Causalidade entre Séries Temporais

Daniela Mara Sauerbronn da Cunha

Este exemplar corresponde à versão final da
Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de
Mestre em Estatística

Área de Concentração: Séries Temporais

Banca Examinadora:

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin**

Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Tolói

Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves

Este trabalho foi financiado pelo CNPq

São Paulo, agosto de 1997.

Resumo

Em inúmeras aplicações o estabelecimento de relações de causalidade entre variáveis é fundamental. Todavia, há dificuldades em se definir causalidade em geral. A existência de correlação entre duas variáveis X e Y , não implica na relação de causa e efeito entre elas, pois ambas podem estar associadas a uma terceira variável Z .

O conceito de causalidade para séries temporais, de acordo com Granger, baseia-se no conceito de previsibilidade: X_t causa Y_t se o presente de Y_t pode ser melhor previsto usando valores passados de X_t do que usando apenas a informação de Y_t .

Existem vários procedimentos para detecção de causalidade entre séries temporais. Neste trabalho, apresentamos os procedimentos de Pierce & Haugh, Hsiao e Boudjellaba e a aplicação destes a dados de Consumo, Renda e Taxa de Juros Real.

De acordo com o procedimento de Pierce & Haugh concluímos que Consumo causa Renda e que há causalidade instantânea. Para os pares (Consumo, Juros) e (Renda, Juros) não foram encontradas relações de causalidade no período considerado. O procedimento de Hsiao detectou que Consumo causa Renda, mas não há causalidade instantânea presente. Detectou-se também que Juros causa Renda e neste caso também não há causalidade instantânea presente. De acordo com o procedimento de Boudjellaba, há relação de feedback entre Renda e Juros e Renda causa Consumo. Além disso, este procedimento permite a exploração de relações entre vetores das séries consideradas, onde concluímos que o vetor composto pelas séries (Renda, Juros) causa Consumo e que há relação de feedback entre Juros e (Consumo, Renda).

Abstract

In many practical situations the establishment of relation of causality among variables is of extreme importance. However, there is difficulty (hardness) in defines causality in general. We know that if there is correlation between two variables X e Y , this not imply that there is relations of cause and effect between them. This can happen because can be association with a third variable Z .

The concept of causality for time series accord to Granger is based on the concept of previsibility: X_t causes Y_t if the present value of Y_t could be better predicted using past values of X_t than using just the information available about Y_t .

There are many procedures (methods) for search causality between time series. In this work, we show procedures of Pierce & Haugh, Hsiao and Boudjellaba et alli and the aplication to data of Consumption, Income and Interest Rate.

According from Pierce & Haugh we conclude that Consumption causes Income and there is Instantaneous causality. For the other pairs of time series were not detected causality relationships in the considerate period. The methodology of Hsiao detected that Consumption causes Income, but there is no instantaneous causality. Besides, detected that Interest Rate causes Income an in this case too there is no instantaneous causality. According from Boudjellaba we conclude that there is feedback between Income and Interest Rate and Income causes Consumption. Besides, this methodology allows to explore many possible relationships between time series.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Introdução	1
Capítulo 1 - Preliminares	2
1.1 - Definições e Notações	2
1.2 - Causalidade	36
1.3 - Características dos Dados	41
Capítulo 2 - Procedimento de Pierce & Haugh	45
2.1 - Introdução	45
2.2 - Procedimento de Detecção de Causalidade	47
2.3 - Aplicação aos Dados	53
Capítulo 3 - Procedimento de Hsiao	61
3.1 - Introdução	61
3.2 - Procedimento de decisão para ajuste de um vetor autoregressivo bivariado	61
3.3 - Aplicação aos dados	65

Capítulo 4 - Procedimento de Boudjellaba e outros	74
4.1 - Introdução	74
4.2 - Modelagem ARMA vetorial	75
4.3 - Causalidade em Processos Lineares Invertíveis	77
4.4 - Aplicação aos dados	81
Discussão e Conclusões	90
Referências Bibliográficas	93
Apêndice - Gráficos, Tabelas e Figuras	96

Agradecimentos

Inicialmente agradeço meu orientador, Professor Doutor Pedro Alberto Morettin, pela dedicação com que transmitiu seus conhecimentos e, acima de tudo, pela paciência e compreensão que demonstrou no desenvolvimento deste trabalho.

Meu agradecimento especial à Professora Doutora Clélia Maria de Castro Tolói, pelas sugestões e críticas apresentadas, e principalmente pelo apoio constante nos momentos difíceis.

Agradeço também, o Sr. José Guilherme Machado de Campos, pelo fornecimento dos dados e pela grande ajuda na interpretação macroeconômica dos mesmos.

No âmbito emocional, minha gratidão infinita ao apoio e compreensão recebidos dos familiares, apesar das inúmeras horas de convívio familiar sacrificadas, especialmente à minha mãe Beatriz, a quem devo minha educação e formação.

Obrigada Arnaldo, pelo incentivo e amor.

Não poderia deixar de mencionar a Sra. Maria Eugênia F. Souza Martins, Sr. Ney A. Miyamoto e Sr. Tarcísio S. Rabelo Jr., pelo apoio e consideração irrestritos.

Finalmente, gostaria de agradecer o fundamental apoio recebido do Banco Itaú S.A., personificado na figura do Dr. Silvio A. de Carvalho, que viabilizou a dedicação necessária para a boa finalização deste trabalho.

Introdução

O propósito desta dissertação é estudar procedimentos para detecção de causalidade entre séries temporais.

O conceito de causalidade para séries temporais foi introduzido por Granger (1969) e se baseia no conceito de previsibilidade: X_t causa Y_t se o presente de Y_t pode ser melhor previsto usando valores passados de X_t do que usando apenas a informação de Y_t .

Existem vários procedimentos para detecção de causalidade entre séries temporais. Neste trabalho, apresentaremos os procedimentos de Pierce & Haugh, Hsiao e Boudjellaba e outros.

Uma característica comum dos métodos propostos é que todos eles contêm um primeiro estágio onde uma ou mais séries univariadas envolvidas são filtradas para livrarem-se da autocorrelação.

Entre as mais importantes contribuições no assunto estão Granger (1969), Pierce and Haugh (1977), Sims (1977), Hsiao (1978), Price (1979), Tjøstheim (1981), Layton (1984), Boudjellaba e outros (1992), entre outras.

Como mencionamos anteriormente, o objetivo principal dessa dissertação é investigar possíveis relações de causalidade. Os procedimentos de detecção de causalidade são aplicados aos dados de Consumo (Vendas Físicas), Renda (Salário Médio Real) e Taxa de Juros Real.

A seguir, introduziremos algumas definições que serão usadas extensivamente nos capítulos seguintes.

Capítulo 1 - Preliminares

1.1 - Definições e Notações

Definição 1.1: Seja T um conjunto arbitrário. Um **processo estocástico** é uma família $Z = \{Z(t), t \in T\}$, tal que, para cada $t \in T$, $Z(t)$ é uma variável aleatória. Nestas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias, que suporemos definidas num mesmo espaço de probabilidades (Ω, A, P) . O conjunto T é normalmente tomado como o conjunto dos inteiros $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ou o conjunto dos reais $\mathbb{R}$. Como, para $t \in T$, $Z(t)$ é uma v.a. definida sobre Ω , na realidade $Z(t)$ é uma função de dois argumentos, $Z(t, w)$, $t \in T$, $w \in \Omega$.

Para cada $w \in \Omega$ fixado, obteremos uma função de t , ou seja, uma *realização ou trajetória* do processo, ou ainda, uma *série temporal*.

O conjunto dos valores $\{Z(t), t \in T\}$ é chamado *espaço dos estados* do processo estocástico e os valores de $Z(t)$ são chamados *estados*.

Sejam $t_1, t_2, \dots, t_n$ elementos quaisquer de T e consideremos

$$F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n) = P\{Z(t_1) \leq z_1, \dots, Z(t_n) \leq z_n\}. \quad (1.1)$$

Então, o processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ estará especificado se conhecermos as *distribuições finito-dimensionais* (1.1), para todo $n \geq 1$.

Estacionariedade de uma série temporal.

Uma das suposições mais frequentes que se faz a respeito de uma série temporal é que ela seja estacionária, ou seja, desenvolve-se no tempo ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável.

Na prática, a maioria dos processos não são estacionários, porém uma grande classe deles podem se tornar estacionários através de transformações adequadas. A transformação mais comum consiste em tomar diferenças sucessivas da série original, utilizando os operadores diferença que serão definidos adiante.

Há basicamente duas razões para se transformar os dados originais: estabilizar a variância e tornar o efeito sazonal aditivo.

É comum em séries econômicas a existência de tendências e pode ocorrer um acréscimo da variância da série (ou de suas diferenças) à medida que o tempo passa. Nesse caso uma transformação logarítmica pode ser adequada.

A classe de modelos ARIMA (auto-regressivos-integrados-médias-móveis), é capaz de descrever de maneira satisfatória séries não-estacionárias, mas que não apresentem comportamento explosivo.

Definição 1.2: Um processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ diz-se **estritamente estacionário** se todas as distribuições finito-dimensionais permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F(z_1, \dots, z_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n),$$

para quaisquer $t_1, \dots, t_n, \tau$ de T .

Isto significa, em particular, que todas as distribuições unidimensionais são invariantes sob translações do tempo, logo a média $\mu(t) = \mu$ e a variância $V(t) = \sigma^2$ são constantes, para todo $t \in T$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mu = 0$; caso contrário, considere o processo $\tilde{Z}(t) = Z(t) - \mu$.

Intuitivamente, um processo Z é estacionário se ele se desenvolve no tempo de modo que a escolha de uma origem dos tempos não é importante. Em outras palavras, as características de $Z(t + \tau)$, para todo τ , são as mesmas de $Z(t)$.

A partir de agora, estaremos interessados somente nesta classe de processos, que denominaremos simplesmente de **processos estacionários**.

Definição 1.3: Um processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ diz-se **fracamente estacionário** (ou estacionário de segunda ordem ou em sentido amplo) se e somente se:

- i) $E\{Z(t)\} = \mu(t) = \mu$, para todo $t \in T$;
 - ii) $E\{Z^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$;
 - iii) $\gamma(\tau) = \text{Cov}\{Z(t), Z(t + \tau)\}$, $\tau \in T$
- (1.2)

Definição 1.4: A **função de autocovariância** (facv) de Z é definida por:

$$\begin{aligned}\gamma(t_1, t_2) &= \text{Cov}\{Z(t_1), Z(t_2)\} = \mu(1; t_1, t_2) - \mu(1; t_1)\mu(1; t_2) \\ &= E\{Z(t_1)Z(t_2)\} - E\{Z(t_1)\}E\{Z(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in T.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Observe que $\mu(t)$ é uma função de $t \in T$ e que $\gamma(t_1, t_2)$ depende de dois argumentos, t_1 e t_2 . Em particular, se $t_1 = t_2 = t$, teremos:

$$\gamma(t, t) = \text{Var}\{Z(t)\} = E\{Z^2(t)\} - E^2\{Z(t)\}, \quad (1.4)$$

que é a (função) **variância** do processo $Z(t)$ e será indicada por $V(t)$.

A **função média**, ou simplesmente **média**, de Z é dada por

$$E\{Z(t)\} = \mu(1, t) = \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z; t) dz \quad (1.5)$$

Considere um processo $Z = \{Z(t), t \in T\}$ estacionário. A função de autocovariância (facv) de Z , $\gamma(\tau)$ definida por

$$\gamma(\tau) = \text{Cov}\{Z(t), Z(t + \tau)\}, \quad t, \tau \in T,$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\gamma(0) > 0$;
 - b) $\gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$;
 - c) $|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$;
 - d) $\gamma(\tau)$ é *positiva definida*, isto é
- (1.6)

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(\tau_j - \tau_k) \geq 0,$$

para quaisquer números reais $a_1, \dots, a_n$ e $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}$.

Se observarmos uma série temporal $Z_1, \dots, Z_N$, então um estimador para $\gamma(\tau)$ será:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.7)$$

onde

$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Z_t$ é a média amostral e $c_{-k} = c_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

c_k é a função de autocovariância (facv) amostral.

Definição 1.5: A função de autocorrelação (fac) do processo estacionário $Z(t)$ é definida por:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}, \quad \tau \in T \quad (1.8)$$

Um estimador para $\rho(\tau)$ será:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.9)$$

onde r_k é a função de autocorrelação amostral e $r_{-k} = r_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

A fac do processo $Z(t)$, $\rho(\tau)$, definida em (1.8) satisfaz $\rho(0) = 1$ além de (b) - (d) em (1.6).

Definição 1.6: A função de autocorrelação parcial ($\phi(kk)$) do processo estacionário Z_t é definida como a correlação parcial entre as variáveis Z_t e Z_{t-k} , para $k > 0$, ajustadas as variáveis intermediárias $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$. A f.a.c.p. é uma medida de dependência entre Z_t e Z_{t-k} após ter eliminado o efeito das variáveis $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$.

Segue-se que

$$\phi(kk) = \frac{|P_{-k}^*|}{|P_{-k}|} \quad (1.10)$$

onde

k : lag;

P_{-k} : matriz de autocorrelação de ordem $k \times k$;

P_{-k}^* : matriz P_{-k} com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações.

Um estimador para $\phi(kk)$ é obtido substituindo-se as autocorrelações ρ_k por r_k e será denotado por $\hat{\phi}(kk)$.

Operadores

Definiremos a seguir os operadores que serão utilizados nos capítulos seguintes para a obtenção de séries estacionárias. Estes operadores são:

Definição 1.7: Operador translação para o passado, denotado por B , é definido por

$$BZ_t = Z_{t-1} \quad (1.11)$$

$$B^m Z_t = Z_{t-m}, \quad m > 0 \quad (1.12)$$

Definição 1.8: Operador diferença (Δ)

O operador diferença de 1º ordem de Z_t é definido por

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t \quad (1.13)$$

onde

$$\Delta = 1 - B$$

O operador diferença de segunda ordem de Z_t é definido por

$$\Delta^2 Z_t = \Delta(\Delta Z_t) = \Delta(Z_t - Z_{t-1}) = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

ou seja,

$$\Delta^2 Z_t = (1 - B)^2 Z_t$$

De modo geral, o operador diferença de n-ésima ordem de Z_t será dado por

$$\Delta^n Z_t = \Delta(\Delta^{n-1} Z_t) \quad (1.14)$$

Definição 1.9: Operador diferença sazonal

O operador diferença sazonal de Z_t é definido por

$$\Delta^s Z_t = Z_t - Z_{t-s} = (1 - B^s)Z_t \quad (1.15)$$

onde s é o período de sazonalidade.

Modelos Lineares

Os modelos que serão estudados são casos particulares de um *modelo de filtro linear*. Este modelo supõe que a série temporal é gerada através de um filtro linear (ou sistema linear), cuja entrada é ruído branco.

Formalmente, o modelo é dado por:

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = \mu + \psi(B) a_t, \quad (1.16)$$

onde

a_t é uma sequência aleatória satisfazendo

$$E(a_t) = 0, \forall t, \text{Var}(a_t) = \sigma_a^2, \forall t, E(a_t a_s) = 0, s \neq t;$$

μ é um parâmetro que determina o nível da série;

a_t é uma sequência aleatória, independente de μ ;

$\psi_1, \psi_2, \dots$ é uma sequência de parâmetros tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 < \infty$;

$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ é denominada *função de transferência* do filtro.

O processo Z_t dado por (1.16) é um processo linear (discreto) e a série a_t é chamada *ruído branco*.

Podemos reescrever o modelo apresentado em (1.16) como

$$\tilde{Z}_t = \psi(B) a_t, \quad (1.17)$$

onde

$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$ é a variável corrigida pela média.

Se a sequência de pesos $\{\psi_j, j \geq 1\}$ for finita ou infinita e convergente, o filtro é estável (somável) e Z_t é estacionária. Neste caso, μ é a média do processo.

Caso contrário, Z_t é não-estacionária e μ não tem significado específico, a não ser como um ponto de referência para o nível da série.

Podemos escrever o modelo apresentado em (1.17) em uma forma alternativa, como uma soma ponderada de valores passados $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, \dots$ mais um ruído a_t , ou seja,

$$\tilde{Z}_t = \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{Z}_{t-j} + a_t. \quad (1.18)$$

Segue-se que

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) \tilde{Z}_t = a_t ,$$

ou

$$\pi(B) \tilde{Z}_t = a_t , \quad (1.19)$$

onde $\pi(B)$ é o operador $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$.

O modelo apresentado em (1.16) possui as seguintes propriedades:

a) a média de Z_t é dada por:

$$E(Z_t) = \mu \quad \text{se a série } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j < \infty \text{ convergir.} \quad (1.20)$$

b) A função de autocovariância de Z_t , $\gamma(j)$, é dada por:

$$\gamma(j) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} \quad (1.21)$$

se $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{j+i} < \infty$.

Note que $\gamma(j)$ é uma função somente entre j = defasagem de $Z(t)$ e $Z(t + j)$.

c) Para $j = 0$, temos que a variância de Z_t é dada por:

$$\gamma(0) = \text{Var}(Z_t) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \quad (1.22)$$

Definição 1.10: Modelos Auto-regressivos

Um modelo auto-regressivo de ordem p , que denotaremos por $AR(p)$, representa $\tilde{Z}_t$ como uma soma ponderada de valores passados $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, \dots, \tilde{Z}_{t-p}$ mais um ruído a_t , ou seja,

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t, \quad (1.23)$$

que pode ser obtido do processo linear dado em (1.19) e renomeando os pesos π_j para ϕ_j , de acordo com a notação usual e $\phi_j = 0, j > p$.

Podemos escrever o modelo apresentado em (1.23) na forma:

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = a_t, \quad (1.24)$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é o operador auto-regressivo de ordem p .

A seguir, apresentaremos as principais características de um processo representado pelo modelo $AR(p)$.

A) Estacionariedade e Invertibilidade

Podemos escrever o modelo apresentado em (1.24) como

$$\tilde{Z}_t = \frac{1}{\phi(B)} a_t = \psi(B) a_t$$

Assim, o processo $\tilde{Z}_t$ será estacionário se a série $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$, ou seja, se todas as raízes de

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0 \quad (1.25)$$

estiverem fora do círculo unitário.

Como $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é finito, não há restrições sobre os parâmetros para assegurar a invertibilidade de Z_t , isto é, o modelo $AR(p)$ é sempre invertível.

B) A função de autocovariância (facv) de Z_t é dada por:

$$\gamma_j = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p}, & j > 0 \\ \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2, & j = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Como resultado temos que a variância de Z_t é dada por:

$$\gamma(0) = Var(Z_t) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \dots - \phi_p \rho_p} \quad (1.27)$$

A função de autocorrelação (fac) de Z_t segue de (1.26),

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}, \quad j > 0 \quad (1.28)$$

que também pode ser escrita como $\phi(B)\rho_j = 0$, onde o operador B agora age em j , $B\rho_j = \rho_{j-1}$.

As equações (1.26), para $j = 1, \dots, p$, são chamadas Equações de Yule-Walker.

Um processo $AR(p)$ estacionário tem fac que decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas.

Para testar se as autocorrelações são significativamente diferentes de zero ou não, testaremos a hipótese $H_0: \rho_k = 0$, $k > p$, baseado nas fac amostrais r_k .

C) Função de autocorrelação parcial (facp)

Um processo $AR(p)$ tem facp

$$\begin{aligned} \phi(kk) &\neq 0, & \text{para } k \leq p & \text{ e} \\ \phi(kk) &= 0, & \text{para } k > p \end{aligned}$$

Resultado 1.1: Sob a suposição que o processo é um $AR(p)$, isto é, $\phi(kk) = 0, \forall k > p$, as facp estimadas $\hat{\phi}(kk)$, são independentes e normais, assintoticamente,

$$\hat{\phi}(kk) \sim N\left(0, \frac{1}{N}\right), \quad k > p. \quad (1.29)$$

Podemos dizer que $\phi(kk)$ é significativamente diferente de zero se

$$|\hat{\phi}(kk)| > z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{1}{N}},$$

ou seja, um intervalo de confiança, com coeficiente de confiança γ , para $\phi(kk)$ é dado por:

$$\left[\hat{\phi}(kk) - z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} ; \hat{\phi}(kk) + z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} \right],$$

onde z_γ é o valor crítico da distribuição normal para o nível de significância $(1 - \gamma)$.

Definição 1.11: Modelos de Médias Móveis

Um modelo de médias móveis de ordem q , que denotaremos por $MA(q)$, representa $\tilde{Z}_t$ como uma soma ponderada de valores passados de a_t , isto é:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (1.30)$$

que pode ser obtido do processo linear dado em (1.17) e renomeando os pesos ψ_j para θ_j , de acordo com a notação usual e $\theta_j = 0, j > q$.

Podemos escrever o modelo apresentado em (1.30) na forma:

$$\tilde{Z}_t = \theta(B)a_t \quad (1.31)$$

onde $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ é o operador de médias móveis estacionário de ordem q .

A seguir, apresentaremos as principais características de um processo representado pelo modelo $MA(q)$.

A) Estacionariedade e Invertibilidade

Um processo de $MA(q)$ é sempre estacionário e é invertível se $\theta(B)$ convergir para $|B| \leq 1$, ou seja, se as raízes de

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0 \quad (1.32)$$

estiverem fora do círculo unitário.

B) A função de autocovariância (facv) de Z_t é dada por:

$$\gamma_t = \begin{cases} \sigma_a^2 (-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_q \theta_{q-j}), & j \leq q \\ 0, & j > q \end{cases} \quad (1.33)$$

Como resultado temos que a variância de Z_t é dada por:

$$\gamma(0) = \text{Var}(Z_t) = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \quad (1.34)$$

A função de autocorrelação (fac) de Z_t será dada por:

$$\rho_t = \begin{cases} \frac{(-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \dots + \theta_q \theta_{q-j})}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}, & j = 1, \dots, q \\ 0, & j > q \end{cases} \quad (1.35)$$

Um processo de $MA(q)$ tem fac finita, no sentido que ela apresenta um corte após o "lag" q .

Resultado 1.2: Sob a suposição que o processo é um $MA(q)$, isto é, $\rho_k = 0, \forall k > q$,

$$\text{var}(r_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{v=-q}^q \rho_v^2, \quad k > q$$

Assintoticamente, r_k tem distribuição aproximadamente normal com

$$r_k \sim N\left(0; \frac{1}{N} \cdot \sum_{v=-q}^q \rho_v^2\right), \quad k > q. \quad (1.36)$$

Podemos dizer que ρ_k é significativamente diferente de zero se

$$|r_k| > z_\gamma \cdot \sqrt{\hat{\text{var}}(r_k)},$$

ou seja, um intervalo de confiança para ρ_k para $k > q$, com coeficiente de confiança γ , é dado por:

$$\left[r_k - z_\gamma \cdot \sqrt{\hat{\text{var}}(r_k)}; r_k + z_\gamma \cdot \sqrt{\hat{\text{var}}(r_k)} \right],$$

onde z_γ é o valor crítico da distribuição normal para um nível de significância $(1-\gamma)$ e

$$\hat{\text{var}}(r_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{v=0}^q r_v^2 = \frac{1}{N} \cdot \left(1 + 2 \sum_{v=1}^q r_v^2 \right).$$

C) Função de autocorrelação parcial (facp)

Um processo $MA(q)$ tem facp que se comporta de maneira similar à fac de um processo $AR(p)$, isto é, a facp decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas.

Definição 1.12: Modelos Auto-Regressivos-Médias-Móveis

Um modelo auto-regressivo e de médias móveis de ordem p, q , que denotaremos por $ARMA(p, q)$, é representado na forma:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (1.37)$$

onde $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ são números reais e a_t é ruído branco com média zero e variância σ_a^2 .

Utilizando a notação de operadores, o modelo acima pode ser escrito como:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

ou ainda como

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = \theta(B) a_t, \quad (1.38)$$

onde $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são os operadores auto-regressivos e de médias móveis.

A seguir, apresentaremos as principais características de um processo representado pelo modelo $ARMA(p, q)$.

A) Estacionariedade e Invertibilidade

O processo $ARMA(p, q)$ é estacionário se as raízes de $\phi(B) = 0$ estiverem todas fora do círculo unitário e será invertível se as raízes de $\theta(B) = 0$ caírem fora do círculo unitário.

B) A função de autocovariância (facv) de Z_t é dada por:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p}, \quad j > q. \quad (1.39)$$

A função de autocorrelação (fac) de Z_t é dada por:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}, \quad j > q. \quad (1.40)$$

A fac de um processo $ARMA(p, q)$ estacionário decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas após o “lag” $q - p$.

C) A função de autocorrelação parcial (facp)

Um processo $ARMA(p, q)$ tem facp que se comporta como a facp de um processo $MA(q)$ puro, isto é, a facp decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas.

Definição 1.13: Modelos Auto-Regressivos-Integrados-Médias-Móveis

Os modelos apresentados até agora são apropriados para descrever séries estacionárias. As séries encontradas na prática são frequentemente não estacionárias.

Uma maneira de se obter séries estacionárias, a partir de séries não estacionárias é tomar diferenças, utilizando os operadores definidos anteriormente neste capítulo.

Genericamente, a d-ésima diferença de Z_t é definida por:

$$\Delta^d Z_t = \Delta(\Delta^{d-1} Z_t) = (1 - B)^d Z_t.$$

Séries tais que, tomando-se um número finito de diferenças tornam-se estacionárias, são chamadas *não estacionárias homogêneas*.

Dada a série Z_t , não estacionária, se

$$W_t = \Delta^d Z_t = (1 - B)^d Z_t$$

for estacionária, podemos representar W_t por um modelo $ARMA(p, q)$, isto é,

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t. \quad (1.41)$$

Se W_t for uma diferença de Z_t , então Z_t é uma integral de W_t e dizemos que Z_t segue um modelo auto-regressivo, integrado, de médias móveis, de ordem (p, d, q) e será representado por

$$\phi(B)\Delta^d W_t = \theta(B)a_t \quad (1.42)$$

e denotaremos por $ARIMA(p, d, q)$, onde p e q são as ordens dos operadores auto-regressivos e de médias móveis, $\phi(B)$ e $\theta(B)$, respectivamente.

Modelos Sazonais

Sazonalidade é um dos fenômenos mais comuns em economia e outras ciências. Sazonalidade significa uma tendência de repetição de um padrão de comportamento sobre um período, geralmente um ano. Consideramos como sazonais os fenômenos que ocorrem regularmente de ano para ano, como por exemplo, o aumento de vendas no comércio na época de Natal.

Séries sazonais são caracterizadas por apresentarem alta correlação serial em “lags sazonais”, isto é, lags que são múltiplos do período s . Assim, Z_t é relacionada com $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$, mas também com $Z_{t-s}, Z_{t-2s}, \dots$.

Muitas das séries estatísticas registradas na atividade econômica são publicadas na forma *sazonalmente ajustada*. O ajuste sazonal é um procedimento de suavização aplicado aos dados, de modo a remover a correlação nos lags sazonais. A importância das séries sazonalmente ajustadas reside em sua utilidade na análise e interpretação de fenômenos sociais e/ou econômicos sujeitos a interferências dos movimentos sazonais, cuja exclusão é necessária para um estudo mais eficiente dos mesmos. Um procedimento de ajustamento sazonal será tal que esta correlação seja destruída (ou pelo menos removida em grande parte).

Um modelo para séries temporais supõe que a série temporal Z_t , $t = 1, \dots, N$ possa ser escrita como a soma de três componentes: uma tendência, uma componente sazonal e um termo aleatório:

$$Z_t = T_t + S_t + a_t, \quad t = 1, \dots, N \quad (1.43)$$

O modelo (1.43) acima é chamado *modelo aditivo* e é adequado quando S_t não depende de outras componentes, como T_t . Se as amplitudes sazonais variam com a tendência, um modelo mais adequado é o *modelo multiplicativo*,

$$Z_t = T_t \cdot S_t \cdot a_t, \quad t = 1, \dots, N \quad (1.44)$$

que pode ser transformado num modelo aditivo tomando-se logaritmos.

