varphi_{2,3}(X_2, X_3)$ é variável aleatória $U(0, 1)$;

(b) as seguintes condições são equivalentes:

$$(b_1) \quad F_{U,V}(u, v) = \min\{F_U(u), F_V(v)\},$$

$$(b_2) \quad \tau_{U,V} = 1,$$

onde, $U := \varphi_1(X_1)$, $V := \varphi_{2,3}(X_2, X_3)$

Comentário: O estudo de acoplamentos ou distribuições de marginais uniformes em $(0, 1)$ representa uma poderosa ferramenta, isto é: todas as distribuições estão sendo contempladas através do seu acoplamento associado. Nesse ponto, se X_1 é a variável aleatória a predizer, (X_2, X_3) é a base para a predição e estamos procurando o aporte que a base faz respeito da variável a predizer, podemos considerar $\varphi_{2,3}(X_2, X_3)$ como um resumo do aporte feito pela base de predição e analisar a estrutura de associação existente entre X_1 e a nova variável uniforme em $(0, 1)$, ou como é proposto na Proposição anterior estudar a estrutura de associação entre $\varphi_1(X_1)$ e $\varphi_{2,3}(X_2, X_3)$.

4.1.7 Corolário*

Na hipótese da proposição anterior, as seguintes condições são equivalentes

$$(i) \quad F_{W,V}(w, v) = \min\{F_W(w), F_V(v)\},$$

$$(ii) \quad \tau_{W,V} = \tau_{X_1,V} = 1.$$

onde, $W := F_{X_1}(X_1)$, $V := \varphi_{2,3}(X_2, X_3)$.

Comentário: O resultado anterior tenta simplificar o tratamento da variável X_1 em relação com a base de predição. Pelas dificuldades topológicas apresentadas pela função φ_1 - vide Esteves (1997) - é proposto o estudo da estrutura de associação entre X_1 e a base de predição (X_2, X_3) através do estudo das transformadas $F_{X_1}(X_1)$ e $\varphi_{2,3}(X_2, X_3)$, aproveitando as bondades da medida τ de Kendall em relação as transformações monótonas não decrescentes.

Provas de 4.1.6 e de 4.1.7:

Notemos que W é uma variável aleatória $U(0, 1)$, por 3.3.5, enquanto que $V := \varphi_{2,3}(X_2, X_3)$ é uma variável aleatória $U(0, 1)$, por 4.1.5

A primeira parte de (a) de 4.1.6 é consequência de 3.3.5 ou de 4.1.4, enquanto que a segunda parte, do mesmo tópico, decorre de 4.1.5 (De Finetti (1953)). (b) de 4.1.6 resulta a partir de 4.1.2 e da parte (a) prévia.

O tópico 4.1.7 apresenta uma variante de 4.1.6, considerando a transformação uniforme de X_1 , $W = F_{X_1}(X_1)$, invocada por 3.3.5. A igualdade presente em (ii) decorre da invariância de τ perante transformações não decrescentes - 3.1.2.

Estudo da associação negativa(RR_2)

4.1.8 Proposição *

Suponhamos que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm distribuição acumulada conjunta F_{X_1, X_2} e distribuições marginais $U(0, 1)$. Então, as seguintes condições são equivalentes

- (i) $\tau_{X_1, X_2} = -1$,
- (ii) $P(X_2 = 1 - X_1) = 1$,
- (iii) $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \max\{0, x_1 + x_2 - 1\}$, $x_1, x_2 \in I = [0, 1]$,
- (iv) $X_2 = f(X_1)$ q.t.p. $[f_{X_1, X_2}]$ para alguma f não crescente.

Prova de 4.1.8:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : análoga à prova feita em 4.1.1 .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

$$\begin{aligned}
 P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_2 = 1 - X_1) \\
 &= P(1 - x_2 \leq X_1 \leq x_1) \\
 &= \begin{cases} x_1 - [1 - x_2] & \text{se } 0 \leq 1 - x_2 < x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
 &= \max\{0, x_1 + x_2 - 1\}.
 \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) :

(iii) $\Rightarrow \exists S \subseteq R^2$, subconjunto não crescente, i.e., para todo par de pontos

$$(x, y), (u, v) \in S, \quad x < u \Rightarrow v \leq y.$$

Com argumentos equivalentes aos utilizados em 4.1.1 verifica-se (iv) [Mikusinski, Sherwood (1991)].

(iv) $\Rightarrow$ (i) :

$$\begin{aligned} \tau_{X_1, X_2} &= P\{(X'_1 - X_1)(f(X'_1) - f(X_1)) \geq 0\} - P\{(X'_1 - X_1)(f(X'_1) - f(X_1)) < 0\} \\ &= -P\{(X'_1 - X_1)(f(X'_1) - f(X_1)) < 0\} \\ &= -1, \end{aligned}$$

pois, para cada possível valor de $X_1 = x_1$, $P\{(X'_1 - x_1)(f(X'_1) - f(x_1)) \geq 0\} = 0$ já que f é uma função não crescente. Deste modo para cada $X_1 = x_1$ só pode acontecer

$$\{X'_1 < x_1, f(X'_1) > f(x_1)\} \text{ ou } \{X'_1 > x_1, f(X'_1) < f(x_1)\}.$$

Logo, resulta (i).

4.1.9 Corolário*

Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias, $\varphi : R^2 \rightarrow R$, X_1 com distribuição $U(0, 1)$ e $\varphi(X_2, X_3)$ variável aleatória $U(0, 1)$. Então, as seguintes condições são equivalentes

- (i) $\tau_{X_1, \varphi(X_2, X_3)} = -1$,
- (ii) $P(\varphi(X_2, X_3) = 1 - X_1) = 1$,
- (iii) $F_{X_1, \varphi(X_2, X_3)}(x_1, x) = \max\{0, F_{X_1}(x_1) + F_{\varphi(X_2, X_3)}(x) - 1\}$, $x_1, x \in I$,
- (iv) $\varphi(X_2, X_3) = f(X_1)$ q.t.p. $[f_{X_1, \varphi(X_2, X_3)}]$ f não crescente

4.1.10 Proposição*

Sejam X_1 uma variável aleatória com função de distribuição contínua F_{X_1} e X_2, X_3 duas variáveis aleatórias que possuem função de distribuição conjunta contínua F_{X_2, X_3} . Então, as seguintes condições são equivalentes

$$(b_{11}) \quad F_{U,V}(u, v) = \max\{0, F_U(u) + F_V(v) - 1\},$$

$$(b_{22}) \quad \tau_{U,V} = -1,$$

onde, $U = \varphi_1(X_1)$, $V = \varphi_{2,3}(X_2, X_3)$, φ_1 e $\varphi_{2,3}$ são como em 4.1.6 .

4.1.11 Corolário*

Na hipótese da proposição anterior, as seguintes condições são equivalentes

$$(i) \quad F_{W,V}(w, v) = \max\{0, F_W(w) + F_V(v) - 1\},$$

$$(ii) \quad -1 = \tau_{W,V} = \tau_{X_1,V},$$

onde, $W = F_{X_1}(X_1)$, $V = \varphi_{2,3}(X_2, X_3)$.

Nos casos extremos, os conceitos de acoplamento extremo maximizante $\min\{x_1, x_2\}$ e medida τ máxima: $\tau_{X_1, X_2} = 1$, é interpretada como *concordância* entre as variáveis envolvidas. Para o acoplamento extremo mínimo, $\max\{0, x_1 + x_2 - 1\}$ e a medida τ mínima: $\tau_{X_1, X_2} = -1$; as variáveis envolvidas desenvolvem um comportamento *discordante*.

4.1.12 A homotopia como conexão contínua entre ditribuições acumuladas

É conhecido que cada vez que o par (U_1, U_2) tem *f.d.a.* absolutamente contínua F_{U_1, U_2} é possível definir $(T_1, T_2) := \Psi_{F_{U_1, U_2}}(U_1, U_2)$ onde,

$$\Psi_{F_{U_1, U_2}} : R^2 \rightarrow [0, 1]^2, \quad \Psi_{F_{U_1, U_2}}(u_1, u_2) = (F_{U_1}(u_1), F_{U_2|u_1}(u_2))$$

para todo (u_1, u_2) no suporte de (U_1, U_2) .

Logo, T_1 e T_2 são variáveis aleatórias independentes e uniformes em $(0, 1)$ [H.Li; M. Scarsini; M. Shaked (1996)pp.23].

$F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = t_1 t_2$. Por tanto, sua distribuição constitui um acoplamento. Isso significa que na passagem do par (U_1, U_2) para o par (T_1, T_2) é anulada toda a dependência existente.

Com uma ideia semelhante estamos procurando “potencializar a associação” existente entre U_1 e U_2 .

Pensemos agora na situação extrema, isto é, dadas duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 com função de distribuição acumulada F_{X_1, X_2} de marginais uniformes em $(0, 1)$, F_{X_1, X_2} é identicamente igual ao acoplamento máximo ou limitante superior de Fréchet se, e somente se, F_{X_1, X_2} está concentrada numa curva não decrescente.

Resenha [P. Mikusinski; H. Sherwood e M.D. Taylor (1991-92) do *Real Analysis Exchange*, vol 17, “The Fréchet Bounds Revisited”, pp.759-764].

4.1.13 Aplicações Homotópicas

Premissa

Verificar se é possível levar um par de variáveis aleatórias com distribuição conjunta de marginais uniformes, até um outro par, cuja *f.d.a.* seja o limitante superior da Classe de Fréchet.

Se as distribuições marginais acumuladas são F_{X_i} , $i = 1, \dots, n$, a Classe de Fréchet de $\{F_{X_i}\}_{i=1}^n$ é constituída pelas distribuições acumuladas conjuntas de marginais univariadas F_{X_i} , $i = 1, \dots, n$.

O limitante inferior: $\max\{0, \sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) - (n-1)\}$ assim como o limitante superior: $\min_{1 \leq i \leq n} \{F_{X_i}(x_i)\}$ da Classe de Fréchet, são distribuições acumuladas conjuntas, elementos da Classe de Fréchet definida pela seqüência de marginais $\{F_{X_i}\}_{i=1}^n$ que no caso de $n = 2$ representam estruturas de máxima associação negativa e positiva respectivamente.

Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos, $I = [0, 1]$. Duas aplicações contínuas $f, g : E_1 \rightarrow E_2$ dizem-se homotópicas, quando existe uma aplicação contínua $H : E_1 \times I \rightarrow E_2$ (chamada uma homotopia entre f e g) tal que, para cada $x_1 \in E_1$, $H(x_1, 0) = f(x_1)$ e $H(x_1, 1) = g(x_1)$.

Se E_1 for um espaço de Hausdorff localmente compacto, f e g são homotópicas se, e somente se, pertencem à mesma componente conexa por caminhos no espaço $C_{ca}(E_1; E_2)$. Tais componentes chamam-se as classes de homotopia das aplicações com domínio em E_1 e imagem em E_2 .

Sendo $C(E_1; E_2)$ o conjunto das aplicações contínuas de E_1 em E_2 . A topologia em $C(E_1; E_2)$ gerada pelos conjuntos $A(K, V) := \{f \in C(E_1; E_2) : f(K) \subseteq V\}$, onde K percorre os subconjuntos compactos de E_1 e V os abertos de E_2 , chama-se a topologia compacto-aberta, e o espaço topológico correspondente é indicado por $C_{ca}(E_1; E_2)$.

Considerando a seguir R^2 com a topologia usual, suponhamos que dispomos de uma *f.d.a.* contínua, F_{U_1, U_2} que é a densidade acumulada conjunta das variáveis U_1 e U_2 cujas distribuições univariadas são $U(0, 1)$. Evidentemente F_{U_1, U_2} constitui um acoplamento. Consideremos o acoplamento máximo: $\min\{u_1, u_2\}$. Então, é possível enlaçar ambas as distribuições com uma homotopia

$$\begin{aligned} H &: R^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \text{ tal que} \\ H((u_1, u_2), 0) &= F_{U_1, U_2}(u_1, u_2), \\ H((u_1, u_2), 1) &= \min\{u_1, u_2\}. \end{aligned}$$

As condições de contorno das funções a enlaçar, são as seguintes:

$$\begin{aligned} F_{U_1, U_2}(u_1, 0) &= \min\{u_1, 0\} = 0, \quad \forall u_1 \in [0, 1] \\ F_{U_1, U_2}(u_1, 1) &= \min\{u_1, 1\} = u_1, \quad \forall u_1 \in [0, 1] \\ F_{U_1, U_2}(0, u_2) &= \min\{0, u_2\} = 0, \quad \forall u_2 \in [0, 1] \\ F_{U_1, U_2}(1, u_2) &= \min\{1, u_2\} = u_2, \quad \forall u_2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Consideremos a aplicação

$$H((u_1, u_2), t) := (1 - t)F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) + t \min\{u_1, u_2\}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u_i \in [0, 1], i = 1, 2.$$

A transformação anterior verifica

$$H((u_1, u_2), 0) = F_{U_1, U_2}(u_1, u_2),$$

$$H((u_1, u_2), 1) = \min\{u_1, u_2\},$$

$$\forall u_i \in [0, 1], i = 1, 2.$$

$$H((u_1, 1), t) = (1 - t)u_1 + tu_1 = u_1,$$

$$H((u_1, 0), t) = 0,$$

$$\forall u_1 \in [0, 1], \forall t \in [0, 1].$$

$$H((1, u_2), t) = (1 - t)u_2 + tu_2 = u_2,$$

$$H((0, u_2), t) = 0,$$

$$\forall u_2 \in [0, 1], \forall t \in [0, 1].$$

Por outro lado, H é contínua em (u_1, u_2) , pois F_{U_1, U_2} e o $\min\{u_1, u_2\}$ são contínuas, $\forall u_i \in [0, 1], i = 1, 2$. H é contínua em t , por ser transformação linear.

Assim, vê-se que H constitui uma homotopia linear que respeita as condições de contorno.

A existência da homotopia traduz-se na possibilidade de deformar um caminho F_{U_1, U_2} continuamente. Assim, H deforma $F_{U_1, U_2}(u_1, u_2)$ em $\min\{u_1, u_2\}$ fazendo, para cada $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, o ponto $F_{U_1, U_2}(u_1, u_2)$ deslizar no tempo unitário, com velocidade constante, ao longo do segmento da reta $[F_{U_1, U_2}(u_1, u_2), \min\{u_1, u_2\}]$. Uma tal homotopia diz-se “linear” e os caminhos $F_{U_1, U_2}(\cdot, \cdot)$ e $\min\{\cdot, \cdot\}$ dizem-se, então, linearmente homotópicos.

4.1.14 Proposição* : Para cada tempo t , fixo, $H((\cdot, \cdot), t)$ é *f.d.a.*

Prova de 4.1.14:

basta notar que $F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) \leq \min\{u_1, u_2\}$, $\forall u_i \in [0, 1]$, para concluir que $H((\cdot, \cdot), t)$ associa probabilidade não nula aos quadrados em R^2 , do tipo $(a, b] \times (c, d]$.

4.1.15 Exemplo: Um exemplo desta homotopia é apresentado em [Joe(1997)pp.148] onde

$$C(u, v, t) := t \min\{u, v\} + (1 - t)uv, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Nesse caso, a homotopia transforma continuamente o caminho uv (acoplamento de independência) no caminho $\min\{u, v\}$ (acoplamento de máxima associação positiva).

Medida bivariada τ de Kendall e comparação entre variáveis.

Vamos considerar um vetor tri-variado, para estudar as possibilidades da otimização da associação, i.e., sob o seguinte contexto: sejam (X_1, X_2, X_3) variáveis aleatórias com *f.d.p.* f_{X_1, X_2, X_3}

Critérios de comparação

4.1.16 Definição Se (X_1, X_i) é um vetor aleatório com *f.d.p.* conjunta f_{X_1, X_i} , TP_2 para $i = 2, 3$. Dizemos que (X_1, X_2) são *localmente mais positivamente associadas* (TP_2) que (X_1, X_3) se

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x', y')f_{X_1, X_2}(x, y) - f_{X_1, X_2}(x', y)f_{X_1, X_2}(x, y') \\ \geq f_{X_1, X_3}(x', y')f_{X_1, X_3}(x, y) - f_{X_1, X_3}(x', y)f_{X_1, X_3}(x, y') \\ \forall (x', x, y', y) \text{ tal que } x' \geq x, y' \geq y. \end{aligned}$$

4.1.17 Definição Se (X_1, X_i) tem *f.d.p.* f_{X_1, X_i} TP_2 para $i = 1, 2$. Dizemos que (X_1, X_2) são *mais positivamente associadas* (TP_2) que (X_1, X_3) se

$$\tau_{X_1, X_2} \geq \tau_{X_1, X_3}.$$

4.1.18 Proposição*: Sejam X_1 e X_i variáveis aleatórias com *f.d.p.* conjunta TP_2 . Se (X_1, X_2) forem *localmente mais positivamente associadas* (TP_2) que (X_1, X_3) , então

$$P(X_2 > y | X_1 = x') - P(X_2 > y | X_1 = x) \geq P(X_3 > y | X_1 = x') - P(X_3 > y | X_1 = x),$$

$$\forall x \leq x'.$$

Prova de 4.1.18: previamente devemos notar que, para y, x, x' arbitrários

$$P(X_i > y | X_1 = x') - P(X_i > y | X_1 = x) \geq 0,$$

a partir de 2.1.1

$$f_{X_1, X_i} TP_2 \Rightarrow (X_1, X_i) SI, \quad i = 1, 2.$$

$$P(X_2 > y | X_1 = x') - P(X_2 > y | X_1 = x) \geq P(X_3 > y | X_1 = x') - P(X_3 > y | X_1 = x)$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \int_y^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x', w) dw \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x, z) dz - \int_y^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x, w) dw \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x', z) dz \\ & \geq \int_y^{+\infty} f_{X_1, X_3}(x', w) dw \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_3}(x, z) dz - \int_y^{+\infty} f_{X_1, X_3}(x, w) dw \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_3}(x', z) dz \end{aligned}$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \int_y^{+\infty} \int_{-\infty}^y [f_{X_1, X_2}(x', w) f_{X_1, X_2}(x, z) - f_{X_1, X_2}(x, w) f_{X_1, X_2}(x', z)] dz dw \\ & \geq \int_y^{+\infty} \int_{-\infty}^y [f_{X_1, X_3}(x', w) f_{X_1, X_3}(x, z) - f_{X_1, X_3}(x, w) f_{X_1, X_3}(x', z)] dz dw. \end{aligned}$$

Seja (X_1, X_2, X_3) um vetor trivariado com *f.d.p.* dada por f_{X_1, X_2, X_3} e $\varphi : R^2 \rightarrow R$ tal que $U := \varphi(X_2, X_3)$ constitui uma variável aleatória, e a *f.d.a.* $F_{X_1, U}$ é absolutamente contínua. O objetivo é estabelecer condições para poder afirmar:

$$E_{X_1, U}(F_{X_1, U}(X_1, U)) \geq E_{X_1, X_i}(F_{X_1, X_i}(X_1, X_i)), i = 2, 3$$

em outros termos

$$\tau_{X_1, \varphi(X_2, X_3)} \geq \max\{\tau_{X_1, X_2}, \tau_{X_1, X_3}\}.$$

Consideraremos

$$\varphi(x_2, x_3) = x_2 + x_3, \text{ logo } f_{X_1, \varphi(X_2, X_3)}(u, w) = \int f_{X_1, X_2, X_3}(u, v, w - v) dv$$

enquanto que

$$\begin{aligned} F_{X_1, \varphi(X_2, X_3)}(x_1, x) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^x \left\{ \int f_{X_1, X_2, X_3}(u, v, w - v) dv \right\} dw du \\ F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \left\{ \int f_{X_1, X_2, X_3}(u, v, w) dw \right\} dv du \\ F_{X_1, X_3}(x_1, x_3) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_3} \left\{ \int f_{X_1, X_2, X_3}(u, v, w) dv \right\} dw du \end{aligned}$$

4.1.19 Proposição*

Seja (X_1, X_2, X_3) com *f.d.p.* conjunta f_{X_1, X_2, X_3} . $\varphi : R^2 \rightarrow R$, $\varphi(x, y) = x + y$.

