**Grandes Flutuações de Densidade e
Metaestabilidade no Processo de Contato
Supercrítico Multidimensional**

Adilson Simonis

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Antonio Galves**

–SÃO PAULO, Março de 1995–

GRANDES FLUTUAÇÕES DE DENSIDADE E METAESTABILIDADE NO PROCESSO DE CONTATO SUPERFÍCIE-MULTIDIMENSIONAL

Este exemplar corresponde à vedação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Adilson Sintonis e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 21 de março de 1995

Banca Examinadora

- Prof.^o Dr.^o Pablo Augusto Ferrari (Presidente) - IME - USP
- Prof.^o Dr.^o Eduardo Jordão Neves - IME - USP
- Prof.^o Dr.^o Maria Eulália Vares - IMPA - RJ
- Prof.^o Dr.^o João Barata - IF - USP
- Prof.^o Dr.^o Vladas Sidoravicius - IMPA - RJ

Agradecimentos

Registro aqui meus agradecimentos ao mestre Antonio Galves pela orientação dedicada e pela oportunidade de participar de um grupo de pesquisa, que sob sua coordenação, realiza uma produção científica coletiva, da qual me orgulho de fazer parte.

A todos os membros do grupo fica aqui meus agradecimentos pela amizade, coleguismo e exemplo profissional.

Em particular meu obrigado à Maria Eulália Vares, que no verão de 1991 no IMPA, introduziu-me aos Sistemas de Partículas.

Cláudia Peixoto, colega e companheira, não só participou de todos os momentos deste trabalho, mas com sua dedicação, coragem, vigor intelectual e profissionalismo, fizeram com que eu chegasse a esta página. Deu-me uma filha, a Gláucia, e é para estas duas *gurias* que dedico esta tese.

GRANDES FLUTUAÇÕES DE DENSIDADE E METAESTABILIDADE NO PROCESSO DE CONTATO SUPERCRÍTICO MULTIDIMENSIONAL

ÍNDICE	PAG.
ABSTRACT / SUMÁRIO	2
INTRODUÇÃO	3
CAPÍTULO I : PERDA DE MEMÓRIA	5
I. 1 Construção do Processo	5
I. 2 Resultados Anteriores	7
I. 3 Rápida Perda de Memória do Processo	10
CAPÍTULO II : FLUTUAÇÃO DE DENSIDADE	19
II. 1 Introdução	19
II. 2 Caso $q > \rho$	22
II. 3 Caso $q = 1$	33
CAPÍTULO III : COMPORTAMENTO METAESTÁVEL	43
III. 1 Introdução	43
III. 2 Resultados Anteriores	46
III. 3 Estabilidade das Médias Temporais	47
BIBLIOGRAFIA	53

Abstract

In this work, we consider the supercritical d -dimensional contact process, obtaining new results about the loss of memory and the asymptotic distribution of the time of first occurrence of an anomalous density of particles in a fixed region of the space, when the process starts from equilibrium. In particular, we get uniform sharp bounds for the rates of convergence in distribution of this time to a mean one exponential random variable, when suitably rescaled. We prove that this model shows metastable behavior for any dimension d , studying the time means.

Sumário

Neste trabalho, consideramos o processo de contato supercrítico d -dimensional, obtendo novos resultados sobre sua perda de memória e sobre a distribuição assintótica do tempo de ocorrência de uma densidade anômala de partículas em uma fixada região do espaço, quando o processo inicia do equilíbrio. Em particular, obtemos cotas uniformes para a velocidade de convergência em distribuição deste tempo para uma variável aleatória exponencial de média um, quando convenientemente reescalada. Provamos que este modelo apresenta comportamento metaestável em qualquer dimensão d , estudando suas médias temporais.

INTRODUÇÃO

O processo de contato básico foi introduzido por Harris [1] (1974), e é um dos mais simples sistemas markovianos de partículas não-trivial a tempo contínuo. É simples pois a intensidade da interação com os vizinhos mais próximos é linear e não-trivial pois apresenta *transição de fase*.

Técnicas recentes apresentadas por Bezuidenhout e Grimmett [2] (1990) lançam nova luz na teoria do processo em dimensão arbitrária. Neste contexto, obteremos novos resultados para flutuações de densidade e para o fenômeno da metaestabilidade. Este é o tema central desta tese.

Para processos atrativos e invariantes por translação, iniciando de alguma medida invariante, resultados sobre flutuações de densidade foram obtidos nos trabalhos de Lebowitz e Schonmann [3] (1987). Para o processo de contato supercrítico unidimensional, seus resultados são válidos para densidades menores que ρ , onde ρ é a densidade do processo em equilíbrio. Desenvolvendo uma técnica baseada na rápida perda de memória, Galves, Martinelli e Olivieri [4] (1989) estudaram densidades maiores que ρ no processo de contato supercrítico unidimensional, desta maneira complementando os resultados de [3]. Estendendo a técnica de [4] obteremos resultados para flutuações de densidade maiores que ρ em dimensão arbitrária. Além disso, adaptando para o processo de contato d -dimensional uma recente técnica desenvolvida por Ferrari, Galves e Liggett [5] (1994) em sistemas de partículas conservativos, encontraremos as velocidades de convergência para a distribuição exponencial das flutuações de grande densidade, quando o processo inicia da medida invariante não-trivial.

O enfoque trajetória por trajetória proposto por Cassandro, Galves, Olivieri e Vares [6] (1984), aliado aos recentes resultados de Mountford [7] (1993), nos permitirá estender os teoremas básicos para o fenômeno da metaestabilidade no modelo de contato supercrítico multidimensional.

Na primeira parte apresentaremos a construção gráfica de Harris e resultados sobre a perda de memória do processo de contato supercrítico multidimensional. Na segunda parte

estabeleceremos e provaremos os resultados sobre flutuações de densidade e, finalmente, na terceira parte estudaremos o comportamento metaestável do processo evoluindo em volume finito.

CAPÍTULO I

PERDA DE MEMÓRIA DO PROCESSO DE CONTATO SUPERCRTICO MULTIDIMENSIONAL

I.1- Construção do Processo

O processo de contato em dimensão $d \geq 1$ com parâmetro de infecção λ é um processo de Markov a tempo contínuo com espaço de estados $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$. A construção do processo pode ser feita através da *representação gráfica* de Harris, exposta a seguir. Neste trabalho identificamos $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ com $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ da maneira usual.

Para $x \in \mathbb{Z}^d$, sejam $\{\mathcal{U}_k^x : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência de um processo de Poisson com taxa 1. Para cada $y \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x - y\| = 1$, onde $\|z\| = |z_1| + \dots + |z_d|$ para $z \in \mathbb{Z}^d$, sejam $\{\mathcal{U}_k^{x,y} : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência de um processo de Poisson de taxa $\lambda \geq 0$. Defina também $\mathcal{U}_0^x = \mathcal{U}_0^{x,y} = 0$.

Supondo que em $x \in \mathbb{Z}^d$ todos os $2d + 1$ processos são mutuamente independentes e que os processos envolvidos para diferentes valores de $x \in \mathbb{Z}^d$ são também mutuamente independentes, escrevemos no espaço-tempo $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ os símbolos $\dagger$ nos pontos $(x, \mathcal{U}_k^x)$ e os símbolos $\rightarrow$ de $(x, \mathcal{U}_k^{x,y})$ para $(y, \mathcal{U}_k^{x,y})$. Denotamos por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\lambda)$ o espaço de probabilidade onde todos os processos de Poisson acima estão definidos.

Definição I.1.1 : Dados $0 \leq s \leq t$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ e $\omega \in \Omega$, dizemos que existe um ω -caminho de (x, s) para (y, t) se existir uma sequência de tempos $s = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1} = t$ e uma sequência de posições $x = x^0, x^1, \dots, x^n = y$, com $\|x^i - x^{i+1}\| = 1$ para $i = 0, \dots, n-1$, tal que

- i) para $i = 1, 2, \dots, n$ existe um $\rightarrow$ de (x^{i-1}, s_i) para (x^i, s_i) ,
- ii) para $i = 0, 1, \dots, n$ os segmentos verticais $\{x^i\} \times [s_i, s_{i+1}]$ não contém o símbolo $\dagger$.

Para $0 \leq s \leq t$ e $\omega \in \Omega$, definimos a configuração $\xi_t^{(x,s)}(\omega) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, por

$$\xi_t^{(x,s)}(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \text{para } x \in \mathbb{Z}^d \text{ existe um } \omega\text{-caminho de } (x, s) \text{ para } (y, t)\}$$

e construímos para qualquer $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ o processo

$$\xi_t^{(\eta, s)}(\omega) = \bigcup_{x \in \eta} \{\xi_t^{(x, s)}(\omega)\}.$$

O processo de Markov $\{\xi_t^{(\eta, s)}(\omega) : 0 \leq s \leq t\}$ é dito o processo de contato com $\xi_s^{(\eta, s)}(\omega) = \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Por simplificação denotamos $\xi_t^{(\eta, s)}(\omega)$ por ξ_t^η quando $s = 0$.

Para o espaço de probabilidade $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{G}, \mu)$ onde as configurações são escolhidas segundo a lei μ , com $\mathcal{G}$ a σ -álgebra gerada pelos cilindros em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, podemos considerar o processo de contato com medida inicial μ , isto é, o processo $\{\xi_t^\mu : t \geq 0\}$, no sentido de escolhermos aleatoriamente, segundo a distribuição de μ , a configuração inicial. O processo $\{\xi_t^\mu : t \geq 0\}$ está portanto definido no espaço de probabilidade produto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\lambda) \otimes (\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{G}, \mu)$.

Desta forma o processo $\{\xi_t^x : t \geq 0\}$ representa o caso em que $\mu = \delta_{\{x\}}$, a medida de Dirac concentrada na configuração $\{x\} \subset \mathbb{Z}^d$. Seja $\mathbb{P}$ dada por $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\lambda \otimes \mu$.

Dizemos que o processo de contato é supercrítico quando o evento

$$\Omega_\infty = \{\xi_t^0 \neq \emptyset, \forall t \geq 0\} \text{ tem probabilidade } \mathbb{P} \text{ estritamente positiva,}$$

e definimos o parâmetro crítico do processo por $\lambda_c(d) = \inf\{\lambda > 0 : \mathbb{P}(\Omega_\infty) > 0\}$. Liggett em [8] (1985) e Holley e Liggett em [9] (1978) mostraram que $\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_c(d) \leq \frac{2}{d}$. Harris nos artigos [1] e [10] (1978) mostrou que o processo com $\lambda > \lambda_c(d)$ tem duas medidas de probabilidade invariantes extremas, ν e $\delta_\emptyset$. O suporte de ν está contido no conjunto de todas configurações tendo densidade ρ , onde $\rho = \mathbb{P}\{0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}\}$. Quando $\lambda \leq \lambda_c(d)$ o processo tem $\delta_\emptyset$ como única medida invariante.

O processo de contato é *atrativo*, ou seja, dadas configurações iniciais $\zeta_1, \zeta_2 \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ tais que $\zeta_1(x) \leq \zeta_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, podemos construir versões dos processos $\{\xi_t^{\zeta_1} : t \geq 0\}$ e $\{\xi_t^{\zeta_2} : t \geq 0\}$ no mesmo espaço de probabilidade de modo que $\xi_t^{\zeta_1}(x) \leq \xi_t^{\zeta_2}(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ e todo $t \geq 0$. Isso é satisfeito, por exemplo, se usarmos os mesmos símbolos $\rightarrow$ e $\dagger$ para construir tais processos. Para facilitar diremos apenas que os processos estão construídos no mesmo espaço de probabilidade, quando estivermos utilizando essa particular versão conjunta.

I.2- Resultados Anteriores

A técnica desenvolvida em [4] no estudo das flutuações de densidade baseia-se no seguinte fato provado em [4] para o processo de contato supercrítico unidimensional : dois processos com configurações iniciais diferentes, porém com um número suficiente de partículas, quando evoluem em um mesmo espaço de probabilidade tornam-se idênticos rapidamente em alguma região fixada do espaço e permanecem assim para sempre. Rapidamente em [4] significa um tempo muito menor que o necessário para ocorrer uma visita ao evento anômalo partindo da medida invariante. A demonstração deste resultado decorre de propriedades da posição aleatória da partícula mais à esquerda e mais à direita do processo unidimensional no instante t .

Neste capítulo estendemos para todo $d \geq 1$ a técnica acima descrita, utilizando uma aplicação do Teorema da Forma multidimensional que iremos enunciar a seguir.

Para $x \in \mathbb{Z}^d$, seja $t(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in \xi_t^0\}$ o tempo da primeira infecção de x quando a condição inicial é dada pela configuração com apenas a posição $0 \in \mathbb{Z}^d$ infectada.

Definimos o conjunto dos sítios infectados pelo menos uma vez até o instante t por $H_t = \bigcup_{s=0}^t \xi_s^0$ e o conjunto dos sítios acoplados até o instante t por $K_t = \xi_t^0 \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c$. Observe que $\xi_t^0(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)$ para todo $x \in K_t$ quando os processos estão construídos no mesmo espaço de probabilidade.

O Teorema da Forma afirma que, para $\lambda > \lambda_c(d)$, existe um conjunto convexo $D \subset \mathbb{Z}^d$, tal que, se $\omega \in \Omega_\infty = \{\xi_t^0 \neq \emptyset, \forall t \geq 0\}$ e $\epsilon > 0$, então

$$(1 - \epsilon)tD \subset \overline{H}_t \subset (1 + \epsilon)tD, \quad \text{para } t \geq t_0(\epsilon, \omega), \quad (\text{I.2.1})$$

$$\text{e} \quad (1 - \epsilon)tD \subset (\overline{H}_t \cap \overline{K}_t) \subset (1 + \epsilon)tD, \quad \text{para } t \geq t_1(\epsilon, \omega), \quad (\text{I.2.2})$$

onde $\overline{H}_t = \bigcup_{x \in H_t} (x + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$ e $\overline{K}_t = \bigcup_{x \in K_t} (x + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$.

Este Teorema é consequência das seguintes hipóteses apresentadas em Durrett e Griffeath [11] (1982) e que são válidas a partir dos resultados obtidos por [2] para o processo de contato supercrítico em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Maiores detalhes podem ser encontrados em Durrett [12] (1991) que apresenta uma resenha do estágio de conhecimento do processo de contato anterior a 1990. Definindo o instante de primeira visita ao estado absorvente para o processo que iniciou com apenas a posição $0 \in \mathbb{Z}^d$ por $\tau^0 = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^0 = \emptyset\}$, temos que o resultado (I.2.1) segue do fato que existem constantes a, b e $C \in (0, \infty)$ tais que

$$\mathbb{P}(t < \tau^0 < \infty) \leq Ce^{-bt} \quad \text{para } t \geq 0, \quad (\text{I.2.3})$$

$$\mathbb{P}(t(x) > t, \tau^0 = \infty) \leq Ce^{-bt} \quad \text{para } \|x\| < at. \quad (\text{I.2.4})$$

Se além disso,

$$\mathbb{P}(x \notin K_t, \tau^0 = \infty) \leq Ce^{-bt} \quad \text{para } \|x\| < at, \quad \text{então temos (I.2.2).} \quad (\text{I.2.5})$$

A construção gráfica de Harris apresentada em I.1, além de permitir estudar o processo com diferentes configurações iniciais, também permite reverter a direção do eixo dos tempos. Para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $0 \leq s \leq t$ e $\omega \in \Omega$ dizemos que existe um ω -caminho dual entre (y, t) e $(x, t-s)$ (abreviado por $(y, t) \omega\text{-cd } (x, t-s)$) se a posição $(x, t-s)$ puder ser alcançada de (y, t) através de um ω -caminho com os símbolos $\rightarrow$ substituídos por $\leftarrow$.

