**Correções de Bartlett e Tipo-Bartlett
em
Modelos Normais Heterocedásticos**

Deusélio Bassini Fioresi

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do grau
de Mestre em Estatística

Área de concentração: **Estatística**

Orientadora: **Prof.^a Dr.^a Denise Aparecida Botter**

- São Paulo, janeiro de 2000 -

Correções de Bartlett e Tipo-Bartlett em Modelos Normais Heterocedásticos

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida e defendida por Deusélio Bassini Fioresi e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 18 de janeiro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof.^aDr.^a Denise Aparecida Botter
- Prof.^aDr.^a Lúcia Pereira Barroso
- Prof.^oDr.^o Valdério Anselmo Reisen.

Aos meus pais, minha esposa e meus irmãos.

Agradecimentos

Com a finalização deste trabalho, acrescento a meus conhecimentos uma experiência até então não vivenciada. Embora tenha encontrado algumas dificuldades neste primeiro trabalho de pesquisa, posso dizer que foi uma experiência bastante agradável, despertando interesse para novas pesquisas. A este feito, devo atribuir diversos fatores, incluindo o ambiente do IME-USP. Em especial, manifesto profunda gratidão

- à **Professora Denise Aparecida Botter**, a qual teve participação crucial como orientadora, além de sua dedicação e incentivo,

- ao meus pais e meus irmãos, que sempre contribuíram de várias formas para a continuidade de meus estudos e a minha noiva, agora esposa, que nunca deixou de me incentivar nos momentos difíceis,

- a todos os professores que deram alguma contribuição, direta ou indireta, para a realização deste trabalho,

- a todos os colegas de mestrado que, com o espírito de pesquisa, favoreceram meu crescimento acadêmico. Em particular, aos amigos **Aldy Fernandes da Silva**, por sua colaboração e incentivo e **Demerval Soares Moreira**, por seu auxílio inestimável na elaboração do programa de simulação,

- às agências **CAPES**, **CNPq**, **FAPESP** e **FINEP**, pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo	6
1 Introdução	7
1.1 O modelo normal heterocedástico	9
1.2 Estimação dos parâmetros	11
1.3 Hipóteses de interesse	13
2 Correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança	14
2.1 Introdução	14
2.2 Testes simultâneos sobre a média e o parâmetro de precisão	17
2.2.1 Modelo de regressão linear simples	22
2.3 Testes sobre o parâmetro de precisão	24
2.3.1 Modelo de regressão linear simples	27

2.4	Testes sobre a média	29
3	Correção tipo-Bartlett para a estatística escore	33
3.1	Introdução	33
3.2	Testes simultâneos sobre a média e o parâmetro de precisão	34
3.2.1	Modelo de regressão linear simples	40
3.3	Testes sobre o parâmetro de precisão	40
3.3.1	Modelo de regressão linear simples	44
3.4	Testes sobre a média	45
4	Resultados de simulações e aplicação a dados reais	49
4.1	Resultados de simulações	49
4.2	Uma aplicação a dados reais	57
	Conclusão	59
	Apêndice	60
	Referências Bibliográficas	62

Resumo

Neste trabalho, nos concentramos em encontrar fatores de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança e tipo-Bartlett para a estatística escore, na classe dos modelos normais heterocedásticos com funções de ligação quaisquer para a média e para o parâmetro de precisão. Apresentamos, também, resultados de simulação e de uma aplicação a um conjunto de dados reais, ilustrando a utilidade dos fatores de correção obtidos em amostras finitas.

Abstract

In this work, we concentrate on finding Bartlett corrections for the likelihood ratio statistic and Bartlett-type corrections for the score statistic in the class of heteroscedastic normal models with any link functions for mean and precision parameters. We also present simulation results and an application to a set of real data illustrating the finite sample usefulness of the obtained corrections.

Capítulo 1

Introdução

Da teoria sobre testes de hipóteses (ver, por exemplo, Cox e Hinkley, 1974, Seção 9.3) sabemos que, sob a hipótese nula, as distribuições das estatísticas da razão de verossimilhança (LR) e escore (S_R) podem ser aproximadas, para problemas regulares e em grandes amostras, pela distribuição qui-quadrado. Com relação à estatística da razão de verossimilhança, Bartlett (1937), Lawley (1956), Hayakawa (1977), Cordeiro (1987) e Chesher e Smith (1995), mostraram que é possível melhorar a qualidade da aproximação por qui-quadrado multiplicando-se a estatística LR por um fator de correção, denominado fator de correção de Bartlett. Cordeiro e Ferrari (1991) derivaram uma fórmula geral para fatores de correção tipo-Bartlett que aperfeiçoam estatísticas cujas distribuições assintóticas são qui-quadrado centrais. O fator de correção de Bartlett que aperfeiçoa a estatística LR e o tipo-Bartlett que aperfeiçoa a estatística escore são casos particulares desta fórmula. As estatísticas aperfeiçoadas por fatores de correção de Bartlett ou tipo-Bartlett têm distribuições qui-quadrado com um erro de ordem n^{-2} , sob a hipótese nula, onde n é o tamanho da amostra. Além disto, resultados de estudos de simulação como, por exemplo, os de Hollas (1991), Cordeiro (1993) e Cribari-Neto e Ferrari (1995a) mostraram que os testes de hipóteses baseados

nas estatísticas (LR) e (S_R) modificadas têm tamanhos empíricos mais próximos dos tamanhos nominais do que os testes baseados nas estatísticas originais (não modificadas) quando amostras de tamanhos pequenos e moderados são consideradas.

Neste trabalho, apresentamos as estatísticas da razão de verossimilhança e escore, assim como suas versões aperfeiçoadas por fatores de correção de Bartlett e tipo-Bartlett, respectivamente, para vários testes de hipóteses em modelos normais heterocedásticos, considerando funções de ligação quaisquer para a média e para a variância. É bastante comum, na prática, que a média e a variância sejam modelados por diferentes funções de regressão. Para exemplificar, em experimentos de controle de qualidade na área industrial, é frequente procurar minimizar a variância enquanto se controla o valor da média do processo. Análises de dados provenientes de tais experimentos requerem, em geral, a modelagem conjunta da média e da variância. Para o modelo normal heterocedástico há vários trabalhos que tratam da obtenção de fatores de Bartlett e tipo-Bartlett para as estatísticas da razão de verossimilhança e escore, respectivamente. Dentre eles, destacamos os de Attfield (1991), Cordeiro (1993), Cribari-Neto e Ferrari (1995a,b), Botter e Cordeiro (1997) e Aubin e Cordeiro (1998). Cribari-Neto e Zarkos (1999) utilizaram métodos de simulação de Monte Carlo para estudarem o comportamento em amostras finitas de estimadores e testes do tipo "bootstrap" no modelo linear heterocedástico. Resultados de simulação são apresentados para comparar o tamanho e o poder do teste escore de homocedasticidade de Breusch e Pagan (1979) com os correspondentes tamanhos e poderes dos testes escore corrigidos de Cribari-Neto e Ferrari (1995a) e Honda (1988).

No Capítulo 1, definimos o modelo normal heterocedástico, estabelecemos um método de estimação de parâmetros utilizando o processo iterativo escore de Fisher e definimos as hipóteses de interesse. No Capítulo 2, apresentamos correções de Bartlett para a estatística LR e fazemos aplicações a casos especiais do modelo normal heterocedástico. Expressões para correções tipo-Bartlett para a estatística escore S_R e aplicações a alguns casos especiais,

são apresentadas no Capítulo 3. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos resultados de simulação comparando os desempenhos das estatísticas LR e S_R , em suas versões originais e aperfeiçoadas, respectivamente, por correções de Bartlett e tipo-Bartlett, para vários testes de hipóteses de interesse e fazemos uma aplicação a um conjunto de dados reais.

1.1 O modelo normal heterocedástico

Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ um conjunto de n variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas. Denotemos por y_l o valor observado de Y_l e por $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ o vetor das n observações. A função densidade de probabilidade para Y_l é dada por,

$$f(y; \mu_l; \sigma_l^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_l^2} (y_l - \mu_l)^2 \right\}, \quad (1.1)$$

com $E(Y_l) = \mu_l$ e $\text{var}(Y_l) = \sigma_l^2$, onde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ está relacionado com o preditor linear $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T = X\beta$ através da função $d(\mu) = \eta$, sendo $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ uma matriz conhecida de dimensão $n \times p$ e posto completo p ($p < n$), com $x_l = (x_{l1}, \dots, x_{lp})^T$, $l = 1, \dots, n$, e β um vetor de dimensão $p \times 1$ de parâmetros de regressão desconhecidos. Definimos a componente sistemática para o parâmetro de precisão $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$, com $\phi_l = 1/\sigma_l^2$, $l = 1, \dots, n$, como $g(\phi) = \tau = S\gamma$, sendo $S = (s_1, \dots, s_n)^T$ uma matriz conhecida de dimensão $n \times q$ e posto completo q ($q < n$) sendo $s_l = (s_{l1}, \dots, s_{lq})^T$, e γ um vetor de dimensão $q \times 1$ de parâmetros de regressão desconhecidos. Para fins de estimação e testes de hipóteses, segue que $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ tem distribuição normal multivariada com média μ e matriz de variância-covariância $\Phi^{-1} = \text{diag}\{\phi_1^{-1}, \dots, \phi_n^{-1}\}$. As funções $d(\cdot)$ e $g(\cdot)$, assumidas biunívocas, são denominadas funções de ligação para a média e para o parâmetro de precisão, respectivamente. Assumimos também que β e γ não têm elementos comuns. O modelo descrito acima é denominado modelo normal heterocedástico.

O logaritmo da função de verossimilhança total, $\ell(\beta, \gamma)$, dado y , para a densidade em

(1.1), pode ser expresso na forma aproximada

$$\ell(\beta, \gamma) \cong -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ \phi_l(y_l - \mu_l)^2 + \log \phi_l \right\}. \quad (1.2)$$

A função escore total definida por

$$U = U(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} U_\beta(\beta, \gamma) \\ U_\gamma(\beta, \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \beta \\ \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \gamma \end{pmatrix}$$

tem como componentes as primeiras derivadas da função $\ell(\beta, \gamma)$, em (1.2), em relação aos parâmetros β e γ . Em notação matricial essas derivadas tomam as seguintes formas

$$U_\beta(\beta, \gamma) = X^T \Phi W^{1/2} (y - \mu), \quad (1.3)$$

e

$$U_\gamma(\beta, \gamma) = -S^T \Phi_1 \vartheta, \quad (1.4)$$

onde $W^{1/2} = \text{diag}\{w_1^{1/2}, \dots, w_n^{1/2}\}$, com $w_l = (d\mu_l/d\eta_l)^2$, $\Phi = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, $\Phi_1 = \text{diag}\{\phi_{11}, \dots, \phi_{1n}\}$, com $\phi_{1l} = d\phi_l/d\tau_l$ e $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, com $\vartheta_l = 1/2[(y_l - \mu_l)^2 - 1/\phi_l]$, $l = 1, \dots, n$.

A matriz de informação total de Fisher $K = K(\beta, \gamma)$ para $(\beta^T, \gamma^T)^T$ é bloco-diagonal com submatrizes,

$$K_{\beta, \beta} = -K_{\beta\beta} = E \left[-\frac{\partial^2 \ell(\beta, \gamma)}{\partial \beta \partial \beta^T} \right] = X^T \Phi W X \quad (1.5)$$

para β e

$$K_{\gamma, \gamma} = -K_{\gamma\gamma} = E \left[-\frac{\partial^2 \ell(\beta, \gamma)}{\partial \gamma \partial \gamma^T} \right] = \frac{1}{2} S^T \Phi^{-2} \Phi_1^2 S \quad (1.6)$$

para γ , onde $\Phi_1^2 = \text{diag}\{\phi_{11}^2, \dots, \phi_{1n}^2\}$ e $\Phi^{-2} = \text{diag}\{\phi_1^{-2}, \dots, \phi_n^{-2}\}$.

Como K é bloco-diagonal, os parâmetros β e γ são globalmente ortogonais (ver, por exemplo, Cox e Reid, 1987) e seus estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$, respectivamente, são assintoticamente independentes.

1.2 Estimação dos parâmetros

Sejam $K_{\beta,\beta}^{-1}$ e $K_{\gamma,\gamma}^{-1}$ as inversas das matrizes de informação total de Fisher para β e γ , respectivamente. A inversa da matriz informação total de Fisher para $(\beta^T, \gamma^T)^T$ é dada por $K^{-1} = \text{diag} \{K_{\beta,\beta}^{-1}, K_{\gamma,\gamma}^{-1}\}$.

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ podem ser calculados através do processo iterativo escore de Fisher

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}^{(m+1)} \\ \hat{\gamma}^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}^{(m)} \\ \hat{\gamma}^{(m)} \end{bmatrix} + \hat{K}^{(m)-1} \hat{U}^{(m)},$$

onde $\hat{K}^{(m)-1}$ e $\hat{U}^{(m)-1}$ são, respectivamente, a inversa da matriz de informação total de Fisher e a função escore avaliadas nas estimativas do passo m . Como K^{-1} é bloco-diagonal, obtemos no passo m ,

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = \hat{\beta}^{(m)} + \hat{K}_{\beta,\beta}^{(m)-1} \hat{U}_{\beta}^{(m)} \quad (1.7)$$

e

$$\hat{\gamma}^{(m+1)} = \hat{\gamma}^{(m)} + \hat{K}_{\gamma,\gamma}^{(m)-1} \hat{U}_{\gamma}^{(m)}. \quad (1.8)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.7) por $\hat{K}_{\beta,\beta}^{(m)}$ temos

$$\hat{K}_{\beta,\beta}^{(m)} \hat{\beta}^{(m+1)} = \hat{K}_{\beta,\beta}^{(m)} \hat{\beta}^{(m)} + \hat{U}_{\beta}^{(m)}.$$

De (1.3) e (1.5), obtemos

$$\begin{aligned}
X^T \hat{\Phi}^{(m)} \hat{W}^{(m)} X \hat{\beta}^{(m+1)} &= X^T \hat{\Phi}^{(m)} \hat{W}^{(m)} X \hat{\beta}^{(m)} + X^T \hat{\Phi}^{(m)} \hat{W}^{(m)1/2} (y - \hat{\mu})^{(m)} \\
&= X^T \hat{\Phi}^{(m)} \hat{W}^{(m)} [X \hat{\beta}^{(m)} + \hat{W}^{(m)-1/2} (y - \hat{\mu})^{(m)}].
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Definindo $\hat{z}^{(m)} = X \hat{\beta}^{(m)} + \hat{W}^{(m)-1/2} (y - \hat{\mu})^{(m)}$, escrevemos (1.9) como

$$\hat{\beta}^{(m+1)} = (X^T \hat{\Phi}^{(m)} \hat{W}^{(m)} X)^{-1} X^T \hat{\Phi}^{(m)} \hat{W}^{(m)} \hat{z}^{(m)}. \tag{1.10}$$

Através de um desenvolvimento análogo ao descrito acima para a obtenção de $\hat{\beta}^{(m+1)}$, encontramos a partir de (1.4), (1.6) e (1.8)

$$\hat{\gamma}^{(m+1)} = (S^T \hat{\Phi}^{-2(m)} \hat{\Phi}_1^{2(m)} S)^{-1} S^T \hat{\Phi}^{-2(m)} \hat{\Phi}_1^{2(m)} \hat{\gamma}^{(m)}, \tag{1.11}$$

onde

$$\hat{r}^{(m)} = S \hat{\gamma}^{(m)} + 2 \hat{\Phi}^{2(m)} \hat{\Phi}_1^{-1(m)} \hat{y}^{(m)}.$$

As expressões (1.10) e (1.11) são simplesmente os vetores de coeficientes da regressão de mínimos quadrados ponderados de z sobre as colunas de X com ΦW como matriz de peso para β , e de r sobre as colunas de S com $\Phi^{-2} \Phi_1^2$ como matriz de peso para γ .

Inicializando o processo com estimativas $\hat{\beta}^{(0)}$ e $\hat{\gamma}^{(0)}$ obtemos, através de (1.10) e (1.11), os estimadores de máxima verossimilhança para β e γ no passo $m = 1$, que reiniciarão o processo para a obtenção das estimativas do passo $m = 2$ e assim, sucessivamente, até que a convergência seja obtida. Smyth (1989), de acordo com Nelder e Wedderburn (1972), sugere que $\hat{\beta}^{(0)}$ seja obtido assumindo em (1.10) $\mu_l = y_l$ e $\phi_l = 1$, enquanto que $\hat{\gamma}^{(0)}$ seja obtido assumindo em (1.11) $\phi_l = (y_l - \hat{\mu}_l)^2$.