Supondo que $\forall u, v, w$,

$$f_{X_1, X_2, X_3}(u, v, w - v) \geq \max\{f_{X_1, X_2, X_3}(u, w, v), f_{X_1, X_2, X_3}(u, v, w)\}.$$

Então,

$$\tau_{X_1, X_2 + X_3} \geq \max\{\tau_{X_1, X_2}, \tau_{X_1, X_3}\}.$$

Prova de 4.1.19:

sejam

$$I := E_{X_1, U}(F_{X_1, U}(X_1, U)), \quad U := \varphi(X_2, X_3)$$

$$II := E_{X_1, X_2}(F_{X_1, X_2}(X_1, X_2))$$

$$III := E_{X_1, X_3}(F_{X_1, X_3}(X_1, X_3)).$$

Para a prova consideraremos a seguinte notação: $f_{1,2,3} = f_{X_1, X_2, X_3}$, assim como $f_{i,j} = f_{X_i, X_j}$. Além disso, quando não for especificado, os limites da integração serão $-\infty$ e $+\infty$.

$$\begin{aligned} I &= \int \int^{x_1} \int \int \int^{x_2} f_{1,2,3}(u, v, w - v) f_{1,2,3}(x_1, k, x_2 - k) dw dx_2 dk dv du dx_1 \\ II &= \int \int^{x_1} \int \int \int^{x_2} f_{1,2,3}(u, w, v) f_{1,2,3}(x_1, x_2, k) dw dx_2 dk dv du dx_1 \\ III &= \int \int^{x_1} \int \int \int^{x_2} f_{1,2,3}(u, v, w) f_{1,2,3}(x_1, k, x_2) dw dx_2 dk dv du dx_1. \end{aligned}$$

Como, por hipótese,

$$f_{1,2,3}(u, v, w - v) \geq \max\{f_{1,2,3}(u, w, v), f_{1,2,3}(u, v, w)\},$$

então,

$$\begin{aligned} f_{1,2,3}(u, v, w - v) &\geq \max\{f_{1,2,3}(u, w, v), f_{1,2,3}(u, v, w)\}, \quad w \leq x_2, u \leq x_1 \\ f_{1,2,3}(x_1, k, x_2 - k) &\geq \max\{f_{1,2,3}(x_1, x_2, k), f_{1,2,3}(x_1, k, x_2)\} \end{aligned}$$

A partir daí, temos

$$\begin{aligned} f_{1,2,3}(u, v, w - v) f_{1,2,3}(x_1, k, x_2 - k) &\geq f_{1,2,3}(u, w, v) f_{1,2,3}(x_1, x_2, k), \quad w \leq x_2, u \leq x_1 \\ f_{1,2,3}(u, v, w - v) f_{1,2,3}(x_1, k, x_2 - k) &\geq f_{1,2,3}(u, v, w) f_{1,2,3}(x_1, k, x_2), \quad w \leq x_2, u \leq x_1. \end{aligned}$$

Finalmente, $\tau_{X_1, X_2+X_3} \geq \max\{\tau_{X_1, X_2}; \tau_{X_1, X_3}\}$.

Comentário: Considerando que X_1 é a variável a predizer e (X_2, X_3) a base da predição, a Proposição anterior adquire valor, ou seja a soma dos elementos da base de predição representa uma adequada redução da dimensão dos elementos da base, quando o comportamento de X_2 e X_3 - desde a densidade conjunta - for equivalente, isto é: pontualmente $f_{1,2,3}(u, w, v)$ e $f_{1,2,3}(u, v, w)$ são limitados superiormente por $f_{1,2,3}(u, v, w - v)$.

4.2. Medida τ -Kendall no caso discreto

Exemplo i: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
$f_1(\cdot)$	1/2	1/2	1

Características:

(1) $P(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}$, $P(X = Y) = 1$

(2) As variáveis X e Y são $PA(TP_2)$.

(3) $\tau_{X,Y} = 1$; $T_{X,Y} = 0,25$.

(4) Violação de 3.2.8 [Nelsen (1992)]: $\tau \neq 2T$.

Exemplo ii: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/4	0	1/4
1	0	3/4	3/4
$f_1(\cdot)$	1/4	3/4	1

Características:

$$(1) P(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}, \quad P(X = Y) = 1$$

(2) As variáveis X e Y são $PA(TP_2)$.

$$(3) \tau_{X,Y} = 1; \quad T_{X,Y} = 0,19.$$

(4) Violação de 3.2.8 [Nelsen (1992)] : $\tau \neq 2T$.

Notemos que em (i) e (ii) toda a probabilidade está concentrada na diagonal usual.

Exemplo iii: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/4	1/4	2/4
1	0	2/4	2/4
$f_1(\cdot)$	1/4	3/4	1

Características:

$$(1) P(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}.$$

(2) As variáveis X e Y são $PA(TP_2)$.

$$(3) \tau_{X,Y} = 1; \quad T_{X,Y} = 0,13.$$

(4) Violação de 3.2.8 [Nelsen (1992)]: $\tau \neq 2T$.

Violação de (ii) de 4.1.1: $P(X = Y) \neq 1$, ao passo que verifica (i) e (iii).

Exemplo iv: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	6/16	1/16	7/16
1	2/16	7/16	9/16
$f_1(\cdot)$	8/16	8/16	1

Características:

(1) As variáveis X e Y são $PA(TP_2)$.

(2) $\tau_{X,Y} = 0,97$; $T_{X,Y} = 0,16$.

(3) Violação de 3.2.8 [Nelsen(1992)].

Exemplo v: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$f_1(\cdot)$	1/2	1/2	1

Características:

- (1) As variáveis são independentes.
- (2) As variáveis X e Y são $PA(TP_2)$.
- (3) $\tau_{X,Y} = 0,75$; $T_{X,Y} = 0$.
- (4) Violação de 3.2.8 [Nelsen(1992)].

Exemplo vi: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	1/16	7/16	8/16
1	6/16	2/16	8/16
$f_1(\cdot)$	7/16	9/16	1

Características:

- (1) As variáveis X e Y são $NA(RR_2)$.
- (2) $\tau_{X,Y} = 0,34$; $T_{X,Y} = -0,16$.
- (3) Violação de 3.2.8 [Nelsen(1992)]: $\tau > 0$.

Exemplo vii: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	0	1/2	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$f_1(\cdot)$	1/4	3/4	1

Características:

- (1) $P(x, y) = \max\{0, F_1(x) + F_2(y) - 1\}$.
- (2) As variáveis X e Y são $NA(RR_2)$.
- (3) $\tau_{X,Y} = 0,50$; $T_{X,Y} = -0,13$.
- (4) Violação de 3.2.8 [Nelsen(1992)]: $\tau > 0$.

Violação da condição (i) e (ii) de 4.1.8, ao passo que verifica (iii) da mesma.

Exemplo viii: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	0	3/4	3/4
1	1/4	0	1/4
$f_1(\cdot)$	1/4	3/4	1

Características:

$$(1) P(x, y) = \max\{0, F_1(x) + F_2(y) - 1\}, \quad P(X = 1 - Y) = 1.$$

(2) As variáveis X e Y são $NA(RR_2)$.

$$(3) \tau_{X,Y} = 0,25; \quad T_{X,Y} = -0,19.$$

(4) Verifica (ii) e (iii), de 4.1.8, mas viola (i) da mesma.

Violação de 3.2.8 [Nelsen (1992)].

Exemplo ix: $p(x, y)$

$Y \setminus X$	0	1	$f_2(\cdot)$
0	0	1/2	1/2
1	1/2	0	1/2
$f_1(\cdot)$	1/2	1/2	1

Características:

$$(1) P(x, y) = \max\{0, F_1(x) + F_2(y) - 1\}, \quad P(X = 1 - Y) = 1$$

(2) As variáveis X e Y são $NA(RR_2)$.

$$(3) \tau_{X,Y} = 0; \quad T_{X,Y} = -0,25.$$

(4) Violação de 4.1.8 (i) e de 3.2.8.

“Con este tango que es burlón y compadrito,

se ató dos alas la emoción de mi suburbio.

Con este tango nació el tango y como un grito

salió del sórdido barrial buscando el cielo.

Conjuro extraño de un amor hecho cadencia

que abrió caminos sin más ley que su esperanza

mezcla de rabia, de dolor, de fe, de ausencia,

llorando en la inocencia de un ritmo juguetón...”

Enrique Santos Discépolo y Juan Carlos Marambio Catán, *“El Choclo”*.

Capítulo 5

Associação e Predição

- *Seção 5.1: Construção de um Preditor*
- *Seção 5.2: Adequacidade*
- *Seção 5.3: Predição Empírica*

5.1. Construção de um Preditor

Nesta Seção, a idéia que vai ser explorada é: se tivermos um vetor aleatório $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ onde $(X_2, \dots, X_n)$ é a coleção de variáveis na base das quais pretendemos prever X_1 ; variável aleatória que decorre das anteriores, a “informação” contida em $(X_2, \dots, X_n)$ pode ser quantificada pela distribuição da $n-1$ upla de variáveis, $F_{X_2, \dots, X_n}$, a mesma contém a “informação” unidimensional mais completa - do ponto de vista probabilístico. Em princípio, para a predição de X_1 procuramos um preditor unidimensional, sendo que $X_2, \dots, X_n$ fornecem *tudo o que é preciso* para a definição de X_1 . Analisamos $U_2 = F_{X_2, \dots, X_n}(X_2, \dots, X_n)$, *f.d.a.* aplicada na base $(X_2, \dots, X_n)$, como quantificador da informação da base.

Embora U_2 esteja alocado entre 0 e 1, ele reproduz o *comportamento* de X_1 , salvo escala e alocamento. Os ajustes feitos sobre U_2 para se tornar um preditor vão depender do banco de dados - *histórico* - de X_1 (experiências prévias da n upla completa).

Consideremos as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ todas elas designando para cada $\omega \in \mathcal{X}$ os valores, $X_i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ respectivamente, os quais podem ser denotados simplesmente por x_i , $i = 1, \dots, n$, respectivamente. Naturalmente, podemos considerar a σ -álgebra induzida por $\{X_1, \dots, X_n\}$, isto é, $\sigma(X_1, \dots, X_n)$, a saber, a menor σ -álgebra que faz mensuráveis ao vetor $(X_1, \dots, X_n)$.

Adotando $\mathcal{A} := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, temos logo o espaço amostral $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

5.1.1 Lema*

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório no espaço amostral $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, com *f.d.a.* $F_{\underline{X}}$ contínua. Então, $U(\omega) := F_{\underline{X}}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, $\omega \in \mathcal{X}$, é uma variável aleatória.

Prova de 5.1.1:

para cada

$$X_i : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$$

e $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$, boreliano da reta, $X_i^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Seja $S \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$. Consideremos

$$A = \{\omega \in \mathcal{X} : F_{X_1, \dots, X_n}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in S\}.$$

Assim,

$$A = \{\omega \in \mathcal{X} : (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}(S)\}.$$

Suponhamos primeiro que S é aberto.

Mas, $F_{X_1, \dots, X_n} : R^n \rightarrow R$ é contínua, então sua preimagem $(F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}(S))$ é aberta, para os abertos S em R . Logo, $F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}(S)$ é um boreliano em R^n . Finalmente $A \in \sigma(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{B}$.

Notemos que se $S = [a, b)$, então

$$\begin{aligned} F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}(S) &= F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right)\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}\left(a - \frac{1}{n}, b\right)\} \end{aligned}$$

Novamente, $F_{X_1, \dots, X_n}^{-1}\left(a - \frac{1}{n}, b\right)$ é aberto em R^n .

Finalmente, $A \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$, quando S é um boreliano.

5.1.2 Lema*

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com *f.d.a.* $F_{\underline{X}}$ contínua. Suponhamos ainda, que exista uma sequência ordenada de subíndices $\{i_j\}_{j=1}^{n-1} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $i_k < i_s$ sempre que $k < s$, tal que $P(\{\underline{x} : F_{\underline{X}}(\underline{x}) = u | X_{i_1} = x_{i_1}^0, \dots, X_{i_{n-1}} = x_{i_{n-1}}^0\})$ é bem definida para toda $n-1$ upla $(x_{i_1}^0, \dots, x_{i_{n-1}}^0)$ na imagem de $(X_{i_1}, \dots, X_{i_{n-1}})$ e para todo $u \in (0, 1)$ - i.e. $P(X_{i_1} = x_{i_1}^0, \dots, X_{i_{n-1}} = x_{i_{n-1}}^0) \neq 0$ ou $f_{X_{i_1}, \dots, X_{i_{n-1}}}(x_{i_1}^0, \dots, x_{i_{n-1}}^0) \neq 0$. Então, a variável aleatória $U := F_{\underline{X}}(X_1, \dots, X_n)$ tem função de distribuição acumulada contínua.

Prova de 5.1.2:

denotamos por $\underline{x}$ cada elemento na imagem de $\underline{X}$. Consideremos $u \in (0, 1)$.

Afirmção: caso bivariado,

$$\forall u \in (0, 1), P(\{(x_1, x_2) : F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = u\}) = 0.$$

Notemos que esse resultado é naturalmente extendido.

A quantidade

$$P(\{(x_1, x_2) : F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = u\})$$

pode ser exposta como segue:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} P((X_1, X_2) : F_{X_1, X_2}(X_1, X_2) = u | X_2 = y_0) dF_{X_2}(y_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(X_1 : F_{X_1, X_2}(X_1, y_0) = u)}{P(X_2 = y_0)} dF_{X_2}(y_0) \end{aligned}$$

Na prévia estamos supondo $P(X_2 = y_0) \neq 0$ ou equivalentemente, se for o caso $f_{X_2}(y_0) \neq 0, \forall y_0 \in \text{Imag}(X_2)$.

A seguir, analisamos o integrando da anterior,

Como $F_{X_2}(y_0) > 0$, pois $P(X_2 = y_0) \neq 0$ podemos analisar os seguintes casos:

- se $u > F_{X_2}(y_0)$. Então $u > F_{X_1, X_2}(x, y_0), \forall x$. Logo

$$P(X_1 : F_{X_1, X_2}(X_1, y_0) = u) = 0.$$

- se $u < F_{X_2}(y_0)$, definamos

$$h(x) := F_{X_1, X_2}(x, y_0), \quad \forall x \in \text{Imag}(X_1),$$

$$h^{qi}(v) := \inf\{t : h(t) \geq v\}, \quad v \in [u, F_{X_2}(y_0)].$$

Notemos que $\{t : h(t) \geq v\} \neq \emptyset$, pois como

$$h(t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} F_{X_2}(y_0) \geq v, \forall v \in [u, F_{X_2}(y_0)],$$

então $\exists M > 0$ tal que $\forall t > M, h(t) \geq v$.

Mais ainda, o conjunto $\{t : h(t) \geq v\}$ é limitado inferiormente.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X_1, X_2}(x, y_0) = 0$, $\exists t_0$ tal que $h(t_0) < v$, e t_0 é limitante inferior do conjunto de interesse. Logo, pelo axioma da completitude de R , $\{t : h(t) \geq v\}$ admite ínfimo.

Com os mesmos argumentos de 3.3.2,

$$h^{qi}(v) \leq t \Leftrightarrow v \leq h(t), \forall v \in [u, F_{X_2}(y_0)],$$

consequência da continuidade à direita de h .

Logo, vale o equivalente 3.3.7, ou seja h^{qi} é contínua à direita no seu domínio de definição.

Consideremos o intervalo arbitrário $[u, u + \epsilon)$ onde $u + \epsilon \in [u, F_{X_2}(y_0)]$. Sabemos que

$$u \leq h(x) \text{ se, e somente se, } h^{qi}(u) \leq x,$$

$$u + \epsilon > h(x) \text{ se, e somente se, } h^{qi}(u + \epsilon) > x,$$

$$\begin{aligned} P(\{x : u \leq h(x) < u + \epsilon\}) &= P(x : h^{qi}(u) \leq x < h^{qi}(u + \epsilon)) \\ &= F_{X_1}(h^{qi}(u + \epsilon)) - F_{X_1}(h^{qi}(u)) \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

A última propriedade decorre da continuidade à direita da h^{qi} e da continuidade da F_{X_1} .

- se $u = F_{X_2}(y_0)$,

$$\begin{aligned}
 & P(w : F_{X_1, X_2}(X_1(w), y_0) = u) \\
 &= P(w : F_{X_2}(y_0) = u, F_{X_1, X_2}(X_1(w), y_0) = u, X_2(w) \leq y_0) \\
 &\leq P(w : X_1(w) \in [x_0, +\infty), X_2(w) \leq y_0), \quad x_0 \exists \text{ pela monotonicidade de } F_{X_1, X_2} \\
 &= P(w : X_1(w) \in [x_0, +\infty), X_2(w) \in (-\infty, y_0]) \\
 &= F_{X_2}(y_0) - F_{X_1, X_2}(x_0, y_0) = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, $P(\{x : h(x) = u\}) = 0$. ♣

Observação: A hipótese deste Lema foi criada para poder fazer uso do mecanismo de definição da quase-inversa, no caso univariado, podendo deste modo aproveitar o aprendizado na Seção 3 do capítulo 3.