Para $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, definimos para $0 \leq s \leq t$ a configuração $\hat{\xi}_s^{(\eta, t)}(\omega) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ por

$$\hat{\xi}_s^{(\eta, t)}(\omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{ para algum } y \in \eta, \text{ existe um } (y, t) \omega\text{-cd } (x, t-s) \}.$$

O processo $\{\hat{\xi}_s^{(\eta, t)}(\omega) : 0 \leq s \leq t\}$ é dito o dual do processo de contato com $\xi_0^{(\eta, t)}(\omega) = \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Por simplificação iremos omitir o argumento $\omega \in \Omega$.

Temos que

$$\begin{aligned} \{\hat{\xi}_s^{(\eta, t)} : 0 \leq s \leq t\} &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\xi_s^\eta : 0 \leq s \leq t\} \quad \text{e} \\ \{\xi_t^\zeta \cap \eta \neq \emptyset\} &= \{\zeta \cap \hat{\xi}_t^{(\eta, t)} \neq \emptyset\}, \quad \text{para } \eta \text{ e } \zeta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, \end{aligned}$$

tal que

$$\mathbb{P}(\xi_t^\zeta \cap \eta \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\zeta \cap \xi_t^\eta \neq \emptyset).$$

A primeira igualdade é em distribuição e a última é a propriedade de autodualidade do processo de contato. Colocando $\zeta = \{0\}$ e $\eta = \mathbb{Z}^d$, temos que

$$\mathbb{P}(\xi_t^0 \neq \emptyset) = \mathbb{P}(0 \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}).$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, segue que

$$\mathbb{P}(\xi_t^0 \neq \emptyset, \forall t \geq 0) = \mathbb{P}(0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}) = \rho.$$

Observe que a hipótese (I.2.3) acima, a atratividade e a autodualidade do processo de contato implicam que

$$\begin{aligned} | \mathbb{P}(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}(0) = 1) - \rho | &= \mathbb{P}\{0 \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}\} - \mathbb{P}\{0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}\} \\ &= \mathbb{P}\{\xi_t^0 \neq \emptyset\} - \mathbb{P}\{\xi_\infty^0 \neq \emptyset\} \\ &= \mathbb{P}\{\tau^0 > t\} - \mathbb{P}\{\tau^0 = \infty\} \\ &= \mathbb{P}\{t < \tau^0 < \infty\} \leq Ce^{-bt} \end{aligned}$$

isto é, $\xi_t^{\mathbf{Z}^d}$ converge para o equilíbrio exponencialmente rápido. Esta velocidade de convergência aliada ao Lema Básico, que apresentaremos neste capítulo, permitirá desenvolver nossos resultados para densidades anômalas maiores que ρ em dimensão $d \geq 1$.

I.3- Rápida Perda de Memória do Processo

A propriedade de *rápida* perda de memória do processo seguirá do Lema (I.3.3) (Básico), e de uma estimativa inferior *a priori* do tempo de ocorrência de um evento raro, que é feita na Proposição (II.2.3).

Definimos por

$$\tau^\eta = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^\eta = \emptyset\}$$

o instante da primeira (e última) visita ao estado absorvente para o processo que iniciou com a configuração η . Para $N \geq 1$, $d \geq 1$, seja $\Gamma_N = \{-N, \dots, N\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ e defina, para $0 \leq q \leq 1$ fixado, o conjunto

$$A(\Gamma_N, q) = \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \sum_{x \in \Gamma_N} \eta(x) \geq q |\Gamma_N|\}$$

onde $|\Gamma_N| = (2N + 1)^d$ é o cardinal de Γ_N .

LEMA I.3.1 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$, existem $L \in \mathbb{N}$ e $c = c(d, \lambda, L) \in (0, 1)$, tais que para todo $N \geq L$ e toda $\eta \in A(\Gamma_N, q)$,

$$\mathbb{P}\{\tau^{\eta \cap \Gamma_N} = \infty\} \geq 1 - \exp\{-c q (2N + 1)^{d-1}\}.$$

Dem.: O caso $d = 1$ segue do Teorema (3.29), pag. 303 de [8]. Suponha $d > 1$ e para $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixado, seja $D_r = \{z \in \mathbb{Z}^d : |z_i| \leq r, i = 1, \dots, d\}$ o disco de raio r em $\mathbb{Z}^d$.

O resultado central de [2] afirma que existe um disco finito $D_r = D$ e um inteiro positivo $L > r$ tal que para todo $\lambda > \lambda_c(d)$,

$$\mathbb{P}\{\xi^D \text{ sobrevive em } [-L, L]^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0, \infty)\} = \gamma > 0.$$

Este fato nos permitirá demonstrar nosso Lema.

Para $N \geq L$ e $\eta \in A(\Gamma_N, q)$ fixados, podemos escolher $\emptyset \neq \zeta \subset \eta \cap \Gamma_N$ com

$$|\zeta| \geq \max\left\{\left\lfloor \frac{|\Gamma_N|q}{(4L)^{d-1}(2N+1)} \right\rfloor, 1\right\},$$

onde $|\zeta|$ é o cardinal da configuração ζ e $\llbracket x \rrbracket$ denota o maior inteiro menor ou igual a x , tal que os conjuntos

$$x + (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z}, \quad \text{quando } x \in \zeta, \quad \text{são disjuntos.}$$

Seja x^l para $l = 0, 1, \dots, |\zeta| - 1$, uma ordenação dos sítios de ζ , isto é,

$$\zeta = \{ x^l \in \eta : l = 0, \dots, |\zeta| - 1 \}.$$

O primeiro passo em nossa demonstração é determinar uma cota inferior positiva para a probabilidade de obtermos no instante $h > 0$ fixado, uma cópia do disco D_r para o processo $\{ \xi_t^{x^l} : t \geq 0 \}$, $x^l \in \zeta$, isto é, do processo com condição inicial x^l que usa os símbolos de nascimentos e mortes que são dadas na construção do processo $\{ \xi_t^\eta : t \geq 0 \}$.

Vamos definir um particular evento no processo de contato $\xi_t^{x^l}$, $t \in [0, h]$, dado por uma seqüência escolhida de contaminações de vizinhos mais próximos, em intervalos de tempo

$$\left(\frac{kh}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}}, \frac{(k+1)h}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}} \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, 2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1} - 1,$$

e tal que no espaço-tempo $x^l + \{-r, \dots, r\}^d \times [0, h] \subset \mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ não ocorra nenhuma realização do processo pontual associado a mortes.

A seqüência de nascimentos é definida pela seguinte ordenação das contaminações :

No intervalo $(0, \frac{h}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}}]$, o sítio $x^l = (x_1^l, \dots, x_d^l)$ contamina seu vizinho mais próximo na direção da coordenada x_1^l à direita $(x_1^l + 1, x_2^l, \dots, x_d^l)$, e as $(r-1)$ próximas contaminações são feitas nesta direção até contaminar $(x_1^l + r, x_2^l, \dots, x_d^l)$ no intervalo de tempo

$$\left(\frac{(r-1)h}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}}, \frac{rh}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}} \right].$$

A seguir, $x^l = (x_1^l, \dots, x_d^l)$ infecta na direção x_1^l à esquerda seu vizinho mais próximo $(x_1^l - 1, x_2^l, \dots, x_d^l)$, no intervalo de tempo $(\frac{rh}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}}, \frac{(r+1)h}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}}]$, e este contamina seu vizinho mais próximo nesta direção até que no instante $\frac{(2r)h}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}}$ teremos que os $(2r+1)$ sítios $(x_1^l + j, x_2^l, \dots, x_d^l)$, $j = -r, \dots, -1, 1, \dots, r$, estarão contaminados.

A partir daí, continuamos a escolher a seqüência de nascimentos nos vizinhos mais próximos, primeiro os $2r$ sítios

$$(x_1^l + r, x_2^l + j, x_3^l, \dots, x_d^l), \quad j = -r, \dots, -1, 1, \dots, r,$$

e depois os $2r$ sítios

$$(x_1^l + r - 1, x_2^l + j, x_3^l, \dots, x_d^l), \quad j = -r, \dots, -1, 1, \dots, r,$$

até infectar todos os $2r$ sítios

$$(x_1^l - r, x_2^l + j, \dots, x_d^l), \quad j = -r, \dots, -1, 1, \dots, r,$$

e assim por diante para as coordenadas $x_3^l, x_4^l, \dots, x_d^l$, e teremos no instante h que $\xi_h^{x^l}(y) = 1$ para todo $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$ tal que $|y_i| \leq r + x_i^l$, $i = 1, 2, \dots, d$.

Definindo esta particular seqüência de eventos de $\xi_t^{x^l}$ no intervalo de tempo $[0, h]$, por $D(h, r, d, \lambda)$, teremos que a probabilidade de obtermos uma cópia do disco D_r no instante $h > 0$, que denotaremos por $p(h, r, d, \lambda)$, é limitada inferiormente por :

$$\mathbb{P}(D(h, r, d, \lambda)) = \left[\frac{\lambda h}{2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}} \right]^{2r+(d-1)2r(2r+1)^{d-1}} e^{-\lambda h}.$$

Nosso próximo passo é determinar uma cota inferior para a probabilidade do evento $\{\xi_t^\zeta \neq \emptyset, \forall t > 0\}$, o que implicará no resultado que queremos.

Definindo o processo de contato *restrito* a um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ pela eliminação dos Processos Pontuais de Poisson definidos em Γ^c , construímos o processo $\bar{\xi}_t^{x^l}$, para $x^l \in \zeta$ por :

$$\bar{\xi}_0^{x^l} = x^l \quad \text{e} \quad \bar{\xi}_t^{x^l} = \xi_t^{x^l} \quad \text{restrito ao conjunto} \quad x^l + (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0, \infty).$$

Isto implicará que os processos $\bar{\xi}_t^{x^l}$ e $\bar{\xi}_t^{x^m}$, $l \neq m$, x^l e $x^m \in \zeta$, que são versões restritas do processo com condição inicial η , construídos no mesmo espaço de probabilidade e determinados por processos pontuais de Poisson definidos em conjuntos disjuntos, todos com mesma taxa $\lambda > 0$, terão evoluções independentes.

Temos então para cada $x^l \in \zeta$ que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\bar{\xi}^{x^l} \text{ sobrevive em } x^l + (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0, \infty)\} \\ &= \mathbb{P}\{\bar{\xi}^0 \text{ sobrevive em } (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0, \infty)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{\bar{\xi}^0 \text{ sobrevive em } (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [h, \infty), \bar{\xi}_h^0 = D_r\} \\ &= \gamma p(h, r, d, \lambda) > \gamma \mathbb{P}\{D(h, r, d, \lambda)\} > 0, \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue da propriedade de invariância por translações do Processo de Contato e a segunda da propriedade de Markov.

Observando que o evento

$$\{\bar{\xi}_t^{x^l} \text{ sobrevive em } x^l + (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0, \infty)\},$$

para algum $x^l \in \zeta$, implica na ocorrência do evento

$$\{ \xi^{\eta \cap \Gamma_N} \text{ sobrevive em } \mathbb{Z}^d \times [0, \infty) \},$$

pela construção dos processos $\{ \bar{\xi}_t^{x^l} : t \geq 0 \}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{ \tau^{\eta \cap \Gamma_N} = \infty \} &= \mathbb{P}\left\{ \bigcup_{x \in \eta \cap \Gamma_N} \{ \xi_t^x \neq \emptyset, \forall t > 0 \} \right\} \\ &\geq \mathbb{P}\{ \xi_t^\zeta \neq \emptyset, \forall t > 0 \} = \mathbb{P}\left\{ \bigcup_{l \leq |\zeta|-1} \{ \xi_t^{x^l} \neq \emptyset, \forall t > 0 \} \right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{ \bigcup_{l \leq |\zeta|-1} \{ \bar{\xi}_t^{x^l} \neq \emptyset, \forall t > 0 \} \right\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left\{ \bigcap_{l=0}^{|\zeta|-1} \{ \bar{\xi}_t^{x^l} = \emptyset, \text{ para algum } t > 0 \} \right\} \\ &= 1 - \prod_{l \leq |\zeta|-1} \mathbb{P}\{ \bar{\xi}_t^{x^l} = \emptyset, \text{ para algum } t > 0 \} \\ &\geq 1 - \prod_{l \leq |\zeta|-1} (1 - \gamma \mathbb{P}\{D(h, r, d, \lambda)\}) \\ &\geq 1 - \exp\{-\gamma \mathbb{P}\{D(h, r, d, \lambda)\} |\zeta|\} \\ &\geq 1 - \exp\left\{-\gamma \mathbb{P}\{D(h, r, d, \lambda)\} \left\lfloor \frac{|\Gamma_N| q}{(4L)^{d-1} (2N+1)} \right\rfloor\right\} \\ &\geq 1 - \exp\left\{-c q \frac{|\Gamma_N|}{2N+1}\right\} = 1 - \exp\{-cq(2N+1)^{d-1}\}. \end{aligned}$$

■

COROLÁRIO I.3.2 Sejam $d > 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < \epsilon < 1$, $0 < q \leq 1$, existem $L \in \mathbb{N}$ e $C = C(d, \lambda, L) \in (0, \infty)$, tais que para todo $N \geq \max\{L, C(\frac{-\log \epsilon}{q})^{\frac{1}{d-1}}\}$ e toda $\eta \in A(\Gamma_N, q)$,

$$\mathbb{P}\{\tau^{\Gamma_N} = \infty\} \geq \mathbb{P}\{\tau^{\eta \cap \Gamma_N} = \infty\} \geq 1 - \epsilon.$$

Dem.: A primeira desigualdade, que vale para todo $N \geq 1$, segue da atratividade do processo.

Para $L \in \mathbb{N}$ e $c = c(d, \lambda, L) \in (0, 1)$, dados no Lema (I.3.1), escolha $N(\epsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} \exp\{-cq(2N+1)^{d-1}\} &\leq \epsilon, \quad \text{isto é,} \\ N(\epsilon) &\geq C\left[\frac{-\log \epsilon}{q}\right]^{\frac{1}{d-1}}, \end{aligned}$$

onde $C = \left[\frac{1}{2^{d-1}c} \right]^{\frac{1}{d-1}}$.

Portanto, para todo $N \geq \max\{L, N(\epsilon)\}$ o resultado segue. ■

LEMA I.3.3 (BÁSICO) Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$, $N \geq 1$, η e $\zeta \in A(\Gamma_N, q)$, existem $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$, $c = c(d, \lambda, q) \in (0, \infty)$ e $C = C(d, \lambda) \in [1, \infty)$, tais que para todo $t > \alpha N$,

$$\mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \quad \forall x \in \Gamma_N, \} \geq 1 - C|\Gamma_N| \exp\{-ct\}.$$

Dem. : Sem perda de generalidade assuma $\zeta = \mathbb{Z}^d$.