O problema é modelar convenientemente as três componentes T_t , S_t e a_t , a fim de se fazer previsões de valores futuros da série. O que se faz usualmente é representar $f(t) = T_t + S_t$ por alguma função suave do tempo, por exemplo uma mistura de polinômios e funções trigonométricas. Deste modo encara-se $f(t)$ como uma função *determinística* do tempo. Todavia, é possível considerar sazonalidade *estocástica*, por exemplo, quando ela varia com o tempo, e neste caso, será necessário usar modelos diferentes para S_t .

As componentes T_t e S_t são, em geral, bastante relacionadas e a influência da tendência sobre a componente sazonal pode ser muito forte, pois a especificação de S_t depende da especificação de T_t .

Há vários métodos para se estimar a componente tendência T_t e os mais utilizados consistem em ajustar uma função do tempo, como um polinômio, uma exponencial ou outra função suave de t , ou suavizar (ou filtrar) os valores da série ao redor de um ponto, para estimar a tendência naquele ponto, ou ainda, tomar diferenças até que a série se torne estacionária.

Existem vários procedimentos para se estimar a componente sazonal S_t , que pode ser *determinística*, quando a série pode ser prevista perfeitamente a partir do seu passado, ou *estocástica*, para séries cuja componente sazonal varia com o tempo.

Para nossos propósitos, será suficiente aplicar o operador diferença sazonal definido em (1.15).

Assim, consideramos

$$(1 - B^{12})Z_t \quad (1.45)$$

Após eliminar a componente sazonal, o próximo passo é calcular e analisar o comportamento da função de autocorrelação e autocorrelação parcial, isto é:

i) se os “lags” das autocorrelações significantemente diferentes de zero forem de baixa ordem, indica que os resíduos ainda são correlacionados, podendo-se ajustá-los através de um modelo ARIMA.

ii) se existirem autocorrelações diferentes de zero em lags sazonais, isto é, lags múltiplos do período sazonal s , então a sazonalidade existente na série também é estocástica, ou seja, devemos ajustar à série original um modelo ARIMA Sazonal, que denominaremos SARIMA, e descreveremos a seguir.

Definição 1.14: Modelos Auto-Regressivos-Integrados-Médias-Móveis Sazonais

Considere uma série Z_t com sazonalidade de período s , e suponha por simplificação, que $s = 12$ meses. Então é de se esperar que ocorram relações entre as observações dos meses de um mesmo ano e relações entre as observações de um mesmo mês em diferentes anos.

Supondo que a sazonalidade é constante, ou seja, não muda de ano para ano, a idéia é relacionar uma observação Z_t , correspondente a um determinado mês, por exemplo, janeiro, com observações correspondentes a janeiros anteriores, através de um modelo ARIMA sazonal da forma

$$\phi(B^{12}) \Delta_{12} Z_t = \theta(B^{12}) \alpha_t \quad (1.46)$$

onde

$\phi(B^{12}) = 1 - \phi_1 B^{12} - \dots - \phi_P B^{12P}$ é o operador autoregressivo sazonal de ordem P , estacionário;

$\theta(B^{12}) = 1 - \theta_1 B^{12} - \dots - \theta_Q B^{12Q}$ é o operador de médias móveis sazonal de ordem Q , invertível;

$\Delta_{12} = 1 - B^{12}$ é o operador diferença sazonal;

α_t é ruído branco.

Entretanto α_t , não é em geral, ruído branco, podendo ser representado por

$$\phi(B) \Delta^d \alpha_t = \theta(B) a_t \quad (1.47)$$

onde agora a_t é ruído branco.

Substituindo-se (1.47) em (1.46) obtém-se o modelo sazonal multiplicativo dado por

$$\phi(B)\phi(B^{12})\Delta^d\Delta_{12}Z_t = \theta(B)\theta(B^{12})a_t \quad (1.48)$$

que denotaremos por $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_{12}$.

O modelo (1.48) implica que devemos tomar d diferenças simples e uma diferença sazonal da série original Z_t , de modo que o processo

$$W_t = \Delta^d\Delta_{12}Z_t$$

seja estacionário.

A identificação, estimação e verificação de modelos sazonais é feita de maneira análoga ao procedimento descrito para modelos ARIMA.

Para o ajuste dos modelos é necessária a utilização de programas adequados. Atualmente, há um número grande deles disponíveis ao usuário. Mencionamos os programas SCA Statistical System (Scientific Computing Associates), ITSM for Windows: An Interactive Time Series Modelling Package e o EViews: Econometric Views.

Identificação do modelo

A estratégia para a identificação de um modelo é baseada em um ciclo iterativo, no qual a escolha da estrutura do modelo é baseada nos próprios dados. Os estágios do ciclo iterativo são:

a) *especificação* : uma classe geral de modelos é considerada para a análise. O primeiro passo é fazer o gráfico da série, para inspeção visual de sua estacionariedade. Caso a série não seja estacionária, obter diferenças da série original Z_t de modo a obter uma série estacionária, que denotaremos por W_t . O número de diferenças necessárias para que o processo se torne estacionário é alcançado quando a função de autocorrelação amostral r_k decresce rapidamente para zero. A série estacionária resultante, W_t , possui $n = N - d$ observações, onde N é o número de observações da série original Z_t e d é o número de diferenças.

b) *identificação*: com base na análise do comportamento das autocorrelações r_k e autocorrelações parciais $\hat{\phi}(kk)$ amostrais do processo estacionário W_t , identificamos um modelo preliminar $ARIMA(p,d,q)$, cujos comportamentos devem imitar o comportamento das respectivas quantidades teóricas.

Existem na literatura diversos procedimentos para auxiliar a identificação do modelo. Neste trabalho utilizaremos dois procedimentos: o Critério AIC e o Critério FPE.

O Critério de Informação de Akaike (AIC) sugere a escolha de modelos cujas ordens p e q minimizam:

$$AIC(p,q) = N \ln \hat{\sigma}_a^2 + 2(p+q+2), \quad (1.49)$$

onde

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{SQR}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{a}_i^2}{N} : \text{variância residual estimada.}$$

Para os casos de modelos $AR(p)$, o critério AIC reduz-se a:

$$AIC(p) = N \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2p. \quad (1.50)$$

A fórmula acima pode ser reescrita como:

$$AIC(p) = \ln\left(\frac{SQR}{N}\right) + \frac{2p}{N}. \quad (1.51)$$

O Critério do Erro de Previsão Final de Akaike (FPE) sugere escolher modelos AR , cuja ordem p minimiza:

$$FPE(k) = \left(1 + \frac{k}{N}\right) \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-1} S^2(k), \quad k \leq K, \quad (1.52)$$

ou

$$FPE(k) = \frac{N+k}{N-k} S^2(k), \quad k \leq K,$$

onde $S^2(k) = c_o - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_j c_j$.

O Erro de Previsão Final de Akaike (*FPE*) é definido como o erro quadrático médio de previsão (assintótico),

$$FPE \text{ de } Y_t = E(Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^N \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{N} = \frac{SQR}{N} \quad (1.53)$$

c) *estimação*: após a identificação do modelo provisório para a série temporal, o passo seguinte é a estimação dos parâmetros. Neste estágio, normalmente utiliza-se estimadores de máxima verossimilhança. Ver Box & Jenkins (1993) para detalhes.

Para se determinar os estimadores de máxima verossimilhança é necessário que o processo a_t seja normal, isto é, para cada t , $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$. Nestas condições, os estimadores de máxima verossimilhança serão aproximadamente estimadores de mínimos quadrados.

d) *verificação*: após a estimação do modelo ajustado à série $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, devemos checar a adequacidade do ajuste examinando as autocorrelações residuais no lag k , isto é,

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{a}_t \hat{a}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{a}_t^2}, \quad k=1, \dots, n-1.$$

$$r_k = r_{-k}$$

Para testar se os resíduos são não correlacionados, isto é, se a série é ruído branco, testamos se todas as autocorrelações são iguais a zero (exceto $\rho_0 = 1$), utilizando a estatística de Box-Ljung. A estatística é baseada nas primeiras m autocorrelações residuais do modelo ajustado e é definida por

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{n-k} \quad (1.54)$$

onde r_k é a k -ésima autocorrelação residual e n é o número de observações após diferenças.

Sob a hipótese nula, Q tem assintoticamente, distribuição qui-quadrado com $m - p - q$ graus de liberdade ($Q \sim \chi^2_{m-p-q}$).

Para utilizarmos a estatística Q é necessário especificar o número m de autocorrelações residuais (r_k). Ljung (1986) mostrou que os resultados obtidos para Q são melhores para valores não muito grandes de m . Usualmente, tomamos $m = 10$ ou $m = 20$.

Caso o modelo não seja adequado, o ciclo é repetido, voltando-se à fase de identificação.

Definição 1.15: A função de correlação cruzada (fcc) dos processos estacionários X_t e Y_t é definida por:

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{E(X_t Y_{t+\tau})}{[E(X_t^2) E(Y_t^2)]^{1/2}}, \quad \tau = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.55)$$

Baseado na amostra $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ dos processos estacionários X_t e Y_t , um estimador da função de correlação cruzada é dado por:

$$r_{XY}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X}) \cdot (Y_{t+k} - \bar{Y})}{\left[\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \cdot \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 \right]^{1/2}}, \quad k = -(n-1), \dots, (n-1), \quad (1.56)$$

chamado função de correlação cruzada amostral.

Definição 1.16: Modelos de Função de Transferência

O modelo de função de transferência considera uma série temporal como sendo gerada a partir de outra série temporal X_t através de um filtro linear, de modo a formar um *sistema dinâmico*.

O objetivo de considerar um sistema dinâmico pode ser a previsão da série Y_t , com base nos valores passados e presentes de X_t , ou seja, a série de saída Y_t , pode ser escrita como uma soma ponderada de suas observações passadas e aquelas da série de entrada X_t ,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} - \dots - \alpha_p Y_{t-p} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_q X_{t-q} + u_t \quad (1.57)$$

onde

$\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q$ são parâmetros a serem estimados e u_t é ruído.

O modelo apresentado em (1.57) é chamado *modelo de função de transferência*.

Em geral, podemos ter várias séries de entrada e várias séries de saída (ou modelos dinâmicos multivariados).

O ruído u_t pode ser ruído branco (sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas, com média zero e variância constante) ou, genericamente, podem admitir alguma modelagem. Um caso importante é aquele em que u_t segue um modelo ARIMA.

A relação funcional entre Y_t e X_t pode ser, em princípio, qualquer, mas estaremos interessados no caso em que a relação é linear, de modo que temos

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j}, \quad t \in Z. \quad (1.58)$$

Utilizando o operador translação para o passado (Definição 1.7), podemos escrever (1.58) na forma

$$Y_t = (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) X_t \quad (1.59)$$

ou ainda,

$$Y_t = v(B) X_t. \quad (1.60)$$

A relação (1.60) diz-se um *filtro linear* ou *modelo de função de transferência* (MFT) linear e $v(B)$ é a *função de transferência* (FT). Os pesos $v_0, v_1, v_2, \dots$ são chamados de *função resposta do impulso* do sistema.

Uma generalização de (1.60) é considerar um termo de ruído e o modelo

$$Y_t = v(B) X_t + N_t. \quad (1.61)$$

onde N_t não é necessariamente ruído branco; o caso usual é aquele em que N_t segue um modelo $ARIMA(p, d, q)$.

Frequentemente, o modelo (1.61) não é parcimonioso, no sentido de haver necessidade de estimar muitos pesos v_j . Entretanto, se $v(B)$ for uma função racional, podemos escrevê-la como

$$v(B) = \frac{w(B)B^b}{\delta(B)} \quad (1.62)$$

onde

$w(B) = 1 - w_1 B - w_2 B^2 - \dots - w_s B^s$ e $\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$ são polinômios de graus s e r , respectivamente.

Análise de Intervenção

Basicamente, a construção de modelos de intervenção consiste em acrescentar aos modelos ARIMA descritos anteriormente, os efeitos de variáveis exógenas através de funções de transferência.

Seja uma série temporal para a qual identificou-se e estimou-se um modelo ARIMA com o qual se vêm fazendo previsões há algum tempo. Num dado instante ocorre um evento independente do fenômeno que originou a série temporal, mas cujos efeitos podem se manifestar sobre ele. A esse evento externo, cujo efeito deve-se incorporar ao modelo, chama-se intervenção.

Seja uma série temporal y_t da qual se dispõe de n observações igualmente espaçadas no tempo. Define-se uma intervenção I como sendo um evento E , ao qual se associa uma variável aleatória x , cuja ocorrência num dado instante ou intervalo de tempo T pode estar ligada a mudanças na série y_t , em especial em seu nível e/ou em sua inclinação.

Vimos que modelos dinâmicos são modelos onde uma variável (chamada dependente ou endógena), depende de uma ou mais variáveis (chamadas independentes ou exógenas), e esta dependência é especificada através de modelos da forma

$$y_t = \sum_{i=1}^k v_i(B)x_{i,t} + n_t \quad (1.63)$$

onde

$x_{i,t}, i = 1, 2, \dots, k$ são k variáveis exógenas (intervenções);

$v_i(B) = \frac{w_i(B)}{\delta_i(B)}, i = 1, 2, \dots, k$ é a função de transferência da i -ésima variável

exógena, sendo $v_i(B), w_i(B)$ e $\delta_i(B)$ polinômios em B ;

n_t é um ruído que pode ser representado por um modelo ARIMA;

$y_t, x_{i,t}, i = 1, 2, \dots, k$ são transformações apropriadas das variáveis

$Y_t, X_{i,t}, i = 1, 2, \dots, k$.

Cada série $x_{i,t}$ é um indicador que assume os valores 0 ou 1, representando, respectivamente, a ausência ou a presença da i -ésima intervenção, isto é, a não-ocorrência ou a ocorrência do i -ésimo evento.

Portanto, uma intervenção é a ocorrência de algum tipo de evento em dado instante de tempo, podendo manifestar-se por um intervalo de tempo subsequente, e que afeta temporariamente ou permanentemente a série temporal em estudo. A análise de intervenção tem por objetivo avaliar o impacto de tal evento no comportamento da série.

Usualmente, as séries indicadoras de intervenções podem ser representadas por dois tipos de variáveis binárias:

a) Função Degrau ("step function")

$$x_{i,t} = S_{i,t}^{(T)} = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases} \quad (1.64)$$

b) Função Impulso

$$x_{i,t} = I_{i,t}^{(T)} = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases} \quad (1.65)$$

No caso da função apresentada em (1.64) o efeito da intervenção é permanente após o instante T , ao passo que para a função (1.65) o efeito é temporário.

Em geral, o efeito da intervenção é mudar o nível da série ou então a inclinação. Mas há três tipos de fenômenos que podem obscurecer o efeito da intervenção:

- (i) tendência;
- (ii) sazonalidade;
- (iii) erro aleatório.

O fato de existir tendência numa série pode levar a falsas conclusões. De fato se esta existe e uma intervenção ocorre no instante T , o fato de que o nível pós-intervenção é maior que o nível pré-intervenção pode ser devido simplesmente à tendência. A utilidade dos modelos *ARIMA* é que os três elementos acima são levados em conta quando a componente residual n_t do modelo apresentado em (1.63) é modelada como nas seções anteriores.

Uma intervenção pode afetar uma série temporal de interesse de várias maneiras. Na sua manifestação, ela pode ser *abrupta* ou *gradual*; na sua duração pode ser permanente ou temporária. Os tipos mais comuns de efeitos de uma intervenção estão resumidos na Figura 1.1 a seguir. Maiores informações podem ser encontradas em Glass (1975) e McDowall (1980).

Figura 1.1: Efeitos da intervenção

Pode haver, também, mudança na variabilidade da série, após a intervenção, bem como um efeito da evolução pode aparecer: a série decai inicialmente e depois retoma o crescimento, até atingir um novo nível.

Para cada efeito de intervenção tem-se uma forma apropriada para a função de transferência $v_i(B)$ apresentada em (1.63).

Consideremos, por simplicidade, o caso de uma única função de transferência

$$y_t = v(B)x_t + n_t$$

com $v(B) = \frac{w(B)}{\delta(B)}$.

A Figura 1.2 abaixo mostra algumas formas de $v(B)$ para x_t da forma apresentada em (1.64) e (1.65), que serão de particular interesse neste trabalho. Para maiores detalhes ver Pack (1977), Box & Jenkins (1976) e Pino(1980).

Figura 1.2: Estrutura da função de transferência.

Para os casos apresentados na Figura 1.2, chamemos $z_t = v(B) x_t$.

No caso (a) temos que $z_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ w_0, & t \geq T \end{cases}$

isto é, o efeito da intervenção é permanente após um instante abrupto (imediatamente) T de mudança de nível.

No caso (b) temos que $z_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ w_0, & t = T \end{cases}$

onde o efeito da intervenção é temporário, ou seja, neste caso tem-se uma mudança do nível da série apenas no instante T .

No caso (c), como $v(B) = \frac{w_0}{1-\delta B}$, então $y_t = \delta y_{t-1} + w_0 x_t + n_t$.

Logo, $(1-\delta B) y_t = w_0 x_t + n_t$

e portanto, $y_t = \frac{w_0}{(1-\delta B)} x_t + n_t$.

Segue-se que

$$z_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ w_0 \sum_{j=0}^k \delta^j, & t = T+k, k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

de modo que $z_t \rightarrow \frac{w_0}{1-\delta}$, quando $t \rightarrow \infty$, e tem-se uma manifestação gradual

da intervenção, com duração permanente, até atingir a assíntota $\frac{w_0}{1-\delta}$.

No caso (d) temos que

$$z_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ \delta^k w_0, & t = T+k, k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

ou seja, a série muda abruptamente de nível, sendo w_0 o valor da mudança, e depois decai exponencialmente para zero.

No caso (e) temos que $\delta = 1$ e após a intervenção o modelo torna-se não estacionário. Aqui, $y_t = y_{t-1} + w_0 x_t$ e

$$z_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ (k+1)w_0, & t = T+k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

No caso (f) temos que

$$z_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ w_0, & t \geq T \end{cases}$$

e obtemos novamente a situação (c) da Figura 1.

Em resumo temos que, séries temporais estão sujeitas à eventos inesperados e não controláveis. Se estes eventos forem conhecidos, somos capazes de explicá-los incluindo variáveis de entrada binárias determinísticas e uma forma funcional do impacto associado com um modelo de intervenção. Entretanto, se os eventos não são conhecidos previamente, será necessária uma abordagem para a determinação e ajuste destes eventos.

Determinação de Outliers e Ajuste na Modelagem de Séries Temporais

Descreveremos a seguir como detectar e ajustar os efeitos de tais ocorrências inesperadas ou desconhecidas em uma série temporal. Estas observações excepcionais (ou incomuns) são chamadas de *outliers*. Dependendo da sua natureza, *outliers* podem ter um impacto moderado ou substancial na análise. A determinação de *outliers* focaliza as ocorrências de fatores externos afetando as séries. Por exemplo, mudanças repentinas da estrutura de mercado, mudanças políticas, intervenções governamentais, são exemplos de eventos que podem ter significativo impacto nos valores observados da série. Descobrir tais ocorrências estaremos descobrindo observações espúrias que podem mascarar a modelagem da série temporal.

Eventos externos não conhecidos podem alterar as estruturas estatísticas normalmente utilizadas para a identificação do modelo. Além disso, a presença de *outliers* pode afetar seriamente as estimativas dos parâmetros do modelo. Como resultado, se empregarmos um modelo de intervenção, nós precisamos ter certeza de que as intervenções não são afetadas pelo efeito dos *outliers*.

Descreveremos a seguir, os vários tipos de *outliers* e seus efeitos.

Considere uma série temporal cujo comportamento pode ser descrito por um modelo *ARIMA* representado por:

$$\phi(B) N_t = \theta(B) a_t, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (1.66)$$

No modelo acima, N_t representa a série que temos interesse em ajustar o modelo.

A seguir descreveremos quatro tipos de *outliers*. Maiores informações sobre o assunto podem ser encontradas em Fox (1972).

1.1 - *Outlier* Aditivo (OA)

Um *outlier* aditivo é um evento que afeta uma série somente por um período.

Se assumirmos que um *outlier* ocorre no instante $t = T$, podemos representar a série observada pelo modelo

$$Y_t = w_A I_t + N_t \quad (1.67)$$

$$\text{onde } I_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases}.$$

O valor w_A representa o desvio do “verdadeiro” valor de N_t .

Um *outlier* aditivo está representado em (b) na Figura 1.2.

1.2 - *Outlier* de Inovação (OI)

Diferentemente de um *outlier* aditivo, um *outlier* de inovação é um evento cujo efeito é propagado de acordo com um modelo *ARIMA* do processo. Desta maneira, um OI afeta todos os valores observados após a sua ocorrência. Na prática, um OI representa o início de uma causa externa. Neste caso, o modelo para a série observada é

$$Y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} w_t I_t + N_t \quad (1.68)$$

onde $I_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}$.

Utilizando o modelo apresentado em (1.57), o modelo acima pode ser reescrito como

$$Y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (w_t I_t + a_t) \quad (1.69)$$

Podemos entender melhor a diferença entre um OA e um OI comparando (1.69) e (1.67). Vemos em (1.67) que um OA afeta somente uma observação de Y_t , enquanto um OI afeta somente o resíduo a_t . Como resultado, um OA afeta somente uma observação de Y_t , enquanto o efeito de um OI está presente em todos os valores de Y_t para $t \geq T$.

Um *outlier* de inovação está representado em (a) na Figura 1.2.

1.3 - Mudança de Nível (MN)

Um *outlier* de mudança de nível (*Level Shift*) é um evento que afeta uma série em um dado instante de tempo t , e cujo efeito torna-se permanente. Um modelo para a série observada pode ser representado por

$$Y_t = \frac{1}{1-B} w_L I_t + N_t \quad (1.70)$$

Podemos reescrever o modelo acima como

$$Y_t = w_L S_t + N_t \quad (1.71)$$

onde

$$S_t = \frac{1}{1-B} I_t, \text{ com } I_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases} \text{ é chamada função degrau ("Step Function").}$$

Podemos notar que o modelo para um OA, dado por (1.67) e o modelo para um *outlier* de mudança de nível, dado por (1.71), são iguais, exceto que um OA afeta N_t somente no instante t , enquanto que um MN afeta N_t permanentemente a partir de t .

Um *outlier* de mudança de nível está representado em (e) na Figura 1.2.

1.4 - Mudança Temporária (MT)

Um OA e um MN representam dois padrões distintos em que um evento afeta a série. Para um MN, o nível do processo associado é afetado permanentemente, enquanto um OA afeta a série somente em um período. É útil considerar um evento que possui um impacto inicial na série e que o impacto eventualmente desaparece. Uma mudança temporária (MT) é um evento que possui um impacto inicial e que seu efeito decai exponencialmente de acordo com algum fator de decaimento, digamos δ . Podemos representar a série observada como

$$Y_t = \frac{1}{1-\delta B} w_c I_t + N_t, \quad 0 < \delta < 1 \quad (1.72)$$

Podemos observar que (1.67) e (1.70) são casos restritos de (1.72). Em (1.67), o fator de decaimento δ é zero, enquanto em (1.70) este fator é igual a 1.

Um *outlier* de mudança temporária está representado em (c) na Figura 1.2.

Determinação de outliers quando os parâmetros ARMA são conhecidos

É natural considerarmos os resíduos de um modelo ajustado para detectar *outliers* em uma série temporal, uma vez a maioria dos testes de diagnóstico são baseados nos resíduos. Entretanto, como mencionado anteriormente, *outliers* em uma série temporal podem afetar tanto o modelo identificado preliminarmente para a série, bem como as estimativas dos parâmetros do modelo identificado. Assim, inicialmente consideramos o impacto dos *outliers* na série residual

quando um modelo ARMA e todos os seus parâmetros são conhecidos. Nós podemos então, comparar esta situação ideal com a informação que obtemos dos resíduos atuais do modelo ajustado.

Começaremos a análise examinando as séries filtradas

$$e_t = \pi(B)Z_t \quad (1.73)$$

onde $\pi(B)$ é operador polinomial nos pesos π do modelo ARIMA apresentado em (1.69). Estes pesos podem ser determinados através de

$$\theta(B)\pi(B) = \phi(B) \quad (1.74)$$

Os valores de e_t são os resíduos do modelo ajustado se os pesos π são calculados a partir dos parâmetros estimados de um modelo ARIMA, em vez dos parâmetros conhecidos.

Para testar os efeitos de intervenções podemos utilizar o seguinte procedimento:

- a) identificamos e estimamos um modelo univariado para a série X_t em estudo, que será usado como modelo de ruído;
- b) identificar o possível efeito de intervenção pelo conhecimento a priori do fenômeno envolvido e pela análise do gráfico da série;
- c) com a função de transferência apropriada ao efeito de intervenção identificado, proceder à estimação do modelo.
- d) calculamos funções apropriadas dos erros de previsões, que possam indicar possíveis mudanças no modelo ajustado inicialmente.

1.2 - Causalidade

A definição de causalidade usada para séries temporais é devida a Granger (1969), e é dada em termos de previsibilidade: X_t causa Y_t , para um dado conjunto de informações (que incluem X_t e Y_t) se o presente de Y_t pode ser melhor previsto usando valores passados de X_t do que se este passado não for usado, além das informações adicionais disponíveis (que inclui o passado de Y_t).

Formalmente, sejam $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ e $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ processos estocásticos estacionários e definamos:

$\bar{X}_t = \{X_{t-j}, j = 1, 2, \dots\}$, o conjunto dos valores passados de X_t ;

$\bar{\bar{X}}_t = \{X_{t-j}, j = 0, 1, 2, \dots\}$, o conjunto dos valores passados e presente de X_t ,

e definições análogas para $\bar{Y}_t$ e $\bar{\bar{Y}}_t$.

Seja A_t um conjunto de informação que inclui as séries X_t e Y_t , com informações disponíveis até o instante t e seja $A_t - Y_t$ o conjunto de informação que exclui as informações de Y_t .

Denotemos por $P_t(Y/A)$ o previsor de mínimos quadrados ótimo, não viciado, de Y_t , usando o conjunto de informação A_t e $\sigma^2(Y/A)$ a variância do erro de previsão, $\varepsilon_t(Y/A) = Y_t - P_t(Y/A)$.

Definição 1.17: Causalidade entre séries temporais

Dizemos que X_t *causa* Y_t e escrevemos $X_t \rightarrow Y_t$ se

$$\sigma^2(Y/\bar{A}) < \sigma^2(Y/\bar{A} - \bar{X}) \quad (1.75)$$

Ou seja, Y_t pode ser melhor previsto usando toda a informação disponível, isto é, utilizando o passado de Y_t e o passado X_t .

Dizemos também que X_t é *exógena* a Y_t ou *antecedente* a Y_t .

Definição 1.18: Causalidade Instantânea

Dizemos que X_t *causa* Y_t *instantaneamente*, e escrevemos $X_t \Rightarrow Y_t$, se

$$\sigma^2(Y/\overline{A}, \overline{\overline{X}}) < \sigma^2(Y/\overline{A}) \quad (1.76)$$

Isto é, o valor *presente* de Y_t é melhor previsto se o valor *presente* de X_t for incluído.

Definição 1.19: Feedback

Dizemos que há "feedback" (retro-alimentação) se X_t causa Y_t e Y_t causa X_t , e escrevemos $X_t \leftrightarrow Y_t$.

Se X_t causa Y_t e não há feedback, dizemos que há *causalidade unidirecional* de X_t para Y_t .

Pode-se provar (Pierce & Haugh, 1977) que $X_t \Rightarrow Y_t$ se e somente se $Y_t \Rightarrow X_t$.

Uma classificação completa das inter-relações entre duas séries X_t e Y_t tem três dimensões; a saber:

- (a) se X_t causa Y_t ou não;
- (b) se Y_t causa X_t ou não;
- (c) se há causalidade instantânea (C.I.).

O espaço das relações de causalidade terá, então, $2^3 = 8$ possibilidades, como ilustra a Tabela 1.1. Notação binária pode ser usada para descrever resultados elementares, por exemplo, existe somente causalidade instantânea poderá ser representado por (001).

Tabela 1.1 - Relações de causalidade entre X_t e Y_t .