5.1.3 Proposição*

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vetor aleatório, com X_1 sendo a variável a predizer, $(X_2, \dots, X_n)$ base da predição, tal que a acumulada $F_{X_2, \dots, X_n}$ da $(n - 1)$ upla $(X_2, \dots, X_n)$ é contínua e verifica as hipóteses de 5.1.2, permitindo definir $U_2 := F_{X_2, \dots, X_n}(X_2, \dots, X_n)$ como v.a. contínua. Assumamos que F_{X_1} é contínua.

Suponhamos ainda que dados dois vetores independentes $(X_2, \dots, X_n)$ e $(X'_2, \dots, X'_n)$ com a mesma distribuição $F_{X_2, \dots, X_n}$, verifica-se

$$X_i \geq X'_i \text{ e } X_j \geq X'_j \Rightarrow X_s \geq X'_s \text{ q.t.p., } \forall s \neq i, s \neq j, i \neq j, i, j, s \in \{2, \dots, n\},$$

i.e., a concordância entre duas variáveis rotuladas por i e j induz a tendência da variável rotulada por s .

$$\{(X_i - X'_i)(X_j - X'_j) < 0\} = \{(X_j - X'_j)(U_2 - U'_2) < 0\} \text{ q.t.p. } \forall i \neq j, i, j \in \{2, \dots, n\},$$

i.e., a discordância entre as variáveis rotuladas por i e j é captada pela variável U_2 .
Então,

$$\tau_{X_1, U_2} \geq \tau_{X_1, X_i}, \quad i = 2, \dots, n, \quad U_2 := F_{X_2, \dots, X_n}(X_2, \dots, X_n).$$

5.1.4 Lema*

Seja $(X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório que verifica as hipóteses da proposição anterior. Se X_1 e X_i são $PA(TP_2)$, $i = 2, \dots, n$, então U_2 como função das variáveis $X_2, \dots, X_n$, maximiza a medida τ (que aqui constitui uma medida de associação), isto é, U_2 maximiza a associação existente entre X_1 e cada uma das variáveis X_i , $i = 2, \dots, n$.

Prova de 5.1.3:

Afirmção 1

Seja (X_1, X_2, X_3) vetor aleatório, com X_1 variável aleatória a predizer, (X_2, X_3) base da predição, tal que a F_{X_2, X_3} verifica as hipóteses de 5.1.2. Definamos $U(\omega) := F_{X_2, X_3}(X_2(\omega), X_3(\omega))$ variável aleatória, então,

$$\tau_{X_1, U} \geq \tau_{X_1, X_i}, \quad i = 2, 3,$$

sempre que,

$$\{(X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) < 0, (X_i - X'_i)(U - U') < 0\} = \{(X_i - X'_i)(U - U') < 0\} \text{ q.t.p.}$$

$i = 2, 3$, onde (X_2, X_3) e (X'_2, X'_3) são duas realizações independentes da mesma distribuição F_{X_2, X_3} .

Afirmção 2

Se a função de distribuição acumulada F_{X_1} é contínua, então, as respectivas medidas de concordância τ_{X_1, X_2} , τ_{X_1, X_3} e $\tau_{X_1, U}$ constituem medidas de associação - pois U já constitui uma v.a. contínua, pela afirmação prévia - e, se X_1, X_j , $j = 2, 3$ são $PA(TP_2)$, então, a variável aleatória U maximiza a associação positiva.

Prova da afirmação 1

Seja $U := F_{X_2, X_3}(X_2, X_3)$. Se consideramos dois pares de vetores independentes e com a mesma distribuição, (X_1, U) e (X'_1, U') , temos,

$$\tau_{X_1, U} = 2\eta_{X_1, U} - 1, \quad \eta_{X_1, U} = P((X_1 - X'_1)(U - U') \geq 0).$$

Analogamente,

$$\tau_{X_1, X_i} = 2\eta_{X_1, X_i} - 1, \quad \eta_{X_1, X_i} = P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0),$$

o par (X_1, X_i) é independente do par (X'_1, X'_i) e ambos têm a mesma distribuição.

$\eta_{X_1, U}$

$$\begin{aligned} &= P((X_1 - X'_1)(U - U') \geq 0) \\ &= P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2)^2(U - U') \geq 0) \\ &=_{*1} P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_2 - X'_2)(U - U') \geq 0) \\ &\quad + P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0, (X_2 - X'_2)(U - U') < 0) \\ &\geq P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_2 - X'_2)(U - U') \geq 0) \\ &= P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3)^2(U - U') \geq 0) \\ &= P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) \geq 0, \\ &\quad (X_3 - X'_3)(U - U') \geq 0) \\ &\quad + P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) < 0, \\ &\quad (X_3 - X'_3)(U - U') < 0) \\ &=_{*2} P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_3 - X'_3)(U - U') \geq 0) \\ &\quad + P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) < 0, \\ &\quad (X_3 - X'_3)(U - U') < 0) \\ &=_{*3} P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_3 - X'_3)(U - U') \geq 0) \\ &\quad + P((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) \geq 0, (X_3 - X'_3)(U - U') < 0) \\ &= \eta_{X_1, X_2} \end{aligned}$$

onde, em *1 é usada a continuidade das marginais acumuladas: F_{X_i} , $i = 1, 2$, F_U .

*2 :

$$(X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} X_2 \geq X'_2, X_3 \geq X'_3 \\ \text{ou} \\ X_2 < X'_2, X_3 < X'_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(X_3 - X'_3)(U - U') \geq 0 \text{ q.t.p.,}$$

a última implicação decorre da monotonicidade da *f.d.a.* F_{X_2, X_3} .

*3 : decorre da hipótese da afirmação 1 para $i = 3$.

Com argumentos análogos prova-se que $\eta_{X_1, U} \geq \eta_{X_1, X_3}$.

Finalmente, decorre das anteriores que

$$\tau_{X_1, U} \geq \max\{\tau_{X_1, X_2}, \tau_{X_1, X_3}\}.$$

Notar que uma hipótese alternativa para a prova da afirmação 1 é a seguinte:

$$\{(X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) \geq 0, (X_i - X'_i)(U - U') \geq 0\}^c$$

$$= \{(X_2 - X'_2)(X_3 - X'_3) < 0, (X_i - X'_i)(U - U') < 0\} \text{ q.t.p.}$$

Num sentido *amplo* a hipótese alternativa exige a concordância (discordância) *simultânea* de X_2, X_3 e U .

A prova para o caso geral, decorre das mesmas idéias:

η_{X_1, U_2}

$$\begin{aligned}
&= P((X_1 - X'_1)(U_2 - U'_2) \geq 0) \\
&= P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i)^2(U_2 - U'_2) \geq 0), \quad n \geq i \geq 2 \\
&= P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, (X_i - X'_i)(U_2 - U'_2) \geq 0) \\
&\quad + P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) < 0, (X_i - X'_i)(U_2 - U'_2) < 0) \\
&\geq P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, (X_i - X'_i)(U_2 - U'_2) \geq 0) \\
&= P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, \\
&\quad (X_i - X'_i)(X_j - X'_j)^2(U_2 - U'_2) \geq 0), \quad j \neq i, n \geq j \geq 2 \\
&= P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, (X_i - X'_i)(X_j - X'_j) \geq 0, \\
&\quad (X_j - X'_j)(U_2 - U'_2) \geq 0) \\
&\quad + P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, (X_i - X'_i)(X_j - X'_j) < 0, \\
&\quad (X_j - X'_j)(U_2 - U'_2) < 0) \\
&=_{*4} P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, (X_j - X'_j)(U_2 - U'_2) \geq 0) \\
&\quad + P((X_1 - X'_1)(X_i - X'_i) \geq 0, (X_j - X'_j)(U_2 - U'_2) < 0) \\
&= \eta_{X_1, X_i}, \quad n \geq i \geq 2
\end{aligned}$$

*4 : $(X_i - X'_i)(X_j - X'_j) \geq 0 \Rightarrow (X_j - X'_j)(U_2 - U'_2) \geq 0$ q.t.p., decorre da primeira hipótese da proposição e da monotonicidade da *f.d.a.* $F_{X_2, \dots, X_n}$. Finalmente, pela segunda hipóteses da proposição decorre a igualdade.

5.1.5 Natureza topológica do preditor: A seguir, apresentamos uma análise feita sobre distribuições em R^2 .

Seja F_{X_1, X_2} f.d.a. contínua, de R^2 em R . Considere $u \in (0, 1)$.

Sejam

$$A_u := \{\underline{x} \in R^2 : F_{X_1, X_2}(\underline{x}) \leq u\}, \quad B_u := \{\underline{x} \in R^2 : F_{X_1, X_2}(\underline{x}) > u\}.$$

$\pi_i : R^2 \rightarrow R$, a projeção usual na i -ésima coordenada, $i = 1, 2$.

Notemos que $B_u \neq \emptyset$, pois $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 1$. Então, dado $\epsilon > 0 \exists M$ tal que se $x_i > M$, $i = 1, 2$ resulta $1 - F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) < \epsilon$.

Pela arbitrariedade de ϵ , podemos considerar $\epsilon = 1 - u$. Logo, $B_u \neq \emptyset$.

Com argumentos semelhantes, é possível concluir que $A_u \neq \emptyset$.

Conseqüentemente é possível fazer

$$B_u^i = \pi_i(B_u), \quad A_u^i = \pi_i(A_u), \quad i = 1, 2.$$

Mais especificamente,

$$A_u^1 = \{x : \exists y_x, F_{X_1, X_2}(x, y_x) \leq u\}, \quad B_u^1 = \{x : \exists y_x, F_{X_1, X_2}(x, y_x) > u\}$$

5.1.6 Proposição* : Se F_{X_1, X_2} é f.d.a. de R^2 em R , $u \in (0, 1)$, B_u^i , A_u^i $i = 1, 2$ definidos com anterioridade. B_u^i é limitado inferiormente e possui ínfimo $m_i^u - m_i^u \in fr(B_u^i)$ (fronteira de B_u^i) - $i = 1, 2$. Enquanto que A_u^i , $i = 1, 2$ não é limitado superiormente.

Prova de 5.1.6:

Notemos que A_u^1 não é limitado superiormente, pois dado $\epsilon > 0$, $\forall x \exists M_{x,\epsilon}$ tal que, se $y < M_{x,\epsilon} \Rightarrow F_{X_1,X_2}(x,y) < \epsilon$ (pois $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X_1,X_2}(x,y) = 0$), então, $(x,y) \in A_u$. Logo, $\{(x,0)\} \subseteq A_u^1$, $\forall x \in R$.

Por outro lado, B_u^1 é limitado inferiormente.

Afirmção 1 $L := \{x \in R : u \geq F_{X_1}(x)\}$ constitui um conjunto de limitantes inferiores de B_u^1 . $L \subseteq A_u^1$, $L \cap B_u^1 = \emptyset$.

Prova da *Afirmção 1*

$L \neq \emptyset$: pois, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X_1}(x) = 0$, i.e., $\forall \epsilon > 0 \exists M_\epsilon$ tal que se $x < M_\epsilon \Rightarrow F_{X_1}(x) < \epsilon$. Logo, se $\epsilon \leq u$, $x \leq M_\epsilon$, $x \in L$.

Suponhamos agora que existem $x_0 \in B_u^1$ e $x'_0 \in L$ tal que $x_0 < x'_0$:

(i) como $x_0 \in B_u^1 \Rightarrow \exists y_0$ tal que $F_{X_1,X_2}(x_0, y_0) > u$, então $F_{X_1,X_2}(x'_0, y_0) > u$;

(ii) como $x'_0 \in L \Rightarrow u \geq F_{X_1}(x'_0) \geq F_{X_1,X_2}(x'_0, y) \forall y \in R$, particularmente, $u \geq F_{X_1,X_2}(x'_0, y_0)$.

Logo, por (i) e (ii) conclui-se

$$u \geq F_{X_1,X_2}(x'_0, y_0) > u : \text{ absurdo,}$$

ou seja, que L constitui um conjunto de limitantes inferiores de B_u^1 .

Além disso, $L \subseteq A_u^1$, $L \cap B_u^1 = \emptyset$.

Primeiramente, se $x \in L$, $u \geq F_{X_1}(x)$ e

$$u \geq F_{X_1}(x) \geq F_{X_1, X_2}(x, y), \quad \forall y \in R.$$

Ou seja, $L \subseteq A_u^1$.

Para a última parte da *Afirmção 1*, vamos supor que existe $x \in L \cap B_u^1$,

(i) como $x \in L \Rightarrow F_{X_1}(x) \leq u \Rightarrow \forall y, F_{X_1, X_2}(x, y) \leq u$;

(ii) como $x \in B_u^1 \Rightarrow \exists y_x : F_{X_1, X_2}(x, y_x) > u$.

Logo, (i) e (ii) levam ao absurdo. Finalizando com a prova da *Afirmção 1*

Notemos que, pelo axioma da completitude de R , os conjuntos B_u^i , $i = 1, 2$ possuem ínfimo em R .

Consideremos B_u^1 . Para este conjunto não vazio, existe m_1^u verificando as seguintes propriedades:

(i) $\forall x \in B_u^1, m_1^u \leq x$.

(ii) se $s \in R$ satisfaz, $s \leq x, \forall x \in B_u^1$. Então $s \leq m_1^u$.

Afirmção 2 $m_1^u \in fr\{B_u^1\}$ (fronteira de B_u^1).

Prova da *Afirmção 2*

Como $m_1^u \in \overline{B_u^1}$, pois, se supomos que m_1^u não pertence ao fecho de $B_u^1 \Rightarrow m_1^u \in R - \overline{B_u^1}$, i.e. , $\exists \epsilon > 0$ tal que $(m_1^u - \epsilon, m_1^u + \epsilon) \subseteq R - \overline{B_u^1}$. Logo, $\exists v_\epsilon \in (m_1^u, m_1^u + \epsilon)$ tal que $v_\epsilon \leq x, \forall x \in B_u^1$, e $v_\epsilon \geq m_1^u$: absurdo. Por tanto, $m_1^u \in \overline{B_u^1}$.

Agora, $\overline{B_u^1} = int\{B_u^1\} \cup fr\{B_u^1\}$.

Suponhamos que $m_1^u \in int\{B_u^1\}$. Então, $\exists \epsilon > 0$ tal que $(m_1^u - \epsilon, m_1^u + \epsilon) \subseteq B_u^1, \Rightarrow \exists x \in (m_1^u - \epsilon, m_1^u) \subseteq B_u^1$: absurdo, pois, para todo $x \in B_u^1, x \geq m_1^u$. Logo, $m_1^u \notin int\{B_u^1\}$.

Finalmente

$$m_1^u \in fr\{B_u^1\}.$$

Comentário: As expectativas perante o estudo topológico dos conjuntos A_u e B_u são ambiciosas. Baseados nos resultados obtidos no caso univariado - que foram desenvolvidos na Seção 3 do Capítulo 3 - podemos afirmar que a complexidade atingida por essas estruturas em $R^n, n > 1$, não é trivial e orienta nossos passos ao trabalho de famílias de distribuições específicas, que permitam estabelecer condições para que partindo de B_u possa ser repetido o esquema utilizado no Capítulo 3, com o objetivo de que o par de variáveis X_1, X_2 com *f.d.a.* F_{X_1, X_2} possa ser *totalmente ca-*

racterizado pelos valores atingidos pela distribuição acumulada F_{X_1, X_2} no domínio de definição da mesma. O objeto de tal pretensão tem sua justificativa: a distribuição de um vetor aleatório é o *melhor resumo* para fazer inferência respeito dos dados. Por outro lado se procuramos uma redução da dimensão dos dados, precisamos de alguma proposta que possa *condensar* um vetor de dados em alguma estrutura de dimensão menor, mais não por isso menos *informativa*, nesse ponto a distribuição acumulada pode apresentar uma alternativa viável.

5.2. Adequacidade

Consideremos o espaço amostral $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, munido de uma família de distribuições de probabilidade $\mathcal{P}$. Seja $\mathcal{B}$ uma sub σ -álgebra da σ -álgebra $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é suficiente para $\mathcal{A}$ em relação à família $\mathcal{P}$, se para cada $A \in \mathcal{A}$ existe uma função $\mathcal{B}$ -mensurável, digamos g_A , sobre $\mathcal{X}$ tal que

$$P(A \cap B) = \int_B g_A dP, \quad \forall B \in \mathcal{B} \text{ e } \forall P \in \mathcal{P}.$$

Se consideramos o caso particular, onde $\mathcal{P} = \{P_0\}$, dispomos do seguinte resultado

5.2.1 Teorema [Ash (1972) pp.253]

Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$ espaço de probabilidade, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, sub σ -álgebra. $\forall A \in \mathcal{A}$, A fixo, existe uma função $P_0(A|\mathcal{B}) : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$, $(\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ mensurável, chamada probabilidade (P_0) condicional de A dada $\mathcal{B}$, tal que

$$P_0(A \cap B) = \int_B P_0(A|\mathcal{B}) dP_0, \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Assim, freqüentemente definimos

$$E_{P_0}(I_A|\mathcal{B}) := P_0(A|\mathcal{B}), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Apresentamos, a seguir, uma prova resumida do teorema anterior.

Definamos $\lambda(B) := P_0(B \cap A)$, para cada $B \in \mathcal{B}$, com $A \in \mathcal{A}$ fixado previamente.

Notemos que $\lambda \ll P_0$.

O Teorema de Radom-Nykodim garante que, consirerando $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, existe uma função $(\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ mensurável, $g : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$, tal que

$$\lambda(B*) = \int_{B*} g dP_0, \quad \forall B* \in \mathcal{B}.$$

Notemos que g , chamada derivada de Radom-Nykodim de λ com relação a P_0 , comumente denotada por $\frac{d\lambda}{dP_0}$, depende do A fixo no começo da prova. Definamos $P_0(A|\mathcal{B}) := g$. Para concluir a prova, basta notar que g é $(\mathcal{B}) - \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ mensurável, pelo próprio Teorema de Radom-Nykodim.

Assim, podemos concluir que quando estudamos a situação $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$ e consideramos uma sub σ -álgebra de $\mathcal{A}$, digamos $\mathcal{B}$, a suficiencia é sempre possível, pois sempre podemos fabricar para cada $A \in \mathcal{A}$ uma medida $\lambda_A(B) := P_0(A \cap B)$ sobre $\mathcal{B}$ que será dominada absolutamente por P_0 . Portanto, existirá a $\frac{d\lambda_A}{dP_0}$ função com domínio em $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ e imagem de chegada em $(\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$, $(\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ mensurável, que verifica

$$\begin{aligned} P_0(A \cap B) &= \lambda_A(B) \\ &= \int_B \frac{d\lambda_A}{dP_0} dP_0, \quad \forall B \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Apresentamos em seguida outro conceito da teoria de suficiencia [Basu e Cheng (1981)].