Dado $t \geq 1$, segue do Lema (I.3.1) que existem constantes positivas L e c' , independentes de N , tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists y \in [-Lt, Lt]^d, \eta(y) = 1, \text{ e } \tau^y = \infty) &= \mathbb{P}(\tau^{\eta \cap [-Lt, Lt]^d} = \infty) \\ &\geq 1 - \exp\{-c'q(2Lt + 1)^{d-1}\}. \end{aligned}$$

Como $(2Lt + 1)^{d-1} \geq 1 + (d-1)Lt$ temos que existe $c_1 = c_1(d, \lambda, L)$ tal que

$$\begin{aligned} 1 - \exp\{-c'q(2Lt + 1)^{d-1}\} &\geq 1 - \exp\{-c'q(1 + (d-1)Lt)\} \\ &= 1 - \exp\{-c'q\} \exp\{-c'q(d-1)Lt\} \\ &\geq 1 - \exp\{-c_1qt\}. \end{aligned}$$

Observe que no caso $d = 1$, estamos usando o Teorema (3.29) pag. 303 de [8] para obter a constante positiva c_1 .

Definindo para $t \geq 0$ a região $K_t^y = \xi_t^y \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c$ temos para todo $t \geq 1$ fixado que

$$\begin{aligned} \{\exists y \in [-Lt, Lt]^d, \eta(y) = 1 \text{ e } \tau^y = \infty\} &\subset \bigcup_{y \in \eta} \{\xi_t^y(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \quad \forall x \in K_t^y, \tau^y = \infty\} \\ &\subset \{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \quad \forall x \in \Gamma_N\} \cup \{\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \quad \forall x \in \Gamma_N) \\ \geq 1 - \exp\{-c_1qt\} = \mathbb{P}(\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty). \end{aligned}$$

Temos

$$\mathbb{P}(\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \Gamma_N} \{x \notin K_t^y, \tau^y = \infty\}\right)$$

e segue pela invariância por translações do processo de contato que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \Gamma_N + y} \{x \notin K_t, \tau^0 = \infty\}\right) \\ &\leq |\Gamma_N| \mathbb{P}(x \notin K_t, \tau^0 = \infty) . \end{aligned}$$

Usando a hipótese (I.2.5) do Teorema da Forma e observando que $\|x\| \leq Nd$ para todo $x \in \Gamma_N$, temos que existem constantes positivas a , $\bar{c}$ e $\bar{C}$, independentes de N , tais que

$$\mathbb{P}(\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty) \leq |\Gamma_N| \bar{C} \exp\{-\bar{c}t\} \quad \text{para todo } t > \frac{Nd}{a}.$$

Segue que existem constantes a , c , C tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N) &\geq 1 - \exp\{-c_1 qt\} - |\Gamma_N| \bar{C} \exp\{-\bar{c}t\} \\ &\geq 1 - |\Gamma_N| C \exp\{-ct\}, \quad \text{para todo } t > \frac{Nd}{a}. \end{aligned}$$

Escolhendo $C = \max\{\bar{C}, 1\}$ e $\alpha = \max\{\frac{d}{a}, 1\}$, o resultado segue. ■

COROLÁRIO I.3.4 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$, $N \geq 1$, existem $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$, $c = c(d, \lambda, q) \in (0, \infty)$ e $C = C(d, \lambda) \in [2, \infty)$, tais que para todo $r, s \in \mathbb{R}_+$, com $|r - s| > \alpha N$,

$$|\text{Cov}[\mathbf{1}_{A(\Gamma_N, q)}(\xi_r^\nu) \cdot \mathbf{1}_{A(\Gamma_N, q)}(\xi_s^\nu)]| \leq C \nu(A(\Gamma_N, q)) [\exp\{-c|r - s|\} + \nu(A(\Gamma_N, q))] .$$

Dem. : Sem perda de generalidade assumamos $r > s$ e seja $u = r - s$.

Definindo $A = A(\Gamma_N, q)$, pela estacionaridade do processo temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\xi_r^\nu) \cdot \mathbf{1}_A(\xi_s^\nu)] &= \int_A \nu(d\eta) \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\xi_u^\eta)] \\ &= \int_A \nu(d\eta) \int \nu(d\zeta) \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\xi_u^\eta) - \mathbf{1}_A(\xi_u^\zeta)] + [\nu(A)]^2 \\ &\leq \int_A \nu(d\eta) \int \nu(d\zeta) \mathbb{P}[\xi_u^\eta(x) \neq \xi_u^\zeta(x) \text{ para algum } x \in \Gamma_N] + [\nu(A)]^2 . \end{aligned}$$

Aplicando o Lema (I.3.3) temos que existem α' , c e C' , independentes de N , tais que para todo $u > \alpha'N$, a expressão acima é limitada por

$$\begin{aligned} & \int_A \nu(d\eta) \int \nu(d\zeta) C' |\Gamma_N| \exp \{-cu\} + [\nu(A)]^2 \\ & \leq C' |\Gamma_N| \nu(A) \exp \{-cu\} + [\nu(A)]^2. \end{aligned}$$

Para todo $N \geq 1$, podemos escolher $\alpha > \alpha'$ tal que

$$C' |\Gamma_N| \exp \{-c\alpha N\} \leq C' \exp \{-c\alpha' N\},$$

isto é, $\alpha > \frac{\log |\Gamma_N|}{cN} + \alpha'$, e portanto para todo $u > \alpha N$, temos

$$\mathbb{E}[1_A(\xi_r^\nu) \cdot 1_A(\xi_s^\nu)] \leq C' \nu(A) \exp \{-cu\} + [\nu(A)]^2.$$

Observando que

$$\begin{aligned} & | \text{Cov} [1_A(\xi_r^\nu) \cdot 1_A(\xi_s^\nu)] | \\ & \leq \mathbb{E}[1_A(\xi_r^\nu) \cdot 1_A(\xi_s^\nu)] + [\nu(A)]^2 \end{aligned}$$

e definindo $C = \max\{2, C'\}$, o resultado segue. ■

LEMA I.3.5 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$ existem $L \in \mathbb{N}$, $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ e $c = c(d, \lambda, L) \in (0, 1)$, tais que para todo $N \geq L$ e todas $\eta, \zeta \in A(\Gamma_N, q)$,

$$\mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \quad \forall x \in \Gamma_N, \quad \forall t > \alpha N \} \geq 1 - \exp \{-cq(2N+1)^{d-1}\}.$$

Dem. : Fixe $N \geq L$, onde L é a constante dada no Lema (I.3.1) , e seja $R_N^{\eta, \zeta}$ o tempo aleatório definido por

$$R_N^{\eta, \zeta} = \sup\{ t \geq 0 : \xi_t^\eta(x) \neq \xi_t^\zeta(x) \text{ para algum } x \in \Gamma_N \}.$$

Pelo Lema (I.3.1) existe $c \in (0, 1)$, independente de N , tal que

$$\mathbb{P}\{ \exists x \in \Gamma_N, \eta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty \} = \mathbb{P}\{ \tau^{\eta \cap \Gamma_N} = \infty \} \geq 1 - \exp \{-cq(2N+1)^{d-1}\}.$$

Iremos mostrar que a ocorrência do evento $R_N^{\eta, \zeta} \leq \alpha N$, para alguma constante $\alpha \geq 1$, independente de N , segue da ocorrência de

$$\{ \exists x \in \Gamma_N, \eta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty \} \cap \{ \exists x \in \Gamma_N, \zeta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty \}.$$

Observe que $\mathbb{P}(\tau^{\eta \cap \Gamma_N} = \infty) \longrightarrow 1$, quando $N \longrightarrow \infty$, para todo $0 < q \leq 1$.

Primeiro vamos mostrar que existe $t_1 = t_1(\epsilon, \omega) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{ \exists x \in \Gamma_N, \eta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty \} \\ & \leq \mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N, \forall t > t_1 \} \end{aligned} \quad (\text{I.3.6}).$$

Seja y algum sítio com menor norma L^∞ em η tal que $\tau^y = +\infty$.

O Teorema da Forma implica que existe um conjunto convexo D tal que se $\omega \in \Omega_\infty$ e $\epsilon > 0$, então

$$(1 - \epsilon)t(D + y) \subset \bigcup_{x \in K_t^y} (x + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d), \quad \forall t \geq t'_1(\epsilon, \omega).$$

Portanto

$$\xi_t^y \cap (1 - \epsilon)(D + y) \subset t^{-1} \overline{K}_t^y \quad \text{e} \quad \tau^y = \infty \quad \text{implicam que}$$

$$\xi_t^y(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x) \quad \forall x \in (1 - \epsilon)(D + y)t, \quad \forall t \geq t'_1,$$

e tomando $t_1 > t'_1$ tal que $\Gamma_N \subset (1 - \epsilon)(D + y)t_1$, o resultado (I.3.6) segue.

De maneira análoga, seja z algum sítio com menor norma L^∞ em ζ tal que $\tau^z = +\infty$.

O Teorema da Forma implica que existe t'_2 tal que

$$\Gamma_N \subset (1 - \epsilon)(D + z)t_2 \subset \overline{K}_t^z$$

para todo $t_2 > t'_2$.

Tomando $\hat{t} > \max\{t_1, t_2\}$ e escrevendo $K_t^\zeta = \bigcup_{y \in \zeta} K_t^y$ temos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N, \forall t > t_1 \} \\ & \leq \mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N, \forall t > \hat{t} \} \\ & = \mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N \cap \overline{K}_t^\zeta, \forall t > \hat{t} \} \\ & = \mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \forall x \in \Gamma_N \cap \overline{K}_t^\zeta, \forall t > \hat{t} \} \\ & = \mathbb{P}\{ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \forall x \in \Gamma_N, \forall t > \hat{t} \}. \end{aligned}$$

Se garantirmos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$, tal que

$$\mathbb{P}(\hat{t}(\epsilon, \omega) \leq \alpha N) = 1 \quad \text{para todo } N \geq L,$$

o Lema estará provado.

Para tal, vamos mostrar que para α dada no Lema (I.3.3) (Básico) e $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\hat{t}(\epsilon, \omega) > n\alpha N \text{ i. v. }) = 0. \quad (\text{I.3.7})$$

Seja w tal que $\|w\| = \min\{\|y\|, \|z\|\}$.

Segue que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\hat{t}(\epsilon, \omega) > n\alpha N) \leq \mathbb{P}(\Gamma_N \not\subset K_{n\alpha N}^w, \tau^w = \infty).$$

Pela invariância por translações do processo de contato, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Gamma_N \not\subset K_{n\alpha N}^w, \tau^w = \infty) &= \mathbb{P}(\Gamma_N + w \not\subset K_{n\alpha N}, \tau^0 = \infty) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \Gamma_N + w} \{x \notin K_{n\alpha N}, \tau^0 = \infty\}\right) \\ &\leq |\Gamma_N| \mathbb{P}(x \notin K_{n\alpha N}, \tau^0 = \infty). \end{aligned}$$

Observando que $\|x\| \leq Nd + \|w\|$, e aplicando a hipótese (I.2.5) do Teorema da Forma temos que existem constantes positivas a , c_1 e C_1 , independentes de N , tais que para $n > \frac{\|w\| + Nd}{a\alpha N}$

$$\mathbb{P}(x \notin K_{n\alpha N}, \tau^0 = \infty) \leq C_1 |\Gamma_N| \exp\{-c_1 n\alpha N\}.$$

Escolhendo $\alpha = \max\{\frac{d}{a}, 1\}$, como no Lema (I.3.3), temos para

$$n^* = \max\left\{\left\lceil 1 + \frac{\|w\|}{Nd} \right\rceil, \left\lceil \frac{Nd + \|w\|}{aN} \right\rceil\right\},$$

que

$$\begin{aligned} \sum_{n=n^*}^{\infty} \mathbb{P}(\hat{t}(\epsilon, \omega) > n\alpha N) &\leq \sum_{n=n^*}^{\infty} C_1 |\Gamma_N| \exp\{-c_1 n\alpha N\} \\ &= C_1 |\Gamma_N| \frac{\exp\{-c_1 \alpha N n^*\}}{1 - \exp\{-c_1 \alpha N\}} < \infty. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Borel-Cantelli o resultado (I.3.7) segue, concluindo a demonstração. ■

CAPÍTULO II

FLUTUAÇÕES DE DENSIDADE PARA O PROCESSO DE CONTATO SUPERCRÍTICO MULTIDIMENSIONAL EM EQUILÍBRIO

II.1- Introdução

Em Lebowitz e Schonmann [13] (1988), entre outros resultados de grandes desvios para sistemas de partículas atrativos e invariantes por translação em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d \geq 1$, foi provado que para $\rho \leq q \leq 1$ existe o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \nu(A(\Gamma_N, q)) = -\phi_+(q) \quad (\text{II.1.1})$$

e a função ϕ_+ é convexa e crescente, com $\phi_+(\rho) = 0$ e $\phi_+(1) \leq -\log \rho < \infty$, e que para $0 \leq q \leq \rho$ existe o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \nu(A_-(\Gamma_N, q)) = -\phi_-(q), \quad (\text{II.1.2})$$

onde $A_-(\Gamma_N, q) = \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : \sum_{x \in \Gamma_N} \eta(x) \leq q|\Gamma_N|\}$, e a função ϕ_- é convexa e decrescente, com $\phi_-(\rho) = 0$ e $\phi_-(0) \leq -\log(1 - \rho) < \infty$.

Além disso, definindo para $0 \leq a \leq b \leq 1$ o conjunto

$$B(\Gamma_N, a, b) = \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : a|\Gamma_N| \leq \sum_{x \in \Gamma_N} \eta(x) \leq b|\Gamma_N|\} ,$$

e para $0 \leq q \leq 1$ a função $\phi(q) = \max(\phi_-(q), \phi_+(q))$, então existe o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \nu(B(\Gamma_N, a, b)) = - \inf_{a \leq q \leq b} \phi(q) \quad (\text{II.1.3})$$

e a função ϕ é convexa, com $\phi(\rho) = 0$ se e somente se $\rho = q$.

A medida invariante extremal ν possui a propriedade FKG (abreviaturas de Fortuin, Kasteleyn e Ginibre) a qual afirma que para quaisquer funções crescentes e contínuas $f, g : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_\nu(f(\eta)g(\eta)) \geq \mathbb{E}_\nu(f(\eta))\mathbb{E}_\nu(g(\eta)) ,$$

onde $\mathbb{E}_\nu$ é a esperança com respeito a lei ν . Esta propriedade de ν aliada à sua invariância por translações, permitiram naquele trabalho mostrar que

$$\nu(A(\Gamma_N, q)) \geq \nu(A(\Gamma_N \cap \Delta_1, q))\nu(A(\Gamma_N \cap \Delta_2, q)),$$

onde Δ_i , $i = 1, 2$, são retângulos de lados $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_d}$ tais que $\Gamma_N = \Delta_1 \cup \Delta_2$, e

$$A(\Gamma_N \cap \Delta_i, q) = \{ \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} : \sum_{x \in \Gamma_N \cap \Delta_i} \eta(x) \geq q|\Gamma_N \cap \Delta_i| \} \quad i = 1, 2 \quad \text{para } q \geq \rho,$$

o que é suficiente, pelo Teorema Ergódico Subaditivo, para mostrar a existência dos limites (II.1.1), (II.1.2) e (II.1.3).