Possibilidade	Notação
(1) X_t e Y_t são independentes	$(X_t \perp Y_t) (000)$
(2) Causalidade Instantânea	$(X_t - Y_t) (001)$
(3) X_t causa Y_t somente	$(X_t \rightarrow Y_t) (100)$
(4) X_t causa Y_t e instantaneamente	$(X_t \Rightarrow Y_t) (101)$
(5) Y_t causa X_t somente	$(Y_t \rightarrow X_t) (010)$
(6) Y_t causa X_t e instantaneamente	$(Y_t \Rightarrow X_t) (011)$
(7) Feedback, não instantaneamente	$(X_t \leftrightarrow Y_t) (110)$
(8) Feedback e C.I.	$(X_t \Leftrightarrow Y_t) (111)$

Por exemplo, o evento " X_t causa Y_t " ($X_t \rightarrow Y_t$) refere-se a $\{(100), (101), (110), (111)\}$.

Muitas vezes na prática, as séries X_t e Y_t não são estacionárias e será necessário considerar transformações, como diferenças simples e sazonais e transformações do tipo Box e Cox (1964), que preservam relações de causalidade, isto é, qualquer evento de causalidade entre X_t e Y_t é verdadeiro se e somente se o for para x_t e y_t , onde, por exemplo, $x_t = T_x X_t$ e T_x é uma transformação linear.

Definição 1.20: Causalidade entre vetores de séries temporais

Sejam $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ e $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dois vetores $b_1 \times 1$ e $b_2 \times 1$, respectivamente, de séries temporais estacionárias de segunda ordem, onde $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{b_1 t})'$ e $Y_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{b_2 t})'$.

Seja $\{A_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ um "conjunto de informação" contendo os vetores $\mathbf{X}_t$ e $\mathbf{Y}_t$.

Definamos $\bar{A}_t = \{A_s : s < t\} = \{A_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, como o "passado" de A_t .

Para algum conjunto de informação B_t , o melhor previsor de mínimos quadrados de X_{it} baseado em B_t é denotado por $P(X_{it} / B_t)$, $\varepsilon_{it}(X_{it} / B_t) = X_{it} - P(X_{it} / B_t)$ é o correspondente erro de previsão, e $\sigma^2(X_{it} / B_t)$ é a variância de ε_{it} .

O previsor $P(X_{it} / B_t)$ é uma projeção ortogonal de X_{it} no espaço Hilbert gerado pelas variáveis em B_t . Para um processo Gaussiano, $P(X_{it} / B_t) = E(X_{it} / B_t)$; veja por exemplo, Priestley (1981) ou Brockwell e Davis (1991).

O melhor previsor linear de $\mathbf{X}_t$ baseado em B_t é o vetor

$$P(\mathbf{X}_t / B_t) = (P(X_{1t} / B_t), \dots, P(X_{bt} / B_t))'$$

e o correspondente vetor de erro de previsão é dado por

$$\varepsilon_t(\mathbf{X}_t / B_t) = (\varepsilon_{1t}(X_{1t} / B_t), \dots, \varepsilon_{bt}(X_{bt} / B_t))'$$

e denotamos a matriz de covariância de ε_t por $\Sigma(\mathbf{X}_t / B_t)$.

A seguir nós usaremos a seguinte definição de causalidade, a qual é uma extensão simples e natural da noção de causalidade entre duas séries univariadas, descrita na Definição 1.17.

O conjunto $\bar{A}_t - \bar{\mathbf{Y}}_t$ representa todas as informações em $\bar{A}_t$ menos a informação em $\bar{\mathbf{Y}}_t$.

Definição 1.21 - O vetor Y_i não causa o vetor X_i se

$$\sigma^2(X_{ii} / \bar{A}_i) = \sigma^2(X_{ii} / \bar{A}_i - \bar{Y}_i), \quad i = 1, \dots, b \quad (1.77)$$

De acordo com esta definição, o vetor Y_i causa o vetor X_i se e somente se

$$\sigma^2(X_{ii} / \bar{A}_i) < \sigma^2(X_{ii} / \bar{A}_i - \bar{Y}_i)$$

para pelo menos um valor de i .

Por outro lado, Tjøstheim (1981) propôs uma definição equivalente de causalidade entre dois vetores, aparentemente diferente, a qual é como segue.

Definição 1.22 - O vetor Y_i não causa o vetor X_i se

$$\sum (X_i / \bar{A}_i) = \sum (X_i / \bar{A}_i - \bar{Y}_i) \quad (1.78)$$

No nosso contexto as duas definições são equivalentes e a noção de causalidade pode também ser expressa diretamente em termos de projeções. De fato, (1.77) é equivalente a

$$P(X_{ii} / \bar{A}_i) = P(X_{ii} / \bar{A}_i - \bar{Y}_i), \quad i = 1, \dots, b$$

ou

$$P(X_i / \bar{A}_i) = P(X_i / \bar{A}_i - \bar{Y}_i) \quad (1.79)$$

Mostra-se que, (1.79) implica (1.78). Inversamente, não-causalidade pela definição de Tjøstheim implica em não-causalidade na definição (1.77), e segue (1.79). Então as formulações (1.77), (1.78) e (1.79) são equivalentes.

1.3 - Características dos Dados

O escopo desta dissertação não é fazer uma discussão acadêmica sobre macroeconomia ou sobre a política monetária do país. O que nos interessa é encontrar relações de causalidade entre os indicadores do nível de atividade econômica, consumo, renda e taxa de juros.

A política monetária no Brasil baseia-se principalmente no controle da taxa de juros e não no controle de algum agregado monetário. Controlando a taxa de juros, o Banco Central visa atuar sobre a demanda agregada. Os canais através dos quais a taxa de juros influencia a demanda são os seguintes: variações na taxa de juros afetam o valor dos ativos das pessoas e das empresas, afetando assim, as decisões de consumo e investimento futuros.

Sabemos que as decisões de consumo e investimentos são influenciadas pela taxa de juros real. Um indivíduo, por exemplo, está disposto a adiar o consumo presente para consumir no futuro apenas se lhe for assegurada a possibilidade de consumir no futuro, no mínimo, a mesma cesta de bens que ele consumiria no presente, acrescida de algum prêmio pela sua renúncia ao consumo hoje. Isso explica porque a inflação esperada é uma variável relevante na fixação pelo Banco Central da taxa básica de juros da economia.

O Banco Central modifica a taxa de juros a partir da análise de indicadores antecedentes (demanda, emprego, produção, etc) que sinalizam o comportamento futuro de preços e principalmente em função de mudanças na inflação corrente.

No entanto, não é apenas o comportamento da taxa esperada de inflação que explica a trajetória da política de juros aplicada pelo Banco Central. Mesmo supondo constante a taxa esperada de inflação, a Autoridade Monetária pode alterar a taxa nominal de juros (modificando, assim, a taxa real esperada), em função de variáveis macroeconômicas relevantes.

Infelizmente ainda não contamos no Brasil com indicadores antecedentes confiáveis sobre o nível de demanda, o que de certa forma explica as dificuldades para o governo diagnosticar corretamente a situação. Entre estes indicadores podemos mencionar:

- a) o movimento de depósitos e saques nos diversos ativos financeiros;
- b) indicadores sobre crédito;
- c) indicadores de vendas e produção.

O governo vêm adotando medidas de restrição ao crédito, limitação de prazos de financiamento no comércio e restrição à compra de bens por meio de consórcios, para segurar o crescimento da economia.

Em resumo, o Banco Central utiliza o instrumento taxa de juros com vistas a influenciar as decisões de investimento e consumo dos agentes econômicos.

Nesta seção apresentaremos as características das variáveis referentes ao nível de atividade econômica para os quais iremos investigar relações de causalidade. Serão consideradas as seguintes séries:

Série Consumo (X_t): para representar o volume de consumo na Região Metropolitana de São Paulo utilizaremos o indicador de Vendas Físicas. Trata-se de uma série de números índices que corresponde às vendas relativas ao período base dado como 100, ou seja, a série é apresentada na base original julho/1994=100. O índice de vendas físicas no varejo é publicado mensalmente pela Federação do Comércio do Estado de São Paulo (FCESP). Analisaremos o período de jan/84 a out/96, totalizando 154 observações.

A série Vendas Físicas é composta pelos seguintes grupos: Comércio Geral; Comércio Geral sem concessionárias de veículos; Bens de Consumo; Bens Duráveis; Bens Semi-duráveis e Bens Não-duráveis.

Analisaremos, neste trabalho, somente o grupo Comércio Geral, embora muitas relações de causalidade possam ser obtidas utilizando grupos específicos, como por exemplo, a série Comércio Geral sem concessionárias de veículos, que provavelmente é mais sensível ao nível de renda do trabalho e política de crédito via prazo.

Série Renda (Y_t): a série que chamaremos simplesmente Renda é representada pelo Rendimento Médio Real do Brasil e é apresentada na base original julho/94=100, que corresponde ao período do plano econômico, o Plano Real. A série é deflacionada pelo índice INPC- Índice Nacional de Preços ao Consumidor do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, que apura o orçamento doméstico de pessoas com renda entre um e oito salários mínimos, pesquisado entre os dias 1 e 30 de cada mês. O índice Rendimento Médio Real do Brasil é publicado mensalmente pelo IBGE. Analisaremos o período de jan/84 a out/96, totalizando 154 observações.

Vale ressaltar que a série Rendimento Médio Real do Brasil representa o rendimento das seis principais regiões metropolitanas, a saber, São Paulo, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, Salvador, Porto Alegre e Recife, ponderado pela população ocupada em seus diversos níveis. No entanto, no período de 1982 a 1990, o IBGE ainda não divulgava o índice rendimento médio agregado ponderado pela população de cada região. Portanto, para o período citado foi feita a ponderação devida, para que a série a partir de 1984 até 1990 ficasse coerente com a série divulgada pelo IBGE a partir de 1991 até a presente data.

Série Juros (Z_t): a série que chamaremos simplesmente Juros, refere-se a Taxa de Juros Real ou Taxa "Over" Real. A Taxa "Over" Nominal Mensal é obtida através do produtório das taxas "over" de cada dia útil do mês. A Taxa de Juros Real é a Taxa "Over" Nominal Mensal deflacionada pelo índice de inflação, no caso, pelo IGP-DI geométrico - Índice Geral de Preços Disponibilidade Interna da FGV (Fundação Getúlio Vargas), formado por três índices: o Índice de Preços por Atacado (IPA), que representa 60% do índice; o Índice de Preços ao Consumidor (IPC), que representa 30% do índice e apura a inflação de famílias que ganham de um a 30 rendimentos mínimos, através da pesquisa de preços de produtos no eixo Rio-São Paulo e o Índice Nacional da Construção Civil (INCC) com peso de 10%. É calculado entre os dias 1º e 30 de cada mês.

Taxas reais negativas tendem a induzir a formação de estoques pelas empresas e aumentar o nível de consumo dos indivíduos, podendo conduzir a desequilíbrios macroeconômicos graves em curto espaço de tempo. No entanto

taxas reais crescentemente positivas podem atuar sobre a demanda de forma muito lenta.

A Tabela 1 no Apêndice apresenta os dados das séries. Ver também os gráficos 1, 5 e 9.

Capítulo 2 - Procedimento de Pierce & Haugh

2.1 - Introdução

Sabemos que o presente de Y_t pode ser eventualmente explicado pelos valores passados de Y_t , se pudermos estabelecer um modelo adequado para Y_t . De acordo com Granger, se incluirmos valores passados de X_t , podemos melhorar a previsão de Y_t , ou seja, dizemos que uma série X_t causa outra série Y_t , se X_t melhora a previsão de Y_t .

Considere as séries temporais X_t e Y_t . Para tentar estabelecer relações de causalidade entre X_t e Y_t poderíamos utilizar a função de correlação cruzada amostral definida em (1.56), no Capítulo 1, que mede a dependência linear entre as séries X_t e Y_t .

Mas inferências baseadas em (1.56) podem conduzir a resultados enganadores se as autocorrelações presentes em X_t e Y_t não forem totalmente removidas.

Um procedimento alternativo é remover inicialmente as relações dentro de cada série antes de procurar relações entre as séries.

Para tanto, considere um modelo ARIMA ajustado à série X_t ,

$$\hat{\phi}_{p_x}(B)(1-B)^{d_x} X_t = \hat{\theta}_{q_x}(B)\hat{u}_t,$$

de modo que $\hat{u}_t$ seja ruído branco. Dizemos que a série X_t foi "pré-branqueada".

Quando as séries X_t e Y_t não são estacionárias, assume-se que a estacionariedade pode ser conseguida através de diferenças.

$$x_t = (1 - B)^{d_x} X_t \text{ e } y_t = (1 - B)^{d_y} Y_t.$$

Assim, o que devemos fazer é pré-branquear as séries X_t e Y_t , isto é, obter processos lineares univariados para x_t e y_t , obtendo as inovações u_t e v_t , dadas por $F(B)X_t = u_t$ e $G(B)Y_t = v_t$, onde $F(B)$ e $G(B)$ são operadores apropriados e B é o operador diferença $BZ_t = Z_{t-1}$, definido em (1.14) no Capítulo 1.

Intuitivamente e de acordo com a definição de causalidade de Granger, se X_t causa Y_t , isto é, após explicar Y_t através do seu passado $\bar{Y}_t = \{Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots\}$, algo mais pode ser explicado utilizando o passado de X_t , isto é, $\bar{X}_t = \{X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots\}$. Em termos de previsão, queremos decidir se os passados de X_t e Y_t são úteis para prever Y_{t+k} , $k > 0$. Isto sugere considerar a relação entre X_t com aquela parte de Y_t não explicada pelo seu próprio passado.

Supondo-se que modelamos y_t através de $G(B)Y_t = v_t$, então v_t (as inovações de y_t) constituem a parte de y_t não explicada pelo seu passado. Se x_t e v_{t+k} são correlacionadas, para algum $k > 0$, então a previsão de y_{t+k} seria melhorada pela inclusão do passado de x_t .

Raciocínio análogo vale se quisermos avaliar se existe causalidade de y_t para x_t ($y_t \rightarrow x_t$), nos levando a considerar u_t .

A sugestão de Pierce & Haugh é que devemos analisar as correlações cruzadas no lag k entre $u_t = F(B)X_t$ e $v_t = G(B)Y_t$ dadas por

$$\rho_{uv}(k) = \frac{E(u_t v_{t+k})}{[E(u_t^2) E(v_t^2)]^{1/2}}, \quad \forall k. \quad (2.1)$$

Um estimador para a correlação cruzada apresentada em (2.1) é dado por:

$$r_{\hat{u}\hat{v}}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{u}_t \cdot \hat{v}_{t+k}}{\left[\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 \cdot \sum_{t=1}^n \hat{v}_t^2 \right]^{1/2}}, \quad (2.2)$$

onde $\hat{u}_t = \hat{F}(B)X_t$ e $\hat{v}_t = \hat{G}(B)Y_t$.

A natureza linear das transformações $u_t = F(B)X_t$ e $v_t = G(B)Y_t$ preservam relações de causalidade, o que nos assegura que u e v se relacionam causalmente da mesma forma que X e Y .

2.2 - Procedimento de Detecção de Causalidade

Pierce & Haugh (1977) sugerem o seguinte procedimento para detectar relação de causalidade entre duas séries temporais.

(i) Ajuste modelos *ARIMA* univariados para as séries X_t e Y_t

$$\hat{\phi}_{p_x}(B)(1-B)^{d_x} X_t = \hat{\theta}_{q_x}(B)\hat{u}_t \quad (2.3a)$$

$$\hat{\phi}_{p_y}(B)(1-B)^{d_y} Y_t = \hat{\theta}_{q_y}(B)\hat{v}_t \quad (2.3b)$$

onde

d_x : número de diferenças aplicadas à série X_t ;

d_y : número de diferenças aplicadas à série Y_t ;

p_x : ordem do modelo *AR* da série X_t ;

p_y : ordem do modelo *AR* da série Y_t ;

q_x : ordem do modelo *MA* da série X_t ;

q_y : ordem do modelo *MA* da série Y_t .

(ii) Para verificar se as séries $\{\hat{u}_t\}$ e $\{\hat{v}_t\}$ são livres de autocorrelações, calcule as autocorrelações residuais $r_{\hat{u}\hat{u}}(k)$ e $r_{\hat{v}\hat{v}}(k)$, dadas por

$$r_{\hat{u}\hat{u}}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t+k}}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}, \quad (2.4)$$

$$r_{\hat{u}\hat{u}}(k) = r_{\hat{u}\hat{u}}(-k)$$

e definições análogas para $r_{\hat{v}\hat{v}}(k)$.

Sob a hipótese nula que $\{u_t\}$ seja ruído branco, a estatística (2.4) é assintoticamente normal, com média zero e variância $\frac{n-|k|}{n^2}$, onde $n = N - d_x$, N sendo o número total de observações.

Então a estatística de Box-Ljung,

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{r_{\hat{u}\hat{u}}^2(k)}{n-k} \quad (2.5)$$

tem, assintoticamente, distribuição qui-quadrado com $m - p_x - q_x$ graus de liberdade. O mesmo argumento vale para $r_{\hat{v}\hat{v}}(k)$.

(iii) Para testar a hipótese nula de não existência de causalidade entre X_t e Y_t calcule as correlações cruzadas residuais $r_{\hat{u}\hat{v}}(k)$ dadas por (2.2).

Haugh (1976) provou que, sob a hipótese nula H_0 (não existência de causalidade entre X_t e Y_t), $r_{\hat{u}\hat{v}}(k)$ é assintoticamente normalmente distribuída, com média zero e variância $1/n$.

Assim, se para algum lag k , obtivermos $r_{\hat{u}\hat{v}}(k)$ significativamente diferente de zero, rejeitamos a hipótese nula de não existência de causalidade entre X_t e Y_t e prosseguimos os testes para verificar a direção da causalidade.

(iv) Para detectar se não existe de fato causalidade presente, isto é, testar a independência entre X_t e Y_t , calcule a estatística

$$S_m = n \cdot (n+2) \sum_{k=-m}^m \frac{r_{\hat{u}\hat{v}}^2(k)}{n-|k|}, \quad (2.6)$$

que tem, assintoticamente, distribuição qui-quadrado com $2m+1$ graus de liberdade.

Para testar causalidade unidirecional utilizaremos (2.6) para $k = 0, 1, \dots, m$ (X_t causa Y_t) e para $k = -m, \dots, -1, 0$ (Y_t causa X_t). Novamente, S_m terá assintoticamente, distribuição qui-quadrado com $m+1$ graus de liberdade.

(v) Estabeleça padrões de causalidade

A Tabela 2.1, extraída de Pierce & Haugh (1977), fornece algumas condições (teóricas) das correlações cruzadas para o estabelecimento de possíveis relações entre X_t e Y_t .

Tabela 2.1 - Condições das correlações cruzadas para estabelecer padrões de causalidade.

Relações	Restrições sobre $\rho_{uv}(k)$
(1) X_t causa Y_t ($X_t \rightarrow Y_t$)	$\rho_{uv}(k) \neq 0$ para algum $k > 0$
(2) Y_t causa X_t ($Y_t \rightarrow X_t$)	$\rho_{uv}(k) \neq 0$ para algum $k < 0$
(3) Causalidade instantânea	$\rho_{uv}(0) \neq 0$
(4) Feedback ($X_t \leftrightarrow Y_t$)	$\rho_{uv}(k) \neq 0$ para algum $k > 0$ e algum $k < 0$
(5) $X_t \rightarrow Y_t$ mas não instantaneamente	$\rho_{uv}(k) \neq 0$ para algum $k > 0$ e $\rho_{uv}(0) = 0$
(6) $X_t \rightarrow Y_t$ unidirecional	$\rho_{uv}(k) \neq 0$ para algum $k > 0$ e $\rho_{uv}(k) = 0$ para (a) todo $k < 0$ ou (b) todo $k \leq 0$
(7) X_t e Y_t são relacionados somente instantaneamente	$\rho_{uv}(k) = 0$ para todo $k \neq 0$
(8) X_t e Y_t são independentes	$\rho_{uv}(k) = 0$ para todo k

Price (1979) mostrou, através de 2 contra-exemplos, que o uso de $\rho_{uv}(0)$ não é correto para detectar causalidade instantânea (C.I.). Mais tarde, respondendo a Price, Pierce & Haugh (1979) argumentaram que o uso de $\rho_{uv}(0)$ era válido somente no caso de causalidade unidirecional de X_t para Y_t .

Layton (1984) mostrou que o uso de $\rho_{uv}(0)$ não é apropriado em qualquer situação. O argumento é o seguinte: Suponha, por exemplo, que $X_t \rightarrow Y_t$ mas que $Y_t \nrightarrow X_t$. Então,

$$X_t = \psi_{11}(B)X_t + u_t \quad (2.7a)$$

$$Y_t = \psi_{21}(B)X_t + \psi_{22}(B)Y_t + a_t \quad (2.7b)$$

onde $\psi_{ij}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{ij,k} B^k$ e $\{u_t\}$ e $\{a_t\}$ são ruídos brancos.

Na prática esta soma infinita deve ser truncada em algum valor inteiro finito M_{ij} . Então, o processo linear bivariado (Y_t, X_t) , pode ser escrito na forma autoregressiva como em (2.7), com

$$E \begin{bmatrix} u_t \\ a_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s & a_s \end{bmatrix} = \begin{cases} \Omega & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

Então, a existência de C.I. pode ser estabelecida testando se $\rho_{ua}(0) \neq 0$. Se isso vale, a inclusão do valor atual (presente) de X_t no modelo para Y_t melhora o seu poder preditivo além daquele obtido pela inclusão do passado de X_t e Y_t . Em (2.7b) somente valores passados de X_t e Y_t são usados para explicar Y_t .

Este último ponto destaca porque o uso de $\rho_{uv}(0)$ é inapropriado como uma indicação de C.I. Especificamente, se seguirmos a abordagem de correlação cruzada residual, a série $\{v_t\}$ não é uma série relevante para ser usada. Ela é derivada de um modelo univariado para Y_t que incorpora somente o passado de Y_t , isto é, na obtenção de $\{v_t\}$ o passado de X_t não é levado em consideração na modelagem de Y_t . Reiterando, desde que C.I. requer explicitamente o valor atual de X_t com poder preditivo aumentado para Y_t , além do passado de X_t e Y_t , a série residual $\{a_t\}$, melhor que $\{v_t\}$, é uma série relevante para avaliar a existência de causalidade instantânea de X_t em Y_t .

Portanto, conceitualmente, $\rho_{ua}(0)$, em vez de $\rho_{uv}(0)$, representa o indicador apropriado de C.I.. Somente no caso especial onde $\psi_{21}(B) = 0$ os dois procedimentos são equivalentes, isto é, somente no caso em que não houver relação de causalidade entre X_t e Y_t , exceto no lag 0. Argumento análogo vale no caso de "feedback".

A extensão desse argumento para o caso bivariado de feedback indica que um procedimento mais apropriado para a detecção de causalidade instantânea será primeiro especificar e estimar o modelo completo:

$$X_t = \hat{\psi}_{11}(B)Y_t + \hat{\psi}_{12}(B)X_t + \hat{a}_{1t} \quad (2.8a)$$

$$Y_t = \hat{\psi}_{21}(B)Y_t + \hat{\psi}_{22}(B)X_t + \hat{a}_{2t} \quad (2.8b)$$

onde os $\psi_{ij}(B)$ são como antes. A quantidade $\rho_{\hat{a}_1\hat{a}_2}(0)$ pode, então, ser calculada, e caso seja grande, isto indicará a existência de C.I..

O modelo (2.8) pode ser estimado através de um procedimento devido a Hsiao (1979). Este procedimento será considerado no Capítulo 3.

2.3 - Aplicação aos dados

Conforme mencionado no Capítulo 1, estudaremos a relação de causalidade entre as séries Consumo, Renda e Taxa de Juros.

Apresentaremos a seguir, a análise inicial das séries e o procedimento de identificação e ajuste do modelo univariado.

2.3.1 - Série Consumo (Vendas Físicas na RMSP) - (X_t)

A série Consumo, no período de janeiro de 1984 a outubro de 1996, apresenta um total de 154 observações mensais que cobrem um período de 13 anos. Inicialmente, a inspeção visual da série (Gráfico 1, Apêndice) mostra a não estacionariedade e uma possível existência de sazonalidade. Observando o gráfico da série diferenciada (Gráfico 2, Apêndice), observamos que a variabilidade diminui com t , o que indica que uma transformação logarítmica dos dados é aconselhável. Devemos lembrar que, a razão principal para efetuar transformações é estabilizar a variância, ou seja, fazer com que os resíduos do modelo ajustado tenham variância constante.

O gráfico da primeira diferença da série $\log(X_t)$ (Gráfico 3, Apêndice), mostra que a série é mais estacionária que ΔX_t .

O comportamento da fac e $facp$ (Figura 2, Apêndice) mostra que a fac da série Consumo não decai rapidamente para zero, isto é, a presença de correlações altas nos lags 12, 24 e 36, "lags sazonais", indica a existência de sazonalidade. Aplicando-se uma diferença simples e uma diferença sazonal de ordem 12 à série $\log(X_t)$, as fac e $facp$ (Figura 4, Apêndice 1) indicam a necessidade de incluir termos sazonais no modelo.

De acordo com o comportamento da fac e da $facp$, utilizando o Critério de Informação de Akaike (AIC) e com base na Soma dos Quadrados dos Resíduos, o melhor modelo identificado para a série Consumo (Figura 5, Apêndice), foi o modelo sazonal multiplicativo representado por:

$$(1 - B)(1 - B^{12}) \log(X_t) = (1 - \underset{(0,0846)}{0,2496} B)(1 - \underset{(0,0858)}{0,1763} B^2)(1 - \underset{(0,0472)}{0,8987} B^{12}) a_t, \quad (2.9)$$

onde $\hat{\sigma}_a^2 = 1,01458 \times 10^{-3}$ e os números entre parênteses indicam o desvio padrão das estimativas.

O correlograma dos resíduos (Figura 6, Apêndice) do modelo apresentado acima e a estatística de Box-Ljung (Tabela 2, Apêndice), mostra que os resíduos podem ser considerados aleatórios.

2.3.2 - Série Renda (Salário Médio Real do Brasil) - (Y_t)

A série Salário Médio, no período de janeiro de 1984 a outubro de 1996, apresenta um total de 154 observações mensais que cobrem um período de 13 anos. A inspeção visual da série (Gráfico 5, Apêndice) mostra a existência de tendência crescente e não estacionariedade no período de janeiro de 1984 a janeiro de 1990. No período de fevereiro de 1990 a março de 1992 existe uma variação muito grande nos salários e a partir de março de 1992 novamente podemos notar a existência de uma tendência crescente do nível salarial. Vemos também que existe sazonalidade presente.

Observando o gráfico da série diferenciada (Gráfico 6, Apêndice), vemos que a variabilidade diminui com t , o que indica que uma transformação logarítmica dos dados é aconselhável.

O comportamento da fac e facp (Figura 8, Apêndice) mostra que a fac da série salário apresenta decaimento exponencial, e a facp apresenta correlações altas nos lags 1, 13 e 25. Tomando-se a primeira diferença da série $\log(Y_t)$, a série torna-se estacionária, mas apresenta correlação alta nos lags sazonais 12, 24 e 36, indicando a existência de sazonalidade (Figura 9, Apêndice). Assim, aplicando-se uma diferença simples e uma diferença sazonal de ordem 12, as fac e facp (Figura 10, Apêndice) indicam a necessidade de incluir termos sazonais no modelo.

Um modelo inicial para a série Renda (Y_t) é um modelo da forma

$$(1 - B)(1 - B^{12}) \log(Y_t) = (1 - \theta_5 B^5)(1 - \theta_{12} B^{12})(1 - \theta_{26} B^{26}) b_t$$

onde as estimativas dos parâmetros são apresentadas na Figura 11, no Apêndice e a variância residual é igual a $5,94081 \times 10^{-4}$.

A Figura 12 apresenta o correlograma e o correlograma parcial dos resíduos do modelo estimado.

Voltando à inspeção visual da série (Gráfico 5, Apêndice), vemos que existem duas mudanças de inclinação importantes: há uma mudança de nível a partir da 75a. observação (mar/90) e onde parece existir uma tendência decrescente até a 98a. observação (fev/92) onde há uma reversão da tendência passando a ser crescente.