Daqui para frente nos permitimos a notação reduzida $\mathcal{A}$ mensurável quando fizermos menção a $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ mensurável.

5.2.2 Adequacidade: Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas sub σ -álgebras da σ -álgebra $\mathcal{A}$. Sem perda da generalidade podemos tomar $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$; onde $\mathcal{A}$ é a menor σ -álgebra contendo a união de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Consideremos $\mathcal{B}_0$ sub σ -álgebra de $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}_0$ é adequada para prever $\mathcal{C}$ na base de $\mathcal{B}$, se para cada $C \in \mathcal{C}$ existe uma versão $\mathcal{B}_0$ -mensurável da $E_{P_0}(I_C|\mathcal{B})$.

Notação: $\mathcal{B}_0 \text{ adq}(\mathcal{B}; \mathcal{C}, P_0)$

Notemos que, pelo Teorema 1 (Skibinsky (1966)), temos, $\mathcal{B}_0 \text{ adq}(\mathcal{B}; \mathcal{C}, P_0)$ se, e somente se, dado $B \in \mathcal{B}$, existe uma versão da $E_{P_0}(I_B|\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C})$, $\mathcal{B}_0$ -mensurável.

Se $B \in \mathcal{B}$, então, I_B é uma variável aleatória sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$. Dada a σ -álgebra $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$ contida em $\mathcal{A}$, existe uma função,

$$E_{P_0}(I_B|\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}) : (\mathcal{X}, \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$$

tal que $\forall D \in \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$,

$$\int_D I_B dP_0 = \int_D E_{P_0}(I_B|\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}) dP_0$$

Pelo Teorema 6.4.3 de Ash pp.252, segue-se que, $E_{P_0}(I_B|\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C})$ é P_0 -integrável e $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$ -mensurável.

Por outro lado, para um espaço probabilístico $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$ dotado de três sub σ -álgebras de $\mathcal{A}$; $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$. Verifica-se

$$\mathcal{F} \underline{\parallel} \mathcal{G} \mid \mathcal{H} \text{ q.t.p. } [P_0]$$

($\mathcal{F}$ independente de $\mathcal{G}$ dada $\mathcal{H}$)

se, e somente se, para cada $G \in \mathcal{G}$, existe uma versão $\mathcal{H}$ -mensurável de

$$E_{P_0}(I_G | \mathcal{F} \vee \mathcal{H}).$$

[Loève(1963)].

Aplicando este resultado para $\mathcal{F} = \mathcal{C}$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, $\mathcal{H} = \mathcal{B}_0$, temos o seguinte Lema,

5.2.3 Lema

$$\mathcal{C} \underline{\parallel} \mathcal{B} \mid \mathcal{B}_0 \text{ q.t.p. } [P_0]$$

se, e somente se, para cada $B \in \mathcal{B}$, existe uma versão $\mathcal{B}_0$ -mensurável de

$$E_{P_0}(I_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}).$$

Vale dizer que as seguintes condições são equivalentes

5.2.4 Teorema

Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$ um espaço probabilístico, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}_0$, sub σ -álgebras de $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Então, as seguintes condições são equivalentes,

(i) $\mathcal{B}_0 \text{ adq}(\mathcal{B}; \mathcal{C}, P_0)$;

(ii) para cada $B \in \mathcal{B}$, existe uma versão $\mathcal{B}_0$ -mensurável da $E_{P_0}(I_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C})$;

(iii) $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \mid \mathcal{B}_0 \text{ q.t.p. } [P_0]$.

5.2.5 Adequacidade e Predição: Consideremos as variáveis aleatórias e observáveis X_2, X_3 e a variável aleatória não observável X_1 , todas elas designando para cada $\omega \in \mathcal{X}$ os valores, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega)$ e $X_1(\omega)$ respectivamente. Naturalmente, podemos considerar as σ -álgebras induzidas por (X_2, X_3) e X_1 , isto é, $\sigma(X_2, X_3)$ e $\sigma(X_1)$, a saber, as menores σ -álgebras que tornam mensuráveis o par (X_2, X_3) e a função X_1 , respectivamente.

Adotamos, $\mathcal{B} := \sigma(X_2, X_3)$, $\mathcal{C} := \sigma(X_1)$. Podemos, pois, considerar $\mathcal{A} := \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Suponhamos que a função de distribuição acumulada do par (X_2, X_3) , F_{X_2, X_3} é contínua. Consideremos a variável aleatória $U := F_{X_2, X_3}(X_2, X_3)$. Poderia esta ser uma “boa” preditora da variável não observável X_1 ?

Adotamos $\mathcal{T} := \sigma(U)$. É possível notar que $\mathcal{T}$ é sub σ -álgebra de $\mathcal{B}$.

Seja $A \in \mathcal{T}$. Então, $A = \{\omega \in \mathcal{X} : F_{X_2, X_3}(X_2(\omega), X_3(\omega)) \in S\}$, onde S é algum

boreliano da reta.

Assim,

$$A = \{\omega \in \mathcal{X} : (X_2(\omega), X_3(\omega)) \in F_{X_2, X_3}^{-1}(S)\}$$

Mas $F_{X_2, X_3} : R^2 \rightarrow R$ é contínua; então, sua preimagem $(F_{X_2, X_3}^{-1}(S))$ é aberta, para os abertos S em R . Logo, $F_{X_2, X_3}^{-1}(S)$ é um boreliano em R^2 . Finalmente, $A \in \sigma(X_2, X_3) = \mathcal{B}$.

Logo, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ e poderia ser uma candidata a σ -álgebra $adq(\mathcal{B}; \mathcal{C}, P_0)$, isto é, $F_{X_2, X_3}(X_2, X_3)$ poderia ser adequada para prever X_1 na base observacional dada por X_2, X_3 ; onde P_0 é a probabilidade conjunta, a saber $P_0(X_1 \in C, (X_2, X_3) \in B)$ para $C \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{B}$.

Em geral, se considerarmos $X_1, X_2, \dots, X_n$ onde X_1 é a variável aleatória não observável e $X_2, \dots, X_n$ como base para nossa predição de X_1 . $\mathcal{B} = \sigma(X_2, \dots, X_n)$ definimos

$$\mathcal{T}_1 = \sigma(F_{X_2, \dots, X_n}(X_2, \dots, X_n))$$

$$\mathcal{T}_i = \sigma(X_2, \dots, X_i, F_{X_{i+1}, \dots, X_n}(X_{i+1}, \dots, X_n)), \quad i = 2, \dots, n-2$$

Se as $F_{X_i, \dots, X_n}$, $i = 2, \dots, n-2$ são contínuas, então, $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^{n-2} \subseteq \mathcal{B}$.

Essa seqüência de sub σ -álgebras de $\mathcal{B}$ apresenta uma seqüência de candidatas adequadas para prever X_1 na base observacional de $X_2, \dots, X_n$.

5.2.6 Teorema*

Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{P_0\})$ um espaço probabilístico, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vetor aleatório com *f.d.a.* conjunta $F_{X_1, \dots, X_n}$ e marginais acumuladas contínuas, $F_{X_i, \dots, X_n}$, $i = 2, \dots, n$. Consideremos as seguintes sub- σ álgebras induzidas,

$$\mathcal{C} = \sigma(X_1), \quad \mathcal{B} = \sigma(X_2, \dots, X_n)$$

$$\mathcal{T}_1 = \sigma(F_{X_2, \dots, X_n}(X_2, \dots, X_n))$$

$$\mathcal{T}_i = \sigma(X_2, \dots, X_i, F_{X_{i+1}, \dots, X_n}(X_{i+1}, \dots, X_n)), \quad i = 2, \dots, n-2$$

Então, se existe $i_0 \in \{1, \dots, n-2\}$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{i_0}$,

$$\mathcal{T}_{i_0} \text{ é } adq(\mathcal{B}; \mathcal{C}, P_0).$$

Prova : consequência da parte (ii) de 5.2.4.

Notemos que a suposição $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{i_0}$ responde à seguinte idéia: X_1 decorre de $X_2, \dots, X_n$, portanto, a “informação” contida em $\mathcal{C}$ é contemplada em alguma sub σ - álgebra de $\mathcal{B}$.

Centramos nosso estudo em famílias de probabilidades de um único elemento $\{P_0\}$ pois estamos assumindo que somente existe uma probabilidade P_0 vinculando as variáveis X_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

5.2.7 τ de Kendall, adequacidade e preditor

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias, cujos valores são obtidos da amostra, Y uma variável resposta, tirada a partir das anteriores. A seguir, apresentamos um exemplo no qual fabricamos uma estatística $T := X_1 \dots X_n$ adequada para predizer Y com base na amostra $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Consideremos uma família de distribuições de probabilidade $P = \{p_\theta, \theta \in \Theta\}$. É possível verificar, no exemplo, que $X_i, Y, i = 1, \dots, n$ são $PA(TP_2)$ assim como T, Y são $PA(TP_2)$. Assim, passamos a calcular a medida τ de Kendall, verificando que $\tau_{T,Y} \geq \tau_{X_i,Y}, i = 1, \dots, n$.

Em seguida, $F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n) = T^\theta$ e

$$\tau_{T^\theta, Y} = \tau_{T, Y} \geq \tau_{X_i, Y}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$p_\theta(x_1, \dots, x_n, y) := \frac{\theta^n (x_1 \dots x_n)^{\theta-1}}{\pi(1+y^2)} \left\{ 1 + \frac{\theta}{\pi} [2(x_1 \dots x_n)^\theta - 1] \arctg(y) \right\}$$

$$0 < \theta < 1, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ e $T = X_1 \dots X_n$

$$g_\theta(t, y) = \frac{\theta t^{\theta-1}}{1+y^2} \left[1 + \frac{\theta}{\pi} (2t^\theta - 1) \arctg(y) \right], \quad h = \frac{1}{\pi},$$

então, T é $adq(\underline{X}; Y, P)$ [Basu e Cheng (1981)]

Em seguida, veremos que (X_i, Y) possui densidade de probabilidade TP_2 , então, as variáveis aleatórias são $PA(TP_2)$, $i = 1, \dots, n$.

Provemos a afirmação para $i = 1$, sem perda da generalidade,

$$\begin{aligned}
 p_\theta(\underline{x}, y) &= \frac{\theta^n}{\pi(1+y^2)} \left[1 - \frac{\theta}{\pi} \arctg(y) \right] x_1^{\theta-1} (x_2 \dots x_n)^{\theta-1} \\
 &\quad + \frac{2\theta^{n+1} \arctg(y)}{\pi^2(1+y^2)} x_1^{2\theta-1} (x_2 \dots x_n)^{2\theta-1} \\
 p_\theta(x_1, y) &= \frac{\theta}{\pi(1+y^2)} \left[1 - \frac{\theta}{\pi} \arctg(y) \right] x_1^{\theta-1} + \frac{2\theta^2 \arctg(y)}{\pi^2(1+y^2) 2^{n-2}} x_1^{2\theta-1} \\
 &= \frac{\theta x_1^{\theta-1}}{\pi(1+y^2)} \{1 + h(x_1, y)\} \\
 h(x_1, y) &:= \frac{\theta \arctg(y)}{\pi 2^{n-2}} [x_1^\theta - 2^{n-2}]
 \end{aligned}$$

Como $p_\theta(x_1, y) \propto \frac{x_1^{\theta-1}}{(1+y^2)} \{1 + h(x_1, y)\}$ e para $x_1 < x'_1$, $y < y'$

$$(a) \quad h(x'_1, y') h(x_1, y) = h(x'_1, y) h(x_1, y')$$

$$(b) \quad h(x'_1, y') + h(x_1, y) \geq h(x'_1, y) + h(x_1, y'),$$

então, $p_\theta(x_1, y)$ é TP_2 .

(a) é evidente, enquanto (b) é válida se, e somente se,

$$[(x'_1)^\theta - 2^{n-2}] \{ \arctg(y') - \arctg(y) \} \geq [(x_1)^\theta - 2^{n-2}] \{ \arctg(y') - \arctg(y) \}$$

e como $x_1 < x'_1 \Rightarrow (x_1)^\theta - 2^{n-2} < (x'_1)^\theta - 2^{n-2}$ enquanto que $y' > y \Rightarrow \arctg(y') - \arctg(y) \geq 0$, e finalmente,

$$[(x'_1)^\theta - 2^{n-2}] \{ \arctg(y') - \arctg(y) \} \geq [(x_1)^\theta - 2^{n-2}] \{ \arctg(y') - \arctg(y) \}.$$

Como consequência,

$$X_i, Y \text{ são } PA(TP_2) \quad i = 1, \dots, n.$$

A seguir, veremos que T e Y são $PA(TP_2)$.

A densidade de probabilidade para o par (T, Y) é dada por

$$g'_\theta(t, y) = \frac{g_\theta(t, y)}{\theta^{n-1}\pi}$$

claramente $g'_\theta(t, y) \propto g_\theta(t, y)$ e portanto $g'_\theta(t, y)$ é TP_2 se, e somente se, $g_\theta(t, y)$ é TP_2 ,

$$g_\theta(t, y) \propto \frac{t^{\theta-1}}{(1+y^2)} \{1 + k(t, y)\}$$

onde $k(t, y) := \frac{\theta}{\pi}(2t^\theta - 1)\arctg(y)$. Como para $t' > t$, $y' > y$, k verifica

$$(a') \quad k(t', y')k(t, y) = k(t', y)k(t, y')$$

$$(b') \quad k(t', y') + k(t, y) \geq k(t', y) + k(t, y')$$

então g_θ é TP_2 .

(a') é direta, enquanto (b') é consequência da validade da seguinte desigualdade

$$(2(t')^\theta - 1)\{\arctg(y') - \arctg(y)\} \geq (2t^\theta - 1)\{\arctg(y') - \arctg(y)\}.$$

Finalmente,

$$T, Y \text{ são } PA(TP_2).$$

A seguir, vamos calcular as medidas $\tau_{X_i, Y}$ e $\tau_{T, Y}$.

$$\begin{aligned} p_\theta(x_i, y) &\propto \frac{x_i^{\theta-1}}{(1+y^2)} \{1 + h(x_i, y)\} \text{ portanto} \\ F_\theta(x_i, y) &\propto \int_{-\infty}^y \int_0^{x_i} \frac{x^{\theta-1}}{1+z^2} dx dz + \int_{-\infty}^y \int_0^{x_i} \frac{x^{\theta-1} h(x, z)}{1+z^2} dx dz \\ \int_{-\infty}^y \int_0^{x_i} \frac{x^{\theta-1}}{1+z^2} dx dz &= \frac{x_i^\theta}{\theta} \{\arctg(y) + \frac{\pi}{2}\}, \end{aligned}$$

para os calculos restantes, é preciso lembrar que

$$\int \frac{\arctg^n(u)}{1+u^2} du = \frac{\arctg^{n+1}(u)}{n+1}, \text{ subst. } v = \arctg(u), dv = \frac{du}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^y \int_0^{x_i} \frac{x^{\theta-1} h(x, z)}{1+z^2} dx dz &= \frac{\theta}{\pi 2^{n-2}} \int_{-\infty}^y \int_0^{x_i} x^{2\theta-1} \frac{\arctg(z)}{1+z^2} dx dz - \\ &\quad \frac{\theta}{\pi} \int_{-\infty}^y \int_0^{x_i} x^{\theta-1} \frac{\arctg(z)}{1+z^2} dx dz \\ &= \left\{ \arctg^2(y) - \frac{\pi^2}{4} \right\} \left[\frac{x_i^{2\theta}}{\pi 2^n} - \frac{x_i^\theta}{2\pi} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\theta(x_i, y) &= \frac{\theta}{\pi} \{I + II\} \\ I &:= \frac{x_i^\theta}{\theta} \left\{ \arctg(y) + \frac{\pi}{2} \right\} \\ II &:= \left\{ \arctg^2(y) - \frac{\pi^2}{4} \right\} \left[\frac{x_i^{2\theta}}{\pi 2^n} - \frac{x_i^\theta}{2\pi} \right]\end{aligned}$$

logo,

$$F_\theta(x_i, y) p_\theta(x_i, y) = \frac{\theta}{\pi} \{I \cdot p_\theta(x_i, y) + II \cdot p_\theta(x_i, y)\}$$

$$\begin{aligned}I \cdot p_\theta(x_i, y) &= \frac{x_i^{2\theta-1} \theta}{\pi(1+y^2)2\pi} \left\{ \frac{\pi(2-\theta)}{\theta} \arctg(y) - 2\arctg^2(y) + \frac{\pi}{2^{n-2}} \arctg(y) x_i^\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{n-3}} \arctg^2(y) x_i^\theta + \frac{\pi^2}{\theta} \right\} \\ II \cdot p_\theta(x_i, y) &= \frac{x_i^{2\theta-1} \theta}{\pi(1+y^2)2\pi} \left\{ -\frac{\theta\pi}{4} \arctg(y) - \arctg^2(y) + \frac{\theta}{\pi} \arctg^3(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\theta\pi}{2^{n+1}} \arctg(y) x_i^\theta + \frac{1}{2^{n-1}} \arctg^2(y) x_i^\theta - \frac{3\theta}{2^{n-1}\pi} \arctg^3(y) x_i^\theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta\pi}{2^{2n-1}} \arctg(y) x_i^{2\theta} + \frac{\theta}{\pi 2^{2n-3}} \arctg^3(y) x_i^{2\theta} - \frac{\pi^2}{2^{n+1}} x_i^\theta + \frac{\pi^2}{4} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\theta(x_i, y) p_\theta(x_i, y) &= \frac{\theta}{\pi} \{I \cdot p_\theta(x_i, y) + II \cdot p_\theta(x_i, y)\} \\ &\quad \frac{x_i^{2\theta-1} \theta^2}{2\pi^3(1+y^2)} \left\{ \left(\frac{2}{\theta} - 1 - \frac{\theta}{4} \right) \arctg(y) - 3\arctg^2(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta}{\pi} \arctg^3(y) + \frac{(3\theta+2^3)\pi}{2^{n+1}} \arctg(y) x_i^\theta + \frac{5}{2^{n-1}} \arctg^2(y) x_i^\theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\theta}{\pi 2^{n-1}} \arctg^3(y) x_i^\theta - \frac{\theta\pi}{2^{2n-1}} \arctg(y) x_i^{2\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta}{\pi 2^{2n-3}} \arctg^3(y) x_i^{2\theta} - \frac{\pi^2}{2^{n+1}} x_i^\theta + \frac{\theta+4}{4\theta} \pi^2 \right\}.\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan^n(u)}{1+u^2} du = 0, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

então,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 F_\theta(x_i, y) p_\theta(x_i, y) dx_i dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \frac{\theta}{\pi} \{I.p_\theta(x_i, y) + II.p_\theta(x_i, y)\} dx_i dy \\ &= -III + IV - V + VI \\ III &:= c_2 \frac{1}{2\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan^2(y)}{1+y^2} dy, \quad c_2 = \frac{3\theta^2}{2\pi^3} \\ &= \frac{\theta}{16} \\ IV &:= c_5 \frac{1}{3\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan^2(y)}{1+y^2} dy, \quad c_5 = \frac{5\theta^2}{2^n \pi^3} \\ &= \frac{5\theta}{3^2 \cdot 2^{n+2}} \\ V &:= c_9 \frac{1}{3\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy, \quad c_9 = \frac{\theta^2}{2^{n+2} \pi} \\ &= \frac{\theta}{3 \cdot 2^{n+2}} \\ VI &:= c_{10} \frac{1}{2\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy, \quad c_{10} = \frac{\theta(\theta+4)}{8\pi} \\ &= \frac{\theta+4}{16}. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 F_\theta(x_i, y) p_\theta(x_i, y) dx_i dy = \frac{\theta}{3^2 \cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{4}$$

então,

$$\begin{aligned} \tau_{X_i, Y} &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 F_\theta(x_i, y) p_\theta(x_i, y) dx_i dy - 1 \\ &= \frac{\theta}{3^2 \cdot 2^{n-1}}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Notemos que naturalmente $\tau_{X_i, Y} \geq 0$.