Definimos o primeiro instante em que o processo ξ_t^η alcança o conjunto $A(\Gamma_N, q)$ por $T_N^\eta(q)$, isto é,

$$T_N^\eta(q) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^\eta \in A(\Gamma_N, q)\},$$

e quando a configuração inicial é escolhida segundo a distribuição de ν denotamos o instante da primeira visita ao conjunto $A(\Gamma_N, q)$ por $T_N^\nu(q)$.

Também considerando sistemas de partículas atrativos e invariantes por translação em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d \geq 1$, que inclui o processo de contato multidimensional, foi apresentado em [3] resultados de flutuações de densidade. Os resultados obtidos são provados a partir de hipóteses sobre a velocidade de convergência para o equilíbrio. Suas demonstrações usam as propriedades de monotonicidade do processo devido à atratividade. Se o processo começar com a configuração em que todos os sítios estão ocupados, então, durante a evolução, sua distribuição decresce para a medida de probabilidade invariante extremal ν . Esta monotonicidade pode ser usada para estudar o tempo que o processo leva para alcançar uma densidade menor que ρ , mas não funciona para densidades q maiores que ρ . Com hipóteses suplementares sobre a velocidade de convergência para o equilíbrio e definindo $\beta_N(q)$ por $IP(T_N^\nu(q) > \beta_N(q)) = \exp\{-1\}$, eles mostraram quando $q < \rho$ que :

$$\text{I.a)} \quad \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \beta_N(q) \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi(q) \quad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

$$\text{I.b)} \quad \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \mathbb{E} T_N^\nu(q) \longrightarrow \phi(q) \quad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

$$\text{I.c)} \quad \frac{T_N^\nu(q)}{\beta_N(q)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exp}(1) \quad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

$$\text{I.d)} \quad \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} T_N^\nu(q)}{\beta_N(q)} = 1.$$

Definindo $\lambda^*(N) = (2\lambda d + 1)|\Gamma_N|$, $A = A(\Gamma_N, q)$ e $A^- = A(\Gamma_N, q - |\Gamma_N|^{-1})$, na seção (II.2) iremos demonstrar o seguinte Lema :

LEMA Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s \in \mathbb{R}_+$, existe $\overline{C} = \overline{C}(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tal que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left| \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > (s+t)) - \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > s) \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > t) \right| \\ & \leq \overline{C} (\nu(A^-))^{\frac{1}{2}} \left[1 + \lambda^*(N)N + \lambda^*(N)s^{\frac{1}{2}} + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Em particular, este Lema apresenta como Corolário um majorante simples para a velocidade com que a variável $T_N^\nu(q)$, reescalada por $\nu(A^-)$, perde a memória quando N diverge.

COROLÁRIO Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s \in [1, \infty)$, existem $c' = c'(q) \in (0, \frac{1 - \log(1-\rho)}{4})$ e $C_1 = C_1(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left| \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > (s+t)) - \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > s) \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > t) \right| \\ & \leq C_1 s N |\Gamma_N| \exp \{-c' |\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$

Um resultado clássico devido a M. Kac [14] (1947), permitirá na seção (II.2) mostrar a seguinte Proposição :

PROPOSIÇÃO Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, existem $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ e $\overline{N} = \overline{N}(d, \lambda, q) \in \mathbb{N}$, tais que para todo $N \geq \overline{N}$,

$$\frac{\alpha N \nu(A)}{[1 + \alpha N \lambda^*(N)] \nu(A^-)} \leq \nu(A) \lambda^*(N) \mathbb{E}[T_N^\nu(q)] \leq \alpha N \lambda^*(N).$$

No caso $q = 1$, definindo $A_N = A(\Gamma_N, 1)$, mostraremos na seção (II.3) que

TEOREMA Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Existem $C = C(d, \lambda) \in (0, \infty)$, $\overline{C}_1 = \overline{C}_1(d, \lambda) \in (0, 1)$, $\overline{N} \in \mathbb{N}$ e uma sequência $\gamma_N \in [\overline{C}_1, 2]$, tais que para todo $N \geq \overline{N}$

$$\sup_{t \geq 0} \left| \mathbb{P}(\gamma_N 2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > t) - \exp \{-t\} \right| \leq C |\Gamma_N|^2 (\nu(A_N))^{\frac{1}{4}}.$$

Este último resultado, implica em particular que $\gamma_N 2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1)$ converge em distribuição para uma variável aleatória exponencial de média um.

II.2- Caso $q > \rho$

Vamos estudar o tempo para ocorrer uma visita ao evento $A(\Gamma_N, q)$.

Para $y \in \mathbb{Z}^d$, sejam $\{\mathcal{V}_k^{x \rightarrow y} : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência da superposição de todos os processos pontuais de Poisson de taxa λ definidos em $x \in \mathbb{Z}^d$, com $\|x - y\| = 1$.

Sejam $\{\theta_k^N : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência da superposição de todos os processos pontuais de Poisson definidos em $\Gamma_N \cup B(\Gamma_N)$, onde

$$B(\Gamma_N) = \{x \in \mathbb{Z}^d \cap \Gamma_N^c : \|x - y\| = 1, y \in \Gamma_N\},$$

e com $\theta_0^N = 0$, defina para $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e $0 \leq s \leq t$ o processo

$$X^\eta[s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{s \leq \theta_k^N < t, \xi_{\theta_k^N}^\eta \in A(\Gamma_N, q)\}}.$$

Por questão de clareza vamos utilizar, para todo $d \geq 1$, $\lambda > \lambda_c(d)$, $N \geq 1$ e $0 < q \leq 1$ fixados, a notação

$$\begin{aligned} A(\Gamma_N, q) & \text{ por } A, \\ A(\Gamma_N, q - |\Gamma_N|^{-1}) & \text{ por } A^-, \\ \lambda^*(N) & \text{ por } (2\lambda d + 1)|\Gamma_N|. \end{aligned}$$

LEMA II.2.1 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X^\nu[0, t)] \leq \nu(A) + \nu(A^-)\lambda^*(N) t.$$

Dem. : Para $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} X^\eta[0, t) &= \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < \theta_k^N < t, \xi_{\theta_k^N}^\eta \in A\}} \\ &= \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < \mathcal{V}_k^{x \rightarrow y} < t, \xi_{\mathcal{V}_k^{x \rightarrow y}}^\eta \in A\}} \\ &\quad + \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < \mathcal{U}_k^y < t, \xi_{\mathcal{U}_k^y}^\eta \in A\}}. \end{aligned}$$

Considere para cada $y \in \mathbb{Z}^d$, e cada $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x - y\| = 1$, os processos de contagem definidos para $s > 0$ por

$$\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < \mathcal{V}_k^{x \rightarrow y} < s\}},$$

$$\mathcal{N}^y(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < \mathcal{U}_k^y < s\}}$$

e as funções $f_{x \rightarrow y}, g_y : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow \{0, 1\}$ definidas por

$$f_{x \rightarrow y}(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\zeta(x)=1: \sum_{z \in \Gamma_N \setminus y} \zeta(z) \geq |\Gamma_N|q-1\}} \quad \text{e}$$

$$g_y(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\sum_{z \in \Gamma_N \setminus y} \zeta(z) \geq |\Gamma_N|q\}}.$$

Segue que

$$X^\eta[0, t) = \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s) + \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t g_y(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^y(s),$$

onde $\xi_{s-}^\eta = \lim_{r \uparrow s} \xi_r^\eta$.

Portanto,

$$X^\nu[0, t) = \int \nu(d\eta) \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s)$$

$$+ \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^y(s).$$

Definindo para todo $y \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x - y\| = 1$, e todo $s > 0$,

$$M^{x \rightarrow y}(s) = \mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s) - \lambda s \quad \text{e}$$

$$M^y(s) = \mathcal{N}^y(s) - s,$$

segue que

$$\begin{aligned}
X^\nu[0, t] &= \int \nu(d\eta) \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) dM^{x \rightarrow y}(s) \\
&\quad + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) \lambda ds \\
&\quad + \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi_{s-}^\eta) dM^y(s) \\
&\quad + \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi_{s-}^\eta) ds .
\end{aligned}$$

Como $f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta)$ e $g_y(\xi_{s-}^\eta)$ para cada $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, cada $y \in \mathbb{Z}^d$ e $x \in \mathbb{Z}^d$ com $\|x - y\| = 1$, são $\mathcal{F}(-\infty, s-)$ mensuráveis e $M^{x \rightarrow y}$, M^y são martingais de média zero, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\nu[0, t]] &= \int \nu(d\eta) \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) \lambda ds \\
&\quad + \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi_{s-}^\eta) ds .
\end{aligned}$$

Segue pela estacionaridade do processo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\nu[0, t]] &= \int \nu(d\eta) \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\zeta) f_{x \rightarrow y}(\zeta) \lambda ds \\
&\quad + \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\zeta) g_y(\zeta) ds .
\end{aligned}$$

Pela inclusão dos conjuntos $A(\Gamma_N, q)$ para $\rho < q \leq 1$, isto é, $A(\Gamma_N, q_1) \subset A(\Gamma_N, q_2)$ quando $q_1 \geq q_2$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\nu[0, t]] &\leq \nu(A) + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \nu(A^-) \lambda ds + \sum_{y \in \Gamma_N} \int_0^t \nu(A) ds \\
&= \nu(A) + |\Gamma_N| 2d \lambda \nu(A^-) t + |\Gamma_N| \nu(A) t \\
&\leq \nu(A) + \nu(A^-) |\Gamma_N| (2\lambda d + 1) t .
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

PROPOSIÇÃO II.2.2 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\nu(A^-)T_N^\nu(q) > t) \geq 1 - \nu(A) - \lambda^*(N)t.$$

Dem. : Pelo Lema (II.2.1),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\nu(A^-)T_N^\nu(q) \leq t) &\leq \mathbb{P}(X^\nu[0, t(\nu(A^-))^{-1}] \geq 1) \\ &\leq \mathbb{E}[X^\nu[0, t(\nu(A^-))^{-1}]] \\ &\leq \nu(A) + \lambda^*(N)t. \end{aligned}$$
■

PROPOSIÇÃO II.2.3 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$ e $0 < \delta < 1$, existem $L = L(\delta) \in \mathbb{N}$ e $c' = c'(q, \delta) \in (0, \frac{1-\log(1-\rho)}{2})$ tais que para todo $N \geq L$,

$$\mathbb{P}\{T_N^\nu(q) \leq |\Gamma_N|^{-1} \exp\{c'|\Gamma_N|\}\} \leq (2\lambda d + 2) \exp\{-c'|\Gamma_N|\}.$$

Dem. : Do resultado (II.1.1) segue que para $\rho < q \leq 1$ e todo $0 < \delta < 1$ fixado, existe $\overline{N}(\delta)$ tal que

$$\nu(A^-) \leq \exp\{-(\phi_+(q) + \delta)|\Gamma_N|\} \quad \text{para todo } N \geq \overline{N}(\delta),$$

pois $\phi_+(q)$ é contínua para todo $\rho < q < 1$.

Tomando $c' = \frac{\phi_+(q) + \delta}{2}$ e aplicando a proposição (II.2.2) temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_N^\nu(q) \leq |\Gamma_N|^{-1} \exp\{c'|\Gamma_N|\}) &\leq \nu(A) + \frac{\lambda^*(N)\nu(A^-)}{|\Gamma_N|} \exp\{c'|\Gamma_N|\} \\ &\leq \nu(A^-) \left[1 + \frac{\lambda^*(N) \exp\{c'|\Gamma_N|\}}{|\Gamma_N|}\right] \\ &\leq \exp\{-(\phi_+(q) + \delta)|\Gamma_N|\} \left[1 + \frac{\lambda^*(N) \exp\{c'|\Gamma_N|\}}{|\Gamma_N|}\right] \\ &= \exp\{-(\phi_+(q) + \delta)|\Gamma_N|\} + \lambda^*(N)|\Gamma_N|^{-1} \exp\{-\frac{1}{2}(\phi_+(q) + \delta)|\Gamma_N|\} \\ &\leq \exp\{-\frac{1}{2}(\phi_+(q) + \delta)|\Gamma_N|\} [2 + 2\lambda d] \\ &= 2(\lambda d + 1) \exp\{-c'|\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$

Tomando $L = \overline{N}(\delta)$, o resultado segue. ■

LEMA II.2.4. Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s \in \mathbb{R}_+$, existe $\overline{C} = \overline{C}(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tal que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} | \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > (s+t)) - \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > s) \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > t) | \\ & \leq \overline{C}(\nu(A^-))^{\frac{1}{2}} \left[1 + \lambda^*(N)N + \lambda^*(N)s^{\frac{1}{2}} + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Dem. : Sejam $\kappa_N = (\nu(A^-))^{-1}$ e $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ dada no Lema (I.3.3) (Básico).

Para todo $s > 0$ fixado, escolha $\Delta(N)$ tal que $\Delta(N) < \kappa_N s + \alpha N$. ($\Delta(N)$ irá ser fixado a seguir).

Temos pela Proposição (II.2.2) que

$$\begin{aligned} & \sup_s | \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > \kappa_N s) - \mathbb{P}(\xi_u^\nu \notin A, u \in [\Delta(N), \kappa_N s]) | \\ & = \sup_s \{ \mathbb{P}(\{\xi_u^\nu \notin A, u \in [\Delta(N), \kappa_N s]\} \cap \{T_N^\nu(q) \leq \kappa_N s\}) \} \\ & \leq \mathbb{P}(T_N^\nu(q) \leq \Delta(N)) \leq \nu(A) + \nu(A^-)\lambda^*(N)\Delta(N). \end{aligned}$$

Além disso, usando a estacionaridade do processo, e a Proposição (II.2.2),

$$\begin{aligned} & \sup_{s,t} | \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > \kappa_N(s+t)) - \mathbb{P}(\{\xi_u^\nu \notin A, u \in [0, \kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(s+t)]\}) | \\ & = \sup_{s,t} \mathbb{P}(\{\xi_u^\nu \notin A, u \in [0, \kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(s+t)]\} \cap \{T_N^\nu(q) \leq \kappa_N(s+t)\}) \\ & \leq \mathbb{P}(T_N^\nu(q) \leq \Delta(N)) \leq \nu(A) + \nu(A^-)\lambda^*(N)\Delta(N). \end{aligned}$$

Segue para todo $t \geq 0$ que

$$\begin{aligned} & | \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > \kappa_N(s+t)) - \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > \kappa_N s) \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > \kappa_N t) | \\ & \leq 2[\nu(A) + \nu(A^-)\lambda^*(N)\Delta(N)] + | \mathbb{P}(\xi_u^\nu \notin A, u \in [0, \kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(t+s)]) \\ & - \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > \kappa_N t) \mathbb{P}(\xi_u^\nu \notin A, u \in [\Delta(N), \kappa_N s]) |. \end{aligned} \tag{II.2.5}$$

Pela autodualidade e estacionaridade do processo temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi_u^\nu \notin A, u \in [0, \kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(s+t)]) \\ & = \int \nu(d\zeta) \mathbb{P}(X^\zeta[0, \kappa_N t] = 0) \mathbb{P}(X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0). \end{aligned}$$

Portanto (II.2.5) é limitada superiormente por

$$2[\nu(A) + \nu(A^-)\lambda^*(N)\Delta(N)] + \int \nu(d\zeta) \int \nu(d\eta) \mathbb{P}(X^\eta[0, \kappa_N t] = 0) \\ \times |\mathbb{P}(X^\eta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0) - \mathbb{P}(X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0)| .$$

Como os processos $\{\xi_u^\eta : u \geq 0\}$ e $\{\xi_u^\zeta : u \geq 0\}$ estão definidos no mesmo espaço de probabilidade,

$$|\mathbb{P}(X^\eta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0) - \mathbb{P}(X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0)| \\ \leq |\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X^\eta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\}} - \mathbf{1}_{\{X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\}}]| \\ \leq \mathbb{P}(\xi_u^\eta(x) \neq \xi_u^\zeta(x) \text{ algum } x \in \Gamma_N, \text{ algum } u \in [\Delta(N), \kappa_N s]) .$$

Seja y algum sítio com menor norma L^∞ em η tal que $\tau^y = \infty$.

