**Comparação de Estimadores
do Parâmetro de Longa Memória
do Modelo ARFIMA(p,d,q)**

Cristina Baptista Moura

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração : **Séries Temporais**
Orientador : **Profa. Dra. Clélia M. C. Toloi**

- São Paulo, 20 de Dezembro de 1997-

**Comparação de Estimadores
do Parâmetro de Longa Memória
do Modelo ARFIMA(p,d,q)**

Cristina Baptista Moura

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e apresentada por Cristina Baptista Moura e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 15 de Janeiro de 1998

Banca Examinadora :

- Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Toloi (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin - IME-USP
- Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves - FEA-USP

*à minha família e principalmente ao meu avô que mesmo não estando mais entre nós
sempre esteve ao meu lado*

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores deste Instituto por tudo que pude aprender através deles. Agradeço à Clélia por seu profissionalismo e seu lado humano. Aos amigos novos que ganhei aqui em São Paulo. Eliana por sua ternura, Erika pela infinita tranquilidade, Patrícia e Flávio pelo exemplo de companheirismo, Péricles pelo sua eterna alegria, Aldy pelo jeito mineiro, ou seja, acolhedor, Audrey, Francisco e Rafael pelo ambiente familiar que trouxeram a nós. Um agradecimento especial devo à Liane com quem divido tantos espaços e histórias. À Renata, amiga do Rio que se aventurou comigo a fazer o mestrado aqui, agradeço por sua amizade. Não posso esquecer dos amigos maravilhosos do Rio, principalmente Simone e Henry, que mesmo de longe me ajudaram muito. Um agradecimento super especial ao Francisco (Fran), por sua eterna paciência e apoio, fazendo com que tudo fique fácil. Pelo exemplo e amizade em todos os momentos agradeço por ter uma Mãe tão especial. Entretanto, devo agradecer em primeiro lugar à Deus por ter me envolvido de pessoas tão especiais.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo comparar seis métodos de estimação do parâmetro de longa memória do modelo ARFIMA(p,d,q), onde essa comparação é feita através de simulações e do ajuste desse modelo a uma série hidrológica. Os métodos utilizados foram: método da autocorrelação de ordem 1 (Gupta & Kumar (1991)), método da autocorrelação generalizado (Gupta & Ji (1992)), método do periodograma (Geweke & Porter-Hudak (1983)), método do periodograma suavizado (Reisen (1994)), método de máxima verossimilhança (Fox & Taqqu (1986)) e o método das ondaletas (Jensen (1996)). Foram simuladas 1000 amostras de três tamanhos diferentes, 128, 256 e 512, para os modelos ARFIMA(0,d,0), ARFIMA(1,d,0) e ARFIMA(0,d,1). Quanto à série hidrológica, comparamos os estimadores através do ajuste de modelos ARFIMA(p,d,q) à série, utilizando os seis métodos de estimação. Também foi feita a previsão das doze últimas observações da série para comparar os estimadores através do poder de previsão dos mesmos. Além disso, ajustamos outros modelos mais tradicionais à essa série para compará-los ao modelo de longa memória.

Abstract

The objective of this work is to compare six estimation methods of the long memory parameter of the ARFIMA(p,d,q) model. This comparison is done by sample simulations of this model and by the adjustment of this model to a hydrological series. The methods used in this comparison were: method of auto-correlation at lag one (Gupta & Kumar (1991)), method of generalized auto-correlation (Gupta & Ji (1992)), method of the periodogram (Geweke & Porter-Hudak (1983)), method of the smoothed periodogram (Reisen (1994)), method of the maximum likelihood (Fox & Taqqu (1986)) and the method of the wavelet (Jensen (1996)). We simulated 1000 samples of three different sizes (128, 256 and 512) to three ARFIMA(p,d,q) models: ARFIMA(0,d,0), ARFIMA(1,d,0) and ARFIMA(0,d,1). The hydrological series was used in the adjustment of the ARFIMA(p,d,q) models, to the six estimation methods referred mentioned before, with the objective to compare these estimators. We also made the forecasting to the last twelve observations of the series to compare the estimators by the forecasting power of them. The adjustment of traditional models like ARIMA(p,d,q) and AR(p) was made to compare them to the long memory model.

Conteúdo

Capítulo 1	Introdução	1
Capítulo 2	Definições e Resultados	4
Capítulo 3	Modelos Lineares	14
3.1	Modelos $ARMA(p, q)$	16
3.2	Modelos $ARIMA(p, d, q)$	18
Capítulo 4	Modelos de Longa Memória	22
4.1	Introdução	22
4.2	Modelo ARIMA Fracionário (ARFIMA)	25
Capítulo 5	Estimação dos Parâmetros em Modelos ARFIMA(p,d,q)	33
5.1	Métodos de Estimação de d	33
5.1.1	Introdução	33
5.1.2	Método da Função de Autocorrelação de Ordem 1	34
5.1.3	Método da Função de Autocorrelação Generalizado	35
5.1.4	Método da Função de Autocorrelação Parcial	37
5.1.5	Método da Regressão Utilizando o Periodograma	37

5.1.6	Método de Regressão Utilizando o Periodograma Suavizado	42
5.1.7	Método de Máxima Verossimilhança	44
5.1.8	Método de Ondaletas	47
5.2	Algoritmo para ajustamento de um modelo ARFIMA(p,d,q)	50
Capítulo 6	Simulações	53
6.1	Resultados para os modelos ARFIMA(0,d,0)	55
6.2	Resultados para os modelos ARFIMA(1,d,0)	66
6.3	Resultados para o modelo ARFIMA(0,d,1)	77
Capítulo 7	Aplicação a uma série real	87
7.1	Série de Vazão do Rio São Marcos	87
7.1.1	Ajustamento dos modelos	90
7.1.2	Comparação dos modelos	103
Capítulo 8	Conclusão	108
	Bibliografia	111
	Apêndice A Programas para estimação dos parâmetros	114
	Apêndice B Programa para previsão do modelo $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$	127
	Apêndice C Logarítmo da série hidrológica	128

Capítulo 1

Introdução

No estudo de Séries Temporais encontramos vários modelos que se aplicam aos mais diferentes casos e um dos modelos mais utilizados é o $ARIMA(p, d, q)$, onde d é o parâmetro de diferença inteira da série, que tem como objetivo transformar uma série não estacionária em estacionária. Além disso, esse modelo supõe que as observações distanciadas por um longo intervalo no tempo são independentes, ou seja, supõem independência assintótica entre as observações. Entretanto, na prática, encontramos séries temporais que não apresentam essa independência e a esse tipo de série denominamos de *série de longa memória*. Para modelar esse tipo de série desenvolveu-se o modelo $ARIMA(p, d, q)$ fracionário, ou $ARFIMA(p, d, q)$, que é uma generalização do modelo $ARIMA(p, d, q)$, pois no novo modelo o parâmetro d assume valores fracionários.

O primeiro modelo desenvolvido para ajustar séries de longa memória foi apresentado por Mandelbrot & Ness (1968) e chamado de *modelo de ruído Gaussiano fracionário*. Granger & Joyeux (1980) e Hosking (1981) demonstram que o processo $ARIMA(0, d, 0)$ fracionário apresenta o mesmo comportamento de longa memória do processo de ruído Gaussiano fracionário. Geweke & Porter Hudak (1983) mostram a equivalência desses dois modelos. A partir da teoria desenvolvida para o modelo $ARFIMA(0, d, 0)$ sua generalização para o modelo $ARFIMA(p, d, q)$ é imediata. Granger & Joyeux (1980) e Hosking (1981) demonstram todas as propriedades desses modelos, que mais tarde são utilizadas no desenvolvimento de estimadores do parâmetro d .

O primeiro estimador de d , desenvolvido por Geweke & Porter-Hudak (1983), foi baseado

na função de densidade espectral de um processo $ARFIMA(p,d,q)$ e utiliza o periodograma simples como estimador desta função. Reisen (1994) demonstra que utilizar o periodograma suavizado como estimador da função de densidade espectral produz um estimador mais eficiente do parâmetro d , surgindo assim um novo estimador. O mais simples dos estimadores foi desenvolvido por Gupta e Kumar (1991) e é baseado na função de autocorrelação de um processo $ARFIMA(0,d,0)$. Este estimador utiliza apenas a autocorrelação amostral de ordem 1 para estimar d . Gupta & Ji (1992) apresentaram uma generalização deste estimador, onde são utilizadas várias autocorrelações amostrais da série. Vinod (1991) desenvolveu um estimador que se baseia na função de autocorrelação parcial do processo $ARFIMA(p,d,q)$ e utiliza autocorrelações parciais amostrais da série para estimar d . O estimador de máxima verossimilhança foi desenvolvido por Fox & Taquq (1986). O mais recente dos estimadores se baseia na teoria dos coeficientes de "wavelets" e foi desenvolvido por Jensen (1996).

Este trabalho tem como objetivo comparar esses estimadores através de simulações e de ajustes de uma série hidrológica com claro comportamento de longa memória. Nas simulações procuramos apresentar várias situações diferentes para que se pudesse comparar os estimadores em relação ao tamanho da amostra, aos valores do parâmetro d e a algumas possibilidades de modelos $ARFIMA(p,d,q)$. Ao utilizarmos a série real podemos testar o ajuste e o poder de previsão desses modelos e compará-los com modelos mais tradicionais como o $AR(p)$ e $ARIMA(p,d,q)$.

No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados e definições que serão utilizados e citados nos capítulos posteriores.

O Capítulo 3 contém um resumo das propriedades e da teoria dos modelos $ARIMA(p,d,q)$, com o objetivo de apresentar as informações necessárias para o entendimento do Capítulo 4 que apresenta a teoria dos modelos $ARFIMA(p,d,q)$ e suas propriedades.

O Capítulo 5 descreve todos os métodos de estimação do parâmetro d do modelo $ARFIMA(p,d,q)$, explicando suas origens e apresentando suas propriedades.

Os resultados das simulações são apresentados no Capítulo 6, onde são feitas as comparações dos estimadores para três modelos: $ARFIMA(0,d,0)$, $ARFIMA(1,d,0)$ e $ARFIMA(0,d,1)$.

A aplicação desses modelos à série hidrológica é apresentada no Capítulo 7, onde comparamos os modelos $ARFIMA(p,d,q)$ ajustados com os modelos $AR(p)$ e $ARIMA(p,d,q)$,

também ajustados à série.

Capítulo 2

Definições e Resultados

Definição 2.1 Um *processo estocástico* $\{X_t\} = \{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ é uma família de variáveis aleatórias definidas num espaço de probabilidade (ω, Λ, P) e indexadas pelos elementos de um conjunto de parâmetros T .

Na realidade, um processo estocástico é uma função de dois argumentos, $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Para cada $t \in T$, a função $X(t, \cdot)$ é mensurável relativamente a Ω . Por outro lado, para cada $\omega \in \Omega$, fixado, obteremos uma função $X(\cdot, \omega)$ de $t : T \mapsto \mathbb{R}$, que é chamada *trajetória, realização, função amostral do processo ou série temporal*.

Definição 2.2 Dado um processo estocástico $\{X_t\}$, definimos suas distribuições finito-dimensionais por

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \text{Prob}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \quad (2.1)$$

para todo $n \geq 1$ e $t_1, \dots, t_n \in T$.

Definição 2.3 As funções *média* e *autocovariância* de um processo $\{X_t\}$ são dadas por

$$E(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x; t) = \mu_x(t) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{t_1}, X_{t_2}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu_x(t_1)][x_2 - \mu_x(t_2)] dF[x_1, x_2; t_1, t_2] \\ &= E[X_{t_1} X_{t_2}] - E[X_{t_1}] E[X_{t_2}] \\ &= \gamma_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em particular, se $t_1 = t_2 = t$, temos a variância do processo

$$\text{Var}(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_x(t)]^2 dF(x; t) = E[X_t^2] - E^2[X_t] = \gamma_x(t, t). \quad (2.4)$$

Definição 2.4 Um processo estocástico $\{X_t\}$ é *estritamente estacionário* se todas as distribuições finito-dimensionais (2.1) permanecem as mesmas sob uma translação do tempo, ou seja,

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n),$$

para quaisquer $t_1, \dots, t_n; \tau \in T$.

Definição 2.5 Um processo estocástico $\{X_t\}$ é *estacionário de segunda ordem*, ou *fracamente estacionário* se

- (a) $E[X_t] = \mu_x$, constante, $\forall t \in T$.
- (b) $E[X_t^2] < \infty, \forall t \in T$.
- (c) $\gamma_x(t_1, t_2) = \gamma_x(t_1 - t_2)$ só depende da defasagem $|t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in T$.

Nota: No decorrer do texto nos referiremos a essa defasagem por ordem. Por exemplo, seja $k = |t_1 - t_2|$, então $\gamma_x(k)$ será a autocorrelação de ordem k da série X_t .

Definição 2.6 (a) Seja $(X_1, \dots, X_r)$ uma variável aleatória r -dimensional com $E | X_j |^r < \infty, j = 1, \dots, r$ onde X_j são reais ou complexas. O *cumulante conjunto* de ordem r é dado por

$$\text{Cum}(X_1, \dots, X_r) = \sum_{\nu} (-1)^{p-1}! (E \prod_{j \in \nu_1} X_j) \dots (E \prod_{j \in \nu_p} X_j), \quad (2.5)$$

onde a soma é sobre todas as partições $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ dos inteiros $(1, \dots, r)$.

(b) Seja uma série temporal $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ satisfazendo $E | X_t |^k < \infty$, então

$$C_x(t_1, \dots, t_r) = \text{Cum}(X_{t_1}, \dots, X_{t_r}) \quad (2.6)$$

é denominada *função cumulante conjunta* de ordem r da série X_t .

Definição 2.7 Suponha um processo estacionário $\{X_t\}$, $t = 0, \pm 1, \dots$ com função de autocovariância (f.a.c) $\gamma_x(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ satisfazendo

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(u)| < \infty, \quad (2.7)$$

então o espectro de $\{X_t\}$, na frequência λ , é dado por

$$f_x(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=-\pi}^{\pi} \exp(-i\lambda k) \gamma_x(k), \quad (2.8)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$.

Demonstra-se que o espectro $f_x(\lambda)$ definido por (2.8) é limitado, não negativo e uniformemente contínuo. Além disso, $f_x(\lambda)$ é par e periódico de período 2π .

Como $f_x(\lambda)$ é par e periódico de período 2π , basta tomar $\lambda \in [-\pi, \pi]$ e utilizar o intervalo $[0, \pi]$ como domínio fundamental da definição do espectro $f_x(\lambda)$.

A relação (2.8) pode ser invertida e a função de autocovariância $\gamma_x(k)$ pode ser escrita como

$$\gamma_x(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda k) f_x(\lambda) d\lambda, \quad (2.9)$$

para $k = 0, \pm 1, \dots$. No caso particular de $k = 0$, temos

$$\text{Var}(X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda) d\lambda. \quad (2.10)$$

Definição 2.8 Sejam $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ dois processos conjuntamente estacionários com $E[X_t] = \mu_x$ e $E[Y_t] = \mu_y$.

(a) A *função de correlação cruzada* de ordem m entre X e Y é dada por

$$\gamma_{xy}(m) = E[(X_{t-m} - \mu_x)(Y_t - \mu_y)], \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

(b) A *função de correlação cruzada* de ordem m entre X e Y é dada por

$$\rho_{xy}(m) = \frac{\gamma_{xy}(m)}{\sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}}. \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Definição 2.9 Seja X_n , $n = 0, \pm 1, \dots$, um processo estacionário real. A *transformada finita de Fourier* dos valores $X_0, X_1, \dots, X_{T-1}$ de X_n é dada por

$$d_x^T(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} X_t \exp(-i\lambda t), \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (2.11)$$

A *transformada discreta de Fourier* dos valores $X_0, \dots, X_{T-1}$ de X_n é dada por

$$d_x^T\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \quad s = 0, 1, \dots, T-1. \quad (2.12)$$

Propriedades:

1. $d_x^T(\lambda + 2\pi) = d_x^T(\lambda)$.
2. $\overline{d_x^T(\lambda)} = d_x^T(-\lambda)$, se X_t é real.
3. $d_{\alpha x + \beta y}^T(\lambda) = \alpha d_x^T(\lambda) + \beta d_y^T(\lambda)$, se α, β são escalares e X_t, Y_t são processos estacionários.

A relação (2.11) pode ser invertida e a série X_t pode ser escrita como

$$X_t = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp(i\lambda t) d_x^T(\lambda) d\lambda, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

ou

$$X_t \cong T^{-1} \sum_{s=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi st}{T}\right) d_x^T\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Notação: Se x e y são números reais, escreveremos $x \equiv y \pmod{\alpha}$ quando a diferença $x - y$ for um múltiplo de α .

Definição 2.10 Seja X_t , $t = 0, \pm 1, \dots$ uma série temporal estacionária, o *periodograma* dos valores $X_0, X_1, \dots, X_{T-1}$ de X_t é dado por

$$I_x^T(\lambda) = (2\pi T)^{-1} |d_x^T(\lambda)|^2, \quad \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}. \quad (2.13)$$

Teorema 2.1 Se X_t , $t = 0, \pm 1, \dots$ é uma série temporal satisfazendo (2.7), então

$$\begin{aligned} E(I_x^T(\lambda)) &= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{T(\lambda-\alpha)}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\lambda-\alpha}{2}\right)} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi T} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{T\lambda}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right]^2 \mu_x^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. No caso $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, o último termo de (2.14) é pequeno e notamos que $E(I_x^T(\lambda))$ é aproximadamente igual a uma média ponderada do espectro, com peso concentrado na vizinhança de λ . O termo $\left[\frac{\text{sen}(T\lambda/2)}{\text{sen}(\lambda/2)} \right]^2$ é denominado *núcleo de Fejér*.

Corolário 2.1 Sob as mesmas condições do Teorema 2.1, se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, então $I_x^T(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_x(\lambda)$.

Teorema 2.2 Sob as condições do Teorema 2.1 e se

$$\sum_k |k| |\gamma_x(k)| < \infty, \quad (2.15)$$

então

$$E(I_x^T(\lambda)) = f_x(\lambda) + \frac{1}{2\pi T} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{T\lambda}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right]^2 \mu_x^2 + O(T^{-1}). \quad (2.16)$$

O termo $O(T^{-1})$ é uniforme em λ .

Teorema 2.3 Se X_t é Gaussiano e $I_x^T(\lambda)$ é dado por (2.14) para $\lambda, \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_x^T(\lambda), I_x^T(\mu)) &= \left(\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{T(\lambda+\mu)}{2}\right)}{T \text{sen}\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)} \right]^2 + \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{T(\lambda-\mu)}{2}\right)}{T \text{sen}\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)} \right]^2 \right) f_x(\lambda) \\ &+ O(T^{-1}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Teorema 2.4 Nas mesmas condições do Teorema 2.3. se $\mu = 2\pi r/T$, $\lambda = 2\pi s/T$, com $r, s, r \pm s \not\equiv 0(\text{mod } T)$, inteiros, então

$$\text{Var} I_x^T(\lambda) = f_x^2(\lambda) + O(T^{-1}). \quad (2.18)$$

$$\text{Cov}(I_x^T(\lambda), I_x^T(\mu)) = O(T^{-1}). \quad (2.19)$$

Demonstrações: ver Brillinger(1981).

Teorema 2.5 Se X_t é estritamente estacionário satisfazendo

$$\sum_{u_1, \dots, u_{k-1}}^{\infty} |(C_x(u_1, \dots, u_{k-1}))| < \infty$$

e s_j^T um inteiro com

$$\lambda_j^T = \frac{2\pi s_j^T}{T} \rightarrow \lambda_j$$

quando $T \rightarrow \infty$, $j = 1, 2, \dots, J$, então

(a) para $2\lambda_j^T, \lambda_j^T \pm \lambda_k^T \not\equiv 0(\text{mod } 2\pi)$, $1 \leq j < m \leq J$ e $T = 1, 2, \dots$ temos que

$$I_x^T(\lambda_j^T) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_x(\lambda_j) \frac{\chi_2^2}{2}$$

independentes;

(b) para $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, temos

$$I_x^T(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_x(\lambda) \chi_1^2$$

independentes e

(c) para $\lambda \equiv 0(\text{mod } 2\pi)$ temos

$$I_x^T(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{cases} f_x(\lambda) \chi_1^2 & \text{se } \mu_x = 0 \\ f_x(\lambda) \chi_1^2(\psi) & \text{se } \mu_x \neq 0 \end{cases}$$

onde $\psi = |\mu_x| \sqrt{T/(2\pi f_x(\lambda))}$ é o parâmetro de não centralidade do qui-quadrado.

Podemos notar que, embora o periodograma seja assintoticamente não viciado, ele não é consistente (Brillinger, 1981).

Pelo Teorema 2.5, se s^T , inteiro com $\frac{2\pi s^T}{T} \rightarrow \lambda$ e $2[s^T + j] \not\equiv 0 \pmod{T}$, então $I_x^T(2\pi[s^T + j]/T)$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm m$, são aproximadamente independentes com distribuição assintótica $f_x(\lambda) \chi^2_2/2$.

Definição 2.11 Um novo estimador para $f_x(\lambda)$, denominado *periodograma suavizado*, é dado por

$$f_x^T(\lambda) = \begin{cases} (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m I_x^T\left(\frac{2\pi[s^T+j]}{T}\right) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ (2m)^{-1} \left[\sum_{j=-m}^{-1} I_x^T\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) + \sum_{j=1}^m I_x^T\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) \right] & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \\ & \text{ou } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \\ & \text{e } T \text{ é par} \\ m^{-1} \sum_{j=1}^m I_x^T\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \\ & \text{e } T \text{ é ímpar} \end{cases}$$

que é uma média das ordenadas do periodograma em torno de λ .

Definindo

$$F_T(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \left[\frac{\text{sen}(T\lambda/2)}{\text{sen}(\lambda/2)} \right]^2,$$

que é o núcleo de Fejér,

$$A_T^m(\lambda) = (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m F_T\left(\lambda - \frac{2\pi j}{T}\right),$$

$$B_T^m(\lambda) = (2m)^{-1} \sum_{j=-m}^{-1} F_T\left(\lambda - \frac{2\pi j}{T}\right) + \sum_{j=1}^m F_T\left(\lambda - \frac{2\pi j}{T}\right) \text{ e}$$

$$C_T^m(\lambda) = (2m)^{-1} \sum_{j=1}^m \left(F_T\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) + F_T\left(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T}\right) \right)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. Podemos notar que A_T^m , B_T^m e C_T^m são não negativos, têm integral um sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$ com periodicidade 2π .

Teorema 2.6 Se X_t , $t = 0, \pm 1, \dots$ e $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(k)| < \infty$, então

$$E[f_x^T(\lambda)] = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} A_T^m(\alpha) f_x\left(\frac{2\pi s^T}{T} - \alpha\right) d\alpha & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \int_{-\pi}^{\pi} B_T^m(\alpha) f_x(\lambda - \alpha) d\alpha & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ & \text{ou } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \\ & \text{e } T \text{ é par} \\ \int_{-\pi}^{\pi} C_T^m(\alpha) f_x(\lambda - \alpha) d\alpha & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \\ & \text{e } T \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Corolário 2.2 Se $\lambda - \frac{2\pi s^T}{T} \rightarrow O(T^{-1})$, m é constante, $m \ll T$ e (2.15) válido, então

$$E[f_x^T(\lambda)] = f_x(\lambda) + O(T^{-1}), \quad (2.20)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. Isto é,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[f_x^T(\lambda)] = f_x(\lambda).$$

Assim, $f_x^T(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_x(\lambda)$.

Teorema 2.7 Se X_t , $t = 0, \pm 1, \dots$, é uma série real estacionária, $\lambda - \frac{2\pi s^T}{T} = O(T^{-1})$, $\lambda \pm \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ e m independe de T , então

$$\text{Var}[f_x^T(\lambda)] = \begin{cases} \frac{f_x^2(\lambda)}{2m+1} + O(T^{-1}) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \frac{f_x^2(\lambda)}{m} + O(T^{-1}) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

e

$$\text{Cov}\{f_x^T(\lambda), f_x^T(\mu)\} = O(T^{-1}).$$

Teorema 2.8 Sob as condições do Teorema 2.2 e seja s^T um inteiro com $\frac{2\pi s^T}{T} \rightarrow \lambda$ quando $T \rightarrow \infty$, $\lambda_j \pm \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ para $1 \leq j < k \leq J$, então

(a) Para $j = 1, \dots, J$, $f_x^T(\lambda_j) \xrightarrow{D} f_x(\lambda_j) \frac{\lambda_{4m+2}^2}{4m+2}$ independentes se $\lambda_j \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ e

(b) Para $j = 1, \dots, J$, $f_x(\lambda_j) \frac{\lambda_{2m}^2}{2m}$ independentes se $\lambda_j \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Definição 2.12 O processo $\{X_t\}$ é chamado de *processo Gaussiano* (ou *normal*) se, para qualquer n e qualquer conjunto $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, a distribuição conjunta de probabilidade de $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$ é normal multivariada.

Como a distribuição normal multivariada é completamente definida por suas médias, variâncias e covariâncias, temos que a estrutura probabilística do processo Gaussiano é completamente definida por sua “função do valor médio” $E[X_t]$ e sua “função de covariância” a $\text{Cov}[X_s, X_t]$. Então, se um processo Gaussiano é estacionário de segunda ordem ele também é um processo estritamente estacionário.

Definição 2.13 O processo $\{a_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ é chamado de *processo puramente estacionário* ou *processo ruído branco* se este consiste de uma sequência de variáveis aleatórias com média zero, variância σ^2 e não correlacionadas, isto é, se $\forall s \neq t \quad \text{Cov}[X_s, X_t] = 0$.

Definição 2.14 *Filtro linear* é uma operação que usa um conjunto de coeficientes fixados e conhecidos $a_t, t = 0, \pm 1, \dots$, para suavizar uma *série de entrada* estacionária X_t produzindo uma *série de saída* ou *série filtrada*, Y_t , da forma

$$Y_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s X_{t-s}, \quad (2.21)$$

onde os coeficientes a_t são chamados coletivamente de *função resposta de impulso*.

Para que (2.21) exista como um limite em média quadrática e a transformada de Fourier

$$A(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t \exp i\lambda t, \quad -\infty < \lambda < \infty \quad (2.22)$$

denominada função de transferência do filtro, exista, a condição de regularidade

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} |a_s| < \infty \quad (2.23)$$

deve ser satisfeita.