A seguir a medida $\tau_{T,Y}$,

$$\begin{aligned} g'_\theta(t, y) &= \frac{\theta t^{\theta-1}}{\pi(1+y^2)} + \frac{2\theta^2}{\pi^2} t^{2\theta-1} \frac{\arctg(y)}{(1+y^2)} - \frac{\theta^2}{\pi^2} t^{\theta-1} \frac{\arctg(y)}{(1+y^2)} \\ G'_\theta(t, y) &= \left(\frac{\theta}{8} + \frac{1}{2}\right)t^\theta - \frac{\theta}{8}t^{2\theta} + \frac{1}{\pi}t^\theta \arctg(y) - \frac{\theta}{2\pi^2}t^\theta \arctg^2(y) + \frac{\theta}{2\pi^2}t^{2\theta} \arctg^2(y) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 G'_\theta(t, y) g'_\theta(t, y) = A_1 \frac{\pi}{2\theta} - A_2 \frac{\pi}{3\theta} - A_3 \frac{\pi^3}{24\theta} + A_4 \frac{\pi^3}{36\theta} + A_5 \frac{\pi^3}{36\theta} - A_6 \frac{\pi^3}{24\theta}$$

$$A_1 = \frac{\theta}{\pi} \left(\frac{\theta}{8} + \frac{1}{2}\right), \quad A_2 = \frac{\theta^2}{8\pi}, \quad A_3 = \frac{\theta^2}{2\pi^3}$$

$$A_4 = \frac{\theta^2}{2\pi^3}, \quad A_5 = \frac{2\theta^2}{\pi^3}, \quad A_6 = \frac{\theta^2}{\pi^3}$$

finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 G'_\theta(t, y) g'_\theta(t, y) = \frac{\theta}{36} + \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$\tau_{T,Y} = \frac{\theta}{32}$$

Assim,

$$\tau_{X_i,Y} = \tau_{T,Y} \frac{1}{2^{n-1}}$$

e como $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{\theta}{9} \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{\theta}{9}$, pois $0 < \theta < 1$, finalmente,

$$0 < \tau_{X_i,Y} \leq \tau_{T,Y}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Retomando: para $0 < \theta < 1$, $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $-\infty < y < +\infty$. Consideremos $(X_1, \dots, X_n)$ como a base da predição e Y a variável aleatória a prever.

$$F_{X_1, \dots, X_n, Y}(x_1, \dots, x_n, y) =$$

$$\frac{x_1^\theta \dots x_n^\theta}{2} + \frac{\arctg(y)}{\pi} x_1^\theta \dots x_n^\theta + \frac{\theta}{2\pi^2} \{ \arctg^2(y) - \frac{\pi^2}{2} \} \left\{ \frac{x_1^{2\theta} \dots x_n^{2\theta}}{2^{n-1}} - x_1^\theta \dots x_n^\theta \right\},$$

observemos que $F_{X_1, \dots, X_n, Y}$ é contínua e

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = x_1^\theta \dots x_n^\theta, \text{ contínua em } [0, 1]$$

Sugerimos, então como variável preditora de Y a $F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n) = X_1^\theta \dots X_n^\theta$.

É possível calcular a medida τ de Kendall entre $F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n)$ e Y . Como a medida τ é invariante perante funções crescentes, e $F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n) = T^\theta$, resulta

$$\tau_{F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n), Y} = \tau_{T, Y} = \frac{\theta}{3^2}.$$

E podemos notar que

$$\tau_{F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n), Y} \geq \tau_{X_i, Y}, \quad i = 1, \dots, n.$$

5.3. Predição Empírica

5.3.1 Simulação: A seguir, descreveremos a simulação. Temos presente que, pelos estudos baseados no conhecimento das virtudes da medida τ de Kendall, ela pode “condensar” a informação da *concordância* versus *discordância* entre pares de variáveis aleatórias. Quando, nas seções prévias, trabalhamos com a distribuição acumulada e suas peculiaridades, tínhamos em mente varios tópicos. Em primeiro lugar, é sabido que a distribuição dos dados é toda a informação de que precisamos para poder fazer inferência sobre os dados; em segundo lugar, se tivermos três variáveis aleatórias U_1, U_2, U_3 , onde U_1, U_i são $PA(TP_2)$, $i = 2, 3$, e $F_{U_2, U_3}(\cdot, \cdot)$ é a distribuição acumulada de (U_2, U_3) , a variável aleatória $U := F_{U_2, U_3}(U_2, U_3)$ é tal que $\tau_{U_1, U} \geq \tau_{U_1, U_i}$, $i = 2, 3$, prévia hipótese de concordância entre U_2 e U_3 .

Suponhamos agora que U_2 e U_3 são resultados de análises clínicas feitas em um paciente e U_1 representa o diagnóstico elaborado com base em U_2 e U_3 . Suponhamos, ainda, que dispomos de um banco de dados com $N-1$ dessas triplas: $\{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\}_{i=1}^{N-1}$; em seguida, incorporamos um novo paciente com estudos clínicos (u_{N2}, u_{N3}) . Estamos interessados em fazer uma predição para o diagnóstico desse novo paciente: u_{N1} . Para isso, pretendemos utilizar a distribuição acumulada de U_2 e U_3 (que supostamente bastavam para concluir U_1) como *preditor semente* (preditor de variabilidade) do diagnóstico U_1 . Esse preditor tem imagem em $[0, 1]$, enquanto U_1 pode assumir valores fora desse espaço; por isso, precisamos utilizar, para a predição de u_{N1} , a informação fornecida pelo *histórico* de U_1 , ou seja, $\{u_{i1}\}_{i=1}^{N-1}$, ajustando o preditor semente. Esperamos que o preditor semente reproduza o comportamento de U_1 salvo escala e deslocamento.

Diversos caminhos poderiam ser utilizados para elaborar *preditores sementes*, como considerar a distribuição acumulada dos ternos até $N-1$ e “combinar” esse novo preditor com o descrito anteriormente.

5.3.2 Discussão e análise

Na figura 5.3.3, a distribuição acumulada das variáveis U_2 e U_3 serve para prever o comportamento da variável “oculta” U_1 . Esse *preditor de comportamento* pretende representar todo o campo de chegada da função U_1 , $(-\infty, +\infty)$, no intervalo $(0, 1)$, sofrendo alterações somente quando U_1 sofrer alterações. Vale destacar que a distribuição acumulada de (U_2, U_3) tem informação a respeito da função U_1 . Por isso esse preditor do comportamento reflete as mudanças ocorridas em U_1 . A partir da existência da conexão entre as três variáveis, pela normal tri-variada (não independentes), é possível afirmar que as variáveis U_2 e U_3 têm “algo” a dizer sobre o comportamento da variável U_1 . Isto será alcançado pela função de distribuição acumulada do par (U_2, U_3) .

Na figura 5.3.4, o preditor do comportamento, alocado entre 0 e 1, é corrigido pela média e a variância *histórica* da variável U_1 , calculadas a partir dos valores da amostra. Desse modo, é incorporada a informação passada da variável U_1 na fabricação do preditor de cada novo valor possível da variável U_1 . Essa proposta, de preditor, permite aproveitar a distribuição acumulada, como preditor de comportamento. ED e VD representam, respectivamente, o valor esperado e a variância da diferença entre o preditor $Pred$ e o valor verdadeiro $ValorVerd$.

Uma outra proposta apresentada aqui consiste em: suponhamos que as triplas históricas (do banco de dados) $(u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})_{i=1}^{N-1}$ são ordenadas pela norma euclideana calculada para as duas últimas componentes das triplas, $\{(u_{i2}, u_{i3})\}_{i=1}^{N-1}$, na ordem crescente. Suponhamos, ainda, que um novo par de valores (u_{N2}, u_{N3}) é recebido e alocado segundo a norma euclideana, sem perda da generalidade, como maior que (u_{N-12}, u_{N-13}) . Então, o preditor proposto para o valor desconhecido u_{N1} será uma combinação entre os valores da acumulada de $(u_{N-11}, u_{N-12}, u_{N-13})$ e da acumulada dos valores revelados (u_{N2}, u_{N3}) , tal combinação, vai ser ajustada pela média e a variância do histórico da variável U_1 , i.e., $\{u_{i1}\}_{i=1}^{N-1}$.

A idéia é a seguinte: o ponto $(u_{N-11}, u_{N-12}, u_{N-13})$ é o ponto mais próximo de (u_{N1}, u_{N2}, u_{N3}) , em toda a amostra e considerando a norma euclideana, das duas últimas componentes. Portanto, esse ponto $(u_{N-11}, u_{N-12}, u_{N-13})$ aporta “informação” de u_{N1} , através da acumulada associada a ele. O par (u_{N2}, u_{N3}) revelado prediz o comportamento de u_{N1} , como já induzimos, mediante a distribuição acumulada conjunta.

Logo, aquelas sementes - acumulada conjunta de (u_{N2}, u_{N3}) e acumulada conjunta de $(u_{N-11}, u_{N-12}, u_{N-13})$ - serão combinadas com os valores da média e variância amostral, fornecidas por $\{u_{i1}\}_{i=1}^{N-1}$, vide figuras 5.3.7-5.3.8.

Vale destacar, que em nossa simulação, a “melhor” proposta foi a primeira, segundo os cálculos feitos sobre as médias das diferenças. Pois, sendo “Pred” o primeiro preditor e “Eva” o segundo, temos que

$$E(\text{ValorVerd.} - \text{Pred}) = .1072 < E(\text{ValorVerd.} - \text{Eva}) = .3317,$$

onde E denota o valor esperado e $ValorVerd.$ denota a variável U_1 , revelada. Note-mos que o segundo preditor, Eva, apresenta uma outra opção de incorporação da informação passada, da variável U_1 .

Planejamos continuar com a pesquisa destas propostas, com a idéia de implementar criterios para “decidir” qual preditor pode ser mais indicado segundo o problema abordado. Acreditamos que a idéia possa ser fortalecida com a incorporação da natureza dos dados. Certamente, a estrutura e origem dos dados poderá orientar a escolha dos ajustes, fatores de escala e deslocamento, utilizados para posicionar os preditores sementes.

5.3.9 Conjecturas sobre o Processo de Predição:

Suponhamos a seguinte situação: $U_2, \dots, U_n$ representam análises clínicas feitas em um paciente e U_1 representa o diagnóstico respeito da presença de alguma doença. Suponhamos, ainda, que possuímos um banco de dados no qual constam os registros de m pacientes. Assim $\{(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})\}_{i=1}^m$ representa o banco de dados. Para o paciente i_0 -ésimo cujas análises registradas foram $(u_{i_02}, \dots, u_{i_0n})$, o diagnóstico registrado foi u_{i_01} . Nosso objetivo é: admitido um novo paciente, de rótulo $m + 1$, com análises clínicas $(u_{(m+1)2}, \dots, u_{(m+1)n})$, fornecer uma predição do diagnóstico $u_{(m+1)1}$, que é completamente desconhecido. As ferramentas à nossa disposição são basicamente: o banco de dados registrados e a nova $(n-1)$ -upla de análises do indivíduo $m + 1$. Portanto, pretendemos fazer inferência - predição - referente ao estado futuro do paciente - isto é, captar os elementos contidos nas análises clínicas do presente estado do paciente, que induzem um estado futuro. Naturalmente, na

formulação prévia é esperado que exista um comportamento dos dados trabalhados, a saber, refere-se a três “afirmações” fundamentais:

1. A seqüência de análises observada - que foi determinada por especialistas com conhecimento profundo do problema - é *suficiente* para fazer inferência respeito do estado futuro do paciente. Acredita-se que a partir das análises observadas é possível determinar o diagnóstico. Ou seja que o conjunto de dados disponíveis sobre cada paciente contém a essência da “informação” que é necessária para fazer inferência sobre o estado futuro do paciente.

2. A inferência do diagnóstico para um novo paciente $m+1$ só poderá ser realizada se suas análises clínicas $(u_{(m+1)2}, \dots, u_{(m+1)n})$ tiverem a mesma natureza dos pacientes já existentes no banco de dados, ou seja: somente se o novo paciente tiver aproximadamente as mesmas características (etária, socio-económica, etc.) dos pacientes já registrados.

3. O banco de dados e seu carácter preditivo: se for comunicada uma nova $n-1$ upla $(u_{(m+1)2}, \dots, u_{(m+1)n})$ referente ao paciente $m+1$ - e se essa $n-1$ upla estiver *próxima* de alguma outra $n-1$ upla $(u_{i_02}, \dots, u_{i_0n})$ associada ao paciente i_0 , cujo registro $(u_{i_01}, u_{i_02}, \dots, u_{i_0n})$ esteja contido no banco de dados, então a inferência de $u_{(m+1)1}$ obtida a partir de $(u_{(m+1)2}, \dots, u_{(m+1)n})$ deverá estar *próxima* do valor observado em u_{i_01} .

O preditor a ser implementado terá as seguintes passos: primeiramente, fazemos menção à importância indiscutível da distribuição acumulada. A distribuição

acumulada de um vetor aleatório $(X_1, \dots, X_k)$ contabiliza as ocorrências de um evento do tipo $\{X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k\}$. Assim, $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k)$ resume toda a informação (unidimensional), e que pode ser obtida a partir de qualquer banco de dados. Calculado através da empírica (por exemplo). Deste modo $P(U_2 \leq u_{i2}, \dots, U_n \leq u_{in})$ contém toda a informação embutida na amostra para a inferência de U_1 quando ela assume o valor u_{i1} , correspondente. Por ser distribuição conjunta acumulada, $P(U_2 \leq u_{i2}, \dots, U_n \leq u_{in})$ incorpora não apenas o quadro clínico atual do paciente i , mas também os possíveis estágios pelos quais este passou. Esse preditor pontual $P(U_2 \leq u_{i2}, \dots, U_n \leq u_{in})$ de $U_1 = u_{i1}$, encontra-se alocado entre 0 e 1, e precisa ser corrigido pelo aporte feito pelo *histórico* da variável U_1 .

Implementando o preditor:

Quando comunicada a $n-1$ upla $(u_{(m+1)2}, \dots, u_{(m+1)n})$ de análises clínicas efetuadas sobre o paciente rotulado por $m+1$, imediatamente procuramos em nosso banco de dados a $n-1$ upla que fique mais próxima da comunicada, digamos $(u_{i02}, \dots, u_{i0n})$. A seguir, calculamos $P(U_2 \leq u_{i02}, \dots, U_n \leq u_{i0n})$ que é o preditor de *monotonicidade* do valor $u_{(m+1)1}$ ainda desconhecido. Para definir o preditor definitivo do valor $u_{(m+1)1}$ é preciso deslocar a quantidade $P(U_2 \leq u_{i02}, \dots, U_n \leq u_{i0n})$ usando fatores obtidos a partir das observações de U_1 , a saber: $\{u_{i1}\}_{i=1}^m$. Deste modo ficou definido um preditor pontual para cada possível valor da variável U_1 .

figura 5.3.3: Acumulada como predictor de monotonicidade

figura 5.3.4: Acumulada corrigida como preditor de U1

figura 5.3.5: Valores Verdadeiros=U1

figura 5.3.6: Preditor de $U1 = \text{Pred}$

figura 5.3.7: Acumulada corrigida, como preditor de U1 (Eva)

figura 5.3.8: Eva=preditor de U1

Apêndice

A.1. Programas

- Para o Cálculo de Acoplamentos e Medida τ -Kendall
- Simulação

A.2. Condição $TP_2(RR_2)$ em pares, Distribuição Conjunta e Operação Bayesiana: Prior/Posterior

```

%%% Para o Calculo de Acoplamiento (para dos variables discretas)
% e Medida tau de Kendall. @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
%dimensiones de los dominios respectivos
d1=;
d2=;
%descripcion de dominios-tienen que ser seq. consecutiva
%de enteros.
T1=[];
T2=[];
D1=T1';
D2=T2';
%fdp puntual asignada
p=[];
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        pf1f2(I,J)=p(I,J)
        pf1f2(I,d1+1)=sum(p(I,1:d1))
        pf1f2(d2+1,J)=sum(p(1:d2,J))
        pf1f2(d2+1,d1+1)=1
    end
end;
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        f1(J)=pf1f2(d2+1,J)
        f2(I)=pf1f2(I,d1+1)
    end
end;
%fdp's marginales
f1;
f2;
%fdp conjunta y marginales
pf1f2;
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        M(I)=sum(p(I,1:J))
        P(I,J)=sum(M(1:I))
    end
end;
%fda conjunta
P;
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        PF1F2(I,J)=P(I,J)
    end
end;
for J=1:d1,
    PF1F2(d2+1,J)=PF1F2(d2,J)
end;
for I=1:d2,
    PF1F2(I,d1+1)=PF1F2(I,d1)
end;
PF1F2(d2+1,d1+1)=1;
%fda conjunta y marginales
PF1F2;
%fda marginales
for I=1:d2,
    for J=1:d1,
        F1(J)=PF1F2(d2,J)
        F2(I)=PF1F2(I,d1)
    end
end;
F1;
F2;
%calcula de la densidad del acoplamiento
for I=1:d2,
    for J=1:d1,
        c(I,J)=p(I,J)/(f1(J)*f2(I))
    end
end;