Após algumas tentativas de modelos com intervenção, a intervenção que melhor se ajusta aos dados é uma intervenção cujo efeito é permanente após o instante $t = 75$ (março de 90), onde há uma mudança de nível da série.

Novamente de acordo com o comportamento da fac e da facp, e utilizando o Critério de Informação de Akaike, e com base na Soma dos Quadrados dos Resíduos, o melhor modelo identificado para a série Renda (Figura 13, Apêndice), foi o modelo sazonal multiplicativo representado por:

$$(1 - B)(1 - B^{12}) \log(Y_t) = (1 - \underset{(0,0603)}{0,7492} B^{12}) b_t + \underset{(0,0206)}{(-0,1397)} I_1, \quad (2.10)$$

$$\text{onde } I_1 = \begin{cases} 1, & t \geq 75 \text{ (março de 90)} \\ 0, & t < 75 \end{cases}$$

$\hat{\sigma}_b^2 = 4,84260 \times 10^{-4}$ e os números entre parênteses indicam o desvio padrão das estimativas.

O correlograma dos resíduos do modelo apresentado acima (Figura 14, Apêndice) e a estatística de Box-Ljung (Tabela 2 no Apêndice), mostra que os resíduos podem ser considerados aleatórios.

Vemos que utilizando o modelo com intervenção houve um decréscimo de 18% na variância residual em relação ao modelo inicial.

2.3.3 - Série Taxa de Juros Real - (Z_t)

A série Taxa de Juros Real, no período de janeiro de 1984 a outubro de 1996, apresenta um total de 154 observações mensais que cobrem um período de 13 anos. O comportamento da fac e da $facp$ (Figura 15, Apêndice), apresenta correlação alta nos lag 1 e 23, e sugere como modelo inicial para a série Taxa de Juros Real (Z_t), um modelo da forma

$$Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{11} B^{11})(1 - \theta_{23} B^{23})c_t. \quad (2.11)$$

Utilizando o programa SCA, obtivemos as seguintes estimativas para os parâmetros do modelo

$$Z_t = (1 - \underset{(0,0754)}{-0,3660} B)(1 - \underset{(0,0788)}{-0,2293} B^{11})(1 - \underset{(0,0816)}{-0,1900} B^{23})c_t, \quad (2.12)$$

onde $\hat{\sigma}_c^2 = 6,83899$ e os números entre parênteses indicam o desvio padrão das estimativas.

A Figura 16 no Apêndice fornece o resultado do procedimento de estimação usando o programa SCA e a Figura 17 no Apêndice 1 mostra o correlograma e o correlograma parcial dos resíduos do modelo inicial apresentado acima.

Retornando à inspeção visual da série (Gráfico 9, Apêndice) mostra a existência de grandes variações de taxa, devido à intervenções governamentais, com os planos econômicos descritos abaixo:

28/02/86 - Plano Cruzado
 15/06/87 - Plano Bresser
 18/01/89 - Plano Verão
 15/03/90 - Plano Collor I
 31/01/91 - Plano Collor II
 30/06/94 - Plano Real

Utilizando o programa SCA, fizemos uma análise de *outliers* para detectar possíveis eventos externos que estejam influenciando o comportamento da série. Conforme esperado, a análise confirmou a existência de *outliers*, sendo que os *outliers* de maior importância, são devido à implantação do plano Verão, em março de 1989 e do plano Real em junho de 1994. Vemos que o efeito das intervenções consiste em mudanças abruptas no nível da série de Juros, mas que após a intervenção, a série retorna ao seu nível inicial.

Após analisar diferentes alternativas de modelos para a série, com diferentes tipos de intervenções, consideramos então, uma primeira intervenção I_1 , em março/89 e uma segunda intervenção I_2 , em junho/94, definidas por:

$$I_1 = \begin{cases} 1, & t = 63 \text{ (março de 1989)} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 1, & t = 126 \text{ (junho de 1994)} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Assim, de acordo com o comportamento das autocorrelações e autocorrelações parciais da série Z_t , onde Z_t é a série taxa de juros contendo todas as observações (jan/84 a out/96) consideramos um modelo de intervenção dado por

$$Z_t = w_1 I_1 + w_2 I_2 + (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{11} B^{11})(1 - \theta_{23} B^{23}) c_t, \quad (2.13)$$

onde I_1 e I_2 são as intervenções definidas acima e c_t é o ruído.

A Figura 18 no Apêndice apresenta a estimação do modelo com intervenção para a série Juros, usando o programa SCA. Vemos que todos os parâmetros são significativos, ou seja, o modelo de intervenção é dado por

$$Z_t = \underset{(2,0632)}{5,5319} I_1 + \underset{(1,9533)}{13,4268} I_2 + (1 - \underset{(0,0766)}{(-0,4397) B})(1 - \underset{(0,0797)}{(-0,2022) B^{11}})(1 - \underset{(0,0817)}{0,1999 B^{23}})c_t \quad (2.14)$$

com $\hat{\sigma}_e^2 = 5,08729$.

O correlograma e o correlograma parcial dos resíduos do modelo com intervenção apresentado em (2.14) (Figura 19, Apêndice) indica que os resíduos podem ser considerados aleatórios.

Vale observar que, utilizando o modelo de intervenção houve um decréscimo de 26% da variância residual em relação ao modelo inicial apresentado em (2.12).

O modelo (2.14) nos diz que as intervenções I_1 e I_2 tiveram um impacto significativo no modelo para a série Juros, no período considerado.

A intervenção I_1 corresponde a um aumento do nível da taxa de juros da ordem de 5,5319 e a intervenção I_2 corresponde a um aumento de 13,4268 do nível da taxa de juros.

2.3.4 - Procedimento de detecção de causalidade entre os pares de séries

Vamos considerar três diferentes pares (Consumo, Renda), (Consumo, Juros) e (Renda, Juros). Para cada par, as séries devem possuir o mesmo número de observações. As séries Consumo, Renda e Juros serão denotadas, respectivamente, por X_t , Y_t e Z_t .

I) Par (Consumo, Renda):

Com base na análise das correlações cruzadas residuais $r_{\hat{a}\hat{b}}(k)$ e na estatística

$$S_m = n \cdot (n+2) \sum_{k=-m}^m \frac{r_{\hat{a}\hat{b}}^2(k)}{n-|k|}, \text{ rejeitamos a hipótese nula de não existência de}$$

causalidade entre Consumo e Renda, ao nível de significância de 5%. A Tabela 3 no Apêndice mostra os resultados dos testes para diferentes valores de m . A hipótese de não causalidade unidirecional, também foi rejeitada, ou seja, concluímos que Consumo causa Renda. De acordo com a Tabela 2.1 extraída de Pierce & Haugh e como $\rho_{ab}(5) \neq 0$ confirma o resultado que Consumo causa Renda. No entanto, verificamos que Renda não causa Consumo. Além disso, de acordo com Pierce & Haugh, o valor de $r_{\hat{a}\hat{b}}(0) = 0,21$ indica que há causalidade instantânea entre Consumo e Renda ($\rho_{ab}(0) \neq 0$) (Figura 20, Apêndice).

Vale ressaltar que, $\rho_{ab}(0)$ não é uma ferramenta adequada para testar a existência de causalidade instantânea conforme mencionado anteriormente.

II) Par (Consumo, Juros):

De acordo com a Tabela 2.1 extraída de Pierce & Haugh, como as correlações cruzadas $r_{\hat{a}\hat{c}}(-7)$, $r_{\hat{a}\hat{c}}(28)$ e $r_{\hat{a}\hat{c}}(30)$ são significativamente diferentes de zero, sugere que Consumo causa Taxa de Juros. No entanto, o teste não rejeita a hipótese de independência entre Consumo e Juros, ao nível de significância de 5%, ou seja, não há evidências suficientes para afirmarmos que exista relação de causalidade entre Consumo e Taxa de Juros, para o período considerado.

A Figura 21 apresenta o correlograma cruzado dos resíduos dos modelos ajustados às séries Consumo e Juros.

II) Par (Renda, Juros):

Não rejeitamos a hipótese de independência entre Renda e Taxa de Juros, ao nível de significância de 5%. Concluímos que não há evidências suficientes para afirmarmos que exista relação de causalidade entre Renda e Taxa de Juros para o período considerado.

A Figura 22 apresenta o correlograma cruzado dos resíduos dos modelos ajustados às séries Renda e Juros.

Comentários

A conclusão geral de acordo com o procedimento de Pierce & Haugh é a existência de causalidade unidirecional entre Consumo e Renda, isto é, Consumo causa Renda, com causalidade instantânea presente. Para os pares (Consumo, Juros) e (Renda, Juros) não foram encontradas relações de causalidade no período considerado.

Vale ressaltar que não podemos esquecer do problema em se considerar séries duas a duas, pelo fato da possibilidade da existência de correlações espúrias, o que não implica em relações de causa e efeito.

O programa utilizado para identificação e estimação dos modelos ARIMA foi o SCA (Scientific Computer Associates).

Capítulo 3 - Procedimento de Hsiao

3.1 - Introdução

O procedimento de Hsiao é um procedimento sequencial baseado no critério do erro de previsão final (*FPE*) de Akaike (1969 a,b) e o conceito de causalidade de Granger para ajuste de modelos de auto-regressão. Esse método não somente permite que cada variável entre na equação com lags defasados, mas também fornece testes de exogeneidade ou causalidade.

Sims (1977) sugere um procedimento para o ajuste de um modelo auto-regressivo a um vetor. Hsiao sugere um procedimento em que uma variável depende de um subconjunto de variáveis sob consideração e permite que cada variável entre na equação com diferentes lags tal que, não somente o número de parâmetros a serem estimados possa ser reduzido, mas também a influência de cada variável possa ser sentida nos diferentes lags de tempo.

3.2 - Procedimento de decisão para ajustar um vetor autoregressivo bivariado

Por simplicidade, nós assumimos que o vetor de séries estacionárias consiste de duas componentes $\{X_t, Y_t\}$ somente. Então, temos um modelo auto-regressivo bivariado da forma

$$X_t = \psi_{11}(B)Y_t + \psi_{12}(B)X_t + u_t \quad (3.1)$$

$$Y_t = \psi_{21}(B)Y_t + \psi_{22}(B)X_t + v_t \quad (3.2)$$

onde $\psi_{ij}(B) = \sum_{k=1}^{M_{ij}} \psi_{ijk} B^k$, B é o operador diferença $BY_t = Y_{t-1}$ e u_t e v_t são ruídos brancos com média zero e matriz de covariância constante,

$$E \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s & v_s \end{bmatrix} = \delta_{t,s} \Omega.$$

Nós sabemos que podemos aplicar o método de mínimos quadrados a cada equação e as estimativas serão consistentes e assintoticamente normalmente distribuídas. Portanto, nós podemos ignorar a correlação nas inovações no momento e aplicar o critério do erro de previsão de Akaike (*FPE* de Akaike) (1969 a) a cada uma das equações para determinar a ordem dos lags em ψ_{ij} . O *FPE* é definido como o erro quadrático médio de previsão (assintótico) definido por

$$FPE \text{ de } Y_t = E(Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^N \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{N}. \quad (3.3)$$

Akaike (1969 a,b) define a estimativa de *FPE* neste caso por:

$$FPE_y(l,r) = \frac{N+l+r+1}{N-l-r-1} \cdot \sum_{t=1}^N \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{N} = \frac{N+l+r+1}{N-l-r-1} \cdot \frac{SQR}{N} \quad (3.4)$$

onde $\hat{Y}_t$ é o previsor de Y_t

$$\hat{Y}_t = \hat{\psi}_{21}^l(B)Y_t + \hat{\psi}_{22}^r(B)X_t + \hat{v}_t \quad (3.5)$$

Os sobrescritos l e r denotam a ordem dos lags em $\psi_{21}(B)$ e $\psi_{22}(B)$.

$\hat{\psi}_{21}^l(B)$, $\hat{\psi}_{22}^r(B)$ e $\hat{v}_t$ são estimativas de mínimos quadrados e $l, r \leq M$, onde M é a ordem máxima dos ψ_{ij} .

O segundo termo do produto do lado direito da igualdade (3.4) pode ser considerado como uma medida de erro de modelagem e o primeiro termo como uma medida de erro de estimação.

O critério tenta balancear o risco resultante de um aumento de variância quando uma ordem maior é selecionada pela escolha do menor *FPE*. Este

procedimento é equivalente à escolha da especificação baseada no teste F com nível de significância variado (Hsiao, 1978).

Se M é a ordem máxima de ψ_{ij} , então uma maneira de selecionar a ordem de $\psi_{ij}(B)$ é tomar cada $\psi_{ij}(B)$ e variar ψ_{ij} entre 0 e M , o que significa que haverá $(M+1)^2$ combinações possíveis de $\psi_{21}(B)$ e $\psi_{22}(B)$ para a equação Y_t . Se nós tivéssemos, por exemplo, $M=14$, teríamos que calcular 225 FPE 's. Para reduzir o número de cálculos para menos que $3M$, nós fazemos uso da definição de causalidade sugerida por Granger (1969).

Combinando a definição de causalidade e o critério FPE , Hsiao sugere o seguinte procedimento sequencial para identificação de um modelo auto-regressivo bivariado.

(1) Considere Y_t a variável resposta (variável dependente) do sistema. Determine a ordem de um modelo auto-regressivo univariado para Y_t , usando o critério FPE , chame esta ordem de s . Assim, teremos inicialmente o modelo para Y_t dado por:

$$\hat{Y}_t = \hat{\psi}_{21}^s(B)Y_t + \hat{b}_t$$

(2) Considere X_t como variável manipulada (variável de entrada, independente) que controla a resposta de Y_t (variável dependente). Assumindo que a ordem do modelo univariado para Y_t é s , obtida em (1), utilize o critério FPE para determinar a ordem defasada de X_t . Chamaremos esta ordem de r . Assim teremos o modelo para Y_t dado por:

$$\hat{Y}_t = \hat{\psi}_{21}^s(B)Y_t + \hat{\psi}_{22}^r(B)X_t + \hat{b}_t$$

(3) Para checar se os valores defasados de X_t podem mudar os valores de Y_t , quando Y_t é tratado como um modelo auto-regressivo univariado, fixe a ordem r do operador $\psi_{22}(B)$, isto é, a ordem defasada de X_t e varie a ordem de $\psi_{21}(B)$ (ordem de Y_t) de 0 até s . Calcule os correspondentes FPE 's. Escolha para ordem de $\psi_{21}(B)$ aquela que fornece o menor FPE , (condicional a ordem

s de $\psi_{22}(B)$). Chamaremos esta ordem de l (esta ordem pode ser igual ou menor que s).

Logo, teremos o modelo para Y_t dado por:

$$\hat{Y}_t = \hat{\psi}_{21}^l(B)Y_t + \hat{\psi}_{22}^r(B)X_t + \hat{b}_t$$

(4) Compare o menor FPE dos passos (1) e (3). Se o $FPE_y(s,0)$ é menor que o último $FPE_y(l,r)$, isto é,

$$FPE_y(s,0) < FPE_y(l,r)$$

então dizemos que X_t não causa Y_t ($X_t \nrightarrow Y_t$) e consideraremos um modelo autoregressivo univariado para Y_t da forma $Y_t = \psi_{21}^s(B)Y_t$.

Se o inverso for verdade, isto é, se

$$FPE_y(s,0) > FPE_y(l,r)$$

dizemos que X_t causa Y_t ($X_t \rightarrow Y_t$) e então o modelo ótimo para previsão de Y_t será um modelo incluindo l defasagens de Y_t e r defasagens de X_t , ou seja, usaremos o modelo:

$$\hat{Y}_t = \hat{\psi}_{21}^l(B)Y_t + \hat{\psi}_{22}^r(B)X_t + \hat{v}_t \quad (3.6)$$

(5) Repita os passos (1)-(4) para o processo X_t tratando Y_t como a variável de entrada (variável independente).

O procedimento pode ser generalizado para ajuste de modelos autoregressivos multivariados. Dada a sequência natural do procedimento, testes de razão de verossimilhança podem ser realizados para avaliar a especificação do modelo. Veja Hsiao (1979) para maiores detalhes.

3.3 - Aplicação aos dados

Nesta seção testaremos a praticabilidade da metodologia de Hsiao, que combina a definição de causalidade com a utilização do critério *FPE* para a identificação de um modelo autoregressivo bivariado.

Utilizaremos o critério do *FPE* para o ajuste de modelos autoregressivos, fixando a ordem máxima dos lags igual a 15.

Ajuste de modelos univariados para as séries

As séries consideradas possuem $N=154$ observações originais.

X_t : série Consumo (1984 - 1996)

Y_t : série Renda (1984 - 1996)

Z_t : série Juros (1984 - 1996)

Para a obtenção de séries estacionárias, aplicamos as seguintes transformações:

$$x_t = (1 - B)(1 - B)^{12} \log(X_t) ;$$

$$y_t = (1 - B)(1 - B)^{12} \lg(Y_t) - \hat{w}_1 I_1,$$

$$\text{onde } I_1 = \begin{cases} 1, & t \geq 75 \text{ (março de 90)} \\ 0, & t < 75 \end{cases}$$

e $\hat{w}_1$ é a estimativa do modelo de intervenção apresentado em (2.10);

$$z_t = Z_t - \hat{w}_1 I_1 - \hat{w}_2 I_2,$$

$$\text{onde } I_1 = \begin{cases} 1, & t = 63 \text{ (março de 1989)} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 1, & t = 126 \text{ (junho de 1994)} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e $\hat{w}_1$ e $\hat{w}_2$ são as estimativas do modelo de intervenção apresentado em (2.14).

Utilizando o critério do FPE o modelo auto-regressivo univariado para a série x_t , com o mínimo FPE (Tabela 4, Apêndice), é o modelo AR de ordem 15, com $FPE_x(s = 15, r = 0) = 0,001776$, da forma:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_{15} x_{t-15} + a_t \quad (3.7)$$

Para a série y_t , o modelo autoregressivo univariado com o mínimo FPE , é o modelo AR de ordem 12, com $FPE_y(s = 12, r = 0) = 0,001304$ (Tabela 5, Apêndice).

Logo, um modelo inicial para y_t é um autoregressivo de ordem 12 da forma:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + \dots + \alpha_{12} y_{t-12} + b_t \quad (3.8)$$

Para a série z_t , o modelo autoregressivo univariado com o mínimo FPE , é o modelo AR de ordem 2, com $FPE_z(s = 2, r = 0) = 5,601367$ (Tabela 6, Apêndice).

Logo, um modelo inicial para z_t é um autoregressivo de ordem 2 da forma:

$$z_t = \alpha_1 z_{t-1} + \alpha_2 z_{t-2} + c_t \quad (3.9)$$

A seguir, analisaremos os pares de séries (Consumo, Renda), (Consumo, Juros) e (Renda, Juros).

(1) Par $(X_t, Y_t) = (\text{Consumo}, \text{Renda})$

Consideremos inicialmente:

Variável dependente: x_t

Variável independente (variável manipulada): y_t

Neste caso estaremos testando se y_t causa x_t , pois x_t é a variável resposta.

O modelo auto-regressivo univariado para x_t , com o mínimo FPE , é o modelo AR de ordem 15. Assim, chamaremos a ordem deste modelo de $s = 15$.

Introduzindo a variável y_t como variável manipulada, obtemos o FPE mínimo no lag 3, com $FPE_x(s = 15, r = 3) = 0,002411$, ou seja, temos que $r = 3$ (Tabela 7).

Fixando a ordem de y_t , $r = 3$ e variando a ordem de x_t de 0 até $s = 15$ temos que o mínimo FPE é $FPE_x(s = 12, r = 3) = 0,001891$ (Tabela 8). Logo, temos que $l = 12$.

Assim, teremos um modelo para x_t dado por:

$$\hat{x}_t = \hat{\psi}_{21}^{12}(B)x_t + \hat{\psi}_{22}^3(B)y_t + \hat{a}_t.$$

Comparando $FPE_x(s, r)$ com $FPE_x(l, r)$, isto é,

$$FPE_x(s = 15, r = 0) = 0,001776 < FPE_x(l = 12, r = 3) = 0,001891,$$

observamos que o erro de previsão final de Akaike é menor considerando o modelo univariado para x_t .

Logo, concluímos que o passado de Y_t não melhora a previsão de X_t , ou seja, Y_t não causa X_t ($Y_t \nrightarrow X_t$), isto é, Renda não causa Consumo.

Então, o melhor modelo para a série Consumo (X_t) é um modelo univariado incluindo $s = 15$ defasagens de x_t apresentado em (3.7).

Consideremos agora a variável y_t como variável dependente e a variável x_t como variável independente (ou variável manipulada). Neste caso estaremos testando se x_t causa y_t .

O modelo auto-regressivo univariado para y_t é o modelo AR de ordem 12. Chamaremos a ordem deste modelo de $s = 12$, neste caso.

Introduzindo a variável x_t como variável manipulada, obtemos o FPE mínimo no lag 3, com $FPE_y(s=12, r=3) = 0,001273$, ou seja, temos que $r=3$ (Tabela 9).

Fixando a ordem de x_t , $r=3$ e variando a ordem de y_t de 0 até $s=12$ temos que o mínimo FPE é $FPE_y(s=12, r=3) = 0,001273$ (Tabela 11). Logo, $l=12$.

Portanto, teremos um modelo para y_t dado por:

$$\hat{y}_t = \hat{\psi}_{21}^{12}(B)y_t + \hat{\psi}_{22}^3(B)x_t + \hat{b}_t.$$

Comparando $FPE_y(s, r)$ com $FPE_y(l, r)$, isto é,

$$FPE_y(s=12, r=0) = 0,001891 > FPE_y(l=12, r=3) = 0,001273$$

observamos que o erro de previsão final de Akaike é menor considerando o modelo para a série Renda (y_t) que inclui 12 defasagens da variável y_t e 3 defasagens da variável x_t (Consumo), dado por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_{12} y_{t-12} + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + \hat{b}_t. \quad (3.10)$$

Logo, concluímos que o passado de X_t melhora a previsão de Y_t , ou seja, X_t causa Y_t ($X_t \rightarrow Y_t$), isto é, Consumo causa Renda.

A correlação cruzada amostral entre os resíduos do modelo apresentado em (3.10) e os resíduos do modelo apresentado em (3.7) ($r_{\hat{a}\hat{b}}(0) = -0,03$) não é significativamente diferente de zero e concluímos portanto que não há causalidade instantânea entre Consumo e Renda.

Conclusão sobre o par $(X_t, Y_t) = (\text{Consumo}, \text{Renda})$:

Renda	não causa	Consumo	$(Y_t \not\rightarrow X_t)$
Consumo	causa	Renda	$(X_t \rightarrow Y_t)$

Não há causalidade instantânea.

As Tabelas citadas mostram os passos do ajuste, os respectivos $FPE's$ e os resultados obtidos e encontram-se no Apêndice.

(3) Par $(X_t, Z_t) = (\text{Consumo}, \text{Juros})$

Consideremos inicialmente:

Variável dependente: x_t

Variável independente (variável manipulada): z_t

Neste caso estaremos testando se z_t causa x_t , pois x_t é a variável resposta.

Vimos que um modelo inicial para x_t é um autoregressivo de ordem 15, logo neste caso $s = 15$.

Introduzindo a variável z_t como variável manipulada, obtemos o FPE mínimo no lag 1, com $FPE_x(s = 15, r = 1) = 0,001801$, ou seja, temos que $r = 1$ (Tabela 11).

Fixando a ordem de z_t , $r = 1$ e variando a ordem de x_t de 0 até $s = 15$, obtemos o mínimo $FPE_x(s = 15, r = 1) = 0,001801$ (Tabela 12). Logo, $l = 15$.

Assim, teremos um modelo para x_t dado por:

$$\hat{x}_t = \hat{\psi}_{21}^{15}(B)x_t + \hat{\psi}_{22}^1(B)z_t + \hat{a}_t.$$

Comparando $FPE_x(s, r)$ com $FPE_x(l, r)$, isto é,

$$FPE_x(s = 15, r = 0) = 0,001776 < FPE_x(l = 15, r = 1) = 0,001801,$$

observamos que o erro de previsão final de Akaike é menor considerando o modelo univariado para x_t .

Logo, concluímos que o passado de Z_t não melhora a previsão de X_t , ou seja, Z_t não causa X_t ($Z_t \nrightarrow X_t$), isto é, Juros não causa Consumo.

Consideremos agora a variável z_t como variável dependente e a variável x_t como variável independente. Neste caso estaremos testando se x_t causa z_t .

O modelo auto-regressivo univariado para z_t é o modelo AR de ordem 2. Assim, chamaremos a ordem deste modelo de $s = 2$.

Introduzindo a variável x_t como variável manipulada, obtemos o FPE mínimo no lag 1, com $FPE_z(s=2, r=1) = 6,004649$, ou seja, temos que $r = 1$ (Tabela 13).

Fixando a ordem de x_t , $r = 1$ e variando a ordem de z_t de 0 até $s = 2$ temos que o mínimo $FPE_z(s=2, r=1) = 6,004649$ (Tabela 14). Logo, $l = 2$.

Assim, um modelo para z_t é dado por:

$$\hat{z}_t = \hat{\psi}_{21}^2(B)z_t + \hat{\psi}_{22}^1(B)x_t + \hat{c}_t.$$

Comparando $FPE_z(s, r)$ com $FPE_z(l, r)$, isto é,

$$FPE_z(s=2, r=0) = 5,601367 < FPE_z(l=2, r=1) = 6,004649,$$

O erro de previsão final de Akaike é menor considerando o modelo univariado para a série Juros (Z_t).

Logo, concluímos que o passado de X_t não melhora a previsão de Z_t , ou seja, X_t não causa Z_t , ($X_t \nrightarrow Z_t$) isto é, Consumo não causa Juros.

Conclusão sobre o par $(X_t, Z_t) = (\text{Consumo}, \text{Juros})$:

Juros	não causa	Consumo	$(Z_t \nrightarrow X_t)$
Consumo	não causa	Juros	$(X_t \nrightarrow Z_t)$

(4) Par $(Y_t, Z_t) = (\text{Renda}, \text{Juros})$

Consideremos inicialmente:

Variável dependente: y_t

Variável independente: z_t

Neste caso estaremos testando se z_t causa y_t , pois y_t é a variável resposta.

Vimos que um modelo inicial para y_t é um auto-regressivo de ordem 12.

Introduzindo a variável z_t como variável manipulada, obtemos o FPE mínimo no lag 2, com $FPE_y(s=12, r=2) = 0,001244$, ou seja, temos que $r=2$ (Tabela 15).

Fixando a ordem de z_t , $r=2$ e variando a ordem de y_t de 0 até $s=12$, obtemos o mínimo $FPE_y(s=12, r=2) = 0,001244$ (Tabela 16). Logo, $l=12$.

Logo, teremos um modelo para y_t dado por:

$$\hat{y}_t = \hat{\psi}_{21}^2(B)z_t + \hat{\psi}_{22}^{12}(B)y_t + \hat{b}_t.$$

Comparando $FPE_y(s, r)$ com $FPE_y(l, r)$, isto é,

$$FPE_y(s=12, r=0) = 0,001304 > FPE_y(l=12, r=2) = 0,001244,$$

e vemos que o erro de previsão final de Akaike é menor considerando o modelo para a série Renda (y_t) que inclui 12 defasagens da variável y_t e 2 defasagens da variável z_t (Juros), dado por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_{12} y_{t-12} + \alpha_1 z_{t-1} + \alpha_2 z_{t-2} + \hat{b}_t. \quad (3.11)$$

Logo, concluímos que o passado de Z_t melhora a previsão de Y_t , ou seja, dizemos que Z_t causa Y_t ($Z_t \rightarrow Y_t$), isto é, Juros causa Renda.

A correlação cruzada amostral entre os resíduos do modelo apresentado em (3.11) e os resíduos do modelo apresentado em (3.9) ($r_{\hat{a}\hat{b}}(0) = 0,07$) não é significativamente diferente de zero e concluímos portanto que não há causalidade instantânea entre Juros e Renda.