1.3 Hipóteses de interesse

Consideremos as partições $\beta = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T$ e $\gamma = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)^T$, onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^T$, $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^T$, $\gamma_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \dots, \gamma_q)^T$ com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Para o modelo em (1.1), estamos interessados no teste da hipótese $H_1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$, $\gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra $H : \text{pelo menos uma das igualdades é violada}$, onde $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$ são vetores especificados de dimensões p_1 e q_1 , respectivamente. Considerando $p_1 = p - 1$ e $q_1 = q - 1$, queremos testar, em particular, a hipótese $H'_1 : \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, com $x_{lp} = 1$ e $s_{lq} = 1$, para $l = 1, \dots, n$. O caso $p_1 = 0$ torna possível o teste de hipótese $H_2 : \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$. Supondo $p_1 = 0$ e $q_1 = q - 1$, um caso especial refere-se ao teste de $H'_2 : \gamma_1 = 0$, com $s_{lq} = 1$, para $l = 1, \dots, n$. Para $q_1 = 0$, temos interesse no teste de $H_3 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$. Supondo $p_1 = p - 1$ e $q_1 = 0$, temos como caso especial o teste de $H'_3 : \beta_1 = 0$, com $x_{lp} = 1$, para $l = 1, \dots, n$. Observemos que as hipóteses H_2 , H_3 , H'_1 , H'_2 e H'_3 devem ser testadas contra a hipótese alternativa H definida anteriormente. O teste de H'_1 equivale a testar se as variáveis aleatórias $Y_1, \dots, Y_n$ são identicamente distribuídas. Já o teste de H'_2 se reduz ao teste de homocedasticidade, ou seja, equivale a testar se $Y_1, \dots, Y_n$ têm a mesma variância. Este teste tem sido muito explorado na literatura (ver, por exemplo, Godfrey, 1978; Breusch e Pagan, 1979; Cook e Weisberg, 1983, Attfield, 1991 e Jeffrey e Chih-Ling 1994). Finalmente, o teste de H'_3 equivale a verificar se $Y_1, \dots, Y_n$ têm a mesma média, isto é, se $\mu_l = d^{-1}(\beta_p)$, para $l = 1, \dots, n$.

Capítulo 2

Correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhança

2.1 Introdução

A estatística da razão de verossimilhança LR é freqüentemente utilizada em testes de hipóteses. Sabemos, que sob a hipótese nula, LR tem distribuição aproximadamente χ^2 com ψ graus de liberdade, onde ψ é a diferença entre as dimensões dos espaços paramétricos associados as hipóteses testadas (ver, por exemplo, Cox e Hinkley, 1974, Seção 9.3). De acordo com Bartlett (1937), essa aproximação para a distribuição χ^2 pode ser melhorada substituindo LR pela estatística $LR^* = c^{-1}LR$, onde c é uma constante, denominada correção de Bartlett, determinada pela relação $c = \psi^{-1}E(LR)$, onde $E(LR)$, o valor esperado da estatística LR , é calculado com um erro de ordem $O(n^{-2})$, sendo n o tamanho da amostra. É importante salientar que, quando afirmamos que a distribuição de LR^* é χ^2_ψ até ordem n^{-1} (o erro da aproximação é de ordem $O(n^{-2})$), sob a hipótese nula, estamos supondo

que certas condições de regularidade estão satisfeitas. Uma discussão detalhada destas suposições pode ser encontrada em Chandra e Ghosh (1979), Chandra (1985) e Jensen (1993). No caso da correção c depender de parâmetros desconhecidos, estes devem ser substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula. Neste caso, a estatística corrigida resultante ainda tem distribuição χ^2_ψ até ordem n^{-1} sob a hipótese nula (Lawley, 1956).

O objetivo deste capítulo é obter correções de Bartlett, em forma matricial, para as estatísticas da razão de verossimilhança associadas aos testes das hipóteses H_1 , H_2 e H_3 descritas na Seção 1.2. Baseados no trabalho de Lawley (1956), dispomos de uma fórmula matricial para o valor esperado $2E\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \ell(\beta, \gamma)\}$ até ordem $O(n^{-1})$, onde $\ell(\beta, \gamma)$ é o logaritmo da função de verossimilhança dado em (1.2) e $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de β e γ , respectivamente, sob o modelo irrestrito. Nas Seções 2.2 a 2.4, esta fórmula será utilizada para discutir os testes da razão de verossimilhança das hipóteses H_1 , H_2 e H_3 aperfeiçoados por correções de Bartlett.

De acordo com Lawley(1956), podemos escrever até ordem $O(n^{-1})$

$$E\{2[\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \ell(\beta, \gamma)]\} = p + q + \varepsilon_{p+q}, \quad (2.1)$$

onde o termo ε_{p+q} é de ordem $O(n^{-1})$ e p e q são as dimensões dos vetores β e γ , respectivamente. O termo ε_{p+q} é obtido através de cumulantes conjuntos de derivadas de $\ell(\beta, \gamma)$ com respeito a componentes de β e γ .

Botter e Cordeiro (1997) apresentam uma fórmula para o termo ε_{p+q} em modelos lineares generalizados com componente sistemática para o parâmetro de dispersão. De acordo com esse resultado, a fórmula de ε_{p+q} para o modelo normal heterocedástico em (1.1) é dada por

$$\varepsilon_{p+q} = \varepsilon_{\beta p} + \varepsilon_{\gamma q} + \frac{1}{2} \text{tr}(\Phi_2 W Z_{\beta d} Z_{\gamma d} - \Phi_1 W Z_{\beta}^{(2)} \Phi_1 W Z_{\gamma})$$

$$+\frac{1}{4}1^T\Phi_1WZ_{\beta d}Z_\gamma\{Z_{\beta d}W+Z_{\gamma d}(2\Phi^3\Phi_1^2-\Phi^2\Phi_2)\}\Phi_11 \quad (2.2)$$

com

$$\varepsilon_{\beta p} = \frac{1}{4}\text{tr}(\Phi^{-1}HZ_{\beta d}^2)+\frac{1}{4}1^T\Phi^{-1}F(-2Z_\beta^{(3)}+Z_{\beta d}Z_\beta Z_{\beta d})F\Phi^{-1}1, \quad (2.3)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma q} &= \frac{1}{4}\text{tr}(\Phi_3Z_{\gamma d}^2)+\frac{1}{12}1^T\Phi^3\Phi_1^3(2Z_\gamma^{(3)}+3Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d})\Phi_1^3\Phi^31 \\ &+ \frac{1}{16}1^T\Phi^2\Phi_1\Phi_2(Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}-2Z_\gamma^{(3)})\Phi_2\Phi_1\Phi^21 \\ &- \frac{1}{4}1^T\Phi^3\Phi_1^3Z_{\gamma d}Z_\gamma Z_{\gamma d}\Phi_1\Phi_2\Phi^21, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\Phi = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, $\Phi_1 = \text{diag}\{\phi_{11}, \dots, \phi_{1n}\}$, $\Phi_2 = \text{diag}\{\phi_{21}, \dots, \phi_{2n}\}$, com $\phi_{1l} = d\phi_l/d\tau_l$ e $\phi_{2l} = d^2\phi_l/d\tau_l^2$, $Z_\beta = (z_{\beta lm}) = XK_{\beta, \beta}^{-1}X^T$, para $K_{\beta, \beta}^{-1}$ definida no Capítulo 1, $Z_{\beta d} = \text{diag}\{z_{\beta 11}, \dots, z_{\beta nn}\}$, $Z_{\beta d}^2 = \text{diag}\{z_{\beta 11}^2, \dots, z_{\beta nn}^2\}$, $Z_\beta^2 = (z_{\beta lm}^2)$, $Z_\gamma = (z_{\gamma lm}) = SK_{\gamma, \gamma}^{-1}S^T$, para $K_{\gamma, \gamma}^{-1}$ definida no Capítulo 1, $Z_{\gamma d} = \text{diag}\{z_{\gamma 11}, \dots, z_{\gamma nn}\}$, $Z_{\gamma d}^2 = \text{diag}\{z_{\gamma 11}^2, \dots, z_{\gamma nn}^2\}$, $\Phi_1^3 = \text{diag}\{\phi_{11}^3, \dots, \phi_{1n}^3\}$, $Z_\beta^{(3)} = (z_{\beta lm}^3)$, $Z_\gamma^{(3)} = (z_{\gamma lm}^3)$, 1 é um vetor $n \times 1$ de valores iguais a 1 e Φ_3 , F e H , são matrizes diagonais $n \times n$, dadas por $\Phi_3 = \text{diag}\{\phi_{31}, \dots, \phi_{3n}\}$, para $\phi_{3l} = (3/\phi_l^4)(d\phi_l/d\tau_l)^4 - 2(1/\phi_l^3)(d\phi_l/d\tau_l)^2(d^2\phi_l/d\tau_l^2) - [1/(2\phi_l^2)](d^2\phi_l/d\tau_l^2)^2$, $F = \text{diag}\{f_1, \dots, f_n\}$, com $f_l = (d\mu_l/d\eta_l)(d^2\mu_l/d\eta_l^2)$, e $H = \text{diag}\{h_1, \dots, h_n\}$, para $h_l = (d^2\mu_l/d\eta_l^2)^2$. As matrizes Z_β e Z_γ são, respectivamente, as matrizes de covariância assintóticas de $\hat{\eta} = X\hat{\beta}$ e $\hat{\tau} = S\hat{\gamma}$.

Considerando um modelo com função de ligação identidade para a média, $\mu = \eta = X\beta$, e função de ligação logaritmica para o parâmetro de precisão, $-\log \phi = \tau = S\gamma$, temos $w_l = 1$, $f_l = h_l = 0$, $d(\phi_l) = (-1/2)\log \phi_l$, $-\phi_{1l} = \phi_{2l} = \phi_l$ e $\phi_{3l} = -1/2$, para $l, \dots, n$. Neste caso a expressão (2.3) se anula e as expressões (2.2) e (2.4) têm as seguintes formas, respectivamente,

$$\varepsilon_{p+q} = \varepsilon_{\gamma q} + \frac{1}{2}\text{tr}(\Phi^{-1}Z_{\beta d}Z_{\gamma d} - \Phi^{-1}Z_\beta^{(2)}\Phi^{-1}Z_\gamma)$$

$$+\frac{1}{4}1^T\Phi^{-1}Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\beta d}\Phi^{-1}1+\frac{1}{4}1^T\Phi^{-1}Z_{\beta d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}1 \quad (2.5)$$

e

$$\varepsilon_{\gamma q} = -\frac{1}{8}\text{tr}(Z_{\gamma d}^2) + \frac{1}{24}1^T Z_{\gamma}^{(3)}1 + \frac{1}{16}1^T Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d}1. \quad (2.6)$$

Notemos que a expressão $\varepsilon_{\beta p}$, em (2.3) depende das matrizes X e S e dos parâmetros β e γ , enquanto que a expressão $\varepsilon_{\gamma q}$ em (2.4) não envolve a matriz modelo X nem o vetor β , dependendo somente da matriz S , do parâmetro γ e de derivadas do parâmetro ϕ em relação à função de ligação τ .

Para os modelos normais heterocedásticos que possuem matrizes de covariância assintóticas Z_{β} e Z_{γ} em forma fechada, podemos obter expressões de ε_{p+q} em forma fechada. Nestas situações, os fatores de correção de Bartlett associados às estatísticas da razão de verossimilhança de vários testes de hipóteses também têm forma fechada. Além disso, as quantidades (2.2) - (2.4) podem ser facilmente obtidas através dos pacotes computacionais MATHEMATICA (Wolfram, 1991) ou MAPLE (Char et al., 1988).

2.2 Testes simultâneos sobre a média e o parâmetro de precisão

Nesta seção obtemos correções de Bartlett para estatísticas da razão de verossimilhança em testes de hipóteses simultâneos sobre a média e o parâmetro de precisão, ou seja, sobre $(\beta^T, \gamma^T)^T$, nos modelos normais heterocedásticos definidos em (1.1).

Consideremos as funções de ligação $d(\mu)$ e $g(\phi)$ definidas na Seção 1.2 e as partições $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T)$ para o vetor β e $\gamma^T = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)$ para o vetor γ , onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^T$, $\beta_2 =$

$(\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^T$, $\gamma_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \dots, \gamma_q)^T$, com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Essas decomposições induzem as correspondentes partições

$$X = (X_1, X_2), \quad S = (S_1, S_2),$$

$$U = (U_{\beta_1}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2), U_{\beta_2}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2), U_{\gamma_1}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2), U_{\gamma_2}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2))^T,$$

$$K_{\beta, \beta} = \begin{pmatrix} K_{\beta_{11}} & K_{\beta_{12}} \\ K_{\beta_{21}} & K_{\beta_{22}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_{\gamma, \gamma} = \begin{pmatrix} K_{\gamma_{11}} & K_{\gamma_{12}} \\ K_{\gamma_{21}} & K_{\gamma_{22}} \end{pmatrix},$$

onde X_1 , X_2 , S_1 e S_2 são matrizes conhecidas de posto completo e dimensões $n \times p_1$, $n \times (p - p_1)$, $n \times q_1$, $n \times (q - q_1)$, respectivamente, $K_{\beta_{11}} = X_1^T W \Phi X_1$, $K_{\beta_{12}} = K_{\beta_{21}}^T = X_1^T W \Phi X_2$, $K_{\beta_{22}} = X_2^T W \Phi X_2$, $K_{\gamma_{11}} = 2^{-1} S_1^T \Phi^{-2} \Phi_1^2 S_1$, $K_{\gamma_{12}} = K_{\gamma_{21}}^T = 2^{-1} S_1^T \Phi^{-2} \Phi_1^2 S_2$ e $K_{\gamma_{22}} = 2^{-1} S_2^T \Phi^{-2} \Phi_1^2 S_2$.

Estamos interessados em testar a hipótese $H_1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$, $\gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra H : pelo menos uma das igualdades é violada, onde $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$ são vetores conhecidos de dimensões p_1 e q_1 , respectivamente. Denotamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros β_2 , γ_2 , sob H_1 , com um acento $\sim$. A estatística da razão de verossimilhança para o teste de H_1 é dada por

$$LR_1 = 2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)\},$$

que, sob H_1 , tem distribuição assintótica $\chi_{p_1+q_1}^2$.

Para obtermos a correção de Bartlett para LR_1 , escrevemos

$$LR_1 = 2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)\} \\ - \{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)\},$$

onde $\ell(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ é o logaritmo da função de verossimilhança obtida nos parâmetros β e γ .