```

```

end
end;
c;
%c representa la asignacion por intervalos, otorgada a
%la densidad del acoplamiento
%la densidad del acoplamiento es:
%c(u,v)=c(I,J) si u en [F1(I-1),F1(I)],v en [F2(J-1),F2(J)]
for I=1:d2,
    for J=1:d1,
        iP1(J)=F1(J)
        iP2(I)=F2(I)
    end
end;
%dominio de definicion de la densidad del acoplamiento
iP1;
iP2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% a seguir verificamos que c es acoplamiento.
%calculo de la longitud de los intervalos de dominio de la densidad
%del acoplamiento
L1(1)=iP1(1);
L2(1)=iP2(1);
for I=2:d2,
    for J=2:d1,
        L1(J)=iP1(J)-iP1(J-1)
        L2(I)=iP2(I)-iP2(I-1)
    end
end;
L1;
L2;
for I=1:d2,
    for J=1:d1,
        s(I,J)=c(I,J)*L1(J)*L2(I)
    end
end;
s;
for J=1:d1,
    Ci(1,J)=sum(s(1,1:J))
end;

for I=2:d2,
    for J=1:d1,
        Ci(I,J)=Ci(I-1,J)+sum(s(I,1:J))
    end
end;
% acumulada C (a partir de la densida c)aplicada en (F1(J),F2(I))
% es decir, Ci(I,J)=C(F1(J),F2(I))
Ci;
%calculo de la medida tau
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        s2(I)=F2(I)*f2(I)
        s1(J)=F1(J)*f1(J)
        s12(I,J)=P(I,J)*p(I,J)
    end
end
s2;
s1;
s12;
S2=sum(s2(1:d2));
S1=sum(s1(1:d1));
for I=1:d2,
    s102(I)=sum(s12(I,1:d1))
end
S12=sum(s102(1:d2))
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        mf2(I,J)=p(I,J)*sum(p(I,J+1:d1))
    end
end

```



```

end
end
for I=1:d2,
    mf2o(I)=sum(mf2(I,1:d1))
end
Mf2=sum(mf2o(1:d2))
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        mf1(I,J)=p(I,J)*sum(p(I+1:d2,J))
    end
end
end
for I=1:d2,
    mf1o(I)=sum(mf1(I,1:d1))
end
Mf1=sum(mf1o(1:d2))
for J=1:d1,
    for I=2:d2,
        z(1,J)=0
        z(I,J)=sum(p(1:I-1,J))
    end
end
end
z
for J=1:d1-1,
    for I=1:d2,
        zu(I,J)=sum(z(I,J+1:d1))
        zu(I,d1)=0
    end
end
end
zu
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        zue(I,J)=p(I,J)*zu(I,J)
    end
end
end
for I=1:d2,
    zuel(I)=sum(zue(I,1:d1))
end
Z1=sum(zuel(1:d2))
for J=2:d1,
    for I=1:d2,
        y(I,1)=0
        y(I,J)=sum(p(I,1:J-1))
    end
end
end
y
for J=1:d1,
    for I=1:d2-1,
        yu(I,J)=sum(y(I+1:d2,J))
        yu(d2,J)=0
    end
end
end
yu
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        yue(I,J)=p(I,J)*yu(I,J)
    end
end
end
for I=1:d2,
    yuel(I)=sum(yue(I,1:d1))
end
Z2=sum(yuel(1:d2))
%tau entre las variables=
TAU=2*S12-S1-S2+1+Mf2+Mf1-Z1-Z2
%calculo de T
for J=1:d1,
    for I=1:d2,
        t(I,J)=sum(p(I,1:J))*sum(p(1:I,J))
    end
end

```


[illegible]

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Simulacion %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Simulacion de normales dependientes, calculo de la distribucion
%acumulada empirica.
%Descripcion del procedimiento:
%1) generamos N muestras de 3 normales(0,1), independientes=x.
%2) transformamos tales normales en, normales dependientes
% aun con parametros (0,1)=u
N=500
a=[1/sqrt(3) 1/sqrt(3) 1/sqrt(3); 1/sqrt(2) 1/sqrt(2) 0; 1 0 0];
% matriz de normales independientes, generada aleatoriamente
x=randn(N,3)
x'
e=a*x'
b=e'

u=[b(:,1)-sqrt(3), b(:,2)-sqrt(2), b(:,3)];

%matriz de normales dependientes: la primera columna son los valores
%a predecir.Las columnas 2 y 3 corresponden a la base usada para la
%prediccion de la primera.
u
%calculo de la distribucion acumulada empirica, con base en las
%columnas 2 y 3 de la matriz u.
sv=u(:,2)
[svord,index]=sort(sv)
uex=u(index,:)
for I=1:N,
    k(I)=0
    for J=1:I,
        if uex(J,3)<= uex(I,3)
            k(I)=k(I)+1
        end
    end
end
aeb=k'/N
vbybt=[uex,aeb]
% matriz completa, descripcion:
%1 colum=variables a predecir
%2 y 3 colums= base de prediccion
%4 colum=empirica elaborada con base en las dos columnas previas
%      =simiente del predictor
vbybt
% vamos a ordenar a la matriz vbybt por la norma euclidiana desde
% las columnas 2 y 3.
for I=1:N,
    vbybt(I,5)=norm(vbybt(I,2:3))
end
tv=vbybt(:,5)
[tvord,index]=sort(tv)
FIN=vbybt(index,1:5)
% vbybt ordenada por la norma euclidean(5 columna)=FIN
M1=mean(FIN(:,1))
V1=var(FIN(:,1),1)
S1=sqrt(V1)
plot(1:N,FIN(:,1),'s-b',1:N,FIN(:,4),'r-*)
xlabel('Normas Euclideanas de (U2,U3)')
ylabel('Valores Verdaderos=U1. Acum. de (U2,U3)')
legend('Valor Verd.', 'Acum.', 'corr=.6955')
title('Acumulada como predictor de monotonicidade')
corrcoef([FIN(:,1),FIN(:,4)])
% A continuacion vamos a mostrar como usar el predictor
%  $P = (M1^2/V1)*FIN(:,4) - M1^2$ .
% prediciendo u11, de la matriz FIN, supongamos que el valor u11
% es desconocido, mas los valores u12 y u13 son conocidos. Calcu
% lamos entonces la media M(1) y la varianza V(1), entre los valores
% u11, eso fornece informacion pasada de la variabe U1. esos valores
% calculados, no involucran u11.

```