Teorema 2.9 Seja $\gamma_x(k)$ a função de autocovariância da série estacionária X_t , a função de autocovariância da série filtrada Y_t obtida em (2.21) é dada por

$$\gamma_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_r \gamma_x(k - r + s) a_s. \quad (2.24)$$

Se X_t é um processo ruído branco com variância σ_x^2 temos

$$\gamma_y(k) = \sigma_x^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{s+k} a_s. \quad (2.25)$$

Teorema 2.10 Seja $f_x(\lambda)$ a função de densidade espectral da série estacionária X_t e $A(\lambda)$ dada pela Equação 2.22, a função de densidade espectral da série filtrada Y_t , obtida por (2.21) é dada por

$$f_y(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_x(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (2.26)$$

Capítulo 3

Modelos Lineares

Este capítulo tem como objetivo principal, definir e apresentar as propriedades dos processos $ARMA(p, q)$ e $ARIMA(p, d, q)$, que serão úteis para a compreensão da teoria dos próximos capítulos. Entretanto, antes de definir tais processos definiremos o *processo linear geral* que servirá de base para a definição do processo $ARMA(p, q)$.

Um processo estocástico linear, $\{X_t\}$, pode ser representado de duas formas diferentes:

(a) Como uma saída de um filtro linear cuja entrada é um processo ruído branco, $\{a_t\}$ de média zero e variância σ_a^2 , ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $\tilde{X}_t = X_t - \mu_x$ é o desvio do processo de alguma origem, ou de sua média ($E[X_t]$), se o processo for estacionário. A estacionariedade do processo será garantida se $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

(b) Sob determinadas condições, através de uma soma ponderada de valores passados de $\tilde{X}_t$ mais um ruído adicional a_t , ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= \pi_1 \tilde{X}_{t-1} + \pi_2 \tilde{X}_{t-2} + \dots + a_t \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{X}_{t-j} + a_t\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde $\{a_t\}$ é um processo ruído branco de média zero e variância σ_a^2 . Desse modo, essa representação pode ser interpretada como uma regressão das observações passadas $\tilde{X}_{t-1}, \tilde{X}_{t-2}, \dots$

em $\tilde{X}_t$.

Podemos reescrever (3.1) e obter

$$\tilde{X}_t = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j \right) a_t$$

ou

$$\tilde{X}_t = \psi(B) a_t \quad (3.3)$$

onde B é o operador de translação ao passado, ou seja, $B^j X_t = X_{t-j}$ e $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$, com $\psi_0 = 1$, é a função geradora dos pesos ψ do filtro linear que relaciona $\tilde{X}_t$ a a_t .

Da mesma maneira, podemos reescrever (3.2) para obter

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j \right) \tilde{X}_t = a_t$$

ou

$$\pi(B) \tilde{X}_t = a_t, \quad (3.4)$$

onde, $\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$ é a função geradora dos pesos π .

Existe uma relação entre $\pi(B)$ e $\psi(B)$, facilmente obtida multiplicando ambos os lados de (3.4) por $\psi(B)$, isto é, $\psi(B)\pi(B)\tilde{X}_t = \psi(B)a_t$. Por outro lado, $\tilde{X}_t = \psi(B)a_t$. Então, $\psi(B)\pi(B) = 1$, ou seja,

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B).$$

Propriedades do processo linear estacionário:

Seja $\{X_t\}$ um processo estacionário com representação dada por (3.1), então:

1. A função de autocovariância do processo é dada por

$$\gamma_x(k) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}. \quad (3.5)$$

2. Em particular, para $k = 0$ temos a variância do processo

$$\gamma_x(0) = \sigma_x^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \quad (3.6)$$

3. O espectro do processo é dado por

$$\begin{aligned} f_x(\lambda) &= 2\sigma_a^2 \psi(e^{-i\lambda}) \psi(e^{i\lambda}) \\ &= 2\sigma_a^2 |\psi(e^{-i\lambda})|^2, \quad 0 \leq \lambda \leq \pi \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1 Modelos $ARMA(p, q)$

Antes de definir o processo $ARMA(p, q)$ serão apresentadas duas definições que ajudarão a compreender melhor a construção de tal processo.

Definição 3.1 O *processo autoregressivo* de ordem p , $AR(p)$, é um caso especial da representação (3.2), onde apenas os p primeiros pesos π são diferentes de zero. Este processo é escrito da seguinte forma

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + a_t \quad (3.8)$$

onde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ representa um conjunto finito de parâmetros e $\{a_t\}$ é um processo ruído branco de média zero e variância σ_a^2 . Outra forma de escrever o processo (3.8) é dada por

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{X}_t = a_t$$

ou

$$\phi(B) \tilde{X}_t = a_t. \quad (3.9)$$

onde $\phi(B)$ é chamado de *operador autoregressivo*.

Definição 3.2 O *processo de médias móveis* de ordem q , $MA(q)$, é um caso especial da representação (3.1), onde apenas os q primeiros pesos ψ são diferentes de zero. Este processo é escrito da seguinte forma

$$\tilde{X}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.10)$$

onde $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ representam o conjunto finito de parâmetros e $\{a_t\}$ é um processo ruído branco de média zero e variância σ_a^2 .

Outra forma de representação de (3.10) é dada por

$$\tilde{X}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

ou

$$\tilde{X}_t = \theta(B) a_t \quad (3.11)$$

onde $\theta(B)$ é chamado de *operador de médias móveis*.

Definição 3.3 O *processo autoregressivo-médias móveis* de ordem (p, q) , $ARMA(p, q)$, é uma mistura dos processos autoregressivo de ordem p e de médias móveis de ordem q . Este processo é escrito da seguinte forma

$$\tilde{X}_t - \phi_1 \tilde{X}_{t-1} - \dots - \phi_p \tilde{X}_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

ou

$$\phi(B) \tilde{X}_t = \theta(B) a_t. \quad (3.12)$$

Propriedades:

1. O processo $ARMA(p, q)$ será estacionário se, e somente se, as raízes da equação característica $\phi(B) = 0$ caírem fora do círculo unitário.
2. O processo $ARMA(p, q)$ será invertível se, e somente se, as raízes da equação característica $\theta(B) = 0$ caírem fora do círculo unitário.
3. A função de autocovariância do processo $ARMA(p, q)$ é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_x(k) &= \phi_1 \gamma_x(k-1) + \dots + \phi_p \gamma_x(k-p) + \gamma_{xa}(k) \\ &\quad - \theta_1 \gamma_{xa}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{xa}(k-q) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\gamma_{xa}(k)$ é a função de covariância cruzada entre X e a , $\gamma_{xa}(k) = E[\tilde{X}_{t-k} a_t]$, dada pela Definição 2.8. Como X_{t-k} depende apenas dos ruídos que ocorreram até o tempo $t - k$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{xa}(k) &= 0 & k > 0 \\ \gamma_{xa}(k) &\neq 0 & k \leq 0 \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\gamma_x(k) = \phi_1 \gamma_x(k-1) + \dots + \phi_p \gamma_x(k-p), \quad k \geq q+1 \quad (3.14)$$

4. Pelo item anterior, temos

$$\rho_x(k) = \phi_1 \rho_x(k-1) + \dots + \phi_p \rho_x(k-p), \quad k \geq q+1 \quad (3.15)$$

ou

$$\phi(B) \rho_x(k) = 0, \quad k \geq q+1. \quad (3.16)$$

5. Para $k=0$ temos a variância do processo $ARMA(p, q)$

$$\begin{aligned} \gamma_x(0) &= \phi_1 \gamma_x(1) + \dots + \phi_p \gamma_x(p) + \sigma_a^2 \\ &\quad - \theta_1 \gamma_{xa}(-1) - \dots - \theta_q \gamma_{xa}(-q) \end{aligned} \quad (3.17)$$

6. O espectro do processo $ARMA(p, q)$ é dado por

$$\begin{aligned} f_x(\lambda) &= \frac{\sigma_a^2 |\theta(e^{-i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\lambda})|^2} \\ &= \frac{\sigma_a^2 |1 - \theta_1 e^{-i\lambda} - \dots - \theta_q e^{-i\lambda q}|^2}{2\pi |1 - \phi_1 e^{-i\lambda} - \dots - \phi_p e^{-i\lambda p}|^2}, \quad 0 \leq \lambda \leq \pi \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2 Modelos $ARIMA(p, d, q)$

Sabemos que um processo $ARMA(p, q)$ é estacionário se as raízes da equação característica $\phi(B) = 0$ caem fora do círculo unitário e que não é estacionário caso contrário. O modelo $ARIMA(p, d, q)$ é útil para modelar os processos em que uma ou mais raízes dessa equação caem sobre o círculo unitário, ou seja, valem um. Neste caso, o processo será chamado de *processo não estacionário homogêneo*.

Considere o modelo

$$\varphi(B) \tilde{X}_t = \theta(B) a_t \quad (3.19)$$

onde $\varphi(B)$ é um operador não estacionário, tal que d das raízes de $\varphi(B) = 0$ valem um e as demais caem fora do círculo unitário. Então, podemos representar o modelo (3.19) da seguinte forma

$$\varphi(B) \tilde{X}_t = \phi(B) \nabla^d \tilde{X}_t = \theta(B) a_t$$

onde $\nabla^d = (1 - B)^d$ é chamado de *operador diferença de ordem d*, $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são os operadores autoregressivo e de médias móveis, respectivamente, definidos na seção anterior.

Definição 3.4 O processo

$$\phi(B) \nabla^d \tilde{X}_t = \theta(B) a_t, \quad (3.20)$$

onde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q,$$

é chamado de *processo autoregressivo integrado de médias móveis* ou *ARIMA(p, d, q)*.

De maneira equivalente, o processo *ARIMA(p, d, q)* pode ser definido pelas duas equações abaixo

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t \quad (3.21)$$

$$W_t = \nabla^d \tilde{X}_t. \quad (3.22)$$

Podemos ver que esse modelo assume que a d -ésima diferença da série pode ser representada por um processo *ARMA* estacionário e invertível. Ou seja, assume-se que:

(a) $\phi(B)$ é um *operador autoregressivo estacionário*, ou seja, as raízes da equação $\phi(B) = 0$ caem fora do círculo unitário,

(b) $\varphi(B)$, chamado de *operador autoregressivo generalizado*, é um operador não estacionário com d das raízes da equação $\varphi(B) = 0$ iguais a um e as demais caem fora do círculo unitário,

(c) $\theta(B)$, chamado de *operador de médias móveis*, é um operador invertível, ou seja, as raízes da equação $\theta(B) = 0$ caem fora do círculo unitário.

Existem três formas explícitas de representar o modelo *ARIMA(p, d, q)*, que são consideradas a seguir.

Forma de equações de diferenças

Usando diretamente equações de diferenças podemos expressar o valor atual do processo $\tilde{X}_t$ em função de valores passados dos $\tilde{X}$'s e dos valores atual e passados dos a 's. Isto é, se

$$\varphi(B) = \phi(B)(1 - B)^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}$$

o modelo (3.20) pode ser escrito como

$$\tilde{X}_t = \varphi_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} \tilde{X}_{t-p-d} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t \quad (3.23)$$

Forma de choques aleatórios

Neste caso, o modelo representa o processo $\tilde{X}_t$ como uma saída de um filtro linear cuja entrada são ruídos brancos, ou uma sequência de choques não correlacionados, a_t . Ou seja, o modelo é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= \psi(B) a_t \end{aligned} \quad (3.24)$$

Se multiplicarmos ambos os lados de (3.24) pelo operador $\varphi(B)$, obtemos

$$\varphi(B) \tilde{X}_t = \varphi(B) \psi(B) a_t.$$

Entretanto, como

$$\varphi(B) \tilde{X}_t = \theta(B) a_t$$

temos que

$$\varphi(B) \psi(B) = \theta(B).$$

Portanto, os pesos ψ podem ser obtidos equacionando-se os coeficientes de B na expansão

$$(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d})(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$$

Forma invertida

Neste caso, o modelo representa o processo $\tilde{X}_t$ em termos de valores passados dos $\tilde{X}$'s e do valor atual do ruído a_t . Considere o modelo

$$\tilde{X}_t = \psi(B)a_t$$

que pode ser escrito na forma invertida

$$\psi^{-1}(B)\tilde{X}_t = a_t$$

ou

$$\pi(B)\tilde{X}_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) \tilde{X}_t = a_t. \quad (3.25)$$

Isto é, $\tilde{X}_t$ é uma soma ponderada infinita dos valores passados de $\tilde{X}$, mais um ruído presente,

$$\tilde{X}_t = \pi_1 \tilde{X}_{t-1} + \pi_2 \tilde{X}_{t-2} + \dots + a_t.$$

O modelo é dito invertível se os pesos π formarem uma série absolutamente convergente, ou seja, $\pi(B)$ deve convergir sobre ou dentro do círculo unitário.

Substituindo (3.25) em

$$\varphi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)a_t$$

obtemos

$$\varphi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)\pi(B)\tilde{X}_t.$$

Então, os pesos π serão obtidos equacionando os coeficientes de B em

$$\varphi(B) = \theta(B)\pi(B),$$

ou seja, em

$$(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots).$$

Capítulo 4

Modelos de Longa Memória

4.1 Introdução

Estudos empíricos, principalmente em Economia e Hidrologia, revelam séries temporais que apresentam uma dependência significativa entre observações distanciadas por um longo intervalo de tempo. Essas séries são denominadas de *séries de longa memória* e não são bem ajustadas por modelos que têm como suposição a não significância das correlações entre observações distantes, ou seja, que têm como suposição a independência assintótica. Com a constatação desse problema, iniciou-se um estudo das características dessas séries para que se pudesse encontrar uma ou mais famílias de modelos capazes de representar adequadamente esse comportamento de longa memória. Verificou-se que uma das principais características desse tipo de série é que sua densidade espectral é não limitada na frequência zero, o que equivale dizer que sua função de autocorrelação não é absolutamente somável. Outra característica é o decaimento hiperbólico da função de autocorrelação desse tipo de série.

Procurando respeitar as características de uma série de longa memória citadas acima, foram definidos dois modelos importantes, nos quais a função de densidade espectral é proporcional a λ^{-r} , $1 < r < 2$, para λ próximo de zero, e o decaimento da função de autocorrelação é proporcional a τ^{r-1} . Primeiro foi introduzido o modelo de ruído Gaussiano fracionário por Mandelbrot & Ness (1968). Mais tarde Granger & Joyeux (1980) e Hosking (1981) introduziram o modelo ARIMA fracionário (ou ARFIMA) que é uma generalização

do modelo ARIMA. Geweke & Porter-Hudak (1983) mostraram a equivalência desses dois modelos.

Mandelbrot & Van Ness (1968), Mandelbrot & Wallis (1968, 1969) estudaram em detalhes algumas famílias de funções aleatórias que poderiam, de alguma maneira, representar o comportamento típico do processo que não possui independência assintótica. Deste modo, estudaram o movimento Browniano fracionário a fim de encontrar resultados de interesse prático e introduziram o modelo que chamamos de *modelo de ruído Gaussiano fracionário*. A seguir, serão apresentadas algumas definições necessárias para a introdução deste modelo.

Definição 4.1 O *movimento Browniano ordinário*, $B(t, \omega)$ de Bachelier, Wiener & Lévy, $-\infty < t < \infty$, $\omega \in \Omega$, é uma função aleatória real de incrementos Gaussianos independentes tal que $B(t_2, \omega) - B(t_1, \omega)$ têm média zero e variância $|t_2 - t_1|$, e tal que $B(t_2, \omega) - B(t_1, \omega)$ são independentes de $B(t_4, \omega) - B(t_3, \omega)$ se os intervalos (t_1, t_2) e (t_3, t_4) não se sobrepõem.

Notação: para simplificar denotaremos $B(t, \omega)$ por $B(t)$.

Definição 4.2 Seja $B(t)$ um movimento Browniano ordinário e H um parâmetro que satisfaz $0 < H < 1$. O *movimento Browniano fracionário* de expoente H , $B_H(t)$, é uma média móvel da derivada de $B(t)$, $dB(t)$, no qual incrementos passados de $B(t)$ são ponderados pela semente $(t - s)^{H-1/2}$, ou seja,

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t (t - s)^{H-1/2} dB(s), \quad (4.1)$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades do movimento Browniano fracionário demonstradas por Mandelbrot & Van Ness (1968).

Propriedades:

1. o movimento Browniano fracionário de parâmetro H é a $(\frac{1}{2} - H)$ -ésima derivada fracionária do movimento Browniano;
2. a densidade espectral do movimento Browniano fracionário é proporcional a λ^{-2H-1} ;
3. a função de covariância do movimento Browniano fracionário é proporcional a $|k|^{2H-2}$.

Definição 4.3 O processo de ruído fracionário no tempo contínuo é a derivada do movimento Browniano fracionário, $B'_H(t)$.

Um análogo, no tempo discreto, do processo ruído fracionário no tempo contínuo é dado pela definição abaixo

Definição 4.4 $X_t = B_H(t) - B_H(t - 1)$ $t = 0, 1, \dots$ é denominado *ruído Gaussiano fracionário*.

Propriedades: (Geweke & Porter-Hudak (1983))

1. A densidade espectral de $\{X_t\}$ é dada por:

$$f_1(\lambda; H) = \sigma^2 (2\pi)^{-2H-2} \Gamma(2H+1) \text{sen}(\pi H) 4 \text{sen}^2(\lambda/2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n + (\lambda/2\pi)|^{-2H-1}, \quad (4.2)$$

onde

$$\Gamma(z) := \begin{cases} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, & z > 0, \\ \infty, & z = 0, \\ z^{-1} \Gamma(1+z), & z < 0. \end{cases}$$

2. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{2H-1} f_1(\lambda; H) = (2\sigma^2/\pi) \Gamma(2H+1) \text{sen}(\pi H)$.

3. A função de autocorrelação correspondente é dada por

$$\rho_1(\tau; H) = 0.5(|\tau - 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau + 1|^{2H}). \quad (4.3)$$

4. A expansão em série de Taylor de 4.3 em torno de $(\tau - 1)/\tau$ e $(\tau + 1)/\tau$ mostra que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{2-2H} \rho_1(\tau; H) = H(2H - 1). \quad (4.4)$$

5. Pela desigualdade de Schwarz, $\rho_1(\tau; H) > 0 (< 0)$ para $\tau \neq 0$ se $H > 0.5 (< 0.5)$.

Definição 4.5 Um processo $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ é chamado de *ruído Gaussiano fracionário geral* se sua densidade espectral é da forma $f_1(\lambda; H)f_u(\lambda)$ onde $f_u(\lambda)$ é uma função contínua positiva limitada superiormente em qualquer intervalo fechado que não contém zero (“bounded above and away from zero”) no intervalo $[-\pi, \pi]$.

4.2 Modelo ARIMA Fracionário (ARFIMA)

Um processo no tempo discreto, análogo ao movimento Browniano, é o passeio aleatório ou o processo $ARIMA(0,1,0)$, $X_t = X_{t-1} + a_t$, onde a_t são variáveis aleatórias não correlacionadas e identicamente distribuídas. Neste caso, a primeira diferença de $\{X_t\}$ é o processo *ruído branco* no tempo discreto, $\{a_t\}$.

Observação: A partir deste momento assumiremos que $E(X_t) = 0$.

Definição 4.6 O operador de diferença fracionária é dado por

$$\begin{aligned} \nabla^d &= (1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k = 1 - dB - \frac{1}{2!}d(1-d)B^2 - \\ &- \frac{1}{3!}d(1-d)(2-d)B^3 - \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Definição 4.7 O processo ruído branco de diferença fracionária, X_t , com parâmetro H , $0 < H < 1$ é a $(\frac{1}{2} - H)$ -ésima diferença fracionária do processo ruído branco no tempo discreto. Ou seja, $X_t = \nabla^{-d}a_t$ ou $\nabla^d X_t = a_t$, com $d = H - \frac{1}{2}$, onde a_t é um processo ruído branco de média zero e variância σ_a^2 .

Observações:

(a) Fazendo $d = H - \frac{1}{2}$, o processo ruído branco de diferença fracionária $\{X_t\}$ é análogo ao processo ruído fracionário no tempo contínuo com parâmetro H , dado pela Definição 4.3.

(b) O processo X_t , dado pela Definição 4.7, é equivalente ao processo $ARIMA(0, d, 0)$ com $|d| < 1/2$, que será denominado processo $ARFIMA(0, d, 0)$.

O teorema abaixo enuncia algumas propriedades do processo $\{X_t\}$.

Teorema 4.1 Seja $\{X_t\}$ um processo $ARFIMA(0, d, 0)$.

(a) Quando $d < \frac{1}{2}$, $\{X_t\}$ é um processo estacionário e tem representação de médias móveis infinita

$$X_t = \psi(B)a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{t-k}, \quad (4.6)$$

onde

$$\psi_k = \frac{d(1+d) \dots (k-1+d)}{k!} = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!}, \quad (4.7)$$

com $\psi_k \sim k^{d-1}/(d-1)!$ quando $k \rightarrow \infty$.

(b) Quando $d > -\frac{1}{2}$, $\{X_t\}$ é invertível e tem representação autoregressiva infinita

$$\pi(B)X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = a_t, \quad (4.8)$$

onde

$$\pi_k = \frac{-d(1-d) \dots (k-1-d)}{k!} = \frac{(k-d-1)!}{k!(-d-1)!}, \quad (4.9)$$

com $\pi_k \sim k^{-d-1}/(-d-1)!$ quando $k \rightarrow \infty$.

Nos próximos itens assumiremos que $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$.

(c) A densidade espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} (2 \sin \frac{1}{2} \lambda)^{-2d} \quad (4.10)$$

para $0 < \lambda \leq \pi$ e $f(\lambda) \sim \lambda^{-2d}$ quando $\lambda \rightarrow 0$.

(d) A função de autocovariância de $\{X_t\}$ é dada por

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = \frac{(-1)^k (-2d)!}{(k-d)!(k+d)!} \sigma_a^2 \quad (4.11)$$

e a função de autocorrelação de $\{X_t\}$ é dada por

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \frac{(-d)!(k+d-1)!}{(d-1)!(k-d)!} \quad (k = 0, \pm 1, \dots) \quad (4.12)$$

$$= \frac{(d)(1+d) \dots (k-1+d)}{(1-d)(2-d) \dots (k-d)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.13)$$

Em particular, $\gamma_0 = (-2d)!/(-d)!^2$ e $\rho_1 = d/(1-d)$. Quando $k \rightarrow \infty$,

$$\rho_k \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} k^{2d-1}. \quad (4.14)$$

(e) A função de autocorrelação inversa de $\{X_t\}$, quando, $k \rightarrow \infty$, é dada por

$$\rho_{inv,k} = \frac{d!(k-d-1)!}{(-d-1)!(k+d)!} \sim \frac{d!}{(-d-1)!} k^{-1-2d}. \quad (4.15)$$

(f) As autocorrelações parciais de $\{X_t\}$ são dadas por

$$\phi_{kk} = d/(k-d) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.16)$$

Demonstração: Para maiores detalhes ver Hosking (1981).

Pelo Teorema 4.1 sabemos que se $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ o processo $\{X_t\}$ é estacionário e invertível, além disso, ψ_k e π_k decaem hiperbolicamente. O comportamento do espectro nas frequências baixas indica que, para $d > 0$, $\{X_t\}$ é um processo de longa memória, que também pode ser caracterizado pelo decaimento hiperbólico da função de autocorrelação.

Observação: No processo $ARFIMA(0, d, 0)$ o parâmetro d pode assumir qualquer valor real. Neste caso, o processo pode ser diferenciado um número finito de vezes até que $|d| < 1$ e este será estacionário e invertível se $|d| < 1/2$. Ou seja, $\nabla^n \{X_t\}$ será um processo $ARFIMA(0, d, 0)$ estacionário e invertível se $\nabla^d \nabla^n X_t = a_t$, onde $|d| < 1/2$ e $n \in \mathbb{N}$.

A seguir, analisaremos algumas características do processo $ARFIMA(0, d, 0)$ com respeito aos valores que d assume no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Os principais resultados são:

(a) $d = \frac{1}{2}$, a densidade espectral do processo $ARFIMA(0, \frac{1}{2}, 0)$ é dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\text{sen}(\frac{1}{2}\lambda)} \sim \lambda^{-1} \quad (4.17)$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

A representação formal de médias móveis infinita desse processo tem coeficientes $\psi_k \sim (nk)^{-\frac{1}{2}}$ quando $k \rightarrow \infty$. Esse fato indica que $\sum_k \psi_k^2$ diverge e, portanto, $\{X_t\}$ é não estacionário. Entretanto, $\{X_t\}$ é invertível, pois

$$(1 - \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 - \frac{1}{16}B^3 - \frac{5}{128}B^4 - \dots)x_t = a_t, \quad (4.18)$$

o que indica $\sum_{k=0}^{\infty} |\pi_k| < \infty$.

(b) $0 < d < \frac{1}{2}$, neste caso, o processo $ARFIMA(0, d, 0)$ é um processo estacionário de longa memória. As autocorrelações e autocorrelações parciais de $\{X_t\}$ são todas positivas e decaem monotonicamente e hiperbolicamente para zero e $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_k| = \infty$. A densidade espectral de $\{X_t\}$ é concentrada em frequências baixas: $f(\lambda)$ é uma função decrescente de λ e $f(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow 0$, mas é integrável.

(c) $d=0$, o processo $ARFIMA(0, 0, 0)$ é ruído branco, que tem autocorrelações zero e densidade espectral constante.

(d) $-\frac{1}{2} < d < 0$, o processo $ARFIMA(0, d, 0)$ tem memória intermediária. As autocorrelações e autocorrelações parciais do processo são todas negativas, exceto $\rho_0 = 1$, e decaem monotonicamente e hiperbolicamente para zero e $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_k| < \infty$. A densidade espectral é dominada por componentes de alta frequência; $f(\lambda)$ é uma função crescente de λ , $f(\lambda) = 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$, embora tenha gradiente $+\infty$.

(e) $d = -\frac{1}{2}$, o processo $ARFIMA(0, -\frac{1}{2}, 0)$ é estacionário, mas não é invertível. Os pesos ψ_k da representação infinita de médias móveis são os mesmos que os pesos π_k de um processo $ARFIMA(0, \frac{1}{2}, 0)$ e, portanto, decaem como $k^{-3/2}$ para k grande. A densidade espectral do processo é dada por $f(\lambda) = 2\text{sen}(\frac{1}{2}\lambda)$ que tende para zero quando $\lambda \rightarrow 0$, mas tem gradiente finito $+1$ em $\lambda = 0$. A função de autocorrelação do processo é dada por $\rho_k = -1/(4k^2 - 1)$; a variância do processo é $\gamma_0 = 4/\pi$. As autocorrelações parciais do processo são dadas por $\phi_{kk} = -1/(2k + 1)$.

Algumas vezes, utilizar o modelo $ARFIMA(0, d, 0)$ em séries com comportamento de

longa memória pode não ser satisfatório, pois algumas destas séries também podem apresentar um comportamento de curta memória. Então, o ideal é encontrar um modelo que seja capaz de explicar o comportamento de curta memória e que mantenha o decaimento hiperbólico da função de autocorrelação, característico do processo de longa memória. Uma extensão natural do processo $ARFIMA(0, d, 0)$ que possui essas propriedades é o processo que combina diferença fracionária com a família de modelos de Box & Jenkins. Tal processo é definido a seguir.