A partir de (2.1) a (2.4) e de Botter e Cordeiro (1997) encontramos, até ordem $O(n^{-1})$,

$$2E\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)\} = p + q + \varepsilon_{p+q}$$

e

$$2E\{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2) - \ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)\} = (p - p_1) + (q - q_1) + \varepsilon_{(p-p_1)+(q-q_1)},$$

ou seja,

$$E(LR_1) = p_1 + q_1 + \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p+q)-(p_1+q_1)}, \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p+q)-(p_1+q_1)} &= \varepsilon_{\beta_p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)} + \varepsilon_{\gamma_q} - \varepsilon_{\gamma(q-q_1)} + \frac{1}{2} \text{tr}\{\Phi_2 W(Z_{\beta d} Z_{\gamma d} \\ &\quad - Z_{2\beta d} Z_{2\gamma d}) - \Phi_1 W(Z_{\beta}^{(2)} \Phi_1 W Z_{\gamma} - Z_{2\beta}^{(2)} \Phi_1 W Z_{2\gamma})\} \\ &\quad + \frac{1}{4} 1^T \Phi_1 W(Z_{\beta d} Z_{\gamma} Z_{\beta d} - Z_{2\beta d} Z_{2\gamma} Z_{2\beta d}) W \Phi_1 1 + \frac{1}{4} 1^T \Phi_1 W \\ &\quad (Z_{\beta d} Z_{\gamma} Z_{\gamma d} - Z_{2\beta d} Z_{2\gamma} Z_{2\gamma d})(2\Phi^{-3} \Phi_1^2 - \Phi^{-2} \Phi_2) \Phi_1 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

com

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta_p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)} &= \frac{1}{4} \text{tr}\{\Phi^{-1} H(Z_{\beta d}^2 - Z_{2\beta d}^2)\} + \frac{1}{4} 1^T \Phi^{-1} F\{-2(Z_{\beta}^{(3)} \\ &\quad - Z_{2\beta}^{(3)}) + (Z_{\beta d} Z_{\beta} Z_{\beta d} - Z_{2\beta d} Z_{2\beta} Z_{2\beta d})\} F \Phi^{-1} 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma_q} - \varepsilon_{\gamma(q-q_1)} &= \frac{1}{4} \text{tr}\{\Phi_3(Z_{\gamma d}^2 - Z_{2\gamma d}^2)\} + \frac{1}{24} 1^T \Phi^{-3} \Phi_1^3 \{4(Z_{\gamma}^{(3)} - Z_{2\gamma}^{(3)}) + 6(Z_{\gamma d} Z_{\gamma} Z_{\gamma d} \\ &\quad - Z_{2\gamma d} Z_{2\gamma} Z_{2\gamma d})\} \Phi_1^3 \Phi^{-3} 1 + \frac{1}{16} 1^T \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2 \{(Z_{\gamma d} Z_{\gamma} Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d} Z_{2\gamma} Z_{2\gamma d}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d}) - 2(Z_{\gamma}^{(3)} - Z_{2\gamma}^{(3)})\}\Phi_2\Phi_1\Phi^{-2}1 \\
& -\frac{1}{4}1^T\Phi^{-3}\Phi_1^3(Z_{\gamma d}Z_{\gamma}Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d})\Phi_1\Phi_2\Phi^{-2}1,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo $Z_{2\beta} = X_2K_{\beta 22}^{-1}X_2^T = X_2(X_2^TW\Phi^{-1}X_2)^{-1}X_2^T$ a matriz de covariância assintótica de $\tilde{\eta} = X_1\beta_1^{(0)} + X_2\tilde{\beta}_2$, $Z_{2\beta d} = \text{diag}\{z_{2\beta 11}, \dots, z_{2\beta nn}\}$, $Z_{2\beta d}^2 = \text{diag}\{z_{2\beta 11}^2, \dots, z_{2\beta nn}^2\}$, $Z_{2\beta}^{(2)} = (z_{2\beta 1m}^2)$, $Z_{2\beta}^{(3)} = (z_{2\beta 1m}^3)$, $Z_{2\gamma} = S_2K_{\gamma 22}^{-1}S_2^T = 2^{-1}S_2(S_2^T\Phi^{-2}\Phi_1^2S_2)^{-1}S_2^T$ a matriz de covariância assintótica de $\tilde{\tau} = S_1\gamma_1^{(0)} + S_2\tilde{\gamma}_2$, $Z_{2\gamma d} = \text{diag}\{z_{2\gamma 11}, \dots, z_{2\gamma nn}\}$, $Z_{2\gamma d}^2 = \text{diag}\{z_{2\gamma 11}^2, \dots, z_{2\gamma nn}^2\}$ e $Z_{2\gamma}^{(3)} = (z_{2\gamma 1m}^3)$. Todas as matrizes diagonais W , F , H , Φ , Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 devem ser avaliadas sob o modelo restrito especificado por H_1 .

A correção de Bartlett c associada à estatística LR_1 é determinada pela equação

$$c = \frac{E(LR_1)}{p_1 + q_1},$$

com $E(LR_1)$ dada por (2.7), ou seja,

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p+q)-(p_1+q_1)}}{p_1 + q_1}. \tag{2.11}$$

Assim a estatística corrigida $LR_1^* = \tilde{c}^{-1}LR_1$ tem distribuição $\chi_{p_1+q_1}^2$ até ordem $O(n^{-1})$, sob H_1 .

Como uma aplicação do resultado (2.11), consideremos o teste da hipótese nula $H'_1 : \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, com $p_1 = p - 1$, $q_1 = q - 1$, $x_{lp} = 1$ e $s_{lq} = 1$ para $l = 1, \dots, n$ contra a hipótese alternativa H , definida no início desta seção. A estatística da razão de verossimilhança associada a este teste é dada por

$$LR'_1 = 2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(0, \tilde{\beta}_p, 0, \tilde{\gamma}_q)\} \tag{2.12}$$

que, assintoticamente, tem distribuição χ_{p+q-2}^2 sob H'_1 . Ainda, sob H'_1 , temos que $F = fI$, $H = hI$, $W = wI$, $\Phi = \phi I$, $\Phi_1 = \delta_1 I$, $\Phi_2 = \delta_2 I$, $\Phi_3 = \delta_3 I$, $X = S = 1$, $Z_{2\beta} = (n\phi w)^{-1}11^T$, $Z_{2\beta d} = (n\phi w)^{-1}I$, $Z_{2\beta}^{(2)} = (n\phi w)^{-2}11^T$, $Z_{2\beta}^{(3)} = Z_{2\beta d}Z_{2\beta}Z_{2\beta d} = (n\phi w)^{-3}11^T$, $Z_{2\gamma} = 2\phi^2(n\delta_1^2)^{-1}11^T$, $Z_{2\gamma d} = 2\phi^2(n\delta_1^2)^{-1}I$, $Z_{2\gamma}^{(3)} = Z_{2\gamma d}Z_{2\gamma}Z_{2\gamma d} = 8\phi^6(n\delta_1^2)^{-3}11^T$, onde I é a matriz identidade de dimensão $n \times n$, $\delta_1 = \partial\phi/\partial\tau$, $\delta_2 = \partial^2\phi/\partial\tau^2$, $\delta_3 = (2\phi^4)^{-1}(-6\delta_1^4 + 4\phi\delta_1^2\delta_2 + \phi^2\delta_2^2)$. Definimos as matrizes $J = (j_{lm}) = X(X^T X)^{-1}X^T$ e $N = (n_{lm}) = S(S^T S)^{-1}S^T$, de forma que $Z_\beta = (\phi w)^{-1}J$ e $Z_\gamma = (2\phi^2/\delta_1^2)N$. Além disto, temos $J_d = \text{diag}\{j_{11}, \dots, j_{nn}\}$ e $N_d = \text{diag}\{n_{11}, \dots, n_{nn}\}$.

De (2.11) obtemos, então,

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_2}{p + q - 2}, \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_2 &= \varepsilon_{\beta_p} - \varepsilon_{\beta_1} + \varepsilon_{\gamma_p} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{\phi\delta_2}{\delta_1^2} \text{tr}(J_d N_d) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{2 \text{tr}(J^2 N) - 1^T J_d N J_d 1\} \\ &\quad + \frac{2\delta_1^2 - \phi\delta_2}{\delta_1^2} 1^T J_d N N_d 1 - \frac{3}{2n} \end{aligned} \quad (2.14)$$

com

$$\varepsilon_{\beta_p} - \varepsilon_{\beta_1} = \frac{h\phi}{4\phi w^2} \text{tr}(J_d^2) - \frac{f^2}{2\phi w^3} 1^T J^{(3)} 1 + \frac{f^2}{4\phi w^3} 1^T J_d J J_d 1 + \frac{f^2 - hw}{4n\phi w^3} \quad (2.15)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma_p} - \varepsilon_{\gamma_1} &= \frac{1}{6\delta_1^4} \{3(-6\delta_1^4 + 4\phi\delta_1^2\delta_2 + \phi^2\delta_2^2) \text{tr}(N_d^2) + 2(4\delta_1^4 - 3\phi^2\delta_2^2) 1^T N^{(3)} 1 \\ &\quad + 3(2\delta_1^2 - \phi\delta_2)^2 1^T N_d N N_d 1\} - \frac{1}{3n}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Em alguns casos, dependendo das matrizes X e S , as equações (2.14) a (2.16) podem ser bastante simplificadas. A equação (2.15) se anula para o modelo normal com funções de

ligação identidade para a média ($w = 1, h = f = 0$) e qualquer para o parâmetro de precisão, enquanto que as equações (2.14) e (2.16) não se alteram.

2.2.1 Modelo de regressão linear simples

Consideremos um modelo normal heterocedástico com componentes sistemáticas $d(\mu_l) = \eta_l = \beta_2 + \beta_1 x_l$ e $g(\phi_l) = \tau_l = \gamma_2 + \gamma_1 s_l$, onde x_l e s_l denotam os valores das variáveis explicativas x e s , para $l = 1, \dots, n$. Para o teste da hipótese composta $H'_1 : \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0$, a estatística da razão de verossimilhança é dada pela expressão $LR'_1 = 2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(0, \tilde{\beta}_2, 0, \tilde{\gamma}_2)\}$. Neste caso, $p = q = 2$ e a correção de Bartlett tem a forma $c = 1 + (\varepsilon_4 - \varepsilon_2)/2$, onde a diferença $\varepsilon_4 - \varepsilon_2$ vem das expressões (2.14) a (2.16). Definimos as notações $v_{ax} = \sum (x_l - \bar{x})^a / n$ e $v_{as} = \sum (s_l - \bar{s})^a / n$ com $(a = 2, 3, 4)$ para o a -ésimo momento central das covariáveis x e s , onde $\bar{x} = \sum x_l / n$ e $\bar{s} = \sum s_l / n$. Definimos também, $v_{ax,bs} = \sum (x_l - \bar{x})^a (s_l - \bar{s})^b / n$ com $(a, b = 1, 2)$. Sob o modelo irrestrito temos $X = (1 \ x)$, com $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $S = (1 \ s)$, com $s = (s_1, \dots, s_n)^T$ e os elementos (l, m) das matrizes Z_β e Z_γ , avaliados em $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, dados por $z_{\beta_{lm}} = (n\phi w v_{2x})^{-1} \{v_{2x} + (x_l - \bar{x})(x_m - \bar{x})\}$ e $z_{\gamma_{lm}} = [2\phi^2 / (n\delta_1^2 v_{2s})] \{v_{2s} + (s_l - \bar{s})(s_m - \bar{s})\}$, respectivamente. Utilizando a notação definida acima em conjunto com as fórmulas (2.14) a (2.16) encontramos

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 - \varepsilon_2 = & \varepsilon_{\beta_2} - \varepsilon_{\beta_1} + \varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{1}{2n\delta_1^2} \left\{ \frac{2(\phi\delta_2 v_{2x,2s} - 2\delta_1^2 v_{x,s}^2)}{v_{2x} v_{2s}} \right. \\ & \left. - \delta_1^2 \frac{v_{2x,s}^2}{v_{2x}^2 v_{2s}} + 2(2\delta_1^2 - \phi\delta_2) \frac{v_{2x,s} v_{3s}}{v_{2x} v_{2s}^2} + 13\delta_1^2 - 2\phi\delta_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

com

$$\varepsilon_{\beta_2} - \varepsilon_{\beta_1} = \frac{1}{12n\phi w^3} \{3(5hw - 3f^2) + 3hw\gamma_{2x} - 3f^2\gamma_{1x}^2\} \quad (2.18)$$

e

$$\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} = \frac{-1}{6n\delta_1^4} [3\{-10\phi^4\delta_3 + 3\phi\delta_2(\phi\delta_2 + 4\delta_1^2) - 20\delta_1^4\}]$$

$$-6\phi^4\delta_3\gamma_{2s} + \{3\phi\delta_2(\phi\delta_2 + 4\delta_1^2) - 20\delta_1^4\}\gamma_{1s}^2], \quad (2.19)$$

onde $\gamma_{1x} = v_{3x}/v_{2x}^{3/2}$ e $\gamma_{2x} = v_{4x}/v_{2x}^2 - 3$ são as medidas amostrais usuais de assimetria e curtose padronizadas de x e $\gamma_{1s} = v_{3s}/v_{2s}^{3/2}$ e $\gamma_{2s} = v_{4s}/v_{2s}^2 - 3$ são as medidas amostrais de assimetria e curtose padronizadas de s . Para $X = S$ as fórmulas (2.17) a (2.19) são expressas como

$$\varepsilon_4 - \varepsilon_2 = \varepsilon_{\beta_2} - \varepsilon_{\beta_1} + \varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{1}{2n\delta_1^2} \{2\phi\delta_2\gamma_{2x} + (3\delta_1^2 - 2\phi\delta_2)\gamma_{1x}^2 + 9\delta_1^2 + 4\phi\delta_2\},$$

com

$$\varepsilon_{\beta_2} - \varepsilon_{\beta_1} = \frac{1}{12n\phi w^3} \{3(5hw - 3f^2) + 3hw\gamma_{2x}^2 - 3f^2\gamma_{1x}^2\}$$

e

$$\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} = \frac{-1}{6n\delta_1^4} \{3[-10\phi^4\delta_3 + 3\phi\delta_2(\phi\delta_2 + 4\delta_1^2) - 20\delta_1^4]$$

$$-6\phi^4\delta_3\gamma_{2x} + [3\phi\delta_2(\phi\delta_2 + 4\delta_1^2) - 20\delta_1^4]\gamma_{1x}^2\}.$$

Para este caso, a alteração na expressão (2.19) consiste em substituir γ_{2s} e γ_{1s}^2 por γ_{2x} e γ_{1x}^2 respectivamente.

É fácil observar pelas equações (2.17)a(2.19) que a aproximação da estatística LR'_1 para a distribuição χ_2^2 é sensível a mudanças nas medidas amostrais de assimetria e curtose de x e s . Para certos valores de γ_{1x}^2 , γ_{1s}^2 , γ_{2x} e γ_{2s} a estatística LR'_1 pode ter aproximação de má qualidade para a distribuição χ_2^2 , o que sugere a necessidade da utilização da correção de Bartlett para amostras de tamanhos pequenos e moderados. No Capítulo 4 apresentamos alguns resultados de simulações onde analisamos a atuação dessa correção.

Trabalhando as expressões (2.17)a(2.19) para o modelo normal heterocedástico com funções de ligação identidade para μ ($\mu = \eta = X\beta$) e logaritmica para ϕ ($-\log \phi = \tau = S\gamma$),

a equação (2.18) se anula, enquanto que as equações (2.17) e (2.19) resultam em

$$\varepsilon_4 - \varepsilon_2 = \varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{1}{2nv_{2x}^2 v_{2s}^2} \{2(v_{2x,2s} - 2v_{x,s}^2)v_{2x}v_{2s} + (2v_{2s}v_{3s} - v_{2s}v_{2x,s})v_{2x,s} + 11v_{2x}^2 v_{2s}^2\}$$

e

$$\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} = \frac{1}{6n}(5\gamma_{1s}^2 - 3\gamma_{2s}) ,$$

respectivamente. Neste caso, para $X = S$ temos

$$\varepsilon_4 - \varepsilon_2 = \frac{1}{6n}(8\gamma_{1x}^2 + 45)$$

de modo que o fator de correção de Bartlett c só depende da medida amostral de assimetria padronizada de x .

2.3 Testes sobre o parâmetro de precisão

Nesta Seção estamos interessados em testar hipóteses apenas sobre o parâmetro de precisão ϕ , ou seja, sobre componentes do vetor γ . Consideremos, então, a partição $\gamma = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)^T$ para γ , onde $\gamma_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \dots, \gamma_q)^T$ com $q_1 \leq q$. Essa partição induz as seguintes partições $S = (S_1, S_2)$, $U = (U_\beta^T(\beta, \gamma), U_{\gamma_1}^T(\beta, \gamma_1, \gamma_2), U_{\gamma_2}^T(\beta, \gamma_1, \gamma_2))^T$ e

$$K_{\gamma, \gamma} = \begin{pmatrix} K_{\gamma_{11}} & K_{\gamma_{12}} \\ K_{\gamma_{21}} & K_{\gamma_{22}} \end{pmatrix} ,$$

onde as matrizes S_1 , S_2 e $K_{\gamma_{ij}}$, para $i, j = 1, 2$, estão definidas na Seção 2.2.