Consideremos agora a variável z_t como variável dependente e a variável y_t como variável independente. Neste caso estaremos testando se y_t causa z_t .

O modelo autoregressivo univariado para z_t é o modelo AR de ordem 2, onde $s = 2$.

Introduzindo a variável y_t como variável manipulada, obtemos o FPE mínimo no lag 7, com $FPE_z(s=2, r=7) = 5,898291$, ou seja, temos que $r = 7$ (Tabela 17).

Fixando a ordem de y_t , $r = 7$ e variando a ordem de z_t de 0 até $s = 2$ temos que o mínimo $FPE_z(s=2, r=7) = 5,898291$ (Tabela 18). Logo, $l = 2$.

Logo, teremos um modelo para z_t dado por:

$$\hat{z}_t = \hat{\psi}_{21}^2(B)z_t + \hat{\psi}_{22}^7(B)y_t + \hat{e}_t.$$

Comparando $FPE_z(s, r)$ com $FPE_z(l, r)$, isto é,

$$FPE_z(s=2, r=0) = 5,601367 < FPE_z(l=2, r=7) = 5,898291,$$

observamos que o erro de previsão final de Akaike é menor considerando o modelo univariado para a série Juros (Z_t) apresentado em (3.9).

Assim, concluímos que o passado de Y_t não melhora a previsão de Y_t , ou seja, Y_t não causa Z_t , isto é, Renda não causa Juros.

Conclusão sobre o par $(Y_t, Z_t) = (\text{Renda}, \text{Juros})$:

Juros causa Renda $(Z_t \rightarrow Y_t)$
Renda não causa Juros $(Y_t \nrightarrow Z_t)$
Não há causalidade instantânea.

A Tabela 19 no Apêndice mostra um resumo dos resultados obtidos para os três pares de séries, utilizando o procedimento de Hsiao.

Comentários

A conclusão geral de acordo com o procedimento de Hsiao é que Consumo causa Renda, mas não há causalidade instantânea presente. Detectou-se também que Juros causa Renda e neste caso também não há causalidade instantânea presente.

O maior problema associado com a utilização do procedimento de detecção de causalidade sugerido por Hsiao é a determinação da ordem máxima do processo autoregressivo a ser utilizada.

Capítulo 4 - Procedimento de Boudjellaba e outros

4.1 - Introdução

O procedimento desenvolvido por Boudjellaba e outros (1992), considera análise de causalidade utilizando o conceito de causalidade de Granger, para um modelo *ARMA* vetorial.

A definição de causalidade de Granger entre vetores descrita no Capítulo 1, Definição 1.21, é uma extensão simples e natural da definição de causalidade de Granger entre 2 variáveis (Definição 1.17). Esta definição é equivalente à definição proposta por Tjøstheim (1981) e procedimento similar foi considerado por Kang (1981) .

Boudjellaba e outros derivaram condições necessárias e suficientes para não causalidade entre 2 vetores de variáveis para uma classe de processos lineares invertíveis. Este resultado foi particularizado para a classe de processos *ARMA* estacionários e invertíveis, conforme veremos a seguir.

Estas condições são formuladas em termos de determinantes de matrizes construídas de submatrizes da matriz original dos polinômios AR e MA. Estas condições são razoavelmente simples do ponto de vista de implementação de testes.

Neste capítulo descreveremos como ajustar um modelo *ARMA* trivariado às séries Consumo, Renda e Juros e finalmente nós aplicaremos os testes propostos aos dados, utilizando a estatística da razão de verossimilhança (LR) para testar a

hipótese de não causalidade entre X_1 e X_2 , onde $X = (X_1, X_2)'$ é o vetor de séries temporais de interesse.

4.2 - Modelagem ARMA vetorial

Seja $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{bt})'$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ um processo estocástico b-variado.

Dizemos que X_t segue um modelo $ARMA(p, q)$ b-variado se

$$X_t - \Phi_1 X_{t-1} - \dots - \Phi_p X_{t-p} = C + a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \dots - \Theta_q a_{t-q} \quad (4.1)$$

onde

$\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta_1, \dots, \Theta_q$ são matrizes $b \times b$ reais e $a_t = (a_{1t}, \dots, a_{bt})'$ é um ruído branco b-variado com $a_t \sim N(0, \Sigma)$.

Podemos escrever (4.1) na forma

$$\Phi(B) X_t = C + \Theta(B) a_t \quad (4.2)$$

onde

$\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$ e $\Theta(B) = I - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q$ são polinômios matriciais e I é a matriz identidade $b \times b$. (Cada componente das matrizes $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ é um polinômio com coeficientes reais e grau $\leq p$ ou $\leq q$).

O modelo vetorial apresentado em (4.1) assume que todas as raízes dos determinantes polinomiais $|\Phi(B)|$ e $|\Theta(B)|$ estão fora do círculo unitário. O modelo (4.1) será estacionário se todas as raízes de $|\Phi(B)|$ estiverem fora do círculo unitário e será invertível se todas as raízes de $|\Theta(B)|$ estiverem fora do círculo unitário.

A classe dos modelos ARMA vetorial é extensa e pode conter um grande número de parâmetros. Dado um vetor de séries temporais $\mathbf{X}_t$ de tamanho finito $t = 1, \dots, b$, o ideal é encontrar um modelo que contenha poucos parâmetros e ao mesmo tempo que represente adequadamente os dados. Usando os mesmos critérios que Box e Jenkins (1970) para séries temporais univariadas, Tiao e Box (1981) propuseram uma abordagem iterativa para a construção de modelos ARMA multivariados, consistindo de três fases principais:

- (i) identificação do modelo;
- (ii) estimação;
- (iii) análise de diagnóstico.

A estrutura de dependência entre as séries componentes é refletida dentro do modelo através da estrutura da matriz de covariância das séries de ruído.

O vetor constante, C , de (4.1) tem duas interpretações dependendo do operador autoregressivo $\Phi(B)$. A primeira interpretação ocorre quando todas as raízes do determinante $|\Phi(B)|$ estiverem fora do círculo unitário, então $\Phi^{-1}(B) C$ é o vetor de médias de $\mathbf{X}_t$. Caso contrário, C contém elementos que representam uma tendência determinística de uma série não estacionária.

Tanto na fase inicial de identificação do modelo, como na análise de diagnóstico (análise dos resíduos do modelo ajustado), é necessária a verificação se os resíduos podem ser considerados processo ruído branco. Na fase inicial, as séries originais diferenciadas ou transformadas, $\mathbf{X}_t$, são examinadas, enquanto que na análise de diagnóstico é analisado o vetor de resíduos. As ferramentas básicas que ajudarão na identificação do modelo são as matrizes de autocorrelação e correlação cruzada, chamadas CCM e as matrizes de autocorrelação parcial. Além disso, vários tipos de análises de autovalores e autovetores tem-se mostrado útil na análise e interpretação de séries temporais multivariadas.

4.3 - Causalidade em processos lineares invertíveis

Seja $\{\mathbf{X}_t : t \in Z\}$ um processo vetorial n -dimensional, estacionário de segunda ordem. Sem perda de generalidade, nós podemos supor que $E[\mathbf{X}_t] \equiv \mathbf{0}$. Pelo Teorema da decomposição de Wold, o processo $\{\mathbf{X}_t\}$ admite a seguinte representação:

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathbf{a}_{t-j}, \quad t \in Z, \quad (4.3)$$

onde os ψ_j 's são matrizes $b \times b$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j|^2 < \infty$, onde $|\cdot|$ é a norma Euclidiana para matrizes, $\psi_0 = \mathbf{I}_b$ e $\{\mathbf{a}_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ é um processo de inovação, isto é, os $\mathbf{a}_t$'s são vetores aleatórios não correlacionados com média zero ($E(\mathbf{a}_t) = \mathbf{0}$) e matriz de covariância não singular Σ ($E(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t') = \Sigma$).

Suponhamos que o processo (4.3) seja invertível; isto é, $\mathbf{X}_t$ admite uma representação auto-regressiva infinita

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \mathbf{X}_{t-j} + \mathbf{a}_t, \quad t \in Z, \quad (4.4)$$

onde os π_j 's são matrizes $b \times b$ tais que as séries em (4.4) convergem em média quadrática. A caracterização da inversibilidade de um processo linear multivariado em termos de sua função (matriz) densidade espectral foi dada em Nsiri e Roy (1992).

Processos *ARMA* multivariados estacionários e invertíveis são casos especiais de (4.4). Usando a notação do operador diferença B , (4.4) é equivalente a

$$\pi(B)\mathbf{X}_t = \mathbf{a}_t, \quad t \in Z, \quad (4.5)$$

onde $\pi(B) = \mathbf{I}_b - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j = \left(\pi_{ij}(B) \right)_{b \times b}$ é uma matriz de séries de potências no operador B .

Particionamos $\mathbf{X}_t$ e $\mathbf{a}_t$ em 2 subvetores como segue:

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_{1t}, \mathbf{X}_{2t})'$$

$$\mathbf{a}_t = (\mathbf{a}_{1t}, \mathbf{a}_{2t})'$$

onde $\mathbf{X}_{it}$ e $\mathbf{a}_{it}$ são vetores $b_i \times 1$; $i = 1, 2$, com $b_i \geq 0$ e $b_1 + b_2 = b$.

Usando a partição correspondente de $\pi(B)$, (4.5) pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} \pi_{11}(B) & \pi_{12}(B) \\ \pi_{21}(B) & \pi_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1t} \\ \mathbf{X}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1t} \\ \mathbf{a}_{2t} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Os resultados seguintes são importantes para prosseguirmos. Estes resultados foram obtidos por Kang (1981) para um processo bivariado. As provas das proposições seguintes estão apresentadas em Boudjellaba e outros (1992).

Proposição 4.1 - No processo ARMA estacionário e invertível apresentado em (4.5) particionado como em (4.6),

$\mathbf{X}_{1t}$ não causa $\mathbf{X}_{2t}$ se e somente se

X_{it} não causa X_{jt} $i = 1, \dots, b_1$ e $j = b_1 + 1, \dots, b_1 + b_2$.

Considere agora $\mathbf{X}_t$ como um processo *ARMA* vetorial dado por

$$\Phi(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t. \quad (4.7)$$

Proposição 4.2 - No processo linear invertível (4.7) temos que,

$$X_{it} \text{ não causa } X_{jt} \quad \text{se e somente se} \quad (4.8)$$

$$\det \left(\Phi_i(z), \Theta_{(j)}(z) \right) = 0 \quad (4.9)$$

onde $\Phi_i(z)$ é a i -ésima coluna de $\Phi(z)$ e $\Theta_{(j)}(z)$ é a matriz $\Theta(z)$ sem a j -ésima coluna.

Proposição 4.3 - No modelo apresentado em (4.7), $\mathbf{X}_{1t}$ não causa $\mathbf{X}_{2t}$ se e somente se (4.9) é satisfeita para $i = 1, \dots, b_1$ e $j = b_1 + 1, \dots, b_1 + b_2$.

Considerando n observações do processo *ARMA* multivariado particionado como em (4.6), o procedimento geral sugerido por Boudjellaba e outros é o seguinte:

- (i) Ajuste um modelo *ARMA* multivariado para $\mathbf{X}_t$;
- (ii) Usando as proposições 4.1 a 4.3 acima, derivar as condições de não causalidade e expressá-las em termos dos parâmetros do modelo estimado. Se nós denotarmos o vetor de parâmetros por $\beta = \left(\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta_1, \dots, \Theta_q \right)'$,

obtemos das condições de não-causalidade k restrições em termos dos parâmetros em β ;

(iii) Escolha o critério para teste. Usaremos o teste estatístico de verossimilhança, dado por

$$\xi_{LR} = 2 \left\{ L(\hat{\beta}, \mathbf{X}) - L(\hat{\beta}^*, \mathbf{X}) \right\}, \quad (4.10)$$

onde $L(\beta, \mathbf{X})$ é a log-verossimilhança, $\hat{\beta}^*$ é o estimador de máxima verossimilhança de β sob restrições (restrito) e $\hat{\beta}$ é o estimador irrestrito.

Sob a hipótese nula de não causalidade, ξ_{LR} é assintoticamente distribuída como uma variável qui-quadrado com k graus de liberdade (χ_k^2). Rejeitamos a hipótese nula ao nível de significância α , se $\xi_{LR} > \chi_{k;1-\alpha}^2$, onde $\chi_{k;1-\alpha}^2$ é o $(1-\alpha)$ -quantil da distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade, onde k é o número de restrições dos parâmetros.

4.4 - Aplicação aos dados

De acordo com o procedimento de Tiao e Box (1981), observando a Figura 23 no Apêndice, as matrizes de correlação cruzada nos lags são significativamente diferentes de zero, sugerem incluir os termos $AR(1)$, $AR(12)$ e o termo $MA(1)$. Ou seja, temos um modelo ARMA trivariado ajustado às séries na forma:

$$\Phi(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{a}_t ,$$

$$(\mathbf{I}_3 - \phi_1 B - \phi_{12} B^{12})\mathbf{X}_t = (\mathbf{I}_3 - \theta_1 B)\mathbf{a}_t , \quad (4.11)$$

onde

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} a_t \\ b_t \\ c_t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

com:

$$x_t = (1 - B)(1 - B^{12}) \log(X_t);$$

$$y_t = (1 - B)(1 - B^{12}) \log(Y_t) - \hat{w}_1 I_1;$$

$$\text{onde } I_1 = \begin{cases} 1, & t \geq 75 \text{ (março de 90)} \\ 0, & t < 75, \end{cases}$$

e $\hat{w}_1$ é a estimativa do parâmetro do modelo de intervenção apresentado em (2.10);

$$z_t = Z_t - \hat{w}_1 I_1 - \hat{w}_2 I_2,$$

$$\text{onde } I_1 = \begin{cases} 1, & t = 63 \text{ (março de 1989)} \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 1, & t = 126 \text{ (junho de 1994)} \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

e $\hat{w}_1$ e $\hat{w}_2$ são as estimativas dos parâmetros modelo de intervenção apresentado em (2.14).

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{12}^1 & \phi_{13}^1 \\ 0 & \phi_{22}^1 & \phi_{23}^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{12} = \begin{pmatrix} \phi_{11}^{12} & \phi_{12}^{12} & 0 \\ 0 & \phi_{22}^{12} & 0 \\ 0 & \phi_{32}^{12} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \Theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_{11}^1 & 0 & \theta_{13}^1 \\ 0 & \theta_{22}^1 & 0 \\ 0 & \theta_{32}^1 & \theta_{33}^1 \end{pmatrix}.$$

Os resultados do ajuste do modelo trivariado são apresentados na Figura 24 no Apêndice. A análise das matrizes de correlação cruzada dos resíduos (Figura 25, Apêndice) indicam que os resíduos do modelo podem ser considerados aleatórios.

As estimativas de θ_{ij}^k e seus respectivos desvios padrões são apresentados na Tabela 20 no Apêndice.

Utilizando as proposições 4.1 a 4.3, derivamos as condições de não-causalidade para as relações de interesse. Para efeitos de simplificação, a partir de agora chamaremos as séries Consumo, Renda e Juros, respectivamente de X_{1t} , X_{2t} e X_{3t} .

As relações de maior interesse são:

$$(I) (X_{2t}, X_{3t}) \nrightarrow X_{1t} - (\text{Renda, Juros}) \nrightarrow \text{Consumo}$$

De acordo com a Proposição 4.1 verificar a relação acima é equivalente a verificar se $\text{Renda} \nrightarrow \text{Consumo}$ e se $\text{Juros} \nrightarrow \text{Consumo}$.

Pela Proposição 4.2 temos que:

$$(I.a) \ X_{2l} \not\rightarrow X_{1l} \Leftrightarrow \det(\Phi_2(z), \Theta_{(1)}(z)) = 0$$

ou seja ,

$$\begin{vmatrix} -\phi_{12}^1 B - \phi_{12}^{12} B^{12} & 0 & \theta_{13}^1 B \\ 1 - \phi_{22}^1 B - \phi_{22}^{12} B^{12} & 1 - \theta_{22}^1 B & 0 \\ 0 & -\theta_{32}^1 B & 1 - \theta_{33}^1 B \end{vmatrix} = 0$$

se e somente se

$$-\phi_{12}^1 B + (\phi_{12}^1 \theta_{33}^1 + \phi_{12}^1 \theta_{22}^1 - \theta_{13}^1 \theta_{32}^1) B^2 + (-\phi_{12}^1 \theta_{22}^1 \theta_{33}^1 + \theta_{13}^1 \theta_{32}^1 \phi_{22}^1) B^3 + \\ -\phi_{12}^{12} B^{12} + (\phi_{12}^{12} \theta_{33}^1 + \phi_{12}^{12} \theta_{22}^1) B^{13} + (-\phi_{12}^{12} \theta_{22}^1 \theta_{33}^1 + \theta_{13}^1 \theta_{32}^1 \phi_{22}^{12}) B^{14} = 0$$

se e somente se

$$\phi_{12}^1 = 0, \phi_{12}^{12} = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = 0 \quad \text{ou} \quad \phi_{12}^1 = 0, \phi_{12}^{12} = 0 \text{ e } \theta_{32}^1 = 0 \quad (4.12)$$

$$(I.b) \ X_{3l} \not\rightarrow X_{1l} \Leftrightarrow \det(\Phi_3(z), \Theta_{(1)}(z)) = 0$$

ou seja ,

$$\begin{vmatrix} -\phi_{13}^1 B & 0 & \theta_{13}^1 B \\ -\phi_{23}^1 B & 1 - \theta_{22}^1 B & 0 \\ 1 & -\theta_{32}^1 B & 1 - \theta_{33}^1 B \end{vmatrix} = 0$$

se e somente se

$$(-\theta_{13}^1 - \phi_{13}^1) B + (\theta_{13}^1 \theta_{22}^1 + \phi_{13}^1 \theta_{33}^1 + \phi_{13}^1 \theta_{22}^1) B^2 + (-\phi_{13}^1 \theta_{22}^1 \theta_{33}^1 + \theta_{13}^1 \theta_{32}^1 \phi_{23}^1) B^3 = 0$$

se e somente se

$$\phi_{13}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = 0$$

ou

$$\theta_{33}^1 = 0, \theta_{13}^1 = 0 \text{ e } \phi_{13}^1 = 0 \quad (4.13)$$

ou

$$\theta_{33}^1 = 0, \theta_{32}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1$$

ou

$$\theta_{33}^1 = 0, \phi_{23}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1$$

De (4.12) e (4.13) temos duas condições de não-causalidade para (I) dadas por

$$\begin{aligned} & \phi_{12}^1 = 0, \phi_{12}^{12} = 0, \theta_{13}^1 = 0 \text{ e } \phi_{13}^1 = 0 \\ \text{ou} \\ & \phi_{12}^1 = 0, \phi_{12}^{12} = 0, \theta_{32}^1 = 0, \theta_{13}^1 = 0 \text{ e } \phi_{13}^1 = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Portanto, o modelo apresentado em (4.11) deve ser reestimado incluindo as restrições descritas em (4.14). A partir da log-verossimilhança $L(\beta^*, \mathbf{X})$, onde β^* é o estimador de β restrito. As estatísticas de verossimilhança obtidas foram $\xi_{LR} = 16,166$ e $\xi_{LR} = 20,500$. Sob a hipótese nula de não causalidade, $\xi_{LR} \sim \chi^2_{(k)}$, onde k é o número de restrições. Portanto, rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, concluímos que o par de séries (Renda, Juros) causa Consumo.

(II) $X_{3t} \nrightarrow (X_{1t}, X_{2t})$ - Juros $\nrightarrow$ (Consumo, Renda)

Pela Proposição 4.2 temos que:

$$(II.a) \quad X_{3t} \nrightarrow X_{1t} \Leftrightarrow \det(\Phi_3(z), \Theta_{(1)}(z)) = 0$$

Temos as mesmas condições apresentadas no item (I.b), isto é

$$\begin{aligned} & \phi_{13}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = 0 \\ \text{ou} \\ & \theta_{33}^1 = 0, \theta_{13}^1 = 0 \text{ e } \phi_{13}^1 = 0 \\ \text{ou} \\ & \theta_{33}^1 = 0, \theta_{32}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1 \\ \text{ou} \\ & \theta_{33}^1 = 0, \phi_{23}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$(II.b) \ X_{3t} \not\rightarrow X_{2t} \Leftrightarrow \det(\Phi_3(z), \Theta_{(2)}(z)) = 0$$

ou seja ,

$$\begin{vmatrix} -\phi_{13}^1 B & 1 - \theta_{11}^1 B & \theta_{13}^1 B \\ -\phi_{23}^1 B & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \theta_{33}^1 B \end{vmatrix} = 0$$

se e somente se

$$\phi_{23}^1 B - (\phi_{23}^1 \theta_{33}^1 + \phi_{23}^1 \theta_{11}^1) B^2 + \phi_{23}^1 \theta_{11}^1 \theta_{33}^1 B^3 = 0$$

se e somente se

$$\phi_{23}^1 = 0 \quad (4.16)$$

De (4.15) e (4.16) temos que as condições de não-causalidade para (II) são

$$\phi_{23}^1 = 0, \theta_{33}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1 \quad (4.17)$$

A estatística de verossimilhança obtida foi $\xi_{LR} = 29,487$, portanto rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, Juros causa (Renda ,Consumo).

(III) $(X_{1t}, X_{2t}) \not\rightarrow X_{3t}$ - (Consumo, Renda) $\not\rightarrow$ Juros

Pela Proposição 4.2 temos que:

$$(III.a) \ X_{1t} \not\rightarrow X_{3t} \Leftrightarrow \det(\Phi_1(z), \Theta_{(3)}(z)) = 0$$

ou seja ,

$$\begin{vmatrix} 1 - \phi_{11}^{12} B^{12} & 1 - \theta_{11}^1 B & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \theta_{22}^1 B \\ 0 & 0 & -\theta_{32}^1 B \end{vmatrix} = 0, \quad \forall \phi_{11}^{12}, \theta_{11}^1, \theta_{22}^1 \text{ e } \theta_{32}^1.$$

$$(III.b) X_{2t} \not\rightarrow X_{3t} \Leftrightarrow \det(\Phi_2(z), \Theta_{(3)}(z)) = 0$$

ou seja ,

$$\begin{vmatrix} -\phi_{12}^1 B - \phi_{12}^{12} B^{12} & 1 - \theta_{11}^1 B & 0 \\ 1 - \phi_{22}^1 B - \phi_{22}^{12} B^{12} & 0 & 1 - \theta_{22}^1 B \\ 0 & 0 & -\theta_{32}^1 B \end{vmatrix} = 0$$

se e somente se

$$\theta_{32}^1 B + (-\theta_{32}^1 \theta_{11}^1 - \theta_{32}^1 \phi_{22}^1) B^2 + \theta_{32}^1 \phi_{22}^1 \theta_{11}^1 B^3 - \theta_{32}^1 \phi_{22}^{12} B^{13} + \theta_{32}^1 \phi_{22}^{12} \theta_{11}^1 B^{14} = 0$$

se e somente se

$$\theta_{32}^1 = 0 \quad (4.18)$$

Logo, temos que a condição de não-causalidade para (III) é

$$\theta_{32}^1 = 0 \quad (4.19)$$

Reestimando o modelo com a restrição apresentada em (4.19), a estatística de verossimilhança obtida foi $\xi_{LR} = 5,345$. Portanto, rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, concluímos (Consumo, Renda) causa Juros.

(IV) $X_{1t} \not\rightarrow X_{2t}$ - Consumo $\not\rightarrow$ Renda

Pela Proposição 4.2 temos que:

$$X_{1t} \not\rightarrow X_{2t} \Leftrightarrow \det(\Phi_1(z), \Theta_{(2)}(z)) = 0$$

ou seja ,

$$\begin{vmatrix} 1 - \theta_{11}^{12} B^{12} & 1 - \theta_{11}^1 B & \theta_{13}^1 B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \theta_{33}^1 B \end{vmatrix} = 0$$

$$\forall \theta_{11}^{12}, \theta_{11}^1, \theta_{13}^1 \text{ e } \theta_{33}^1.$$

Portanto, podemos concluir que Consumo não causa Renda.

As condições de não-causalidade para as relações a seguir já foram derivadas. Logo, temos que:

(V) $X_{1t} \nrightarrow X_{3t}$ - Consumo $\nrightarrow$ Juros

Como o $\det(\Phi_1(z), \Theta_{(3)}(z)) = 0$ é sempre igual a zero, temos que $X_{1t} \nrightarrow X_{3t}$, isto é, Consumo $\nrightarrow$ Juros.

(VI) $X_{2t} \nrightarrow X_{3t}$ - Renda $\nrightarrow$ Juros

Pela equação (4.18) temos que Renda $\nrightarrow$ Juros $\Leftrightarrow \theta_{32}^1 = 0$. (4.20)

A estatística de verossimilhança obtida do modelo com a restrição apresentada em (4.20) para a condição (VI) foi $\xi_{LR} = 5,345$. Portanto, rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, concluímos que Renda causa Juros.

(VII) $X_{2t} \nrightarrow X_{1t}$ - Renda $\nrightarrow$ Consumo

De acordo com (4.12) temos que Renda $\nrightarrow$ Consumo se e somente se

$$\theta_{12}^1 = 0, \phi_{12}^{12} = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_{12}^1 = 0, \phi_{12}^{12} = 0 \text{ e } \theta_{32}^1 = 0 \quad (4.21)$$

Logo, temos duas condições de não-causalidade para (VII), onde as estatísticas de verossimilhança obtidas são iguais a $\xi_{LR} = 15,848$ e $\xi_{LR} = 16,743$. Portanto, para as duas condições, rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, dizemos que Renda causa Consumo.

(VIII) $X_{3t} \nrightarrow X_{1t}$ - Juros $\nrightarrow$ Consumo

De acordo com (4.15) temos que Juros $\nrightarrow$ Consumo se e somente se

$$\begin{aligned} &\phi_{13}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = 0 \\ &\text{ou} \\ &\theta_{33}^1 = 0, \theta_{13}^1 = 0 \text{ e } \phi_{13}^1 = 0 \\ &\text{ou} \\ &\theta_{33}^1 = 0, \theta_{32}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1 \\ &\text{ou} \\ &\theta_{33}^1 = 0, \phi_{23}^1 = 0 \text{ e } \theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

As estatísticas de verossimilhança obtidas para a condição (VIII) foram $\xi_{LR} = 4,695$, $\xi_{LR} = 31,240$, $\xi_{LR} = 29,285$ e $\xi_{LR} = 31,422$. Portanto, não rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, dizemos que Renda não causa Consumo.

(VIX) $X_{3t} \nrightarrow X_{2t}$ - Juros $\nrightarrow$ Renda

Pela equação (4.16) temos que Juros $\nrightarrow$ Renda se e somente se

$$\phi_{23}^1 = 0 \quad (4.23)$$

A estatística de verossimilhança obtida para a condição (VIX) foi $\xi_{LR} = 4,751$. Portanto, rejeitamos H_0 ao nível de significância 5%, ou seja, dizemos que Juros causa Renda.

A Tabela 21 apresenta as hipóteses de não-causalidade e as condições de não-causalidade em termos dos parâmetros, os valores da estatística de verossimilhança ξ_{LR} e os respectivos graus de liberdade para cada hipótese.

Comentários

Através da Tabela 21 no Apêndice, podemos concluir que:

- 1) (Renda, Juros) causa Consumo : $(Y_t, Z_t) \rightarrow X_t$
- 2) Juros causa (Consumo, Renda) : $Z_t \rightarrow (X_t, Y_t)$
- 3) (Consumo, Renda) causa Juros : $(X_t, Y_t) \rightarrow Z_t$
- 4) Há relação de feedback entre Juros e (Consumo, Renda)
- 5) Renda causa Juros : $Y_t \rightarrow Z_t$
- 6) Renda causa Consumo : $Y_t \rightarrow X_t$
- 7) Juros causa Renda : $Z_t \rightarrow Y_t$
- 8) Há relação de feedback entre Renda e Juros

Discussão e Conclusões

Apresentaremos a seguir, os resultados obtidos aplicando-se os três procedimentos considerados neste trabalho.