Pela definição do conjunto K_t^y , temos que a expressão acima é limitada por

$$\leq \mathbb{P}(x \notin K_u^y \text{ para algum } x \in \Gamma_N + y, \text{ algum } u \in [\Delta(N), \kappa_N s], \tau^y = \infty) \\ \leq |\Gamma_N| \mathbb{P}(x \notin K_u^y \text{ para algum } u \in [\Delta(N), \kappa_N s], \tau^y = \infty) .$$

Definindo $k^* = \lceil \frac{\kappa_N s}{\Delta(N)} \rceil$ temos ainda que a expressão acima é limitada por

$$\leq |\Gamma_N| \sum_{k=1}^{k^*} \mathbb{P}(x \notin K_u^y \text{ para algum } u \in [k\Delta(N), (k+1)\Delta(N)], \tau^y = \infty) .$$

Pela hipótese (I.2.5) do Teorema da Forma e com uma escolha conveniente de $\Delta(N)$, temos que existem constantes positivas b e C , independentes de N , tais que para $\Delta(N) > \alpha N$ a expressão acima é limitada por

$$\leq |\Gamma_N| \sum_{k=1}^{k^*} C \exp \{-bk\Delta(N)\} \\ \leq C|\Gamma_N| \frac{\exp \{-b\Delta(N)\}}{1 - \exp \{-b\Delta(N)\}} .$$

Como $\log z \leq z - 1$ temos

$$\frac{C|\Gamma_N|}{\exp \{b\Delta(N)\} - 1} \leq \frac{C|\Gamma_N|}{b\Delta(N)} .$$

Escolhendo $\Delta(N) = \alpha N + \sqrt{\kappa_N s}$, temos

$$\frac{C|\Gamma_N|}{b\Delta(N)} \leq \frac{C|\Gamma_N|}{b(\kappa_N s)^{\frac{1}{2}}} = \frac{C|\Gamma_N|\sqrt{\nu(A^-)}}{b\sqrt{s}}.$$

Portanto (II.2.5) é limitada por

$$\begin{aligned} &\leq 2\nu(A) + 2\nu(A^-)\lambda^*(N)\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\nu(A^-)}} + \alpha N\right) + \frac{C|\Gamma_N|\sqrt{\nu(A^-)}}{b\sqrt{s}} \\ &\leq 2\nu(A^-) + 2\lambda^*(N)\sqrt{s\nu(A^-)} + 2\nu(A^-)\lambda^*(N)\alpha N + \frac{C|\Gamma_N|\sqrt{\nu(A^-)}}{b\sqrt{s}} \\ &\leq \overline{C}\sqrt{\nu(A^-)}\left[1 + \lambda^*(N)s^{\frac{1}{2}} + \lambda^*(N)N + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}}\right], \end{aligned}$$

onde $\overline{C} = \max\{2, \alpha, \frac{C}{b}\}$, o que conclui a demonstração. ■

COROLÁRIO II.2.6 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s \in [1, \infty)$, existem $c' = c'(q) \in (0, \frac{1-\log(1-\rho)}{4})$ e $C_1 = C_1(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} &\sup_{t \geq 0} \left| \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > (s+t)) - \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > s) \mathbb{P}(\nu(A^-) T_N^\nu(q) > t) \right| \\ &\leq C_1 s N |\Gamma_N| \exp\{-c'|\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$

Dem. : Para $s \geq 1$, segue do resultado (II.1.1) que existe $c' = c'(q) \in (0, \frac{1-\log(1-\rho)}{4})$ tal que

$$\begin{aligned} &\overline{C}(\nu(A^-))^{\frac{1}{2}} \left[1 + \lambda^*(N)N + \lambda^*(N)s^{\frac{1}{2}} + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &\leq \overline{C}s \exp\{-c'|\Gamma_N|\} \left[1 + \lambda^*(N)N + \lambda^*(N) + |\Gamma_N|\right]. \end{aligned}$$

Portanto existem $c' = c'(q) \in (0, \frac{1-\log(1-\rho)}{4})$ e $C_1 = C_1(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} &\overline{C}s \exp\{-c'|\Gamma_N|\} \left[1 + \lambda^*(N)N + \lambda^*(N) + |\Gamma_N|\right] \\ &\leq C_1 s N |\Gamma_N| \exp\{-c'|\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$
■

PROPOSIÇÃO II.2.7 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, existe $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[T_N^\nu(q)]}{\alpha N} \mathbb{P}(T_N^\nu(q) < \alpha N) = 1.$$

Dem. : Dado $\{\xi_t^\nu : t \geq 0\}$ definimos o processo estacionário $\{X_k^\nu : k \geq 0\}$ por

$$X_k^\nu = 1_{\{\exists s \in [k\alpha N, (k+1)\alpha N) : \xi_s^\nu \in A(\Gamma_N, q)\}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $\alpha = \alpha(d, \lambda)$ é a constante positiva dada no Lema (I.3.3) (Básico).

Seja $U_N(q) = \inf\{k \geq 1 : X_k^\nu = 1\}$. Temos que o tempo médio do primeiro retorno do processo $\{X_k^\nu : k \geq 0\}$ ao conjunto $A(\Gamma_N, q)$ é dado por

$$\mathbb{E}[U_N(q) / X_0^\nu = 1] = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}\{X_1^\nu = 0, \dots, X_{k-1}^\nu = 0, X_k^\nu = 1 / X_0^\nu = 1\}.$$

O Lema (I.3.3) (Básico) mais o Teorema (2) em [14] que afirma o seguinte resultado

$$\mathbb{E}[U_N(q) / X_0^\nu = 1] = \frac{1}{\mathbb{P}\{X_0^\nu = 1\}},$$

será suficiente para mostrarmos nossa proposição.

Para k inteiro positivo e $N \geq 1$, considere $\{\vartheta_{(k)} : k \geq 1\}$ configurações independentes e identicamente distribuídas, todas com mesma lei ν , e defina no mesmo espaço de probabilidade que $\{\xi_t^\nu : t \geq 0\}$, os processos

$$\{\bar{\xi}_t^{(\vartheta_{(k)}, k\alpha N)} : t \geq k\alpha N\}.$$

Considere além disso, $\{\bar{\xi}_t^{(\vartheta^*, 0)} : t \geq 0\}$ o processo com configuração inicial ϑ^* escolhido segundo $\mathbb{P}_\nu(\cdot / X_0^\nu = 1)$, isto é, segundo a lei $\nu \otimes \mathbb{P}$ escolhemos, condicionado a $\{X_0^\nu = 1\}$, uma configuração inicial ϑ^* .

Para $k \geq 1$ sejam

$$K_{k\alpha N}^{\vartheta_{((k-1)\alpha N)}} = \bar{\xi}_{k\alpha N}^{(\vartheta_{((k-1)\alpha N)}, (k-1)\alpha N)} \cup \left(\bar{\xi}_{k\alpha N}^{(\mathbf{Z}^d, (k-1)\alpha N)} \right)^c,$$

onde $\vartheta_{(0)} = \vartheta^*$, e defina o tempo aleatório

$$G = \inf\{k \geq 1 : K_{k\alpha N}^{\vartheta_{((k-1)\alpha N)}} \supset \Gamma_N\}.$$

O Lema (I.3.3) (Básico) afirma que existem constantes positivas c_1 e C_1 tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{K_{k\alpha N}^{\vartheta_{((k-1)\alpha N)}} \supset \Gamma_N\} &\geq 1 - C_1 |\Gamma_N| \exp\{-c_1 t\} \\ &\geq 1 - C_1 |\Gamma_N| \exp\{-c_1 \alpha N\}. \end{aligned}$$

Como $\{ K_{k\alpha N}^{\vartheta((k-1)\alpha N)} : k \geq 1 \}$ são construídas a partir de variáveis aleatórias independentes, temos que para todo l inteiro positivo

$$\begin{aligned} IP(G = l) &= IP(K_{\alpha N}^{\vartheta^*} \not\subset \Gamma_N, K_{2\alpha N}^{\vartheta(\alpha N)} \not\subset \Gamma_N, \dots, K_{(l-1)\alpha N}^{\vartheta((l-2)\alpha N)} \not\subset \Gamma_N, K_{l\alpha N}^{\vartheta((l-1)\alpha N)} \supset \Gamma_N) \\ &= \prod_{j=0}^{l-2} IP(K_{(j+1)\alpha N}^{\vartheta(j\alpha N)} \not\subset \Gamma_N) IP(K_{l\alpha N}^{\vartheta((l-1)\alpha N)} \supset \Gamma_N) \\ &\leq [C_1 |\Gamma_N|]^{l-1} \exp \{ -c_1(l-1)\alpha N \} . \end{aligned}$$

Tomando N suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned} IP(G > l) &\leq \sum_{j=l+1}^{\infty} [C_1 |\Gamma_N|]^{j-1} \exp \{ -c_1(j-1)\alpha N \} \\ &= [\frac{ [C_1 |\Gamma_N|]^l \exp \{ -c_1 l \alpha N \} }{ 1 - C_1 |\Gamma_N| \exp \{ -c_1 \alpha N \} }] . \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} IE[G] &= \sum_{l=0}^{\infty} IP(G > l) \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{ [C_1 |\Gamma_N|]^l \exp \{ -c_1 l \alpha N \} }{ 1 - C_1 |\Gamma_N| \exp \{ -c_1 \alpha N \} } \\ &= [1 - C_1 |\Gamma_N| \exp \{ -c_1 \alpha N \}]^{-2} , \end{aligned}$$

concluimos pela definição de G que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IE(G) = 1 . \quad (\text{II.2.8})$$

Além disso, se $G = k_0$ então

$$\bar{\xi}_t^{(\vartheta((k_0-1)\alpha N), (k_0-1)\alpha N)}(y) = \bar{\xi}_t^{(\vartheta^*, 0)}(y) \text{ para todo } y \in \Gamma_N, \forall t \geq k_0 \alpha N.$$

Pela estacionaridade do processo temos para $t \geq G\alpha N$ que

$$\xi_t^\nu = \bar{\xi}_t^{(\vartheta(G\alpha N), G\alpha N)}$$

e por construção

$$\bar{\xi}_t^{(\vartheta(G\alpha N), G\alpha N)}(y) = \bar{\xi}_t^{(\vartheta^*, 0)}(y) \quad \forall y \in \Gamma_N, \quad \forall t \geq G\alpha N.$$

Usando a Proposição (II.2.2) segue que

$$IP\{ X_0^\nu = 1 \} = IP\{ T_N^\nu(q) \leq \alpha N \} \leq \nu(A) + \nu(A^-)\lambda^*(N)\alpha N.$$

Portanto, $\lim_{N \rightarrow \infty} IP\{ X_0^\nu = 1 \} = 0$ e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IE[G] IP\{ X_0^\nu = 1 \} = 0 \quad \text{pelo resultado (II.2.8).}$$

Pela desigualdade de Markov temos

$$IP\{ G > IE[U_N(q) / X_0^\nu = 1] \} \leq \frac{IE[G]}{IE[U_N(q) / X_0^\nu = 1]} = IE[G] IP\{ X_0^\nu = 1 \} \rightarrow 0,$$

quando $N \rightarrow \infty$.

Escrevendo

$$T_N^\nu(q) = \inf\{ t \geq G\alpha N : \bar{\xi}_t^{(\zeta_{(G\alpha N)}, G\alpha N)} \in A(\Gamma_N, q) \},$$

segue por construção que para N suficientemente grande

$$(U_N(q) - 1)\alpha N \leq T_N^\nu(q) + G\alpha N \leq (U_N(q) + 1)\alpha N.$$

Temos pela propriedade de independência de intervalos disjuntos dos Processos Pontuais de Poisson que para N suficientemente grande

$$\begin{aligned} & (IE[U_N(q) / X_0^\nu = 1] - 1)\alpha N \\ & \leq IE[T_N^\nu(q) / X_0^\nu = 1] + IE[G / X_0^\nu = 1] \alpha N \\ & \leq (IE[U_N(q) / X_0^\nu = 1] + 1)\alpha N, \quad \text{isto é,} \\ & (IE[U_N(q) / X_0^\nu = 1] - 1)\alpha N \\ & \leq IE[T_N^\nu(q)] + IE[G] \alpha N \\ & \leq (IE[U_N(q) / X_0^\nu = 1] + 1)\alpha N. \end{aligned}$$

Segue que

$$1 - IP\{ X_0^\nu = 1 \} \leq IE[T_N^\nu(q)] IP\{ X_0^\nu = 1 \} (\alpha N)^{-1} + IE[G] IP\{ X_0^\nu = 1 \} \leq 1 + IP\{ X_0^\nu = 1 \},$$

e portanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{IE(T_N^\nu(q)) IP\{ X_0^\nu = 1 \}}{\alpha N} = 1,$$

o que conclui a demonstração. ■

COROLÁRIO II.2.9 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, existe $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tal que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[T_N^\nu(q)] \nu(A(\Gamma_N, q))}{\alpha N} \leq 1.$$

Dem. : A proposição (II.2.7) implica que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(T_N^\nu(q)) \nu(A(\Gamma_N, q))}{\alpha N} \leq 1,$$

pois

$$\mathbb{P}\{X_0^\nu = 1\} \geq \mathbb{P}\{\xi_0^\nu \in A(\Gamma_N, q)\} = \nu(A(\Gamma_N, q)).$$

Isto conclui a demonstração. ■

COROLÁRIO II.2.10 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, existe $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tal que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[T_N^\nu(q)] \nu(A^-)[1 + \alpha \lambda^*(N)N]}{\alpha N} \geq 1.$$

Dem. : Como na demonstração do Corolário (II.2.9), temos

$$\mathbb{P}\{X_0^\nu = 1\} = \mathbb{P}\{T_N^\nu(q) < \alpha N\} \leq \nu(A^-)[1 + \alpha \lambda^*(N)N],$$

o que conclui a demonstração. ■

PROPOSIÇÃO II.2.11 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, existem $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ e $\bar{N} = \bar{N}(d, \lambda, q) \in \mathbb{N}$, tais que para todo $N \geq \bar{N}$,

$$\frac{\alpha N \nu(A)}{[1 + \alpha N \lambda^*(N)] \nu(A^-)} \leq \nu(A) \lambda^*(N) \mathbb{E}[T_N^\nu(q)] \leq \alpha N \lambda^*(N).$$

Dem. : Segue dos Corolários (II.2.9) e (II.2.10). ■

II.3- Caso $q = 1$

Vamos estudar o tempo para ocorrer uma visita ao evento $A(\Gamma_N, 1)$ que iremos denotar por A_N . Nosso principal resultado nesta seção será estabelecer o seguinte Teorema :

TEOREMA Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Existem $C = C(d, \lambda) \in (0, \infty)$, $\bar{C}_1 = \bar{C}_1(d, \lambda) \in (0, 1)$, $\bar{N} \in \mathbb{N}$ e uma sequência $\gamma_N \in [\bar{C}_1, 2]$, tais que para todo $N \geq \bar{N}$

$$\sup_{t \geq 0} \left| \mathbb{P}(\gamma_N 2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-t\} \right| \leq C |\Gamma_N|^2 (\nu(A_N))^{\frac{1}{4}}.$$

Este Teorema será consequência de três Lemas e duas Proposições que iremos estabelecer no que segue. Para $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e $0 \leq s \leq t$ defina como na seção anterior o processo

$$X^\eta[s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{s \leq \theta_k^N < t, \xi_{\theta_k^N}^\eta \in A_N\}}.$$

LEMA II.3.1 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $N \geq 1$ e $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X^\nu[0, t)] = \nu(A_N) + 2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) t.$$

Dem. : Para $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e $t \geq 0$ temos

$$X^\eta[0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 \leq \theta_k^N < t, \xi_{\theta_k^N}^\eta \in A_N\}}.$$

Para todo $y \in \mathbb{Z}^d$ e $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x - y\| = 1$, e todo $s \geq 0$, defina os processos de contagem

$$\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0 < \nu_k^{x \rightarrow y} \leq s\}},$$

$$M^{x \rightarrow y}(s) = \mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s) - \lambda s,$$

e para $y \in \Gamma_N$ e cada $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x - y\| = 1$ seja a função $f_{x \rightarrow y} : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$f_{x \rightarrow y}(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\zeta(x)=1: \sum_{z \in \Gamma_N \setminus y} \zeta(z) = |\Gamma_N| - 1\}}.$$

A notação acima foi introduzida na demonstração do Lema (II.2.1), e repetida aqui para o caso $q = 1$ por clareza.