A estatística da razão de verossimilhança para testar $H_2 : \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra $H : \gamma_1 \neq \gamma_1^{(0)}$, onde $\gamma_1^{(0)}$ é um vetor especificado de dimensão q_1 e β e γ_2 são vetores de parâmetros de perturbação, é dada por

$$LR_2 = 2\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\tilde{\beta}, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2)\} .$$

A distribuição de LR_2 sob H_2 e para grandes amostras é $\chi_{q_1}^2$. A correção de Bartlett para LR_2 tem a forma $c = q_1^{-1}E(LR_2)$, onde o termo $E(LR_2)$ é calculado até ordem $O(n^{-1})$, sob H_2 . Reescrevendo LR_2 como

$$LR_2 = 2[\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\beta, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)\} - \{\ell(\tilde{\beta}, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2) - \ell(\beta, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)\}] ,$$

onde $\ell(\beta, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)$ é o logaritmo da função de verossimilhança calculada nos parâmetros e usando os resultados (2.1) a (2.4) em conjunto com os de Botter e Cordeiro (1997) obtemos que, até ordem $O(n^{-1})$, $E\{2[\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - \ell(\beta, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)]\} = p + q + \varepsilon_{p+q}$ e $2E\{\ell(\tilde{\beta}, \gamma_1^{(0)}, \tilde{\gamma}_2) - \ell(\beta, \gamma_1^{(0)}, \gamma_2)\} = p + (q - q_1) - \varepsilon_{p+(q-q_1)}$. Até ordem $O(n^{-1})$, temos, então, que

$$E(LR_2) = q_1 + \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+(q-q_1)} ,$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+(q-q_1)} &= \varepsilon_{\gamma q} - \varepsilon_{\gamma(q-q_1)} + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \Phi_2 W Z_{\beta d} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \\ &\quad - \Phi_1 W Z_{\beta}^{(2)} W \Phi_1 (Z_{\gamma} - Z_{2\gamma}) \} + \frac{1}{4} 1^T \Phi_1 W Z_{\beta d} \\ &\quad (Z_{\gamma} - Z_{2\gamma}) Z_{\beta d} W \Phi_1 1 + \frac{1}{4} 1^T \Phi_1 W Z_{\beta d} (Z_{\gamma} Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma} Z_{2\gamma d}) \\ &\quad (2\Phi^3 \Phi_1^2 + \Phi^2 \Phi_2) \Phi_1 1 , \end{aligned} \tag{2.20}$$

com $\varepsilon_{\gamma q} - \varepsilon_{\gamma(q-q_1)}$ dado por (2.10) e as matrizes $Z_{2\gamma}$ e $Z_{2\gamma d}$ assumindo as mesmas expressões daquelas definidas após (2.10). Como na Seção 2.1, todas as matrizes diagonais W , Φ , Φ_1 e Φ_2 devem ser calculadas sob H_2 .

A correção de Bartlett associada a LR_2 é dada por

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+(q-q_1)}}{q_1} , \tag{2.21}$$

onde $\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+(q-q_1)}$ é obtida de (2.20). A estatística corrigida $LR_2^* = \tilde{c}^{-1}LR_2$ tem, sob H_2 , distribuição $\chi_{q_1}^2$ até $O(n^{-1})$.

Para o modelo normal introduzido na Seção 1.2, considerando função de ligação identidade para a média ($\mu = \eta = X\beta$) e logaritmica para o parâmetro de precisão ($-\log \phi = \tau = S\gamma$), a correção de Bartlett se reduz a

$$\begin{aligned} c = & \frac{1}{q_1} \left[-\frac{1}{8} \text{tr}(Z_{\gamma d}^2 - Z_{2\gamma d}^2) + \frac{1}{24} 1^T (Z_{\gamma}^{(3)} - Z_{2\gamma}^{(3)}) 1 + \frac{1}{16} 1^T (Z_{\gamma d} Z_{\gamma} Z_{\gamma d}) \right. \\ & - (Z_{2\gamma d} Z_{2\gamma} Z_{2\gamma d}) 1 + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \Phi^{-1} Z_{\beta d} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) - \Phi^{-1} Z_{\beta}^{(2)} \Phi^{-1} (Z_{\gamma} - Z_{2\gamma}) \} \\ & \left. + \frac{1}{4} 1^T \Phi^{-1} Z_{\beta d} (Z_{\gamma} - Z_{2\gamma}) Z_{\beta d} \Phi^{-1} 1 + \frac{1}{4} 1^T \Phi^{-1} Z_{\beta d} (Z_{\gamma} Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma} Z_{2\gamma d}) 1 \right] . \end{aligned}$$

A estatística da razão de verossimilhança para o teste $H'_2 : \gamma_1 = 0$ contra $H : \gamma_1 \neq 0$, assumindo que $s_{lq} = 1$, para $l = 1, \dots, n$, onde γ_q e β são parâmetros de perturbação, reduz-se a

$$LR'_2 = 2 \{ \ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_q) - \ell(\tilde{\beta}, 0, \tilde{\gamma}_q) \} ,$$

com distribuição assintótica χ_{q-1}^2 , sob H'_2 . A correção de Bartlett obtida de (2.21) é dada por

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+1}}{q-1} \quad (2.22)$$

com

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+1} = & \varepsilon_{\gamma_q} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{\phi^2}{\delta_1^2} \text{tr}(\delta_2 W Z_{\beta d} N_d - \delta_1^2 W Z_{\beta}^{(2)} W N) \\ & + \frac{\phi^2}{2} 1^T W Z_{\beta d} N \{ Z_{\beta d} W + (4\phi^{-1} - 2\delta_1^{-2}) N_d \} 1 \\ & - \frac{p(p+2)}{2n} , \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $\varepsilon_{\gamma_q} - \varepsilon_{\gamma_1}$ se reduz à expressão (2.16). A estatística corrigida $LR'_2 = \tilde{c}^{-1} LR'_2$ tem, sob H'_2 e até ordem $O(n^{-1})$, a distribuição χ^2_{q-1} .

Como aplicação para o teste H'_2 consideremos o modelo normal com função de ligação identidade para a média ($\mu = \eta = X\beta$) e função de ligação qualquer para o parâmetro de precisão. Temos $W = I$. De (2.23) obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+1} &= \varepsilon_{\gamma_q} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{1}{\delta_1^2} \text{tr}(\phi \delta_2 J_d N_d - \delta_1^2 J^{(2)} N) \\ &\quad + \frac{1}{2\delta_1^2} 1^T J_d N \{ \delta_1^2 J_d + 2(2\delta_1^2 - \phi \delta_2) N_d \} 1 \\ &\quad - \frac{p(p+2)}{2n}, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_{\gamma_q} - \varepsilon_{\gamma_1}$ é dado por (2.16).

Ao considerar, no teste anterior, que a função de ligação para o parâmetro de precisão é a logaritmica, isto é, $(-\log \phi = \tau = S\gamma)$, o termo $\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+1}$ em (2.23) se reduz a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{p+1} &= \text{tr}(J_d N_d - J^{(2)} N) + \frac{1}{2} 1^T J_d N (J_d + 2N_d) 1 - \frac{1}{2} \text{tr}(N_d^2) \\ &\quad + \frac{1}{3} 1^T N^{(3)} 1 + \frac{1}{2} 1^T N - d N N_d 1 - \frac{3(p+1)^2 - 1}{6n}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3.1 Modelo de regressão linear simples

Consideremos o modelo de regressão linear simples para μ como $d(\mu_l) = \eta_l = \beta_2 + \beta_1 x_l$ e para ϕ como $g(\phi_l) = \tau_l = \gamma_2 + \gamma_1 s_l$, onde x_l e s_l são os valores das variáveis explicativas associadas a y_l , para $l = 1, \dots, n$. Para o teste de $H'_2 : \gamma_1 = 0$ contra $H : \gamma_1 \neq 0$ a estatística da razão de verossimilhança tem a forma $LR'_2 = 2\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_1) - \ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}_2, 0)\}$ e a correção de Bartlett é dada por $c = 1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3$, onde a expressão $\varepsilon_4 - \varepsilon_3$ é obtida de (2.23), com o termo

$\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1}$ dado em (2.19), lembrando que sob a hipótese nula o (l, m) -ésimo elemento de Z_γ é igual a $z_{\gamma_{lm}} = 2\phi^2(n\delta_1^2 v_{2s})^{-1} \{v_{2s} + (s_l - \bar{s})(s_m - \bar{s})\}$.

Como aplicações, consideremos os três casos a seguir. Como primeiro caso, assumimos $\mu = \eta = X\beta$, ou seja, função de ligação identidade para a média e qualquer para o parâmetro de precisão. Temos, neste caso, $W = I$ e sob a hipótese nula H_2' , o (l, m) -ésimo elemento de Z_β é igual a $z_{\beta_{lm}} = (n\phi v_{2x})^{-1} \{v_{2x} + (x_l - \bar{x})(x_m - \bar{x})\}$. Logo, $\varepsilon_4 - \varepsilon_3$ é dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 - \varepsilon_3 &= \varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} - \frac{v_{2x,s}^2 + 4v_{x,s}^2 v_{2x}}{2nv_{2x}^2 v_{2s}} \\ &\quad + \frac{\phi\delta_2 v_{2x,2s} v_{2s} + (2\delta_1^2 - \phi\delta_2) v_{2x,s} v_{3s}}{n\delta_1^2 v_{2x} v_{2s}^2} \\ &\quad + \frac{8\delta_1^2 - \phi\delta_2}{n\delta_1^2} - \frac{p(p+2)}{2n}, \end{aligned}$$

com $\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1}$ dado por (2.19).

Para um segundo caso, adotamos $\mu = \eta = X\beta$ e $-\log\phi = \tau = S\gamma$ (função de ligação identidade para a média e logaritmica para o parâmetro de precisão). Logo, $\varepsilon_4 - \varepsilon_3$ é dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 - \varepsilon_3 &= \varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} - \frac{v_{2x,s}^2 + 4v_{x,s}^2 v_{2x}}{2nv_{2x}^2 v_{2s}} \\ &\quad + \frac{v_{2x,2s} v_{2s} + v_{2x,s} v_{3s}}{nv_{2x} v_{2s}^2} \\ &\quad + \frac{14 - p(p+2)}{2n}, \end{aligned}$$

com $\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1}$ dado por

$$\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} = \frac{1}{6n} (5\gamma_{1s}^2 - 3\gamma_{2s}),$$

com γ_{1s}^2 e γ_{2s} como definidos anteriormente.

No terceiro caso, consideramos $\mu = \eta = X\beta$ e $X = S$ (função de ligação identidade para a média e qualquer para o parâmetro de precisão e as matrizes X e S idênticas). Logo, $\varepsilon_4 - \varepsilon_3$ é dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 - \varepsilon_3 &= \varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} + \frac{\phi\delta_2}{n\delta_1^2}\gamma_{2x} \\ &\quad + \frac{3\delta_1^2 - 2\phi\delta_2\phi\delta}{2n\delta_1^2}\gamma_{1x}^2 \\ &\quad + \frac{6\delta_1^2 + 2\phi\delta_2}{n\delta_1^2} - \frac{p(p+2)}{2n},\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\gamma_2} - \varepsilon_{\gamma_1} &= \frac{-1}{6n\delta_1^4}[3\{-10\phi^4\delta_3 + 3\phi\delta_2(\phi\delta_2 + 4\delta_1^2) - 20\delta_1^4\} \\ &\quad - 6\phi^4\delta_3\gamma_{2x} + \{3\phi\delta_2(\phi\delta_2 + 4\delta_1^2) - 20\delta_1^4\}\gamma_{1x}^2].\end{aligned}$$

2.4 Testes sobre a média

Suponhamos agora, que nosso interesse seja testar hipóteses apenas sobre a média em um modelo normal heterocedástico dado por (1.1), isto é, sobre componentes do vetor β . Consideremos então, a partição $\beta = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T$, onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^T$ e $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^T$ com $p_1 \leq p$. Essa partição induz as correspondentes partições $X = (X_1, X_2)$, $U = (U_{\beta_1}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma), U_{\beta_2}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma), U_{\gamma}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma))^T$ e

$$K_{\beta, \beta} = \begin{pmatrix} K_{\beta_{11}} & K_{\beta_{12}} \\ K_{\beta_{21}} & K_{\beta_{22}} \end{pmatrix},$$

onde X_1, X_2 e $K_{\beta_{ij}}$ para $i, j = 1, 2$ foram definidos na Seção 2.2.

Estamos interessados em testar a hipótese $H_3 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $H : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)}$, onde $\beta_1^{(0)}$ é um vetor especificado de dimensão p_1 e β_2 e γ são vetores de parâmetros de perturbação.

A estatística da razão de verossimilhança para testar H_3 é dada por

$$LR_3 = 2\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma})\} ,$$

que sob H_3 , tem distribuição assintótica $\chi_{p_1}^2$. Reescrevendo

$$LR_3 = 2[\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma)\} - \{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma)\}] ,$$

onde $\ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma)$ é o logaritmo da função de verossimilhança calculada nos parâmetros e usando os resultados (2.1) a (2.4) em conjunto com os de Cordeiro e Botter (1997) temos, até ordem $O(n^{-1})$ que, $2E\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma)\} = p + q + \varepsilon_{p+q}$ e $2E\{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \beta_2, \gamma)\} = (p - p_1) + q - \varepsilon_{(p-p_1)+q}$. Até ordem $O(n^{-1})$, temos, então, que

$$E(LR_3) = p_1 + \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p-p_1)+q} , \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p-p_1)+q} &= \varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)} + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \Phi_2 W (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) Z_{\gamma d} \\ &\quad - \Phi_1 W (Z_{\beta}^{(2)} - Z_{2\beta}^{(2)}) \Phi_1 W Z_{\gamma} \} + \frac{1}{4} 1^T \Phi_1 W (Z_{\beta d} Z_{\gamma} Z_{\beta d} \\ &\quad - Z_{2\beta d} Z_{\gamma} Z_{2\beta d}) W \Phi_1 1 + \frac{1}{4} 1^T \Phi_1 W \\ &\quad (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) Z_{\gamma} Z_{\gamma d} (2\Phi^{-3} \Phi_1^2 - \Phi^{-2} \Phi_2) \Phi_1 1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

com $\varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)}$ dado por (2.9). Aqui, todas as matrizes diagonais W, F, G, H, Φ, Φ_1 e Φ_2 devem ser avaliadas sob a hipótese nula H_3 .

A correção de Bartlett associada com LR_3 é $c = p_1^{-1} E(LR_3)$, onde $E(LR_3)$ vem de (2.34) e assume a forma

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p-p_1)+q}}{p_1} \quad (2.36)$$

onde $\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_{(p-p_1)+q}$ é dado por (2.35). Sob H_3 , a estatística corrigida $LR_3^* = \tilde{c}^{-1} LR_3$ é distribuída até ordem $O(n^{-1})$ como $\chi_{p_1}^2$.

Como aplicação de (2.36), consideremos o modelo normal com função de ligação identidade, $\mu = \eta = X\beta$, para a média e, logaritmica, $-\log \phi = \tau = S\gamma$, para o parâmetro de precisão. O termo $\varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)}$ em (2.35) se anula e a correção de Bartlett c em (2.36) se reduz a

$$c = 1 + \frac{1}{p_1} \left[\frac{1}{2} \text{tr} \{ \Phi(Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) Z_{\gamma d} - \Phi(Z_{\beta}^{(2)} - Z_{2\beta}^{(2)}) \Phi Z_{\gamma} \} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} 1^T \Phi(Z_{\beta d} Z_{\gamma} Z_{\beta d} - Z_{2\beta d} Z_{\gamma} Z_{2\beta d}) \Phi 1 + \frac{1}{4} 1^T \Phi(Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) Z_{\gamma} Z_{\gamma d} 1 \right] \quad (2.37)$$

que se iguala à correção de Bartlett c_3 obtida por Cordeiro (1993, página 179).