(a) Procedimento de Pierce & Haugh

De acordo com este procedimento concluímos que Consumo causa Renda e que há causalidade instantânea. Para os pares (Consumo, Juros) e (Renda, Juros) não foram encontradas relações de causalidade no período considerado.

(b) Procedimento de Hsiao

De acordo com o procedimento de Hsiao, concluímos que Consumo causa Renda, mas não há causalidade instantânea presente. Detectou-se também que Juros causa Renda e neste caso também não há causalidade instantânea presente. Observamos que os resultados obtidos coincidem em parte com os resultados obtidos através do procedimento de Pierce & Haugh.

(c) Procedimento de Boudjellaba

De acordo com o procedimento de Boudjellaba, concluímos que há relação de feedback entre Renda e Juros, e que Renda causa Consumo. Além disso, este procedimento permite a exploração de outras relações entre vetores das séries consideradas, onde concluímos também que o vetor composto pelas séries (Renda, Juros) causa Consumo, e que há feedback entre Juros e o vetor (Consumo, Renda).

A Tabela 22 no Apêndice fornece um resumo dos resultados dos testes de causalidade.

Podemos concluir que, os resultados obtidos através do procedimento de Pierce & Haugh e do procedimento de Hsiao coincidem em parte, sendo que as conclusões relativas à causalidade instantânea são diferentes. Quanto aos resultados obtidos através do procedimento de Boudjellaba, notamos que diferem bastante dos procedimentos anteriores, no entanto lembrando que os dois procedimentos considerados anteriormente apresentam deficiências, no caso do procedimento de Pierce & Haugh o fato da análise considerar somente séries duas a duas e na possibilidade da existência de correlações espúrias que podem mascarar os resultados, e no caso do procedimento de Hsiao a determinação da ordem máxima do processo autoregressivo a ser considerada nos testes. Vale lembrar também que o procedimento de Boudjellaba possibilita explorar diferentes relações entre pares (ou vetores) de séries, o que é de extrema importância no caso de se tentar identificar relações de causalidade em séries temporais, uma vez que a existência de relações de causalidade entre séries pode estar vinculada ao efeito de mais de uma série temporal.

Os resultados obtidos através do procedimento de Boudjellaba são coerentes com a teoria macro-econômica, conforme podemos verificar através da interpretação dos resultados obtidos para diferentes pares (ou vetores) de séries considerados, descritos a seguir.

Renda causa Consumo / Consumo não causa Renda

Aumentos de renda do trabalho realmente acarretam incremento no consumo. Por outro lado, é também lógico que o consumo não cause aumento no nível global de renda do trabalho.

Consumo não causa Juros/Juros não causa Consumo

Um aumento no consumo pode causar um aumento de juros em função de uma necessidade da política econômica de conter o consumo, bem como em função da maior procura por um volume de crédito não elástico, o que acarreta aumento no preço do crédito (taxa de juros).

Uma elevação/redução nas taxas de juros pode reduzir/aumentar o consumo em função da alteração no custo do crédito (para os consumidores que dependem do crédito) e na propensão a poupar (para os detentores de ativos líquidos).

Juros causa Renda/ Renda causa Juros

Um aumento nos juros eleva a renda dos detentores de ativos financeiros líquidos.

Um aumento no nível de renda do trabalho pode implicar em aumento dos juros em função da necessidade da política econômica em conter o nível de demanda.

(Renda, Juros) causa Consumo

Uma elevação no nível de renda do trabalho e um aumento nos juros (que eleva a renda dos detentores de ativos financeiros líquidos) pode causar aumento no consumo.

Juros causa (Consumo, Renda)

Um aumento no nível de juros pode reduzir o consumo (para os tomadores de crédito) e aumentar a renda dos detentores de ativos líquidos.

(Consumo, Renda) causa Juros

Um aumento no nível de consumo e da renda (seja do trabalho ou dos detentores de ativos líquidos) pode acarretar aumento dos juros em função da necessidade da política econômica de elevar a taxa para conter o consumo.

Referências Bibliográficas

Akaike, H. (1969a): Statistical predictor identification, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **21**, 203-217.

Akaike, H. (1969b): Fitting autoregressions for prediction, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **21**, 243-247.

Boudjellaba, H.; Dufour, J.M. and Roy, Roch (1992): Testing causality between two vectors in multivariate autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 1082-1090.

Box, G.E.P. and Cox, D.R. (1964): An analysis of transformations, *Journal of the Royal Statistical Society*, **26**, 211-252.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1970): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco: Holden-Day.

Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1994): *ITSM (Interactive Time Series Modelling) for Windows, A User's Guide to Time Series Modelling and Forecasting*, New York.

Chen, C. e Liu, L.M. (1990): Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series, *Working Paper Series, Scientific Computing Associates*, P.O. Box 625, DeKalb, Illinois 60115.

Fox, A.J. (1972): Outliers in time series, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **34**, 350-363.

Glass, G.V. e outros (1975): *Design and Analysis of Time Series Experiments*. Boulder: Colorado Associate Universities Press.

Granger, C.W.J. (1969): Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica*, **37**, 424-438.

Hsiao, C. (1978): Autoregressive modelling and money-income causality detection, *Technical Report*, N° 262, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University.

Hsiao, C. (1979): Autoregressive modelling of canadian money and income data, *Journal of the American Statistical Association*, 74, 553-560.

Kang, H. (1981): Necessary and sufficient conditions for causality testing in multivariate ARMA models, *Journal of Time Series Analysis*, 2, 95-101.

Layton, A.P. (1984): A further note on the detection of Granger instantaneous causality, *Journal of Time Series Analysis*, 5, 15-18.

Liu, L. and Hudak, G.B. (1986): SCA - Scientific Computing Associates, *Reference Manual for General Statistical Analysis*.

Ljung, G. M. (1986): Diagnostic testing of univariate time series models, *Biometrika*, 73, 3, 725-730.

McDowall, D. e outros (1980): *Interrupted Time Series Analysis*. Beverly Hills: Sage Publications.

Morettin, P.A. and Toloi, C.M.C. (1987): *Previsão de Séries Temporais*, São Paulo: Atual Editora Ltda.

Morettin, P.A.; Toloi, C.M.C.; Gait, N. and Mesquita, A.R. (1989): Analysis of the relationships between some natural phenomena: atmospheric precipitation, mean sea level and sunspots. *Technical Report RT-MAE-8912*, Department of Statistics, University of São Paulo.

Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (1989): *Modelos de funções de transferência - 3ª Escola de Séries Temporais e Econometria*.

Pack, D.J. (1977): Forecasting time series affected by identifiable isolated events. *Working Paper Series*, 77-46, College of Adm. Sciences, Ohio State University.

Pastore, A.C. (1997): Passividade Monetária e Inércia, *Revista Brasileira de Econometria*.

Pierce, D.A. and Haugh, L. (1977): Causality in temporal systems: characterizations and a survey, *Journal of Econometrics*, 5, 265-293.

Pierce, D.A. and Haugh, L. (1979): The characterization of instantaneous causality: a comment, *Journal of Econometrics*, 10, 257-259.

Pino, F.A. (1980): Análise de Intervenção em Séries Temporais - Aplicações em Economia Agrícola. *Dissertação de Mestrado, IME-USP*.

Price, J.M. (1979): The characterization of instantaneous causality: a correction, *Journal of Econometrics*, 10, 253-256.

Priestley, M.B. (1981): *Spectral Analysis and Time Series* (2 vols.), New York: Academic Press.

Sims, C.A. (1977): Macro-economics and reality, Fisher-Schultz Lecture, *Discussion Paper*, N° 77-91, Center for Economic Research, University of Minnesota.

Sims, C.A. (1977): Money, income, and causality, *The American Economic Review*, 62, 540-552.

Tiao, G.C. and Box, G.E.P. (1981): Modeling Multiple Time Series with Applications, *Journal of the American Statistical Association*, 76, 802-816.

Tjøstheim, D. (1981): Granger-causality in multiple time series, *Journal of Econometrics*, 17, 157-176.

Apêndice

Apêndice

Gráficos

- Gráfico 1 - Gráfico da série Consumo
- Gráfico 2 - Gráfico da primeira diferença da série Consumo
- Gráfico 3 - Gráfico da primeira diferença da série $\log(\text{Consumo})$
- Gráfico 4 - Gráfico de uma diferença simples e uma diferença sazonal da série $\log(\text{Consumo})$
- Gráfico 5 - Gráfico da série Renda
- Gráfico 6 - Gráfico da primeira diferença da série Renda
- Gráfico 7 - Gráfico da primeira diferença da série $\log(\text{Renda})$
- Gráfico 8 - Gráfico de uma diferença simples e uma diferença sazonal da série $\log(\text{Renda})$
- Gráfico 9 - Gráfico da série Juros

Tabelas

- Tabela 1 - Dados
- Tabela 2 - Estimação dos modelos ARIMA univariados
- Tabela 3 - Testes de Causalidade - Procedimento de Pierce & Haugh
- Tabela 4 - Ajuste do modelo AR para a série Consumo
- Tabela 5 - Ajuste do modelo AR para a série Renda
- Tabela 6 - Ajuste do modelo AR para a série Juros
- Tabela 7 - Ajuste do modelo bivariado (v .depend.: Consumo e v.indep. Renda)
- Tabela 8 - Ajuste do modelo bivariado para o par Consumo,Renda
- Tabela 9 - Ajuste do modelo bivariado (v .depend.: Renda e v.indep. Consumo)
- Tabela 10 - Ajuste do modelo bivariado para o par Renda, Consumo
- Tabela 11 - Ajuste do modelo bivariado (v .depend.: Consumo e v.indep. Juros)
- Tabela 12 - Ajuste do modelo bivariado para o par Consumo,Juros
- Tabela 13 - Ajuste do modelo bivariado (v .depend.: Juros e v.indep. Consumo)
- Tabela 14 - Ajuste do modelo bivariado para o par Juros, Consumo
- Tabela 15 - Ajuste do modelo bivariado (v .depend.: Renda e v.indep. Juros)
- Tabela 16 - Ajuste do modelo bivariado para o par Renda, Juros
- Tabela 17 - Ajuste do modelo bivariado (v .depend.: Juros e v.indep. Renda)
- Tabela 18 - Ajuste do modelo bivariado para o par Juros,Renda
- Tabela 19 - Resumo dos resultados do Procedimento de Hsiao
- Tabela 20 - Estimação do modelo multivariado
- Tabela 21 - Testes de Causalidade - Procedimento de Boudjellaba
- Tabela 22 - Resumo dos resultados dos testes de causalidade

Figuras

Figura 1 - Correlograma e correlograma parcial da série Consumo

Figura 2 - Correlograma e correlograma parcial da série $\log(\text{Consumo})$

Figura 3 - Correlograma e correlograma parcial da primeira diferença da série $\log(\text{Consumo})$

Figura 4 - Correlograma e correlograma parcial para uma diferença simples e uma diferença sazonal da série $\log(\text{Consumo})$

Figura 5 - Estimação do modelo para a série Consumo

Figura 6 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo ajustado para a série Consumo

Figura 7 - Correlograma e correlograma parcial da série Renda

Figura 8 - Correlograma e correlograma parcial da série $\log(\text{Renda})$

Figura 9 - Correlograma e correlograma parcial da primeira diferença da série $\log(\text{Renda})$

Figura 10 - Correlograma e correlograma parcial para uma diferença simples e uma diferença sazonal da série $\log(\text{Renda})$

Figura 11 - Estimação do modelo inicial para a série Renda

Figura 12 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo inicial ajustado para a série Renda

Figura 13 - Estimação do modelo com intervenção para a série Renda

Figura 14 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo ajustado para a série Renda

Figura 15 - Correlograma e correlograma parcial da série Juros

Figura 16 - Estimação do modelo inicial para a série Juros

Figura 17 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo inicial para a série Juros

Figura 18 - Estimação do modelo para a série Juros

Figura 19 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo ajustado para a série Juros

Figura 20 - Correlograma Cruzado dos resíduos Consumo e Renda

Figura 21 - Correlograma Cruzado dos resíduos Consumo e Juros

Figura 22 - Correlograma Cruzado dos resíduos Renda e Juros

Figura 23 - Matrizes de correlação para identificação modelo trivariado

Figura 24 - Estimação do modelo ARIMA trivariado

Figura 25 - Matrizes de correlação dos resíduos do modelo ARIMA trivariado

Figura 26 - Correlograma Cruzado dos resíduos dos modelos (3.10) e (3.7)

Figura 27 - Correlograma Cruzado dos resíduos dos modelos (3.11) e (3.9)

Gráfico 1 - Gráfico da série Consumo

Gráfico 2 - Gráfico da 1a. diferença da série Consumo

Gráfico 3 - Gráfico da 1a. diferença da série log(Consumo)

Gráfico 4 - Gráfico da série $(1-B)(1-B_{12}) \log(\text{Consumo})$

Gráfico 5 - Gráfico da série Renda

Gráfico 6 - Gráfico da 1a. diferença da série Renda

Gráfico 7 - Gráfico da 1a dif da série log(Renda)

Gráfico 8 - Gráfico da série $(1-B)(1-B^{12}) \log(Renda)$

Gráfico 9 - Gráfico da série Juros

Tabela 1 - Dados

Data	Vendas Físicas	Salário Real	Over Real		Data	Vendas Físicas	Salário Real	Over Real
Jan/84	114,13	106,21	-0,6575		Jun/90	111,31	113,76	-1,9643
Fev/84	110,79	104,10	0,9361		Jul/90	109,39	116,74	0,7614
Mar/84	116,46	101,27	1,6537		Ago/90	127,33	117,87	-0,7301
Abr/84	111,57	99,97	1,1203		Set/90	120,56	114,05	2,0278
Mai/84	120,66	104,12	0,6602		Out/90	117,73	115,33	0,5873
Jun/84	121,15	102,11	0,3553		Nov/90	113,81	113,55	2,4369
Jul/84	121,27	102,12	1,4393		Dez/90	147,25	115,10	3,9431
Ago/84	127,02	102,80	0,2261		Jan/91	100,15	108,69	0,3983
Set/84	129,04	97,48	0,3138		Fev/91	95,11	94,68	-6,2034
Out/84	133,30	97,83	1,5015		Mar/91	112,26	93,00	0,9075
Nov/84	130,60	105,83	0,5989		Abr/91	109,39	98,26	1,8211
Dez/84	179,39	118,09	1,1056		Mai/91	114,20	103,19	1,2387
Jan/85	120,64	100,00	2,2893		Jun/91	113,80	105,73	-0,9162
Fev/85	114,05	99,34	0,4756		Jul/91	126,47	100,39	-1,5506
Mar/85	130,60	97,96	2,8746		Ago/91	128,36	99,22	-0,0863
Abr/85	118,26	97,91	5,3674		Set/91	115,71	100,68	-0,9510
Mai/85	145,54	107,41	4,1740		Out/91	116,09	98,49	0,1192
Jun/85	135,13	109,38	2,1683		Nov/91	99,53	96,82	6,8340
Jul/85	153,35	109,07	-1,2564		Dez/91	127,27	94,74	5,3748
Ago/85	159,95	107,11	-1,8917		Jan/92	87,08	87,11	2,5833
Set/85	150,01	108,72	1,2558		Fev/92	85,67	83,79	4,9132
Out/85	164,93	107,26	-1,1522		Mar/92	82,02	85,76	6,0525
Nov/85	170,37	120,37	-3,1647		Abr/92	98,20	87,77	2,8552
Dez/85	220,96	127,03	-1,3077		Mai/92	96,44	103,57	0,8694
Jan/86	134,26	112,24	0,2492		Jun/92	90,23	96,88	2,2460
Fev/86	133,11	113,82	3,9855		Jul/92	97,15	87,29	2,1440
Mar/86	147,84	120,09	-1,2203		Ago/92	95,08	89,27	-0,6406
Abr/86	164,46	129,38	1,3818		Set/92	94,00	96,21	1,1890
Mai/86	181,86	134,84	0,7967		Out/92	93,00	89,66	2,8817
Jun/86	170,44	139,09	0,8352		Nov/92	96,09	91,42	1,9684
Jul/86	186,64	142,99	0,9606		Dez/92	129,21	101,61	-0,1902
Ago/86	174,21	147,09	1,3437		Jan/93	75,39	97,76	0,7287
Set/86	181,62	149,31	1,6792		Fev/93	77,70	93,97	1,3605
Out/86	194,16	154,09	0,0392		Mar/93	97,34	94,79	0,2656
Nov/86	181,90	157,77	-2,4862		Abr/93	84,97	100,19	0,2304
Dez/86	232,01	176,22	-3,9078		Mai/93	87,55	100,21	-0,4487

Data	Vendas Físicas	Salário Real	Over Real		Data	Vendas Físicas	Salário Real	Over Real
Jan/87	140,16	144,53	-1,8219		Jun/93	86,64	97,12	0,4340
Fev/87	130,78	135,96	4,4173		Jul/93	90,52	96,39	-0,0075
Mar/87	119,04	131,87	-4,7315		Ago/93	95,40	102,29	-0,4510
Abr/87	120,73	122,76	-6,8433		Set/93	95,20	104,45	0,8599
Mai/87	129,81	119,22	-1,6571		Out/93	95,80	101,70	1,7273
Jun/87	111,04	111,81	0,6052		Nov/93	101,23	106,16	1,3179
Jul/87	122,75	109,91	1,8898		Dez/93	128,49	109,49	0,8982
Ago/87	133,95	114,93	1,7413		Jan/94	85,63	104,66	0,3303
Set/87	125,41	118,50	-1,4420		Fev/94	82,77	106,91	-1,1211
Out/87	132,05	116,90	-2,9613		Mar/94	96,55	115,19	2,0816
Nov/87	129,54	120,38	-1,9536		Abr/94	81,33	112,04	3,3874
Dez/87	176,37	136,62	-2,6553		Mai/94	96,91	109,27	2,9219
Jan/88	110,09	118,80	-1,3599		Jun/94	83,76	95,85	11,4201
Fev/88	113,25	123,11	0,3817		Jul/94	90,19	100,00	-5,8492
Mar/88	124,03	123,86	-2,2224		Ago/94	114,84	104,70	1,6790
Abr/88	110,63	123,47	0,2752		Set/94	108,40	105,68	1,7246
Mai/88	116,72	124,26	-1,2649		Out/94	106,05	101,93	1,0731
Jun/88	124,63	120,03	-0,8335		Nov/94	109,71	108,25	2,5020
Jul/88	124,38	122,33	2,0375		Dez/94	143,86	115,58	2,7932
Ago/88	130,27	127,69	-1,3514		Jan/95	99,12	109,19	2,0840
Set/88	119,87	125,33	-0,3316		Fev/95	99,28	112,06	1,7442
Out/88	115,75	124,31	1,5730		Mar/95	114,75	114,05	2,1558
Nov/88	122,44	134,20	-0,0156		Abr/95	106,13	115,45	2,8614
Dez/88	162,43	150,90	-1,8316		Mai/95	110,02	117,76	2,6944
Jan/89	105,89	119,76	-0,4775		Jun/95	108,07	118,18	1,5718
Fev/89	115,59	116,70	10,1899		Jul/95	112,52	117,67	1,7410
Mar/89	147,00	123,81	15,0334		Ago/95	113,87	119,32	3,7263
Abr/89	131,70	131,04	2,4059		Set/95	107,84	119,85	3,7662
Mai/89	131,32	135,20	-6,7999		Out/95	112,12	119,85	2,2822
Jun/89	136,66	125,86	-3,7214		Nov/95	112,03	123,27	2,0536
Jul/89	126,43	127,18	-2,9305		Dez/95	139,37	129,69	1,7322
Ago/89	134,88	131,62	-1,5905		Jan/96	92,24	123,44	1,2800
Set/89	128,26	129,46	-0,5097		Fev/96	93,56	124,33	1,8513
Out/89	125,32	160,98	4,0431		Mar/96	107,37	123,85	1,7522
Nov/89	124,61	158,01	1,0898		Abr/96	102,89	123,74	0,8659
Dez/89	166,11	170,52	3,1014		Mai/96	114,78	124,13	0,5473
Jan/90	116,25	161,54	-2,4448		Jun/96	102,88	125,64	0,8156
Fev/90	96,93	144,83	3,1854		Jul/96	118,41	125,96	1,3790
Mar/90	89,27	106,18	-3,7514		Ago/96	119,23	130,33	1,9038
Abr/90	101,87	107,50	-5,4083		Set/96	117,36	128,79	1,7220
Mai/90	125,57	112,90	-3,0720		Out/96	122,06	127,21	1,5960

Tabela 2 - Estimação dos modelos ARIMA univariados.

Série	Modelo	N	Parâmetro	Estimativa parâmetros	Desvio Padrão	Estatística t	Var. Res.	Q ₂₀ (5%)
X _t : Consumo	$\log(X_t) (1-B) (1-B^{12}) = (1-\theta_1 B) (1-\theta_2 B^2) (1-\theta_{12} B^{12})$	154	MA(1)	$\theta_1 = 0.2496$	0,0846	2,95	1.01458 x10-3	9,1
			MA(2)	$\theta_2 = 0.1763$	0,0858	2,06		
			SMA(12)	$\theta_{12} = 0.8987$	0,0472	19,04		
Y _t : Renda	$\log(Y_t) (1-B) (1-B^{12}) = (1-\theta_{12} B^{12}) + w_1 I_1$	154	SMA(12)	$\theta_{12} = 0.7492$	0,0603	12,42	4.84260x10-4	16,3
			w ₁	$w_1 = -0.1397$	0,0206	-6,78		
Z _t : Juros	$Z_t = (1-\theta_1 B) (1-\theta_{11} B^{11}) (1-\theta_{23} B^{23}) + w_1 I_1 + w_2 I_2$	154	MA(1)	$\theta_1 = -0.4397$	0,0766	-5,74	5,08729	14,3
			MA(11)	$\theta_{11} = -0.2022$	0,0797	-2,54		
			MA(23)	$\theta_{23} = 0.1999$	0,0817	2,45		
			w ₁	$w_1 = 5.5319$	2,0632	2,68		
			w ₂	$w_2 = 13.4268$	1,9533	6,87		

Tabela 3 - Testes de Causalidade - Procedimento de Pierce & Haugh.

Par	Valores de m	Valores de k	Estatística S _m	g.l. (2m+1)	X ² (2m+1)		Resultado
					5%	1%	
(X _t , Y _t) Consumo, Renda	12	k= -12, ..., 12	39,57	25	37,65	44,31	*
	24	k= -24, ..., 24	68,81	49	67,50	76,15	*
	36	k= -36, ..., 36	99,58	73	90,53	100,43	*
(X _t , Z _t) Consumo, Juros	12	k= -12, ..., 12	20,47	25	37,65	44,31	n.s.
	24	k= -24, ..., 24	39,51	49	67,50	76,15	n.s.
	36	k= -36, ..., 36	71,19	73	90,53	100,43	n.s.
(Y _t , Z _t) Renda, Juros	12	k= -12, ..., 12	16,35	25	37,65	44,31	n.s.
	24	k= -24, ..., 24	44,82	49	67,50	76,15	n.s.
	36	k= -36, ..., 36	74,42	73	90,53	100,43	n.s.

Valores de k	Estatística S _m	g.l. (m+1)	X ² (m+1)		Resultado
			5%	1%	
k= 0, ..., 12	26,93	13	22,36	27,69	*
k= -12, ..., 0	18,95				n.s.
k= 0, ..., 24	41,06	25	37,65	44,31	*
k= -24, ..., 0	34,06				n.s.
k= 0, ..., 36	60,85	37	55,76	63,69	*
k= -36, ..., 0	45,04				n.s.
k= 0, ..., 12	10,18	13	22,36	27,69	n.s.
k= -12, ..., 0	12,35				n.s.
k= 0, ..., 24	19,12	25	37,65	44,31	n.s.
k= -24, ..., 0	22,44				n.s.
k= 0, ..., 36	40,42	37	55,76	63,69	n.s.
k= -36, ..., 0	32,83				n.s.
k= 0, ..., 12	9,59	13	22,36	27,69	n.s.
k= -12, ..., 0	6,77				n.s.
k= 0, ..., 24	24,76	25	37,65	44,31	n.s.
k= -24, ..., 0	20,07				n.s.
k= 0, ..., 36	46,30	37	55,76	63,69	n.s.
k= -36, ..., 0	28,14				n.s.

* signif. ao nível de 5%

Tabela 4 - Ajuste do modelo AR para a série Consumo, usando o critério do FPE.

AR (s)	n	SQR	FPE(s,0)
1	140	0,286762	0,002108
2	139	0,251831	0,001892
3	138	0,250294	0,001922
4	137	0,245632	0,001929
5	136	0,244611	0,001965
6	135	0,239811	0,001971
7	134	0,239190	0,002012
8	133	0,238051	0,002050
9	132	0,235404	0,002076
10	131	0,231298	0,002089
11	130	0,227827	0,002109
12	129	0,187979	0,001784
13	128	0,183409	0,001785
14	127	0,183323	0,001830
15	126	0,173304	0,001776
Mínimo		s = 15	0,001776

Tabela 5 - Ajuste do modelo AR para a série Renda, usando o critério do FPE.

AR (s)	n	SQR	FPE(s,0)
1	140	0,230108	0,001691
2	139	0,195729	0,001470
3	138	0,175353	0,001347
4	137	0,172218	0,001352
5	136	0,172165	0,001383
6	135	0,164754	0,001354
7	134	0,160841	0,001353
8	133	0,159502	0,001373
9	132	0,159219	0,001404
10	131	0,159019	0,001436
11	130	0,155812	0,001442
12	129	0,137412	0,001304
13	128	0,136617	0,001329
14	127	0,134671	0,001344
15	126	0,134191	0,001375
Mínimo		s = 12	0,001304

Tabela 6 - Ajuste do modelo AR para a série Juros,
usando o critério do FPE.

AR (s)	n	SQR	FPE(s,0)
1	153	847,779	5,687822
2	152	818,450	5,601367
3	151	812,677	5,674863
4	150	802,600	5,719678
5	149	801,190	5,828340
6	148	800,267	5,944096
7	147	789,289	5,987363
8	146	785,482	6,086877
9	145	784,784	6,214126
10	144	756,403	6,121683
11	143	751,911	6,221438
12	142	750,823	6,353181
13	141	747,359	6,469015
14	140	746,091	6,608235
15	139	738,202	6,692479
Mínimo		s = 2	5,601367

Tabela 7 - Ajuste do modelo bivariado para o par Consumo e Renda.

Variável dependente: x_t (Consumo) - AR(15)

Variável independente: y_t (Renda)

n	ordem de x_t (s)	ordem de y_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
98	15	1	0,167	1,41975	0,002419
97	15	2	0,162	1,45570	0,002431
96	15	3	0,155	1,49351	0,002411
95	15	4	0,155	1,53333	0,002502
94	15	5	0,152	1,57534	0,002547
93	15	6	0,152	1,61972	0,002647
92	15	7	0,150	1,66667	0,002717
91	15	8	0,149	1,71642	0,002810
90	15	9	0,149	1,76923	0,002929
89	15	10	0,149	1,82540	0,003056
88	15	11	0,147	1,88525	0,003149
87	15	12	0,137	1,94915	0,003069
86	15	13	0,131	2,01754	0,003073
85	15	14	0,131	2,09091	0,003222
84	15	15	0,126	2,16981	0,003255
Mínimo $r = 3$					0,002411

Tabela 8 - Ajuste do modelo bivariado para o par Consumo e Renda.

Ordem de y_t fixa ($r=3$) e ordem de x_t variando de 0 até $s=15$.

n	ordem de x_t (s)	ordem de y_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
129	0	3	0,276	1,06400	0,002276
128	1	3	0,264	1,08130	0,002230
127	2	3	0,237	1,09917	0,002051
126	3	3	0,236	1,11765	0,002093
125	4	3	0,232	1,13675	0,002110
124	5	3	0,231	1,15652	0,002154
123	6	3	0,226	1,17699	0,002163
122	7	3	0,225	1,19820	0,002210
121	8	3	0,223	1,22018	0,002249
120	9	3	0,221	1,24299	0,002289
119	10	3	0,214	1,26667	0,002278
118	11	3	0,210	1,29126	0,002298
117	12	3	0,168	1,31683	0,001891
116	13	3	0,164	1,34343	0,001899
115	14	3	0,164	1,37113	0,001955
114	15	3	0,155	1,40000	0,001904
Mínimo $l=12$					0,001891

Tabela 9 - Ajuste do modelo bivariado para o par Renda e Consumo.