Temos que

$$X^\eta[0, t] = 1_{\{\xi_0^\eta \in A_N\}} + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s) ,$$

onde $\xi_{s-}^\eta = \lim_{r \uparrow s} \xi_r^\eta$.

Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^\nu[0, t]] &= \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\eta \in A_N\}}] + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[f_{x \rightarrow y}(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s)] \\ &= \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\eta \in A_N\}}] + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\xi_{s-}^{(\eta, t)} \in A_N\}} d\mathcal{N}^{x \leftarrow y}(s)] , \end{aligned}$$

onde $\mathcal{N}^{x \leftarrow y}$ é o processo de contagem com os símbolos $\rightarrow$ substituídos por $\leftarrow$ na construção do processo de contato. Pela autodualidade temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^\nu[0, t]] &= \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\eta \in A_N\}}] + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}} d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s)] \\ &= \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\eta \in A_N\}}] + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}} dM^{x \rightarrow y}(s)] \\ &\quad + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) \mathbb{E}[1_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}] \lambda ds . \end{aligned}$$

Como $1_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}$ é $\mathcal{F}(-\infty, s-)$ mensurável e $M^{x \rightarrow y}$ um martingal de média zero, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^\nu[0, t]] &= \nu(A_N) + \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t \nu(A_N) \lambda ds \\ &= \nu(A_N) + 2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) t . \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

PROPOSIÇÃO II.3.2 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $N \geq 1$ e $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\nu(A_N) T_N^\nu(1) > t) \geq 1 - \nu(A_N) - 2\lambda d |\Gamma_N| t .$$

Dem. : Pelo Lema (II.3.1) ,

$$\begin{aligned} IP(\nu(A_N)T_N^\nu(1) \leq t) &\leq IP(X^\nu[0, (\nu(A_N))^{-1} t] \geq 1) \\ &\leq IE(X^\nu[0, (\nu(A_N))^{-1} t]) \\ &= \nu(A_N) + 2\lambda d|\Gamma_N|t . \end{aligned}$$

■

LEMA II.3.3 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $N \geq 1$ e $u \geq s \geq 0$,

$$IP(\xi_s^\nu \in A_N, \xi_u^\nu \in A_N) \leq \nu(A_N) \left[\exp \{ -|\Gamma_N|(u-s) \} + \frac{2\lambda d}{|\Gamma_N|^2} \right] .$$

Dem. : Para $t \geq 0$ defina

$$d(t) = \sum_{x \in \Gamma_N} |1 - \xi_t^\nu(x)| .$$

Para $u \geq s \geq 0$, seja

$$D(s, u) = \max \{ d(t) : t \in (s, u) \} .$$

Temos

$$\begin{aligned} IP(\xi_s^\nu \in A_N, \xi_u^\nu \in A_N) &= IP(\xi_u^\nu \in A_N / \xi_s^\nu \in A_N) \nu(A_N) \\ &= \nu(A_N) \sum_{k=0}^{|\Gamma_N|} IP(\xi_u^\nu \in A_N, D(s, u) = k / \xi_s^\nu \in A_N) . \end{aligned}$$

Observando que a distribuição da variável aleatória $D(s, u)$ depende apenas da diferença $u - s$, temos que no caso $D(s, u) = 0$, a probabilidade condicional pode ser limitada superiormente pela não ocorrência do símbolo $\dagger$ no conjunto Γ_N em um intervalo de tempo superior a $u - s$, isto é,

$$IP(\xi_u^\nu \in A_N, D(s, u) = 0 / \xi_s^\nu \in A_N) \leq \exp \{ -|\Gamma_N|(u-s) \} .$$

No caso $D(s, u) \geq 1$, a probabilidade condicional pode ser limitada superiormente pela não ocorrência do símbolo $\dagger$ no conjunto Γ_N durante um intervalo de tempo (t, u) , onde $t > s$ é o tempo aleatório em que ocorre o último símbolo $\rightarrow$ efetivo, isto é, que ocorre o último retorno a A_N , no intervalo (s, u) . O evento de permanecer em A_N durante (t, u) é da ordem de $\exp \{ -|\Gamma_N|(u-t) \} \leq |\Gamma_N|^{-1}$. A ocorrência do símbolo $\rightarrow$ efetivo em

um y qualquer fixado de Γ_N antes de um símbolo $\dagger$ em algum $z \in \Gamma_N \setminus \{y\}$ é da ordem de $2\lambda d(2\lambda d + |\Gamma_N| - 1)^{-1}$ e portanto

$$\mathbb{P}(\xi_u^\nu \in A_N, D(s, u) \geq 1 \mid \xi_s^\nu \in A_N) \leq \frac{2\lambda d}{|\Gamma_N|(2\lambda d + |\Gamma_N| - 1)}.$$

Como $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d) \geq \frac{1}{2d-1}$, temos que

$$\frac{2\lambda d}{|\Gamma_N|(2\lambda d + |\Gamma_N| - 1)} \leq \frac{2\lambda d}{|\Gamma_N|^2}.$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(\xi_s^\nu \in A_N, \xi_u^\nu \in A_N) \leq \nu(A_N) [\exp\{-|\Gamma_N|(u-s)\} + \frac{2\lambda d}{|\Gamma_N|^2}],$$

o que conclui a demonstração. ■

PROPOSIÇÃO II.3.4 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $t \geq 0$, $N \geq 1$, existem $C_1 = C_1(d, \lambda) \in [1, \infty)$ e $C_2 = C_2(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tais que

$$\mathbb{P}[2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > t] \leq 1 - \frac{t^2}{\nu(A_N) + C_1 t + C_2 t^2}.$$

Dem. : Seja $\beta = \frac{t}{2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N)}$ e $X = X^\nu[0, \beta)$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$(E[X])^2 = [E[X \mathbf{1}_{\{X \geq 1\}}]]^2 \leq E[X^2] \mathbb{P}[X \geq 1]$$

e portanto

$$\mathbb{P}[X \geq 1] \geq \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}. \quad (\text{II.3.5})$$

Como X é soma de funções indicadoras, e usando a notação introduzida no Lema (II.3.1), temos para toda $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$[X^\eta[0, \beta)]^2 = X^\eta[0, \beta) + 2 \int_0^\beta \int_s^\beta \sum_{\substack{x \rightarrow y \\ y \in \Gamma_N}} \sum_{\substack{z \rightarrow w \\ w \in \Gamma_N}} f_{x \rightarrow y}(\xi_{u-}^\eta) f_{z \rightarrow w}(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^{z \rightarrow w}(u) d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([X^\eta[0, \beta)]^2) &= \mathbb{E}(X^\eta[0, \beta)) \\ &+ 2 \int_0^\beta \int_s^\beta \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(f_{x \rightarrow y}(\xi_{u-}^\eta) f_{z \rightarrow w}(\xi_{s-}^\eta) d\mathcal{N}^{z \rightarrow w}(u) d\mathcal{N}^{x \rightarrow y}(s)) . \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([X^\nu[0, \beta)]^2) &= \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta)) \\ &+ 2 \int_0^\beta \int_s^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^{(\eta, \beta)} \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^{(\eta, u)} \in A_N\}} d\mathcal{N}^{z \leftarrow w}(u) d\mathcal{N}^{x \leftarrow y}(s)) . \end{aligned}$$

Pela autodualidade do processo de contato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([X^\nu[0, \beta)]^2) &= \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta)) \\ &+ 2 \int_0^\beta \int_s^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}} dM^{z \leftarrow w}(u) d\mathcal{N}^{x \leftarrow y}(s)) \\ &+ 2 \int_0^\beta \int_s^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}} \lambda du d\mathcal{N}^{x \leftarrow y}(s)) . \end{aligned}$$

Como $\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \times \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}$ é uma função $\mathcal{F}(-\infty, u-)$ mensurável e $M^{x \leftarrow y}(u)$ um martingal de média zero, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([X^\nu[0, \beta)]^2) &= \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta)) \\ &+ 2\lambda \int_0^\beta \int_s^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}} du d\mathcal{N}^{x \leftarrow y}(s)) \\ &= \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta)) + 2\lambda \int_0^\beta \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(F(\zeta, s) \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}} d\mathcal{N}^{x \leftarrow y}(s)) , \end{aligned}$$

onde $F(\zeta, s) = \mathbb{E}[\int_s^\beta \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} du \mid \xi_s^\eta = \zeta]$.

Como $F(\zeta, s) \times \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}$ é $\mathcal{F}(-\infty, s-)$ mensurável, e $M^{x \rightarrow y}(s)$ um martingal de média zero temos para $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ dada no Corolário (I.3.4) que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([X^\nu[0, \beta])^2) &= \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta]) \\
&+ 2\lambda^2 \int_0^\beta \int_s^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}) du ds \\
&= \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta]) \\
&+ 2\lambda^2 \int_0^\beta \int_s^{s+\alpha N} \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}) du ds \\
&+ 2\lambda^2 \int_0^\beta \int_{s+\alpha N}^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}) du ds .
\end{aligned} \tag{II.3.6}$$

Pelo Lema (II.3.3) temos

$$\begin{aligned}
&2\lambda^2 \int_0^\beta \int_s^{s+\alpha N} \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}) du ds \\
&\leq 2\lambda^2 (|\Gamma_N|2d)^2 \int_0^\beta \int_s^{s+\alpha N} \nu(A_N) [\exp \{-|\Gamma_N|(u-s)\} + \frac{2\lambda d}{|\Gamma_N|^2}] dud s \\
&\leq 2(2\lambda d)^2 |\Gamma_N| \nu(A_N) \beta + 2(2\lambda d)^2 \nu(A_N) \int_0^\beta 2\lambda d \alpha N ds \\
&= 2(2\lambda d)^2 |\Gamma_N| \nu(A_N) \beta + 2(2\lambda d)^3 \nu(A_N) \alpha N \beta .
\end{aligned}$$

Pelo Corolário (I.3.4) existem $c = c(d, \lambda) \in (0, \infty)$ e $C = C(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned}
&2\lambda^2 \int_0^\beta \int_{s+\alpha N}^\beta \int \nu(d\eta) \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{w \in \Gamma_N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\xi_{u-}^\eta \in A_N\}} \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^\eta \in A_N\}}) du ds \\
&\leq 2\lambda^2 (2d|\Gamma_N|)^2 \int_0^\beta \int_{s+\alpha N}^\beta [C\nu(A_N) \exp \{-c(u-s)\} + (\nu(A_N))^2] dud s \\
&\leq 2C' (2\lambda d|\Gamma_N|)^2 \nu(A_N) \int_0^\beta \exp \{-c\alpha N\} ds + 2C (2\lambda d|\Gamma_N|)^2 (\nu(A_N))^2 \beta^2 ,
\end{aligned}$$

onde $C' = \frac{C}{c}$.

Segue da demonstração do Corolário (I.3.4) que $\alpha > \frac{\log |\Gamma_N|}{cN}$ e portanto (II.3.6) é limitada superiormente por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^\nu[0, \beta)) + 2(2\lambda d)^2 |\Gamma_N| \nu(A_N) \beta + 2(2\lambda d)^3 \nu(A_N) \alpha N \beta \\ + 2C'(2\lambda d)^2 |\Gamma_N| \nu(A_N) \beta + 2C(2\lambda d |\Gamma_N|)^2 (\nu(A_N))^2 \beta^2 . \end{aligned}$$

Substituindo o valor de β na expressão acima e aplicando o Lema (II.3.1) temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left[X^\nu\left[0, \frac{t}{2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N)}\right]\right]^2\right) &\leq \nu(A_N) + t + 2(2\lambda d)t \\ &\quad + \frac{2(2\lambda d)^2 \alpha N t}{|\Gamma_N|} + 2C'(2\lambda d)t + 2C(2\lambda d)t^2 \\ &\leq \nu(A_N) + t + 2(2\lambda d)[1 + 2\lambda d\alpha + C'] t + 2(2\lambda d)C t^2 . \end{aligned}$$

Segue que existem $C_1 = C_1(d, \lambda) \in [1, \infty)$ e $C_2 = C_2(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tais que

$$\mathbb{E}[X^2] \leq \nu(A_N) + C_1 t + C_2 t^2 .$$

Pelo Lema (II.3.1) temos que

$$\mathbb{P}[X \geq 1] \geq \frac{t^2}{\nu(A_N) + C_1 t + C_2 t^2} .$$

Observando que $\mathbb{P}[T_N^\nu(1) \leq \beta] \geq \mathbb{P}[X \geq 1]$, e aplicando (II.3.5), o resultado segue. ■

LEMA II.3.7 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(T_N^\nu(q) > s + t) \geq \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > s) \mathbb{P}(T_N^\nu(q) > t) .$$

Dem. : Temos que

$$\mathbb{P}(T_N^\nu(q) > s + t) = \int \nu(d\eta) \mathbb{P}(T_N^\eta(q) > s + t) .$$

Pela autodualidade e estacionaridade do processo de contato,

$$\mathbb{P}(T_N^\nu(q) > s + t) = \int \nu(d\eta) \mathbb{P}(T_N^\eta(q) > s) \mathbb{P}(T_N^\eta(q) > t) .$$

Como $f, g : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$f(\eta) = IP(T_N^\eta(q) > s) \quad \text{e} \quad g(\eta) = IP(T_N^\eta(q) > t)$$

são funções crescentes, o resultado segue da propriedade FKG da medida ν . ■

TEOREMA II.3.8 Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Existem $C = C(d, \lambda) \in (0, \infty)$, $\overline{C}_1 = \overline{C}_1(d, \lambda) \in (0, 1)$, $\overline{N} \in \mathbb{N}$ e uma sequência $\gamma_N \in [\overline{C}_1, 2]$, tais que para todo $N \geq \overline{N}$

$$\sup_{t \geq 0} \left| IP(\gamma_N 2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-t\} \right| \leq C |\Gamma_N|^2 (\nu(A_N))^{\frac{1}{4}}.$$

Dem. : Seja $r > 0$ e $\theta = \theta(r)$ a solução de

$$IP(2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > r) = \exp\{-\theta(r)\}. \quad (\text{II.3.9})$$

Fixe $t > 0$ e escreva $t = kr + v$, onde $0 \leq v = v(r) < r$, e $k = k(r) \geq 0$ é a parte inteira de $\frac{t}{r}$.

$$\text{Seja } \gamma = \gamma(r) = \frac{\theta(r)}{r}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} & \left| IP(2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-\gamma t\} \right| \\ & \leq \left| IP(2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-\theta k\} \right| + \left| \exp\{-\theta k\} - \exp\{-\gamma t\} \right|. \end{aligned} \quad (\text{II.3.10})$$

Queremos tomar r como função de N de tal forma que

- i) ambos os termos à direita da desigualdade (II.3.10) são limitados por alguma $f(N, r) \downarrow 0$ exponencialmente rápido e
- ii) a sequência $\gamma_N = \gamma(r(N))$ é uniformemente limitada acima e abaixo.