```

% el predictor de u11 sera'dado por;
% Pred(1)=(M(1)^2/V(1))*(sum(FIN(1:N,4))/N)-M(1)^2
TM=sum(FIN(:,1))/(N-1)
TV=(FIN(:,1)'*FIN(:,1))/(N-1)
M=TM-FIN(:,1)/(N-1)
V=TV-FIN(:,1)*FIN(:,1)/(N-1)-M(:).^2
% predictor para cada punto de la primera columna de FIN
Pred=(M(:).^2./V(:)).*FIN(:,4)-M(:).^2
difp=FIN(:,1)-Pred(:)
esp=mean(difp(:))
variap=var(difp(:),1)
plot(1:N,FIN(:,1),'s-b',1:N,Pred(:),'r-*)
xlabel('Normas Euclidianas de (U2,U3)')
ylabel('Valores Verdadeiros=U1. Predictor de U1=Pred')
legend('Valor Verd.','Pred.','ED=.1072 ','VD=.5514')
title('Acumulada corrigida como predictor de U1')
%fabricando otra simiente de prediccion
for I=1:N,
    kc(I)=0
    for J=1:I,
        if uex(J,3)<= uex(I,3)
            if uex(J,1)<=uex(I,1)
                kc(I)=kc(I)+1
            end
        end
    end
end
acum=kc'/N
%matriz original ordenada por la 2 colum., donde, la ultima colum es
%la empirica acumulada, de las ternas(U1,U2,U3).
vbyacum=[uex,aeb]
% adicionando la norma euclideana de las 2 e 3 columnas, en la 5 colum.
for I=1:N,
    vbyacum(I,5)=vbybt(I,5)
end
%ordenando por la 5 columna
tiv=vbyacum(:,5)
[tivord,index]=sort(tiv)
CHE=vbyacum(index,1:5)
plot(FIN(:,4),CHE(:,4))%=identidad?
plot(1:N,FIN(:,1),'>-g',1:N,CHE(:,4),'m-<')
xlabel('Normas Euclidianas de (U2,U3)')
ylabel('Acum. de (U2,U3). Acum. de (U1,U2,U3)')
legend('Acum. (U2,U3)', 'Acum(U1,U2,U3)')
title('Oscilação entre Acumuladas')
% predictor con las simientes anteriores
% dadas por FIN(:,4) e por CHE(:,4).
for I=2:N-1,
    if CHE(I,5)-CHE(I-1,5) <= CHE(I+1,5)-CHE(I,5)
        Eva(I)=M(I)^2/V(I)*FIN(I,4)-M(I)/V(I)*CHE(I-1,4)-M(I)^2-V(I)
    else
        Eva(I)=M(I)^2/V(I)*FIN(I,4)-M(I)/V(I)*CHE(I+1,4)-M(I)^2-V(I)
    end
end
Eva(1)=M(1)^2/V(1)*FIN(1,4)-M(1)/V(1)*CHE(2,4)-M(1)^2-V(1)
Eva(N)=M(N)^2/V(N)*FIN(N,4)-M(N)/V(N)*CHE(N-1,4)-M(N)^2-V(N)
plot([FIN(:,1),Eva(:)])
plot(1:N,FIN(:,1),'s-b',1:N,Eva(:),'r-*)
xlabel('Normas Euclidianas de (U2,U3)')
ylabel('Valores Verdadeiros=U1. Predictor de U1=Eva')
legend('Valor Verd.','Eva','ED=.3317 ','VD=.8509 ')
title('Acumulada corrigida, como predictor de U1')
dife=FIN(:,1)-Eva(:)
ese=mean(dife(:))
variae=var(dife(:),1)

```

A.2. Condição $TP_2(RR_2)$ em pares, Distribuição Conjunta e Operação Bayesiana: Prior/Posterior

Notação:

θ	variável a predizer, tomando valores em R
$\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$	vetor de dados, $\underline{X} \in R^k$, variáveis base da predição
f_i	densidade de prob. de X_i , $i = 1, \dots, k$,
$f_{\theta,i}$	densidade de prob. conjunta de θ e X_i , $i = 1, \dots, k$,
$f_{\theta,1,\dots,k}$	densidade de prob. conjunta de θ e $\underline{X}$
$f(X_i \theta)$	função de verossimilhança
$f(\underline{X} \theta)$	função de verossimilhança
$\xi(\theta)$	<i>f.d.p.</i> a priori para θ
$\xi^*(\theta X_i)$	<i>f.d.p.</i> a posteriori para θ
$\xi^*(\theta \underline{X})$	<i>f.d.p.</i> a posteriori para θ

$$\xi^*(\theta|X_i) = \frac{f_{\theta,i}(\theta, X_i)}{f_i(X_i)} = H(X_i)f(X_i|\theta)\xi(\theta),$$

onde

$$H(X_i) := \left(\int f(X_i|\theta)\xi(\theta)d\theta \right)^{-1}.$$

Portanto, se denotamos por $K(X_i) := f_i(X_i)H(X_i)$, a conjunta pode ser escrita

$$f_{\theta,i}(\theta, X_i) = K(X_i)f(X_i|\theta)\xi(\theta).$$

A partir daí é simples deduzir que $f_{\theta,i}(\theta, X_i)$ é TP_2 se, e somente se, $f(X_i|\theta)$ é TP_2 , quando, a última for considerada função de θ e X_i .

Finalmente,

$$\xi^*(\theta|X_i) \text{ é } TP_2(\theta, X_i) \Leftrightarrow f_{\theta,i}(\theta, X_i) \text{ é } TP_2(\theta, X_i) \Leftrightarrow f(X_i|\theta) \text{ é } TP_2(\theta, X_i), \quad i = 1, \dots, k$$

Continuando com esse raciocínio,

$$\begin{aligned}\xi^*(\theta|\underline{X}) &= \frac{f_{\theta,1,\dots,k}(\theta, \underline{X})}{f_{1,\dots,k}(\underline{X})} \\ &= H(\underline{X})f(\underline{X}|\theta)\xi(\theta) \\ H(\underline{X}) &:= \left(\int f(\underline{X}|\theta)\xi(\theta)d\theta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

pode-se concluir

$$\xi^*(\theta|\underline{X}) \in TP_2(\theta, X_i) \Leftrightarrow f_{\theta,1,\dots,k}(\theta, \underline{X}) \in TP_2(\theta, X_i) \Leftrightarrow f(\underline{X}|\theta) \in TP_2(\theta, X_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Conclusões análogas são tiradas para o caso RR_2 em pares.

Observação : *Medida τ de Kendall e a distribuição a posteriori*

Lembremos que, no caso absolutamente contínuo, a medida $\tau_{\theta, X_i} = 2T_{\theta, X_i}$, onde,

$$T_{\theta, X_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x'_i} \int_{-\infty}^{\theta'} [f_{\theta,i}(\theta', x'_i)f_{\theta,i}(\theta, x_i) - f_{\theta,i}(\theta, x'_i)f_{\theta,i}(\theta', x_i)] d\theta dx_i d\theta' dx'_i,$$

$$i = 1, \dots, k.$$

Se definimos $a_i(x_i, x'_i) := f_i(x_i)f_i(x'_i)$, “peso do condicionamento em X_i ”, $i = 1, \dots, k$.

$$T_{\theta, X_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x'_i} \int_{-\infty}^{\theta'} [\xi^*(\theta'|x'_i)\xi^*(\theta|x_i) - \xi^*(\theta|x'_i)\xi^*(\theta'|x_i)] a_i(x_i, x'_i) d\theta dx_i d\theta' dx'_i.$$

T_{θ, X_i} , além de providenciar uma medida de associação na classe das densidades conjuntas $TP_2(RR_2)$ de θ e X_i , oferece, nesse mesmo sentido, uma medida da condição $TP_2(RR_2)$ da posteriori $\theta|X_i$ com peso dado pelo peso do condicionamento a_i , antes definido.

Premissa

Modificações apresentadas pela distribuição a posteriori para um vetor a prever, $\underline{\theta}$, quando é alterada a base da predição.

Consideraremos em seguida, a quantidade θ como um vetor $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ tomando valores em R^n . Lembremos 1.3.1 e 1.3.3; assim como o Teorema seguinte, que foi o motivador desta seção.

Teorema [Fahmy, S.; C.A.de B.Pereira et al.(1982)]

Se

$$\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) = H(\underline{X}) \prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i) C(\underline{\theta});$$

$$g_i \quad TP_2 \text{ em } (X_i, \theta_i) \quad \forall i = 1, \dots, k;$$

$$g_i \quad PF_2(\theta_i) \quad \text{qdo. } X_i \text{ é fixo};$$

$$C(\underline{\theta}) \quad S - MRR_2 \quad .$$

Então, Se $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$, $\underline{X}' = (X'_1, \dots, X'_k)$, com $X'_i = X_i$, $X'_j \geq X_j$,

$$j = 1, \dots, k \quad j \neq i,$$

$$\xi_i^*(\theta_i|\underline{X}) >_{TP_2(\theta_i)} \xi_i^*(\theta_i|\underline{X}'),$$

com i fixo, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Teorema A*

Se

$$\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) = H(\underline{X}) \prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i) C(\underline{\theta}),$$

$g_i \in TP_2$ em (X_i, θ_i) , $\forall i = 1, \dots, k$.

$C(\underline{\theta})$ tal que $\forall j$ e para todo par de vetores $\underline{\theta}$ e $\underline{\theta}'$

com $(\underline{\theta})_u = \theta_u$ e $(\underline{\theta}')_u = \theta'_u$, $u = 1, \dots, k$. verifique

$$(C) \quad C(\underline{\theta})C(\underline{\theta}') \leq C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}^{\prime(j-1)}, \theta_j \wedge \theta'_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}^{\prime(k)})$$

$$C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}^{\prime(j-1)}, \theta_j \vee \theta'_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}^{\prime(k)}).$$

Então, se $\underline{X}$ e $\underline{X}'$, $(\underline{X})_u = X_u$, $(\underline{X}')_u = X'_u$, $u = 1, \dots, k$, tais que

$$X'_u = X_u \text{ para } u \leq j, \quad X'_j > X_j \text{ e } X'_u \leq X_u \text{ para } u > j; \quad j \in \{1, \dots, k\}.$$

$$(A.1) \quad \xi_{s,t}^*(\theta_s, \theta_t|\underline{X}) >_{TP_2(\theta_s, \theta_t)} \xi_{s,t}^*(\theta_s, \theta_t|\underline{X}') \quad t \neq s, \quad t, s < j;$$

$$(A.2) \quad \xi_{1, \dots, j-1}^*(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}|\underline{X}) >_{TP_2(\theta_1, \dots, \theta_{j-1})} \xi_{1, \dots, j-1}^*(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}|\underline{X}'), \quad j \in \{2, \dots, k\};$$

$$(A.3) \quad \xi_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k}^*(\theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_{(j+1)}^{(k)}|\underline{X})$$

$$>_{TP_2(\theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_{(j+1)}^{(k)})} \xi_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k}^*(\theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_{(j+1)}^{(k)}|\underline{X}'),$$

$$j \in \{2, \dots, k-1\}.$$

Prova: (A.1) basta demonstrá-lo para $t = 1, s = 2, j = 3$,

$$\bullet \underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_{(4)}^{(k)}), \underline{X}' = (X_1, X_2, X'_3, X_{(4)}^{(k)})$$

oSe $k > 3$ temos

$$\xi_{1,2}^*(\theta_1, \theta_2 | \underline{X})$$

$$= H(\underline{X}) g_1(X_1, \theta_1) g_2(X_2, \theta_2) \int g_3(X_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\underline{\theta}) \prod_{i=4}^k g_i(X_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3$$

Consideremos agora dois pares de pontos (θ_1, θ_2) e (θ'_1, θ'_2) , arbitrários

$$(1) \xi_{1,2}^*(\cdot, \cdot | \underline{X}) >_{TP_2(\cdot, \cdot)} \xi_{1,2}^*(\cdot, \cdot | \underline{X}')$$

se, e somente se,

$$(2) \xi_{1,2}^*(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2 | \underline{X}) \xi_{1,2}^*(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2 | \underline{X}') \geq \xi_{1,2}^*(\theta'_1, \theta'_2 | \underline{X}) \xi_{1,2}^*(\theta_1, \theta_2 | \underline{X}')$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} & g_1(x_1, \theta_1 \vee \theta'_1) g_2(x_2, \theta_2 \vee \theta'_2) \int g_3(x_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \right. \\ & \left. \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 g_1(x_1, \theta_1 \wedge \theta'_1) g_2(x_2, \theta_2 \wedge \theta'_2) \int g_3(x'_3, \theta_3) \\ & \left[\int \cdots \int C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 \\ & \geq g_1(x_1, \theta'_1) g_2(x_2, \theta'_2) \int g_3(x_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta'_1, \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 \\ & g_1(x_1, \theta_1) g_2(x_2, \theta_2) \int g_3(x'_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta_1, \theta_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 \end{aligned}$$

mas, como g_i é TP_2 em $(X_i, \theta_i) \forall i = 1, \dots, k$, a desigualdade anterior é equivalente

a

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \int g_3(x_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 \\
& \int g_3(x'_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 \\
& \geq \int g_3(x_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta'_1, \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3 \\
& \int g_3(x'_3, \theta_3) \left[\int \cdots \int C(\theta_1, \theta_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] d\theta_3.
\end{aligned}$$

Denotemos por

$$G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)}) := \int \cdots \int C(\theta_1, \theta_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i)$$

Afirmção:

$$\begin{aligned}
(4) \quad & G(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3 \wedge \theta'_3, x_{(4)}^{(k)}) G(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3 \vee \theta'_3, x_{(4)}^{(k)}) \\
& \geq G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)}) G(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, x_{(4)}^{(k)})
\end{aligned}$$

Prova, definindo

$$\begin{aligned}
f_1(\theta_{(4)}^{(k)}) &:= C(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_{(4)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) \\
f_2(\theta_{(4)}^{(k)}) &:= C(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta_{(4)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) \\
f_3(\theta_{(4)}^{(k)}) &:= C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3 \vee \theta'_3, \theta_{(4)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i) \\
f_4(\theta_{(4)}^{(k)}) &:= C(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3 \wedge \theta'_3, \theta_{(4)}^{(k)}) \prod_{i=4}^k g_i(x_i, \theta_i)
\end{aligned}$$

é possível verificar que para

$$\underline{v} = (\theta_4, \theta_5, \dots, \theta_k) \text{ e } \underline{w} = (\theta'_4, \theta'_5, \dots, \theta'_k),$$

$$f_1(\underline{v})f_2(\underline{w}) \leq f_3(\underline{v} \wedge \underline{w})f_4(\underline{v} \vee \underline{w}),$$

ou, equivalentemente (pois as g_i são TP_2),

$$C(\underline{\theta})C(\underline{\theta}') \leq C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j \wedge \theta'_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}'^{(k)})$$

$$C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j \vee \theta'_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}'^{(k)}).$$

Esta última desigualdade vale por hipótese. Agora, por 1.3.1, temos:

$$\int f_1(\theta_{(4)}^{(k)})d\theta_{(4)}^{(k)} \int f_2(\theta_{(4)}^{(k)})d\theta_{(4)}^{(k)} \leq \int f_3(\theta_{(4)}^{(k)})d\theta_{(4)}^{(k)} \int f_4(\theta_{(4)}^{(k)})d\theta_{(4)}^{(k)},$$

e, assim, provamos (4). (3) é equivalente a

(5)

$$\begin{aligned} & \int g_3(x_3, \theta_3)G(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})d\theta_3 \int g_3(x'_3, \theta_3)G(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})d\theta_3 \\ & \geq \int g_3(x_3, \theta_3)G(\theta'_1, \theta'_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})d\theta_3 \int g_3(x'_3, \theta_3)G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})d\theta_3 \end{aligned}$$

Para a prova de (5), definamos

$$f_1^*(\theta_3) := g_3(x_3, \theta_3)G(\theta'_1, \theta'_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})$$

$$f_2^*(\theta_3) := g_3(x'_3, \theta_3)G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})$$

$$f_3^*(\theta_3) := g_3(x_3, \theta_3)G(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)})$$

$$f_4^*(\theta_3) := g_3(x'_3, \theta_3)G(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3, x_{(4)}^{(k)}),$$

verificando que

$$f_1^*(\theta'_3)f_2^*(\theta_3) \leq f_3^*(\theta_3 \wedge \theta'_3)f_4^*(\theta_3 \vee \theta'_3),$$

por ser g_3 , TP_2 ; então, por 1.3.1, provamos (5), equivalentemente (1).

oSe $k = 3$

$$\xi_{1,2}^*(\theta_1, \theta_2 | \underline{X}) = H(\underline{X}) g_1(X_1, \theta_1) g_2(X_2, \theta_2) \int g_3(X_3, \theta_3) C(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_3$$

Logo, como g_1 e g_2 são TP_2 , (1) é verificada através da seguinte

$$\begin{aligned} (6) \quad & g_3(x_3, \theta_3) C(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3) g_3(x'_3, \theta_3) C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3) \\ & \geq g_3(x'_3, \theta_3) C(\theta_1, \theta_2, \theta_3) g_3(x_3, \theta_3) C(\theta'_1, \theta'_2, \theta_3). \end{aligned}$$

Esta última desigualdade é verificada a partir das hipóteses sobre C , g_3 e o uso de 1.3.1.

$$\bullet \underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k), \quad \underline{X}' = (X_1, X_2, X'_3, X'_4, \dots, X_k)$$

$$\text{com } X'_3 > X_3, \quad X'_4 < X_4$$

Neste caso (3) fica substituída por

(a3)

$$\begin{aligned} & \int g_3(x_3, \theta_3) \left[\int g_4(x_4, \theta_4) \left(\int \dots \int C(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=5}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right) d\theta_4 \right] d\theta_3 \\ & \int g_3(x'_3, \theta_3) \left[\int g_4(x'_4, \theta_4) \left(\int \dots \int C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=5}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right) d\theta_4 \right] d\theta_3 \\ & \geq \int g_3(x_3, \theta_3) \left[\int g_4(x_4, \theta_4) \left(\int \dots \int C(\theta'_1, \theta'_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=5}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right) d\theta_4 \right] d\theta_3 \\ & \int g_3(x'_3, \theta_3) \left[\int g_4(x'_4, \theta_4) \left(\int \dots \int C(\theta_1, \theta_2, \theta_{(3)}^{(k)}) \prod_{i=5}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right) d\theta_4 \right] d\theta_3 \end{aligned}$$

Fixando $(x_5, \dots, x_k)$, definamos

$$H(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_4) := \int g_4(x_4, \theta_4) \left(\int \dots \int C(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k) \prod_{i=5}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right) d\theta_4$$

Deste jeito fica (a3) substituída por

(a3*)

$$\begin{aligned} & \int g_3(x_3, \theta_3) H(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3, x_4) d\theta_3 \int g_3(x'_3, \theta_3) H(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3, x'_4) d\theta_3 \\ & \geq \int g_3(x_3, \theta_3) H(\theta'_1, \theta'_2, \theta_3, x_4) d\theta_3 \int g_3(x'_3, \theta_3) H(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x'_4) d\theta_3. \end{aligned}$$

Afirmção: para θ'_3 e θ_3 ambos arbitrários,

$$\begin{aligned} & g_3(x_3, \theta_3 \wedge \theta'_3) H(\theta_1 \vee \theta'_1, \theta_2 \vee \theta'_2, \theta_3 \wedge \theta'_3, x_4) \\ & g_3(x'_3, \theta_3 \vee \theta'_3) H(\theta_1 \wedge \theta'_1, \theta_2 \wedge \theta'_2, \theta_3 \vee \theta'_3, x'_4) \\ & \geq g_3(x_3, \theta'_3) H(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, x_4) g_3(x'_3, \theta_3) H(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x'_4). \end{aligned}$$

Deste modo, podemos aplicar 1.3.1- concluindo com a prova da validade de (a3).

Prova-se a última afirmação usando 1.3.1, e as condições $x_4 > x'_4$, $g_4 TP_2$.

Prova de (A.2)

$$(7) \xi_{1,\dots,j-1}^*(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{j-1} | \underline{X})$$

$$= H(\underline{X}) g_1(X_1, \theta_1) \cdots g_{j-1}(X_{j-1}, \theta_{j-1}) \int \cdots \int C(\underline{\theta}) \prod_{i=j}^k g_i(X_i, \theta_i) d\theta_i$$

Consideremos agora dois pares de pontos $(\theta_1, \dots, \theta_{j-1})$ e $(\theta'_1, \dots, \theta'_{j-1})$ arbitrários.

Supondo

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_k) \text{ e } \underline{X}' = (X_1, \dots, X_{j-1}, X'_j, X'_{j+1}, \dots, X'_k)$$

com $X'_j > X_j$ $X'_s \leq X_s$ $s > j$ notemos que (A.2) é equivalente a

(8)

$$\begin{aligned}
& g_1(x_1, \theta_1 \vee \theta'_1) \cdots g_{j-1}(x_{j-1}, \theta_{j-1} \vee \theta'_{j-1}) \left[\int \cdots \int C(\theta_1 \vee \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \vee \theta'_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \right. \\
& \left. \prod_{i=j}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] g_1(x_1, \theta_1 \wedge \theta'_1) \cdots g_{j-1}(x_{j-1}, \theta_{j-1} \wedge \theta'_{j-1}) \\
& \left[\int \cdots \int C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \wedge \theta'_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x'_i, \theta_i) d\theta_i \right] \\
& \geq g_1(x_1, \theta'_1) \cdots g_{j-1}(x_{j-1}, \theta'_{j-1}) \left[\int \cdots \int C(\theta'_1, \dots, \theta'_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \right] \\
& g_1(x_1, \theta_1) \cdots g_{j-1}(x_{j-1}, \theta_{j-1}) \left[\int \cdots \int C(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x'_i, \theta_i) d\theta_i \right]
\end{aligned}$$

mas, como g_i é TP_2 em $(X_i, \theta_i) \ \forall i = 1, \dots, k$, (8) é equivalente a

$$\begin{aligned}
(9) \quad & \int \cdots \int C(\theta_1 \vee \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \vee \theta'_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \\
& \int \cdots \int C(\theta_1 \wedge \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \wedge \theta'_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x'_i, \theta_i) d\theta_i \\
& \geq \int \cdots \int C(\theta'_1, \dots, \theta'_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i \\
& \int \cdots \int C(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j}^k g_i(x'_i, \theta_i) d\theta_i.
\end{aligned}$$

o Consideremos o caso em que $X'_s = X_s \ \forall s > j$, denotando por

$$G(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, x_{(j+1)}^{(k)}) := \int \cdots \int C(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{(j)}^{(k)}) \prod_{i=j+1}^k g_i(x_i, \theta_i) d\theta_i.$$

Afirmação

(10)

$$\begin{aligned} G(\theta_1 \vee \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \vee \theta'_{j-1}, \theta_j \wedge \theta'_j, x_{(j+1)}^{(k)}) G(\theta_1 \wedge \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \wedge \theta'_{j-1}, \theta_j \vee \theta'_j, x_{(j+1)}^{(k)}) \\ \geq G(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, x_{(j+1)}^{(k)}) G(\theta'_1, \dots, \theta'_{j-1}, \theta'_j, x_{(j+1)}^{(k)}), \end{aligned}$$

só adaptando a prova feita para (4). Logo (9) fica

$$\begin{aligned} (11) \quad & \int g_j(x_j, \theta_j) G(\theta_1 \vee \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \vee \theta'_{j-1}, \theta_j, x_{(j+1)}^{(k)}) d\theta_j \\ & \int g_j(x'_j, \theta_j) G(\theta_1 \wedge \theta'_1, \dots, \theta_{j-1} \wedge \theta'_{j-1}, \theta_j, x_{(j+1)}^{(k)}) d\theta_j \\ & \geq \int g_j(x_j, \theta_j) G(\theta'_1, \dots, \theta'_{j-1}, \theta_j, x_{(j+1)}^{(k)}) d\theta_j \\ & \int g_j(x'_j, \theta_j) G(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, x_{(j+1)}^{(k)}) d\theta_j, \end{aligned}$$