Definição 4.8 $\{Y_t\}$ é um processo $ARFIMA(p, d, q)$ com $d \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se $\{Y_t\}$ é estacionário e satisfaz a equação,

$$\phi(B) \nabla^d Y_t = \theta(B) a_t \quad (4.19)$$

onde $\{a_t\}$ é ruído branco e ϕ e θ são polinômios em B de graus p e q , respectivamente.

A razão da escolha dessa família de processos, para fins de modelagem das séries com comportamento de longa memória, é que o efeito do parâmetro d em observações distantes decai hiperbolicamente conforme a distância aumenta, enquanto os efeitos dos parâmetros ϕ e θ decaem exponencialmente. Então, d deve ser escolhido com o objetivo de explicar a estrutura de correlação de ordens altas da série, enquanto os parâmetros ϕ e θ explicam a estrutura de correlação de ordens baixas.

Observação: É esperado que o comportamento de longa memória de um processo $ARFIMA(p, d, q)$ seja semelhante ao do processo $ARFIMA(0, d, 0)$ com o mesmo valor de d , desde que, para observações muito distantes o efeito dos parâmetros ϕ e θ não seja significativo.

Teorema 4.2 Seja $\{Y_t\}$ um processo $ARFIMA(p, d, q)$. Então,

(a) $\{Y_t\}$ é estacionário se $d < \frac{1}{2}$ e todas as raízes da equação $\phi(z) = 0$ estão fora do círculo unitário;

(b) $\{Y_t\}$ é invertível se $d > -\frac{1}{2}$ e todas as raízes da equação $\theta(z) = 0$ estão fora do círculo unitário.

Se $\{Y_t\}$ é estacionário e invertível, com função de densidade espectral $f(\lambda)$ e função de autocorrelação ρ_k , então

(c) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{2d} f(\lambda)$ existe e é finito;

(d) $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{1-2d} \rho_k$ existe e é finito.

Demonstração: Para maiores detalhes ver Hosking (1981).

Apresentaremos as principais características dos processos $ARFIMA(1, d, 0)$ e $ARFIMA(0, d, 1)$ que, na prática, são os mais utilizados para modelar séries de longa memória.

O processo $ARFIMA(1, d, 0)$ é dado por $(1 - \phi B) \nabla^d Y_t = a_t$, onde $\{a_t\}$ é um processo ruído branco. Escrevemos $X_t = (1 - \phi B) Y_t$, assim, temos $\nabla^d X_t = a_t$. Então, $\{Y_t\}$ é uma autoregressão de primeira ordem com ruídos gerados pelo processo $ARIMA(0, d, 0)$. Para assegurar estacionariedade e invertibilidade de $\{Y_t\}$ assumimos que $|\phi| < 1$ e $|d| < \frac{1}{2}$.

As autocorrelações de $\{Y_t\}$ são expressadas mais convenientemente se utilizarmos a função hipergeométrica

$$F(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c \cdot 1} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)1 \cdot 1} z^2 + \dots \quad (4.20)$$

Pelo Teorema 4.2 temos os seguintes resultados.

Teorema 4.3 (Hosking (1981)) Sejam $\{Y_t\}$ um processo $ARFIMA(1, d, 0)$ estacionário e invertível e $X_t = (1 - \phi B) Y_t$.

(a) Os pesos ψ e π das representações autoregressiva e de médias móveis infinitas de $\{Y_t\}$ são dados por

$$\psi_k = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} F(1, -k; 1-d-k; \phi) \sim \frac{k^{d-1}}{(1-\phi)(d-1)!},$$

$$\pi_k = \frac{(k-d-2)!}{(k-1)(-d-1)!} \{1 - \phi - (1+d)/k\} \sim \frac{(1-\phi)}{(-d-1)!} k^{-d-1},$$

quando $k \rightarrow \infty$.

(b) A densidade espectral de $\{Y_t\}$ é

$$f(\lambda) = \frac{\{2\text{sen}(\frac{1}{2}\lambda)\}^{-2d}}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos \lambda} \sim \frac{\lambda^{-2d}}{(1-\phi)^2}$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

(c) Sejam $\gamma_k^y, \rho_k^y, \gamma_k^x, \rho_k^x$ as autocovariâncias e as autocorrelações de $\{Y_t\}$ e $\{X_t\}$ respectivamente, onde γ_k^x e ρ_k^x são dadas em (4.13) e (4.11), respectivamente, então

$$\gamma_k^y = \gamma_k^x \{F(1, d+k; 1-d+k; \phi) + F(1, d-k; 1-d-k; \phi) - 1\} / (1-\phi^2),$$

$$\rho_k^y = \rho_k^x \frac{\{F(1, d+k; 1-d+k; \phi) + F(1, d-k; 1-d-k; \phi) - 1\}}{(1-\phi)F(1, 1+d; 1-d-k; \phi)}.$$

Em particular,

$$\gamma_0^y = \frac{(-2d)!}{\{(-d)!\}^2} \frac{F(1, 1+d; 1-d; \phi)}{(1+\phi)},$$

$$\rho_1^y = \frac{(1+\phi^2)F(1, d; 1-d; \phi) - 1}{\phi\{2F(1, d; 1-d; \phi) - 1\}}.$$

quando $k \rightarrow \infty$,

$$\rho_k^y \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} \frac{(1+\phi)}{(1-\phi)^2} \frac{k^{2d-1}}{F(1, 1+d; 1-d; \phi)}.$$

O processo $ARIMA(0, d, 1)$, $Y_t = (1 - \theta B) \nabla^{-d} a_t$, onde $\{a_t\}$ é um processo ruído branco, pode ser descrito como uma média móvel de primeira ordem de um ruído branco com diferença fracionária. $\{Y_t\}$ é estacionário e invertível para $|\theta| < 1$ e $|d| < \frac{1}{2}$.

Pelo Teorema 4.2 temos os seguintes resultados.

Teorema 4.4 (*Hosking (1981)*) Seja $\{Y_t\}$ um processo $ARFIMA(0, d, 1)$ estacionário e invertível: seja $\nabla^d X_t = a_t$ tal que $Y_t = (1 - \theta B)X_t$.

(a) Os pesos ψ e π das representações autoregressiva e de médias móveis infinitas de $\{Y_t\}$ são dados por

$$\psi_k = \frac{(k-d-1)!}{k!(-d-1)!} F(1, -k; 1+d-k; \theta) \sim \frac{k^{-d-1}}{(1-\theta)(-d-1)!},$$

$$\pi_k = \frac{(k+d-2)!}{(k-1)(+d-1)!} \{1 - \theta - (1+d)/k\} \sim \frac{(1-\theta)}{(d-1)!} k^{d-1},$$

quando $k \rightarrow \infty$.

(b) A densidade espectral de $\{Y_t\}$ é

$$f(\lambda) = (1 + \theta^2 - 2\theta \cos \lambda) \{2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\lambda)\}^{-2d} \sim (1 - \theta)^2 \lambda^{-2d}$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

(c) Sejam $\gamma_k^y, \rho_k^y, \gamma_k^x, \rho_k^x$ as autocovariâncias e as autocorrelações de $\{Y_t\}$ e $\{X_t\}$ respectivamente, onde γ_k^x e ρ_k^x são dadas em (4.13) e (4.11), respectivamente, então

$$\gamma_k^y = \gamma_k^x \frac{(1-\theta)^2 k^2 - (1-d)\{(1-d)(1+\theta^2) - 2\theta d\}}{k^2 - (1-d)^2},$$

$$\rho_k^y = \rho_k^x \frac{ak^2 - (1-d)^2}{k^2 - (1-d)^2},$$

onde $a = (1-\theta)^2 / \{1 + \theta^2 - 2\theta d / (1-d)\}$. Em particular,

$$\gamma_0^y = \{1 + \theta^2 - 2\theta d / (1-d)\} (-2d)! / \{(-d)!\}^2,$$

$$\rho_1^y = \frac{a - (1-d)^2}{(1-d)(2-d)} = \frac{(1+\theta^2)d(2-d) - 2\theta(1-d+d^2)}{(1-d)(2-d)\{1 + \theta^2 - 2\theta d / (1-d)\}}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$,

$$\rho_k^y \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} a k^{2d-1}.$$

Capítulo 5

Estimação dos Parâmetros em Modelos ARFIMA(p, d, q)

5.1 Métodos de Estimação de d

5.1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos os principais métodos de estimação do parâmetro de diferença fracionária, d , de modelos $ARFIMA(p, d, q)$. Na Seção 5.2 um algoritmo de estimação de todos os parâmetros é apresentado, pois a maioria dos métodos não estimam simultaneamente os parâmetros do modelo $ARFIMA(p, d, q)$. Os métodos de estimação se dividem em três grupos:

1. Método da função de autocorrelação de ordem 1, método da autocorrelação generalizado, método da auto correlação parcial e o método das ondaletas. Esses métodos foram elaborados para estimar o parâmetro d somente em modelos $ARFIMA(0, d, 0)$.
2. Método de regressão utilizando o periodograma e o método de regressão utilizando o periodograma suavizado. Esses métodos foram elaborados para estimar d em modelos $ARFIMA(p, d, q)$, mas não estimam os parâmetros simultaneamente.
3. Método de máxima verossimilhança. Este é o único método que estima simultanea-

mente os parâmetros do modelo $ARFIMA(p, d, q)$.

Apesar dos métodos citados no primeiro grupo terem sido formulados para modelos $ARFIMA(0, d, 0)$, eles podem ser aplicados ao modelo completo $ARFIMA(p, d, q)$ através de uma aplicação iterativa do algoritmo de estimação dado na Seção 5.2. Este algoritmo só não será utilizado no caso do método de máxima verossimilhança.

5.1.2 Método da Função de Autocorrelação de Ordem 1

Este método, proposto por Gupta & Kumar (1991), é o método mais simples dentre os métodos que serão apresentados neste capítulo. Ele tem como base a relação entre d e a função de autocorrelação de ordem 1, ρ_1 , de um processo $ARFIMA(0, d, 0)$. Tal relação é obtida através da função de autocorrelação, dada pelo Teorema 4.1.

$$\rho_k = \frac{d(1+d) \dots (k-1+d)}{(1-d)(2-d) \dots (k-d)} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

que, para $k = 1$, fornece

$$d = \frac{\rho_1}{1 + \rho_1}. \quad (5.2)$$

A proposta de Gupta & Kumar foi de substituir ρ_1 pela autocorrelação amostral de ordem 1, $\hat{\rho}_1$, ou seja, o estimador de d , neste caso, é dado por

$$\hat{d}_c = \frac{\hat{\rho}_1}{1 + \hat{\rho}_1}. \quad (5.3)$$

Gupta & Kumar (1991) mostram que, para $-\frac{1}{2} < d < 0$, este é um estimador não viciado com distribuição assintótica normal, com variância dada por

$$\frac{V}{T(1 + \rho_1)^4},$$

onde T é o número de observações da série temporal em questão e

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_{k+1} + \rho_{k-1} - 2\rho_1\rho_k)^2.$$

Assim,

$$\sqrt{T}(\hat{d}_c - d) \sim AN\left(0, \frac{V}{(1 + \rho_1)^4}\right). \quad (5.4)$$

5.1.3 Método da Função de Autocorrelação Generalizado

Seja $\{X_t, t = 0, 1, \dots, T-1\}$ um processo $ARFIMA(0, d, 0)$. O método de estimação anterior utiliza apenas a informação que a função de autocorrelação de X_t , ρ_k , oferece para $k = 1$, desconsiderando as informações oferecidas para $k = 2, 3, \dots, T-1$. Com o objetivo de incorporar essas “informações” no método de estimação de d , Gupta & Ji (1992) propuseram utilizar as autocorrelações amostrais $\hat{\rho}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, onde N é um número inteiro positivo tal que $N < T$. A construção deste estimador decorre da equação

$$\rho_k = \rho_{k-1} \frac{k-1+d}{k-d}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

que é obtida reescrevendo (5.1). Resolvendo essa equação em d , temos

$$d = \frac{k\rho_k - (k-1)\rho_{k-1}}{\rho_k + \rho_{k-1}}, \quad (5.5)$$

que sugere um estimador preliminar de d dado por

$$\hat{d}(k) = \frac{k\hat{\rho}_k - (k-1)\hat{\rho}_{k-1}}{\hat{\rho}_k + \hat{\rho}_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, T, \quad (5.6)$$

onde $\hat{\rho}_k$ é a função de autocorrelação amostral de ordem k . O estimador sugerido por Gupta & Ji é uma soma ponderada de $\hat{d}(k)$ para $k = 1, 2, \dots, N$, dado por

$$\hat{d}_{cg} = \sum_{i=1}^N a_i \hat{d}(i), \quad (5.7)$$

onde $N < T$ e $\{a_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ é um conjunto de números reais não negativos (chamados de pesos) tais que $\sum_{i=1}^N a_i = 1$.

A função peso sugerida por Gupta & Ji é dada por

$$a_i = \frac{\frac{1}{Var(\hat{d}(i))}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{Var(\hat{d}(j))}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.8)$$

Nota: Na prática, $Var(\hat{d}(i))$ é substituída pela variância amostral de $\hat{d}(i)$, $\hat{Var}(\hat{d}(i))$.

O teorema a seguir fornece a distribuição conjunta assintótica Normal de $\{\hat{d}(k)\}$, deduzida por Gupta & Ji (1992).

Notação:

$$W_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \{[\rho_{k+i} + \rho_{k-i} - 2\rho_k \rho_i][\rho_{k+j} + \rho_{k-j} - 2\rho_k \rho_j]\} & \text{se } i, j \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema 5.1 Seja $\{X_t\}$ um processo $ARFIMA(0, d, 0)$, definido por

$$(1 - B)^d X_t = Z_t,$$

onde $d < 0$ e $Z_t \sim IID(0, \sigma^2)$.

Seja $\hat{D} = (\hat{d}(1) - d, \hat{d}(2) - d, \dots, \hat{d}(m) - d)'$, onde m é qualquer inteiro positivo. Então,

$$\sqrt{n} \hat{D} \sim AN(0, V_1).$$

onde

$$0 = (0, 0, \dots, 0)_{1 \times m} \quad \text{e} \quad V_1 = [v_{i,j}]_{m \times m}, \quad (5.9)$$

$$v_{i,j} = \frac{(2i-1)(2j-1)u_{i,j}}{(\rho_i + \rho_{i-1})^2(\rho_j + \rho_{j-1})^2},$$

sendo

$$u_{i,j} = \{\rho_{i-1}\rho_{j-1}W_{i,j} - \rho_{i-1}\rho_j W_{i,j-1} - \rho_i\rho_{j-1}W_{i-1,j} + \rho_i\rho_j W_{i-1,j-1}\}.$$

Demonstração: Ver Gupta & Ji (1992).

Teorema 5.2 Se $\{X_t\}$ for um processo $ARFIMA(0, d, 0)$ definido por $(1 - B)^d X_t = Z_t$, onde $d < 0$ e $Z_t \sim IID(0, \sigma^2)$, então

$$\sqrt{n} (\hat{d}_{cg} - d) \sim AN(0, V_d)$$

onde $V_d = a'V_1a$. Os termos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e V_1 estão definidos em (5.8) e (5.9) respectivamente.

Demonstração: Ver Gupta & Ji (1992).

5.1.4 Método da Função de Autocorrelação Parcial

Este método foi proposto por Vinod (1991) e se baseia na função de autocorrelação parcial de um processo $ARFIMA(0, d, 0)$, dada pelo Teorema 4.1.

$$\phi_{kk} = \frac{d}{k-d}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Resolvendo a equação anterior em d , temos

$$d = \frac{k\phi_{kk}}{1 + \phi_{kk}}. \quad (5.11)$$

Um possível estimador de d seria

$$\hat{d}^*(k) = \frac{k\hat{\phi}_{kk}}{1 + \hat{\phi}_{kk}}. \quad (5.12)$$

$\hat{\phi}_{kk}$ é a autocorrelação parcial amostral de ordem k , em particular, para $k = 1$, $\hat{\phi}_{kk} = \hat{\rho}_1$. Entretanto, ao escolher um único k para obter o estimador de d , estamos perdendo as informações sobre o parâmetro d que a função de autocorrelação parcial oferece para os demais valores de k . Com o objetivo de não perder tais informações, Vinod (1991) propôs combinar todos os $\hat{d}^*(k)$, para $k = 1, 2, \dots, T$, usando a função peso

$$W_k = \begin{cases} \frac{1}{\text{dp}(\hat{d}^*(k))} & \text{se } 0 < \hat{d}^*(k) < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \hat{d}^*(k) \notin (0, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

fornecendo o seguinte estimador para d

$$\hat{d}_{cp} = \frac{\sum_{k=1}^T W_k \hat{d}^*(k)}{\sum_{k=1}^T W_k}. \quad (5.13)$$

5.1.5 Método da Regressão Utilizando o Periodograma

Este método foi proposto por Geweke & Porter-Hudak (1983) e se baseia na equação que exhibe a relação entre a função de densidade espectral de um processo $ARFIMA(p, d, q)$ e a de um processo $ARMA(p, q)$. Tal equação foi reescrita para que se assemelhasse a uma

equação de regressão simples, onde o coeficiente de inclinação é dado por $b = -d$. Para estimar d foi proposto utilizar o método de regressão de mínimos quadrados. A seguir, será apresentado o processo de formação desse método.

Seja $\{X_t\}$ um processo $ARFIMA(p, d, q)$ com $|d| < \frac{1}{2}$, ou seja,

$$X_t = (1 - B)^{-d} \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

ou

$$X_t = \psi(B)a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \quad (5.14)$$

com $\psi_0 = 1$ e $\psi(B) = (1 - B)^{-d} \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$. Esta forma de representação de $\{X_t\}$, denominada no Capítulo 3 de *forma de choques aleatórios*, representa o processo $\{X_t\}$ como uma saída de um filtro linear cuja entrada é dada pelo processo ruído branco $\{a_t\}$. Pelo Teorema 2.10 a função de densidade espectral de X_t é dada por

$$f_x(\lambda) = |F(\lambda)|^2 f_a(\lambda) \quad (5.15)$$

onde $f_a(\lambda) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}$ é a função de densidade espectral de a_t e

$$F(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t \exp\{i\lambda t\} = \psi(e^{i\lambda}) = (1 - e^{i\lambda})^{-d} \frac{\theta(e^{i\lambda})}{\phi(e^{i\lambda})}. \quad (5.16)$$

De (5.16) temos que

$$|F(\lambda)|^2 = \left(2 \sin \frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2}, \quad (5.17)$$

assim, reescrevendo (5.15) temos

$$f_x(\lambda) = \left(2 \sin \frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2}. \quad (5.18)$$

Por outro lado, $U_t = (1 - B)^d X_t$ é um processo $ARMA(p, q)$ e, por (3.18), U_t tem função de densidade espectral dada por

$$f_u(\lambda) = \frac{\sigma_u^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})|^2}$$

Sendo assim, podemos reescrever (5.18), obtendo

$$f_x(\lambda) = \left(2 \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} f_u(\lambda). \quad (5.19)$$

Esta relação fatora a densidade espectral de X_t em dois termos independentes, onde o termo $\left(2 \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2}\right)^{-2d}$ descreve o comportamento de longa memória da série, enquanto $f_u(\lambda)$ descreve o comportamento de curta memória. Por outro lado, o comportamento de longa memória de uma série temporal, X_t , é revelado por sua função de densidade espectral, $f_x(\lambda)$, nas frequências próximas de zero. Com isso, é razoável pensar em estimar d com base em estimativas de $f_x(\lambda)$ para λ próximo de zero. Com esse objetivo, Geweke & Porter-Hudak (1983) utilizaram o periodograma de X_t , $I_x(\lambda)$, como estimador de $f_x(\lambda)$ e efetuaram algumas modificações em (5.19), dadas a seguir.

Multiplicando ambos os lados de (5.19) por $f_u(0)$ e aplicando o logaritmo, obtemos

$$\ln(f_x(\lambda)) = \ln(f_u(0)) - d \ln \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right] + \ln \left[\frac{f_u(\lambda)}{f_u(0)} \right]. \quad (5.20)$$

Fazendo $\lambda = \lambda_{j,T} = 2\pi j/T$ e adicionando $\ln[I_x(\lambda_{j,T})]$ a ambos os lados da equação anterior, temos

$$\ln(I_x(\lambda_{j,T})) = \ln(f_u(0)) - d \ln \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] + \ln \left[\frac{f_u(\lambda_{j,T})}{f_u(0)} \right] + \ln \left[\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right]. \quad (5.21)$$

O termo $\ln \left[\frac{f_u(\lambda_{j,T})}{f_u(0)} \right]$ em (5.21) pode ser desprezado quando se considera apenas as frequências $\lambda_{j,T}$ próximas de zero. Para isso, consideremos $j = 1, 2, \dots, n$ em (5.21), onde n é um inteiro positivo, $n < T$, tal que quando $T \rightarrow \infty$ a frequência $\lambda_{j,T}$ se aproxima de zero e, consequentemente, o termo citado anteriormente também se aproxima de zero, podendo ser ignorado. Com isso, podemos escrever

$$\ln(I_x(\lambda_{j,T})) \approx \ln(f_u(0)) - d \ln \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] + \ln \left[\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.22)$$

O teorema enunciado a seguir assegura que, para $d < 0$, os termos $\ln \left[\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right]$, $j = 1, 2, \dots, T-1$, são assintoticamente independentes e identicamente distribuídos com média e variância finitas.

Teorema 5.3 Seja $\{X_t\}$ um processo $ARFIMA(p, d, q)$ com $d < 0$ e $\{a_t\}$ um processo ruído branco. Quando $T \rightarrow \infty$ os termos $\{-\ln(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})})\}$, $j = 1, 2, \dots, T-1$ seguem distribuições de Gumbel independentes com média 0,557216 (constante de Euler) e variância $\frac{\pi^2}{6}$.

Demonstração: Ver Reisen (1994).

Utilizando a notação

$$\begin{aligned} y_j &= \ln(I_x(\lambda_{j,T})) & , & \quad a = \ln(f_u(0)) - C \quad , \\ x_j &= \ln \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] & , & \quad b = -d \quad , \\ \varepsilon_j &= \ln \left[\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right] + C & \quad \text{e} & \quad C = E \left\{ -\ln \left[\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right] \right\} = \text{constante de Euler.} \end{aligned}$$

temos

$$y_j = a + bx_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.23)$$

que tem a forma de uma equação de regressão linear simples. Com isso, a idéia de Geweke & Porter-Hudak (1983) foi de aplicar o método de regressão de mínimos quadrados ordinários para estimar d . Mas, para isso, é necessário que os termos de $\{\varepsilon_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ sejam assintoticamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância finita. Entretanto, isso não é válido, pois n é fixo, ou seja, quando se faz $T \rightarrow \infty$ as frequências $\lambda_{j,T}$ permanecem fixas, impedindo que os teoremas de limite central usuais possam ser aplicados. Para solucionar esse problema, a idéia é fazer $n = g(T)$, tal que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{g(T)}{T} = 0.$$

Com isso, o teorema citado anteriormente pode ser aplicado aos termos $\{-\ln(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})})\}$ de (5.23). Quanto a escolha adequada de $g(T)$, o mais indicado é escolher $g(T) = T^\alpha$ com $0 < \alpha < 1$.

Agora, iremos considerar (5.23) para $j = 1, 2, \dots, g(T)$. Pelo Teorema 5.3, temos que os termos da sequência $\{\varepsilon_j\} = \{-\ln(\frac{I_x(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})})\} - C$ são assintoticamente independentes e identicamente distribuídos conforme a distribuição de Gumbel de média 0 e variância $\pi^2/6$.

Sendo assim, o estimador de d , proposto por Geweke & Porter-Hudak, é dado por $\hat{d}_p = -\hat{b}$, onde

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.24)$$

é o estimador do coeficiente de inclinação de (5.23), b , obtido através do método de mínimos quadrados aplicado a uma regressão linear simples de $y_1, y_2, \dots, y_{g(T)}$ sobre $x_1, x_2, \dots, x_{g(T)}$. A esperança e a variância desse estimador são dadas por

$$E(\hat{d}_p) = E(-\hat{b}) = d \quad \text{e} \quad \text{Var}(\hat{d}_p) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Teorema 5.4 (*Geweke & Porter-Hudak (1983)*). O estimador do parâmetro de longa memória, $\hat{d}_p$, tem distribuição assintótica normal dada por

$$N\left(d, \frac{\pi^2}{6 \sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2}\right).$$

com $g(T) = cT^\alpha$, onde $0 < \alpha < 1$ e c é uma constante qualquer.

Teorema 5.5 Suponha que $\{X_t\}$ seja um processo $ARFIMA(p, d, q)$, com $d < 0$. Seja $I(\lambda_{j,T})$ o periodograma de $\{X_t\}$ na frequência harmônica $\lambda_{j,T} = 2\pi j/T$ numa amostra de tamanho T . Seja $\hat{d}_p$ o estimador de mínimos quadrados de d na equação de regressão obtida de (5.22)

$$\ln\{I(\lambda_{j,T})\} = \beta_0 + d \ln\{4\sin^2(\lambda_{j,T}/2)\} + u_{j,T}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Então, existe uma função $g(T)$ com

$$\lim_{T \rightarrow 0} g(T) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow 0} g(T)/T = 0,$$

de tal forma que

- (a) se $n = g(T)$, então $\text{plim } \hat{d}_p = -d$;
- (b) se $\lim_{T \rightarrow \infty} (\ln T)^2 / g(T) = 0$, então

$$\frac{(\hat{d}_p + d)}{\{\text{vâr}(\hat{d}_p)\}^{1/2}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

onde $\text{vâr}(\hat{d}_p)$ é o estimador de mínimos quadrados de $\text{var}(\hat{d}_p)$.

Nota: Embora os resultados apresentados no Teoremas 5.3, 5.4 e 5.5 sejam válidos somente para $d < 0$, Geweke & Porter-Hudak (1983) mostram através de simulações que tais propriedades são válidas para $d > 0$.