Se $q = 1$ e $S = 1$, as matrizes diagonais Φ^{-1} , Φ_1 e Φ_2 em (2.35), são as mesmas definidas para testar a hipótese nula H_1 na Secção 2.2, $Z_{\gamma} = 2\phi^2(n\delta_1^2)^{-1} 1 1^T$ e $Z_{\gamma d} = 2\phi^2(n\delta_1^2)^{-1} I$. A correção de Bartlett toma a forma

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{(p-p_1)+1}}{p_1}$$

com

$$\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{(p-p_1)+1} = \varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)} + \frac{p_1(4 - p_1)}{2n} \quad (2.38)$$

e

$$\varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta(p-p_1)} = \frac{\phi}{4} \text{tr} \{ H(Z_{\beta d}^2 - Z_{2\beta d}^2) \} - \frac{\phi^2}{2} 1^T F(Z_{\beta}^{(3)} - Z_{2\beta}^{(3)}) F 1 \\ + \frac{\phi^2}{4} 1^T F(Z_{\beta d} Z_{\beta} Z_{\beta d} - Z_{2\beta d} Z_{2\beta} Z_{2\beta d}) F 1 .$$

Considerando ainda $q = 1$ e $S = 1$, a estatística da razão de verossimilhança para testar a hipótese $H'_3 : \beta_1 = 0$ contra $H : \beta_1 \neq 0$, assumindo que $p_1 = p - 1$ e $x_{lp} = 1$, para $l = 1, \dots, n$, é dada por

$$LR'_3 = 2 \{ \ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}) - \ell(0, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}) \} ,$$

que sob H_3' é assintoticamente distribuída como χ_{p-1}^2 . As matrizes $W, F, H, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, Z_{2\beta}, Z_{2\beta d}, Z_{2\beta}^{(2)}, Z_{2\beta}^{(3)}$ são definidas como as do teste de H_1 na Seção 2.2. De (2.36) segue que

$$c = 1 + \frac{\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_2}{p-1}$$

com

$$\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_2 = \varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta 1} + \frac{(p-1)(p+3)}{2n}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta p} - \varepsilon_{\beta 1} &= \frac{\phi h}{4} \text{tr}(Z_{\beta d}^2) - \frac{\phi^2 f^2}{2} 1^T Z_{\beta}^{(3)} 1 \\ &\quad + \frac{\phi^2 f^2}{4} 1^T Z_{\beta d} Z_{\beta} Z_{\beta d} 1 + \frac{f^2 - hw}{4nw^3\phi} . \end{aligned}$$

Para o modelo de regressão introduzido na Seção 2.2.1 com funções de ligação identidade para a média e logaritmica para o parâmetro de precisão, respectivamente, a correção de Bartlett c para o teste de $\beta_1 = 0$ vem de (2.37) apresentando pouca simplificação.

Capítulo 3

Correção tipo-Bartlett para a estatística score

3.1 Introdução

O teste score, assintoticamente equivalente ao teste da razão de verossimilhança (White, 1984), requer somente estimação sob a hipótese nula, o que o torna mais atraente quando a estimação sob a hipótese alternativa exige um extenso trabalho computacional.

Harris (1985) obteve uma expansão assintótica para a distribuição da estatística score S_R , até ordem n^{-1} . Em lugar de modificar a estatística score, Harris mostrou que até ordem $O(n^{-1})$, $P(S_R \leq z_\alpha) = P(\chi^2 \leq x_\alpha) = 1 - \alpha$, onde z_α é o quantil modificado de S_R e x_α é o quantil da distribuição χ^2 de referência associados a um nível de significância α . Honda (1988) derivou a correção do valor crítico da estatística S_R para o teste de homocedasticidade no modelo definido em (1.1) considerando função de ligação identidade para a média e qualquer para o parâmetro de precisão.

Baseados no trabalho de Harris (1985), Cordeiro e Ferrari (1991) obtiveram um fator de correção para S_R , denominado fator de correção tipo-Bartlett, de forma que a estatística escore aperfeiçoada por esse fator de correção tem distribuição χ^2 até ordem n^{-1} sob a hipótese nula. Segundo eles, sob certas condições de regularidade, a estatística escore modificada é obtida através da multiplicação da estatística escore original por um polinômio de segundo grau na própria estatística.

A partir do trabalho de Cordeiro e Ferrari (1991), muitos resultados têm sido publicados envolvendo estatísticas escore aperfeiçoadas por fatores de correção tipo-Bartlett em várias classes de modelos de regressão. Cribari-Neto e Ferrari (1995a, b) apresentam correções tipo-Bartlett para a estatística escore em teste de hipóteses no modelo normal heterocedástico definido em (1.1), considerando apenas a função de ligação identidade para a média. Neste capítulo, encontramos correções do tipo-Bartlett para a estatística escore associada a testes de hipóteses sobre a média e/ou parâmetro de precisão em modelos normais heterocedásticos com funções de ligação quaisquer para a média e para o parâmetro de precisão.

Neste trabalho não consideramos modificações no valor crítico da estatística escore ou qualquer estudo sobre a monotonicidade desta estatística, como sugerido em Cordeiro, Ferrari e Cysneiros(1998). Nos restringimos apenas a estudos de correções na própria estatística escore.

3.2 Testes simultâneos sobre a média e o parâmetro de precisão

Nessa seção, obtemos correções tipo-Bartlett para as estatísticas escore dos testes das hipóteses sobre a média e o parâmetro de precisão simultaneamente. Consideremos o modelo

normal definido em (1.1) e as partições $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T)$ para o vetor β e $\gamma^T = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)$ para o vetor γ , onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^T$, $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^T$, $\gamma_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \dots, \gamma_q)^T$, com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Essas decomposições induzem as correspondentes partições $X = (X_1, X_2)$ e $S = (S_1, S_2)$, onde X_1 , X_2 , S_1 e S_2 são matrizes conhecidas de posto completo e dimensões $n \times p_1$, $n \times (p - p_1)$, $n \times q_1$, $n \times (q - q_1)$, respectivamente.

Estamos interessados em testar a hipótese $H_1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$, $\gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra H : pelo menos uma das igualdades é violada, onde $\beta_1^{(0)}$ e $\gamma_1^{(0)}$ são vetores conhecidos de dimensões p_1 e q_1 , respectivamente.

Seja $\theta_1 = (\beta_1^T, \gamma_1^T)^T$ o vetor de parâmetros de interesse e $\theta_2 = (\beta_2^T, \gamma_2^T)^T$ o vetor de parâmetros de perturbação. A função escore correspondente é dada por

$$U = (U_1^T, U_2^T)^T,$$

onde

$$U_1^T = \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \theta_1 = (U_{\beta_1}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2), U_{\gamma_1}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2))^T$$

e

$$U_2^T = \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \theta_2 = (U_{\beta_2}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2), U_{\gamma_2}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2))^T.$$

Além disto, a matriz de informação total de Fisher correspondente é dada por

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\beta_{11}} & 0 & K_{\beta_{12}} & 0 \\ 0 & K_{\gamma_{11}} & 0 & K_{\gamma_{12}} \\ K_{\beta_{21}} & 0 & K_{\beta_{22}} & 0 \\ 0 & K_{\gamma_{21}} & 0 & K_{\gamma_{22}} \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $K_{\beta_{11}}$, $K_{\beta_{12}} = K_{\beta_{21}}^T$, $K_{\beta_{22}}$, $K_{\gamma_{11}}$, $K_{\gamma_{12}} = K_{\gamma_{21}}^T$ e $K_{\gamma_{22}}$ estão definidas na Seção 2.2. Definimos, também, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

e $M = K^{-1} - A$, onde

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{pmatrix}.$$

De acordo com Rao (1948), a estatística escore S_R para o teste de H_1 tem a forma

$$S_R = \tilde{U}_1^T \tilde{K}^{11} \tilde{U}_1, \quad (3.1)$$

ou seja, U_1 e K^{11} são avaliadas em $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = (\beta_1^{(0)T}, \tilde{\beta}_2^T, \gamma_1^{(0)T}, \tilde{\gamma}_2^T)^T$, sendo $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\gamma}_2$ os estimadores de máxima verossimilhança de β_2 e γ_2 , respectivamente, sob a hipótese nula H_1 .

A forma corrigida para a estatística escore S_R , de acordo com Cordeiro e Ferrari (1991), é dada por

$$S_R^* = S_R \left[1 - \frac{A_3}{12u(u+2)(u+4)} S_R^2 - \frac{A_2 - 2A_3}{12u(u+2)} S_R - \frac{A_1 - A_2 + A_3}{12u} \right], \quad (3.2)$$

e tem distribuição χ_u^2 até ordem n^{-1} , sob a hipótese nula H_1 , onde $u = p_1 + q_1$. Os coeficientes A_1, A_2 e A_3 , são obtidos a partir das expressões (A.1) a (A.3) apresentadas no Apêndice, podendo ser escritos como

$$A_1 = 3A_{11} - 6A_{12} + 6A_{13} - 6A_{14}, \quad (3.3)$$

$$A_2 = -3A_{21} + 6A_{22} - 6A_{23} + 3A_{24} \quad (3.4)$$

e

$$A_3 = 3A_{31} + 2A_{32}. \quad (3.5)$$

Para o modelo normal em (1.1), os elementos $A_{11}, \dots, A_{14}, A_{21}, \dots, A_{24}, A_{31}$ e A_{32} foram desenvolvidos substituindo os cumulantes apresentados no Apêndice nas expressões (A.1) a

(A.3). Esses elementos assumem as seguintes formas matriciais

$$\begin{aligned}
A_{11} = & 1' \Phi F Z_{2\beta d} (Z_\beta - Z_{2\beta}) Z_{2\beta d} F \Phi 1 + 1' \Phi_1 W Z_{2\beta d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) Z_{2\beta d} W \Phi_1 1 \\
& + 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) Z_{2\beta d} W \Phi_1 1 \\
& + 1' \Phi_1 W Z_{2\beta d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) Z_{2\gamma d} (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) 1 \\
& + 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \\
& Z_{2\gamma d} (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) 1,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = & 1' \Phi_1 W Z_{2\beta d} Z_{2\gamma} (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) W \Phi_1 1 \\
& - 1' \Phi_1 W Z_{2\beta d} Z_{2\gamma} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1 \\
& - 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} Z_{2\gamma} (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W 1 \\
& - 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} Z_{2\gamma} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & -1' \Phi F \{Z_{2\beta} \odot (Z_\beta - Z_{2\beta}) \odot Z_{2\beta}\} F \Phi 1 \\
& + 1' \Phi_1 W Z_{2\beta} \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot Z_{2\beta} \Phi_1 W 1 \\
& + 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 + \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma} \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \\
& \odot Z_{2\gamma} (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) 1,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
A_{14} = & \text{tr}\{(3\Phi^{-4} \Phi_1^4 - \Phi_1^2 \Phi_2 \Phi^{-3}) Z_{2\gamma d} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \\
& + (2\Phi^{-1} W \Phi_1^2 - \Phi_2 W) Z_{2\gamma d} (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \\
& + 2\Phi^{-1} W \Phi_1^2 Z_{2\beta d} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})\},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} = & 1' \Phi_1 W (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) Z_{2\gamma} (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W 1 \\
& + 2 \times 1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) Z_{2\gamma} (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W 1 \\
& + 1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) Z_{2\gamma} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & -1' \Phi_1 W Z_{2\beta d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W \mathbf{1} \\
& -1' \left(\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2 \right) Z_{2\gamma d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W \mathbf{1} \\
& -1' \Phi_1 W Z_{2\beta d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 \mathbf{1} \\
& -1' \left(\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2 \right) Z_{2\gamma d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 \mathbf{1},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} = & 21' \Phi_1 W (Z_\beta - Z_{2\beta}) \odot Z_{2\beta} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \Phi_1 W \mathbf{1} \\
& +1' \Phi_1 W (Z_\beta - Z_{2\beta}) \odot Z_{2\gamma} (Z_\beta - Z_{2\beta}) \Phi_1 W \mathbf{1} \\
& +1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot Z_{2\gamma} \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \Phi^{-3} \Phi_1^3,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$A_{24} = 3 \text{tr} \{ (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})^2 \Phi^{-4} \Phi_1^4 \}, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} = & 1' \Phi_1 W (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) W \Phi_1 \mathbf{1} \\
& +1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) W \Phi_1 \mathbf{1} \\
& +1' \Phi_1 W (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi_1^3 \Phi^{-3} \mathbf{1} \\
& +1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi_1^3 \Phi^{-3} \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

e

$$\begin{aligned}
A_{32} = & 31' \Phi_1 W (Z_\beta - Z_{2\beta}) \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot (Z_\beta - Z_{2\beta}) \Phi_1 W \mathbf{1} \\
& +1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 \mathbf{1},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde todas as matrizes envolvidas estão definidas nas Seções 2.1 e 2.2, sendo avaliadas sob o modelo restrito especificado por H_1 . A notação $\odot$ indica a operação produto interno entre matrizes.

Como uma aplicação da correção tipo-Bartlett para a estatística escore, consideremos o teste da hipótese nula $H'_1 : \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0$, com $p_1 = p - 1$, $q_1 = q - 1$, $x_{lp} = 1$ e $s_{lq} = 1$

para $l = 1, \dots, n$ contra a hipótese alternativa H : pelo menos uma das igualdades é violada, no modelo normal definido em (1.1). A estatística escore corrigida é obtida de (3.2) e tem distribuição χ^2_{p+q-2} sob a hipótese nula, até ordem n^{-1} . Sob H'_1 , temos que $X = S = 1$ e as matrizes $F, W, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, Z_{2\beta}, Z_{2\beta d}, Z_{2\gamma}, Z_{2\gamma d}, Z_\beta, Z_{\beta d}, Z_\gamma, Z_{\gamma d}$ são iguais às definidas na Seção 2.2.

Os coeficientes A_1, A_2 e A_3 são obtidos de (3.3) a (3.15) e dados por

$$A_1 = -\frac{3f^2}{n^2 w^3 \phi} 1' J 1 + \frac{1}{n^2} (18B^2 + 12B + 18) 1' N 1 - \frac{12}{n} p - \frac{24}{n} q + \frac{3f^2}{n^2 w^3 \phi} + \frac{1}{n} (-18B^2 - 12B + 18), \quad (3.16)$$

$$A_2 = -\frac{24}{n} (1+B) 1' N N_d 1 - \frac{12}{n} (1+B) 1' N J_d 1 - \frac{24}{n} 1' J \odot N 1 - \frac{12}{n} 1' J \odot J 1 + \frac{1}{n^2} (156 + 36B) 1' N 1 + \frac{48}{n^2} 1' J 1 + 36 \times \text{tr}(N_d^2) - \frac{6}{n} p^2 - \frac{24}{n} q^2 - \frac{24}{n} p q + \frac{1}{n} (48 + 12B) p + \frac{24}{n} (B-1) q - \frac{138}{n} - \frac{36B}{n} \quad (3.17)$$

e

$$A_3 = 6 1' J_d N J_d 1 + 24 \times 1' N_d N J_d 1 + 24 \times 1' N_d N N_d 1 - \frac{72}{n} 1' N N_d 1 - \frac{36}{n} 1' N J_d 1 + 12 \times 1' J \odot N \odot J 1 + 16 \times 1' N \odot N \odot N 1 - \frac{24}{n} 1' J \odot N 1 + \frac{114}{n^2} 1' N 1 + \frac{24}{n^2} 1' J 1 - \frac{6}{n} p^2 - \frac{24}{n} q^2$$

$$-\frac{24}{n}pq + \frac{24}{n}p + \frac{24}{n}q - \frac{82}{n}, \quad (3.18)$$

onde $B = 2 - \frac{\phi\delta_2}{\delta_1^2}$ e as matrizes J e N são as definidas na Seção 2.2. Considerando a função de ligação identidade para a média temos $W = I$, $F = 0$ e as expressões de A_1 , A_2 e A_3 em (3.16) a (3.18), respectivamente, simplificam-se muito pouco.

3.2.1 Modelo de regressão linear simples

Consideremos um modelo normal heterocedástico definido por (1.1) com componentes sistemáticas $d(\mu_l) = \eta_l = \beta_2 + \beta_1 x_l$ e $g(\phi_l) = \tau_l = \gamma_2 + \gamma_1 s_l$, onde x_l e s_l denotam os valores das variáveis explicativas x e s , para $l = 1, \dots, n$. Para o teste de $H'_1 : \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0$, utilizamos a mesma notação da Seção 2.2.1, encontrando, a partir de (3.16) a (3.18) as seguintes expressões A_1 , A_2 e A_3

$$A_1 = -\frac{36}{n}, \quad (3.19)$$

$$A_2 = -\frac{114}{n} - \frac{24}{n} \frac{v_{x,s}^2}{v_{2x}, v_{2s}} + \frac{36}{n} \frac{v_{4s}}{v_{2s}^2} \quad (3.20)$$

e

$$A_3 = \frac{18}{n} \frac{v_{2x,s}^2}{v_{2x}^2 v_{2s}} + \frac{8}{n} \frac{v_{2x,s} v_{3s}}{v_{2x} v_{2s}^2} + \frac{40}{n} \frac{v_{3s}^2}{v_{2s}^3}. \quad (3.21)$$

É interessante observar que os termos A_1 , A_2 e A_3 em (3.19) a (3.21) não dependem das funções de ligação consideradas para a média e para o parâmetro de precisão.

3.3 Testes sobre o parâmetro de precisão

Consideremos o modelo normal definido em (1.1) e a partição $\gamma^T = (\gamma_1^T, \gamma_2^T)$ para o vetor γ , onde $\gamma_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q_1})^T$ e $\gamma_2 = (\gamma_{q_1+1}, \dots, \gamma_q)^T$, com $q_1 \leq q$. Essa decomposição induz a

correspondente partição $S = (S_1, S_2)$.