Variável dependente: yt (Renda) - AR(12)

Variável independente: xt (Consumo)

n	ordem de yt (s)	ordem de xt (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
127	12	1	0,133	1,24779	0,001307
126	12	2	0,133	1,27027	0,001341
125	12	3	0,123	1,29358	0,001273
124	12	4	0,122	1,31776	0,001297
123	12	5	0,122	1,34286	0,001332
122	12	6	0,121	1,36893	0,001358
121	12	7	0,118	1,39604	0,001361
120	12	8	0,118	1,42424	0,001401
119	12	9	0,111	1,45361	0,001356
118	12	10	0,111	1,48421	0,001396
117	12	11	0,109	1,51613	0,001412
116	12	12	0,108	1,54945	0,001443
115	12	13	0,108	1,58427	0,001488
114	12	14	0,104	1,62069	0,001479
113	12	15	0,100	1,65882	0,001468
Mínimo r = 3					0,001273

Tabela 10 - Ajuste do modelo bivariado para o par Renda e Consumo.

Ordem de xt fixa (r=3) e ordem de yt variando de 0 até s=12.

n	ordem de yt (s)	ordem de xt (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
125	0	3	1,668	1,06612	0,014226
125	1	3	0,202	1,08333	0,001751
125	2	3	0,172	1,10084	0,001515
125	3	3	0,154	1,11864	0,001378
125	4	3	0,152	1,13675	0,001382
125	5	3	0,152	1,15517	0,001405
125	6	3	0,148	1,17391	0,001390
125	7	3	0,145	1,19298	0,001384
125	8	3	0,145	1,21239	0,001406
125	9	3	0,145	1,23214	0,001429
125	10	3	0,145	1,25225	0,001453
125	11	3	0,143	1,27273	0,001456
125	12	3	0,123	1,29358	0,001273
Mínimo l = 12					0,001273

Tabela 11 - Ajuste do modelo bivariado para o par Consumo e Juros.

Variável dependente: x_t (Consumo) - AR(15)

Variável independente: z_t (Juros)

n	ordem de x_t (s)	ordem de z_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
126	15	1	0,173	1,31193	0,001801
126	15	2	0,173	1,33333	0,001831
126	15	3	0,172	1,35514	0,001850
126	15	4	0,172	1,37736	0,001880
126	15	5	0,171	1,40000	0,001900
126	15	6	0,171	1,42308	0,001931
126	15	7	0,170	1,44660	0,001952
126	15	8	0,170	1,47059	0,001984
126	15	9	0,170	1,49505	0,002017
126	15	10	0,169	1,52000	0,002039
126	15	11	0,164	1,54545	0,002012
126	15	12	0,160	1,57143	0,001995
126	15	13	0,159	1,59794	0,002016
126	15	14	0,159	1,62500	0,002051
126	15	15	0,157	1,65263	0,002059
Mínimo $r=1$					0,001801

Tabela 12 - Ajuste do modelo bivariado para o par Consumo e Juros.

Ordem de z_t fixa ($r=2$) e ordem de x_t variando de 0 até $s=15$.

n	ordem de x_t (s)	ordem de z_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
141	0	1	0,297	1,02878	0,002167
140	1	1	0,286	1,04380	0,002132
139	2	1	0,252	1,05926	0,001920
138	3	1	0,250	1,07519	0,001948
137	4	1	0,245	1,09160	0,001952
136	5	1	0,244	1,10853	0,001989
135	6	1	0,239	1,12598	0,001993
134	7	1	0,239	1,14400	0,002040
133	8	1	0,238	1,16260	0,002080
132	9	1	0,235	1,18182	0,002104
131	10	1	0,231	1,20168	0,002119
130	11	1	0,227	1,22222	0,002134
129	12	1	0,188	1,24348	0,001812
128	13	1	0,183	1,26549	0,001809
127	14	1	0,183	1,28829	0,001856
126	15	1	0,173	1,31193	0,001801
Mínimo $l=15$					0,001801

Tabela 13 - Ajuste do modelo bivariado para o par Juros e Consumo.

Variável dependente: z_t (Juros) - AR(2)

Variável independente: x_t (Consumo)

n	ordem de z_t (s)	ordem de x_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
140	2	1	793,948	1,05882	6,004649
139	2	2	784,318	1,07463	6,063663
138	2	3	771,223	1,09091	6,096625
137	2	4	767,392	1,10769	6,204629
136	2	5	767,083	1,12500	6,345356
135	2	6	750,638	1,14286	6,354607
134	2	7	749,201	1,16129	6,492835
133	2	8	734,743	1,18033	6,520584
132	2	9	726,865	1,20000	6,607864
131	2	10	721,831	1,22034	6,724263
130	2	11	714,162	1,24138	6,819584
129	2	12	708,968	1,26316	6,942159
128	2	13	692,026	1,28571	6,951154
127	2	14	674,403	1,30909	6,951613
126	2	15	656,469	1,33333	6,946762
Mínimo			r = 1		6,004649

Tabela 14 - Ajuste do modelo bivariado para o par Juros e Consumo.

Ordem de x_t fixa (r=1) e ordem de z_t variando de 0 até s=2.

n	ordem de z_t (s)	ordem de x_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
140	0	1	1.066,889	1,02899	7,841524
140	1	1	820,102	1,04380	6,114421
140	2	1	793,948	1,05882	6,004649
Mínimo			l = 2		6,004649

Tabela 15 - Ajuste do modelo bivariado para o par Renda e Juros.

Variável dependente: yt (Renda) - AR(12)

Variável independente: zt (Juros)

n	ordem de yt (s)	ordem de zt (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
129	12	1	0,134	1,24348	0,001292
129	12	2	0,127	1,26316	0,001244
129	12	3	0,127	1,28319	0,001263
129	12	4	0,126	1,30357	0,001273
129	12	5	0,126	1,32432	0,001294
129	12	6	0,125	1,34545	0,001304
129	12	7	0,124	1,36697	0,001314
129	12	8	0,124	1,38889	0,001335
129	12	9	0,117	1,41121	0,001280
129	12	10	0,116	1,43396	0,001289
129	12	11	0,115	1,45714	0,001299
129	12	12	0,115	1,48077	0,001320
128	12	13	0,115	1,50980	0,001356
127	12	14	0,115	1,54000	0,001394
126	12	15	0,112	1,57143	0,001397
Mínimo r = 2					0,001244

Tabela 16 - Ajuste do modelo bivariado para o par Renda e Juros.

Ordem de zt fixa (r=2) e ordem de yt variando de 0 até s=12.

n	ordem de yt (s)	ordem de zt (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
139	0	2	1,514	1,04412	0,011373
139	1	2	0,223	1,05926	0,001699
139	2	2	0,187	1,07463	0,001446
138	3	2	0,162	1,09091	0,001281
137	4	2	0,158	1,10769	0,001277
136	5	2	0,158	1,12500	0,001307
135	6	2	0,154	1,14286	0,001304
134	7	2	0,151	1,16129	0,001309
133	8	2	0,150	1,18033	0,001331
132	9	2	0,149	1,20000	0,001355
131	10	2	0,149	1,22034	0,001388
130	11	2	0,146	1,24138	0,001394
129	12	2	0,127	1,26316	0,001244
Mínimo l = 12					0,001244

Tabela 17 - Ajuste do modelo bivariado para o par Juros e Renda.

Variável dependente: z_t (Juros) - AR(2)

Variável independente: y_t (Renda)

n	ordem de z_t (s)	ordem de y_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
140	2	1	796,138	1,05882	6,021212
140	2	2	776,748	1,07407	5,959178
139	2	3	758,351	1,09023	5,948012
138	2	4	741,649	1,10687	5,948617
137	2	5	737,160	1,12403	6,048107
136	2	6	730,101	1,14173	6,129264
135	2	7	686,439	1,16000	5,898291
134	2	8	679,126	1,17886	5,974595
133	2	9	676,293	1,19835	6,093487
132	2	10	674,873	1,21849	6,229729
131	2	11	670,390	1,23932	6,342177
130	2	12	669,996	1,26087	6,498289
Mínimo			r = 7		5,898291

Tabela 18 - Ajuste do modelo bivariado para o par Juros e Renda.

Ordem de y_t fixa (r=7) e ordem de z_t variando de 0 até s=2.

n	ordem de z_t (s)	ordem de y_t (r)	SQR	Cte	FPE(s,r)
135	0	7	870,478	1,12598	7,260330
135	1	7	716,737	1,14286	6,067615
135	2	7	686,439	1,16000	5,898291
Mínimo			l = 2		5,898291

Tabela 19 - Resumo dos resultados do Procedimento de Hsiao.

Pares	V. Controlada (v. dep.)	V. manipulada (v. indep.)	Lag ótimo v. manipulada	Mínimo FPE	Conclusão
(Xt, Yt) Consumo Renda	Consumo AR(15) FPE = 0,001776	Renda	r=3	FPE = 0,001891	Renda não causa Consumo
	Renda AR(12) FPE = 0,001304	Consumo	r=3	FPE = 0,001273	Consumo causa Renda
(Xt, Zt) Consumo Juros	Consumo AR(15) FPE = 0,001776	Juros	r=1	FPE = 0,001801	Juros não causa Consumo
	Juros AR(2) FPE = 5,601367	Consumo	r=1	FPE = 6,004649	Consumo não causa Juros
(Yt, Zt) Renda Juros	Renda AR(12) FPE = 0,001304	Juros	r=2	FPE = 0,001244	Juros causa Renda
	Juros AR(2) FPE = 5,601367	Renda	r=7	FPE = 5,898291	Renda não causa Juros

Tabela 20 - Estimação do modelo multivariado

Matriz	Parâmetros	Estimativas	Desvios Padrões
ϕ^1	ϕ^1_{12}	-0,165	0,049
	ϕ^1_{13}	0,006	0,003
	ϕ^1_{22}	1,048	0,035
	ϕ^1_{23}	0,005	0,002
ϕ^{12}	ϕ^{12}_{11}	-0,446	0,075
	ϕ^{12}_{12}	0,151	0,055
	ϕ^{12}_{22}	-0,088	0,04
	ϕ^{12}_{23}	5,657	2,804
θ^1	θ^1_{11}	0,345	0,086
	θ^1_{13}	0,008	0,003
	θ^1_{22}	0,709	0,075
	θ^1_{32}	12,807	5,383
	θ^1_{33}	-0,464	0,078

Matriz de Covariância dos Erros

0,109574		
0,001713	0,015662	
-0,027529	0,098312	9,054218

Tabela 21 - Testes de Causalidade - Procedimento de Boudjellaba

Hipóteses Nulas (Não causalidade)	Condições de Não causalidade	- 2 log L*	ζ_{LR}	g.l.	$\chi^2 (0,05)$	
(Renda, Juros) $\nrightarrow$ Consumo	$\phi_{12}^1=0, \phi_{12}^{12}=0, \theta_{13}^1=0$ e $\phi_{13}^1=0$	-982,833	16,166	4	9,488	*
	ou $\phi_{12}^1=0, \phi_{12}^{12}=0, \theta_{32}^1=0, \theta_{13}^1=0$ e $\phi_{13}^1=0$	-978,499	20,500	5	11,07	*
Juros $\nrightarrow$ (Consumo, Renda)	$\phi_{23}^1=0, \theta_{33}^1=0$ e $\theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1$	-969,512	29,487	3	7,815	*
(Consumo, Renda) $\nrightarrow$ Juros	$\theta_{32}^1 = 0$	-993,654	5,345	1	3,841	*
Consumo $\nrightarrow$ Renda	p/ quaisquer ϕ 's e θ 's					
Consumo $\nrightarrow$ Juros	p/ quaisquer ϕ 's e θ 's					
Renda $\nrightarrow$ Juros	$\theta_{32}^1 = 0$	-993,654	5,345	1	3,841	*
Renda $\nrightarrow$ Consumo	$\phi_{12}^1=0, \phi_{12}^{12}=0$ e $\theta_{13}^1=0$	-983,150	15,848	3	7,815	*
	ou $\phi_{12}^1=0, \phi_{12}^{12}=0$ e $\theta_{32}^1=0$	-982,256	16,743	3	7,815	*
Juros $\nrightarrow$ Consumo	$\phi_{13}^1=0$ e $\theta_{13}^1=0$	-994,304	4,695	2	5,991	n.s.
	ou $\theta_{33}^1=0, \theta_{13}^1=0$ e $\phi_{13}^1=0$	-967,758	31,240	3	7,815	*
	ou $\theta_{33}^1=0, \theta_{32}^1=0$ e $\theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1$	-967,576	31,423	3	7,815	*
	ou $\theta_{33}^1=0, \phi_{23}^1=0$ e $\theta_{13}^1 = -\phi_{13}^1$	-969,512	29,486	3	7,815	*
Juros $\nrightarrow$ Renda	$\phi_{23}^1 = 0$	-994,247	4,751	1	3,841	*

* signif. ao nível de 5%

Tabela 22 - Resumo dos resultados dos testes de causalidade.

Pares	Procedimentos		
	Pierce & Haugh	Hsiao	Boudjellaba
(Xt, Yt) Consumo Renda	Consumo causa Renda Há C.I. Renda não causa Consumo	Consumo causa Renda Não há C.I. Renda não causa Consumo	Consumo não causa Renda Renda causa Consumo
(Xt, Zt) Consumo Juros	Consumo e Juros são independentes	Consumo e Juros são independentes	Consumo não causa Juros Juros não causa Consumo
(Yt, Zt) Renda Juros	Renda e Juros são independentes	Juros causa Renda Não há C.I. Renda não causa Juros	Juros causa Renda Renda causa Juros Há feedback
			(Renda, Juros) causa Consumo Juros causa (Consumo, Renda) (Consumo, Renda) causa Juros

	1	TO	154
TIME PERIOD ANALYZED	.	.	.
NAME OF THE SERIES	.	.	.
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS	.	.	154
STANDARD DEVIATION OF THE SERIES	.	.	27.1603

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

[illegible]

1	0.67			I	
2	0.61	+		IXX<+XXXXXXXXXXXXX	
3	0.60		+	IXX<+XXXXXXXXXXXXX	
4	0.56		+	IXXXXX+XXXXXXXXXXXX	
5	0.55		+	IXXXXX+XXXXXXXXXXXX	
6	0.45		+	IXXXXXX+XXXXXXX	
7	0.50		+	IXXXXXXXX+XXXXX	
8	0.46		+	IXXXXXXXX+XXXX	
9	0.45		+	IXXXXXXXX+X	
10	0.43		+	IXXXXXXXX+X	
11	0.44		+	IXXXXXXXX+X	
12	0.68		+	IXXXXXXXXXXX+XXXXX	
13	0.39			IXXXXXXXXXXXXXX	
14	0.36		+	IXXXXXXXXXXXXXX	
15	0.34		+	IXXXXXXXXXX +	
16	0.31		+	IXXXXXXXXXX +	
17	0.30		+	IXXXXXXXXXX +	
18	0.21		+	IXXXXXX +	
19	0.25		+	IXXXXXX +	
20	0.22		+	IXXXXXX +	
21	0.22		+	IXXXXXX +	
22	0.19		+	IXXXXXX +	
23	0.20		+	IXXXXXX +	
24	0.42		+	IXXXXXXXXXX +	
25	0.19		+	IXXXXXX +	
26	0.16		+	IXXXXXX +	
27	0.17		+	IXXXXXX +	
28	0.15		+	IXXXXXX +	
29	0.14		+	IXXXXXX +	
30	0.08		+	IXX	
31	0.12		+	IXXX	
32	0.11		+	IXXX	
33	0.10		+	IXX	
34	0.09		+	IXX	
35	0.10		+	IXXX	
36	0.29		+	IXXXXXX +	

[illegible]

Figura 3 - Correlograma e correlograma parcial da 1a. diferença da série log(Consumo) . Saída fornecida pelo programa SCA.

TIME PERIOD ANALYZED	2	TO	154
NAME OF THE SERIES	.	.	DLOGX
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS	.	.	153
STANDARD DEVIATION OF THE SERIES	.	.	0.0715

AUTOCORRELATIONS

1-12	- .40	- .12	.08	-.03	.12	-.25	.14	-.04	.04	-.07	-.31	.74
ST.E.	.08	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.11
Q	24.6	26.7	27.8	27.9	30.3	40.3	43.4	43.7	44.0	44.9	60.8	153
13-24	-.35	-.04	.03	-.03	.12	-.21	.10	-.02	.04	-.09	-.27	.67
ST.E.	.14	.14	.14	.14	.14	.14	.15	.15	.15	.15	.15	.15
Q	174	174	174	175	177	185	187	187	187	189	202	284
25-36	-.30	-.06	.04	-.01	.10	-.19	.09	.01	-.01	-.05	-.24	.59
ST.E.	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.18
Q	301	302	302	302	304	311	313	313	313	313	325	396

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

[illegible]

-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
+-----+

• **H**

-0.40	XXXXXX+XXXX	+
-0.12	+ XXXI	+
0.08	+ IX	+
-0.03	+ XI	+
0.12	+ IXXX	+
-0.25	X+XXXXI	+
0.14	+ IXXX	+
-0.04	+ XI	+
0.04	+ IX	+
-0.07	+ XXI	+
-0.31	XXXX+XXXXI	+
0.74	+ IXXXX+XXXXXXXXXXXX	
-0.35	XX+XXXXXXXXI	+
-0.04	+ XI	+
0.03	+ IX	+
-0.03	+ XI	+
0.12	+ IXXX	+
-0.21	+ XXXXXI	+
0.10	+ IXXX	+
-0.02	+ XI	+
0.04	+ IX	+
-0.09	+ XXI	+
-0.27	XXXXXXXXI	+
0.67	+ IXXXXXX+XXXXXXXXXXXX	
-0.30	XXXXXXXXXXI	+
-0.06	+ XXI	+
0.04	+ IX	+
-0.01	+ I	+
0.10	+ IXX	+
-0.19	+ XXXXXI	+
0.09	+ IXX	+
0.01	+ I	+
-0.01	+ I	+
-0.05	+ XI	+
-0.24	+ XXXXXXI	+
0.59	+ IXXXXXXX+XXXXXXXX	

-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
 +-----+-----+-----+-----+-----+-----+

I

1	-0.40	XXXXXXXXXX	+
2	-0.32	XXXXXXXXXX	+
3	-0.14	XXXXX	+
4	-0.12	+XXXX	+
5	0.09	+ IX	+
6	-0.21	X+XXXX	+
7	-0.04	+ XI	+
8	-0.13	+XXXX	+
9	0.01	+ I	+
10	-0.13	+XXXX	+
11	-0.50	XXXXXXXXXX	+
12	0.51	+ IX	+
13	0.07	+ IX	+
14	0.20	XXXXX	+
15	-0.07	+ XXX	+
16	-0.04	+ XI	+
17	-0.06	+ XXX	+
18	0.03	+ IX	+
19	-0.10	+ XXX	+
20	0.02	+ I	+
21	0.01	+ I	+
22	-0.09	+ XXX	+
23	-0.18	XXXXX	+
24	0.14	+ IX	+
25	0.09	+ XI	+
26	-0.03	+ I	+
27	0.01	+ I	+
28	-0.01	+ I	+
29	0.00	+ I	+
30	-0.01	+ I	+
31	-0.03	+ XI	+
32	0.02	+ I	+
33	-0.07	+ XXX	+
34	0.02	+ I	+
35	-0.09	+ XXX	+
36	0.08	+ IX	+

Figura 5 - Estimação do modelo para a série Consumo
Saída fornecida pelo programa SCA.

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- CONSUMO

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING	
			1 (1-B)	12 (1-B)
LOGX	RANDOM	ORIGINAL		

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAIINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1	TH1	LOGX	MA	1	1	NONE	.1000	
2	TH2	LOGX	MA	2	2	NONE	.1000	
3	TH12	LOGX	MA	3	12	NONE	.1000	

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- CONSUMO

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING	
			1 (1-B)	12 (1-B)
LOGX	RANDOM	ORIGINAL		

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAIINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1	TH1	LOGX	MA	1	1	NONE	.2496	.0846
2	TH2	LOGX	MA	2	2	NONE	.1763	.0858
3	TH12	LOGX	MA	3	12	NONE	.8987	.0472

TOTAL SUM OF SQUARES 0.127325E+01
TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS 154
RESIDUAL SUM OF SQUARES 0.143056E+00
R-SQUARE 0.877
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS 141
RESIDUAL VARIANCE ESTIMATE 0.101458E-02
RESIDUAL STANDARD ERROR 0.318525E-01

Figura 7 - Correlograma e correlograma parcial da série Renda.
Saída fornecida pelo programa SCA.

Figura 8 - Correlograma e correlograma parcial da série log(Renda).
Saída fornecida pelo programa SCA.

TIME PERIOD ANALYZED	1	TO	154
NAME OF THE SERIES	LOGY		
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS . . .	154		
STANDARD DEVIATION OF THE SERIES . . .	0.0632		

AUTOCORRELATIONS									
1- 12	.90	.80	.73	.68	.63	.59	.55	.51	.47
ST.E.	.08	.13	.16	.18	.19	.21	.22	.23	.24
Q	126	226	311	384	448	504	555	598	634
13- 24	.33	.26	.22	.18	.16	.13	.11	.09	.06
ST.E.	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26
Q	747	759	767	773	777	780	783	784	785
25- 36	-.06	-.11	-.12	-.12	-.11	-.13	-.12	-.13	-.10
ST.E.	.26	.26	.26	.26	.26	.27	.27	.27	.27
Q	786	788	791	793	796	799	802	805	809

PARTIAL AUTOCORRELATIONS									
1- 12	.90	-.05	.13	.03	.01	.05	-.00	-.04	-.01
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
13- 24	-.40	.08	-.04	.06	.04	-.11	.08	.01	-.06
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
25- 36	-.19	.01	.13	.02	.01	-.08	.05	-.01	.11
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

I									
1	0.90								
2	-0.05								
3	0.13								
4	0.03								
5	0.01								
6	0.05								
7	0.00								
8	-0.04								
9	-0.01								
10	0.04								
11	0.10								
12	0.01								
13	-0.40								
14	0.08								
15	-0.04								
16	0.06								
17	0.04								
18	-0.11								
19	0.08								
20	0.01								
21	-0.06								
22	0.04								
23	-0.13								
24	0.06								
25	-0.19								
26	0.01								
27	0.13								
28	0.02								
29	0.01								
30	-0.08								
31	0.05								
32	-0.01								
33	0.11								
34	0.03								
35	0.01								
36	0.01								

I									
1	0.90								
2	0.80								
3	0.73								
4	0.68								
5	0.63								
6	0.59								
7	0.55								
8	0.51								
9	0.47								
10	0.44								
11	0.43								
12	0.42								
13	0.33								
14	0.26								
15	0.22								
16	0.18								
17	0.16								
18	0.13								
19	0.11								
20	0.09								
21	0.06								
22	0.04								
23	0.02								
24	0.01								
25	-0.06								
26	-0.11								
27	-0.12								
28	-0.12								
29	-0.11								
30	-0.13								
31	-0.12								
32	-0.13								
33	-0.13								
34	-0.10								
35	-0.09								
36	-0.07								

Figura 9 - Correlograma e correlograma parcial da 1a. diferença da série log(Renda). Saída fornecida pelo programa SCA.

TIME PERIOD ANALYZED	2	TO	154
NAME OF THE SERIES		DLOG	153
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS			
STANDARD DEVIATION OF THE SERIES			0.0284

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.01	-.19	-.07	-.01	-.06	.01	.04	-.01	-.07	-.11	.02	.40
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.09	.09
Q	.0	5.6	6.2	6.3	6.8	6.8	7.1	7.1	7.8	9.8	36.6	
3- 24	-.10	-.12	-.08	-.04	.04	-.05	.01	.05	-.07	.00	-.01	.29
ST.E.	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
Q	38.1	40.4	41.5	41.8	42.1	42.5	42.5	42.9	43.7	43.7	59.5	
5- 36	-.10	-.19	-.09	.03	.08	-.09	.04	-.03	-.09	.01	.02	.25
ST.E.	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11
Q	61.1	67.6	69.2	69.4	70.7	72.3	72.6	72.9	74.5	74.5	86.8	

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

[illegible]

-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
+-----+-----+-----+-----+-----+

1	-0.01		I	
2	-0.19	+ I +		
3	-0.07	X+XXXI +		
4	-0.01	+ XXI +		
5	-0.06	+ XI +		
6	-0.01	+ I +		
7	0.04	+ IX +		
8	-0.01	+ I +		
9	-0.07	+ XXI +		
10	-0.11	+XXXI +		
11	0.02	+ IX +		
12	0.40	+ IXXXX+XXXXXXXX		
13	-0.10	+ XXI +		
14	-0.12	+ XXXI +		
15	-0.08	+ XXI +		
16	-0.04	+ XI +		
17	0.04	+ IX +		
18	-0.05	+ XI +		
19	0.01	+ I +		
20	0.05	+ IX +		
21	-0.07	+ XXI +		
22	0.00	+ I +		
23	-0.01	+ I +		
24	0.29	+ IXXXX+XX		
25	-0.10	+ XXI +		
26	-0.19	XXXXXI +		
27	-0.09	+ XXI +		
28	0.03	+ IX +		
29	0.08	+ IXX +		
30	-0.09	+ XXI +		
31	0.04	+ IX +		
32	-0.03	+ XI +		
33	-0.09	+ XXI +		
34	0.01	+ I +		
35	0.02	+ I +		
36	0.25	+ IXXXX+X		

1	-0.01	I
2	-0.19	+ I +
3	-0.07	X+XXXI +
4	-0.05	+ XXI +
5	-0.09	+ XI +
6	-0.03	+ XXI +
7	0.00	+ I +
8	-0.03	+ XI +
9	-0.07	+ XXI +
10	-0.13	+XXXI +
11	-0.02	+ I +
12	0.37	+ IXXX+XXXXX
13	-0.12	+XXXI +
14	0.00	+ I +
15	-0.10	+ XXI +
16	-0.06	+ XXI +
17	0.08	+ IXK +
18	-0.11	+XXXI +
19	-0.03	+ XI +
20	0.04	+ IX +
21	-0.07	+ XXI +
22	0.11	+ IXXX+
23	-0.09	+ XXI +
24	0.17	+ IXXX
25	-0.04	+ XI +
26	-0.15	+XXXI +
27	-0.27	+ XI +
28	-0.03	+ XI +
29	0.04	+ IX +
30	-0.07	+ XXI +
31	-0.02	+ I +
32	-0.10	+ XXI +
33	-0.05	+ XI +
34	-0.03	+ XI +
35	-0.01	+ I +
36	0.08	+ IXK +

Figura 11 - Estimação do modelo inicial para a série Renda.
Saída fornecida pelo programa SCA.

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- RENDA

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING	
			1 (1-B)	12 (1-B)
LOGY	RANDOM	ORIGINAL		

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAI NT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1	TH12	LOGY	MA	1	12	NONE	.8360	
2	TH26	LOGY	MA	2	26	NONE	.2154	
3	TH5	LOGY	MA	3	5	NONE	.1000	

--

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- RENDA

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING	
			1 (1-B)	12 (1-B)
LOGY	RANDOM	ORIGINAL		

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAI NT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1	TH12	LOGY	MA	1	12	NONE	.8225	.0551 14.93
2	TH26	LOGY	MA	2	26	NONE	.2282	.0861 2.65
3	TH5	LOGY	MA	3	5	NONE	.1808	.0840 2.15

TOTAL SUM OF SQUARES 0.615666E+00
TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS 154
RESIDUAL SUM OF SQUARES 0.837654E-01
R-SQUARE 0.851
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS 141
RESIDUAL VARIANCE ESTIMATE 0.594081E-03
RESIDUAL STANDARD ERROR 0.243738E-01

--

Figura 12 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo ajustado para a série Renda. Saída fornecida pelo programa SCA.