Primeiro vamos mostrar por indução em $k = \{3, 4, 5, \dots\}$ que para $\overline{C} = \overline{C}(d, \lambda) \in (0, \infty)$, dada no Lema (II.2.4), temos que

$$\begin{aligned} & \left| IP(2\lambda d |\Gamma_N| \nu(A_N) T_N^\nu(1) > kr) - \exp\{-\theta k\} \right| \leq \\ & f(N, r) [1 + \exp\{-\theta\} + \exp\{-2\theta\} + \dots + \exp\{-(k-2)\theta\}], \end{aligned}$$

onde, aplicando a Proposição (II.3.2),

$$f(N, r) = \overline{C} \sqrt{\nu(A_N)} [1 + \lambda^*(N)N + \lambda^*(N)(2r\lambda d |\Gamma_N|)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\Gamma_N|^{\frac{1}{2}}}{(2r\lambda d)^{\frac{1}{2}}}] .$$

Para todo $r > 0$, pela equação (II.3.9) e o Lema (II.2.4) temos,

$$\begin{aligned}
& |IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > 3r) - \exp\{-3\theta\}| \\
& \leq |IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > 2r + r) \\
& - IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > 2r)IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > r)| \\
& + |IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > 2r)IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > r) - \exp\{-3\theta\}| \\
& \leq f(N, r) + \exp\{-\theta\}|IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > 2r) - \exp\{-2\theta\}| \\
& \leq f(N, r) + \exp\{-\theta\}f(N, r) = f(N, r)[1 + \exp\{-\theta\}].
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& |IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > (k+1)r) - \exp\{-(k+1)\theta\}| \\
& \leq IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr + r) \\
& - IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr)IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > r)| \\
& + |IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr)IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > r) - \exp\{-(k+1)\theta\}| \\
& \leq f(N, r) + \exp\{-\theta\}|IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr) - \exp\{-k\theta\}|.
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução a expressão acima é limitada por

$$\begin{aligned}
& \leq f(N, r) + \exp\{-\theta\}|f(N, r)(1 + \exp\{-\theta\} + \dots + \exp\{-(k-2)\theta\})| \\
& = f(N, r)[1 + \exp\{-\theta\} + \dots + \exp\{-(k-1)\theta\}].
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $r \in (0, 1)$ temos

$$\begin{aligned}
& |IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr) - \exp\{-k\theta\}| \\
& \leq f(N, r)\left[\sum_{j=0}^{k-2} \exp\{-j\theta\}\right] \leq \frac{f(N, r)}{1 - \exp\{-\theta\}}.
\end{aligned} \tag{II.3.11}$$

Como $k = \llbracket \frac{t}{r} \rrbracket$, temos que

$$IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr) \geq IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > t).$$

Usando Lema (II.3.7), e observando que $v < r$, temos que

$$\begin{aligned}
& IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > t) \geq IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr) \\
& \times IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > v) \geq IP(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > kr) \exp\{-\theta\}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\mathbb{P}(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-\theta k\} \leq \frac{f(N, r)}{1 - \exp\{-\theta\}} + \exp\{-\theta k\}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-\theta k\} &\geq \exp\{-\theta k\}(\exp\{-\theta\} - 1) - \frac{f(N, r)\exp\{-\theta\}}{1 - \exp\{-\theta\}} \\ &\geq \exp\{-\theta k\}(\exp\{-\theta\} - 1) - \frac{f(N, r)}{1 - \exp\{-\theta\}}. \end{aligned}$$

É suficiente estudarmos $\theta < 1$, e neste caso temos $\frac{\theta}{2} \leq 1 - \exp\{-\theta\} \leq \theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-\theta k\}| &\leq \frac{f(N, r)}{1 - \exp\{-\theta\}} + \theta \\ &\leq \frac{2f(N, r)}{\theta} + \theta. \end{aligned}$$

Para a segunda parcela a direita de (II.3.10), observando que $\frac{t}{r} > k$, escrevemos

$$\begin{aligned} |\exp\{-\theta k\} - \exp\{-\gamma t\}| &\leq \exp\{\theta k\} |\exp\{-\theta k\} - \exp\{-\gamma t\}| \\ &= |1 - \exp\{-(\gamma t - \theta k)\}| \\ &\leq \frac{\theta}{r}(kr + v) - \theta k \\ &= v\frac{\theta}{r} \leq \theta. \end{aligned}$$

Segue que

$$|\mathbb{P}(2\lambda d|\Gamma_N|\nu(A_N)T_N^\nu(1) > t) - \exp\{-\gamma t\}| \leq 2\left[\frac{f(N, r)}{\theta} + \theta\right].$$

Pela Proposição (II.3.2) e a Proposição (II.3.4) temos que existem $C_1 = C_1(d, \lambda) \in [1, \infty)$ e $C_2 = C_2(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tais que

$$1 - \nu(A_N) - r \leq \exp\{-\theta\} \leq 1 - \frac{r^2}{\nu(A_N) + C_1 r + C_2 r^2}.$$

Portanto,

$$\frac{r}{\nu(A_N) + C_1 r + C_2 r^2} \leq \frac{\theta}{r} \leq \frac{\nu(A_N)}{r} + 1.$$

Escolhendo $r = \sqrt{\nu(A_N)}$, temos que

$$\frac{1}{(1 + C_2)\sqrt{\nu(A_N)} + C_1} \leq \frac{\theta}{r} \leq 2.$$

Tomando $\bar{C}_1 = [1 + C_1 + C_2]^{-1}$ e substituindo $r = \sqrt{\nu(A_N)}$ em $f(N, r)$, o resultado segue. ■

CAPÍTULO III

COMPORTAMENTO METAESTÁVEL PARA O PROCESSO DE CONTATO SUPERCRÍTICO MULTIDIMENSIONAL EM VOLUME FINITO

III.1 - Introdução

Dizemos que um sistema está em uma situação metaestável se ele permanece um tempo macroscopicamente longo em um estado aparentemente estacionário, e em particular, se suas estatísticas ao longo de suas trajetórias se estabilizam em torno deste estado, e se além disso, a cabo de um tempo imprevisível, isto é, assintoticamente exponencial, as estatísticas do processo tem uma quebra de coerência e o processo se estabiliza em torno de sua verdadeira medida de equilíbrio. O comportamento metaestável se caracteriza portanto pela existência de um equilíbrio aparente dado por uma medida que não a estacionária, e que após um tempo muito longo ocorre de fato a transição para o verdadeiro equilíbrio como consequência da ocorrência de uma *grande flutuação* devida a uma sucessão de eventos raros, sendo esta feita de modo abrupto e imprevisível. Esta abordagem de metaestabilidade foi introduzida no artigo [6].

Em [6] o comportamento metaestável é demonstrado para um modelo de Campo Médio e para o processo de contato unidimensional com valores de λ muito grande. Em sua tese de doutorado sob a orientação de A. Galves, R. Schonmann [15] (1984) entre outras coisas demonstrou que esse comportamento ocorria para qualquer $\lambda > \lambda_c$, onde λ_c é o parâmetro crítico do processo de contato unidimensional. Estes resultados usam argumentos do tipo *interseção de caminhos* que se aplicam para o caso em que as partículas estão em $\mathbb{Z}$, mas não é possível estendê-lo para dimensões maiores.

O projeto de estudar a metaestabilidade do processo de contato multidimensional passa por duas etapas. Primeiramente a caracterização da falta de memória do instante de transição e em seguida a determinação da estabilidade das médias temporais.

Técnicas recentes desenvolvidas em [2] permitem enunciar os Teoremas da Forma e da Convergência Completa para o processo de contato em todas dimensões. A estratégia básica é uma adaptação dos argumentos de Barsky, Grimmett e Newman [16] (1989), que apesar de não publicada é explicitada naquele artigo, isto é, sob a hipótese que o processo sobreviva com probabilidade positiva a partir de um único sítio inicial, eles demonstram a existência de uma grande região limitada de espaço-tempo que contém com alta probabilidade muitas cadeias de infecção com certas características, e através de um posicionamento conveniente de cópias destas regiões, eles constroem cadeias não limitadas. Este tipo de argumento, que pode ser chamado de técnica dinâmica de bloco, tem como vantagem em relação as outras até então usadas, a possibilidade de obter resultados para todas as dimensões.

Com estas técnicas [7] demonstrou recentemente que o tempo de morte do processo de contato supercrítico multidimensional em volume finito, devidamente reescalonado converge em lei para a distribuição exponencial, realizando a primeira etapa do projeto acima descrito.

Para enunciar o principal resultado deste capítulo, isto é, que as médias temporais se mantêm praticamente constantes sobre quase todas trajetórias até que uma grande flutuação ocorra, considere $\{ \bar{\xi}_\Gamma^\eta(t) : t \geq 0 \}$ o processo de contato com condição inicial $\eta \in \{0,1\}^\Gamma$, restrito ao conjunto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$, isto é, tal que os Processos Pontuais de Poisson em Γ^c não são considerados na evolução do processo.

Seja $\bar{T}_{\Gamma_N}^\eta = \inf\{ t \geq 0 : \bar{\xi}_{\Gamma_N}^\eta(t) = \emptyset \}$ o tempo da primeira (e última) visita do processo $\bar{\xi}_{\Gamma_N}^\eta$ ao estado absorvente, isto é, do processo restrito a $\Gamma_N = \{ -N, \dots, N \}^d$ tal que $\bar{\xi}_{\Gamma_N}^\eta(0) = \eta$.

Uma função $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita cilíndrica se houver um conjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tal que $f(\eta) = f(\eta \cap \Lambda)$ para toda configuração $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. O menor conjunto de $\mathbb{Z}^d$ com esta propriedade é dito o suporte de f e será denotado por $\Lambda(f)$.

Dado um número real $b > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e f cilíndrica, as médias temporais sobre trajetórias de f com respeito ao processo $\{\bar{\xi}_{\Gamma_N}^\eta(t) : t \geq 0\}$ serão representadas pelo processo

a valor medida $\{A_b^N(s, f) : s \geq 0\}$ dado por :

$$A_b^N(s, f) = \frac{1}{b} \int_s^{s+b} f(\bar{\xi}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}(t)) dt.$$

Neste capítulo iremos mostrar que :

TEOREMA Para todo $d \geq 1$, $\lambda > \lambda_c(d)$ e f cilíndrica, existe uma sequência crescente de números reais positivos $\{b(N, d), N \geq 1\}$ tal que o processo $\{A_{b(N, d)}^N(s, \mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}], f) : s \geq 0\}$ converge em lei, quando $N \rightarrow \infty$, para um processo Markoviano de salto $\{A(s) : s \geq 0\}$ definido por :

$$A(s) = \begin{cases} \nu & \text{se } s < T \\ \delta_\emptyset & \text{se } s > T, \end{cases}$$

onde T é um tempo aleatório cuja distribuição é exponencial de média um, e ν a medida invariante extremal não-trivial do processo de contato d -dimensional.

Este Teorema irá seguir dos resultados (III.2.1) e (III.3.2) que iremos apresentar. O resultado (III.3.2) é referido na literatura como a propriedade de *Termalização*, e a nossa contribuição será estabelecer sua demonstração para todo $d \geq 1$. O resultados de [2] permitem seguir os passos de [6] e [15] para estabelecer o resultado em dimensão arbitrária.

III.2 - Resultados Anteriores

Utilizando técnicas desenvolvidas em R. Durrett e R. Schonmann [17] (1988) , recentemente foi demonstrado em [7] o seguinte resultado :

TEOREMA III.2.1 Para todo $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$,

$$\frac{\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}}{\mathbb{E}[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{EXP}(1) \quad \text{quando } N \longrightarrow \infty.$$

Este Teorema foi obtido a partir dos resultados provados em [2] , aliado aos métodos de percolação orientada que podem ser encontrados em R. Durrett [18] (1984).

Para cada $y \in \mathbb{Z}^d$, τ_y será um operador de translação sobre funções cilíndricas :

$$(\tau_y f)(\eta) = f(\eta^{(y)}) , \quad \eta^{(y)}(x) = \eta(x - y).$$

Dados f cilíndrica e $N, L \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_{\Lambda(f),N}(L) = \{ y \in \mathbb{Z}^d : \Lambda(\tau_y f) \subset [-N + L, N - L]^d \cap \mathbb{Z}^d \},$$

e seja $\mathbb{E}_\nu(f) = \int f d\nu$ a esperança de f com respeito a ν .

III.3 - Estabilidade da Médias Temporais

LEMA III.3.1 Para todo $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2d}}{\mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} = 0.$$

Dem. : A proposição (2.1) de [6], isto é, que para N suficientemente grande existe uma constante $a \in (0, 1)$, independente de N , tal que

$$\mathbb{P}(\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N} \leq \exp \{aN\}) \leq \exp \{-aN\},$$

permite concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N} \leq (2N+1)^{2d}) &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N} \leq \exp \{aN\}) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \{-aN\} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Teorema (III.2.1) o resultado segue. ■

TEOREMA III.3.2 Para todo $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$, existe uma sequência crescente de números positivos $\{b(N, d), N \geq 1\}$ tal que :

i) $\frac{b(N, d)}{\mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$

ii) Para todo $\epsilon > 0$ e f cilíndrica, existe $L = L(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\max_{l \in \mathbb{Z}, 0 \leq l < F_N - 1} \max_{y \in I_{\Lambda(f), N}(L)} |A_{b(N, d)}^N(l b(N, d), \tau_y f) - \mathbb{E}_\nu(f)| > \epsilon\right) \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$, onde $F_N = \max\{l \in \mathbb{N} : l b(N, d) \leq \bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}\}$.