Estamos interessados em testar a hipótese $H_2 : \gamma_1 = \gamma_1^{(0)}$ contra $H : \gamma_1 \neq \gamma_1^{(0)}$, onde $\gamma_1^{(0)}$ é um vetor conhecido de dimensão q_1 .

Seja $\theta_1 = \gamma_1$ o vetor de parâmetros de interesse e $\theta_2 = (\gamma_2^T, \beta^T)^T$ o vetor de parâmetros de perturbação. A função escore correspondente é dada por

$$U = (U_1^T, U_2^T)^T ,$$

onde

$$U_1 = \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \theta_1 = U_{\gamma_1}(\beta, \gamma_1, \gamma_2)$$

e

$$U_2^T = \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \theta_2 = (U_{\gamma_2}^T(\beta, \gamma_1, \gamma_2), U_{\beta}^T(\beta, \gamma_1, \gamma_2))^T .$$

Além disto, a matriz de informação total de Fisher correspondente é dada por

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\gamma_{11}} & K_{\gamma_{12}} & 0 \\ K_{\gamma_{21}} & K_{\gamma_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\beta, \beta} \end{pmatrix} ,$$

onde as matrizes $K_{\gamma_{11}}$, $K_{\gamma_{12}} = K_{\gamma_{21}}^T$, $K_{\gamma_{22}}$ e $K_{\beta, \beta}$ estão definidas na Seção 2.2. Temos

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} K_{\gamma}^{11} & K_{\gamma}^{12} & 0 \\ K_{\gamma}^{21} & K_{\gamma}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\beta, \beta}^{-1} \end{pmatrix} .$$

A estatística escore S_R para o teste de H_2 tem a forma

$$S_R = \tilde{U}_1^T \tilde{K}_{\gamma}^{-1} \tilde{U}_1 ,$$

onde U_1 e K^{11} estão avaliadas em $(\tilde{\beta}^T, \gamma_1^{(0)T}, \tilde{\gamma}_2^T)^T$, sendo $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}_2$ os estimadores de máxima verossimilhança de β e γ_2 sob H_2 .

A forma corrigida para a estatística escore S_R , de acordo com Cordeiro e Ferrari (1991), é dada por

$$S_R^* = S_R \left[1 - \frac{A_3}{12q_1(q_1 + 2)(q_1 + 4)} S_R^2 - \frac{A_2 - 2A_3}{12q_1(q_1 + 2)} S_R - \frac{A_1 - A_2 + A_3}{12q_1} \right], \quad (3.22)$$

e tem distribuição $\chi_{q_1}^2$ até ordem $O(n^{-1})$ sob a hipótese nula H_2 . As quantidades em (3.3) a (3.5) para obter os coeficientes A_1, A_2 e A_3 , são obtidas a partir das expressões (3.6) a (3.15) considerando que $Z_\beta = Z_{2\beta}$ e são dadas por

$$\begin{aligned} A_{11} = & 1' \Phi_1 W Z_{\beta d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) Z_{\beta d} W \Phi_1 1 + 21' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} \\ & (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) Z_{\beta d} W \Phi_1 1 + 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \\ & Z_{2\gamma d} (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) 1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & -1' \Phi_1 W Z_{\beta d} Z_{2\gamma} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1 \\ & -1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma d} Z_{2\gamma} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} A_{13} = & 1' \Phi_1 W Z_\beta \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot Z_\beta \Phi_1 W 1 + 1' (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{2\gamma} \\ & \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot Z_{2\gamma} (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) 1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} A_{14} = & \text{tr}\{(3\Phi_1^4 \Phi^{-4} - \Phi_1^2 \Phi_2 \Phi^{-3}) Z_{2\gamma d} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \\ & + 2\Phi^{-1} W \Phi_1^2 Z_{\beta d} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$A_{21} = 1' \Phi^{-3} \Phi_1^3 (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) Z_{2\gamma} (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1, \quad (3.27)$$

$$A_{22} = -1' \Phi_1 W Z_{\beta d} (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) (Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d}) \Phi^{-3} \Phi_1^3 1$$

$$-1' (\Phi^{-3}\Phi_1^3 - \frac{1}{2}\Phi^{-2}\Phi_1\Phi_2)Z_{2\gamma d}(Z_\gamma - Z_{2\gamma})(Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})\Phi^{-3}\Phi_1^3 1, \quad (3.28)$$

$$A_{23} = 1' \Phi^{-3}\Phi_1^3(Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot Z_{2\gamma} \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma})\Phi^{-3}\Phi_1^3 1, \quad (3.29)$$

$$A_{24} = 3 \operatorname{tr}\{(Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})^2 \Phi_1^4 \Phi^{-4}\}, \quad (3.30)$$

$$A_{31} = 1' \Phi^{-3}\Phi_1^3(Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})(Z_\gamma - Z_{2\gamma})(Z_{\gamma d} - Z_{2\gamma d})\Phi^{-3}\Phi_1^3 1 \quad (3.31)$$

e

$$A_{32} = 1' \Phi^{-3}\Phi_1^3(Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma}) \odot (Z_\gamma - Z_{2\gamma})\Phi^{-3}\Phi_1^3 1. \quad (3.32)$$

Como uma aplicação vamos considerar o modelo normal dado em (1.1) com função de ligação identidade para a média, função de ligação qualquer para o parâmetro de precisão e o teste da hipótese $H'_2 : \gamma_1 = 0$, com $q_1 = q - 1$ e $s_{lq} = 1$ para $l = 1, \dots, n$ contra $H : \gamma_1 \neq 0$. Aqui, a estatística escore corrigida, dada em (3.1), para testar H_2 , tem distribuição $\chi_{q_1}^2$, onde $q_1 = q - 1$. Então, sob H_2 temos que $Z_{2\gamma} = 2\phi^2(n\delta_1^2)^{-1}11^T$, $Z_{2\gamma d} = 2\phi^2(n\delta_1^2)^{-1}I$, $Z_\gamma = (2\phi^2/\delta_1^2)N$, $Z_{\gamma d} = (2\phi^2/\delta_1^2)N_d$, $Z_\beta = (1/\phi)J$ e $Z_{\beta d} = (1/\phi)J_d$, onde as matrizes J , N e as quantidades δ_1 e δ_2 estão definidas na Seção 2.2. Assim os termos em A_1 , A_2 e A_3 vêm de (3.3) a (3.5) e de (3.23) a (3.32) e $A_1 - A_3$ são dados por:

$$A_1 = 61'J_dNJ_d1 + 121'J \odot N \odot J1 - 24 \operatorname{tr}(J_dN_d) + \frac{12}{n}B$$

$$(1'NJ_d1 - 1) + \frac{18}{n}(2 - \frac{\phi\delta_2}{\delta_1^2})^2(1'N1 - 1) - \frac{6p}{n}(p + 2)$$

$$+ \frac{24q}{n}(p - 1) + \frac{24}{n},$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= 36 \operatorname{tr}(N_d^2) - 24 \mathbf{1}' J_d N N_d \mathbf{1} + \frac{24}{n} \mathbf{1}' J_d N \mathbf{1} - \frac{24}{n} B \mathbf{1}' N N_d \mathbf{1} \\
&\quad + \frac{24}{n^2} \left(6 - \frac{\phi \delta_2}{\delta_1^2}\right) \mathbf{1}' N \mathbf{1} - \frac{24q}{n} \left(q + 1 + \frac{\phi \delta_2}{\delta_1^2}\right) - \frac{12}{n} \left(7 - 2 \frac{\phi \delta_2}{\delta_1^2}\right), \\
A_3 &= 24 \mathbf{1}' N_d N N_d \mathbf{1} - \frac{48}{n} \mathbf{1}' N_d N \mathbf{1} + 16 \mathbf{1}' N \odot N \odot N \mathbf{1} \\
&\quad + \frac{72}{n^2} \mathbf{1}' N \mathbf{1} - \frac{8}{n} (3q^2 + 5).
\end{aligned}$$

3.3.1 Modelo de regressão linear simples

Consideremos o modelo normal em (1.1) com $d(\mu_l) = \eta_l = \beta_2 + \beta_1 x_l$ e $g(\phi_l) = \tau_l = \gamma_2 + \gamma_1 s_l$, onde x_l e s_l denotam os valores das variáveis explicativas x e s , para $l = 1, \dots, n$. Utilizando a notação da Seção 2.2.1, temos que a estatística escore corrigida para testar a hipótese $H'_2 : \gamma_1 = 0$ é obtida de (3.22) com seus coeficientes A_1, A_2 e A_3 obtidos de (3.3) a (3.5) e (3.23) a (3.32). Encontramos

$$\begin{aligned}
A_1 &= 3 \delta_1^2 \mathbf{1}^T W Z_{\beta_d} Z_\gamma Z_{\beta_d} W \mathbf{1} - \frac{6\phi^2}{n} \{\operatorname{tr}(W Z_{\beta_d})\}^2 \\
&\quad + \frac{6}{n} \left(\frac{2\delta_1^2}{\phi} - \delta_2\right) \mathbf{1}' Z_\gamma Z_{\beta_d} W \mathbf{1} + 6\delta_1^2 \mathbf{1}^T W Z_{\beta_d} \odot Z_\gamma \odot Z_\beta W \mathbf{1} \\
&\quad - \frac{12\phi^2}{n} \mathbf{1}^T W Z_\beta \odot Z_\beta W \mathbf{1} - \frac{12\phi^2}{n} \operatorname{tr}(W Z_{\beta_d} Z_{\gamma_d}) - \frac{24}{n}, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{6\delta_1^4}{\phi^3} \mathbf{1}^T W Z_{\beta_d} Z_\gamma Z_{\gamma_d} \mathbf{1} + \frac{12\delta_1^2}{n\phi} \mathbf{1}^T W Z_{\beta_d} Z_\gamma \mathbf{1} \\
&\quad + \frac{24\phi}{n} \mathbf{1}^T W Z_{\beta_d} \mathbf{1} + \frac{36}{n} (\gamma_{2s} + 3) + \frac{36}{n} \gamma_{2s} - \frac{36}{n} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

e

$$A_3 = \frac{40v_{3s}^2}{nv_{2s}^3} = \frac{40}{n}\gamma_{1s}^2, \quad (3.35)$$

onde $\gamma_{1s} = \frac{v_{3s}}{v_{2s}^{3/2}}$ e $\gamma_{2s} = \frac{v_{4s}}{v_{2s}^2}$ são respectivamente as medidas de assimetria e curtose padronizadas de s . É interessante observar que, neste caso, as expressões A_1 e A_2 dependem das funções de ligação para a média e para o parâmetro de precisão. Se, neste caso, considerarmos uma função ligação identidade para a média e centrarmos a variável explicativa s , as expressões (3.33) a (3.35) igualam-se às expressões (6) a (8) de Cribari-Neto e Ferrari (1995a).

Considerando o modelo normal com ligação identidade para a média e logaritmica para o parâmetro de precisão, obtemos

$$A_1 = 6 \left(\frac{4v_{x,s}^2}{nv_{2x}v_{2s}} - \frac{4v_{2x,2s}}{nv_{2x}v_{2s}} + \frac{3v_{2x,s}^2}{nv_{2x}^2v_{2s}} \right),$$

$$A_2 = -12 \left(\frac{6}{n} - \frac{3}{n} \frac{v_{4s}}{v_{2s}^2} + \frac{2}{n} \frac{v_{2x,s}v_{3s}}{v_{2s}^2v_{2x}} \right).$$

sendo que A_3 é o mesmo da expressão (3.35). Para $X = S$, temos $A_1 = -\frac{6}{n}(8 + 4\gamma_{2s} - 3\gamma_{1s}^2)$ e $A_2 = \frac{12}{n}(3 + 3\gamma_{2s} - 2\gamma_{1s}^2)$ que igualam-se às expressões de (9) e (10) de Cribari-Neto e Ferrari.

3.4 Testes sobre a média

Consideremos o modelo normal em (1.1) e a partição $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T)$ para o vetor β , onde $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^T$ e $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^T$, com $p_1 \leq p$. Essa decomposição induz a correspondente partição $X = (X_1, X_2)$.

Estamos interessados em testar a hipótese $H_3 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $H : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)}$, onde $\beta_1^{(0)}$ é um vetor conhecido de dimensão p_1 .

Seja $\theta_1 = \beta_1$ o vetor de parâmetros de interesse e $\theta_2 = (\beta_2^T, \gamma^T)^T$ o vetor de parâmetros de perturbação. A função escore correspondente é dada por

$$U = (U_1^T, U_2^T)^T,$$

onde

$$U_1 = \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \theta_1 = U_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \gamma)$$

e

$$U_2^T = \partial \ell(\beta, \gamma) / \partial \theta_2 = (U_{\beta_2}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma), U_{\gamma}^T(\beta_1, \beta_2, \gamma))^T.$$

A matriz de informação total de Fisher correspondente é dada por

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\beta_{11}} & K_{\beta_{12}} & 0 \\ K_{\beta_{21}} & K_{\beta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\gamma, \gamma} \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $K_{\beta_{11}}, K_{\beta_{12}}^T = K_{\beta_{21}}, K_{\beta_{22}}$ e $K_{\gamma, \gamma}$ estão definidas na Seção 2.2. Temos

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} K_{\beta}^{11} & K_{\beta}^{12} & 0 \\ K_{\beta}^{21} & K_{\beta}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\gamma, \gamma}^{-1} \end{pmatrix}.$$

A estatística escore S_R , para o teste de H_3 assume a expressão

$$S_R = \tilde{U}_1^T \tilde{K}_{\beta}^{11} \tilde{U}_1,$$

onde $\tilde{U}_1$ e $\tilde{K}^{11}$ estão avaliadas em $(\beta_1^{(0)T}, \tilde{\beta}_2^T, \tilde{\gamma}^T)^T$, sendo $\tilde{\beta}_2^T$ e $\tilde{\gamma}$ os estimadores de máxima verossimilhança de β_2 e γ sob H_3 .

A forma corrigida para a estatística escore S_R , de acordo com Cordeiro e Ferrari (1991), é dada pela expressão

$$S_R^* = S_R \left[1 - \frac{A_3}{12p_1(p_1 + 2)(p_1 + 4)} S_R^2 - \frac{A_2 - 2A_3}{12p_1(p_1 + 2)} S_R - \frac{A_1 - A_2 + A_3}{12p_1} \right], \quad (3.36)$$

e tem distribuição $\chi_{p_1}^2$ até ordem $O(n^{-1})$ sob a hipótese nula H_3 . As quantidades em (3.3) a (3.5) para obter os coeficientes A_1, A_2 e A_3 , são obtidas a partir das expressões (3.6) a (3.15) considerando que $Z_\gamma = Z_{2\gamma}$ e são dadas por

$$A_{11} = 1' \Phi F Z_{2\beta d} (Z_\beta - Z_{2\beta}) Z_{2\beta d} F \Phi 1, \quad (3.37)$$

$$A_{12} = 1' \{ \Phi_1 W Z_{2\beta d} - (\Phi^{-3} \Phi_1^3 - \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_1 \Phi_2) Z_{\gamma d} \} Z_\gamma (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W 1, \quad (3.38)$$

$$A_{13} = -1' \Phi F \{ Z_{2\beta} \odot (Z_\beta - Z_{2\beta}) \odot Z_{2\beta} \} F \Phi 1, \quad (3.39)$$

$$A_{14} = \text{tr} \{ (2\Phi^{-1} W \Phi_1^2 - \Phi_2 W) Z_{\gamma d} (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \}, \quad (3.40)$$

$$A_{21} = 1' \Phi_1 W (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) Z_\gamma (Z_{\beta d} - Z_{2\beta d}) \Phi_1 W 1, \quad (3.41)$$

$$A_{22} = A_{24} = 0 \quad (3.42)$$

$$A_{23} = 1' \{ \Phi_1 W (Z_\beta - Z_{2\beta}) \odot Z_\gamma \odot (Z_\beta - Z_{2\beta}) \Phi_1 W 1 \quad (3.43)$$

e

$$A_{31} = A_{32} = 0. \quad (3.44)$$

Como uma aplicação consideremos o modelo normal em (1.1) com funções de ligação quaisquer para a média ($d(\mu) = \eta = X\beta$) e para o parâmetro de precisão ($g(\phi) = \tau = S\gamma$), $S = 1$ e a hipótese $H'_3 : \beta_1 = 0$ com $p_1 = p - 1$ e $x_{lp} = 1$, para $l = 1, \dots, n$. A estatística escore corrigida, dada em (3.36), tem distribuição $\chi^2_{p_1}$ com erro de ordem $O(n^{-2})$. Os termos em A_1, A_2 e A_3 vêm de (3.3) a (3.5) e de (3.37) a (3.44) sendo que A_1, A_2 e A_3 resultam em

$$A_1 = -\frac{3}{n} \left\{ \frac{f^2}{w^3 \phi} \left(\frac{1}{n} 1' J 1 - 1 \right) + 4(p - 1) \right\}$$

$$A_2 = \frac{6}{n} \left(\frac{4}{n} 1' J 1 - p^2 - 3 \right)$$

e $A_3 = 0$.