TIME PERIOD ANALYZED	14	TO	154
NAME OF THE SERIES			RES5
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS			141
STANDARD DEVIATION OF THE SERIES			0.0243

AUTOCORRELATIONS

AUTOCORRELATIONS												
1-12	.03	-.16	-.02	-.00	.01	.08	-.01	.03	-.02	-.08	.09	.10
ST.E.	.08	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
Q	.2	3.8	3.8	3.8	3.8	4.9	4.9	5.0	5.1	6.1	7.3	8.8
13-24	-.14	-.02	-.02	-.07	.04	-.00	.00	.11	-.11	.06	.07	-.06
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
Q	12.1	12.2	12.2	13.1	13.4	13.4	13.4	15.4	17.3	17.9	18.7	19.2
25-36	-.11	.00	-.09	.04	.08	-.13	.04	-.02	-.06	.13	.03	-.05
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
Q	21.3	21.4	21.6	21.9	23.0	26.2	26.4	26.5	27.2	30.4	30.6	31.2

-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+

1	0.03	I
2	-0.16	+ IX
3	-0.02	+ XXXXI
4	0.00	+ I
5	0.01	+ I
6	0.08	+ IXX
7	-0.01	+ I
8	0.03	+ IX
9	-0.02	+ XI
10	-0.08	+ XXI
11	0.09	+ IXX
12	0.10	+ IXX
13	-0.14	+ XXXXI
14	-0.02	+ XI
15	-0.02	+ XI
16	-0.07	+ XXI
17	0.04	+ IX
18	0.00	+ I
19	0.00	+ I
20	0.11	+ XXXX
21	-0.11	+ XXXXI
22	0.06	+ IX
23	0.07	+ IXX
24	-0.06	+ XI
25	-0.11	+ XXXXI
26	0.00	+ I
27	-0.04	+ XI
28	0.04	+ IX
29	0.08	+ IXX
30	-0.13	+ XXXXI
31	0.04	+ IX
32	-0.02	+ I
33	-0.06	+ XXI
34	0.13	+ XXXX
35	0.03	+ IX
36	-0.05	+ XI

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

[illegible]

-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
+-----+

1	0.03	I	+
2	-0.16	XXXI	+
3	0.00	I	+
4	-0.03	XI	+
5	0.01	I	+
6	0.08	IXX	+
7	-0.02	I	+
8	0.06	IXX	+
9	-0.03	XI	+
10	-0.07	XI	+
11	0.09	IXX	+
12	0.06	IXX	+
13	-0.13	XXXI	+
14	0.01	I	+
15	-0.06	XI	+
16	-0.07	XI	+
17	0.02	IX	+
18	-0.04	XI	+
19	0.03	IX	+
20	0.10	IXX	+
21	-0.09	XI	+
22	0.12	IXX	+
23	0.00	I	+
24	-0.02	XI	+
25	-0.08	XI	+
26	-0.04	XI	+
27	-0.04	XI	+
28	0.01	I	+
29	0.05	IX	+
30	-0.13	XXXI	+
31	0.06	IXX	+
32	-0.06	XI	+
33	0.00	I	+
34	0.09	IXX	+

Figura 13 - Estimação do modelo para a série Renda
Saída fornecida pelo programa SCA.

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- RENDA

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING	
			1	12
LOGY	RANDOM	ORIGINAL	(1-B)	(1-B)
			1	12
INTER1	BINARY	ORIGINAL	(1-B)	(1-B)

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1 W1	INTER1	NUM.	1	0	NONE	.1000		
2 THETA12	LOGY	MA	1	12	NONE	.1000		

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- RENDA

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING	
			1	12
LOGY	RANDOM	ORIGINAL	(1-B)	(1-B)
			1	12
INTER1	BINARY	ORIGINAL	(1-B)	(1-B)

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1 W1	INTER1	NUM.	1	0	NONE	-.1397	.0206	-6.78
2 THETA12	LOGY	MA	1	12	NONE	.7492	.0603	12.42

TOTAL SUM OF SQUARES 0.615666E+00
TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS 154
RESIDUAL SUM OF SQUARES 0.682806E-01
R-SQUARE 0.879
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS 141
RESIDUAL VARIANCE ESTIMATE 0.484260E-03
RESIDUAL STANDARD ERROR 0.220059E-01

saída fornecida pelo programa SCA.

2.8637

[illegible]

+

www

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

Variable	Mean	SD	Alpha	Reliability
1. 12	36	13	-.01	.03
2. 13	36	13	-.01	.03
3. 14	36	13	-.01	.03
4. 15	36	13	-.01	.03
5. 16	36	13	-.01	.03
6. 17	36	13	-.01	.03
7. 18	36	13	-.01	.03
8. 19	36	13	-.01	.03
9. 20	36	13	-.01	.03
10. 21	36	13	-.01	.03
11. 22	36	13	-.01	.03
12. 23	36	13	-.01	.03
13. 24	36	13	-.01	.03
14. 25	36	13	-.01	.03
15. 26	36	13	-.01	.03
16. 27	36	13	-.01	.03
17. 28	36	13	-.01	.03
18. 29	36	13	-.01	.03
19. 30	36	13	-.01	.03
20. 31	36	13	-.01	.03
21. 32	36	13	-.01	.03
22. 33	36	13	-.01	.03
23. 34	36	13	-.01	.03
24. 35	36	13	-.01	.03
25. 36	36	13	-.01	.03
26. 37	36	13	-.01	.03
27. 38	36	13	-.01	.03
28. 39	36	13	-.01	.03
29. 40	36	13	-.01	.03
30. 41	36	13	-.01	.03
31. 42	36	13	-.01	.03
32. 43	36	13	-.01	.03
33. 44	36	13	-.01	.03
34. 45	36	13	-.01	.03
35. 46	36	13	-.01	.03
36. 47	36	13	-.01	.03
37. 48	36	13	-.01	.03
38. 49	36	13	-.01	.03
39. 50	36	13	-.01	.03
40. 51	36	13	-.01	.03
41. 52	36	13	-.01	.03
42. 53	36	13	-.01	.03
43. 54	36	13	-.01	.03
44. 55	36	13	-.01	.03
45. 56	36	13	-.01	.03
46. 57	36	13	-.01	.03
47. 58	36	13	-.01	.03
48. 59	36	13	-.01	.03
49. 60	36	13	-.01	.03
50. 61	36	13	-.01	.03
51. 62	36	13	-.01	.03
52. 63	36	13	-.01	.03
53. 64	36	13	-.01	.03
54. 65	36	13	-.01	.03
55. 66	36	13	-.01	.03
56. 67	36	13	-.01	.03
57. 68	36	13	-.01	.03
58. 69	36	13	-.01	.03
59. 70	36	13	-.01	.03
60. 71	36	13	-.01	.03
61. 72	36	13	-.01	.03
62. 73	36	13	-.01	.03
63. 74	36	13	-.01	.03
64. 75	36	13	-.01	.03
65. 76	36	13	-.01	.03
66. 77	36	13	-.01	.03
67. 78	36	13	-.01	.03
68. 79	36	13	-.01	.03
69. 80	36	13	-.01	.03
70. 81	36	13	-.01	.03
71. 82	36	13	-.01	.03
72. 83	36	13	-.01	.03
73. 84	36	13	-.01	.03
74. 85	36	13	-.01	.03
75. 86	36	13	-.01	.03
76. 87	36	13	-.01	.03
77. 88	36	13	-.01	.03
78. 89	36	13	-.01	.

1

2 -0.13

Figura 16 - Estimação do modelo inicial para a série Juros.
Saída fornecida pelo programa SCA.

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- JUROS

VARIABLE		TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING				
Z		RANDOM	ORIGINAL	NONE				
PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAIINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1	TH1	Z	MA	1	1	NONE	.1000	
2	TH11	Z	MA	2	11	NONE	.1000	
3	TH23	Z	MA	2	23	NONE	.1000	

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- JUROS

VARIABLE		TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING				
Z		RANDOM	ORIGINAL	NONE				
PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRAIINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1	TH1	Z	MA	1	1	NONE	-.3660	.0754
2	TH11	Z	MA	2	11	NONE	-.2293	.0788
3	TH23	Z	MA	2	23	NONE	.1900	.0816

TOTAL SUM OF SQUARES 0.126294E+04
 TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS 154
 RESIDUAL SUM OF SQUARES 0.105320E+04
 R-SQUARE 0.166
 EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS 154
 RESIDUAL VARIANCE ESTIMATE 0.683899E+01
 RESIDUAL STANDARD ERROR 0.261515E+01

Figura 17 - Correlograma e correlograma parcial dos resíduos do modelo ajustado

TIME PERIOD ANALYZED	1	TO	154
NAME OF THE SERIES	RES		
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS	154		
STANDARD DEVIATION OF THE SERIES	2.5569		

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.00	.08	-.07	.01	.04	-.02	.03	.12	-.01	.01	-.05	.08
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
Q	.0	.9	1.6	1.6	1.9	1.9	2.1	4.3	4.4	4.4	4.8	5.8
13- 24	-.04	-.02	-.00	-.01	.05	-.01	.02	.01	.09	-.04	-.05	-.04
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
Q	6.0	6.1	6.1	6.1	6.5	6.5	6.6	6.6	8.1	8.5	9.1	9.4
25- 36	.12	.06	-.03	-.01	.06	-.04	.03	-.03	.06	.03	-.03	.08
ST.E.	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
Q	12.2	12.9	13.1	13.1	13.9	14.2	14.4	14.5	15.2	15.4	15.6	17.1

1	0.00
2	0.08
3	-0.07
4	0.01
5	0.04
6	-0.02
7	0.03
8	0.12
9	-0.01
10	0.01
11	-0.05
12	0.08
13	-0.04
14	-0.02
15	0.00
16	-0.01
17	0.05
18	-0.01
19	0.02
20	0.01
21	0.09
22	-0.04
23	-0.05
24	-0.04
25	0.12
26	0.06
27	-0.03
28	-0.01
29	0.06
30	-0.04
31	0.03
32	-0.03
33	0.06
34	0.03
35	-0.03

1	0.08	+	IXX	+
2	0.08	+	XXI	+
3	-0.07	+	I	+
4	0.01	+	IX	+
5	0.05	+	XI	+
6	-0.03	+	IX	+
7	0.03	+	IXX	+
8	0.13	+	XI	+
9	-0.02	+	I	+
10	-0.01	+	XI	+
11	-0.03	+	IXX	+
12	0.07	+	XI	+
13	-0.04	+	XI	+
14	-0.03	+	I	+
15	0.01	+	XI	+
16	-0.02	+	IX	+
17	0.04	+	I	+
18	0.00	+	I	+
19	0.02	+	I	+
20	0.00	+	IXX	+
21	0.11	+	XI	+
22	-0.05	+	XXI	+
23	-0.06	+	XI	+
24	-0.03	+	IXX	+
25	0.13	+	IX	+
26	0.05	+	XXI	+
27	-0.06	+	I	+
28	0.00	+	IX	+
29	0.05	+	XI	+
30	-0.04	+	IX	+
31	0.03	+	I	+
32	0.00	+	I	+
33	0.00	+	IX	+
34	0.03	+	I	+
35	-0.01	+	IXX	+
36	0.09	+		

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

1- 12	.00 .08 -.07 .01 .05 -.03 .03 .13 -.02 -.01 -.03 .07
ST.E.	.08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08
13- 24	-.04 -.03 .01 -.02 .04 .00 .02 -.00 .11 -.05 -.06 -.03
ST.E.	.08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08
25- 36	.13 .05 -.06 -.00 .05 -.04 .03 .00 -.00 .03 -.01 .09
ST.E.	.08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08 .08

Figura 18 - Estimação do modelo para a série Juros.
Saída fornecida pelo programa SCA.

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- JUROS

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING
Z	RANDOM	ORIGINAL	NONE
INTER1	BINARY	ORIGINAL	NONE
INTER2	BINARY	ORIGINAL	NONE

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRRAINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1 W1	INTER1	NUM.	1	0	NONE	.1000		
2 W2	INTER2	NUM.	1	0	NONE	.1000		
3 THETA1	Z	MA	1	1	NONE	.1000		
4 THETA11	Z	MA	2	11	NONE	.1000		
5 THETA23	Z	MA	2	23	NONE	.1000		

--

SUMMARY FOR UNIVARIATE TIME SERIES MODEL -- JUROS

VARIABLE	TYPE OF VARIABLE	ORIGINAL OR CENTERED	DIFFERENCING
Z	RANDOM	ORIGINAL	NONE
INTER1	BINARY	ORIGINAL	NONE
INTER2	BINARY	ORIGINAL	NONE

PARAMETER LABEL	VARIABLE NAME	NUM./ DENOM.	FACTOR	ORDER	CONS- TRRAINT	VALUE	STD ERROR	T VALUE
1 W1	INTER1	NUM.	1	0	NONE	5.5319	2.0632	2.68
2 W2	INTER2	NUM.	1	0	NONE	13.4268	1.9533	6.87
3 THETA1	Z	MA	1	1	NONE	-.4397	.0766	-5.74
4 THETA11	Z	MA	2	11	NONE	-.2022	.0797	-2.54
5 THETA23	Z	MA	2	23	NONE	.1999	.0817	2.45

TOTAL SUM OF SQUARES 0.126294E+04
TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS 154
RESIDUAL SUM OF SQUARES 0.783443E+03
R-SQUARE 0.380
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS 154
RESIDUAL VARIANCE ESTIMATE 0.508729E+01
RESIDUAL STANDARD ERROR 0.225550E+01

--

Figura 20 - Correlograma cruzado dos resíduos dos modelos ajustados para Consumo e Renda.
Saída fornecida pelo programa SCA.

CROSS CORRELATION BETWEEN				RES2 (T) AND				RES1 (T-L)				
1- 12	.17	.10	-.10	.11	.06	-.09	-.02	.10	-.01	.03	.04	-.02
ST.E.	.08	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
13- 24	-.07	.02	-.11	.08	.15	-.16	-.01	-.06	-.01	.11	-.06	-.03
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	-.00	-.15	.04	-.02	.10	-.07	-.01	-.00	-.11	-.05	.07	.04
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.10	.10	.10	.10

Figura 21 - Correlograma cruzado dos residuos dos modelos ajustados
para Consumo e Juros.
Saida fornecida pelo programa SCA.

CROSS CORRELATION BETWEEN		RES3(T) AND		RES1(T-L)	
1- 12	.06 -.03 -.00 -.01 -.07 -.02 .19 .11 .06 -.01 .08 -.01				
ST.E.	.08 .08 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09				
13- 24	-.07 -.02 .07 -.02 -.08 .13 .06 -.10 .04 -.06 -.06 -.07				
ST.E.	.09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09 .09				
25- 36	-.08 -.00 -.08 -.01 -.02 -.01 -.01 -.01 .15 .13 .04 .04				
ST.E.	.09 .09 .09 .09 .09 .09 .10 .10 .10 .10 .10 .10

Figura 22 - Correlograma cruzado dos residuos dos modelos ajustados
para Renda e Juros.
Saida fornecida pelo programa SCA.

Figura 23 - Matrizes de correlação cruzada para identificação do modelo trivariado. Saída fornecida pelo programa SCA.

TIME PERIOD ANALYZED 14 TO 141
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS (NOBE) . . . 128

SERIES	NAME	MEAN	STD. ERROR
1	D12X	-0.0002	0.0477
2	YCORR	0.0871	0.0743
3	ZCORR	0.5730	2.8056

SUMMARIES OF CROSS CORRELATION MATRICES USING +,-,., WHERE
+ DENOTES A VALUE GREATER THAN 2/SQRT(NOBE)
- DENOTES A VALUE LESS THAN -2/SQRT(NOBE)
. DENOTES A NON-SIGNIFICANT VALUE BASED ON THE ABOVE CRITERION

BEHAVIOR OF VALUES IN (I,J)TH POSITION OF CROSS CORRELATION MATRIX OVER ALL OUTPUTTED LAGS WHEN SERIES J LEADS SERIES I

	1	2	3
1	--+.+.-		
1	.+.		
2		+++++.	.+++
2		+++++.	
3		. . .+++++. . .	+
3		+++++.	-

CROSS CORRELATION MATRICES IN TERMS OF +,-,.

LAGS 1 THROUGH 6

- . .	- . .	+ . .	. . .	. . .	. . .
. + .	. + +	. + +	. + +	. + .	. + .
. . +	. . .	. . .	. + .	. + .	. + .

LAGS 7 THROUGH 12

. . .	. . .	. . .	+ . .	. . .	- . .
. + .	. + .	. + .	. + .	. + .	. + .
. + .	. + .	. . .	. + .	. + .	. . .

LAGS 13 THROUGH 18

. . .	+ . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. + .	. + .	. + .	. + .	. + .	. + .
. + .	. + .	. + .	. + .	. + .	. + .

LAGS 19 THROUGH 24

. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. + .	. + .	. + .	. + .	. + .	. + .
. + .	. + .	. + .	. + .	. + -	. + .

DETERMINANT OF S(0) = 0.850120E-04

NOTE: S(0) IS THE SAMPLE COVARIANCE MATRIX OF W(MAXLAG+1),...,W(NOBE)

Figura 23 - Matrizes de correlação cruzada para identificação do modelo trivariado. Saída fornecida pelo programa SCA. (Continuação)

```
===== STEPWISE AUTOREGRESSION SUMMARY =====
```

LAG	I RESIDUAL I VARIANCES	I EIGENVAL. I OF SIGMA	I CHI-SQ I TEST	I AIC	I SIGNIFICANCE I OF PARTIAL AR COEFF.
1	.233E-02 .157E-02 .664E+01	.232E-02 .152E-02 .664E+01	133.19	-10.519	. . . + + . . . +
2	.196E-02 .135E-02 .612E+01	.200E-02 .126E-02 .612E+01	42.04	-10.797	- . . . + . . . -
3	.191E-02 .114E-02 .605E+01	.197E-02 .105E-02 .605E+01	20.28	-10.864	. . . + +
4	.189E-02 .109E-02 .561E+01	.195E-02 .102E-02 .561E+01	11.30	-10.843	 + .
5	.183E-02 .107E-02 .552E+01	.189E-02 .998E-03 .552E+01	6.05	-10.768	
6	.181E-02 .105E-02 .537E+01	.188E-02 .977E-03 .537E+01	4.84	-10.683	
7	.180E-02 .101E-02 .508E+01	.186E-02 .943E-03 .508E+01	8.69	-10.644	 + .
8	.179E-02 ***** .497E+01	.185E-02 .940E-03 .497E+01	2.78	-10.537	
9	.176E-02 .946E-03 .481E+01	.179E-02 .906E-03 .481E+01	7.96	-10.496	
10	.167E-02 .934E-03 .469E+01	.170E-02 .898E-03 .469E+01	6.65	-10.442	+
11	.156E-02 .929E-03 .456E+01	.161E-02 .885E-03 .456E+01	7.14	-10.399	
12	.117E-02 .719E-03 .440E+01	.718E-03 .116E-02 .440E+01	40.55	-10.834	- + . . - + . . .

NOTE: CHI-SQUARED CRITICAL VALUES WITH 9 DEGREES OF FREEDOM ARE
5 PERCENT: 16.9 1 PERCENT: 21.7

Figura 24 - Estimação do modelo ARIMA trivariado.
Saída fornecida pelo programa SCA.

SUMMARY FOR MULTIVARIATE ARMA MODEL -- MULTI

PARAMETER	FACTOR	ORDER	CONSTRAINT
1	PH1	REG AR	1
2	PH12	REG AR	12
3	TH1	REG MA	1

--

SUMMARY FOR THE MULTIVARIATE ARMA MODEL

SERIES	NAME	MEAN	STD DEV	DIFFERENCE ORDER(S)
1	D12X	-0.0002	0.0477	
2	YCORR	0.0871	0.0743	
3	ZCORR	0.5730	2.8056	

NUMBER OF OBSERVATIONS = 128 (EFFECTIVE NUMBER = NOBE = 116)

MODEL SPECIFICATION WITH PARAMETER VALUES

PARAMETER NUMBER	PARAMETER DESCRIPTION	PARAMETER VALUE
FIXED	AUTOREGRESSIVE (1, 1, 1)	0.000000
1	AUTOREGRESSIVE (1, 1, 2)	0.100000
2	AUTOREGRESSIVE (1, 1, 3)	0.100000
3	AUTOREGRESSIVE (1, 2, 1)	0.100000
4	AUTOREGRESSIVE (1, 2, 2)	0.100000
5	AUTOREGRESSIVE (1, 2, 3)	0.100000
6	AUTOREGRESSIVE (1, 3, 1)	0.100000
FIXED	AUTOREGRESSIVE (1, 3, 2)	0.000000
FIXED	AUTOREGRESSIVE (1, 3, 3)	0.000000
7	AUTOREGRESSIVE (12, 1, 1)	0.100000
8	AUTOREGRESSIVE (12, 1, 2)	0.100000
9	AUTOREGRESSIVE (12, 1, 3)	0.100000
FIXED	AUTOREGRESSIVE (12, 2, 1)	0.000000
10	AUTOREGRESSIVE (12, 2, 2)	0.100000
FIXED	AUTOREGRESSIVE (12, 2, 3)	0.000000
FIXED	AUTOREGRESSIVE (12, 3, 1)	0.000000
11	AUTOREGRESSIVE (12, 3, 2)	0.100000
12	AUTOREGRESSIVE (12, 3, 3)	0.100000
13	MOVING AVERAGE (1, 1, 1)	0.100000
FIXED	MOVING AVERAGE (1, 1, 2)	0.000000
14	MOVING AVERAGE (1, 1, 3)	0.100000
15	MOVING AVERAGE (1, 2, 1)	0.100000
16	MOVING AVERAGE (1, 2, 2)	0.100000
17	MOVING AVERAGE (1, 2, 3)	0.100000
18	MOVING AVERAGE (1, 3, 1)	0.100000
19	MOVING AVERAGE (1, 3, 2)	0.100000
20	MOVING AVERAGE (1, 3, 3)	0.100000

ERROR COVARIANCE MATRIX

	1	2	3
1	.109574		
2	.001713	.015662	
3	-.027529	.098312	9.054218

Figura 24 - Estimação do modelo ARIMA trivariado. (Continuação)
Saída fornecida pelo programa SCA.

FINAL MODEL SUMMARY WITH MAXIMUM LIKELIHOOD PARAMETER ESTIMATES

----- PHI MATRICES -----

ESTIMATES OF PHI(1) MATRIX AND SIGNIFICANCE

.000	-.165	.006	. - +
.143	1.048	.005	. + +
-9.212	.000	.000	. . .

STANDARD ERRORS

--	.049	.003
.107	.035	.002
6.162	--	--

ESTIMATES OF PHI(12) MATRIX AND SIGNIFICANCE

-.446	.151	-.001	- + .
.000	-.088	.000	. - .
.000	5.657	.084	. + .

STANDARD ERRORS

.075	.055	.001
--	.040	--
--	2.804	.075

----- THETA MATRICES -----

ESTIMATES OF THETA(1) MATRIX AND SIGNIFICANCE

.345	.000	.008	+ . +
-.078	.709	.005	. + .
-11.382	12.807	-.464	. + -

STANDARD ERRORS

.086	--	.003
.104	.075	.003
8.295	5.383	.078

ERROR COVARIANCE MATRIX

	1	2	3
1	.001394		
2	-.000054	.001083	
3	.012333	.013764	6.222954

-2*(LOG LIKELIHOOD AT FINAL ESTIMATES) IS -0.99899846E+03

Figura 25 - Matrizes de correlação dos resíduos do modelo ARIMA trivariado.
Saída fornecida pelo programa SCA.

TIME PERIOD ANALYZED 13 TO 128
EFFECTIVE NUMBER OF OBSERVATIONS (NOBE) . . . 116

SERIES	NAME	MEAN	STD. ERROR
1	R1	0.0014	0.0373
2	R2	0.0052	0.0325
3	R3	0.0740	2.4918

SUMMARIES OF CROSS CORRELATION MATRICES USING +,-,., WHERE
+ DENOTES A VALUE GREATER THAN 2/SQRT(NOBE)
- DENOTES A VALUE LESS THAN -2/SQRT(NOBE)
. DENOTES A NON-SIGNIFICANT VALUE BASED ON THE ABOVE CRITERION

BEHAVIOR OF VALUES IN (I,J)TH POSITION OF CROSS CORRELATION MATRIX OVER
ALL OUTPUTTED LAGS WHEN SERIES J LEADS SERIES I

	1	2	3
1			
1	-		+
2		-	
2		+	+
3		+	
3	+		-

CROSS CORRELATION MATRICES IN TERMS OF +,-,.

LAGS 1 THROUGH 6

...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	..-	...
...	..-	...	...	...	...

LAGS 7 THROUGH 12

...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	..-
..+	...	...	...	...	...

LAGS 13 THROUGH 18

...	...	...	...	...	...
...	..+	...	...	...	...
...	...	...	...	...	..+

LAGS 19 THROUGH 24

..+	...	...	...	...	..-
...	...	...	..+	...	...
...	...	...	...	..-	...

DETERMINANT OF S(0) = 0.102849E-04

NOTE: S(0) IS THE SAMPLE COVARIANCE MATRIX OF W(MAXLAG+1),...,W(NOBE)

Figura 25 - Matrizes de correlação dos resíduos do modelo ARIMA trivariado.
Saída fornecida pelo programa SCA. (Continuação)

STEPWISE AUTOREGRESSION SUMMARY						
LAG	RESIDUAL VARIANCES	EIGENVAL. OF SIGMA	CHI-SQ TEST	AIC	SIGNIFICANCE OF PARTIAL AR COEFF.	
1	.146E-02 .116E-02 .604E+01	.146E-02 .113E-02 .604E+01	3.29	-11.366	I . . . I . . . I . . .	
2	.139E-02 .110E-02 .563E+01	.139E-02 .108E-02 .563E+01	13.86	-11.367	I . . . I . - . I . - .	
3	.133E-02 .105E-02 .560E+01	.134E-02 .102E-02 .560E+01	8.63	-11.313	I . . . I + . . I . . .	
4	.133E-02 .104E-02 .547E+01	.134E-02 .102E-02 .547E+01	2.78	-11.191	I . . . I . . . I . . .	
5	.131E-02 .966E-03 .520E+01	.131E-02 .950E-03 .520E+01	10.68	-11.170	I . . . I . - . I . . .	
6	.125E-02 .949E-03 .508E+01	.125E-02 .935E-03 .508E+01	6.76	-11.104	I . . . I . . . I . . .	
7	.123E-02 .930E-03 .456E+01	.122E-02 .903E-03 .456E+01	12.22	-11.115	I . . . I . . . I . + .	
8	.122E-02 .921E-03 .450E+01	.122E-02 .896E-03 .450E+01	1.68	-10.984	I . . . I . . . I . . .	
9	.122E-02 .868E-03 .434E+01	.121E-02 .845E-03 .434E+01	6.85	-10.930	I . . . I . . - I . . .	
10	.115E-02 .838E-03 .419E+01	.816E-03 .114E-02 .419E+01	8.39	-10.905	I . . . I . . . I . . .	
11	.113E-02 .740E-03 .405E+01	.113E-02 .707E-03 .405E+01	11.54	-10.937	I . . . I . + - I . . .	
12	.110E-02 .667E-03 .379E+01	.645E-03 .109E-02 .379E+01	11.18	-10.973	I . . . I . - . I . . .	
NOTE: CHI-SQUARED CRITICAL VALUES WITH 9 DEGREES OF FREEDOM ARE						
5 PERCENT: 16.9			1 PERCENT: 21.7			

Figura 26 - Correlograma cruzado dos residuos dos modelos apresentados
em (3.10) e (3.7).
Saida fornecida pelo programa SCA.

CROSS CORRELATION BETWEEN					RES2 (T)		AND		RES1 (T-L)				
1- 12	-.17	-.15	.01	-.05	.01	-.00	-.11	-.08	-.06	-.21	-.15	.09	
ST.E.	.09	.09	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	
13- 24	.25	.16	-.15	-.01	.02	-.11	.02	.02	-.02	-.01	.08	.01	
ST.E.	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.11	.11	
25- 36	-.03	.16	.02	.12	-.17	-.05	.10	-.10	.04	-.01	.05	-.09	
ST.E.	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11

Saida fornecida pelo programa SCA.

[illegible]