Dem. : Como $\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}$ é quase certamente finita, para todo real positivo $b(N, d)$, F_N é uma variável aleatória bem definida e quase certamente finita com valores em $\mathbb{N}$.

Se $b(N, d)$ verificar a condição (i) acima, segue do Teorema (III.2.1) que

$$\mathbb{P}[F_N = 0] \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Seja, então $(b(N, d), N \geq 1)$ uma sequência satisfazendo (i). Dado $\epsilon > 0$, f cilíndrica, para $k \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{Z}^d$, sejam os eventos

$$B_{k, y}^N = [|A_{b(N, d)}^N(k b(N, d), \tau_y f) - \mathbb{E}_\nu(f)| > \epsilon].$$

Então, para todo $m \geq 1$, $L \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left[F_N \geq 1, \bigcap_{1 \leq k < F_N} \bigcap_{y \in I_{\Lambda(f), N}(L)} (B_{k,y}^N)^c \right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\mathbb{P}[F_N = j] - \mathbb{P} \left[\bigcup_{k=1}^{j-1} \bigcup_{y \in I_{\Lambda(f), N}(L)} B_{k,y}^N, F_N = j \right] \right] \\
&\geq \mathbb{P}[1 \leq F_N \leq m] - \sum_{j=1}^m \mathbb{P} \left[\bigcup_{k=1}^{j-1} \bigcup_{y \in I_{\Lambda(f), N}(L)} B_{k,y}^N, F_N = j \right] \\
&\geq \mathbb{P}[1 \leq F_N \leq m] - \sum_{j=1}^m j (2N+1)^d \max_{1 \leq k < j} \max_{y \in I_{\Lambda(f), N}(L)} \mathbb{P}[B_{k,y}^N, F_N = j] \\
&\geq \mathbb{P}[1 \leq F_N \leq m] - m^2 (2N+1)^d \max_{j \geq 1} \max_{1 \leq k < j} \max_{y \in I_{\Lambda(f), N}(L)} \mathbb{P}[B_{k,y}^N, F_N = j] .
\end{aligned} \tag{III.3.3}$$

Para $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, seja K_t^η o conjunto dos sítios acoplados até o instante t , definido por

$$K_t^\eta = \bigcup_{x \in \eta} \{ \xi_t^x \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c \} = \xi_t^\eta \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c.$$

Temos que para $y \in I_{\Lambda(f), N}(L)$ o evento

$$[K_t^z \supset [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d]$$

para algum $z \in [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, implica (está contido em)

$$[\tau_y f(\bar{\xi}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}(t)) = \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d})].$$

Escolhendo $L = L(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\exists z \in [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d$ com $\mathbb{P}\{\tau^z = \infty\} \geq 1 - \epsilon$, temos para $t < \bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}$, $k < j$, $y \in I_{\Lambda(f), N}(L)$ e $N > L$ que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[B_{k,y}^N, F_N = j] = \mathbb{P}[|A_{b(N,d)}^N(k, b(N,d), \tau_y f) - \mathbb{E}_\nu(f)| > \epsilon, F_N = j] \\
&\leq \mathbb{P}[|A_{b(N,d)}^N(k, b(N,d), \tau_y f) - \frac{1}{b(N,d)} \int_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt| > \frac{\epsilon}{2} \text{ ou} \\
&| \frac{1}{b(N,d)} \int_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt - \mathbb{E}_\nu(f) | > \frac{\epsilon}{2}, F_N = j] .
\end{aligned} \tag{III.3.4}$$

Temos, trajetória por trajetória, em $[k_N = j]$, se $k < j$, $y \in I_{\Lambda(f),N}(L)$ e $N > L$,

$$\begin{aligned} & | A_{b(N,d)}^N(k, b(N,d), \tau_y f) - \frac{1}{b(N,d)} \int_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt | \\ & \leq \frac{2 \|f\|}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbf{1}_{\{\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z\}} dt, \end{aligned}$$

onde $\|f\| = \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^d} f(\eta)$.

Definindo os eventos

$$\begin{aligned} C_{k,y}^N &= [| \frac{1}{b(N,d)} \int_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt - \mathbb{E}_\nu(f) | > \frac{\epsilon}{2}] \\ D_k^{N,L} &= [\frac{\|f\|}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbf{1}_{\{\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z\}} dt > \frac{\epsilon}{4}] \\ C_k^N &= C_{k,0}^N \end{aligned}$$

e notando que $\mathbb{P}[C_{k,y}^N]$ independe de y , temos que

$$\mathbb{P}[B_{k,y}^N, F_N = j] \leq \mathbb{P}[C_k^N] + \mathbb{P}[D_k^{N,L}].$$

A desigualdade (III.3.3) nos assegura que a parte (ii) da tese estará provada se a parte (i) estiver e pudermos encontrar uma sequência $\{m(N,d), N \geq 1\}$ tal que :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \mathbb{P}[1 \leq F_N \leq m(N,d)] \longrightarrow 1 \\ \text{b) } & m^2(N,d) (2N+1)^d (\max_{k \geq 1} \mathbb{P}[C_k^N] + \max_{k \geq 1} \mathbb{P}[D_k^{N,L}]) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $N \longrightarrow \infty$.

A condição (a) pode, ainda, ser escrita como

$$\mathbb{P}[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N} \leq m(N,d) b(N,d)] \longrightarrow 1 \quad \text{quando } N \longrightarrow \infty$$

e, em vista do Teorema (III.2.1), como

$$\frac{m(N,d) b(N,d)}{\mathbb{E}[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \longrightarrow \infty \quad \text{quando } N \longrightarrow \infty.$$

Usando a notação

$$\psi_L(b(N, d)) = \max_{k \geq 1} \mathbb{P}[C_k^N] + \max_{k \geq 1} \mathbb{P}[D_k^{N, L}]$$

e incluindo a parte (i) do Teorema, o nosso problema se resume em encontrar $L \in \mathbb{N}$ e duas sequências que satisfaçam simultaneamente, quando $N \rightarrow \infty$:

$$a) \frac{m(N, d) b(N, d)}{\mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \rightarrow \infty$$

$$b) m^2(N, d) (2N + 1)^d \psi_L(b(N, d)) \rightarrow 0$$

$$c) \frac{b(N, d)}{\mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \rightarrow 0 .$$

Se mostrarmos que $\psi_L(b(N, d)) \leq \frac{\bar{C}|\Gamma_N|}{b(N, d)}$ onde $\bar{C} = \bar{C}(\epsilon, f)$ é uma constante positiva, teremos pelo Lema (III.3.1) que

$$m(N, d) = \left[\frac{\mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]}{(2N + 1)^{2d}} \right]^{\frac{1}{5}}$$

$$b(N, d) = \left(\mathbb{E}[\bar{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}] \right)^{\frac{9}{10}} (2N + 1)^{\frac{d}{5}}$$

são soluções do nosso problema.

A proposição que segue, conclui a demonstração. ■

PROPOSIÇÃO III.3.5 Para todo $d \geq 1$, $\lambda > \lambda_c(d)$, $\epsilon > 0$, e f cilíndrica, existem $L = L(\epsilon, f) > 0$, $\bar{N} = \bar{N}(\epsilon, f) > L$ e $\bar{C} = \bar{C}(\epsilon, f)$, tais que $\psi_L(b(N, d)) \leq \frac{\bar{C}|\Gamma_N|}{b(N, d)}$, para todo $N \geq \bar{N}$.

Dem. : Inicialmente vamos mostrar que existe $C_1 = C_1(\epsilon, f)$ constante positiva tal que

$$\max_{k \geq 1} \mathbb{P}(C_k^N) \leq \frac{C_1 |\Gamma_N|}{b(N, d)}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, seja

$$X_k^b = \left| \frac{1}{b} \int_{kb}^{(k+1)b} f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt - \mathbb{E}_\nu(f) \right|.$$

Temos para todo $k \geq 1$ e $b(N, d) > \alpha N$, onde $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$ é dada no Lema (I.3.3) (Básico) que

$$\mathbb{E}[X_k^{b(N, d)}] \leq \frac{2\|f\|}{b(N, d)} \int_{kb(N, d)}^{(k+1)b(N, d)} \mathbb{P}(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x) \neq \xi_t^\nu(x) \text{ para algum } x \in \Lambda(f)) dt.$$

Aplicando o Lema (I.3.3), segue que existem $\bar{c} = \bar{c}(d, \lambda) \in (0, \infty)$ e $\bar{C} = \bar{C}(d, \lambda) \in [1, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_k^{b(N,d)}] &\leq \frac{2\|f\|}{b(N,d)} \int_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \bar{C}|\Gamma_N| \exp\{-\bar{c}t\} dt \\ &\leq \frac{2\|f\|\bar{C}|\Gamma_N|}{b(N,d)\bar{c}} \exp\{-k\bar{c}b(N,d)\} \\ &\leq \frac{2\bar{C}'\|f\||\Gamma_N|}{b(N,d)}, \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$, onde $\bar{C}' = \frac{\bar{C}}{\bar{c}}$.

Portanto, pela desigualdade de Markov,

$$\begin{aligned} \max_{k \geq 1} \mathbb{P}(C_k^N) &= \max_{k \geq 1} \mathbb{P}(X_k^{b(N,d)} > \frac{\epsilon}{2}) \\ &\leq \max_{k \geq 1} \frac{2\mathbb{E}[X_k^{b(N,d)}]}{\epsilon} \\ &\leq \frac{4\bar{C}'\|f\||\Gamma_N|}{\epsilon b(N,d)} = \frac{C_1(\epsilon, f)|\Gamma_N|}{b(N,d)}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(\epsilon, f) = \frac{4\bar{C}'\|f\|}{\epsilon}$.

Analogamente, para controlarmos $D_k^{N,L}$, escolha L suficientemente grande tal que existe $z \in [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, com $\tau^z = \infty$.

Para $k \in \mathbb{N}$ seja

$$Y_k^{b,L} = \frac{1}{b} \int_0^b \mathbf{1}_{\{\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z, \tau^z = \infty\}} dt.$$

Segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] &= \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbb{P}(\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z, \tau^z = \infty) dt \\ &= \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^z, \tau^z = \infty\}\right) dt. \end{aligned}$$

Pela invariância por translações do processo de contato,

$$\mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] = \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in z + \Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^0, \tau^0 = \infty\}\right) dt.$$

Temos para alguma $a \in (0, \infty)$ constante fixada que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] &= \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}} \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in z + \Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^0, \tau^0 = \infty\}\right) dt \\ &\quad + \frac{1}{b(N,d)} \int_{\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}}^{b(N,d)} \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in z + \Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^0, \tau^0 = \infty\}\right) dt. \end{aligned}$$

Pelo resultado (I.2.5) existem $a \in (0, \infty)$, $\bar{c} \in (0, \infty)$, e $\bar{C} \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] &\leq \frac{|\Gamma_{N-L}|}{a b(N,d)} + \frac{|\Gamma_{N-L}|}{b(N,d)} \int_{\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}}^{b(N,d)} \bar{C} \exp\{-\bar{c} t\} dt \\ &\leq \frac{|\Gamma_{N-L}|}{a b(N,d)} + \frac{\bar{C} |\Gamma_N|}{\bar{c} b(N,d)} \exp\left\{-\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}\right\} \\ &\leq \frac{|\Gamma_N|}{a b(N,d)} + \frac{\bar{C} |\Gamma_N|}{\bar{c} b(N,d)} = \frac{\bar{C}_2 |\Gamma_N|}{b(N,d)}, \end{aligned}$$

onde $\bar{C}_2 = \max\{\frac{1}{a}, \frac{\bar{C}}{\bar{c}}\}$.

Segue que

$$\begin{aligned} \max_{k \geq 1} \mathbb{P}(D_k^{N,L}) &= \max_{k \geq 1} \mathbb{P}(\|f\| Y_k^{b(N,d),L} > \frac{\epsilon}{4}) \\ &\leq \max_{k \geq 1} \frac{\mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] 4 \|f\|}{\epsilon} \\ &\leq \frac{C_2(\epsilon, f) |\Gamma_N|}{b(N,d)}, \end{aligned}$$

onde $C_2(\epsilon, f) = \frac{\bar{C}_2 4 \|f\|}{\epsilon}$.

Tomando $\bar{C} = \max\{C_1, C_2\}$ o resultado segue. ■

Bibliografia

- [1] Harris, *Contact Interaction on a Lattice*, Ann. Prob., vol 2, 969-988, 1974.
- [2] C. Bezuidenhout and G. Grimmett, *The Critical Contact Process Dies Out*, The Annals of Probability, vol 18, N^o4, 1462-1482, 1990.
- [3] J. L. Lebowitz and R. H. Schonmann, *On the Asymptotics of Occurrence Times of Rare Events for Stochastic Spin Systems*, Journal of Stat. Physics, vol 48, N^{os} 3/4, 727-751, 1987.
- [4] A. Galves, F. Martinelli and E. Olivieri, *Large-Density Fluctuations for the One-Dimensional Supercritical Contact Process*, Journal of Stat. Physics, vol 55, N^{os} 3/4, 639-648, 1989.
- [5] P. Ferrari, A. Galves and T. Liggett, *Exponential Waiting time for filling a large interval in the symmetric simple exclusion process*, Preprint, 1994.
- [6] M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri and M. E. Vares, *Metastable Behavior of Stochastic Dynamics : A Pathwise Approach*, Journal of Stat. Phys., vol 35, 603-634, 1984.
- [7] T. S. Mountford, *A Metastable Result for the Finite Multidimensional Contact Process*, Canad. Math. Bull., Vol 36, 216-226, 1993.
- [8] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag New York Inc., 1985.
- [9] R. Holley and T. M. Liggett, *The Survival of Contact Processes*, Ann. Prob., vol 6, 198-206, 1978.
- [10] Harris, *Additive Set-Valued Markov Processes and Graphical Methods*, Ann. Prob., vol 6, 355-378, 1978.
- [11] R. Durrett and D. Griffeath, *Contact Process in Several Dimensions*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol 59, 535-552, 1982.
- [12] R. Durrett, *The Contact Process, 1974-1989*, Lectures in Applied Mathematics, vol 27, 1-29, 1991.
- [13] J. L. Lebowitz and R. H. Schonmann, *Pseudo-Free Energies and Large Deviations for Non Gibbsian FKG Measures*, Probab. Th. Rel. Fields, vol 77, 49-64, 1988.
- [14] M. Kac, *On the Notion of Recurrence in Discrete Stochastic Processes*, Bull. Amer. Math. Soc., vol 53, 1002-1010, 1947.
- [15] R. H. Schonmann, *Metaestabilidade para o Processo de Contato : Extensão dos Teoremas Básicos e Estudo das Flutuações*, Tese - IME-USP, 1984.

- [16] D. J. Barsky, G. R. Grimmett and C. M. Newman, *Percolation in Half-Spaces : Equality of Critical Probabilities and Continuity of Percolation Probability*, Unpublished, 1989.
- [17] R. Durrett and R. Schonmann, *The Contact Process on a finite set II*, The Annals of Probability, vol 16, 1570 - 1583, 1988.
- [18] R. Durrett, *Oriented percolation in two dimensions*, The Annals of Probability, vol 12, 999 - 1040, 1984.

Adilson Simonis

asimonis@ime.usp.br

Instituto de Matemática e Estatística - USP
Brasil