Podemos observar que, neste caso, A_1 depende apenas da função de ligação considerada para a média, enquanto que A_2 não depende das funções de ligações adotadas para a média e para o parâmetro de precisão.

Capítulo 4

Resultados de simulações e aplicação a dados reais

4.1 Resultados de simulações

Apresentamos, nesta seção, um estudo de simulação onde comparamos os desempenhos das estatísticas da razão de verossimilhança (LR) e escore (S_R), não corrigidas, e de suas versões aperfeiçoadas por fatores de correção de Bartlett e tipo-Bartlett, respectivamente, associadas a três testes de hipóteses para os modelos normais heterocedásticos definidos em (1.1). Para este estudo, consideramos um modelo com

$$\mu_l = \beta_2 + \beta_1 x_l \tag{4.1}$$

e

$$-\log(\phi_l) = \gamma_2 + \gamma_1 x_l, \tag{4.2}$$

para $l = 1, \dots, n$. Os valores da variável independente x foram obtidos de maneira a estabilizar os coeficientes de assimetria e curtose para diferentes tamanhos de amostras. Para

$n = 10$, esses valores foram tomados das distribuições $U(0,1)$ ($\gamma_{1x}^2 = 0,00$, $\gamma_{2x} = -1,22$), $N(0,1)$ ($\gamma_{1x}^2 = 0,00$, $\gamma_{2x} = -0,75$) e $LN(0,1.25^2)$ ($\gamma_{1x}^2 = 3,21$, $\gamma_{2x} = 2,17$) através da expressão

$$x_l = \text{quantil} \left(\frac{l - 0.5}{10} \right), l = 1, \dots, 10.$$

Para outros tamanhos de amostras, os valores de x_l foram replicados a partir dos obtidos para $n = 10$. Para $n=20$, por exemplo, temos $x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_{10}, x_{10}$, onde $x_1, \dots, x_{10}$ são os dez valores gerados das distribuições mencionadas. De forma análoga, obtivemos os valores de x_l para outros tamanhos de amostras.

Foram geradas 10.000 amostras de n observações ($n = 10, 20, 30, 40$) de um modelo normal heterocedástico através do pacote computacional S-Plus (versão 4.5) considerando $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = 1$.

Para cada amostra os parâmetros foram estimados sob as hipóteses nulas $H'_1 : \beta_1 = \gamma_1 = 0$, $H'_2 : \gamma_1 = 0$ e $H'_3 : \beta_1 = 0$ e sob o modelo irrestrito, utilizando o processo iterativo escore de Fisher, discutido na Seção 1.2 do Capítulo 1, por meio da linguagem de programação Fortran (versão 77). Com base nos resultados das Seções 2.2.1, 2.3.1, 2.4, 3.2.1, 3.3.1 e 3.4, calculamos, em seguida, os valores das estatísticas LR , S_R , LR^* e S_R^* e suas respectivas taxas de rejeição, isto é, as proporções de vezes em que LR , LR^* , S_R e S_R^* excederam os valores críticos x_α obtidos da distribuição χ_q^2 para os níveis nominais $\alpha = 1, 0; 2, 5; 5, 0$ e $10, 0\%$. Para as hipóteses H'_1 , H'_2 e H'_3 consideradas, os valores de q são, respectivamente, 2, 1 e 1. As taxas de rejeição estão exibidas nas Tabelas 4.1 a 4.9. Analisando essas tabelas, podemos observar que

- As taxas de rejeição de LR estão, em geral, mais próximas dos correspondentes níveis nominais, para os testes das três hipóteses, quando a variável independente é obtida da distribuição uniforme. Para a estatística S_R , as taxas de rejeição estão mais próximas dos correspondentes níveis nominais quando a variável independente é obtida da dis-

tribuição uniforme no caso do teste da hipótese H'_2 e da distribuição normal para os testes das outras hipóteses. Em resumo, as taxas de rejeição de LR e de S_R estão mais próximas dos correspondentes níveis nominais quando a variável independente é obtida de uma distribuição simétrica com coeficiente de curtose pequeno ou moderado.

- As taxas de rejeição de S_R e de S_R^* estão, em geral, mais próximas dos correspondentes níveis nominais do que as de LR e de LR^* .
- Na maioria dos casos, as taxas de rejeição de LR^* e de S_R^* estão mais próximas dos níveis nominais do que as correspondentes taxas para LR e S_R .
- À medida que o tamanho da amostra cresce, as taxas de rejeição de LR , S_R , LR^* e S_R^* se aproximam dos correspondentes níveis nominais.
- As taxas de rejeição de LR e de LR^* são, em geral, maiores do que os correspondentes níveis nominais, enquanto que as taxas de rejeição de S_R e de S_R^* são menores, indicando então que o teste score e sua versão corrigida são mais conservativos do que o teste da razão de verossimilhança e sua versão corrigida. Em testes com restrições lineares nos parâmetros da regressão em certos modelos normais lineares, Breusch (1979) mostrou que é válida a relação $LR \geq S_R$ para quaisquer conjuntos de dados (vide também Evans e Savin, 1982). Em outras palavras, estes autores já haviam notado que o teste score é mais conservativo que o da razão de verossimilhança.

Tabela 4.1: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_1 : \beta_1 = \gamma_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $U(0,1)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	20.1	12.3	8.0	9.6	30	10	12.8	10.4	9.5	10.1
	5	12.3	6.8	2.9	4.5		5	6.8	5.1	4.2	4.7
	2.5	7.6	3.8	0.8	2.0		2.5	3.5	2.5	2.1	2.4
	1	4.4	1.8	0.1	0.5		1	1.5	1.0	0.6	0.9
20	10	13.6	10.2	8.8	9.6	40	10	12.0	10.2	9.9	10.2
	5	7.5	5.1	4.1	4.9		5	6.4	5.1	4.6	5.1
	2.5	3.9	2.5	1.7	2.4		2.5	3.4	2.6	2.2	2.6
	1	1.8	1.0	0.5	0.9		1.0	1.5	1.1	0.8	1.0

Tabela 4.2: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_2 : \gamma_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $U(0,1)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	18.8	13.2	6.3	8.3	30	10	12.6	10.3	9.2	10.0
	5	11.8	7.3	2.3	3.8		5	6.6	5.3	4.2	4.9
	2.5	7.6	4.1	0.9	1.7		2.5	3.4	2.6	2.0	2.4
	1	4.3	2.1	0.2	0.6		1	1.4	1.0	0.7	0.9
20	10	13.4	10.4	8.3	9.5	40	10	11.5	10.0	9.4	10.1
	5	7.3	5.3	3.9	4.9		5	6.2	5.3	4.8	5.3
	2.5	4.0	2.6	1.5	2.3		2.5	3.5	2.8	2.4	2.8
	1	2.0	1.3	0.6	0.8		1	1.5	1.1	0.7	0.9

Tabela 4.3: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_3 : \beta_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $U(0,1)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	17.7	12.6	9.1	9.8	30	10	12.1	10.2	10.2	9.9
	5	12.0	8.6	6.1	6.1		5	6.6	5.1	4.7	4.8
	2.5	9.0	6.9	5.1	5.1		2.5	3.6	2.5	2.2	2.4
	1	7.1	5.7	4.7	4.6		1	1.5	1.0	0.7	0.8
20	10	12.5	10.0	9.2	9.4	40	10	11.5	10.0	9.8	9.9
	5	7.3	5.3	4.5	4.6		5	5.9	5.0	4.9	4.9
	2.5	4.1	2.9	2.2	2.4		2.5	3.1	2.3	2.1	2.3
	1	2.4	1.6	1.4	1.2		1	1.3	1.0	0.8	0.9

Tabela 4.4: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_1 : \beta_1 = \gamma_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $N(0,1)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	21.6	13.6	8.6	9.8	30	10	12.8	10.3	9.5	10.0
	5	13.7	7.6	3.7	4.5		5	6.9	5.2	4.6	4.8
	2.5	8.9	4.2	1.3	1.8		2.5	3.7	2.6	2.2	2.4
	1	4.9	2.0	0.3	0.5		1	1.6	1.0	0.9	1.0
20	10	14.0	10.4	9.3	9.9	40	10	12.2	10.2	9.8	10.1
	5	7.9	5.2	4.4	4.9		5	6.4	5.1	4.9	5.1
	2.5	4.2	2.4	2.1	2.4		2.5	3.4	2.7	2.4	2.6
	1	1.9	1.0	0.6	0.8		1	1.5	1.1	0.9	1.0

Tabela 4.5: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_2 : \gamma_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $N(0,1)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	20.7	14.3	4.7	7.7	30	10	12.9	10.6	8.5	9.8
	5	13.6	8.4	1.7	3.3		5	6.9	5.3	3.9	4.8
	2.5	9.1	4.9	0.6	1.4		2.5	3.5	2.5	1.9	2.3
	1	5.3	2.5	0.1	0.4		1	1.4	1.0	0.7	0.9
20	10	13.8	10.6	7.7	9.4	40	10	11.5	10.0	8.8	9.9
	5	7.8	5.6	3.7	4.8		5	6.6	5.5	4.8	5.3
	2.5	4.4	2.9	1.7	2.3		2.5	3.5	2.9	2.4	2.8
	1	2.1	1.3	0.6	0.8		1	1.6	1.2	0.7	0.9

Tabela 4.6: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_3 : \beta_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $N(0,1)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	20.0	13.9	6.2	6.6	30	10	12.5	10.3	9.8	9.9
	5	14.0	9.5	2.9	3.0		5	6.8	5.3	4.6	4.9
	2.5	10.5	7.3	1.8	2.0		2.5	3.7	2.7	2.1	2.4
	1	7.9	5.8	1.4	1.2		1	1.7	1.2	0.8	1.1
20	10	13.3	10.1	9.3	9.3	40	10	11.6	10.0	9.8	9.8
	5	7.5	5.6	4.3	4.6		5	6.0	4.9	4.7	4.9
	2.5	4.8	3.4	2.2	2.6		2.5	3.0	2.3	2.1	2.3
	1	2.8	2.1	1.5	1.3		1	1.4	1.1	0.8	1.0

Tabela 4.7: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_1 : \beta_1 = \gamma_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $LN(0, 1.25^2)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	17.2	8.4	9.0	10.9	30	10	16.5	11.3	8.7	9.6
	5	11.8	4.8	6.1	7.1		5	9.2	5.8	5.3	5.0
	2.5	8.3	2.6	4.2	3.1		2.5	5.6	3.3	3.7	0.0
	1	5.2	1.5	2.6	0.0		1	2.9	1.5	2.1	0.0
20	10	20.0	12.8	8.5	9.4	40	10	14.7	11.1	8.7	9.8
	5	12.7	6.9	5.6	5.1		5	8.5	5.9	5.3	4.9
	2.5	8.0	3.8	3.8	0.0		2.5	4.8	2.9	3.5	0.0
	1	4.3	1.6	2.3	0.0		1	2.1	1.1	2.0	0.0

Tabela 4.8: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_2 : \gamma_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $LN(0, 1.25^2)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	18.2	8.6	0.0	0.2	30	10	16.5	11.1	4.6	7.5
	5	12.6	4.9	0.0	0.0		5	9.9	6.0	2.0	3.3
	2.5	9.2	2.6	0.0	0.0		2.5	6.0	3.3	1.3	1.7
	1	6.0	0.9	0.0	0.0		1	3.3	1.3	0.8	0.9
20	10	21.4	13.2	3.2	5.7	40	10	15.3	11.1	6.1	8.7
	5	14.0	7.0	1.9	2.9		5	8.8	5.7	2.8	4.3
	2.5	8.6	3.8	1.2	2.1		2.5	5.0	2.8	1.8	2.4
	1	5.0	1.7	0.7	1.2		1	2.3	1.2	0.9	1.2

Tabela 4.9: Taxas de rejeição para o teste da hipótese $H'_3 : \beta_1 = 0$.

Valores da variável independente obtidos da $\text{LN}(0, 1.25^2)$.

n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*	n	$\alpha(\%)$	LR	LR^*	S_R	S_R^*
10	10	19.7	10.0	17.2	13.9	30	10	16.9	11.6	9.0	9.7
	5	14.8	6.6	11.0	9.9		5	10.1	6.4	3.6	4.1
	2.5	11.6	4.7	7.3	7.7		2.5	6.2	3.4	1.0	1.6
	1	8.6	3.5	4.6	6.5		1	3.2	1.5	0.3	0.6
20	10	22.5	15.1	7.7	8.9	40	10	15.0	11.1	9.6	10.0
	5	15.1	9.0	3.2	3.4		5	8.7	5.7	3.8	4.2
	2.5	10.3	5.5	1.6	2.0		2.5	4.8	2.9	1.1	1.9
	1	6.3	3.4	1.2	1.1		1	2.3	1.2	0.2	0.6

4.2 Uma aplicação a dados reais

Os dados da Tabela 4.10, obtidos de Simonoff e Tsai (1994), representam as taxas mensais de retorno de ações de mercado (X) e da Corporação Acme Cleveland (Y), no período de janeiro de 1986 a dezembro de 1990. Estes autores sugerem que os dados sejam modelados através do modelo normal heterocedástico dado em (1.1) considerando as seguintes componentes sistemáticas para a média e o parâmetro de precisão

$$\mu_l = \beta_2 + \beta_1 x_l$$

e

$$-\log(\phi_l) = \gamma_2 + \gamma_1 x_l,$$

para $l = 1, \dots, 59$ (o caso referente a outubro de 1987 foi eliminado por ter sido considerado um ponto discrepante no conjunto de valores). Nosso objetivo é testar $H_0 : \gamma_1 = 0$ contra $H : \gamma_1 \neq 0$, ou seja, se o modelo é homocedástico. Através do procedimento de estimação proposto na Seção 1.2, encontramos, sob o modelo irrestrito, as seguintes estimativas de máxima verossimilhança, $\hat{\beta}_2 = -0,00492$, $\hat{\beta}_1 = 1,25270$, $\hat{\gamma}_2 = -4,41000$ e $\hat{\gamma}_1 = 8,09200$. Sob H_0 , obtivemos $\tilde{\beta}_2 = -0,00951$, $\tilde{\beta}_1 = 1,17240$ e $\tilde{\gamma}_2 = -4,73910$. As estatísticas da razão de verossimilhança e escore vêm das expressões apresentadas nas Seções 2.3.1 e 3.3.1, respectivamente, fornecendo os valores $LR = 3,33$ e $S_R = 2,69$. Os níveis descritivos, obtidos da distribuição χ^2_1 são iguais a 6,8%, para LR e 10,1%, para S_R . Para obter as estatísticas corrigidas utilizamos, respectivamente, os resultados das Seções 2.3.1 e 3.3.1. Encontramos $LR^* = 3,12$ e $S_R^* = 2,89$. Os níveis descritivos são dados agora por 7,73% e 8,91%, respectivamente. Como esperado, observamos que a diferença entre os níveis descritivos das estatísticas corrigidas é menor do que a diferença entre os níveis descritivos das estatísticas não corrigidas. Além disto, através dos níveis descritivos das estatísticas corrigidas concluímos que há evidências, ao nível de 10% de significância, de que o modelo adotado para estes dados é heterocedástico.

Tabela 4.10: Taxas mensais de retorno de ações de mercado (X) e da Corporação Acme Cleveland (Y), no período de janeiro de 1986 a dezembro de 1990.