5.1.6 Método de Regressão Utilizando o Periodograma Suavizado

Este método foi proposto por Reisen (1994). Com o objetivo de melhorar o método de regressão descrito na seção anterior, um estimador consistente e não viciado de $f_x(\lambda)$ é utilizado no método de estimação no lugar do periodograma simples. Foi sugerido substituir o periodograma simples pelo periodograma suavizado em (5.21), obtendo a seguinte equação

$$\ln[f_x^T(\lambda_{j,T})] = \ln[f_u(0)] - d \ln \left[4 \text{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] + \ln \left[\frac{f_u(\lambda_{j,T})}{f_u(0)} \right] + \ln \left[\frac{f_x^T(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right], \quad (5.25)$$

onde $f_x^T(\lambda_{j,T})$ é o *periodograma suavizado* da série $\{X_t\}$, dado pela Definição 2.11, com $\lambda_{j,T} = 2\pi j/T$, $j = 1, 2, \dots, T$, que pode ser escrito como

$$f_x^T(\lambda_{j,T}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-m}^m k\left(\frac{s}{m}\right) R(s) \cos(s\lambda_{j,T}), \quad (5.26)$$

onde $k(u)$ é uma função par e contínua no intervalo $(-1, 1)$ com $k(0) = 1$, chamada de *função geradora da janela espectral* e $R(s)$ é a autocovariância amostral de ordem s de $\{X_t\}$. O parâmetro m é uma função de T , tal que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} m = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m}{T} = 0.$$

Em geral, escolhe-se $m = T^\beta$, $0 < \beta < 1$.

Como foi visto na seção anterior, o termo $\ln \left[\frac{f_u(\lambda_{j,T})}{f_u(0)} \right]$ de (5.25) pode ser desprezado se forem consideradas apenas as frequências $\lambda_{j,T}$ próximas de zero. Então, escolhendo $g(T)$ pelos mesmos critérios citados anteriormente, pode-se escrever, para $j = 1, 2, \dots, g(T)$,

$$\ln[f_x^T(\lambda_{j,T})] \approx \ln[f_u(0)] - d \ln \left[4 \text{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] + \ln \left[\frac{f_x^T(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right] \quad (5.27)$$

que tem a forma de uma equação de regressão linear simples do tipo

$$y_j = a + bx_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, g(T) \quad (5.28)$$

onde

$$y_j = \ln(f_x^T(\lambda_{j,T})) \quad . \quad a = \ln(f_u(0)) \quad .$$

$$x_j = \ln \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] \quad . \quad b = -d \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_j = \ln \left[\frac{f_x^T(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right] \quad .$$

A relação (5.28) sugere estimar d através do método de mínimos quadrados. Entretanto, para isso é preciso assegurar que os termos de $\{\varepsilon_j\}$ são não correlacionados com média zero e variância constante. Por Priestley (1981), $f_x^T(\lambda)$ é assintoticamente não viciado com variância dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [\operatorname{Var}(f_x^T(\lambda))] = \begin{cases} f_x^2(\lambda) \frac{m}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) \, du & \text{se } \lambda \neq 0, \pm\pi \\ 2f_x^2(\lambda) \frac{m}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) \, du & \text{se } \lambda = 0, \pm\pi \end{cases} \quad (5.29)$$

Reisen (1994) mostrou que para qualquer função geradora de janela espectral, $k(u)$, que satisfaça as condições do Teorema 9.2.1 de Anderson (1971), o teorema abaixo é válido.

Teorema 5.6 Seja $f_x(\lambda_{j,T})$ a função de densidade espectral de um modelo $ARFIMA(p, d, q)$, $d \in (-\frac{1}{2}, 0)$, e $f_x^T(\lambda_{j,T})$ um estimador de $f_x(\lambda_{j,T})$ como em (5.26). Então, os termos $\ln\left\{\frac{f_x^T(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})}\right\}$ são não correlacionados com distribuição assintótica normal de média 0 e variância dado por

$$\operatorname{Var} \left[\frac{f_x^T(\lambda_{j,T})}{f_x(\lambda_{j,T})} \right] \approx \begin{cases} \frac{M}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) \, du & \text{se } \lambda \neq 0, \pm\pi \\ \frac{2M}{T} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) \, du & \text{se } \lambda = 0, \pm\pi \end{cases}$$

Do Teorema 5.6, quando $-1/2 < d < 0$, pode-se utilizar o estimador de mínimos quadrados de b em (5.28) para estimar d . Deste modo, o estimador de d é dado por $\hat{d}_{ps} = -\hat{b}$, onde

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.30)$$

cuja variância, de acordo com Reisen (1994), é dada por

$$\operatorname{Var}(\hat{d}) \approx \frac{M}{T \sum_{i=1}^{g(T)} (x_i - \bar{x})^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) \, du \quad \text{se } \lambda \neq 0, \pm\pi \quad (5.31)$$

Nota: Apesar do Teorema 5.6 ser válido somente para $-1/2 < d < 0$, Reisen (1994) mostra, através de simulações, que estes resultados são válidos quando $d > 0$.

5.1.7 Método de Máxima Verossimilhança

O estudo do estimador de máxima verossimilhança (EMV) para observações dependentes é vasto e reúne muitos resultados. Sweeting (1980) apresentou as condições sob as quais o estimador de máxima verossimilhança é consistente e tem distribuição assintótica normal. Basawa & Prakasa Rao (1983) e Basawa & Scott (1983) apresentaram teoremas e exemplos nesta área. Nesse contexto, uma série temporal com comportamento de longa memória é classificada como *sequência de forte dependência* e, portanto, o EMV para este tipo de série é um caso particular do problema citado anteriormente. Para determinar o EMV para sequências de forte dependência Fox & Taqqu (1986) aplicaram os resultados já obtidos para o caso de observações dependentes e apresentaram as condições que permitem que o estimador encontrado seja consistente e tenha distribuição assintótica normal. Tais condições são satisfeitas pelos processos *ARFIMA*(p, d, q) e ruído Gaussiano fracionário, ambos definidos no Capítulo 4.

Definição 5.1 Seja $\{X_j, j = 1, 2, \dots\}$ uma sequência Gaussiana estacionária com média μ e função de densidade espectral $\sigma^2 f(\lambda, \theta)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, onde $\mu, \sigma^2 > 0$ e o vetor $\theta \in E \subset \mathbb{R}^p$ são parâmetros desconhecidos. A covariância de X_t é dada por

$$E(X_j - \mu)(X_{j+k} - \mu) = \sigma^2 \gamma_k(\theta) = \sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda, \theta) d\lambda$$

No caso de uma sequência de longa memória, X_j , a função de densidade espectral, $f(\lambda, \theta)$, apresenta o seguinte comportamento nas frequências próximas de zero

$$f(\lambda, \theta) \sim |\lambda|^{-\alpha(\theta)} G_{\theta}(\lambda) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0,$$

onde $0 < \alpha(\theta) < 1$ e $G_{\theta}(\lambda)$ varia suavemente quando $\lambda \rightarrow 0$.

O método de máxima verossimilhança estima θ e σ^2 maximizando, com relação a θ e σ^2 ,

$$f(X_1, \dots, X_T; \theta, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^T \exp \left\{ -\frac{Z' R_T^{-1}(\theta) Z}{2T\sigma^2} \right\}$$

com $Z = (X_1 - \bar{X}_T, \dots, X_T - \bar{X}_T)^t$, onde $\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T X_j$ e $R_T(\theta)$ é tal que $\sigma^2 R_T(\theta)$ é a matriz de covariância de $X_1, \dots, X_T$.

Como o cálculo da inversa de $R_T(\theta)$ é complicado computacionalmente, Fox & Taqqu (1986) utilizam a proposta de Whittle (1951) que aproxima a inversa de $R_T(\theta)$ pela matriz de ordem $(T \times T)$, $A_T(\theta)$, cuja entrada (j, k) é dada por

$$[A_T(\theta)]_{jk} = a_{j-k}(\theta) = a_s(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} (f(\lambda, \theta))^{-1} d\lambda.$$

Desse modo, aplicar o método de máxima verossimilhança para estimar θ e σ^2 significa maximizar

$$f(X_1, \dots, X_T; \theta, \sigma^2) \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^T \exp \left\{ -\frac{Z' A_T(\theta) Z}{2T\sigma^2} \right\} \quad (5.32)$$

com relação a θ e σ^2 . Assim, são escolhidos os valores de θ e σ^2 que maximizam (5.32), denominados estimadores de máxima verossimilhança e denotados por $\hat{\theta}_T$ e $\hat{\sigma}_T^2$, respectivamente. Isto é equivalente a escolher $\hat{\theta}_T$ que minimize

$$\sigma_T^2(\theta) = \frac{Z' A_T(\theta) Z}{T} \quad (5.33)$$

e depois fazer $\hat{\sigma}_T^2 = \sigma_T^2(\hat{\theta}_T)$. O estimador de máximaverossimilhança de d será denotado por $\hat{d}_{mv}$.

A seguir serão dadas as condições sob as quais $\hat{\theta}_T$ e $\hat{\sigma}_T^2$ são consistentes e têm distribuição assintótica normal.

Condições: Dizemos que $f(\lambda, \theta)$ satisfaz as condições (1) – (6) se existir $0 < \alpha(\theta) < 1$ tal que para cada $\delta > 0$

1. $g(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda, \theta) d\lambda$ pode ser diferenciada duas vezes sob o sinal da integral.
2. $f(\lambda, \theta)$ é contínua para todo (λ, θ) , $x \neq 0$, $f^{-1}(\lambda, \theta)$ é contínua para todo (λ, θ) , e

$$f(\lambda, \theta) = O(|\lambda|^{-\alpha(\theta)-\delta}) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0.$$

3. $\frac{\partial}{\partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta)$ e $\frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta)$ são contínuas para todo (λ, θ) .

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta) = O(|\lambda|^{\alpha(\theta)-\delta}) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad 1 \leq j \leq p, \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta) = O(|\lambda|^{\alpha(\theta)-\delta}) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad 1 \leq j, k \leq p.$$

4. $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \theta)$ é contínua para todo (λ, θ) , $x \neq 0$, e

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} f(\lambda, \theta) = O(|\lambda|^{\alpha(\theta)-\delta-1}) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0.$$

5. $\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta)$ é contínua para todo (λ, θ) , $x \neq 0$, e

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta) = O(|\lambda|^{\alpha(\theta)-\delta-1}) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad 1 \leq j \leq p.$$

6. $\frac{\partial^3}{\partial^2 \lambda \partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta)$ é contínua para todo (λ, θ) , $x \neq 0$, e

$$\frac{\partial^3}{\partial^2 \lambda \partial \theta_j} f^{-1}(\lambda, \theta) = O(|\lambda|^{\alpha(\theta)-\delta-2}) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Os teoremas enunciados a seguir, apresentados por Fox & Taqqu (1986), estabelecem sob que condições os estimadores $\hat{\theta}_T$ e $\hat{\sigma}_T^2$ são consistentes e têm distribuição assintótica normal.

Teorema 5.7 Se $f(\lambda, \theta)$ satisfaz as condições 2 e 4, então com probabilidade 1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_T = \theta_0 \text{ e } \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_T^2 = \sigma_0^2,$$

onde θ_0 e σ_0^2 são os verdadeiros valores dos parâmetros θ e σ^2 .

Teorema 5.8 Se as condições (1) – (6) são satisfeitas então o vetor aleatório $\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ converge em distribuição para um vetor aleatório normal com média μ e matriz de covariância $4\pi W^{-1}(\theta_0)$, onde $W(\theta)$ é uma matriz $p \times p$ com entrada (j, k) dada por

$$w_{jk}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} f^{-1}(\lambda, \theta) d\lambda$$

Teorema 5.9 Se $X_j - \mu$ é um processo ruído Gaussiano fracionário com $1/2 < H < 1$ ou um $ARFIMA(p, d, q)$ com $0 < d < 1/2$ os resultados dos Teoremas 5.7 e 5.8 se aplicam e neste caso $\theta = \{\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q \text{ e } d\}$

As demonstrações desses teoremas são encontradas em Fox & Taqqu (1986).

5.1.8 Método de Ondaletas

Considere o espaço $L^2(\mathbb{R})$ de funções mensuráveis, f , definidas na reta real $\mathbb{R}$, que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.34)$$

Assim as funções $f(t)$ devem decair para zero quando $t \rightarrow \pm\infty$. O método de estimação estudado nesta seção se baseia em funções que geram $L^2(\mathbb{R})$ e que satisfazem (5.34). A idéia é considerar dilatações (compressões) e translações de uma única função ψ de modo a cobrir $\mathbb{R}$. Ou seja, consideramos a função

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

onde $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ é um termo normalizador, ou seja, $\|\psi_{a,b}(x)\| = 1$. Devido ao tipo de comportamento dessa função, ela é denominada de “wavelet” (ondaleta ou pequena onda). Como pode ser observado, a “wavelet” $\psi_{a,b}(x)$ é obtida através da translação e da dilatação de $\psi(x)$. Por isso, chamamos a de parâmetro de escala ou dilatação e b de parâmetro de translação. $\psi(x)$ é chamada de “wavelet mãe” ou “wavelet básica” e obedece às seguintes condições:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, chamada de condição de admissibilidade.
- As funções $\psi_{a,b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, são ortonormais, para escalas de a e b .
- $\int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt = 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$, para algum $M \geq 1$ e
- $\int_{-\infty}^{\infty} |t^M \psi(t)| dt < \infty$.

Usualmente tomamos valores especiais $a = 2^{-j}$ e $b = 2^{-j}k$, onde $j, k \in \mathbb{Z}$. Com isso, as ondaletas consideradas são dadas por

$$\psi_{a,b}(x) = \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(x) = \sqrt{2^j} \psi\left(\frac{x - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k) = \psi_{j,k}(x), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (5.35)$$

Definição 5.2 Seja X_t , $t = 0, \pm 1, \dots$ uma série temporal. Os coeficientes de ondaletas para X_t são dados pelo produto interno

$$\langle X_t, \psi_{j,k}(t) \rangle = \sqrt{2^j} \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t \psi \left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}} \right). \quad (5.36)$$

onde $j, k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Na prática, temos X_t , $t = 0, 1, \dots, T$, uma série temporal finita, com $T = 2^m$, $m > 0$ inteiro. Com isso, os coeficientes de ondaletas são dados pela transformada finita de ondaletas com respeito a ψ

$$d_{j,k}^{(\psi)} = \sqrt{2^j} \sum_{t=0}^{T-1} X_t \psi \left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}} \right).$$

com $j = 0, 1, \dots, m-1$ e $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$. Desse modo, o valor do parâmetro k depende de j , o que implica em dizer que fixado o valor de j teremos um número correspondente de funções $\psi_{j,k}(t)$. Quanto menor o valor de j , menos funções $\psi_{j,k}(t)$ correspondentes. Por exemplo, quando $j = 0$ temos apenas uma função $\psi_{0,0}(t)$ correspondente e se $j = 2$ temos $2^2 = 4$ funções $\psi_{2,0}(t)$, $\psi_{2,1}(t)$, $\psi_{2,2}(t)$ e $\psi_{2,3}(t)$ correspondentes.

Na literatura encontramos vários tipos de ondaletas, onde a mais simples é a função de Haar, dada por:

$$\psi_{j,k}^{(H)}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k+1/2) \\ 2^{j/2}, & 2^{-j}(k+1/2) \leq t < 2^{-j}(k+1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outros exemplos de ondaletas são as “Daubechies”, “Symmlets” e “Coiflets” todas introduzidas por Daubechies. Essas funções são de suporte compacto e não-simétricas. Para maiores detalhes, ver Daubechies (1992). As “Symmlets” são utilizadas como “default” em alguns programas por serem as menos assimétricas. Neste trabalho, utilizamos o “software wave-thresh” desenvolvido por Nason, que pode ser obtido livremente da biblioteca Statlib na ftp anônima (<ftp://lib.stat.cmu.edu/S/wavethresh>). Este software opera dentro do pacote S-plus e existe apenas a versão para UNIX. Um roteiro para o uso do programa está em Nason & Silvemmann (1994).

Teorema 5.10 Seja X_t um processo $ARFIMA(0, d, 0)$ de média zero, com $|d| < 1/2$. A transformada finita de ondaletas, $d_{j,k}^{(\psi)}$, dada por (5.36), tem distribuição normal com média zero e variância aproximada $\sigma^2 |2^{-j}|^{2d}$, onde σ^2 é uma constante finita. Ver Jensen (1996) para maiores detalhes.

Se X_t é um processo $ARFIMA(0, d, 0)$ com média zero e $|d| < 1/2$, do Teorema 5.10 temos que

$$R_k(j) = E[(d_{j,k}^{(\psi)})^2] \quad (5.37)$$

é a variância dos coeficientes de ondaletas e que $R_k(j) \cong \sigma^2 |2^{-j}|^{2d}$. Assim, aplicando o logaritmo obtemos a seguinte relação log-linear entre $R_k(j)$ e d

$$\ln R_k(j) \cong \ln \sigma^2 + d \ln |2^{-j}|^2. \quad (5.38)$$

Por outro lado, podemos utilizar a variância amostral de $d_{j,k}^{(\psi)}$ para estimar $R_k(j)$, obtendo o estimador

$$\hat{R}(j) = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} (d_{j,k}^{(\psi)})^2, \quad (5.39)$$

onde $j = 0, 1, \dots, m-1$. Adicionando $\ln \hat{R}(j)$ em ambos os lados de (5.38) e fazendo $\varepsilon_j = \ln \hat{R}(j) - \ln R_k(j)$ chegamos na seguinte relação

$$\ln \hat{R}(j) \cong \ln \sigma^2 + d \ln |2^{-j}|^2 + \varepsilon_j. \quad (5.40)$$

Diante da relação (5.40), Jensen (1996) sugere estimar o parâmetro de diferença fracionária, d , através do método de mínimos quadrados ordinários.

Pode-se demonstrar que $E(\hat{R}(j)) = R_k(j)$ e $Var(\hat{R}(j)) \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$. Pela lei dos grandes números de Markov, $\hat{R}(j)$ converge em probabilidade para $R_k(j)$ quando $j \rightarrow \infty$. Sendo assim, podemos escrever que

$$\ln \hat{R}(j) = \ln R_k(j) + o_p(1).$$

Substituindo $R_k(j)$ por $\sigma^2 |2^{-j}|^{2d}$, temos

$$\ln \hat{R}(j) = \ln \sigma^2 + d \ln |2^{-j}|^2 + o_p(1). \quad (5.41)$$

Ou seja, quando $j \rightarrow \infty$, o estimador de mínimos quadrados ordinários, $\hat{d}_n$, obtido através da relação (5.41), oferece uma estimativa do parâmetro de diferença fracionária, d , do processo $ARFIMA(0, d, 0)$.

Nota: Como foi visto anteriormente, o número de funções $\psi_{j,k}(t)$, para j fixado, varia de acordo com os valores de j . Logo, o número de coeficientes de ondaletas, $d_{j,k}^{(\psi)}$, para a escala j também varia. Na prática, não utilizamos os estimadores $\hat{R}(j)$ para j “pequeno”. Jensen (1996), através de simulações, sugere que se utilize $\hat{R}(j)$ para $j = 2, 3, \dots, m - 1$ no método de estimação de d . Com isso, o estimador do parâmetro d é obtido utilizando o método de mínimos quadrados na regressão linear simples:

$$\ln \hat{R}(j) = \ln \sigma^2 + d \ln |2^{-j}|^2 + o_p(1), \quad j = 2, 3, \dots, m - 1. \quad (5.42)$$

onde m é tal que $T = 2^m$.

5.2 Algoritmo para ajustamento de um modelo ARFIMA(p,d,q)

Esta seção apresenta um algoritmo para se estimar os parâmetros autoregressivos e de médias móveis no modelo $ARFIMA(p, d, q)$. Na seção anterior vimos os métodos de estimação do parâmetro d , que em geral é estimado separadamente dos outros parâmetros do modelo, exceção feita para o estimador de máxima verossimilhança. Devido a esse fato, apresentamos um método que utiliza um filtro que retira da série o componente de longa memória, referente ao parâmetro d . Desse modo, conseguimos estimar os demais parâmetros através dos métodos tradicionais.

Temos o estimador de máxima verossimilhança que estima todos os parâmetros simultaneamente e, por isso, não necessita do algoritmo apresentado nesta seção para estimar os parâmetros. Os estimadores do periodograma e do periodograma suavizado foram elaborados para modelos $ARFIMA(p, d, q)$, mas não estimam os parâmetros simultaneamente. Já os demais estimadores têm seus métodos baseados em modelos $ARFIMA(0, d, 0)$ o que implica num método recursivo para estimar os parâmetros. Portanto, temos três classes de estimadores de d e para cada classe o método de estimação dos demais parâmetros é

diferente.

Como foi dito anteriormente, após estimar o parâmetro d no modelo $ARFIMA(p, d, q)$ precisamos filtrar a série de tal forma a eliminar o componente de longa memória. Para isso, vamos nos basear em (5.19)

$$f_x(\lambda) = \left(2\text{sen}\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} f_u(\lambda) \quad (5.43)$$

onde $f_x(\lambda)$ é a densidade espectral do processo $X_t \sim ARFIMA(p, d, q)$ e $f_u(\lambda)$ é a função de densidade espectral de um processo $U_t \sim ARMA(p, q)$. De (5.43) obtemos

$$f_u(\lambda) = \left(2\text{sen}\frac{\lambda}{2}\right)^{2d} f_x(\lambda) \quad (5.44)$$

e é esta relação que iremos utilizar para eliminar a componente de longa memória da série. A seguir apresentamos um algoritmo para estimar os parâmetros do modelo $ARFIMA(p, d, q)$. Considere $\{X_t, t = 0, 1, \dots, T-1\}$.

Passo 1: Obter uma estimativa de d , $\hat{d}$.

Passo 2: Obter a transformada discreta de Fourier de X_t , $I_x(\lambda_{j,T})$, nas frequências harmônicas $\lambda_{j,T} = 2\pi j/T$, $j = 1, 2, \dots, T$.

Passo 3: Com base em (5.44), calcular

$$I_u(\lambda_{j,T}) = \left(2\text{sen}\frac{\lambda_{j,T}}{2}\right)^{2\hat{d}} I_x(\lambda_{j,T})$$

que é a estimativa da transformada discreta de Fourier do processo $U_t \sim ARMA(p, q)$.

Passo 4: Aplicar a transformada inversa de Fourier em $I_u(\lambda_{j,T})$ e obter $\hat{U}_t$.

Passo 5: Obter as estimativas dos parâmetros autoregressivos ($\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$) e de médias móveis ($\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$) de $\hat{U}_t$ através dos métodos usuais de estimação, por exemplo, o método de máxima verossimilhança.

Passo 6: Calcular

$$\frac{\hat{\phi}(B)}{\hat{\theta}(B)} X_t = Z_t.$$

onde $\hat{\phi}(B) = 1 - \hat{\phi}_1 B - \dots - \hat{\phi}_p B^p$ e $\hat{\theta}(B) = 1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q$. Assim, Z_t pode ser considerado um processo $ARFIMA(0, d, 0)$.

Passo 7: Utilizar Z_t para estimar d , obtendo $\hat{d}$.

Passo 8: Voltar ao Passo 3 até que as estimativas converjam.

Se forem utilizados os estimadores do periodograma e do periodograma suavizado para estimar d , o método de estimação dos parâmetros se resume aos 5 primeiros passos. Caso contrário, o método é composto desses oito passos, exceto o estimador de máxima verossimilhança que estima simultaneamente todos os parâmetros do modelo $ARFIMA(p, d, q)$.

Capítulo 6

Simulações

Neste capítulo comparamos os estimadores apresentados no Capítulo 5. $\hat{d}_c, \hat{d}_{cg}, \hat{d}_p, \hat{d}_{ps}, \hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$, com base em simulações de amostras de processos $ARFIMA(p, d, q)$. Foram simuladas amostras para modelos $ARFIMA(0, d, 0)$, $ARFIMA(1, d, 0)$ e $ARFIMA(0, d, 1)$. No caso do modelo $ARFIMA(0, d, 0)$, foram simuladas amostras para os seguintes valores de d : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,45, resultando em cinco modelos. No caso dos modelos $ARFIMA(1, d, 0)$ e $ARFIMA(0, d, 1)$, d assume apenas um valor: 0,3 e os valores do parâmetro auto-regressivo e de médias móveis são 0,7 e $-0,6$, respectivamente. Para cada modelo citado acima foram feitas 1.000 simulações de amostras de tamanho 128, 256 e 512. Abaixo, temos uma tabela que resume as simulações feitas, onde ϕ_1 é o parâmetro auto-regressivo de ordem 1 e θ_1 é o parâmetro de médias móveis de ordem 1.

Características	Modelos		
	$ARFIMA(0, d, 0)$	$ARFIMA(1, d, 0)$	$ARFIMA(0, d, 1)$
Valores de d	0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,45	0,3	0,3
Valor de ϕ_1	-	0,7	-
Valor de θ_1	-	-	-0,6
Tamanhos de amostra	128, 256, 512	128, 256, 512	128, 256, 512
Número de simulações	1.000	1.000	1.000

Fazendo um breve resumo dos estimadores de d , temos:

1. Estimador da autocorrelação de ordem 1

$$\hat{d}_c = \frac{\hat{\rho}_1}{1 + \hat{\rho}_1}.$$

onde $\hat{\rho}_1$ é a autocorrelação amostral de ordem um de um processo ARFIMA(0,d,0).

2. Estimador da autocorrelação generalizado

$$\hat{d}_{cg} = \sum_{i=1}^N a_i \hat{d}(i).$$

onde os pesos a_i são dados em 5.6 e $\hat{d}(k) = \frac{k\hat{\rho}_k - (k-1)\hat{\rho}_{k-1}}{\hat{\rho}_k + \hat{\rho}_{k-1}}$, onde $\hat{\rho}_k$ é a autocorrelação amostral de ordem k de um processo ARFIMA(0,d,0). Escolhemos $N = 30$, com base nos resultados das simulações feitas por Gupta & Ji (1992).

3. O estimador do periodograma $\hat{d}_p$ é obtido através do método de regressão mínimos quadrados aplicado à equação

$$\ln(I_x(\lambda_{j,T})) = a - d \ln \left[4 \sin^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, g(T)$$

onde $I_x(\lambda_{j,T})$ é o periodograma de um processo ARFIMA(p,d,q), a função $g(T) = T^\alpha$, onde $\alpha = 0,5$ e T é o tamanho da amostra.

4. O estimador do periodograma suavizado, $\hat{d}_{ps}$, é obtido através do método de regressão de mínimos quadrados aplicado à equação

$$\ln(f_x^T(\lambda_{j,T})) = a + -d \ln \left[4 \sin^2 \left(\frac{\lambda_{j,T}}{2} \right) \right] + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, g(T)$$

onde $f_x^T(\lambda_{j,T})$ é o periodograma suavizado de um processo ARFIMA(p,d,q), a função $g(T) = T^\alpha$, onde $\alpha = 0,5$ e T é o tamanho da amostra. Utilizamos a janela espectral de Parzen para obter o periodograma suavizado $f_x^T(\lambda_{j,T})$. Quanto ao ponto de truncamento da janela espectral, escolhemos $m = T^\beta$, com $\beta = 0,9$. Tal decisão foi

tomada com base no estudo de Reisen (1994), que após simulações sugere esse ponto de truncamento. A janela de Parzen é dada por

$$k(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6|u|^3, & |u| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |u|)^3, & \frac{1}{2} \leq |u| \leq 1 \\ 0, & |u| > 1. \end{cases}$$

5. O estimador das ondaletas, $\hat{d}_w$, é obtido através do método de regressão de mínimos quadrados aplicado à equação

$$\ln \hat{R}(a) = \ln \sigma^2 + d \ln |2^{-a}|^2 + o_p(1), \quad a = 2, 3, \dots, \log_2(T).$$

onde $\hat{R}(a)$ é o estimador da variância dos coeficientes de ondaletas, $d_{j,k}^{(\psi)}$.