e, com prova análoga à feita para (5), usando (10), fica provada (11). Logo, vale (A.2).

o O caso geral ($X'_s \leq X_s \forall s > j$) é tratado como na prova de (A.1).

Prova de (A.3)

$$(12) \quad \xi_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k}^*(\theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_{(j+1)}^{(k)} | \underline{X})$$

$$= H(\underline{X}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(X_i, \theta_i) \int g_j(X_j, \theta_j) C(\underline{\theta}) d\theta_j$$

Consideremos agora dois pares de pontos arbitrários

$$(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_k), (\theta'_1, \dots, \theta'_{j-1}, \theta'_{j+1}, \dots, \theta'_k)$$

Supondo

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_k) \text{ e } \underline{X}' = (X_1, \dots, X_{j-1}, X'_j, X'_{j+1}, \dots, X'_k)$$

$$\text{com } X'_j > X_j \text{ } X'_s \leq X_s \text{ } s > j$$

o Caso em que $X'_s = X_s$ $s > j$: notemos que (A.3) é equivalente a,

$$\begin{aligned} & \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x_i, \theta_i \vee \theta'_i) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x'_i, \theta_i \wedge \theta'_i) \\ & \int g_j(x_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}'^{(k)}) d\theta_j \\ & \int g_j(x'_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}'^{(k)}) d\theta_j \\ & \geq \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x_i, \theta'_i) \int g_j(x_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}'^{(k)}) d\theta_j \\ & \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x'_i, \theta_i) \int g_j(x'_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}^{(k)}) d\theta_j, \end{aligned}$$

mas como $X'_s = X_s$, $s > j$ e g_i é TP_2 a desigualdade anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} (13) \quad & \int g_j(x_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}'^{(k)}) d\theta_j \\ & \int g_j(x'_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}'^{(k)}) d\theta_j \\ & \geq \int g_j(x_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}'^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}'^{(k)}) d\theta_j \int g_j(x'_j, \theta_j) C(\theta_{(1)}^{(k)}) d\theta_j, \end{aligned}$$

se,

$$\begin{aligned}
 f_1(\theta_j) &:= C(\theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x_j, \theta_j) \\
 f_2(\theta_j) &:= C(\theta_{(1)}^{(k)})g_j(x'_j, \theta_j) \\
 f_3(\theta_j) &:= C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x'_j, \theta_j) \\
 f_4(\theta_j) &:= C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x_j, \theta_j)
 \end{aligned}$$

e como $f_1(u)f_2(v) \leq f_3(u \vee v)f_4(u \wedge v)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 &C(\theta_{(1)}^{(j-1)}, u, \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x_j, u)C(\theta_{(1)}^{(j-1)}, v, \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x'_j, v) \\
 &\leq C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}^{(j-1)}, u \vee v, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x'_j, u \vee v) \\
 &C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}^{(j-1)}, u \wedge v, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}^{(k)})g_j(x_j, u \wedge v),
 \end{aligned}$$

certo pelas hipóteses. Logo, pelos argumentos já empregados em provas semelhantes, verificamos (13); imediatamente vale (A.3).

o Caso em que $X'_s = X_s$, $s > j + 1$, $X'_{j+1} < X_{j+1}$. (A.3) é equivalente a

$$\begin{aligned}
 &g_{j+1}(x_{j+1}, \theta_{j+1} \vee \theta'_{j+1})g_{j+1}(x'_{j+1}, \theta_{j+1} \wedge \theta'_{j+1}) \\
 &\int g_j(x_j, \theta_j)C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \vee \theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \vee \theta_{(j+1)}^{(k)})d\theta_j \\
 &\int g_j(x'_j, \theta_j)C(\theta_{(1)}^{(j-1)} \wedge \theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)} \wedge \theta_{(j+1)}^{(k)})d\theta_j \\
 &\geq g_{j+1}(x_{j+1}, \theta'_{j+1}) \int g_j(x_j, \theta_j)C(\theta_{(1)}^{(j-1)}, \theta_j, \theta_{(j+1)}^{(k)})d\theta_j \\
 &g_{j+1}(x'_{j+1}, \theta_{j+1}) \int g_j(x'_j, \theta_j)C(\theta_{(1)}^{(k)})d\theta_j,
 \end{aligned}$$

pois as g_i , são TP_2 . Mas, como $x'_{j+1} \leq x_{j+1}$ e g_{j+1} é TP_2 o problema se reduz á verificação de (13), já demonstrada. ♣

Teorema B*

Seja

$$\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) = H(\underline{X}) \prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i) C(\underline{\theta}).$$

Suponhamos ainda, que $\exists j$, tal que

$$g_j \text{ é } RR_2(X_j, \theta_j), \quad g_i \text{ é } TP_2(X_i, \theta_i) \quad \forall i \neq j, i = 1, \dots, k.$$

E seja $C, MTP_2(\underline{\theta})$.

Então, se

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_k), \quad \underline{X}' = (X'_1, \dots, X'_{j-1}, X'_j, X'_{j+1}, \dots, X'_k)$$

com $X'_i \leq X_i \quad \forall i \neq j, \quad X'_j \geq X_j$,

$$\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) >_{TP_2(\underline{\theta})} \xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}')$$

Prova: notemos que

$$(B.1) \quad \xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) >_{TP_2(\underline{\theta})} \xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}')$$

é equivalente a (B.2)

$$\begin{aligned} & \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x_i, \theta_i \vee \theta'_i) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x'_i, \theta_i \wedge \theta'_i) \\ & g_j(x_j, \theta_j \vee \theta'_j) g_j(x'_j, \theta_j \wedge \theta'_j) C(\underline{\theta} \vee \underline{\theta}') C(\underline{\theta} \wedge \underline{\theta}') \\ & \geq g_j(x_j, \theta'_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x_i, \theta'_i) g_j(x'_j, \theta_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x'_i, \theta_i) C(\underline{\theta}') C(\underline{\theta}), \end{aligned}$$

como g_i é $TP_2(X_i, \theta_i)$ e $x'_i \leq x_i$, $\forall i \neq j$, (B.2) é equivalente a

$$g_j(x_j, \theta_j \vee \theta'_j)C(\underline{\theta} \vee \underline{\theta}')g_j(x'_j, \theta_j \wedge \theta'_j)C(\underline{\theta} \wedge \underline{\theta}') \geq g_j(x_j, \theta'_j)C(\underline{\theta}')g_j(x'_j, \theta_j)C(\underline{\theta}),$$

que resulta direto das hipóteses, $x'_j \geq x_j$, g_j RR_2 e C , MTP_2 .

Teorema C*

$$\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) = H(\underline{X}) \prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i)C(\underline{\theta})$$

g_i é $RR_2(X_i, \theta_i) \forall i = 1, \dots, j$, g_i é $TP_2(X_i, \theta_i) \forall i = j+1, \dots, k$. C é $MTP_2(\underline{\theta})$.

Então, se

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_k); \underline{X}' = (X'_1, \dots, X'_{j-1}, X'_j, X'_{j+1}, \dots, X'_k)$$

com $X'_i \geq X_i \forall i = 1, \dots, j$ e $X'_i \leq X_i \forall i = j+1, \dots, k$,

$$\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) >_{TP_2(\underline{\theta})} \xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}').$$

Prova: Como g_i é $RR_2(x_i, \theta_i)$ e $x'_i \geq x_i$, $i = 1, \dots, j$,

$$g_i(x_i, \theta_i \vee \theta'_i)g_i(x'_i, \theta_i \wedge \theta'_i) \geq g_i(x_i, \theta'_i)g_i(x'_i, \theta_i)$$

logo,

$$(a) \prod_{i=1}^j g_i(x_i, \theta_i \vee \theta'_i) \prod_{i=1}^j g_i(x'_i, \theta_i \wedge \theta'_i) \geq \prod_{i=1}^j g_i(x_i, \theta'_i) \prod_{i=1}^j g_i(x'_i, \theta_i).$$

Como g_i é $TP_2(x_i, \theta_i)$ e $x'_i \leq x_i$, $i = j+1, \dots, k$. Logo,

$$(b) \prod_{i=j+1}^k g_i(x_i, \theta_i \vee \theta'_i) \prod_{i=j+1}^k g_i(x'_i, \theta_i \wedge \theta'_i) \geq \prod_{i=j+1}^k g_i(x_i, \theta'_i) \prod_{i=j+1}^k g_i(x'_i, \theta_i)$$

e

$$(c) C(\underline{\theta} \wedge \underline{\theta}') C(\underline{\theta} \vee \underline{\theta}') \geq C(\underline{\theta}) C(\underline{\theta}')$$

(a), (b), (c) além da forma da posteriori permitem concluir a prova.

Exemplo : Distribuição Normal Multivariada

Seja $\underline{X}$ um vetor aleatório k -dimensional, com coordenadas X_i , $i = 1, \dots, k$ independentes. Suponhamos que para todo i , $\theta_i := E(X_i)$ é desconhecida, enquanto que $\sigma_i := Var(X_i)$ é conhecida. Assim,

$$\begin{aligned} f(\underline{X}|\underline{\theta}) &= |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{-(\underline{X} - \underline{\theta})^t |\Sigma|^{-1} (\underline{X} - \underline{\theta})}{2} \right) \\ &= h(\underline{X}) g(\underline{X}, \underline{\theta}) \\ h(\underline{X}) &:= \prod_{i=1}^k \exp \frac{-X_i^2}{2\sigma_i^2} \\ g(\underline{X}, \underline{\theta}) &:= \prod_{i=1}^k \exp \frac{X_i \theta_i}{\sigma_i^2} \prod_{i=1}^k \exp \frac{-\theta_i^2}{2\sigma_i^2} \end{aligned}$$

Afirmção: h é $MTP_2(\underline{X})$ e g é $MTP_2(\underline{X}, \underline{\theta})$.

Os delineamentos para a prova de: g $MTP_2(\underline{X}, \underline{\theta})$ são os seguintes,

$$\begin{aligned} g(\underline{X}, \underline{\theta}) &= \prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i) D(\underline{\theta}), \\ g_i(X_i, \theta_i) &= \exp \frac{X_i \theta_i}{\sigma_i^2} \\ D(\underline{\theta}) &:= \prod_{i=1}^k D_i(\theta_i), \\ D_i(\theta_i) &:= \exp \frac{-\theta_i^2}{2\sigma_i^2}. \end{aligned}$$

$D(\underline{\theta})$ é TP_2 em pares, enquanto que $\prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i)$ é TP_2 nos pares

$$(X_s, X_j), (\theta_s, \theta_j), (X_s, \theta_j), j \neq s.$$

logo, $g(\underline{X}, \underline{\theta})$ é TP_2 em pares, mas como em nosso caso $g(\underline{X}, \underline{\theta}) \neq 0$, por 1.3.3 resulta g , MTP_2 . Usando a mesma proposição, prova-se que h é MTP_2 .

Aplicação dos Teoremas A e B**

A expressão da posteriori fica,

$$\begin{aligned}\xi^*(\underline{\theta}|\underline{X}) &= S(\underline{X}) \prod_{i=1}^k g_i(X_i, \theta_i) C(\underline{\theta}) \\ C(\underline{\theta}) &:= \xi(\underline{\theta}) \prod_{i=1}^k \exp \frac{-\theta_i^2}{2\sigma_i^2} \\ S(\underline{X}) &:= h(\underline{X}) \left(\int f(\underline{X}|\underline{\theta}) \xi(\underline{\theta}) d\underline{\theta} \right)^{-1}\end{aligned}$$

Assim, verificar (C) (do Teorema A*) sobre C equivale a verificar (C) sobre ξ . Assumimos como priori para $\underline{\theta}$ uma Normal de vetor de médias $\underline{0}$ e matriz de covariâncias dada pela identidade I ,

$$\xi(\underline{\theta}) \propto \prod_{i=1}^k \exp \frac{-\theta_i^2}{2}, \quad \text{que verifica (C).}$$

Referências

- Ash, R.B. (1972). *Real Analysis and Probability*. Probability and Mathematical Statistics. A Series of Monographs and Text books. University of Illinois. Academic Press. New York and London.
- Barlow, R. E.; Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of reliability and life testing*. Silver Spring, MD.
- Basu, D.; Cheng, C. (1981). A note on the notion of adequacy.
- Block H.W.; Savits T.H.; Shaked M. (1982). Some concepts of negative dependence, *Ann.Probab.* **10**, 765-772.
- Boland, P. J.; Proschan, F. (1983). The reliability of K out of N systems. *The Annals of Probability*, Vol. 11, **3**, 760-764.
- Boland, P. J.; Proschan, F.; Tong, Y.L. (1988). Moment and geometric Probability inequalities arising from arrangement increasing functions. *The Annals of Probability* Vol. 16, **1**, 407-413.
- Boland, P. J.; Proschan, Frank; Tong, Y. L. (1989). Modelling dependence in simple and indirect majority systems. *J.Appl.Prob.* Vol. 26, 81-88.
- Boland, P. J.; Hollander, M.; Joag-Dev, K.; Kochar, S. (1996). Bivariate dependence properties of order statistics. *J. Multivariate Anal.* Vol. 56, **1**, 75-89.

- Brow, M.; Proschan, F.(1983). Imperfect repair. *J. Appl.Prob.* Vol. 20, 851-859.
- De Finetti, B. (1953). Trasformazioni di numeri aleatori atte a far coincidere distribuzioni diverse. *Istituto Italiano Degli Attuari-Anno XVI* 51-57.
- Ebrahimi, N.; Ghosh, M. (1981). Multivariate Negative Dependence. *Communications in statistics* (Theory and methods.) A10, 4, 307-337.
- Efron P. (1965). Increasing properties of Pólya frequency functions. *Ann.Math.Statist.* 36, 272-279.
- Esteves, L.G. (1997). *Coincidência de distribuições através de uma transformação de De Finetti*. Dissertação de Mestrado-IME. USP.
- Fahmy, S.; C.A.de B.Pereira; Proschan, F.; Shaked, M. (1982). The influence of the sample on the posterior distribution. *Communications in statistics* (Theory and methods.) Vol.11, 16, 1757-1768.
- Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les margens sont données. *Annales de L' Université de Lyon Sect, A Ser 3*, 14, 53-77.
- Genest, CH.; MacKay, J. (1986). The Joy of Copulas: Bivariate Distributions With Uniform Marginals. *The American Statistician* Vol.40, 4, 280-283.
- Joag-Dev, K. (1983). Independence via uncorrelatedness under certain dependence structures. *Ann. Probab.* Vol. 11, 4, 1037-1041.
- Joag-Dev, K.; Perlman, M. D.; Pitt, L. D.(1983). Association of normal random variables and Slepian's inequality. *The Annals of Probability* Vol. 11, 2, 451-455.

- Joag-Dev, K.; Proschan, F. (1983). Negative association of random variables, with applications. *Ann. Statist.* Vol. 11, 1, 286-295.
- Joag-Dev, K.; Kochar, S.; Proschan, F. (1995). A general composition theorem and its applications to certain partial orderings of distributions. *Statist. Probab. Lett.* Vol. 22, 2, 111-119.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Monographs on Statistics and Applied Probability 73 (Chapman and Hall).
- Karlin, S. (1968). *Total Positivity*. Stanford University Press. Stanford, California.
- Karlin, S.; Rinott, Y. (1980 a). Classes of ordering of measures and related correlation inequalities.I. Multivariada totaly positive distributions. *J. Multivariate Anal.* Vol.10, 4, 467-498.
- Karlin, S.; Rinott, Y. (1980 b). Classes of ordering of measures and related correlation inequalities.II.Multivariada reverse rule distributions. *J. Multivariate Anal.* Vol.10, 4, 499-518.
- Kim, J. S.; Proschan, F.(1995). A review: the arrangement increasing partial ordering. *Comput. Oper. Res.* Vol 22, 4, 357-371.
- Kruskal, W. H. (1958). Ordinal measures of association. *American Statistical Association Journal* **53**, 814-861.
- Lehmann, E.L. (1966). Some concepts of dependence. *Ann.Math.Statist.* **43**, 1137-1153.

- Li H.; Scarsini M.; Shaked M. (1996). A tool for the construction of multivariate distributions with given nonoverlapping multivariate marginals. *J. Multivariate Anal.* Vol 56, 1, 20-41.
- Loève, M.(1963). *Probability Theory* (Third Edition). Van Nostrand, New York.
- Mikusinski, P.; Sherwood, H.; Taylor, M. D. (1991-1992). The Fréchet Bounds Revisited. *Real Analysis Exchange* Vol.17, 759-764.
- Nelsen, R.B. (1992). On measures of association as measures of positive dependence. *Statist. Probab. Lett*, **14**, 269-274.
- Nelsen, R.B. (1995). Copulas, Characterization, Correlation, and Counterexamples. *Mathematics Magazine* Vol.68, **3**, 193-198.
- Skibinsky, M. (1967). Adequate Subfields and Sufficiency. *Ann. Math. Statist* Vol.38, 155-161.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs margens. *Publications Institute des Statistics, Université de Paris*, **8**, 229-231.
- Sklar, A. (1973). Random Variables, Join Distribution Function, and Copulas. *Kibernetika* Vol. 9, **6**.

Tipos de dependências

Barlow, R. E.; Proschan, F.(1981). *Statistical Theory of reliability and life testing*. Silver Spring, MD.

Block H.W.; Savits T.H.; Shaked M. (1982). Some concepts of negative dependence. *Ann.Probab.* **10**, 765-772.

Joag-Dev, K.; Proschan, F. (1983). Negative association of random variables, with applications. *Ann. Statist.* Vol. 11, **1**, 286-295.

Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Monographs on Statistics and Applied Probability 73 (Chapman and Hall).

Karlin, S.; Rinott, Y. (1980 a). Classes of ordering of measures and related correlation inequalities.I. Multivariada totaly positive distributions. *J. Multivariate Anal.* Vol.10, **4**, 467-498.

Karlin, S.; Rinott, Y. (1980 b). Classes of ordering of measures and related correlation inequalities.II.Multivariada reverse rule distributions. *J. Multivariate Anal.* Vol.10, **4**, 499-518.

Acoplamentos e Classes de Fréchet

Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les margens sont données.

Annales de L' Université de Lyon Sect, A Ser 3, **14**, 53-77.

Genest, CH.; MacKay, J. (1986). The Joy of Copulas: Bivariate Distributions

With Uniform Marginals. *The American Statistician* Vol.40, **4**, 280-283.

Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Monographs on

Statistics and Applied Probability 73 (Chapman and Hall).

Mikusinski, P.; Sherwood, H.; Taylor, M. D. (1991-1992). The Fréchet Bounds

Revisited. *Real Analysis Exchange* Vol.17, 759-764.

Nelsen, R.B. (1992). On measures of association as measures of positive depen-

dence. *Statist. Probab. Lett*, **14**, 269-274.

Nelsen, R.B. (1995). Copulas, Characterization, Correlation, and Counterexam-

ples. *Mathematics Magazine* Vol.68, **3**, 193-198.

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs margens. *Publi-*

cations Institute des Statistics, Université de Paris, **8**, 229-231.

Sklar, A. (1973). Random Variables, Joint Distribution Function, and Copulas.

Kibernetika Vol. 9, **6**.

Índice de Tópicos

1.1	15
1.2	18
1.2.1	18
1.2.2	19
1.2.3	19
1.2.4	20
1.2.5	20
1.2.6	21
1.2.7	21
1.2.8	21
1.2.9	22
1.2.10	22
1.2.11	22

1.2.12	23
1.2.13	23
1.2.14	24
1.2.15	24
1.2.16	25
1.2.17	25
1.2.18	25
1.2.19	26
1.2.20	26
1.2.21	26
1.2.22	28
1.2.23	28
1.3	29
1.3.1	29

1.3.2	30
1.3.3	30
1.3.4	30
1.3.5	30
1.3.6	30
1.3.7	31
1.3.8	31
1.3.9	31
1.3.10	32
1.3.11	32
1.3.12	32
1.3.13	32
1.3.14	33
1.3.15	33

1.3.16	34
1.3.17	34
1.3.18	35
1.4	36
1.4.1	36
1.4.2	37
1.4.3	40
1.4.4	42
1.4.5	43
2.1	46
2.1.1	46
2.1.2	47
2.1.3	51
2.1.4	52

<i>Acoplamentos e Associação</i>	231
2.1.5	53
2.1.6	54
2.1.7	56
2.1.8	56
2.1.9	58
2.2	59
2.2.1	59
2.2.2	60
2.2.3	61
2.2.4	62
2.2.5	62
2.3	63
2.3.1	63
2.3.2	63

2.4	64
2.4.1	64
2.4.2	65
2.4.3	66
2.4.4	68
2.4.5	69
2.5	71
2.5.1	71
2.5.2	71
2.5.3	72
2.5.4	73
2.5.5	73
2.5.6	74
2.5.7	74

<i>Acoplamentos e Associação</i>	233
2.5.8	76
3.1	78
3.1.1	78
3.1.2	83
3.2	86
3.2.1	87
3.2.2	88
3.2.3	88
3.2.4	88
3.2.5	88
3.2.6	89
3.2.7	89
3.2.8	90
3.2.9	91

3.3	92
3.3.1	92
3.3.2	93
3.3.3	94
3.3.4	95
3.3.5	96
3.3.6	98
3.3.7	98
3.3.8	99
3.3.9	102
3.3.10	103
3.3.11	105
3.3.12	107
3.3.13	108

<i>Acoplamentos e Associação</i>	235
3.3.14	108
3.3.15	109
3.3.16	110
3.3.17	111
3.3.18	114
3.3.19	117
3.3.20	118
3.3.21	119
3.4	120
3.4.1	121
3.4.2	123
3.4.3	127
3.4.4	130
3.4.5	132

4.1	134
4.1.1	135
4.1.2	140
4.1.3	141
4.1.4	143
4.1.5	143
4.1.6	144
4.1.7	145
4.1.8	147
4.1.9	148
4.1.10	149
4.1.11	149
4.1.12	150
4.1.13	151

<i>Acoplamentos e Associação</i>	237
4.1.14	154
4.1.15	154
4.1.16	155
4.1.17	155
4.1.18	156
4.1.19	157
4.2	160
5.1	167
5.1.1	168
5.1.2	169
5.1.3	172
5.1.4	173
5.1.5	178
5.2	183

5.2.1	183
5.2.2	185
5.2.3	186
5.2.4	187
5.2.5	187
5.2.6	189
5.2.7	190
5.3	197
5.3.1	197
5.3.2	198
5.3.3	199
5.3.4	199
5.3.5	199
5.3.6	199

<i>Acoplamentos e Associação</i>	239
----------------------------------	-----

5.3.7	199
-------------	-----

5.3.8	199
-------------	-----

5.3.9	200
-------------	-----

Índice de Siglas

Sigla_____ **Significado**_____ **Tópico**

CDS _ Condicionalmente decrescente em seqüência _ 1.2.16

CIS _ Condicionalmente crescente em seqüência _ 1.2.16

f.d.a. _____ Função de distribuição acumulada _____

f.d.p. _____ Função de distribuição de probabilidade _____

LTD _____ Decrescente pela cauda esquerda _____ 1.2.18

LTI _____ Crescente pela cauda esquerda _____ 1.2.18

MTP₂ _ Multivariate totally positive of order 2 _ 1.2.3

MRR₂ _ Multivariate reverse rule of order 2 _ 1.2.3

NA _____ Negativamente associado _____ 1.2.1

NDS _____ Negativamente dependente através da ordem estocastica _____ 1.2.15

NLOD _ Negative lower orthant dependence _ 1.2.11

NOD	Negative orthant dependence	1.2.12
NQD	Negative quadrant dependent	1.2.10
$NUOD$	Negative upper orthant dependence	1.2.11
PA	Positivamente associado	1.2.2
PDS	Positivamente dependente através da ordem estocastica	1.2.14
PF_2	Frequência Polya de ordem 2	1.2.4
$PLOD$	Positive lower orthant dependence	1.2.11
POD	Positive orthant dependence	1.2.12
PQD	Positive quadrant dependent	1.2.10
$PUOD$	Positive upper orthant dependence	1.2.11
RR_2	Reverse rule of order 2	1.2.4
RR_r	Sinal-regra reversa de ordem r	1.2.21
RTD	Decrescente pela cauda direita	1.2.17

RTI	Crescente pela cauda direita	1.2.17
SD	Estocasticamente decrescente	1.2.13
SI	Estocasticamente crescente	1.2.13
$S-MRR_2$	Fortemente MRR_2	1.2.6
SR_r	Sinal-regular de ordem r	1.2.21
TP_2	MTP_2 caso bivariado	1.2.4
$\underline{X}$	vetor aleatório	
$f_{\underline{X}}$	$f.d.p.$ de $\underline{X}$	
$F_{\underline{X}}$	$f.d.a.$ de $\underline{X}$	
$C_{\underline{X}}$	Acoplamento associado a $F_{\underline{X}}$	1.2.22
τ_{X_1, X_2}	Medida τ de Kendall entre X_1 e X_2	1.2.23
$>_{TP_2}$	ordem TP_2	1.2.7