<i>Month</i>	<i>Marketreturn</i>	<i>Acmereturn</i>	<i>Month</i>	<i>Marketreturn</i>	<i>Acmereturn</i>
Janeiro 1986	-0,061134	0,030160	Julho 1988	-0,061718	-0,110515
Fevereiro 1986	0,008220	-0,165457	Agosto 1988	-0,101710	-0,168769
Março 1986	-0,007381	0,080137	Setembro 1988	-0,032705	-0,135585
Abril 1986	-0,067561	-0,109917	Outubro 1988	-0,045334	-0,084077
Mai 1986	-0,006238	-0,114853	Novembro 1988	-0,079288	-0,164550
Junho 1986	-0,044251	-0,099254	Dezembro 1988	-0,036233	0,150269
Julho 1986	-0,112070	-0,226846	Janeiro 1989	-0,011494	-0,015672
Agosto 1986	0,030226	0,073445	Fevereiro 1989	-0,093729	-0,037860
Setembro 1986	-0,129556	-0,143064	Março 1989	-0,065215	-0,074712
Outubro 1986	0,001349	0,034776	Abril 1989	-0,037113	-0,108530
Novembro 1986	-0,033679	-0,063375	Mai 1989	-0,044399	-0,036769
Dezembro 1986	-0,072795	-0,058735	Junho 1989	-0,084412	0,023912
Janeiro 1987	0,073396	0,050214	Julho 1989	0,003444	-0,078430
Fevereiro 1987	-0,011618	0,111165	Agosto 1989	-0,056760	-0,132199
Março 1987	-0,026852	-0,127492	Setembro 1989	-0,078970	-0,110141
Abril 1987	-0,040356	0,054522	Outubro 1989	-0,105367	-0,126302
Mai 1987	-0,047539	-0,072918	Novembro 1989	-0,038634	-0,095730
Junho 1987	-0,001732	-0,058979	Dezembro 1989	-0,043261	0,065740
Julho 1987	-0,008899	0,236147	Janeiro 1990	-0,139773	-0,120056
Agosto 1987	-0,020837	-0,094778	Fevereiro 1990	-0,059094	-0,085205
Setembro 1987	-0,084811	-0,135669	Março 1990	-0,057736	-0,130433
Outubro 1987	-0,262077	-0,284796	Abril 1990	-0,102524	-0,116728
Novembro 1987	-0,110167	-0,171494	Mai 1990	0,023881	-0,078039
Dezembro 1987	0,034955	0,242616	Junho 1990	-0,079116	-0,170322
Janeiro 1988	0,012688	-0,063518	Julho 1990	-0,078965	-0,077727
Fevereiro 1988	-0,002170	-0,117677	Agosto 1990	-0,161359	-0,277035
Março 1988	-0,073462	0,201674	Setembro 1990	-0,119376	-0,207595
Abril 1988	-0,043419	-0,147728	Outubro 1990	-0,076008	-0,070515
Mai 1988	-0,054730	-0,170885	Novembro 1990	-0,006444	-0,046274
Junho 1988	-0,011755	-0,014893	Dezembro 1990	-0,026401	-0,190834

Conclusão

Neste trabalho obtivemos correções tipo-Bartlett para estatísticas score de testes sobre a média e/ou o parâmetro de precisão em modelos normais heterocedásticos. Baseados nos resultados de Botter e Cordeiro (1997) e de Cordeiro (1993), apresentamos correções de Bartlett para as estatísticas da razão de verossimilhança destes mesmos testes. Através de resultados de estudos de simulações verificamos que as estatísticas corrigidas têm tamanhos empíricos mais próximos dos nominais do que as estatísticas não corrigidas, em amostras finitas. Estes resultados mostraram, também, que a estatística score não corrigida tem tamanho empírico mais próximo do nominal do que a estatística da razão de verossimilhança sem correção. Assim sendo, em testes de hipóteses no modelo normal heterocedástico, é natural a escolha da estatística score por requerer somente estimação sob a hipótese nula. Como sugestões para pesquisas futuras, consideramos interessante o estudo da correção do ponto crítico de estatísticas score, assim como a obtenção de estatísticas score monótonas em modelos normais heterocedásticos.

Apêndice

Neste apêndice, apresentamos os cumulantes de derivadas do logaritmo da função de verossimilhança total no modelo normal heterocedástico definido em (1.1) e as expressões gerais para as quantidades A_1 , A_2 e A_3 necessárias para a obtenção das correções tipo-Bartlett para a estatística S_R .

Utilizamos notações com índices de letras minúsculas para as derivadas em relação a β e as notações com índices de letras maiúsculas, para as derivadas em relação a γ . Assim, temos $U_r = \partial\ell/\partial\beta_r$, $U_R = \partial\ell/\partial\gamma_R$, $U_{rS} = \partial^2\ell/\partial\beta_r\partial\gamma_S$, $U_{rST} = \partial^3\ell/\partial\beta_r\partial\gamma_S\partial\gamma_T$, $U_{rSTU} = \partial^4\ell/\partial\beta_r\partial\gamma_S\partial\gamma_T\partial\gamma_U$. Para os cumulantes dessas derivadas, definimos as notações $\kappa_{rS} = E(U_{rS})$, $\kappa_{rST} = E(U_{rST})$, $\kappa_{r,s} = E(U_r U_s)$, $\kappa_{r,ST} = E(U_r U_{ST})$, $\kappa_{rstu} = E(U_{rstu})$, $\kappa_{RS,tu} = E(U_{RS} U_{tu}) - \kappa_{RS}\kappa_{tu}$, etc. Logo,

$$\begin{aligned}
 \kappa_{rs} &= -\sum_{l=1}^n (\phi w)_l x_{lr} x_{ls} , \\
 \kappa_{RS} &= -2^{-1} \sum_{l=1}^n (\phi^{-2} \phi_1^2)_l s_{lR} s_{lS} , \\
 \kappa_{rst} &= -3 \sum (\phi f)_l x_{lr} x_{ls} x_{lt} , \\
 \kappa_{rsT} &= -\sum (\phi_1 w)_l x_{lr} x_{ls} s_{lT} , \\
 \kappa_{RST} &= 2^{-1} \sum \phi_l^{-2} (2\phi^{-1} \phi_1^3 - 3\phi_1 \phi_2)_l s_{lR} s_{lS} s_{lT} , \\
 \kappa_{r,st} &= \sum (\phi f)_l x_{lr} x_{ls} x_{lt} , \\
 \kappa_{r,sT} &= \sum (\phi_1 w)_l x_{lr} x_{ls} s_{lT} , \\
 \kappa_{rS} &= \kappa_{rST} = \kappa_{r,ST} = \kappa_{R,st} = \kappa_{R,sT} = 0, \\
 \kappa_{R,ST} &= 2^{-1} \sum (\phi^{-2} 2\phi_1^2 \phi_2)_l s_{lR} s_{lS} s_{lT} , \\
 \kappa_{r,s,T} &= -\sum (\phi_1 w)_l x_{lr} x_{ls} s_{lT} , \\
 \kappa_{R,S,T} &= -\sum (\phi^{-2} 3\phi_1^3)_l s_{lR} s_{lS} s_{lT} , \\
 \kappa_{r,S,T} &= \kappa_{r,s,t} = \kappa_{r,s,t,u} = \kappa_{r,s,t,U} = \kappa_{r,S,T,U} = 0, \\
 \kappa_{r,s,T,U} &= 2 \sum (\phi^{-1} \phi_1^2 w)_l x_{lr} s_{ls} s_{lT} s_{lU} , \\
 \kappa_{R,S,T,U} &= 3 \sum (\phi^{-4} \phi_1^4)_l s_{lR} s_{lS} s_{lT} s_{lU} , \\
 \kappa_{r,s,tu} &= \kappa_{R,s,tU} = \kappa_{R,s,T,U} = \kappa_{R,S,tu} = \kappa_{R,S,tU} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{r,s,TU} &= -\sum(\phi_2 w)_l x_{lr} x_{ls} s_{lT} s_{lU} , \\
\kappa_{R,s,tu} &= -\sum(\phi_1 f)_l s_{lR} x_{ls} x_{lt} x_{lu} , \\
\kappa_{R,S,TU} &= -\sum(\phi^{-1} 3\phi_1^2 \phi_2)_l s_{lR} s_{lS} s_{lT} s_{lU} , \\
\kappa_{rsTU} &= -\sum(\phi_2 w)_l x_{lr} x_{ls} s_{lT} s_{lU} , \\
\kappa_{RSTU} &= -\sum[2^{-1} \phi^{-2} (6\phi^{-2} \phi_1^4 12\phi^{-1} \phi_1^2 \phi_2 + 3\phi_2^2 + 4\phi_1 \phi_3)]_l x_{lR} x_{lS} s_{lT} s_{lU} , \\
\kappa_{rstu} &= -\sum(a\phi)_l x_{lr} x_{ls} x_{lt} x_{lu} ,
\end{aligned}$$

onde $a = 3\left(\frac{d^2 \mu}{d\eta^2}\right)^2 + 4\frac{d^3 \mu}{d\eta^3}$

As quantidades A_1 , (A_2) e (A_3) são dadas por

$$\begin{aligned}
A_1 &= 3\sum_{\beta,\gamma}(\kappa_{i_1 i_2 i_3} + 2\kappa_{i_1, i_2 i_3})(\kappa_{i_4 i_5 i_6} + 2\kappa_{i_4 i_5, i_6})a_{i_1 i_2} a_{i_5 i_6} m_{i_3 i_4} \\
&\quad - 6\sum_{\beta,\gamma}(\kappa_{i_1 i_2 i_3} + 2\kappa_{i_1, i_2 i_3})\kappa_{i_4, i_5, i_6} a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} m_{i_5 i_6} \\
&\quad + 6\sum_{\beta,\gamma}(\kappa_{i_1, i_2 i_3} - \kappa_{i_1, i_2, i_3})(\kappa_{i_4 i_5 i_6} + 2\kappa_{i_4 i_5, i_6})a_{i_2 i_5} a_{i_3 i_6} m_{i_1 i_4} \\
&\quad - 6\sum_{\beta,\gamma}(\kappa_{i_1, i_2, i_3, i_4} + \kappa_{i_1, i_2, i_3 i_4})a_{i_3 i_4} m_{i_1 i_2} ,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -3\sum_{\beta,\gamma}\cancel{\kappa_{i_1, i_2, i_3}}\cancel{\kappa_{i_4, i_5, i_6}}a_{i_3 i_4} m_{i_1 i_2} m_{i_5 i_6} \\
&\quad + 6\sum_{\beta,\gamma}(\kappa_{i_1 i_2 i_3} + 2\kappa_{i_1, i_2 i_3})\cancel{\kappa_{i_4, i_5, i_6}}a_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} m_{i_5 i_6} \\
&\quad - 6\sum_{\beta,\gamma}\cancel{\kappa_{i_1, i_2, i_3}}\cancel{\kappa_{i_4, i_5, i_6}}a_{i_3 i_6} m_{i_1 i_4} m_{i_2 i_5} \\
&\quad + 3\sum_{\beta,\gamma}\cancel{\kappa_{i_1, i_2, i_3 i_4}}m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} ,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 3\sum_{\beta,\gamma}\kappa_{i_1, i_2, i_3}\kappa_{i_4, i_5, i_6}m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} m_{i_5 i_6} \\
&\quad + 2\sum_{\beta,\gamma}\kappa_{i_1, i_2, i_3}\kappa_{i_4, i_5, i_6}m_{i_1 i_4} m_{i_2 i_5} m_{i_3 i_6} ,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde os índices $i_1, \dots, i_6$ variam sobre todos os componentes dos vetores β e γ e $\sum_{\beta,\gamma}$ denota o somatório sobre todas as combinações dos $p + q$ parâmetros $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q$.

Referências Bibliográficas

- ATTFIELD, C.L.F. (1991). A Bartlett-adjustment factor to the likelihood ratio test for homoskedasticity in the linear model. *Economics Letters* **37**, 119-123.
- AUBIN E.C.Q. e CORDEIRO, G.M.(1998). Some adjusted likelihood ratio tests for heteroscedastic regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **2**, 131-148
- BARTLETT, M.S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society of London A*. **160**, 268-282.
- BOTTER, D.A. e CORDEIRO, G.M. (1997). Bartlett corrections for generalized linear models with dispersion covariates. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **26**.
- BREUSCH, T.S. (1979). Conflict among criteria for testing hypotheses: Extensions and comments. *Econometrica* **47**, 203-207.
- BREUSCH, T. S. e PAGAN, A.R. (1979). A simple test for heteroskedasticity end random coefficient variation. *Econometrica* **47**, 1287-1294.
- CHANDRA, T.K. (1985). Asymptotic expansions of perturbed chi-square variables. *Sankhyā A* **47**, 100-110.
- CHANDRA, T.K. e GHOSH, J.K. (1979). Valid asymptotic expansions of the likelihood ratio statistic and other perturbed chi-square variables. *Sankhyā A* **41**, 22-47.
- CHAR, B.W., GEDDES, K.O., GONNET, G.R., MONAGAN, M.B. e WATT, S.M. (1988). *MAPLE Reference Manual*. Waterloo, Watcom Publications Ltd. 95p.
- CHESHER, A., SMITH, R. (1995). Bartlett corrections to likelihood ratio tests. *biométrica*, **82**, 433-436.

- COOK, R.D. e WEISBERG, S. (1983). Diagnostics for heteroskedasticity in regression. *Biometrika* **70**, 1-10.
- CORDEIRO, G.M. (1987). On the corrections to the likelihood ratio statistics. *Biometrika* **74**, 265-274.
- CORDEIRO, G.M. (1993a). Bartlett correction and bias correction for two heteroscedastics regression models. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **22**, 169-188.
- CORDEIRO, G.M. (1993b). General matrix formulae for computing Bartlett corrections. *Statistics and Probability Letters* **16**, 11-18.
- CORDEIRO G.M. e FERRARI, S.L.P. (1991). A general method for approximating to the distribution of some statistics. *Biometrika* **78**, 573-582.
- CORDEIRO, G.M., FERRARI, S.L.P. e CYSNEIROS, A.H.M.A. (1998). A formula to improve score test statistics. *Journal of Statistical Computation and Simulation* **62**, 123-136.
- CRIBARI-NETO, F. e FERRARI, S. L.P. (1995a). An improved Lagrange multiplier test for heteroskedasticity. *Communications in Statistics-Computation and Simulation* **24**, 31-44.
- CRIBARI-NETO, F. e FERRARI, S. L.P. (1995b). Bartlett- corrected tests for heteroskedastic linear models. *Economics Letters* **48**, 113-118.
- CRIBARI-NETO, F. e ZARKOS, S.G. (1999). Bootstrap methods for heteroskedastic regression models: evidence on estimation and testing. *Econometric Reviews* **18**, 211-228.
- COX, D.R. e HINKLEY, D.V. (1974). *Theoretical Statistics*. New York: John Wiley.

COX, D.R. e REID, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B* **49**, 1-39.

EVANS, G.B.A e SAVIN, N.E. (1982). Conflict among and criteria revisited; the W, LR and LM tests. *Econometrica* **50**, 737-748.

GODFREY, L.G. (1978). Testing for multiplicative heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* **8**, 227-236.

HARRIS, P. (1985). An asymptotic expansion for the null distribution of the efficient score statistic. *Biometrika* **72**, 653-659.

HAYAKAWA, T. (1977). The likelihood ratio criterion and the asymptotic expansion of its distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics A* **29**, 359-78, e *Corrigenda in Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **39**, 681 (1987).

HOLLAS, E.A. (1991). Performance of Bartlett adjustment for certain likelihood ratio tests. *Communications in Statistics B* **20**, 449-462.

HONDA, Y. (1988). A size correction to the lagrange multiplier test for heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* **38**, 375-386.

JENSEN, J.L. (1993). A historical sketch and some new results on the improved log likelihood ratio statistic. *Scandinavian Journal of Statistical* **20**, 1-15.

LAWLEY, D. N. (1956). A general method for approximating to the distribution of the likelihood ratio criteria. *Biometrika* **43**, 295-303.

NELDER, J.A. e WEDDERBURN, R.W.M. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society* **135**, 370-384.

RAO C.R. (1948). Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **44**, 50-57.

SIMONOFF, S.J. e TSAI, CHIH-LING (1994). Use of modified profile likelihood for improved tests of constancy of variance in regression. *Applied Statistics* **43**, 357-370,

SMYTH, G.K. (1989). Generalized linear models with varying dispersion. *Journal of the Royal Statistical Society B* **51**, 47-60.

WOLFRAM, S. (1991). *Mathematica a System for Doing Mathematics by Computer*. 2. ed. New York: Addison-Wesley.