Para obter os coeficientes das ondaletas, $d_{j,k}^{(\psi)}$, utilizamos a transformada discreta de ondaletas, em um pacote de programas para a linguagem S-Plus, elaborados por Nason (1994), denominado “wavethresh”, que está disponível na Internet, ver Nason (1994). Esse pacote utiliza duas famílias de ondaletas ortonormais com suporte compacto, cujos nomes são: DaubExPhase e DaubLsymm, definidas em Daubechies (1992). Em nossos estudos utilizamos a família de ondaletas DaubExPhase (N), onde N é o número do filtro da ondaleta, quanto maior for o N mais suave será a ondaleta. Foram feitas simulações para vários valores de N e foi escolhido para a apresentação dos resultados o valor $N=2$.

O programa utilizado para obter as simulações foi o S-Plus, que possui uma rotina própria para simular modelos $ARFIMA(p, d, q)$. O estimador de máxima verossimilhança foi obtido diretamente, através de uma rotina que o calcula para modelos $ARFIMA(p, d, q)$. Quanto aos demais estimadores, foram feitos programas especiais, também para o S-Plus, que estão no Apêndice A. Nas seções posteriores mostraremos os resultados obtidos com as simulações para cada um dos modelos citados anteriormente e, com base nesses resultados, compararemos os diversos estimadores de d .

6.1 Resultados para os modelos $ARFIMA(0, d, 0)$

O modelo $ARFIMA(0, d, 0)$ é o mais simples dos modelos de longa memória. Ao simular amostras de cinco modelos $ARFIMA(0, d, 0)$ diferentes, onde $d = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4$ e $0, 45$,

temos como objetivo comparar os estimadores de d para diferentes valores de d . Além disso, como sabemos que um processo $ARFIMA(p, d, q)$ é estacionário se $d < 0,5$, queremos avaliar o quanto os estimadores de d pioram quando este se aproxima do limite de não estacionariedade. Foram simuladas amostras de três tamanhos diferentes, $T = 128, 256$ e 512 , com o objetivo de avaliar as propriedades assintóticas dos estimadores para esses diferentes valores de d .

As propriedades dos estimadores são avaliadas através de:

(a) variância estimada de $\hat{d}$

$$\hat{Var}(\hat{d}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{d}_{ij} - \bar{d}_j)^2}{999} . \quad (6.1)$$

onde j se refere ao método utilizado para obtenção do estimador de d e $\bar{d}_j = \frac{\sum_{i=1}^{1000} \hat{d}_{ij}}{1000}$,

(b) viés estimado de $\hat{d}$

$$\hat{B}(\hat{d}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{d}_{ij} - d)}{1000} \quad e \quad (6.2)$$

(c) erro quadrático médio estimado

$$E\hat{Q}M(\hat{d}_j) = \hat{Var}(\hat{d}_j) + (\hat{B}(\hat{d}_j))^2 . \quad (6.3)$$

A Tabela 6.1 sintetiza os resultados obtidos com as simulações. Apresentamos as estimativas da variância e do viés de todos os estimadores de d nos cinco modelos $ARFIMA(0, d, 0)$, $d = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4$ e $0, 45$. A tabela se refere aos resultados obtidos para amostras de tamanho $T = 128, 256$ e 512 . Através dessa tabela podemos analisar os estimadores segundo o viés e a variância estimados, obtidos nas simulações para os diferentes casos apresentados. Com base nos resultados, podemos afirmar que:

1. Para tamanhos de amostra 128 e 256, as estimativas das variâncias dos estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ tendem a diminuir quando o valor do parâmetro d aumenta. Entretanto, para $T = 512$, esse comportamento não se verifica, indicando que não há relação específica da variância com os valores do parâmetro d .

2. As estimativas das variâncias dos demais estimadores não apresentam tendência de crescimento ou de decrescimento em relação aos valores de d para todos os tamanhos de amostra utilizados. Isso indica que, no caso de modelos $ARFIMA(0, d, 0)$, a variância desses estimadores não depende do valor que d assume.
3. Os estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$ apresentam estimativas do viés que aumentam em valor absoluto quando o parâmetro d se aproxima do limite de não estacionariedade, 0,5. Para os dois primeiros estimadores esse crescimento do viés é bem mais acentuado que para $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$. Esse comportamento acontece para todos os tamanhos de amostra utilizados.
4. As estimativas de viés dos estimadores $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$ não apresentam nenhuma tendência com relação aos valores que o parâmetro d assume.
5. Todos os estimadores apresentam uma diminuição na variância e no viés estimado quando aumentamos o tamanho da amostra nas simulações. Tal fato confirma as propriedades assintóticas dos estimadores.

Tabela 6.1 - Estimativas do viés e da variância do parâmetro d de um modelo $ARFIMA(0,d,0)$

T=128	d=0,1		d=0,2		d=0,3		d=0,4		d=0,45	
	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$
$\hat{d}_c$	0,006	-0,024	0,004	-0,037	0,004	-0,058	0,002	-0,088	0,002	-0,108
$\hat{d}_{cg}$	0,006	-0,021	0,005	-0,034	0,004	0,056	0,003	-0,091	0,002	-0,113
$\hat{d}_p$	0,061	-0,003	0,065	0,015	0,063	0,012	0,062	0,000	0,063	0,033
$\hat{d}_{ps}$	0,037	-0,063	0,033	-0,066	0,041	-0,071	0,042	-0,060	0,040	-0,067
$\hat{d}_{mv}$	0,004	-0,027	0,006	-0,035	0,005	-0,042	0,004	-0,052	0,004	-0,064
$\hat{d}_w$	0,017	-0,053	0,016	-0,063	0,017	-0,071	0,016	-0,073	0,018	-0,084

T=256	d=0,1		d=0,2		d=0,3		d=0,4		d=0,45	
	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$
$\hat{d}_c$	0,003	-0,014	0,002	-0,023	0,002	-0,039	0,001	-0,066	0,001	-0,085
$\hat{d}_{cg}$	0,003	-0,012	0,002	-0,020	0,002	-0,038	0,001	-0,069	0,001	-0,091
$\hat{d}_p$	0,041	-0,000	0,047	-0,006	0,040	0,009	0,042	0,007	0,044	0,020
$\hat{d}_{ps}$	0,025	-0,044	0,025	-0,050	0,027	-0,053	0,029	-0,041	0,028	-0,036
$\hat{d}_{mv}$	0,002	-0,020	0,003	-0,020	0,003	-0,021	0,002	-0,028	0,002	-0,038
$\hat{d}_w$	0,010	-0,047	0,010	-0,052	0,010	-0,061	0,010	-0,059	0,010	-0,062

T=512	d=0,1		d=0,2		d=0,3		d=0,4		d=0,45	
	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	$Var(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$
$\hat{d}_c$	0,002	-0,006	0,001	-0,013	0,001	-0,026	0,001	-0,052	0,001	-0,070
$\hat{d}_{cg}$	0,002	-0,005	0,001	-0,011	0,001	-0,026	0,001	-0,056	0,001	-0,078
$\hat{d}_p$	0,026	0,013	0,025	-0,000	0,026	0,008	0,027	0,011	0,029	0,008
$\hat{d}_{ps}$	0,016	-0,039	0,018	-0,036	0,017	-0,027	0,023	-0,032	0,023	-0,039
$\hat{d}_{mv}$	0,001	-0,010	0,001	-0,011	0,001	-0,013	0,001	-0,014	0,001	-0,021
$\hat{d}_w$	0,006	-0,035	0,006	-0,037	0,007	-0,043	0,007	-0,044	0,007	-0,045

Para melhor analisar os estimadores apresentamos alguns gráficos que comparam os estimadores em relação à variância e ao viés. A Figura 6.1 apresenta as variâncias estimadas dos estimadores de d obtidas nas simulações de amostras de tamanho $T=128$, 256 e 512, respectivamente, dos modelos $ARFIMA(0, d, 0)$, $d = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4$ e $0, 45$. Analizando esses gráficos, podemos perceber que:

1. Os estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$ e $\hat{d}_{mv}$ são muito semelhantes com relação à variância, além de apresentarem as menores estimativas das variâncias para todos os valores que o parâmetro d assume.
2. O estimador $\hat{d}_w$ aparece com a segunda menor variância para todos os valores de d .
3. Os estimadores que se baseiam no periodograma, $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$, são os que apresentam a maior variância.
4. A classificação dos estimadores com relação à variância permanece a mesma para todos os tamanhos de amostra utilizados nas simulações.

Figura 6.1: Variância estimada dos estimadores de d

A Figura 6.2 compara os estimadores com base na média, em relação a d , das variâncias obtidas nas simulações dos cinco modelos $ARFIMA(0, d, 0)$ para os diferentes tamanhos de amostra. Podemos ver que conforme o tamanho da amostra aumenta, as variâncias dos estimadores diminuem, tornando a diferença entre elas cada vez menor.

A Figura 6.3 apresenta os valores em módulo do viés obtido através das simulações de amostras de tamanho 128, 256 e 512, respectivamente. Analisando essa figura percebemos que:

1. Os padrões de comportamento das estimativas de viés em relação aos 5 valores que o parâmetro d assume são semelhantes para os três tamanhos de amostra. Percebe-se também que o viés dos estimadores é inversamente proporcional ao tamanho da amostra.
2. O padrão de comportamento entre os estimadores, apesar de não variar em relação ao tamanho da amostra, varia de estimador para estimador. Alguns estimadores se tornam mais viesados quando d se aproxima de 0,5, que é o caso de $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_w$ e $\hat{d}_{mv}$; os outros não apresentam um comportamento claro do viés em relação aos valores que d assume, que é o caso de $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$.
3. O estimador $\hat{d}_p$ é o estimador menos viesado para todos os valores de d .
4. Os estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ apresentam valores estimativas de viés muito próximas e o mesmo comportamento em relação aos valores de d . Ao classificar os estimadores segundo o viés esses estimadores estão em segundo lugar quando $d = 0,1$ e $0,2$, mas para $d = 0,3$ eles passam para a terceira colocação e quando $d = 0,4$ e $0,45$ eles passam a ser os estimadores mais viesados. Isso se deve a um crescimento muito maior do viés que dos demais estimadores quando o parâmetro d se aproxima do limite de não estacionariedade.
5. Os estimadores $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_w$ apresentam estimativas de viés próximas, quando $d = 0,1$ e $0,2$, aparecendo como os mais viesados. Quando d se aproxima de 0,5 o estimador $\hat{d}_w$ apresenta uma tendência de crescimento no viés, o que não ocorre com $\hat{d}_{ps}$. Com isso, os estimativas de viés desses estimadores passam a se afastar conforme d se aproxima de 0,5.

Figura 6.2: Média das variâncias estimadas, em relação a d , dos estimadores.

Figura 6.3: Módulo do viés estimado dos estimadores de d

6. Devido ao comportamento das estimativas de viés de $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$, para $d = 0,4$ e $0,45$, os estimadores $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_w$ passam à terceira e quarta colocação, respectivamente.
7. O estimador $\hat{d}_{mv}$ aparece na segunda colocação para todos os valores de d .

Resumindo as informações obtidas com as Figuras 6.1 a 6.3, podemos dizer que:

- A variância estimada, em geral, pouco se altera em relação aos valores que o verdadeiro valor do parâmetro d assume, $d = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$, e $0,45$, exceção feita aos estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$. Entretanto, a variância sempre diminui com o aumento da amostra.
- As estimativas de viés dos estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$ sofrem um aumento quando o valor de d aumenta, ou seja, quando se aproxima do limite de não estacionariedade, $0,5$. Quanto aos demais estimadores, não podemos perceber nenhum comportamento que represente uma tendência no viés em relação aos valores de d .
- Em geral, o padrão de comportamento dos vieses estimados dos estimadores, em relação aos valores que d assume, não se altera muito com o aumento do tamanho da amostra, entretanto, eles sofrem uma queda com o aumento da amostra.
- O estimador $\hat{d}_p$ foi o menos viesado em todas as situações, com exceção para o caso em que $T = 512$ e $d = 0,1$, entretanto, possui a maior variância estimada para todos os tamanhos de amostra.
- O estimador $\hat{d}_{mv}$ é um dos menos viesados e apresenta a menor variância para todos os tamanhos de amostra utilizados.
- Os estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ apresentaram estimativas das variâncias muito próximas da variância estimada de $\hat{d}_{mv}$ para todos os tamanhos de amostra. Para $d = 0,1$ e $0,2$ as estimativas de viés destes estimadores estiveram muito próximas do viés estimado de $\hat{d}_{mv}$, mas para $d \geq 0,3$ esses estimadores sofrem um acréscimo muito grande no viés e para $d = 0,4$ e $0,45$ eles se tornam os mais viesados. Esse comportamento acontece para todos os tamanhos de amostra utilizados.

- Os estimadores $\hat{d}_w$ e $\hat{d}_{ps}$, quando classificados segundo a variância estimada, aparecem em quarto e quinto lugares, respectivamente, para todos os tamanhos de amostra utilizados. Em relação ao viés, quando d assume valores próximos de 0,1 esses estimadores aparecem com estimativas de viés muito próximas e são os mais viesados. Mas quando d se aproxima do limite de não estacionariedade, 0,5, o estimador $\hat{d}_w$ sofre um acréscimo no viés, o que não acontece com $\hat{d}_{ps}$. Com isso, as estimativas de viés desses dois estimadores se afastam e, devido ao comportamento de $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$, os estimadores $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_w$ passam para a terceira e quarta posições, respectivamente.

Para avaliar os estimadores utilizando as informações do viés e da variância conjuntamente, apresentamos os valores do $E\hat{Q}M$, obtidos para todas as situações estudadas, na Tabela 6.2. Além disso, a Tabela 6.2 dá a classificação dos estimadores segundo o $E\hat{Q}M$ médio de cada estimador, que é uma média dos $E\hat{Q}M$'s obtidos para os cinco valores que o parâmetro d assume.

Com base nesses resultados, percebemos que existem três grupos de estimadores:

1. $\hat{d}_{mv}$, $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$, que possuem os menores $E\hat{Q}M$'s.
2. $\hat{d}_w$, que possui $E\hat{Q}M$ intermediário.
3. $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_p$, que possuem os maiores $E\hat{Q}M$'s.

Observação 1: No grupo 1, citado acima, temos três estimadores, porém eles apresentaram características muito diferentes em relação ao viés.

Observação 2: Os estimadores, $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ se mostraram muito parecidos. Como foi visto no Capítulo 5, $\hat{d}_{cg}$ é uma generalização de $\hat{d}_c$, mas pelos resultados das simulações o ganho que se tem com essa generalização não parece ser significativo. Portanto, levando em consideração a complexidade computacional de $\hat{d}_{cg}$ este deve ser classificado como um estimador menos aconselhável que $\hat{d}_c$.

Tabela 6.2: Classificação dos estimadores pela média do Erro Quadrático Médio Estimado ($E\hat{Q}M$)

T=128	$E\hat{Q}M(\hat{d})$					$E\hat{Q}M(\hat{d})$
Estimador	d=0,1	d=0,2	d=0,3	d=0,4	d=0,45	Médio
$\hat{d}_{mv}$	0.005	0.007	0.007	0.007	0.008	0.007
$\hat{d}_c$	0.007	0.006	0.007	0.010	0.014	0.009
$\hat{d}_{cg}$	0.006	0.006	0.007	0.011	0.015	0.009
$\hat{d}_w$	0.020	0.020	0.022	0.022	0.026	0.022
$\hat{d}_{ps}$	0.041	0.037	0.046	0.046	0.045	0.043
$\hat{d}_p$	0.062	0.065	0.063	0.062	0.064	0.063
t=256	$E\hat{Q}M(\hat{d})$					$E\hat{Q}M(\hat{d})$
Estimador	d=0,1	d=0,2	d=0,3	d=0,4	d=0,45	Médio
$\hat{d}_{mv}$	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
$\hat{d}_c$	0.003	0.003	0.003	0.006	0.008	0.005
$\hat{d}_{cg}$	0.003	0.003	0.003	0.006	0.010	0.005
$\hat{d}_w$	0.011	0.011	0.013	0.012	0.013	0.012
$\hat{d}_{ps}$	0.027	0.028	0.030	0.031	0.030	0.029
$\hat{d}_p$	0.041	0.047	0.040	0.042	0.044	0.043
T=512	$E\hat{Q}M(\hat{d})$					$E\hat{Q}M(\hat{d})$
Estimador	d=0,1	d=0,2	d=0,3	d=0,4	d=0,45	Médio
$\hat{d}_{mv}$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001
$\hat{d}_c$	0.002	0.001	0.002	0.004	0.006	0.003
$\hat{d}_{cg}$	0.002	0.001	0.002	0.004	0.007	0.003
$\hat{d}_w$	0.006	0.006	0.007	0.007	0.007	0.007
$\hat{d}_{ps}$	0.018	0.020	0.017	0.024	0.024	0.021
$\hat{d}_p$	0.026	0.025	0.026	0.027	0.029	0.027

6.2 Resultados para os modelos ARFIMA(1,d,0)

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos com as simulações de amostras do processo $ARFIMA(1, d, 0)$, com $d = 0.3$ e $\phi_1 = 0.7$, onde ϕ_1 é o parâmetro auto-regressivo de ordem 1. Com isso, analisaremos apenas um tipo de modelo $ARFIMA(1, d, 0)$. Com base nessas simulações, podemos avaliar como os estimadores de d se comportam quando a série de longa memória também apresenta comportamento auto-regressivo de primeira ordem. Ou seja, queremos saber se as conclusões obtidas a respeito dos estimadores de d no caso do modelo $ARFIMA(1, d, 0)$ serão semelhantes as obtidas no caso do modelo $ARFIMA(0, d, 0)$. Também temos interesse em comparar as estimativas obtidas para ϕ_1 nos diversos métodos de estimação, pois a estimativa de ϕ_1 depende do estimador de d utilizado no método de estimação dos parâmetros do modelo $ARFIMA(1, d, 0)$.

Como foi visto na Seção 5.2.2, o estimador de ϕ_1 depende do estimador de d utilizado no método de estimação. Por isso, denotaremos por $\hat{\phi}_c$, $\hat{\phi}_{cg}$, $\hat{\phi}_p$, $\hat{\phi}_{ps}$, $\hat{\phi}_{mv}$ e $\hat{\phi}_w$ os estimadores de ϕ_1 relacionados aos estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_p$, $\hat{d}_{ps}$, $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$, respectivamente.

Foram utilizados três tamanhos de amostras nas simulações, $T=128$, 256 e 512. A Tabela 6.3 apresenta a variância e o viés estimados de $\hat{d}$ e $\hat{\phi}_1$, obtidos para os seis métodos de estimação estudados. Para melhor comparar os estimadores apresentamos alguns gráficos que resumem os resultados da Tabela 6.3. A Figura 6.4 apresenta o gráfico das variâncias estimadas dos estimadores de d ($\hat{Var}(\hat{d})$), dadas por (6.1), para cada tamanho de amostra utilizado nas simulações. Com base nesses resultados, podemos dizer que:

1. As variâncias estimadas de $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$ e $\hat{d}_{mv}$ são as menores para todos os tamanhos de amostra utilizados.
2. O estimador $\hat{d}_p$ apresenta a maior estimativa de variância para todos os tamanhos de amostra; os estimadores $\hat{d}_w$ e $\hat{d}_{ps}$ também têm um comportamento ruim quando comparados aos melhores.
3. Podemos observar que, para todos os estimadores, as variâncias encontradas diminuem quando aumentamos o tamanho da amostra.

Tabela 6.3 - Resultados de uma simulação,
com 1000 réplicas,
de um modelo ARFIMA(1,d,0).

T=128	d=0.3		Estimador	$\phi_1=0.7$	
	$\hat{Var}(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$		$\hat{Var}(\hat{\phi}_1)$	$\hat{B}(\hat{\phi}_1)$
$\hat{d}_c$	0,003	-0,078	$\hat{\phi}_c$	0,001	0,121
$\hat{d}_{cg}$	0,003	-0,079	$\hat{\phi}_{cg}$	0,001	0,122
$\hat{d}_p$	0,078	0,233	$\hat{\phi}_p$	0,007	0,015
$\hat{d}_{ps}$	0,047	0,149	$\hat{\phi}_{ps}$	0,006	0,033
$\hat{d}_{mv}$	0,007	-0,148	$\hat{\phi}_{mv}$	0,006	0,082
$\hat{d}_w$	0,023	-0,008	$\hat{\phi}_w$	0,003	0,092
T=256	d=0.3		Estimador	$\phi_1=0.7$	
	$\hat{Var}(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$		$\hat{Var}(\hat{\phi}_1)$	$\hat{B}(\hat{\phi}_1)$
$\hat{d}_c$	0,001	-0,063	$\hat{\phi}_c$	0,001	0,122
$\hat{d}_{cg}$	0,002	-0,066	$\hat{\phi}_{cg}$	0,001	0,121
$\hat{d}_p$	0,046	0,139	$\hat{\phi}_p$	0,006	0,045
$\hat{d}_{ps}$	0,027	0,086	$\hat{\phi}_{ps}$	0,004	0,059
$\hat{d}_{mv}$	0,003	-0,122	$\hat{\phi}_{mv}$	0,003	0,076
$\hat{d}_w$	0,014	-0,021	$\hat{\phi}_w$	0,002	0,103
T=512	d=0.3		Estimador	$\phi_1=0.7$	
	$\hat{Var}(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$		$\hat{Var}(\hat{\phi}_1)$	$\hat{B}(\hat{\phi}_1)$
$\hat{d}_c$	0,001	-0,053	$\hat{\phi}_c$	0,000	0,120
$\hat{d}_{cg}$	0,001	-0,056	$\hat{\phi}_{cg}$	0,000	0,121
$\hat{d}_p$	0,029	0,070	$\hat{\phi}_p$	0,004	0,071
$\hat{d}_{ps}$	0,019	0,033	$\hat{\phi}_{ps}$	0,003	0,083
$\hat{d}_{mv}$	0,002	-0,084	$\hat{\phi}_{mv}$	0,002	0,058
$\hat{d}_w$	0,008	-0,031	$\hat{\phi}_w$	0,001	0,108

Figura 6.4: Variância estimada dos estimadores de d .

A Figura 6.5 apresenta um gráfico que compara os estimadores do parâmetro d com base nos valores absolutos das estimativas de viés dos estimadores de d ($\hat{B}(\hat{d})$), dadas por (6.2). Com base nesse gráfico, temos que:

1. O estimador $\hat{d}_w$ é o menos viesado para todos os tamanhos de amostra utilizados, mas seu viés aumenta (em valores absolutos) quando aumentamos o tamanho da amostra.
2. Os estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ aparecem com estimativas de viés muito próximas, além de serem os segundos menos viesados para amostras de tamanho $T = 128$ e 256 . Para amostras de tamanho 512 esses estimadores passam a ser os terceiros menos viesados, isso devido ao rápido decaimento do viés de $\hat{d}_{ps}$. No caso desses estimadores, o viés diminui com o aumento do tamanho da amostra.
3. Os estimadores $\hat{d}_{mv}$, $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_p$ não têm um bom comportamento com relação ao viés estimado de d . Nota-se, entretanto, que o valor do viés decai com o aumento do tamanho da amostra.
4. Podemos observar que com o aumento do tamanho da amostra as distâncias entre as estimativas de viés dos estimadores estudados diminuem muito.

A Figura 6.6 apresenta um gráfico das variâncias estimadas dos estimadores de ϕ_1 ($\hat{Var}(\hat{\phi}_1)$), dadas por (6.1). Como foi dito antes, denotaremos por $\hat{\phi}_c$, $\hat{\phi}_{cg}$, $\hat{\phi}_p$, $\hat{\phi}_{ps}$, $\hat{\phi}_{mv}$ e $\hat{\phi}_w$ os estimadores de ϕ_1 relacionados aos estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_p$, $\hat{d}_{ps}$, $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$, respectivamente. Sendo assim, com base nos resultados, temos que:

1. As variâncias estimadas de $\hat{\phi}_c$ e $\hat{\phi}_{cg}$ estão muito próximas, além de serem os estimadores que apresentam as menores variâncias para todos os tamanhos de amostra utilizados.
2. O estimador $\hat{\phi}_w$ apresenta a segunda menor estimativa de variância para todos os tamanhos de amostra.
3. O estimador $\hat{\phi}_{mv}$ tem um comportamento ruim para $T=128$ e 256 .
4. O estimador $\hat{\phi}_p$ é o pior dentre eles, apresentando a maior variância para todos os tamanhos de amostra utilizados.

Figura 6.5: Módulo do viés estimado dos estimadores de d .

Figura 6.6: Variância estimada dos estimadores de ϕ_1 .

5. Também podemos observar que, para todos os estimadores, as variâncias estimadas de ϕ_1 diminuem quando aumentamos o tamanho da amostra.
6. O estimador $\hat{\phi}_{mv}$ apresenta o maior decaimento da variância com o aumento da amostra. Já os demais estimadores se assemelham em relação ao decaimento da variância quando aumentamos o tamanho da amostra.

A Figura 6.7 apresenta um gráfico que compara os estimadores com base nas estimativas do valor absoluto do viés dos estimadores de ϕ_1 ($\hat{B}(\hat{\phi}_1)$) para todos os tamanhos de amostra utilizados. Com base neste gráfico, podemos observar que:

1. O estimador $\hat{\phi}_p$ é o menos viesado para $T = 128$ e 256 , mas para $T = 512$ troca de posição com $\hat{\phi}_{mv}$ e passa a ser o segundo menos viesado. Além disso, o viés deste estimador aumenta quando aumentamos o tamanho da amostra.
2. O estimador $\hat{\phi}_{ps}$ é o segundo menos viesado para $T = 128$ e 256 , mas para $T = 512$ passa a ser o terceiro menos viesado. Entretanto, seu viés também aumenta quando aumentamos o tamanho da amostra.
3. O estimador $\hat{\phi}_{mv}$ aparece como o terceiro menos viesado para amostras de tamanho 128 e 256, mas para $T = 512$ ele passa a ser o estimador menos viesado. Além disso, o viés deste estimador é o único que diminui quando aumentamos o tamanho da amostra.
4. O estimador $\hat{\phi}_w$ é o quarto menos viesado para todos os tamanhos de amostra e seu viés aumenta com o aumento da amostra.
5. Os estimadores $\hat{\phi}_c$ e $\hat{\phi}_{cg}$ apresentam valores próximos para o viés e são os mais viesados para todos os tamanhos de amostra utilizados. Além disso, os valores do viés desses estimadores permanecem estáveis com o aumento do tamanho da amostra.

Para avaliar os métodos de estimação é necessário analisar conjuntamente o comportamento das estimativas dos parâmetros d e ϕ_1 . Primeiro vamos analisar, com base nas estimativas do viés e da variância, como os diversos estimadores de d e ϕ_1 se comportaram com o aumento da amostra. Então, em relação a essa questão podemos dizer que quando aumentamos o tamanho da amostra:

Figura 6.7: Módulo do viés estimado dos estimadores de ϕ_1 .

1. A variância estimada de todos os estimadores de d e ϕ_1 diminuem.
2. Tanto o viés estimado de $\hat{d}_w$ quanto o de $\hat{\phi}_w$ aumentam, entretanto, eles diminuem no caso dos estimadores $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{\phi}_{mv}$.
3. Os valores dos vieses estimados de $\hat{d}_p$ e de $\hat{d}_{ps}$ diminuem, enquanto os de $\hat{\phi}_p$ e $\hat{\phi}_{ps}$ aumentam.
4. Com relação aos estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$, podemos observar que as estimativas dos vieses diminuem, enquanto as de $\hat{\phi}_c$ e $\hat{\phi}_{cg}$ pouco se alteram.

Agora, iremos comparar os métodos de estimação analisando conjuntamente os estimadores de d e de ϕ_1 . Desta forma, temos que:

1. Os estimadores $\hat{d}_w$, $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ são os menos viesados, enquanto $\hat{\phi}_w$, $\hat{\phi}_c$ e $\hat{\phi}_{cg}$ são os mais viesados. Entretanto, todos esses estimadores possuem as menores estimativas para a variâncias.
2. O estimador $\hat{d}_p$ apresenta a maior estimativa da variância e é um dos mais viesados. Com relação a $\hat{\phi}_p$, este é um dos menos viesados, mas é o que possui a maior variância.
3. O estimador $\hat{d}_{mv}$ apresenta uma das menores estimativas de variância, mas é um dos mais viesados. Os valores das estimativas da variância e do viés de $\hat{\phi}_{mv}$ são intermediários quando comparados aos de outros estimadores, mas para $T=512$, este se torna o estimador menos viesado.
4. O estimador $\hat{d}_{ps}$ é um dos mais viesados para amostras pequenas, mas a estimativa do viés cai rapidamente quando aumentamos o tamanho da amostra fazendo com que ele se torne um dos menos viesados para $T=512$. Entretanto, ele apresenta uma das maiores estimativas para a variância. $\hat{\phi}_{ps}$ possui uma das maiores estimativas de variância e valores intermediários para as estimativas de viés.

Com base nessas análises, podemos observar que muitas vezes um estimador menos viesado possui uma variância alta e vice-versa, o que dificulta nossa análise. Para conseguir classificar os estimadores segundo essas duas medidas conjuntamente, usaremos o erro quadrático médio estimado dos estimadores de d ($E\hat{Q}M(\hat{d})$) e dos estimadores de ϕ_1 ($E\hat{Q}M(\hat{\phi}_1)$),

dados por (6.3). A seguir, apresentamos a Tabela 6.4 com a classificação dos estimadores de d e ϕ_1 , de acordo com os valores do $E\hat{Q}M$ desses estimadores, para os tamanhos de amostra, $T = 128, 256$ e 512 . Com base nesta tabela, percebemos que a classificação dos estimadores de d permanece a mesma, enquanto a classificação dos estimadores de ϕ_1 difere para cada tamanho de amostra utilizado. Entretanto, as diferenças entre os $E\hat{Q}M'$ s dos estimadores de ϕ_1 são bem menores que as dos estimadores de d , indicando que pequenas variações do $E\hat{Q}M$ podem fazer com que a classificação dos estimadores de ϕ_1 mude. Outro fato rapidamente observado é que os métodos de estimação que possuem os menores $E\hat{Q}M'$ s de $\hat{d}$ são aqueles que possuem os maiores $E\hat{Q}M'$ s de ϕ_1 e vice-versa.

Com base nessas observações, podemos dizer que para classificar os métodos devemos nos basear na classificação dos estimadores de d pelo $E\hat{Q}M$, pois, de acordo com o $E\hat{Q}M$, os estimadores de ϕ_1 são muito semelhantes. Sendo assim, concluímos que:

1. Os métodos da autocorrelação e da autocorrelação generalizado são os melhores métodos de estimação, além de serem muito semelhantes. Eles apresentam os menores $E\hat{Q}M'$ s para os estimadores de d e os maiores $E\hat{Q}M'$ s para os estimadores de ϕ_1 .
2. O método das ondaletas é classificado como o segundo melhor método, apresentando o segundo menor valor do $E\hat{Q}M$ dos estimadores de d e valores intermediários para os $E\hat{Q}M'$ s dos estimadores de ϕ_1 .
3. O método de máxima verossimilhança é o terceiro melhor método de estimação, $\hat{d}_{mv}$ apresenta o terceiro menor valor do $E\hat{Q}M$ e $\hat{\phi}_{mv}$ apresenta valores intermediários dos $E\hat{Q}M'$ s, para $T=128$ e 256 , e o menor valor para $T=512$.
4. Os métodos baseados no periodograma são os piores, apresentando os maiores valores do $E\hat{Q}M(\hat{d})$ e os menores valores do $E\hat{Q}M(\hat{\phi})$.

Tabela 6.4: Classificação dos estimadores
de d e ϕ_1 pelo $E\hat{Q}M$

T=128	d=0.3	T=128	$\phi_1 = 0.7$
Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{d})$	Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{\phi}_1)$
$\hat{d}_c$	0.009	$\hat{\phi}_{ps}$	0.007
$\hat{d}_{cg}$	0.009	$\hat{\phi}_p$	0.008
$\hat{d}_w$	0.023	$\hat{\phi}_w$	0.012
$\hat{d}_{mv}$	0.032	$\hat{\phi}_{mv}$	0.013
$\hat{d}_{ps}$	0.069	$\hat{\phi}_c$	0.016
$\hat{d}_p$	0.132	$\hat{\phi}_{cg}$	0.016
T=256	d=0.3	T=256	$\phi_1 = 0.7$
Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{d})$	Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{\phi}_1)$
$\hat{d}_c$	0.005	$\hat{\phi}_{ps}$	0.007
$\hat{d}_{cg}$	0.006	$\hat{\phi}_p$	0.008
$\hat{d}_w$	0.014	$\hat{\phi}_{mv}$	0.012
$\hat{d}_{mv}$	0.025	$\hat{\phi}_w$	0.013
$\hat{d}_{ps}$	0.035	$\hat{\phi}_{cg}$	0.015
$\hat{d}_p$	0.066	$\hat{\phi}_c$	0.015
T=512	d=0.3	T=512	$\phi_1 = 0.7$
Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{d})$	Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{\phi}_1)$
$\hat{d}_c$	0.004	$\hat{\phi}_{mv}$	0.008
$\hat{d}_{cg}$	0.004	$\hat{\phi}_p$	0.009
$\hat{d}_w$	0.009	$\hat{\phi}_{ps}$	0.010
$\hat{d}_{mv}$	0.015	$\hat{\phi}_w$	0.013
$\hat{d}_{ps}$	0.020	$\hat{\phi}_c$	0.015
$\hat{d}_p$	0.033	$\hat{\phi}_{cg}$	0.015

6.3 Resultados para o modelo ARFIMA(0,d,1)

Nesta seção apresentamos os resultados das simulações de amostras do processo $ARFIMA(0,d,1)$ com $d = 0.3$ e $\theta_1 = -0.6$, onde θ_1 é o parâmetro de médias móveis de ordem um. Neste caso, também foram simuladas 1.000 amostras deste processo utilizando 3 tamanhos de amostras diferentes, $T=128, 256$ e 512 . Da mesma forma que o estimador de ϕ_1 no processo $ARFIMA(1,d,0)$, o estimador de θ_1 depende do método utilizado para estimar o parâmetro d . Com isso, denotaremos por $\hat{\theta}_c, \hat{\theta}_{cg}, \hat{\theta}_p, \hat{\theta}_{ps}, \hat{\theta}_{mv}$ e $\hat{\theta}_w$ os estimadores de θ_1 relacionados aos estimadores de $\hat{d}_c, \hat{d}_{cg}, \hat{d}_p, \hat{d}_{ps}, \hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$, respectivamente.

Para analisar os diversos métodos de estimação, utilizaremos as estimativas da variância, do viés e do erro quadrático médio dos estimadores de d e de θ_1 , dados por (6.1), (6.2) e (6.3), respectivamente.

A Tabela 6.5 apresenta o viés e a variância estimados dos estimadores de d e de θ_1 para os três tamanhos de amostra utilizados. Apresentaremos alguns gráficos baseados nesta tabela que ajudam na interpretação desses resultados.

A Figura 6.8 apresenta o gráfico da variância estimada dos estimadores de d para os três tamanhos de amostra. Com base neste gráfico, temos que:

1. As variâncias estimadas de todos os estimadores de d diminuem com o aumento do tamanho da amostra, fazendo com que as diferenças entre essas variâncias diminuam.
2. Os estimadores $\hat{d}_c, \hat{d}_{cg}$ e $\hat{d}_{mv}$ apresentam as menores estimativas da variância.
3. Os estimadores $\hat{d}_w$ e $\hat{d}_{ps}$ possuem a segunda e a terceira menor estimativa de variância, respectivamente. Entretanto, para $T=512$ suas estimativas praticamente se igualam.
4. O estimador $\hat{d}_p$ é o estimador que oferece a maior estimativa de variância.

Tabela 6.5 - Resultados de uma simulação,
com 1000 réplicas,
de um modelo ARFIMA(0,d,1).

T=128		d=0.3		Theta=-0.6	
Estimador		$\hat{Var}(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	Estimador	
$\hat{d}_c$	0.002	-0.012	$\hat{\theta}_c$	0.004	0.088
$\hat{d}_{cg}$	0.002	-0.015	$\hat{\theta}_{cg}$	0.004	0.082
$\hat{d}_p$	0.072	0.013	$\hat{\theta}_p$	0.011	0.081
$\hat{d}_{ps}$	0.041	-0.064	$\hat{\theta}_{ps}$	0.009	0.061
$\hat{d}_{mv}$	0.007	-0.056	$\hat{\theta}_{mv}$	0.006	-0.022
$\hat{d}_w$	0.019	-0.031	$\hat{\theta}_w$	0.006	0.072

T=256		d=0.3		Theta=-0.6	
Estimador		$\hat{Var}(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	Estimador	
$\hat{d}_c$	0.001	0.008	$\hat{\theta}_c$	0.002	0.094
$\hat{d}_{cg}$	0.001	0.000	$\hat{\theta}_{cg}$	0.002	0.091
$\hat{d}_p$	0.046	0.024	$\hat{\theta}_p$	0.007	0.087
$\hat{d}_{ps}$	0.026	-0.051	$\hat{\theta}_{ps}$	0.005	0.067
$\hat{d}_{mv}$	0.003	-0.031	$\hat{\theta}_{mv}$	0.003	-0.014
$\hat{d}_w$	0.016	-0.050	$\hat{\theta}_w$	0.004	0.068

T=512		d=0.3		Theta=-0.6	
Estimador		$\hat{Var}(\hat{d})$	$\hat{B}(\hat{d})$	Estimador	
$\hat{d}_c$	0.001	0.018	$\hat{\theta}_c$	0.001	0.101
$\hat{d}_{cg}$	0.001	0.012	$\hat{\theta}_{cg}$	0.001	0.098
$\hat{d}_p$	0.029	-0.001	$\hat{\theta}_p$	0.005	0.083
$\hat{d}_{ps}$	0.017	-0.036	$\hat{\theta}_{ps}$	0.009	0.075
$\hat{d}_{mv}$	0.002	-0.016	$\hat{\theta}_{mv}$	0.002	-0.007
$\hat{d}_w$	0.016	-0.049	$\hat{\theta}_w$	0.004	0.069

Figura 6.8: Variância estimada dos estimadores de d .

Figura 6.9: Módulo do viés estimado dos estimadores de d .

A Figura 6.9 apresenta o gráfico do viés estimado dos estimadores de d para $T=128$, 256 e 512. Segundo este gráfico, podemos dizer que:

1. O comportamento do viés, à medida que aumentamos o tamanho da amostra, varia de estimador para estimador. No caso dos estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$ e $\hat{d}_p$, não existe um comportamento do viés estimado que indique alguma tendência em relação ao tamanho da amostra. Os estimadores $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_{mv}$ apresentam um comportamento do viés que indica uma tendência de decrescimento deste quando $T \rightarrow \infty$. O estimador $\hat{d}_w$ é o único que apresenta uma tendência de crescimento do viés quando aumentamos o tamanho da amostra.
2. A classificação dos estimadores com base no viés estimado não é constante para todos os tamanhos de amostra, ou seja, para cada tamanho de amostra utilizado a classificação muda.
3. Em geral, temos os estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$ e $\hat{d}_p$ como os menos viesados, enquanto $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_w$ são os mais viesados. O estimador $\hat{d}_{mv}$ apresenta um decaimento muito rápido do viés com o aumento do tamanho da amostra e, por isso, passa de um dos estimadores mais viesados, quando $T=128$, para o segundo menos viesado, quando $T=512$.

A Figura 6.10 apresenta a variância estimada dos estimadores de θ_1 para os três tamanhos de amostra. Com base neste gráfico, temos que:

1. As estimativas das variâncias de todos os estimadores de θ_1 diminuem quando aumentamos o tamanho da amostra.
2. Os estimadores $\hat{\theta}_c$ e $\hat{\theta}_{cg}$ apresentam as menores variâncias estimadas, enquanto $\hat{\theta}_{mv}$ aparece com a segunda menor estimativa da variância, para todos os tamanhos de amostra.
3. O estimador $\hat{\theta}_p$ possui a maior estimativa de variância para todos os tamanhos de amostra.

A Figura 6.11 apresenta o gráfico das estimativas do viés dos estimadores de θ_1 . Com base neste gráfico, temos que:

Figura 6.10: Variância estimada dos estimadores de θ_1 .

Figura 6.11: Módulo do viés estimado dos estimadores de θ_1 .

1. Com o aumento da amostra as estimativas do viés dos estimadores $\hat{\theta}_{mv}$ e $\hat{\theta}_w$ diminuem, enquanto as estimativas do viés de $\hat{\theta}_c$, $\hat{\theta}_{cg}$ e $\hat{\theta}_{ps}$ aumentam. As estimativas do viés de $\hat{\theta}_p$ não apresentam alguma tendência em relação ao tamanho da amostra.
2. As estimativas do viés de $\hat{\theta}_{mv}$ são bem menores que as dos demais estimadores, para todos os tamanhos de amostra.
3. Para $T=128$, o estimador $\hat{\theta}_{ps}$ aparece como o segundo menos viesado e $\hat{\theta}_c$, $\hat{\theta}_{cg}$, $\hat{\theta}_p$ e $\hat{\theta}_w$ possuem estimativas do viés muito próximas, além destes estimadores serem os mais viesados.
4. Para $T=256$, $\hat{\theta}_{ps}$ e $\hat{\theta}_w$ são os estimadores que apresentam as segundas menores estimativas do viés e $\hat{\theta}_{ps}$, $\hat{\theta}_c$ e $\hat{\theta}_{cg}$ são os estimadores mais viesados.
5. Para $T=512$, os estimadores $\hat{\theta}_w$, $\hat{\theta}_{ps}$ e $\hat{\theta}_p$ apresentam as segundas menores estimativas do viés, enquanto $\hat{\theta}_c$ e $\hat{\theta}_{cg}$ são os mais viesados.

Resumindo as informações obtidas com os quatro gráficos analisados anteriormente, temos o seguinte:

- Os estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ apresentaram estimativas da variância e do viés estimados abaixo das dos demais estimadores de d ; $\hat{\theta}_c$ e $\hat{\theta}_{cg}$ também apresentaram estimativas das variâncias pequenas, mas as estimativas do viés desses estimadores foram as maiores.
- O estimador $\hat{d}_p$ apresentou a maior variância estimada, entretanto, seu viés estimado foi o menor; o estimador $\hat{\theta}_p$ foi um dos mais viesados e com a maior variância estimada.
- O estimador $\hat{d}_{ps}$ se apresentou como um dos mais viesados e suas estimativas de variância ficou entre as maiores; $\hat{\theta}_{ps}$, em geral, apresentou valores intermediários para as estimativas do viés e da variância.
- O estimador $\hat{d}_{mv}$, em relação ao viés, pode ser considerado um estimador intermediário, mas com relação à variância, é um dos melhores estimadores; $\hat{\theta}_{mv}$ também apresentou boas estimativas da variância e do viés.

- $\hat{d}_w$ é um dos estimadores mais viesados, mas obteve bons resultados com relação à variância estimada: $\hat{\theta}_w$ se classificou, segundo o viés, como um estimador intermediário, entretanto, este estimador não possui boas estimativas de variância, sendo classificado, segundo a variância, como um dos piores estimadores.

A seguir apresentamos a Tabela 6.6 com a classificação pelo erro quadrático médio estimado ($E\hat{Q}M$) dos estimadores dos parâmetros d e θ_1 , para todos os tamanhos de amostra. Com base nesses resultados, temos que:

1. A classificação dos estimadores de d , em relação ao $E\hat{Q}M$, não se modifica com o aumento do tamanho da amostra. Entretanto, as diferenças entre os $E\hat{Q}M$'s desses estimadores diminuí muito. Com isso, para $T=128$, $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ são os melhores estimadores de d , $\hat{d}_{mv}$ é o segundo melhor estimador, $\hat{d}_w$ é o terceiro, $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_p$ são os piores. Porém, para $T=512$, $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$ e $\hat{d}_{mv}$ podem ser considerados os melhores estimadores de d , $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_w$ pertencem ao grupo que se classifica em segundo lugar e $\hat{d}_p$ continua sendo o pior estimador do parâmetro, segundo o $E\hat{Q}M$.
2. A classificação dos estimadores de θ_1 , muda com o aumento do tamanho da amostra, mas os valores dos $E\hat{Q}M$'s dos estimadores $\hat{\theta}_w$, $\hat{\theta}_{cg}$, $\hat{\theta}_c$ e $\hat{\theta}_{ps}$ são muito próximos para todos os tamanhos de amostra. Com isso, esses estimadores formam um grupo dos estimadores classificados em segundo lugar. O melhor estimador, com base no $E\hat{Q}M$, é $\hat{\theta}_{mv}$ e o pior estimador é $\hat{\theta}_p$.

Com base nessas análises podemos dizer que:

- Os métodos da autocorrelação, da autocorrelação generalizado e de máxima verossimilhança podem ser considerados os melhores métodos de estimação dos parâmetros do modelo ARFIMA(0,d,1).
- Os métodos das ondaletas e do periodograma suavizado podem ser classificados como métodos intermediários.
- O método do periodograma se mostrou o pior método de estimação dos parâmetros do modelo ARFIMA(0,d,1).

Tabela 6.6: Classificação dos estimadores
de d e θ_1 pelo $E\hat{Q}M$

T=128	d=0.3	T=128	$\theta_1 = -0.6$
Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{d})$	Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{\theta}_1)$
$\hat{d}_{cg}$	0.002	$\hat{\theta}_{mv}$	0.007
$\hat{d}_c$	0.002	$\hat{\theta}_{cg}$	0.011
$\hat{d}_{mv}$	0.010	$\hat{\theta}_w$	0.012
$\hat{d}_w$	0.020	$\hat{\theta}_c$	0.012
$\hat{d}_{ps}$	0.046	$\hat{\theta}_{ps}$	0.012
$\hat{d}_p$	0.072	$\hat{\theta}_p$	0.018
T=256	d=0.3	T=256	$\theta_1 = -0.6$
Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{d})$	Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{\theta}_1)$
$\hat{d}_{cg}$	0.001	$\hat{\theta}_{mv}$	0.004
$\hat{d}_c$	0.001	$\hat{\theta}_w$	0.009
$\hat{d}_{mv}$	0.004	$\hat{\theta}_{ps}$	0.010
$\hat{d}_w$	0.019	$\hat{\theta}_{cg}$	0.010
$\hat{d}_{ps}$	0.028	$\hat{\theta}_c$	0.011
$\hat{d}_p$	0.047	$\hat{\theta}_p$	0.015
T=512	d=0.3	T=512	$\theta_1 = -0.6$
Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{d})$	Estimador	$E\hat{Q}M(\hat{\theta}_1)$
$\hat{d}_{cg}$	0.001	$\hat{\theta}_{mv}$	0.002
$\hat{d}_c$	0.001	$\hat{\theta}_w$	0.009
$\hat{d}_{mv}$	0.002	$\hat{\theta}_{ps}$	0.009
$\hat{d}_w$	0.019	$\hat{\theta}_{cg}$	0.011
$\hat{d}_{ps}$	0.019	$\hat{\theta}_c$	0.011
$\hat{d}_p$	0.029	$\hat{\theta}_p$	0.012

Capítulo 7

Aplicação a uma série real

7.1 Série de Vazão do Rio São Marcos

Neste capítulo ajustaremos o modelo ARFIMA(p, d, q) a uma série de vazão do Rio São Marcos, ver Apêndice C, (fonte: CESP - Companhia Furnas) utilizando todos os métodos de estimação do parâmetro de longa memória, d , estudados no Capítulo 5. Além disso, ajustaremos os modelos auto-regressivo ($AR(p)$) e $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_{12}$, com o objetivo de comparar os modelos $ARFIMA(p, d, q)$ a esses modelos mais tradicionais. No caso dos modelos $AR(p)$, sabemos que estes eram indicados para modelar séries que apresentavam comportamento de longa memória antes do aparecimento dos modelos ARFIMA(p, d, q), entretanto, o excesso de parâmetros poderia prejudicar a previsão.

A série hidrológica de vazão do Rio São Marcos é apresentada na Figura 7.1, onde podemos perceber que a variância desta série não é constante em relação ao tempo, podemos ver também que as últimas observações desta série possuem uma variação maior que as demais. A necessidade de uma transformação pode ser constatada através da Figura 7.2, onde as 540 observações da série foram divididas em 45 subséries de 12 elementos cada e foram calculadas as médias e variações de amplitude de cada segmento.

Com base neste gráfico, podemos constatar o aumento da variação dos dados conforme a média das subséries aumenta. Sendo assim, aplicamos o logaritmo na série de vazão com o objetivo de melhorar esse comportamento. O gráfico da série transformada, bem como

Figura 7.1: Série de vazão do Rio São Marcos - C'ESP

Figura 7.2: Gráfico da média x variação de amplitude das 45 subséries

suas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais e o seu periodograma são apresentados na Figura 7.3. A adequação da aplicação do logaritmo nos dados pode ser confirmada pelo gráfico da série transformada, no qual o comportamento verificado na série original não se apresenta. O gráfico da função de autocorrelação amostral apresenta um evidente comportamento de longa memória da série de vazão, ou seja, mostra a forte correlação entre observações da série distanciadas por um grande intervalo no tempo, este gráfico também mostra o forte comportamento sazonal da série. A partir da série transformada, iremos ajustar os modelos já citados no início deste capítulo.

Figura 7.3: (a) Série transformada. (b) Periodograma, (c) Função de autocorrelação amostral e (d) Função de autocorrelação parcial amostral

7.1.1 Ajustamento dos modelos

a) Modelo Auto-regressivo (AR(p)).

Para a série de vazão, ajustamos um modelo auto-regressivo de ordem 25 (AR(25)). As estimativas dos parâmetros e seus desvios padrões são apresentados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Resultados para o ajuste do modelo AR(25) à Série de Vazão

Parâmetro	Estimativas	Desvio Padrão	T-valor
$\hat{\phi}_1$	0.7128	0.0422	16.89
$\hat{\phi}_2$	-0.0324	0.0516	-0.62
$\hat{\phi}_3$	0.0031	0.0514	0.06
$\hat{\phi}_4$	-0.0536	0.0513	-1.04
$\hat{\phi}_5$	0.0800	0.0513	1.56
$\hat{\phi}_6$	0.0297	0.0514	0.58
$\hat{\phi}_7$	-0.0630	0.0514	-1.23
$\hat{\phi}_8$	-0.0328	0.0513	-0.64
$\hat{\phi}_9$	0.1003	0.0513	1.95
$\hat{\phi}_{10}$	-0.1201	0.0514	-2.34
$\hat{\phi}_{11}$	0.2229	0.0515	4.33
$\hat{\phi}_{12}$	0.0477	0.0523	0.91
$\hat{\phi}_{13}$	0.0646	0.0523	1.23
$\hat{\phi}_{14}$	-0.0478	0.0523	-0.91
$\hat{\phi}_{15}$	-0.0951	0.0515	-1.85
$\hat{\phi}_{16}$	0.0567	0.0514	1.10
$\hat{\phi}_{17}$	-0.0743	0.0513	-1.45
$\hat{\phi}_{18}$	-0.0894	0.0513	-1.74
$\hat{\phi}_{19}$	0.0480	0.0514	0.93
$\hat{\phi}_{20}$	0.0130	0.0514	0.25
$\hat{\phi}_{21}$	0.0141	0.0513	0.27
$\hat{\phi}_{22}$	-0.0521	0.0513	-1.02
$\hat{\phi}_{23}$	0.1239	0.0513	2.41
$\hat{\phi}_{24}$	0.1756	0.0516	3.40
$\hat{\phi}_{25}$	-0.2014	0.0422	-4.77
$\hat{\sigma}_a^2$	0.1033		

Pela Tabela 7.1, apenas as estimativas dos parâmetros ϕ_1 , ϕ_9 , ϕ_{11} , ϕ_{23} , ϕ_{24} e ϕ_{25} são significativamente diferentes de zero ao nível de significância de 0.05. Entretanto, os gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial residuais, dados na Figura 7.4, não apresentam nenhum valor significativamente diferente de zero, o que indica um ótimo comportamento dos resíduos.

Figura 7.4: (a) Série ajustada, (b) Resíduos, (c) Função de autocorrelação amostral residual e (d) Função de autocorrelação parcial amostral residual.

b) Modelo $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_{12}$

No caso deste modelo, inicialmente ajustamos o modelo $SARIMA(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$, cujos resultados da estimação dos parâmetros são apresentados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 - Resultados do ajuste do modelo
 $SARIMA(1,0,0) \times (0,1,1)_{12}$ à Série de Vazão

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	T-valor
$\hat{\phi}_1$	0.6859	0.0317	21.64
$\hat{\theta}_{12}$	0.9279	0.0162	52.28
$\hat{\sigma}_a^2$	0.1032		

Com base nesta tabela, podemos ver que as estimativas dos parâmetros são significativamente diferentes de zero, entretanto, os gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos, dados na Figura 7.5, mostram que, para o “lag” 6, essas funções apresentam valores altos. Também podemos perceber que a função de autocorrelação parcial apresenta valores significativamente diferentes de zero para os “lags” 12 e 24. Com isso, vamos inserir os parâmetros auto-regressivos de ordem 6 e 12 ajustando o modelo $SARIMA(6,0,0) \times (1,1,1)_{12}$, onde $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 0$.

Os resultados das estimativas dos parâmetros desse modelo e seus respectivos desvios padrões são dados na Tabela 7.3, onde todas as estimativas dos parâmetros do modelo são significativamente diferentes de zero ao nível de significância de 0.05.

Tabela 7.3 - Resultados do ajuste do modelo
 $SARIMA(6,0,0) \times (1,1,1)_{12}$ à Série de Vazão

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	P-valor
$\hat{\phi}_1$	0.6447	0.0438	14.72
$\hat{\phi}_6$	0.1434	0.0447	3.21
$\hat{\phi}_{12}$	-0.1228	0.0501	2.41
$\hat{\theta}_{12}$	0.8470	0.0287	2.95
$\hat{\sigma}_a^2$	0.1037		

Os gráficos do ajuste, e das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial são apresentados na Figura 7.6, onde percebemos que a inserção dos parâmetros ϕ_{12} e ϕ_6 melhoraram o ajuste da série, pois as funções de autocorrelação amostral e de autocorrelação parcial amostral dos resíduos indicam um bom comportamento dos resíduos, ou seja, não apresentam valores que justifiquem a inadequação do modelo ajustado.

Figura 7.5: (a) Série ajustada, (b) Resíduos. (c) Função de autocorrelação amostral e (d) Função de autocorrelação parcial amostral.

Figura 7.6: (a) Série ajustada, (b) Resíduos, (c) Função de autocorrelação amostral e (d) Função de autocorrelação parcial amostral.

c) Modelo $ARFIMA(p, d, q)$

A princípio, ajustamos o modelo $ARFIMA(0, d, 0)$ para todos os seis métodos de estimação do parâmetro d . Os gráficos da função de autocorrelação amostral dos resíduos desse ajuste, para os seis estimadores de d , são apresentados na Figura 7.7. Da mesma forma, temos os gráficos da função de autocorrelação parcial amostral na Figura 7.8.

Figura 7.7: Função de autocorrelação amostral dos resíduos: (a) estimador $\hat{d}_c$, (b) estimador $\hat{d}_{cg}$, (c) estimador $\hat{d}_p$, (d) estimador $\hat{d}_{ps}$, (e) estimador $\hat{d}_{mv}$, (f) estimador $\hat{d}_w$.

Podemos perceber pelas Figuras 7.7 e 7.8 que o comportamento sazonal permanece nos resíduos do modelo $ARFIMA(0, d, 0)$, além disso esse comportamento é bastante parecido para todos os seis métodos de estimação de d . Com base nesses gráficos, ajustaremos o modelo $SARFIMA(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ à Série de Vazão, onde serão utilizados os seis estimadores de d . Desta forma, teremos seis modelos $SARFIMA(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ ajustados.

Figura 7.8: Função de autocorrelação parcial amostral dos resíduos: (a) estimador $\hat{d}_c$, (b) estimador $\hat{d}_{cg}$, (c) estimador $\hat{d}_p$, (d) estimador $\hat{d}_{ps}$, (e) estimador $\hat{d}_{mv}$, (f) estimador $\hat{d}_w$.

A Tabela 7.4 apresenta os resultados das estimativas e desvios padrões dos parâmetros desses modelos. Com base nessa tabela, temos todas as estimativas dos parâmetros significativamente diferentes de zero ao nível de significância de 0.05.

Tabela 7.4 - Resultados do ajuste do modelo
 $ARFIMA(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ à Série de Vazão

Estimadores de d	Estimativa		Desvio Padrão		P-valor		$\hat{\sigma}_a^2$
	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_{12}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_{12}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_{12}$	
$\hat{d}_c = 0.3415$	0,2685	0,9581	0,0420	0,0125	6,39	76,65	0,0711
$\hat{d}_{cg} = 0.3199$	0,2736	0,9580	0,0419	0,0125	6,52	76,64	0,0714
$\hat{d}_p = 0.4610$	0,2141	0,9490	0,0425	0,0137	2,38	69,27	0,0679
$\hat{d}_{ps} = 0.4172$	0,2367	0,9534	0,0423	0,0131	5,59	72,79	0,0690
$\hat{d}_{mv} = 0.3895$	0,2446	0,9554	0,0422	0,0129	5,79	74,06	0,0740
$\hat{d}_w = 0.3911$	0,2441	0,9553	0,0422	0,0129	5,78	70,05	0,0694

A seguir, são apresentadas na Figura 7.9 a função de autocorrelação amostral dos resíduos do modelo $SARFIMA(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ para cada um dos seis estimadores do parâmetro d . Da mesma forma, temos as funções de autocorrelação parcial amostral dos resíduos na Figura 7.10.

Os gráficos da Figura 7.9 mostram que a função de autocorrelação amostral dos resíduos de ordem 6 é considerada significativamente diferente de zero para todos os métodos de estimação do parâmetro d . A função de autocorrelação parcial, Figura 7.10, apresenta valores altos nos “lags” 6, 13, 23 e 26 para todos os estimadores de d . Esse comportamento deve ser melhorado com a inclusão de um parâmetro auto-regressivo de ordem seis nesse modelo. Com isso, ajustamos o modelo $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$, onde $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 0$. Os resultados das estimativas desse modelo são apresentados na Tabela 7.5, onde podemos perceber que os parâmetros do modelo $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ são significativamente diferentes de zero, ao nível de significância de 0,05, para todos os métodos de estimação do parâmetro d . As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais dos resíduos desse modelo são dadas nas Figuras 7.11 e 7.12, respectivamente, para todos os estimadores de d .

Figura 7.9: Função de autocorrelação amostral dos resíduos: (a) estimador $\hat{d}_c$, (b) estimador $\hat{d}_{cg}$, (c) estimador $\hat{d}_p$, (d) estimador $\hat{d}_{ps}$, (e) estimador $\hat{d}_{mv}$, (f) estimador $\hat{d}_w$.

Figura 7.10: Função de autocorrelação parcial amostral dos resíduos: (a) estimador $\hat{d}_c$, (b) estimador $\hat{d}_{cg}$, (c) estimador $\hat{d}_p$, (d) estimador $\hat{d}_{ps}$, (e) estimador $\hat{d}_{mv}$, (f) estimador $\hat{d}_w$.

Tabela 7.5 - Resultados do ajuste do modelo
 $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ à Série de Vazão

Estimadores de d	Estimativa			Desvio Padrão			T-valor			$\hat{\sigma}_a^2$
	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_6$	$\hat{\theta}_{12}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_6$	$\hat{\theta}_{12}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_6$	$\hat{\theta}_{12}$	
$\hat{d}_c = 0,3162$	0,2465	-0,1419	0,9043	0,0415	0,0412	0,0132	6,70	-3,46	74,72	0,0729
$\hat{d}_{cg} = 0,3198$	0,2771	-0,1613	0,9156	0,0416	0,0413	0,0132	6,63	-3,43	74,74	0,0709
$\hat{d}_p = 0,461$	0,1999	-0,1169	0,9051	0,0425	0,0423	0,0131	5,04	-2,51	74,33	0,0682
$\hat{d}_{ps} = 0,4172$	0,2269	-0,0993	0,8846	0,0423	0,0421	0,0131	5,47	-2,68	74,82	0,0708
$\hat{d}_{mv} = 0,4001$	0,2672	-0,1055	0,8961	0,0422	0,0420	0,0131	5,65	-2,79	75,03	0,0707
$\hat{d}_w = 0,4419$	0,2481	-0,0812	0,9119	0,0424	0,0422	0,0131	5,23	-2,60	74,54	0,0693

Os gráficos das funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial amostrais dos resíduos apresentam formas parecidas para todos os estimadores de d e essas duas funções apresentam valores significativamente diferentes de zero no “lag” 26, mas por este “lag” ser de ordem elevada não consideraremos a inclusão de mais um parâmetro no modelo.

Figura 7.11: Função de autocorrelação amostral dos resíduos: (a) estimador $\hat{d}_c$, (b) estimador $\hat{d}_{cg}$, (c) estimador $\hat{d}_p$, (d) estimador $\hat{d}_{ps}$, (e) estimador $\hat{d}_{mv}$, (f) estimador $\hat{d}_w$.

Figura 7.12: Função de autocorrelação parcial amostral dos resíduos: (a) estimador $\hat{d}_c$, (b) estimador $\hat{d}_{cg}$, (c) estimador $\hat{d}_p$, (d) estimador $\hat{d}_{ps}$, (e) estimador $\hat{d}_{mv}$, (f) estimador $\hat{d}_w$.

7.1.2 Comparação dos modelos

Para comparar os modelos ajustados à série de vazão do Rio São Marcos vamos utilizar uma medida de ajustamento e o potencial de previsão desses modelos.

(i) Ajustamento

Para mensurar o ajustamento dos modelos usaremos a medida $AIC = -2\log(L(\Theta)) + 2n$, onde $L(\Theta)$ é a verossimilhança do modelo e n é do número de parâmetros estimados. Essa é uma medida comparativa do ajustamento dos modelos, quanto menor for o valor do AIC melhor será o ajuste do modelo. A Tabela 7.6 apresenta essa medida para todos os modelos ajustados à série de vazão.

Tabela 7.6 - Comparação dos modelos através do AIC

Modelos ajustados	AIC	$\hat{\sigma}_n^2$
$AR(25)$	1.400,00	0,1033
$SARIMA(1,0,0) \times (0,1,1)_{12}$	326,60	0,1032
$SARIMA(6,0,0) \times (1,1,1)_{12}$	322,81	0,1037
$SARFIMA(1,d,0) \times (0,1,1)_{12}$		
$\hat{d}_c$	136,13	0,0711
$\hat{d}_{cg}$	139,09	0,0714
$\hat{d}_p$	109,85	0,0679
$\hat{d}_{ps}$	119,01	0,0690
$\hat{d}_{mv}$	123,22	0,0740
$\hat{d}_w$	118,79	0,0694
$SARFIMA(6,d,0) \times (0,1,1)_{12}$		
$\hat{d}_c$	136,88	0,0729
$\hat{d}_{cg}$	133,97	0,0709
$\hat{d}_p$	108,48	0,0682
$\hat{d}_{ps}$	120,99	0,0708
$\hat{d}_{mv}$	121,68	0,0707
$\hat{d}_w$	113,29	0,0693

Através da Tabela 7.6 podemos notar que o modelo $AR(25)$ foi o que obteve o maior AIC, o que se justifica pela não significância das estimativas de seus parâmetros. Os modelos $SARIMA(1, 0, 0) \times ((0, 1, 1)_{12})$ e $SARIMA(6, 0, 0) \times ((0, 1, 1)_{12})$ obtiveram valores de AIC muito próximos, indicando que a inclusão do parâmetro ϕ_6 no modelo não alterou muito o ajuste. Além disso, esses valores são cerca de três vezes maiores que os dos modelos de longa memória. Com isso, de acordo com o AIC, os modelos que melhor ajustaram a série foram os $SARFIMA(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ e $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$. Entretanto, para esses modelos, a inclusão do parâmetro ϕ_6 nem sempre implicou numa diminuição do AIC. A variância estimada do modelo sofreu uma redução de cerca de trinta por cento da variância quando utilizamos os modelos de longa memória. Com relação aos estimadores do parâmetro d , os modelos que utilizaram os estimadores $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_w$ foram os que obtiveram melhores resultados para o AIC e para a variância estimada e os modelos que utilizaram os estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ foram os que obtiveram os piores resultados. Entretanto, essas diferenças são pequenas principalmente com relação à variância estimada.

(ii) Previsão

Para verificar o poder de previsão dos modelos ajustados utilizamos a série de vazão sem as doze últimas observações para fazer a previsão de doze meses. Com isso, iremos comparar os valores previstos com os valores reais e utilizaremos o erro quadrático médio (EQM) dessas previsões para comparar os modelos. A seguir, apresentamos a Tabela 7.7 com os valores previstos juntamente com os valores reais e a Tabela 7.8 com os erros de previsão dados pela diferença entre o valor real e o valor previsto pelos modelos.

Tabela 7.7 - Previsão dos modelos ajustados

Modelos ajustados	Valores Previstos											
	$\hat{Y}_{t+1}$	$\hat{Y}_{t+2}$	$\hat{Y}_{t+3}$	$\hat{Y}_{t+4}$	$\hat{Y}_{t+5}$	$\hat{Y}_{t+6}$	$\hat{Y}_{t+7}$	$\hat{Y}_{t+8}$	$\hat{Y}_{t+9}$	$\hat{Y}_{t+10}$	$\hat{Y}_{t+11}$	$\hat{Y}_{t+12}$
<i>AR</i> (25)	54,3	38,3	33,5	25,7	15,9	9,9	7,9	5,6	4,9	5,8	8,2	8,6
<i>SARIMA</i> (1,0,0) × (0,1,1) ₁₂	175,1	100,7	58,9	34,0	26,0	18,2	17,2	12,8	13,4	19,3	2,8	5,4
(6,0,0) × (1,1,1) ₁₂	48,0	89,0	66,8	32,5	36,0	24,9	21,8	19,7	32,0	35,6	63,1	68,1
<i>SARFIMA</i> (1, <i>d</i> ,0) × (0,1,1) ₁₂												
$\hat{d}_c$	371,5	333,0	170,8	108,0	88,8	66,8	62,6	42,6	50,7	67,1	8,7	22,4
$\hat{d}_{cg}$	352,9	312,4	159,9	101,0	82,9	62,3	58,4	39,8	47,3	62,6	8,1	20,9
$\hat{d}_p$	394,8	363,1	212,0	141,6	118,3	89,1	85,0	60,4	69,1	95,0	12,5	29,0
$\hat{d}_{ps}$	393,2	361,2	199,1	129,9	107,9	82,3	76,9	53,6	62,4	84,4	11,0	26,8
$\hat{d}_{mv}$	386,9	353,3	189,3	122,0	101,0	76,0	71,6	49,5	58,1	77,8	10,1	25,3
$\hat{d}_w$	387,4	353,9	189,9	122,5	101,4	76,3	72,0	49,7	58,4	78,2	10,2	25,4
(6, <i>d</i> ,0) × (0,1,1) ₁₂												
$\hat{d}_c$	227,4	159,2	131,6	84,8	87,0	60,7	58,0	46,3	43,6	62,0	10,0	15,0
$\hat{d}_{cg}$	245,2	177,5	131,7	82,7	88,5	61,6	59,0	46,1	45,4	65,7	9,7	15,7
$\hat{d}_p$	280,7	219,4	192,0	130,4	132,7	93,6	88,5	69,9	65,9	93,5	15,2	23,0
$\hat{d}_{ps}$	235,3	170,8	173,5	119,5	114,3	81,8	77,1	62,8	55,8	75,7	14,5	19,7
$\hat{d}_{mv}$	248,4	182,7	168,7	114,4	111,0	79,3	75,0	60,2	55,0	76,6	13,3	19,1
$\hat{d}_w$	292,3	231,0	189,8	129,9	123,6	88,5	84,1	65,8	63,4	90,5	14,1	22,4
Valores Reais	185,0	210,0	114,0	142,0	101,0	73,0	61,0	43,0	30,0	41,0	97,0	114,0

Tabela 7.8 - Erros de previsão dos modelos ajustados

Modelos ajustados	Erros de previsão (Valor Real - Valor previsto)											
	$\hat{Y}_{t+1}$	$\hat{Y}_{t+2}$	$\hat{Y}_{t+3}$	$\hat{Y}_{t+4}$	$\hat{Y}_{t+5}$	$\hat{Y}_{t+6}$	$\hat{Y}_{t+7}$	$\hat{Y}_{t+8}$	$\hat{Y}_{t+9}$	$\hat{Y}_{t+10}$	$\hat{Y}_{t+11}$	$\hat{Y}_{t+12}$
<i>AR</i> (25)	130,6	171,7	80,5	116,3	85,1	63,0	53,1	37,4	25,1	35,2	88,8	105,4
<i>SARIMA</i> (1,0,0) × (0,1,1) ₁₂	9,8	109,2	55,1	108,0	75,0	54,7	43,8	30,2	16,6	21,7	94,1	108,6
(6,0,0) × (1,1,1) ₁₂	137,0	121,0	47,2	109,5	65,0	48,1	39,2	23,3	-2,0	5,4	33,9	45,9
<i>SARFIMA</i> (1, <i>d</i> ,0) × (0,1,1) ₁₂												
$\hat{d}_c$	-186,5	-123,0	-56,8	34,0	12,2	6,2	-1,6	0,34	-20,7	-26,1	88,3	91,6
$\hat{d}_{cg}$	-167,9	-102,4	-45,9	41,0	18,1	10,7	2,6	3,2	-17,3	-21,6	88,9	93,1
$\hat{d}_p$	-209,8	-153,1	-98,0	0,4	-17,3	-16,1	-24,0	-17,4	-39,1	-54,0	84,4	85,0
$\hat{d}_{ps}$	-208,2	-151,2	-85,1	12,1	-6,9	-8,2	-15,9	-10,6	-32,4	-43,4	86,0	87,1
$\hat{d}_{mv}$	-202,0	-143,3	-75,3	20,0	0,03	-3,0	-10,6	-6,4	-28,1	-36,8	86,9	88,7
$\hat{d}_w$	-202,4	-143,9	-75,9	19,5	-0,4	-3,3	-11,0	-6,7	-28,4	-37,2	86,8	88,6
(6, <i>d</i> ,0) × (0,1,1) ₁₂												
$\hat{d}_c$	-42,4	50,7	-17,6	57,2	14,0	12,3	2,9	-3,3	-13,6	-21,0	87,0	99,0
$\hat{d}_{cg}$	-60,3	32,5	-17,7	59,3	12,5	11,4	2,0	-3,1	-15,4	-24,7	87,3	98,3
$\hat{d}_p$	-96,0	-9,4	-78,0	11,6	-31,2	-20,6	-27,5	-27,0	-35,9	-52,5	81,8	91,0
$\hat{d}_{ps}$	-50,3	39,2	-59,5	22,5	-13,3	-8,8	-16,1	-19,8	-25,8	-34,7	82,5	94,3
$\hat{d}_{mv}$	-63,3	27,3	-54,7	27,6	-10,0	-6,3	-14,0	-17,2	-25,0	-35,6	83,7	94,9
$\hat{d}_w$	-107,3	-21,0	-75,8	12,1	-22,6	-15,5	-23,1	-22,8	-33,4	-49,4	82,9	91,6

Com base nas Tabelas 7.7 e 7.8, podemos dizer que os modelos AR e $SARIMA$ ajustados oferecem previsões, em geral, abaixo dos valores reais. Ou seja, esses modelos subestimam as previsões. Também podemos perceber que os valores previstos pelos modelos $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ estão bem mais próximos dos valores reais que os previstos pelos modelos $SARFIMA(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$. Para comparar o poder de previsão desses modelos utilizamos a média dos erros ao quadrado (erro quadrático médio das previsões), dados na Tabela 7.9.

Tabela 7.9 - Erro quadrático médio das previsões

Modelos ajustados	EQM
$AR(25)$	8573.323
$SARIMA$	
$(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$	4965.775
$(6, 0, 0) \times (1, 1, 1)_{12}$	4961.309
$SARFIMA$	
$(1, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$	
$\hat{d}_c$	5981.006
$\hat{d}_{cg}$	5022.499
$\hat{d}_p$	8108.092
$\hat{d}_{ps}$	7666.891
$\hat{d}_{mv}$	7095.606
$\hat{d}_w$	7132.336
$(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$	
$\hat{d}_c$	2193.812
$\hat{d}_{cg}$	2245.251
$\hat{d}_p$	3114.370
$\hat{d}_{ps}$	2216.286
$\hat{d}_{mv}$	2253.999
$\hat{d}_w$	3204.861

Comparando os modelos ajustados através da Tabela 7.9, podemos dizer que segundo o erro quadrático médio das previsões o pior modelo é o $AR(25)$, seguido dos modelos $SARFIMA((1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12})$. Os modelos $SARIMA(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ e $SARIMA(6, 0, 0) \times (1, 1, 1)_{12}$ são melhores que estes últimos, porém piores que os modelos $SARFIMA(6, d, 0) \times$

$(0, 1, 1)_{12}$. Com relação aos modelos $SARIMA(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ e $SARIMA(6, 0, 0) \times (1, 1, 1)_{12}$ podemos perceber que a inclusão do parâmetro ϕ_6 não melhora o poder de previsão do modelo SARIMA, ao contrario dos modelos de longa memória, onde a inclusão deste parâmetro diminui cerca de 50 por cento o erro quadrático médio das previsões. Com isso os melhores modelos, segundo a previsão, são os modelos $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ e dentre estes modelos os que apresentaram menor erro quadrático médio foram os que utilizaram $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_{mv}$ como estimadores de d .

Conclusão:

- De uma forma geral, os modelos $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ são os que fornecem melhor ajustamento e previsão. Entretanto, o método utilizado na estimação do parâmetro d não influenciou de forma marcante na qualidade do ajustamento e da previsão.
- O ajustamento do modelo AR(25) fornece um modelo super parametrizado que foi péssimo tanto para o ajustamento quanto para obter previsões.
- A utilização de modelos de Box & Jenkins clássicos, $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_{12}$, não conseguiu captar o comportamento de longa memória da série.

Capítulo 8

Conclusão

A elaboração deste trabalho teve como objetivo comparar os estimadores do parâmetro d do modelo $ARFIMA(p, d, q)$ diante de diferentes situações que pudessem testar esses estimadores de maneira mais eficiente possível. Os resultados das simulações de amostras de modelos $ARFIMA(0, d, 0)$ para diferentes valores de d e para três tamanhos de amostra mostram quais estimadores pioram suas estimativas a medida que o verdadeiro valor do parâmetro d se aproxima do limite de não estacionariedade, 0,5. Além disso, os diversos tamanhos de amostra utilizados nos ajudam perceber se esses estimadores melhoram suas estimativas de forma diferenciada quando aumentamos a amostra. A utilização dos diversos valores de d nos permitiu perceber que quando o verdadeiro valor do parâmetro d se aproxima do limite de não estacionariedade o viés dos estimadores $\hat{d}_c$, $\hat{d}_{cg}$, $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_w$ se tornam maiores. Entretanto, esse comportamento tende a diminuir a medida que aumentamos o tamanho da amostra, com exceção dos estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ que mantem esse comportamento independente do tamanho da amostra. Com relação aos três tamanhos de amostra utilizados, percebemos que os estimadores $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$ melhoram suas estimativas em proporções menores em relação aos demais estimadores, pois para os demais estimadores dobrar o tamanho da amostra implicou numa diminuição de cerca de 50 % do $E\hat{Q}M(\hat{d})$, enquanto que para $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$ essa diminuição foi em torno de 33 %. Quanto à classificação geral dos estimadores no modelo $ARFIMA(0, d, 0)$, $\hat{d}_{mv}$, $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ formam o grupo dos melhores estimadores, o estimador $\hat{d}_w$ se mostrou um estimador intermediário e $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$ foram classificados como os piores, sendo que $\hat{d}_p$ é o pior deles.

Nas simulações do modelo $ARFIMA(1, d, 0)$, onde $d = 0,3$ e $\phi_1 = 0,7$, o valor de d foi escolhido propositalmente por ser um valor afastado do limite de não estacionariedade. A inclusão do parâmetro auto-regressivo de ordem um teve como objetivo testar se as estimativas do parâmetro d seriam prejudicadas ou se haveria alguma mudança na classificação dos estimadores. Também havia interesse em comparar as estimativas do parâmetro ϕ_1 para os diversos métodos de estimação. Como o algoritmo de estimação dos parâmetros do modelo $ARFIMA(p, d, q)$, quando utilizamos $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$, é diferente do algoritmo utilizado no caso dos demais estimadores, esperávamos que houvesse alguma modificação nos resultados finais das estimativas. Entretanto, poucas modificações foram percebidas, apenas o estimador $\hat{d}_{mv}$, que no modelo $ARFIMA(0, d, 0)$ foi classificado como o melhor estimador, neste caso apresentou resultados piores que os de $\hat{d}_w$ e foi classificado em quarto lugar. Com isso, temos que os estimadores $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ continuaram sendo os melhores estimadores, $\hat{d}_w$ foi classificado como o terceiro melhor estimador e $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_{ps}$ foram os piores estimadores. As estimativas do parâmetro ϕ_1 pouco se alteraram em relação ao método de estimação de d utilizado, mas percebemos que os métodos de estimação dos parâmetros que apresentaram os melhores resultados para as estimativas de d ofereceram as piores estimativas para ϕ_1 e vice-versa.

Quanto ao modelo $ARFIMA(0, d, 1)$, onde $d = 0,3$ e $\theta_1 = -0,6$, a única mudança observada também foi em relação ao estimador $\hat{d}_{mv}$, que para amostras pequenas não ofereceu o melhor resultado sendo classificado em terceiro lugar. Entretanto, com o aumento da amostra seus resultados se aproximam dos de $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ que novamente são os melhores estimadores do parâmetro d . Para tamanhos de amostras grandes os estimadores $\hat{d}_w$ e $\hat{d}_{ps}$ apresentaram resultados semelhantes e são classificados como estimadores intermediários. A pior classificação foi a de $\hat{d}_p$.

Como resultado geral das simulações, temos que os melhores métodos de estimacões são os que utilizam $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$, onde $\hat{d}_c$ é o mais simples de todos os estimadores. O estimador $\hat{d}_{mv}$ é muito adequado para o modelo $ARFIMA(0, d, 0)$, entretanto, suas estimativas se tornam deficientes a medida que outros parâmetros vão sendo incorporados ao modelo. O estimador $\hat{d}_w$ apresentou sempre resultados intermediários, enquanto $\hat{d}_p$ sempre foi o pior dos estimadores. O estimador $\hat{d}_{ps}$, apresentou resultados significativamente melhores que os de $\hat{d}_p$, contudo, essa melhora não foi suficiente para promovê-lo a categoria dos bons estimadores.

Outra forma de comparar os estimadores foi utilizar uma série real para ajustar uma

modelo $ARFIMA(p, d, q)$ utilizando todos os métodos de estimação de d . Além disso, ajustamos os modelos $AR(p)$ e $ARIMA(p, d, q)$ à série para poder comparar o modelo de longa memória a esses modelos mais tradicionais. A comparação dos modelos revelou a superioridade do modelo $SARFIMA(p, d, q)$ que ofereceu o melhor ajuste e as melhores previsões. O modelo auto-regressivo ajustado apresentou os piores resultados e de forma alguma indicou que este modelo deva ser usado para ajustar séries de longa memória. O modelo $ARIMA(p, d, q)$, apesar de ser bem melhor que o $AR(p)$, não pode ser indicado para o ajuste de séries com comportamento de longa memória. Quanto a comparação dos métodos de estimação dos parâmetros do modelo $ARFIMA(p, d, q)$, temos poucas diferenças de resultados entre os métodos de estimação, mas podemos dizer que com relação ao ajuste os melhores estimadores foram $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_w$, em segundo lugar temos $\hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_{mv}$ e $\hat{d}_c$ e $\hat{d}_{cg}$ apresentaram o pior ajuste. Entretanto, com relação ao poder de previsão, os melhores métodos foram aqueles que utilizaram os estimadores $\hat{d}_c, \hat{d}_{cg}, \hat{d}_{ps}$ e $\hat{d}_{mv}$; $\hat{d}_p$ e $\hat{d}_w$ apresentaram previsões semelhantes, porém não tão boas quanto as dos demais estimadores.

Bibliografia

- Agiakloglou, C., Newbold, P. and Wohar (1993). Bias in an estimator of the fractional difference parameter. *Journal of Time Series Analysis*, 14:235-246.
- Beltrão, K. I. and Bloomfield, P. (1987). Determining the bandwidth of a kernel spectrum estimate. *Journal of Time Series Analysis*, 8:21-38.
- Beltrão, K. I. and Hurvich, C. M. (1993). Asymptotics for the low-frequency ordinates of the periodogram of a long memory time series. *Journal of Time Series Analysis*, 14:455-472.
- Beran, J. (1992a). A goodness of fit test for time series with long range dependence. *J. R. Statist. Soc. Ser. B*, 54:749-760.
- Beran, J. (1992b). Statistical methods for data with long range dependence. *Stat. Sci.*, 7:404-427.
- Beran, J. and Terrin, N. (1994). Estimation of long-memory parameter, based on a multivariate central limit theorem. *Journal of Time Series Analysis*.
- Chen, G., Abraham, B. and Peiris, S. (1994). Lag window estimation of the degree of differencing in fractionally integrated time series models. *Journal of Time Series Analysis*.
- Cheung, Y.W. (1993). Testes for fractional integration: A Monte Carlo investigation. *Journal of Time Series Analysis*.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41:909-996.

- Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia: SIAM.
- Diebold, F.X. and Rudebusch, G.D. (1989). Long memory and persistence in aggregate output. *Journal of Monetary and Economics*, 24:189-206.
- Fox, R. and Taqqu, M.S. (1986). Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary gaussian time series. *The Annals of Statistics*.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4:221-238.
- Granger, C.M.G. and Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1:15-29.
- Gupta, S.N. and Ji. X. (1992). Modeling persistence in time series data. *Estadística*.
- Gupta, S.N. and Kumar, A. (1991). Time domain estimation in fractionally differenced noise processes. *Journal of Combinatory Information and System Science*.
- Hassler, U. (1993). Regression of spectral estimator with fractionally integrated time series. *Journal of Time Series Analysis*, 14:369-380.
- Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68:165-176.
- Hosking, J.R.M. (1984). Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing. *Water Resources Res.*, 20:1898-1908.
- Hurvich, P.M. (1987). Data-driven choice of a spectrum estimates extending the applicability of cross-validation methods. *J. Am. Statist. Assoc.*, 80:933-940.
- Jensen, M.J. (1996). Ordinary least squares estimate of the fractional differencing parameter using wavelets. Department of Economics. Southern Illinois University. *Preprint*
- Mandelbrot, B.B. and Ness, V. (1968). Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM, Rev.*
- Nason, G.P. and Silvermann, B.W. (1994). The discrete wavelet transform in S. *Journal of Computational and Graphical Statistics*

- Porter-Hudak, S. (1990). An application to the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85:338-344.
- Reisen, V.A. (1994). Estimation of the fractional differenced parameter in the ARIMA(p,d,q) model using the smoothed periodogram. *Journal of Time Series Analysis*, 85:338-344.
- Vinod, H. D. (1991). Estimating fractionally integrated ARMA models persistence in GNP. *Preprint*.
- Yajima, Y. (1985). On estimation long memory time series models. *Austral. J. Statist.*, 27:303-320.

Apêndice A

Programas para estimação dos parâmetros

1- Programa para a estimação dos parâmetros do modelo

$SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ quando o estimador de d é $\hat{d}_c$

Método Iterativo

```
TA <- T    *** T é o tamanho da série ***
jota <- c(0 : (TA - 1))
freq <- 2 * pi * jota/TA
serie1 <- serie.log    *** serie.log é a série que será ajustada ***
serie2 <- serie.log
modelo <- list(list(order = c(6, 0, 0), ar.opt = c(T, F, F, F, F, T)),
list(order = c(0, 1, 1), period = 12))

*** Cálculo de  $\hat{d}_c$  ***
for(s1 in 1 : n){    *** n é o número de iterações ***
  fac1 <- acf(serie2, type = "correlation", plot = F)
  cor1 <- fac1$acf
  d1 <- cor1[2]/(1 + cor1[2])
}
```


*** Filtro do parâmetro de longa memória ***

```
f1.t <- numeric(TA)
for(j in 1:TA){
  fl <- numeric(TA)
  for(t1 in 1:TA){
    fl[t1] <- serie1[t1] * exp(-1i * freq[j] * (t1 - 1))
    f1.t[j] <- sum(fl)}
u1.t <- ((1 - exp(-1i * freq)) ^ d1) * f1.t
u1.ti <- numeric(TA)
for(t1 in 1:TA){
  Y <- numeric(TA)
  for(j in 1:TA){
    Y[j] <- exp(1i * freq[j] * (t1 - 1)) * u1.t[j]}
u1.ti[t1] <- Mod(mean(Y))} *** u1.ti é a série filtrada ***
```

*** Ajuste do modelo $SARIMA(6, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ à série filtrada, u1.ti. ***

```
fit1 <- arima.mle(u1.ti, model = modelo)
filtrol <- arima.filt(serie1, model = fit1$model)
serie2 <- filtrol$filt[31:TA] - filtrol$pred[31:TA]}
```

2- Programa para a estimação dos parâmetros do modelo*SARFIMA*(6, d , 0) $\times$ (0.1, 1)₁₂ quando o estimador de d é $\hat{d}_{cg}$ **Método Iterativo**

```

TA <- T    *** T é o tamanho da série ***
M <- 100
m <- 30
jota <- c(0 : (TA - 1))
freq <- 2 * pi * jota/TA
serie1 <- serie.log    *** serie.log é a série que será ajustada ***
serie2 <- serie.log
modelo <- list(list(order = c(6, 0.0), ar.opt = c(T, F, F, F, F, T)),
list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
for(s2 in 1 : n){    *** n é o número de iterações ***

*** Cálculo de  $\hat{d}_{cg}$  ***
fac2 <- acf(serie2, type = "correlation", plot = F)
cor2 <- fac2$acf
d.f2 <- numeric(M)
for(i in 1 : M){
  d.f2[i] <- ((i) * cor2[i + 1] - (i - 1) * cor2[i]) / (cor2[i + 1] + cor2[i])
W0 <- numeric(m)
W1 <- numeric(m)
W2 <- numeric(m)
U <- numeric(m)
V <- numeric(m)
IV <- numeric(m)
Tot <- 0
A <- numeric(m)
for(i in 1 : m){
  s <- (M - i)
  X0 <- numeric(s)
  X1 <- numeric(s)

```

```

X2 <- numeric(s)
for(k in 1:s){
  k1 <- abs(k - i + 1)
  k2 <- abs(k - i + 2)
  k3 <- abs(i - 2)
  X0[k] <- (cor2[k + i] + cor2[k1 + 1] - 2 * cor2[k + 1] * cor2[i])^2
  X1[k] <- (cor2[k + i] + cor2[k1 + 1] - 2 * cor2[k + 1] * cor2[i]) *
  (cor2[k + i - 1] + cor2[k2 + 1] - 2 * cor2[k + 1] * cor2[k3 + 1])
  X2[k] <- (cor2[k + i - 1] + cor2[k2 + 1] - 2 * cor2[k + 1] * cor2[k3 + 1])^2}
W0[i] <- sum(X0)
W1[i] <- sum(X1)
W2[i] <- sum(X2)
U[i] <- (cor2[abs(i - 2) + 1]^2) * W0[i] - 2 * cor2[abs(i - 2) + 1] * cor2[i] * W1[i] +
  (cor2[i]^2) * W2[i]
V[i] <- (((2*(i-1)-1)^2)*U[i])/(cor2[i]+cor2[abs(i-2)+1]^4)/(TA.d2a-s1+1)
IV[i] <- 1/V[i]}
Tot <- sum(IV) - IV[1]
for(i in 1:m){
  A[i] <- IV[i]/Tot}
m3 <- (m - 1)
est <- numeric(m3)
for(j in 1:m3){
  est[j] <- A[j + 1] * d.f2[j]}
d2 <- sum(est)

```

*** Filtro do parâmetro de longa memória ***

```

f2.t <- numeric(TA)
for(j in 1:TA){
  fl <- numeric(TA)
  for(t2 in 1:TA){
    fl[t2] <- serie1[t2] * exp(-1i * freq[j] * (t2 - 1))}
  f2.t[j] <- sum(fl)}
u2.t <- ((1 - exp(-1i * freq)) ^ d2) * f2.t

```

```

u2.ti <- numeric(TA)
for(t2 in 1 : TA){
  Y <- numeric(TA)
  for(j in 1 : TA){
    Y[j] <- exp(1i * freq[j] * (t2 - 1)) * u2.t[j]}
  u2.ti[t1] <- Mod(mean(Y))} *** u2.ti é a série filtrada ***

*** Ajuste do modelo SARIMA(6,0,0) × (0.1,1)12 à série filtrada, u2.ti. ***
fit2 <- arima.mle(u2.ti, model = modelo)
filtro2 <- arima.filt(serie1, model = fit2$model)
serie2 <- filtro2$filt[31 : TA] - filtro2$pred[31 : TA]}

```

3- Programa para a estimação dos parâmetros do modelo
 $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ quando o estimador de d é $\hat{d}_p$

```

TA <- T    *** T é o tamanho da série ***
GTA <- TA^ 0.5
J <- c(1 : GTA)
X <- numeric(GTA)
jota <- c(0 : (TA - 1))
freq <- 2 * pi * jota/TA
serie1 <- serie.log    *** serie.log é a série que será ajustada ***
modelo <- list(list(order = c(6, 0, 0), ar.opt = c(T, F, F, F, F, T)),
list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
for(i in 1 : GTA){
  X[i] <- log(4 * (sin(2 * pi * J[i]/(2 * TA))^2))}

```

***** Cálculo de $\hat{d}_p$ *****

```

PER <- spec.pgram(serie1, detrend = F, taper = 0, plot = F)
LPER <- log(10^ (PER$spec[2 : (GTA + 1)]/10))
FIT <- lm(LPER X)
d3 <- - FIT$coef[2]

```

***** Filtro do parâmetro de longa memória *****

```

f3.t <- numeric(TA)
for(j in 1 : TA){
  fl <- numeric(TA)
  for(t3 in 1 : TA){
    fl[t3] <- serie1[t3] * exp(-1i * freq[j] * (t3 - 1))}
  f3.t[j] <- sum(fl)}
u3.t <- ((1 - exp(-1i * freq)) ^ d3) * f3.t
u3.ti <- numeric(TA)
for(t3 in 1 : TA){

```

```
Y <- numeric(TA)
for(j in 1 : TA){
  Y[j] <- exp(1i * freq[j] * (t3 - 1)) * u3.t[j]}
u3.ti[t1] <- Mod(mean(Y)) *** u3.ti é a série filtrada ***

*** Ajuste do modelo SARIMA(6,0,0) × (0,1,1)12 à série filtrada, u3.ti. ***
fit3 <- arima.mle(u3.ti, model = modelo)
```

4 - Programa para a estimação dos parâmetros do modelo

$SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ quando o estimador de d é $\hat{d}_{ps}$

```

TA <- T    *** T é o tamanho da série ***
GTA <- TA^ 0.5
M <- TA^ 0.9
J <- c(1 : GTA)
X <- numeric(GTA)
jota <- c(0 : (TA - 1))
freq <- 2 * pi * jota/TA
serie1 <- serie.log    *** serie.log é a série que será ajustada ***
modelo <- list(list(order = c(6, 0, 0), ar.opt = c(T, F, F, F, F, T)),
list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
for(i in 1 : GTA){
  X[i] <- log(4 * (sin(2 * pi * i/(2 * TA))^2))}

*** Cálculo de  $\hat{d}_{ps}$  ***
cov <- acf(serie1, lag.max = (TA - 1), type = "covariance", plot = F)
R0 <- cov$acf[1]
R <- cov$acf[2 : (M + 1)]
ps <- numeric(GTA)
for(i in 1 : GTA){
  psj <- numeric(M)
  for(j in 1 : (M/2)){
    psj[j] <- (1 - 6 * ((j/M)^2) + 6 * ((j/M)^3)) * R[j] * cos((2 * pi * i/TA) * j)}
  for(j in (M/2) : M){
    psj[j] <- (2 * ((1 - (j/M))^3)) * R[j] * cos((2 * pi * i/TA) * j)}
  ps[i] <- (1/(pi)) * ((R0/2) + sum(psj))}
FIT <- lm(log(ps) ~ X)
d4 <- - FIT$coef[2]

*** Filtro do parâmetro de longa memória ***
f4.t <- numeric(TA)

```

```

for(j in 1 : TA){
  fl <- numeric(TA)
  for(t4 in 1 : TA){
    fl[t4] <- serie1[t4] * exp(-1i * freq[j] * (t4 - 1))}
  f4.t[j] <- sum(fl)}
u4.t <- ((1 - exp(-1i * freq)) ^ d4) * f4.t
u4.ti <- numeric(TA)
for(t4 in 1 : TA){
  Y <- numeric(TA)
  for(j in 1 : TA){
    Y[j] <- exp(1i * freq[j] * (t4 - 1)) * u4.t[j]}
  u4.ti[t4] <- Mod(mean(Y))} *** u4.ti é a série filtrada ***

*** Ajuste do modelo SARIMA(6,0,0) × (0,1,1)12 à série filtrada, u4.ti. ***
fit4 <- arima.mle(u4.ti, model = modelo)

```


5 - Programa para a estimação dos parâmetros do modelo*SARFIMA*(6, d , 0) $\times$ (0, 1, 1)₁₂ quando o estimador de d é $\hat{d}_{mv}$ **Método Iterativo**

```

TA <- T    *** T é o tamanho da série ***
jota <- c(0 : (TA - 1))
freq <- 2 * pi * jota/TA
serie1 <- serie.log    *** serie.log é a série que será ajustada ***
serie2 <- serie.log
modelo <- list(list(order = c(6, 0, 0), ar.opt = c(T, F, F, F, F, T)),
list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
for(s1 in 1 : n){    *** n é o número de iterações ***

*** Cálculo de  $\hat{d}_{mv}$  ***
for(s1 in 1 : n){    *** n é o número de iterações ***
    fit5 <- arima.fracdiff(serie2, model = list(ar = NULL, ma = NULL))
    d5 <- fit5$model$d

*** Filtro do parâmetro de longa memória ***
f5.t <- numeric(TA)
for(j in 1 : TA){
    fl <- numeric(TA)
    for(t5 in 1 : TA){
        fl[t5] <- serie1[t5] * exp(-1i * freq[j] * (t5 - 1))
    }
    f5.t[j] <- sum(fl)
}
u5.t <- ((1 - exp(-1i * freq)) ^ d5) * f5.t
u5.ti <- numeric(TA)
for(t5 in 1 : TA){
    Y <- numeric(TA)
    for(j in 1 : TA){
        Y[j] <- exp(1i * freq[j] * (t5 - 1)) * u5.t[j]
    }
    u5.ti[t5] <- Mod(mean(Y))    *** u5.ti é a série filtrada ***
}

```

*** Ajuste do modelo $SARIMA(6,0,0) \times (0.1,1)_{12}$ à série filtrada, `u5.ti`. ***

```
fit5 <- arima.mle(u5.ti, model = modelo)
```

```
filtro5 <- arima.filt(serie1, model = fit5$model)
```

```
serie2 <- filtro5$filt[31 : TA] - filtro5$pred[31 : TA]
```

6 - Programa para a estimação dos parâmetros do modelo

$SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ quando o estimador de d é $\hat{d}_w$

Método Iterativo

```

TA <- T    *** T = 512 é o tamanho da série ***
jota <- c(0 : (TA - 1))
freq <- 2 * pi * jota/TA
NTAS <- m   *** m = log2(T) = 9 ***
a <- c(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256) serie1 <- serie.log *** serie.log
é a série que será ajustada ***
serie2 <- serie.log
modelo <- list(list(order = c(6, 0, 0), ar.opt = c(T, F, F, F, F, T)),
list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
.F()    *** .F() é a rotina que calcula as wavelets ***
for(s1 in 1 : n){    *** n é o número de iterações ***

*** Cálculo de  $\hat{d}_w$  ***
for(s1 in 1 : n){    *** n é o número de iterações ***
  R <- numeric(NTAS)
  y <- wd(serie2[1 : 512])
  for(i in 1 : NTAS){
    x <- (accessD(y, level = (i - 1), boundary = F))^ 2
    R[i] <- a[i] * sum(x)}
  FIT <- lm(log(R[3 : NTAS]) log((a[3 : NTAS])^ 2))
  d6 <- FIT$coef[2]

*** Filtro do parâmetro de longa memória ***
f6.t <- numeric(TA)
for(j in 1 : TA){
  fl <- numeric(TA)
  for(t6 in 1 : TA){
    fl[t6] <- serie1[t6] * exp(-1i * freq[j] * (t6 - 1))}
  f6.t[j] <- sum(fl)}

```

```

u6.t <- ((1 - exp(-1i * freq)) ^ d6) * f6.t
u6.ti <- numeric(TA)
for(t6 in 1 : TA){
  Y <- numeric(TA)
  for(j in 1 : TA){
    Y[j] <- exp(1i * freq[j] * (t6 - 1)) * u6.t[j]}
  u6.ti[t6] <- Mod(mean(Y))} *** u6.ti é a série filtrada ***

```

*** Ajuste do modelo $SARIMA(6, 0, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$ à série filtrada, u6.ti. ***

```

fit6 <- arima.mle(u6.ti, model = modelo)
filtro6 <- arima.filt(serie1, model = fit6$model)
serie2 <- filtro6$filt[31 : TA] - filtro6$pred[31 : TA]}

```

Apêndice B

Programa para previsão do modelo

$$SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$$

```
d <- d.est      *** d.est é o valor estimado do parâmetro d.
phi1 <- phi1.est *** phi1.est é o valor estimado do parâmetro  $\phi_1$ .
phi6 <- phi6.est *** phi6.est é o valor estimado do parâmetro  $\phi_6$ .
a1 <- numeric(T1) *** T1 < T, onde T é o tamanho da série. ***
for(i in 1 : T1){
  a1[i] <- - gamma(i - d)/(gamma(-d) * gamma(i + 1))}
b1 <- numeric(T!)
b1[1] <- a1[1] + phi1
b1[2] <- a1[2] - phi1 * a1[1]
b1[3] <- a1[3] - phi1 * a1[2]
b1[4] <- a1[4] - phi1 * a1[3]
b1[5] <- a1[5] - phi1 * a1[4]
b1[6] <- a1[6] - phi1 * a1[5] + phi6
for(j in 7 : T1){
  b1[j] <- -a1[j] - phi1 * a1[j - 1] - phi6 * a1[j - 6]}
model1 <- list(list(ar = b1), list(ma = theta12.est, period = 12)) *** theta12.est é o
valor estimado do parâmetro  $\theta_{12}$  ***
pred1m2 <- arima.forecast(serie, n = 12, model = model1) *** serie é a série
ajustada pelo modelo  $SARFIMA(6, d, 0) \times (0, 1, 1)_{12}$  ***
```

Apêndice C

Logarítmo da série hidrológica

Rio São Marcos

5.337538 5.934894 5.961005 5.627621 4.962845 4.521789 4.454347 4.234107
4.219508 4.189655 4.204693 4.499810 5.214936 5.375278 5.099866 4.682131
4.290459 4.262680 4.043051 3.713572 3.401197 3.931826 4.204693 4.875197
5.648974 5.442418 5.105945 5.017280 4.564348 4.290459 4.143135 3.806662
3.713572 3.912023 4.110874 4.828314 5.017280 4.770685 4.762174 4.521789
4.127134 3.526361 3.332205 3.091042 3.258097 3.583519 3.433987 3.828641
5.398163 5.564520 5.407172 5.468060 4.934474 4.430817 4.077537 3.931826
3.295837 3.784190 3.951244 4.521789 4.564348 4.110874 5.241747 4.584967
4.356709 3.891820 3.761200 3.465736 3.295837 3.332205 3.737670 4.174387
5.010635 4.025352 4.394449 4.543295 4.204693 4.007333 3.637586 3.332205
3.178054 3.295837 4.276666 4.976734 5.129899 4.736198 4.753590 4.219508
3.951244 3.784190 3.713572 3.178054 2.484907 2.708050 3.583519 4.795791
5.231109 5.267858 4.394449 4.584967 4.043051 3.871201 3.663562 3.401197
3.044522 3.135494 3.828641 4.204693 4.812184 5.459586 5.318120 4.663439
4.317488 4.007333 3.688879 3.367296 3.135494 3.295837 4.499810 4.330733
5.075174 4.644391 4.465908 4.919981 3.951244 3.713572 3.496508 3.218876
3.178054 3.433987 3.891820 4.584967 5.003946 4.919981 5.468060 4.919981

4,343805 4,804021 4,290459 3,610918 3,496508 3,433987 4,290459 4,727388
5,771441 5,676754 5,541264 4,663439 4,430817 4,317488 4,094345 3,688879
3,583519 4,094345 4,672829 4,644391 4,595120 5,087596 5,017280 4,663439
4,356709 3,931826 3,737670 3,465736 3,258097 3,295837 4,356709 4,442651
4,828314 5,583496 5,501258 5,123964 5,017280 4,543295 4,330733 4,007333
3,737670 4,025352 4,605170 4,543295 5,749393 5,375278 5,641907 5,468060
4,700480 4,394449 4,290459 4,007333 3,850148 3,891820 4,110874 4,691348
5,003946 5,236442 5,831882 5,081404 4,753590 4,382027 4,174387 3,970292
3,784190 3,784190 3,737670 4,828314 5,298317 5,214936 5,416100 4,867534
4,276666 4,330733 3,912023 3,737670 3,583519 3,496508 3,465736 4,976734
5,181784 5,843544 5,459586 4,787492 4,553877 4,276666 4,127134 3,891820
3,610918 4,043051 4,553877 4,418841 4,812184 4,912655 5,017280 4,948760
4,406719 4,077537 3,737670 3,258097 2,484907 3,555348 4,477337 5,075174
5,105945 4,962845 5,010635 5,030438 4,543295 4,382027 4,043051 3,806662
3,332205 3,433987 3,496508 4,174387 4,584967 5,472271 5,513429 5,030438
4,844187 4,595120 4,369448 4,077537 3,891820 3,713572 4,543295 5,117994
4,663439 4,615121 5,278115 5,198497 4,787492 4,465908 4,143135 3,713572
3,637586 4,418841 4,762174 5,187386 4,912655 5,303305 4,779123 4,499810
4,110874 3,761200 3,258097 2,772589 2,397895 1,791759 4,234107 4,812184
4,976734 4,983607 4,672829 4,859812 4,330733 4,025352 3,555348 2,995732
2,302585 3,891820 4,532599 4,976734 4,983607 4,574711 5,147494 4,682131
4,844187 4,584967 4,276666 3,688879 3,761200 3,526361 4,736198 5,613128
5,459586 5,602119 5,513429 5,351858 5,010635 4,804021 4,663439 4,418841
4,204693 4,174387 4,521789 4,983607 4,905275 5,135798 5,062595 5,023881
4,615121 4,510860 4,394449 3,988984 4,025352 4,060443 3,761200 4,234107
5,318120 4,962845 5,164786 4,912655 4,532599 4,276666 3,988984 3,555348
2,944439 3,332205 4,330733 4,488636 4,820282 5,099866 4,990433 4,875197
4,584967 4,290459 4,025352 3,610918 2,708050 3,218876 4,043051 4,356709
4,867534 5,056246 4,812184 4,779123 4,615121 4,418841 4,234107 4,094345
3,583519 2,772589 3,970292 4,510860 4,727388 5,153292 4,820282 4,718499
4,418841 4,143135 3,828641 3,583519 3,218876 3,713572 4,248495 4,709530
4,962845 4,890349 4,779123 4,532599 4,276666 4,043051 3,850148 3,367296
2,639057 2,564949 3,951244 3,761200 5,556828 5,789960 4,962845 4,753590

4,418841 4,077537 3,828641 3,526361 3,295837 4,454347 4,912655 5,192957
5,666427 5,924256 6,220590 5,451038 5,017280 4,653960 4,465908 4,219508
3,828641 4,369448 4,912655 5,541264 6,045005 6,424869 5,683580 5,351858
5,129899 4,828314 4,605170 4,369448 4,143135 4,454347 4,812184 5,634790
5,648974 5,929589 6,232448 5,446737 5,318120 4,969813 4,454347 4,343805
4,174387 3,931826 4,836282 5,645447 5,703782 6,001415 5,953243 5,379897
4,997212 4,736198 4,477337 4,290459 4,127134 4,369448 4,418841 5,356586
5,010635 5,442418 5,267858 4,770685 4,521789 4,143135 3,912023 3,637586
3,401197 3,806662 5,247024 5,313206 6,129050 5,918894 5,556828 5,003946
4,727388 4,234107 4,007333 3,828641 3,637586 4,488636 4,682131 4,488636
4,077537 4,043051 4,262680 4,276666 3,912023 3,737670 3,367296 3,218876
3,258097 4,110874 4,905275 5,697093 5,075174 5,062595 5,147494 5,123964
4,663439 4,369448 4,174387 3,850148 3,637586 4,219508 5,111988 5,356586
5,332719 5,393628 5,342334 5,521461 4,859812 4,553877 4,369448 4,077537
3,806662 4,477337 5,293305 5,283204 5,236442 4,919981 5,921578 5,752573
5,231109 4,875197 4,624973 4,418841 4,094345 4,369448 4,290459 4,663439
5,220356 5,347108 4,736198 4,955827 4,615121 4,290459 4,110874 3,761200
3,401197 3,713572 4,574711 4,736198